

Ueber Leibnizens Methode der direkten Differentiation

Beitrag zur Geschichte der Differentialrechnung

I.

In der heutigen Differentialrechnung wird, wie bekannt, das Differential einer Funktion vermittels ihrer Ableitung bestimmt. Es wäre aber nicht unmöglich, den Versuch einer direkten Bestimmung des Differentials zu machen, vermittels der Formel für die Differenz einer Funktion. (1) Zweck dieser Abhandlung ist

(1) Nach der ersten Methode, der Methode der indirekten Differentialbestimmung, ist die Bestimmung der Ableitung die primäre und diejenige des Differentials die sekundäre Operation der Differentialrechnung. Die Ableitung wird darin durch die Formel :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

und das Differential durch die Formel :

$$dy = f'(x) dx$$

definiert.

Nach der zweiten Methode dagegen, der Methode der direkten Differentiation, stellt die Bestimmung des Differentials die primäre und diejenige der Ableitung die sekundäre Operation dar. Das Differential ist in derselben durch die Formel :

$$df(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow dx} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow dx} [f(x + \Delta x) - f(x)]$$

und die Ableitung durch die Formel :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow dx} \Delta f(x)}{\lim_{\Delta x \rightarrow dx} \Delta x} \text{ (für } \Delta x = dx \text{)}$$

zu definieren, wobei Differentiale als Infinitesimalgrößen aufzufassen sind.

Während nach der ersten Methode der Differentialquotient nur ein Symbol für den Grenzwert des Differenzenquotienten sein soll (d.h. $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$), stellt er nach der zweiten Methode den ächten Quotienten der Differentiale $df(x)$ und dx dar.

es zu zeigen, dass der Hauptentdecker der Infinitesimalrechnung, LEIBNIZ selbst, (2) zu den in der ersten von ihm über diese Rechnung publicierten Abhandlung (3) ohne Beweis mitgetheilten Grundformeln der Differentialrechnung vermittels der Methode der direkten Differentiation gelangt ist. Freilich hat er diese Methode nirgends explicite so formuliert wie wir sie in der ersten Anmerkung hier in der modernen mathematischen Zeichensprache formuliert haben, er wendet sie aber thatsächlich an.

2

Dass LEIBNIZ thatsächlich die Methode der direkten Differentiation zur Gewinnung der in seiner ersten Abhandlung ohne Beweis mitgetheilten Grundformeln der Differentialrechnung benutzt hat, für diese Behauptung lassen sich die folgenden vier Gründe anführen :

1. Alle diese Formeln (die LEIBNIZ als „regulae calculi differentialis“ bezeichnet) beziehen sich auf Differentiale;
2. Man kann sie alle durch direkte Differentiation ableiten;
3. Den die Tangente einer Kurve bestimmenden Differentialquotienten fasst LEIBNIZ als ächten Quotienten der Differentiale (dy und dx) auf;
4. In seinem letzten vor der Publikation seiner Abhandlung

(2) Dass LEIBNIZ im Vergleich mit NEWTON und BARROW als Hauptentdecker der Infinitesimalrechnung zu gelten hat, müsste freilich besonders bewiesen werden. Ueber den Unterschied zwischen dem Haupt-, dem Nebenentdecker und dem Vorgänger einer wissenschaftlichen Theorie vergleiche man die Ausführungen des Verfassers in seiner Studie : N. LOBATSCHESKY et J. BOLAYI, Étude comparative d'un cas spécial d'inventeurs simultanés, erschienen in *Revue philosophique*, sept.-oct. 1929 (p. 190-191). Man vergleiche auch seine Bemerkungen darüber in dem Aufsatz : *Charles Darwin und Alfred Russel Wallace*, Beitrag zur höheren Psychologie und zur Wissenschaftsgeschichte, erschienen in „*Isis*,“ vol. VII, 1, 1925 (S. 25).

(3) Diese Abhandlung trägt den Titel : *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* und ist in „*Acta Eruditorum*,“ Lipsiae 1684 erschienen. Dieselbe wurde in *Leibnizens mathematischen Schriften*, hgb. v. C. L. GERHARDT, Bd. V, 1858, S. 220-226, wiederabgedruckt und in deutscher Uebersetzung (in LEIBNIZ, Ueber die Analysis des Unendlichen, hgb. v. G. KOWALEWSKI) in der Sammlung Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften N° 162 (S. 3-11) neben anderen Abhandlungen von LEIBNIZ publiciert. Wir werden sie in folgendem nach der Ausgabe von GERHARDT citieren.

an NEWTON (durch OLDENBURG) gerichteten Briefe aus dem Jahre 1677, in einer einige Jahre später publicierten Abhandlung, sowie in seinen von GERHARDT im XIX-en Jahrhundert publicierten Manuskripten sind fast alle diese Grundformeln ausdrücklich nach der Methode der direkten Differentiation abgeleitet.

Die drei ersten Beweisgründe würden uns nur zur Aufstellung einer wahrscheinlichen historischen Hypothese berechtigen; der vierte erhebt aber diese Hypothese zur unzweifelhaften historischen Wahrheit. Wir wollen nunmehr diese Beweisgründe näher darlegen.

Die in *Nova Methodus* von LEIBNIZ ohne Beweis mitgetheilten Grundformeln sind die folgenden: 1) $da = 0$; 2) $dax = adx$; 3) $d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx$; 4) $dxdv = xdv + vdx$; 5) $d\frac{v}{y} = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$; 6) $dx^a = ax^{a-1} dx$; 7) $d\frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}}$; 8) $d\sqrt[b]{x^a} = dx\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ und 9) $d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = -\frac{adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}$.

Man kann leicht zeigen, dass alle diese Formeln durch direkte Differentiation ableitbar sind. (4)

Dass für LEIBNIZ der Differentialquotient einen ächten Quotienten der Differentiale darstellt, folgt aus seiner Behauptung wonach dy das vierte Glied einer Proportion sein soll, in der die zwei ersten Glieder die Subtangente und die Ordinate sind und das dritte dx . (5)

(4) So lässt sich die Produktformel $dxy = xdy + ydx$ in folgender Weise ableiten. Durch Anwendung der Formel $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ folgt:

$$\Delta(xy) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y,$$

und hieraus (da $dxdy$ als unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung zu veranlässigen ist):

$$dxy = ydx + xdy.$$

In ähnlicher Weise folgt:

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2 + y\Delta y},$$

voraus:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

U. s. w.

(5) Die Ueberlegenheit seiner Methode den früheren gegenüber hervorhebend sagt LEIBNIZ: "Editae vero hactenus methodi talem transitum non habent,

In seinem an NEWTON im Jahre 1677 gerichteten Briefe leitet LEIBNIZ ausdrücklich die Formel $dy^2 = 2ydy$ durch direkte Differentiation ab und bemerkt, dass in derselben Weise auch die Formeln für dxy und dxy^2 ableitbar sind. (6) In demselben Briefe führt dann LEIBNIZ weiter das Beispiel einer impliciten Funktion an, deren Differentialquotienten er bestimmt indem er sie zunächst durch die implicite Anwendung der Formel $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ direkt differentiirt. (7)

adhibent enim plerumque rectam ut DX , vel aliam huiusmodi, non vero rectam dy , quae ipsis DX , DY , dx est quarta proportionalis, quod omnia turbat" (*Nova Methodus*, l.c., S. 223 und fig. 111; vgl. auch Ostwalds Klassiker N° 162, S. 7 und fig. 1; die diesbezügliche Figur Leibnizens ist hier in der Beilage als Fig. 1 reproduciert).

In seinem an NEWTON 1677 gerichteten Briefe ist eine Figur Leibnizens vorhanden in der die Proportionalität von dx und dy (nicht von dy und dx) mit der Ordinate und Subtangente noch deutlicher zum Vorschein kommt (diese Figur ist hier in der Beilage als Fig. 2 reproduciert).

(6) "Nam sint duae proxime sibi (id est differentiam habentes infinite parvam) scilicet y et $y + d\bar{y}$, quoniam ponimus $d\bar{y}^2$ esse differentiam quadratorum ab his duabus, ejus valor erit $y^2 + 2y d\bar{y} + d\bar{y}^2 - y^2$, seu omissis $y^2 - y^2$, quae se destruant, item omisso quadrato quantitatis infinitae parvae, et... erit $d\bar{y}^2 \Pi 2y d\bar{y}$, itemque est de ceteris potentiis. Hinc etiam haberi possunt differentiae quantitatam ex diversis indefinitis in se invicem ductis factorum, ut: $d\bar{y}\bar{x}$ erit $\Pi y d\bar{x} + x d\bar{y}$ et $d\bar{y}^2\bar{x} = 2xy d\bar{y} + y^2 d\bar{x}$." (LEIBNIZENS mathematische Schriften, hgb. v. C. L. GERHARDT, Bd. I, Brief XLII, LEIBNIZ an OLDENBUCK, S. 154),

Wie man sieht, setzt LEIBNIZ in diesem Briefe in dy und dx einen horizontalen Strich über y und x , um Differentiale von den Produkten unterscheiden zu können; bereits in "*Nova Methodus*" that er das nicht mehr. Sowohl in diesem Briefe wie später werden die Zeichen dy und dx sowohl für die Differentiale wie für die endlichen Differenzen gebraucht.

(7) Es ist die Funktion $a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 = 0$. An das Zitat der vorigen Anmerkung direkt anschliessend fährt LEIBNIZ fort: "Hinc si sit aequatio

$a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2$, etc. $\Pi 0$,

statim habetur tangens curvae ad quam est ista aequatio. Nam... in aequatione illa substituendo $y + d\bar{y}$ et $x + d\bar{x}$ fiet:

$a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2$, etc.

$$+ bd\bar{y} + cd\bar{x} + dyd\bar{x} + 2eyd\bar{y} + 2fxdx + 2gxyd\bar{y} + 2xhyd\bar{x} \quad \Pi 0$$

$$+ dxd\bar{y} \qquad \qquad \qquad + gy^2d\bar{x} + hx^2d\bar{y}$$

$$+ dd\bar{x}d\bar{y} + ed\bar{y}|^2 + fd\bar{x}|^2 + gd\bar{y}|^2x + hd\bar{x}|^2y$$

$$+ 2gyd\bar{y}d\bar{x} + 2hxd\bar{x}d\bar{y}$$

ubi abjectis illis quae sunt supra primam lineam quippe nihilo aequalibus per aequationem praecedentem, et abjectis illis quae sunt infra secundam, quia in illis duae indefinitae parvae in se invicem ducuntur, hinc restabit tantum aequatio haec:

In der um das Jahr 1700 publicierten Abhandlung „*Symbolismus memorabilis*“ (8) wird von LEIBNIZ die Produktformel $dx y = y dx + x dy$ ebenfalls durch direkte Differentiation abgeleitet. (9)

$bd\bar{y} + cd\bar{x} + \frac{byd\bar{x}}{bx dy}$ etc. *Πο*, quicquid scilicet reperitur inter lineam primam et secundam, et... fiet

$$-\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \Pi \frac{c + dy + 2 dx + gy^2 + 2 hxy \text{ etc.}}{b + dx + 2 ey + 2 gxy + hx^2 \text{ etc.}}$$

id est $\left(\text{quia } -\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \text{ seu } -\frac{{}_1B_2 B \text{ seu } {}_1CD}{D_2C} \Pi -\frac{T_1B}{{}_1B_1C} \right)$

erit $\frac{c + dy \text{ etc.}}{b + dx \text{ etc.}} \Pi -\frac{T_1B}{{}_1B_1C}$. (a.a.O., S. 154-155 und fig. 27, die hier in der Beilage als Fig. 2 reproduziert ist).

Das komplizierte Beispiel, welches LEIBNIZ zur Ausrechnung des Differentialquotienten in *Nova Methodus* („ut modus superioribus regulis in calculo etiam difficiliore utendi appareret“) anführt (*l.c.*, S. 223), ist wiederum eine implizite Funktion, ihr Differentialquotient wird aber nicht wie oben durch direkte Differentiation sondern durch die Anwendung der Grundformeln abgeleitet.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass MORITZ CANTOR in seinen verdienstvollen „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,“ Bd. III, 2-te Aufl. S. 187-188 zwar den Inhalt der beiden angeführten Stellen aus LEIBNIZENS Briefe an NEWTON im Auszug (zum Beweise der Unabhängigkeit Leibnizens) bringt, dass er aber weder an dieser Stelle noch anderswo in seinem Werke das Specificische der Leibnizischen Differentialmethode hervorhebt.

(8) Der volle Titel der betreffenden Abhandlung lautet: *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum, et de lege homogeneorum transcendentali*. Dieselbe erschien in „*Miscellanea Berolinensis*“ und wurde von GERHARDT in *Leibnizens mathematische Schriften*, Bd. V, S. 377-382 (ohne Angabe der ursprünglichen Jahreszahl) wiederabgedruckt, sowie von KOWALEWSKI in deutscher Uebersetzung in Ostwalds Klassiker, N° 162, S. 65-71.

(9) Nachdem er die allgemeine Binomialformel angeführt, fährt LEIBNIZ fort: „Veniamus jam ad differentiationes... Primum ergo $d(xy) = ydx + xdy$, ut olim docuimus, cum primum multis abhinc annis calculum differentialem proponeremus, ex quo uno fundamento totus reliquus differentiarum calculus demonstrari potest. Ipsum autem fundamentum hic sic ostenditur: $d(xy)$ est differentia inter $(x + dx)$ $(y + dy)$ et xy ,... Est autem $(x + dx)$ $(y + dy) = xy + ydx + xdy + dx dy$ unde si auferas xy , fit $ydx + xdy + dx dy$; sed quia dx vel dy est incomparabiliter minus quam x et y , etiam $dx dy$ erit incomparabiliter minor quam $x dy$ et $y dx$, ideoque rejicitur, tandemque fiet $(y + dx)$ $(y + dy) - xy = ydx + xdy$ (vgl. „*Symbolismus memorabilis*,“ a.a.O. S. 379 und Ostwalds Klassiker, N° 162, S. 67).

Aus diesem Zitat ersieht man, dass LEIBNIZ mehrere Jahre nach der Publikation seiner ersten Abhandlung eine von deren Grundformeln (die er hier für so grundlegend erklärt, dass aus ihr „totus reliquus differentiarum calculus demonstrari potest“) noch immer durch direkte Differentiation ableitet. Es kann also kein Zweifel darüber obwalten, dass er auch alle übrigen Grundformen seiner ersten Abhandlung auf gleichem Wege erhalten hat.

Und schliesslich findet man in den von GERHARDT herausgegebenen Manuskripten noch manche von den neun Grundformeln durch direkte Differentiation abgeleitet. (10)

3

Die Frage, ob die Methode der direkten Differentiation logisch haltbar oder unhaltbar sei (11), ist völlig unabhängig von der rein historischen Frage, ob sich LEIBNIZ bei der Ableitung der ersten in den Grundformeln der *Nova Methodus* vorkommenden Differentiale (12) ihrer bedient habe oder nicht. Während diese

(10) Diese Manuscripte wurden unlängst in englischer Uebersetzung von J. M. CHILD herausgegeben unter dem Titel : *The Early mathematical manuscripts of Leibniz*, Chicago-London, 1920.

In einem von ihnen (undated manuscript, circa 1680) findet man das Differential von $\frac{y}{x}$ durch direkte Differentiation folgendermassen abgeleitet :

“ Here we have

$$d \frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{xx}.$$

For $d \frac{y}{x} = \frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{xx + xdx}$, which becomes (if we write xx for $xx + xdx$, since xdx can be omitted as being infinitely small in comparison with xx) equal to $\frac{xdy - ydx}{xx}$ (l.c., p. 143).

(11) In der That ist sie mit logischen Schwierigkeiten behaftet, die sich schwerlich werden beheben lassen.

Erstens leidet dieselbe an der allgemeinen Schwierigkeit, dass in ihr die Erweiterung des Begriffs der Grenze (vgl. Anmerkung 1) mit dem Princip der (relativen) Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen verknüpft werden muss (vgl. Anm. 6).

Und zweitens treten specielle Schwierigkeiten auf, wenn man dieselbe auf transcendente Funktionen anwenden will (während sie von LEIBNIZ in “*Nova Methodus*” nur auf algebraische Ausdrücke angewandt wurde). So müsste bei der Ableitung des Differentials von $\sin x$ ($d \sin x = \lim \Delta \sin x = \lim [\sin (x + \Delta x) - \sin x] = \lim (\sin x \cos \Delta x) + \lim (\cos x \sin \Delta x) - \sin x = \cos x$) einerseits (in $\sin x \cos dx$) $dx = 0$ und anderseits (in $\cos x \sin dx$) $\sin dx = dx$ gesetzt werden. Noch grössere Schwierigkeiten treten bei der logarithmischen Funktion auf u.s.w.

In dem bekannten Werke von L. CARNOT, *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797 (welches in der Kollektion *Les Maîtres de la pensée scientifique* in zwei Bändchen 1921 wiederabgedruckt wurde) findet sich der Versuch, auch trigonometrische und logarithmisch-exponentiale Funktionen durch direkte Differentiation abzuleiten (t. I, p. 62-63 und p. 70-72 in der Neuauflage). Soviel dem Verfasser dieser Abhandlung bekannt, ist L. CARNOT der einzige Mathematiker der den Versuch gemacht hat, die Methode der direkten Differentiation zur logischen Basis der Differentialrechnung zu erheben.

(12) Bekanntlich hat LEIBNIZ als erster auch die höheren Differentiale in die

Methode heutzutage entweder gar nicht oder ganz vereinzelt und aus rein didaktischen Gründen benutzt wird, war sie, wie sich dies aus unseren Ausführungen unzweifelhaft ergibt, für LEIBNIZ selbst bei der Erfindung seiner Differentialrechnung von grundlegender und ausschliesslicher Bedeutung. (13)

BRAANISLAV PETRONIEVICS.

Differentialrechnung eingeführt. Deren Begriff kommt schon in "*Nova methodus*" vor (wo sie LEIBNIZ zur Bestimmung von Konkavität und Konvexität und von Wendepunkten verwendet), aber erst in "*Symbolismus memorabilis*" kommt die bekannte allgemeine Formel für $d^n(xyz\dots)$ vor.

(13) Auch in dem ersten Lehrbuch der Differentialrechnung, in der 1696 publicierten Analyse des Infiniment Petits des Marquis DE L'HOSPITAL, werden die ersten Differentiale vermittle der direkten Differentiation abgeleitet (in CANTOR's Vorlesungen, Bd. III, S. 245 werden Beispiele aus DE L'HOSPITAL angeführt, an denen das zu ersehen ist). Dasselbe geschieht in der unlängst (1924) in deutscher Uebersetzung von P. SCHAFFHEITLIN herausgegebenen Differentialrechnung von J. BERNOULLI (Ostwalds Klassiker, N° 211), einer Schrift deren ursprüngliches Manuscript nach Herausgeber aus den Jahren 1691/2 stammen und die Marquis DE L'HOSPITAL bei der Abfassung seines Buches benutzt haben soll (a.a.O., Vorwort, S. 1-10).

BEILAGE

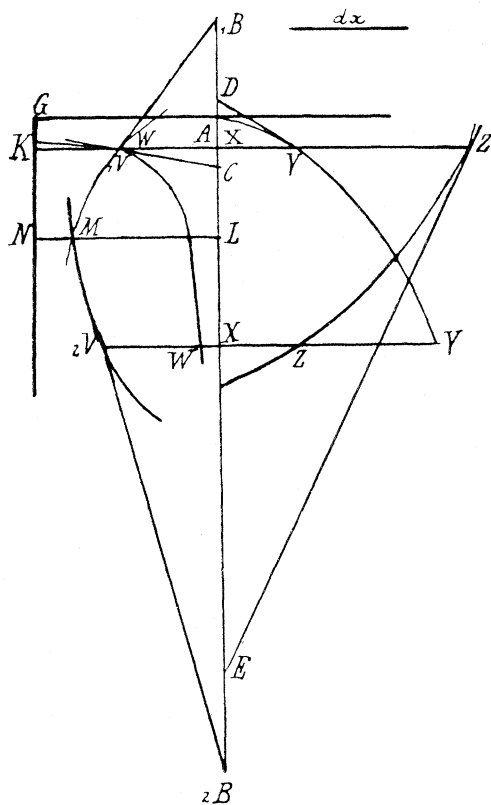


FIG. 1

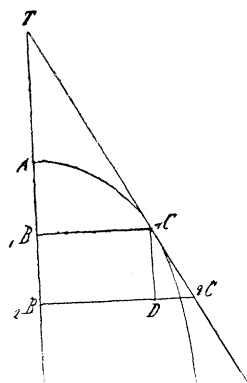


FIG. 2

FIG. 1. — In dieser Figur stellt AX die Abscissenaxe dar, VX (resp. $_1VX$, $_2VX$), WX , YX , ZX sind die Ordinaten der Kurven VV , WW , YY , ZZ und VB , WC , YD , ZE deren Tangenten.

Dies ist die erste der drei Figuren in Leibnizens Abhandlung "*Nova Methodus*," erschienen in *Acta Eruditorum*, 1684.

FIG. 2. — In dieser Figur stellt T_1C die Tangente der Kurve A_1C im Punkte $_1C$, T_1B ist die Subtangente und $_1B_1C$ die Ordinate, $_1B_2B^* = D_1C = dy$, $D_2C = dx$.

Dies ist die erste der in dem Briefe Leibnizens an NEWTON aus dem Jahre 1677 enthaltenen Figuren.