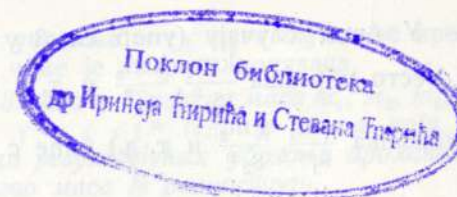


Др. БРАН. ПЕТРОНИЈЕВИЋ

НЕКОЛИКЕ ТЕОРЕМЕ У ПРОБЛЕМУ ТРИЈУ ТЕЛА

Прештампано из Гласника Југословенског професорског друштва, књ. XVI, св. 3.

БЕОГРАД, 1935



Неколике теореме у проблему трију тела

На основу доказа за теореме изнете у чланку „Елементарно решење два позната случаја проблема три тела“ штампаном у јунској свесци „Гласника југословенског професорског друштва“ од ове године, другом писцу тога чланка испало је за руком, да докаже још неке теореме које су од општег значаја у проблему три тела.

Теореме

1. Ако се три масе m_1, m_2, m_3 , које се привлаче по закону привлачења $\gamma = \chi \cdot r^n$ (где је n ма који позиитиван или негативан цео број, а χ константа која одговара гравитационој константи Њутоновог закона), налазе на шеменима троугла, правци њихових резултујућих убрзања сећи ће се у једној тачци у унутрашњости троугла.

Доказ. — Разликоваћемо два случаја, случај кад је n позитиван и случај кад је n негативан број.

Први случај. — У овом случају (упор. сл. 3 у наведеном чланку, у којој место убрзања $\frac{km_1}{s_1^2}, \frac{km_2}{s_2^2}$ и т. д. треба ставити одговарајућа убрзања $\chi m_1 s_1^n, \chi m_2 s_2^n$ и т. д.) биће с једне стране:

$$\chi m_1 s_1^n \cdot h_1 = \chi m_3 s_3^n \cdot h_2,$$

а с друге:

$$\chi m_2 s_3^n \cdot h_2 = \chi m_1 s_2^n \cdot h_3,$$

одакле множењем следује:

$$\chi m_2 s_1^n \cdot h_1 = \chi m_3 s_2^n \cdot h_3,$$

а одавде (на основу друге помоћне теореме у доказу прве теореме поменутог чланка) истинитост теореме за овај случај.

Други случај. — У овом случају (упор. сл. 3 у наведеном чланку, у којој место убрзања $\frac{km_1}{s_1^2}$, $\frac{km_2}{s_2^2}$ и т. д. треба ставити одговарајућа убрзања $\frac{\chi m_1}{s_1^n}$, $\frac{\chi m_2}{s_2^n}$ и т. д.) биће с једне стране:

$$\frac{\chi m_1}{s_1^n} \cdot h_1 = \frac{\chi m_3}{s_3^n} \cdot h_2,$$

а с друге:

$$\frac{\chi m_2}{s_3^n} \cdot h_2 = \frac{\chi m_1}{s_2^n} \cdot h_2,$$

одакле множењем следује:

$$\frac{\chi m_2}{s_1^n} \cdot h_1 = \frac{\chi m_2}{s_2^n} \cdot h_3,$$

а одавде (на исти начин као у првом случају) истинитост теореме и за овај случај.

Напомена. Првој теореме поменутог чланка дао је још општији облик г. проф. В. Жардечки у свом чланку „Поводом једне теореме која се јавља у проблему три тела“, штампаном у „Гласнику“ за Септембар ове год., доказавши на духовит начин, да теорема важи и кад на масе дејствују макакве „силе привлачења и одбијања дуж страна троугла а у сагласности са принципом једнакости акције и реакције“.

2. У троуглу маса m_1 , m_2 , m_3 , које се привлаче по закону $\gamma = \chi \cdot r$, тачка пресека праваца резултујућих убрзања падаће у средиште маса.

Доказ. — У овом случају (упор. сл. 4 поменутог чланка, у којој место убрзања $\frac{km_2}{s_1^2}$ и $\frac{km_3}{s_2^2}$ треба ставити убрзања $\chi m_2 s_1$ и $\chi m_3 s_2$) биће с једне стране:

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\chi m_3 s_2}{\chi m_2 s_1} = \frac{m_3 s_2}{m_2 s_1},$$

а с друге:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{p \cdot \sin A_2}{q \cdot \sin A_3} = \frac{m_3 s_2}{m_2 s_1},$$

одакле следује:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2},$$

а одавде (пошто је $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ — упор. доказ треће теореме у наведеном чланку и одговарајућу примедбу):

$$\alpha_1 = \beta_1 \text{ и } \alpha_2 = \beta_2,$$

т. ј. следује, да ће се правац резултујућег убрзања масе m_1 поклопити са правцем трансверзале d_1 и пролазити кроз средиште маса. На сличан начин следоваће и за правце резулту-

јућих убрзања маса m_2 и m_3 да ће пролазити кроз средиште маса, чиме је теорема доказана.

3. Ако у троуглу маса m_1 , m_2 , m_3 , које се привлаче по закону $\gamma = \chi \cdot r^n$ (где је n ма који цео број сем јединице) правац резултујућих убрзања пролазе кроз средиште маса, троугао маса је равностран.

Доказ. — Разликоваћемо два случаја, случај кад је n позитиван цео број сем јединице и случај кад је n негативан цео број.

Први случај. У овоме случају (упор. сл. 4 наведеног чланка, у којој место убрзања $\frac{km_2}{s_1^2}$ и $\frac{km_3}{s_2^2}$ треба ставити убрзања $\chi m_2 s_1^n$ и $\chi m_3 s_2^n$) биће с једне стране:

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\chi m_3 s_2^n}{\chi m_2 s_1^n} = \frac{m_3 s_2^n}{m_2 s_1^n},$$

а с друге:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{p \cdot \sin A_2}{q \cdot \sin A_3} = \frac{m_3 s_2}{m_2 s_1}.$$

Ако се (за $n > 1$) претпостави да је

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$$

(т. ј. претпостави да правац убрзања масе m_1 пролази кроз средиште маса) биће:

$$\frac{s_2^n}{s_1^n} = \frac{s_2}{s_1} \text{ одн. } \frac{s_2^{n-1}}{s_1^{n-1}} = 1,$$

одакле следује $s_2 = s_1$.

На сличан начин следоваће да је и $s_3 = s_1$, чиме је теорема у овом случају доказана.

Други случај. — У овом случају (при чему у сл. 4 наведеног чланка треба место убрзања $\frac{km_2}{s_1^2}$ и $\frac{km_3}{s_2^2}$ ставити у-

брзања $\frac{\chi m_2}{s_1^n}$ и $\frac{\chi m_3}{s_2^n}$) биће с једне стране:

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\chi m_3 \cdot \chi m_2}{s_2^n \cdot s_1^n} = \frac{m_3 s_1^n}{m_2 s_2^n}.$$

а с друге:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{p \cdot \sin A_2}{q \cdot \sin A_3} = \frac{m_3 s_2}{m_1 s_1}.$$

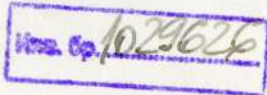
Ако се претпостави да је:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$$

биће:

$$\frac{s_1^n}{s_2^n} = \frac{s_2}{s_1} \text{ одн. } s_1^{n+1} = s_2^{n+1},$$

одакле следује $s_1 = s_2$.



На сличан начин следоваће $s_1 = s_3$, чиме је теорема и у овом случају доказана.

4. Ако је *шроугао* маса m_1, m_2, m_3 , које се *привлаче по закону* $\gamma = \chi \cdot r^n$ (где је n *макоји позиџиван или негатиџиван цео број*), *равносиџран*, *прати резулџујуџих убрзања пролазиће кроз средишџте маса*.

Доказ. — Кад се у сл. 4 наведеног чланка место убрзања $\frac{km_2}{s_1^2}$ и $\frac{km_3}{s_2^2}$ ставе убрзања која одговарају закону $\gamma = \chi \cdot r^n$, доказ ове теореме биће индентичан са доказом треће теореме тога чланка.

5. У *равнокраком шроуглу* маса m_1, m_2, m_3 , које се *привлаче по закону* $\gamma = \chi \cdot r^n$ (где n *може биџи сваки позиџиван или негатиџиван цео број*), *шрансверзала*, која *полази из штемена једнаких сиџрана*, *пролази кроз средишџте маса* и на њој се налази *тачка пресека праџаца резулџујуџих убрзања*.

Доказ. — На основу доказа претходне теореме (одн. доказа треће теореме у наведеном чланку) биће, ако је $s_1 = s_2$, $\alpha_1 = \beta_1$, и $\alpha_2 = \beta_2$ (упор. сл. 4 наведеног чланка) и *трансверзала* масе m_1 *пролазиће кроз средишџте маса*. Како се (према првој теорему) на свакој од три *трансверзале* налази *тачка пресека резулџујуџих убрзања*, она ће се налазити и на *трансверзали* масе m_1 , чиме је теорема доказана.