

Beitrag zur elementaren Lösung der zwei speziellen Fälle des Dreikörperproblems.

Von A. Bilimovitch und B. Petronievics.

Einleitende Vorbemerkung. Es läßt sich, wie bekannt, das Dreikörperproblem exakt in endlich-geschlossener Form nur lösen in den zwei folgenden speziellen Fällen: 1. wenn die drei Massenpunkte auf einer Geraden, und 2. wenn sie in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen. Der erste Fall wurde zuerst von *Euler*¹⁾ und bald darauf auch von *Lagrange*²⁾ entdeckt. In derselben Abhandlung entdeckte *Lagrange* auch den zweiten Fall. Die Lösung wurde von beiden Forschern auf dem Wege der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung bewerkstelligt, indem sie die relative Bewegung zweier Massen um die dritte untersuchten. Eine erheblich einfachere Lösung der beiden Fälle, bei Annahme absoluter Bewegung der drei Massen um den gemeinsamen Massenmittelpunkt, gab *Laplace*³⁾, wiederum vermittelt analytischer Geometrie, aber ohne Infinitesimalrechnung. Spätere Forscher, insbesondere *Hargreave*⁴⁾ und *Delaunay*⁵⁾, haben eine noch einfachere Lösung der beiden Fälle ermöglicht durch den Nachweis des wichtigen Satzes, daß sich die Richtungen der drei resultierenden Kräfte stets innerhalb des Massendreiecks in einem gemeinsamen Punkte schneiden, diesen Nachweis führten sie aber ebenfalls auf analytischem Wege. Eine elementar-geometrische Lösung der beiden Fälle, bei Annahme relativer Bewegung, gab zuerst *Tscherny*⁶⁾. Schließlich hat *Milankovitch* in seiner unlängst publizierten »Himmelsmechanik« auf Grund des *Hargreave-Delaunayschen* Satzes eine vollständige Lösung der beiden Fälle bei Annahme absoluter Bewegung auf vektoriell-Wege bewerkstelligt⁷⁾.

Unser Aufsatz stellt sich zur Aufgabe, eine elementar-geometrische Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln zu liefern, die eine vollständige elementare Lösung der beiden Fälle bei Annahme absoluter Bewegung der drei Massenpunkte um den gemeinsamen Massenmittelpunkt ermöglichen. Daß eine solche elementare Ableitung möglicherweise bestehe, war eine vom zweiten Verfasser seit langem gehegte Vermutung. Und er legte darob dem ersten Verfasser eine Anzahl bestimmt formulierter Sätze vor mit der Bitte, eine elementar-geometrische Ableitung derselben zu versuchen, was diesem bald gelang. Auf Grund der dabei erzielten Resultate gelang es dann auch dem zweiten Verfasser, einige Sätze und Formeln selbständig abzuleiten. — In dem Aufsätze selbst stammen die Beweise des ersten, zweiten und

vierten Lehrsatzes, sowie die zweite kurze Ableitung im fünften von dem ersten, die Beweise des dritten (die Anmerkung ausgenommen) und des sechsten, sowie die erste Ableitung im fünften vom zweiten Verfasser her. Der Aufsatz wurde vom letzteren verfaßt, der erste Verfasser hat ihn aber aufmerksam durchgelesen und stellenweise ergänzt.

Lehrsatz 1. Befinden sich drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 , die sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, in den Ecken eines Dreiecks, so schneiden sich die Richtungen der drei resultierenden Beschleunigungen in einem Punkte innerhalb des Dreiecks.

Beweis. Es sind zunächst die folgenden zwei Hilfssätze zu beweisen:

1. Für zwei Beschleunigungen eines Massenpunktes sind die Produkte aus denselben und den auf ihre Richtungen von einem beliebigen auf der Richtung ihrer resultierenden Beschleunigung gelegenen Punkte gefällten Senkrechten einander gleich.

2. Wenn für zwei Beschleunigungen eines Massenpunktes die Produkte aus denselben und den auf ihren Richtungen errichteten Senkrechten einander gleich sind, dann muß der Schnittpunkt dieser Senkrechten auf der Richtung der resultierenden Beschleunigung liegen.

Der Beweis für den ersten Hilfssatz ist folgendermaßen zu führen.

Stellen die Strecken a und b ihrer Länge und ihrer Richtung nach die zwei Beschleunigungen des Massenpunktes m dar (vgl. Fig. 1), so wird man (auf Grund der Flächengleichheit der entsprechenden Dreiecke im Beschleunigungsparallelogramm) haben:

$$a h_1 = b h_2$$

$$\text{oder} \quad a/b = h_2/h_1.$$

Aus der Figur folgen weiter die Identitäten:

$$h_1'/h_1 = h_2'/h_2 \quad \text{oder} \quad h_2/h_1 = h_2'/h_1'$$

und hieraus und aus der vorhergehenden Identität:

$$a/b = h_2'/h_1' \quad \text{und} \quad a h_1' = b h_2'$$

womit der Satz bewiesen ist.

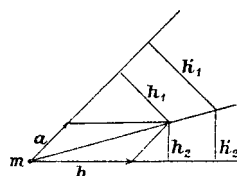


Fig. 1.

¹⁾ L. Euler. Considérations sur le problème des trois corps, Histoire de l'Académie, Berlin 1770.

²⁾ J. L. Lagrange. Essai sur le problème des trois corps, Prix de l'Académie Paris 9, 1772 [wieder abgedruckt in »Oeuvres de Lagrange«, 6 (1873)].

³⁾ P. S. Laplace. Traité de Mécanique céleste 4, Paris 1805 (Kapitel »Sur quelques cas où l'on peut rigoureusement obtenir le mouvement d'un système de corps qui s'attirent«).

⁴⁾ Ch. J. Hargreave. On the problem of three bodies, »Proceed. Royal Society« 9 (1859).

⁵⁾ N. Delaunay. Sur le problème de trois corps, in »Verhandl. d. 3. internat. Math.-Kongresses«, Heidelberg 1905.

⁶⁾ S. Tscherny. Geometrische Lösung zweier spezieller Fälle des Problems der drei Körper, AN 171.129, 349 (1906).

⁷⁾ M. Milankovitch. Himmelsmechanik, Beograd, 1935 (serbisch). Bereits in einem im »Glas srpske kraljevske Akademije« 1911 serbisch erschienenen Aufsätze hatte Milankovitch den Hargreave-Delaunayschen Satz selbständig entdeckt und vektoriell bewiesen.

Der Beweis des zweiten Hilfssatzes (der Umkehrung des ersten) lautet folgendermaßen.

Nehmen wir an, daß, beim Bestehen der Identität $ah_1' = bh_2'$, der Schnittpunkt der Senkrechten h_1' und h_2' nicht auf der Richtung der resultierenden Beschleunigung liege (vgl. Fig. 2). Ziehen wir dann von diesem Schnittpunkt eine Parallele zu der Beschleunigungsrichtung a und fällen vom Schnittpunkte dieser Parallelen mit der resultierenden Beschleunigungsrichtung die Senkrechte h_1 , so wird $h_1 = h_1'$ sein. Wird weiter auch die Senkrechte h_2 auf die Beschleunigungsrichtung b gefällt, dann wird man auf Grund des ersten Hilfssatzes haben:

$$ah_1 = bh_2.$$

Da aber der Voraussetzung gemäß $ah_1' = bh_2'$, so wird somit auch $h_2 = h_2'$ sein. Die letztere Identität kann aber statthaben, nur wenn h_2' mit h_2 zusammenfällt (wobei selbstverständlich auch h_1' mit h_1 zusammenfallen muß). Es muß also der Schnittpunkt der Senkrechten h_1' und h_2' auf der resultierenden Beschleunigungsrichtung liegen, was zu beweisen war.

Es läßt sich nunmehr der Beweis des Lehrsatzes selbst leicht führen.

Bezeichnen wir die drei Seiten des Massendreiecks (vgl. Fig. 3) mit s_1, s_2 und s_3 . Dann werden

km_2/s_1^2 und km_3/s_2^2 die Beschleunigungen des Massenpunktes m_1 sein, km_1/s_1^2 und km_3/s_2^2 des Massenpunktes m_2 und km_1/s_2^2 und km_2/s_3^2 des Massenpunktes m_3 . Wenn wir nunmehr vom Schnittpunkte der resultierenden Beschleunigungsrichtungen der Massenpunkte m_2 und m_3 (der offenbar innerhalb des Dreiecks liegt) auf die Seiten s_1, s_3, s_2 die Senkrechten h_1, h_2, h_3 fällen, dann wird man, auf Grund des ersten Hilfssatzes, einerseits haben:

$$\frac{km_1}{s_1^2} h_1 = \frac{km_3}{s_2^2} h_2$$

und andererseits:

$$\frac{km_2}{s_3^2} h_2 = \frac{km_1}{s_2^2} h_3.$$

Werden die entsprechenden Seiten dieser Identitäten miteinander multipliziert, so bekommt man:

$$\frac{km_2}{s_1^2} h_1 = \frac{km_3}{s_2^2} h_3.$$

Aus der letzteren Identität folgt aber, auf Grund des zweiten Hilfssatzes, daß die resultierende Beschleunigungsrichtung des Massenpunktes m_1 durch den Schnittpunkt der resultierenden Beschleunigungsrichtungen der Massenpunkte m_2 und m_3 hindurchgehen muß, womit der Lehrsatz bewiesen ist.

Lehrsatz 2. Wenn im Dreieck der Massenpunkte m_1, m_2 und m_3 , die sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, der Schnittpunkt der drei resultierenden Beschleunigungsrichtungen mit dem gemeinsamen Massenmittelpunkt zusammenfällt, so ist das Massendreieck ein gleichseitiges.

Beweis. Ziehen wir vom Eckpunkt m_1 die Transversale d_1 so, daß sie durch den Massenmittelpunkt C hindurchgeht

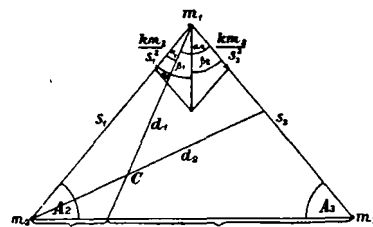


Fig. 4.

(vgl. Fig. 4). Nehmen wir zunächst an, daß die Richtung der resultierenden Beschleunigung der Masse m_1 mit der Richtung der Transversale d_1 nicht zusammenfällt, und bezeichnen wir dabei mit α_1 und α_2 die beiden Winkel, die die Transversale mit den Seiten

s_1 und s_2 , mit β_1 und β_2 die Winkel, die die Beschleunigungsrichtung der Masse m_1 mit diesen Seiten bildet, während p die Entfernung des Schnittpunkts von d_1 und s_3 von der Masse m_2 , q die Entfernung desselben Schnittpunkts von der Masse m_3 bezeichnet (wobei dieser Schnittpunkt den Mittelpunkt der beiden Massen m_2 und m_3 darstellt).

Dann wird aus der Figur einerseits folgen:

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{km_2}{s_2^2} : \frac{km_3}{s_1^2} = \frac{m_3 s_1^2}{m_2 s_2^2}$$

und andererseits erstens:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin A_2} = \frac{p}{d_1} \quad \text{und} \quad \frac{\sin \alpha_2}{\sin A_3} = \frac{q}{d_1}$$

dann hieraus zweitens:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{\sin A_2}{\sin A_3}$$

und schließlich (da $\sin A_2/\sin A_3 = s_2/s_1$ und $p/q = m_3/m_2$):

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{m_3 s_2}{m_2 s_1}.$$

Setzen wir nunmehr (der Forderung des Lehrsatzes gemäß) $\alpha_1 = \beta_1$ (d. h. setzen wir voraus, die resultierende Beschleunigungsrichtung der Masse m_1 falle mit der Transversale d_1 zusammen), dann wird (da $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$) auch $\alpha_2 = \beta_2$ sein, und demgemäß:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \quad \text{und} \quad \frac{m_3 s_1^2}{m_2 s_2^2} = \frac{m_3 s_2}{m_2 s_1}.$$

Aus der letzten Identität folgt aber $s_1^2/s_2^2 = s_2/s_1$, d. h. $s_1^3 = s_2^3$, und hieraus $s_1 = s_2$. In ähnlicher Weise wird man, durch Ziehen der Transversale d_2 , schließen, daß $s_1 = s_3$.

Es ist somit $s_1 = s_2 = s_3$, womit der Lehrsatz bewiesen ist.

Lehrsatz 3. Ist das Dreieck der drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 , die sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, ein gleichseitiges, so müssen die drei resultierenden Beschleunigungsrichtungen durch den gemeinsamen Massenmittelpunkt gehen.

Beweis. Ist $s_1 = s_2$ (Fig. 4), dann wird $\sin A_2 = \sin A_3$ sein und wir werden einerseits haben:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{p}{q} = \frac{m_3}{m_2}$$

und andererseits: $\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{m_3}{m_2}$

woraus folgt: $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}$

und hieraus (da $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$):

$$\alpha_1 = \beta_1 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \beta_2 \quad ^1)$$

Es wird somit, wenn $s_1 = s_2$ ist, die resultierende Beschleunigungsrichtung der Masse m_1 mit der Transversale d_1 zusammenfallen und durch den Massenmittelpunkt hindurchgehen. In ähnlicher Weise wird aus den Voraussetzungen $s_2 = s_3$ und $s_1 = s_3$ folgen, daß auch die zwei übrigen Beschleunigungsrichtungen durch den Massenmittelpunkt hindurchgehen werden, womit der Lehrsatz bewiesen ist.

Lehrsatz 4. Ist das Dreieck der drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 , die sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, ein gleichseitiges, dann ist die Größe seiner Seite $s_1 (= s_2 = s_3 = s)$ durch die Formel bestimmt:

$$s_1 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) r_1}{\sqrt{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)}}.$$

Beweis. Ziehen wir in dem gleichseitigen Massendreieck die durch den Massenmittelpunkt hindurchgehende Transversale d_1 (vgl. Fig. 5), so wird (der Definition des Massenmittelpunktes gemäß) diese Transversale die Seite s_3 im Mittelpunkt der beiden Massen m_2 und m_3 treffen. Dann folgt aus den Gleichungen:

$$m_2 p = m_3 q \quad \text{bzw.} \quad p : q = m_3 : m_2$$

$$p : (p + q) = m_3 : (m_2 + m_3)$$

die Gleichung:

$$p = \frac{s_3 m_3}{m_2 + m_3}.$$

Und in ähnlicher Weise:

$$q = \frac{s_3 m_2}{m_2 + m_3}.$$

Es wird weiter aus

$$m_1 r_1 = (m_2 + m_3) \rho_1$$

$$r_1 : \rho_1 = (m_2 + m_3) : m_1$$

folgen:

$$r_1 : d_1 = (m_2 + m_3) : (m_1 + m_2 + m_3)$$

¹⁾ Daß aus den beiden Voraussetzungen:

$$\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = \sin \beta_1 / \sin \beta_2 \quad \text{und} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$$

die Identitäten $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 = \beta_2$ folgen, läßt sich folgendermaßen beweisen. Aus der ersten Voraussetzung folgt:

$$\frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1 - \sin \beta_2}{\sin \beta_1 + \sin \beta_2}$$

und hieraus (durch Anwendung der Formeln für die Summe und Differenz der sin zweier Winkel):

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) \cos \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)}{2 \cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) \sin \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) \cos \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)}{\cos \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) \sin \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)}.$$

Da aber $\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin(\beta_1 + \beta_2)$ und $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos(\beta_1 + \beta_2)$, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)$$

und hieraus (da die Winkel im ersten Quadranten liegen):

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2.$$

Schließlich ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$$

die beiden Identitäten:

$$\alpha_1 = \beta_1 \quad \alpha_2 = \beta_2.$$

und hieraus:

$$d_1 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) r_1}{m_2 + m_3}.$$

Da $s_3 = s_1$, so wird andererseits

$$\begin{aligned} d_1^2 &= s_1^2 + p^2 - 2 s_1 p \cos 60^\circ = s_1^2 + p^2 - s_1 p = \\ &= s_1^2 \left(1 + \frac{p^2}{s_1^2} - \frac{p}{s_1} \right) = s_1^2 \frac{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}{(m_2 + m_3)^2} \end{aligned}$$

sein. Wird in der Formel

$$d_1 = s_1 \frac{\sqrt{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)}}{m_2 + m_3}$$

der obige Wert von d_1 eingesetzt, so entsteht schließlich die gesuchte Formel:

$$s_1 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) r_1}{\sqrt{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)}}.$$

In ähnlicher Weise entstehen die Formeln:

$$s_2 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) r_2}{\sqrt{(m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2)}}$$

$$s_3 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) r_3}{\sqrt{(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)}}.$$

Lehrsatz 5. Ist das Dreieck der drei Massenpunkte m_1, m_2, m_3 , die sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, ein gleichseitiges, dann gilt für die resultierende Beschleunigung γr_1 die Formel:

$$\gamma r_1 = k \frac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{1/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}.$$

Erste Ableitung. Der allgemeinen für das allgemeine Massendreieck geltenden Formel für die resultierende Beschleunigung der Masse m_1 in der Richtung r_1 gemäß (Fig. 3)

$$\gamma r_1 = k \frac{m_2}{s_1^2} \cos(s_1, r_1) + k \frac{m_3}{s_2^2} \cos(s_2, r_1)$$

wird, da $s_2 = s_1$ (Fig. 5),

$$\gamma r_1 = \frac{k}{s_1^2} [m_2 \cos(s_1, r_1) + m_3 \cos(s_2, r_1)]$$

sein. Werden in die letzte Formel die Werte

$$\cos(s_1, r_1) = \frac{s_1^2 + d_1^2 - p^2}{2 s_1 d_1} \quad \text{und} \quad \cos(s_2, r_1) = \frac{s_1^2 + d_1^2 - q^2}{2 s_1 d_1}$$

eingesetzt, so wird

$$\gamma r_1 = \frac{k}{2 s_1^3 d_1} [m_2 (s_1^2 + d_1^2 - p^2) + m_3 (s_1^2 + d_1^2 - q^2)]$$

und hieraus:

$$\gamma r_1 = \frac{k}{2s_1^3 d_1} [(s_1^2 + d_1^2)(m_2 + m_3) - m_2 p^2 - m_3 q^2]$$

sein. Werden in diese Formel für s_1 , d_1 , p und q ihre früher gefundenen Werte eingesetzt und $m_1 + m_2 + m_3 = M$ gesetzt, so wird

$$\gamma r_1 = \frac{k}{2s_1^3} \cdot \frac{m_2 + m_3}{M r_1} M^2 r_1^2 \times \left[\frac{(m_2 + m_3)^3 + (m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)(m_2 + m_3) - m_2 m_3^2 - m_3 m_2^2}{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)(m_2 + m_3)^2} \right]$$

und hieraus:

$$\gamma r_1 = \frac{k M r_1}{s_1^3}$$

sein. Durch Einsetzen des Wertes von s_1 in diese Formel entsteht schließlich die gesuchte Formel:

$$\gamma r_1 = k \frac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

In ähnlicher Weise gewinnt man die Formeln:

$$\gamma r_2 = k \frac{(m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

$$\gamma r_3 = k \frac{(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \cdot \frac{1}{r_3^2}$$

Zweite Ableitung. Aus Fig. 5 folgt einerseits:

$$\gamma r_1 : \frac{k m_2}{s_1^2} = \sin 60^\circ : \sin \alpha_2 \quad \text{bzw.} \quad \gamma r_1 = \frac{\sin 60^\circ}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{k m_2}{s_1^2}$$

und andererseits:

$$q : d_1 = \sin \alpha_2 : \sin 60^\circ \quad \text{bzw.} \quad q = \frac{d_1 \sin \alpha_2}{\sin 60^\circ}$$

Multipliziert man die entsprechenden Seiten der beiden Gleichungen, so wird

$$\gamma r_1 = \frac{k m_2}{s_1^2} \cdot \frac{d_1}{q}$$

und hieraus [durch Einsetzen von $d_1 = M r_1 / (m_2 + m_3)$ und $q = s_1 m_3 / (m_2 + m_3)$]:

$$\gamma r_1 = \frac{k M r_1}{s_1^3}$$

sein.

Lehrsatz 6. Befinden sich die drei Massenpunkte m_1 , m_2 , m_3 , die sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, in dieser Reihenfolge auf einer Geraden und sind ihre Entfernungsverhältnisse dabei konstant, so gilt, bei der Voraussetzung, daß sich der gemeinsame Massenmittelpunkt zwischen m_1 und m_2 befindet, für die resultierende Beschleunigung des Massenpunktes m_1 die Formel:

$$\gamma r_1 = k \frac{[m_2 + m_3(1+a)]^2 [m_2(1+a)^2 + m_3]}{(m_1 + m_2 + m_3)^2 (1+a)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

Beweis. Bezeichne C den Massenmittelpunkt der drei Massen (vgl. Fig. 6), C_2 den Mittelpunkt der Massen m_2 und m_3 , r_1 den Abstand der Masse m_1 von C , ρ_1 den Ab-

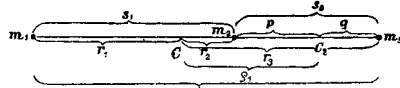


Fig. 6.

stand der Massenmittelpunkte C und C_2 voneinander. Es seien weiter r_2 und r_3 die Abstände der Massen m_2 und m_3 von C , s_1 der Abstand der Masse m_1 von m_2 , s_2 der Abstand der Masse m_1 von m_3 und s_3 der Abstand der Masse m_2 von m_3 , p und q die Abstände der Massen m_2 und m_3 von ihrem Mittelpunkte C_2 .

Aus der Figur folgt dann:

$$m_2 p = m_3 q$$

$$p : q = m_3 : m_2$$

$$p : s_3 = m_3 : (m_2 + m_3)$$

$$q : s_3 = m_2 : (m_2 + m_3)$$

und

$$p = \frac{s_3 m_3}{m_2 + m_3} \quad q = \frac{s_3 m_2}{m_2 + m_3}$$

Es wird weiter aus

$$m_1 r_1 = \rho_1 (m_2 + m_3)$$

$$r_1 : \rho_1 = (m_2 + m_3) : m_1$$

$$r_1 : (r_1 + \rho_1) = (m_2 + m_3) : (m_1 + m_2 + m_3)$$

$$r_1 : (s_1 + p) = (m_2 + m_3) : (m_1 + m_2 + m_3)$$

folgen (wenn $m_1 + m_2 + m_3 = M$ gesetzt wird):

$$r_1 : \left(s_1 + \frac{s_3 m_3}{m_2 + m_3} \right) = (m_2 + m_3) : M$$

und hieraus (wenn das konstante Verhältnis $s_3/s_1 = a$, resp. $s_3 = s_1 a$ gesetzt wird):

$$s_1 \left(1 + \frac{a m_3}{m_2 + m_3} \right) = \frac{M r_1}{m_2 + m_3}$$

$$s_1 = \frac{M r_1}{m_2 + m_3 + a m_3}$$

In ähnlicher Weise wird aus

$$r_1 : (s_2 - q) = (m_2 + m_3) : M$$

wenn $s_3 = s_2 b$ gesetzt wird, folgen:

$$s_2 = \frac{M r_1}{m_2 + m_3 - b m_3}$$

Da aber

$$s_3 = \frac{s_2 a}{a + 1}$$

[es folgt nämlich aus $s_3 : s_1 = a$ die Proportion $s_3 : (s_3 + s_1) = a : (a + 1)$, resp. $s_3 : s_2 = a : (a + 1)$], so ist

$$b = \frac{a}{a + 1}$$

und

$$s_2 = \frac{M r_1 (a + 1)}{m_2 + m_3 + a m_3}$$

Werden die gefundenen Werte von s_1 und s_2 in die Formel für die resultierende Beschleunigung der Masse m_1 :

$$\gamma r_1 = k \frac{m_2}{s_1^2} + k \frac{m_3}{s_2^2}$$

eingesetzt, so bekommt man:

$$\gamma r_1 = \frac{k}{r_1^2 M^2 (1+a)^2} [m_2 (m_2 + m_3 + a m_3)^2 (1+a)^2 + m_3 (m_2 + m_3 + a m_3)^2]$$

oder: $\gamma r_1 = k \frac{[m_2(1+a)^2 + m_3][m_2 + m_3(1+a)]^2}{M^2(1+a)^2} \cdot \frac{1}{r_1^2}$

also die gesuchte Formel.

Anmerkung. Aus Fig. 6 lassen sich auch die resultierenden Beschleunigungen der Massen m_2 und m_3 ableiten.

Es folgt nämlich aus

$$r_2 = s_1 - r_1 \quad \text{und} \quad r_1 = s_1 - r_2$$

daß

$$s_1 = \frac{M(s_1 - r_2)}{m_2 + m_3 + a m_2}$$

und hieraus zunächst:

$$s_1 = \frac{M r_2}{m_1 - a m_3}$$

und weiter, da $s_3 = s_1 a$,

$$s_3 = \frac{M r_2 a}{m_1 - a m_3}$$

Werden die Werte von s_1 und s_3 in die Formel

$$\gamma r_2 = k \frac{m_1}{s_1^2} - \frac{k m_3}{s_3^2}$$

eingesetzt, so entsteht die Formel:

$$\gamma r_2 = k \frac{(m_1 a^2 - m_3)(m_1 - a m_3)^2}{M^2 a^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

In ähnlicher Weise wird aus

$$s_2 = \frac{M r_3(1+a)}{m_1 + a m_1 + a m_2} \quad s_3 = \frac{M r_3 a}{m_1 + a m_1 + a m_2}$$

die Formel folgen:

$$\gamma r_3 = k \frac{[m_2(1+a)^2 + m_1 a^2][m_1(1+a) + m_2 a]^2}{M^2 a^2(1+a)^2} \cdot \frac{1}{r_3^2}$$

Belgrad, 1935 Okt. 16.

A. Bilimovitch, B. Petronievics.

Korrektionsformeln im Himmelspol. Von J. Curea.

Es gibt für den Fall einer Platte, deren Zentrum mit irgendeinem Punkte des Himmels zusammenfällt, zahlreiche Formeln für die Berechnung der Refraktions- und Aberrationskorrektur der rechtwinkligen Koordinaten eines Sterns, wie z. B. die von Henry¹⁾, Baillaud²⁾, Jacobi³⁾, Kapteyn⁴⁾, Rambaut⁵⁾, de Ball⁶⁾, Bergstrand⁷⁾, Zuhellen⁸⁾, Rayet⁹⁾, etc.

Für eine Platte aber, deren Mitte gerade im Himmelspol oder in dessen unmittelbarer Nähe liegt, sind diese Formeln nicht mehr gültig. Sie können auch nicht gleich in andere brauchbare umgestaltet werden, weil ihre Elemente im allgemeinen im Pole keinen Sinn mehr haben, wie z. B. die Rektaszension des Plattenzentrums.

Es scheint darum nicht nutzlos zu sein, auch für diesen Fall Formeln herzustellen. So weit unsere Kenntnis reicht, sind solche Formeln nur in ein paar Sonderarbeiten erwähnt. So finden wir in K. F. Sundmans: »Etude d'un cliché pris avec le tube polaire de l'observatoire de Helsingfors«¹⁰⁾ eine nicht abgeleitete Formel für die Refraktionskorrektur im Pol¹¹⁾. Im folgenden wollen wir Formeln nur für diesen Fall ableiten, die uns die Differentialkorrekturen der Refraktion, der jährlichen Aberration und der Parallaxe rechtwinkliger Koordinaten liefern. Die Formeln der Refraktion werden von den eben genannten etwas abweichen.

Die Refraktionsformeln. Für die Herleitung unserer Refraktionsformeln werden wir alle Glieder der Form $k\rho$, $k\rho^2$ und $\rho \cdot dk/d\zeta$ berücksichtigen, wobei k die Refraktionskonstante, ρ der Abstand irgendeines Punktes von dem Plattenzentrum, und $dk/d\zeta$ der Differentialquotient der Refraktionskonstante mit Bezug auf die wahre Zenitdistanz ζ ist; wir vernachlässigen aber die Glieder der Form $k\rho^3$, $k^2\rho$, $\rho^2 \cdot dk/d\zeta$ und selbstverständlich alle Glieder, die kleiner als diese sind. Eine solche Genauigkeit genügt vollkommen für die heutigen Anforderungen.

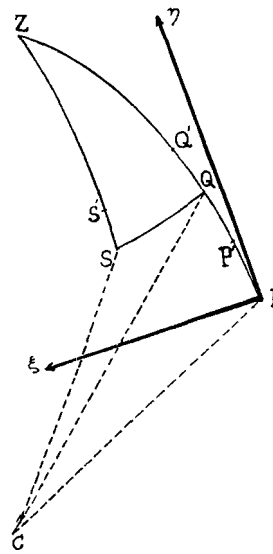


Fig. 1.

Wir bezeichnen (Fig. 1) mit P , Z und S die Lage des Himmelspols, des Zenites und eines Sterns. Die Refraktion erhebt den Pol von P bis zu P' und den Stern von S bis zu S' , so daß $PP' = k \operatorname{ctg} \phi$, $SS' = k_1 \operatorname{tg} \zeta$, wo k und k_1 die den wahren Zenitdistanzen ($90^\circ - \phi$) und ζ der Punkte P und S entsprechenden Refraktionskonstanten sind. Durch den zu ZP senkrecht gezogenen Bogen SQ entsteht ein System von zwei sphärischen Koordinaten $\alpha = SQ$, $\beta = PQ$. Die Refraktion bewirkt, daß wir die Bogen $\alpha' = S'Q'$, $\beta' = P'Q'$ statt α und β messen. Die Refraktionskorrekturen werden also bestimmt sein, wenn die Möglichkeit gefunden ist, von den Koordinaten α', β' auf α, β überzugehen.

Zu diesem Zweck nennen wir λ den Positionswinkel SZP . In den Dreiecken ZSQ , $ZS'Q'$ haben wir

$$\sin \alpha = \sin \lambda \sin \zeta$$

$$\sin \alpha' = \sin \lambda \sin(\zeta - k_1 \operatorname{tg} \zeta)$$

aus welchen sich durch Vernachlässigung von k_1^2 und $(\alpha' - \alpha)^2$

$$\alpha' - \alpha = -k_1 \operatorname{tg} \zeta \quad (1)$$

ergibt. Bei denselben Dreiecken können wir noch schreiben:

$$\cos \lambda = \operatorname{ctg} \zeta \operatorname{ctg}(\phi + \beta) = \operatorname{ctg}(\zeta_1 - k_1 \operatorname{tg} \zeta) \operatorname{ctg}(\phi + \beta' + k \operatorname{ctg} \phi).$$

Da aber

$$\operatorname{tg}(\zeta - k_1 \operatorname{tg} \zeta) = \frac{\sin \zeta - k_1 \sin \zeta}{\cos \zeta + k_1 \sin \zeta \operatorname{tg} \zeta} = \operatorname{tg} \zeta - k_1 \operatorname{tg} \zeta - k_1 \operatorname{tg}^3 \zeta$$

¹⁾ Bull. p. la C. d. C. 2.308.

²⁾ Idem, 3.19.

³⁾ 3.4.

⁴⁾ 3.54.

⁵⁾ AN Nr. 3125.

⁶⁾ AN Nr. 3652.

⁷⁾ Undersökningar . . . Stockholm 1898.

⁸⁾ Darlegung und Kritik . . . Frankfurt a. M., 1904, p. 23.

⁹⁾ Ann. d'Obs. Bordeaux 1900, 9.

¹⁰⁾ Öfersigt af Finska Vetenskaps-Societets Förhandlingar 59 (1916-17), Afd. A. Nr. 5.

¹¹⁾ Siehe auch: H. N. Russell: »On the Reduction of Polar Trail Plates«, MN 73, 9 Supp. (1913).