ACADÉMIE ROYALE SERBE

BULLETIN

DE

L'ACADÉMIE DES LETTRES

Свом пријатељу Тами Продановићу,
Петровдевић.
21-VII-1939.

№ 3

BELGRADE
1939

CONTRIBUTION AUX FONDEMENTS DE L'ARITHMETIQUE GENERALE

PAR

BRANISLAV PETRONIEVICS

Sous le nom d'Arithmétique générale nous entendons la science des nombres, en tant qu'elle désigne ceux-ci par des lettres (signes généraux). Nous la divisons en Arithmétique pure et Algèbre, la prmière ne s'occupant que des nombres entiers naturels, tandis que la deuxième étend le domaine des nombres par l'introduction de nouvelles espèces (du zéro, des nombres négatifs etc...).

Dans la première partie de cet article nous nous proposons d'exposer brièvement les propositions fondamentales de l'Arithmétique pure, et dans la deuxième nous discuterons un certain nombre des questions générales de l'Algèbre.

I.

Comme on le sait, les nombres entiers naturels forment une série qui commence avec le nombre un, dont chaque terme suivant est la somme du terme précédent et de l'unité, et qui se prolonge indéfiniment.

Le nombre entier naturel peut être défini de deux manières bien différentes: ou comme la réunion des unités ($m = 1 + 1 + 1 \ldots\ldots + 1$), ou comme la réunion de l'unité avec le nombre précédent ($m = n + 1$). On appelle la première de ces

deux définitions, définition *indépendante,* parce qu'on y conçoit chaque nombre comme un terme dont l'existence est tout-à-fait indépendante du terme précédent de la sèrie ci-dessus, tandis que la deuxième, dans laquelle la définition d'un terme de cette série est conditionnée par la définition du terme précédent, est appellée définition *récurrente.* Dans la première l'unité n'est que l'élément et c'est deux qui est vraiment le premier nombre de la série, tandis que, dans la deuxième, l'unité représente aussi bien l'élément que le premier nombre.

Les nombres entiers naturels, représentés par des collections de traits verticaux

I, II, III, IIII, IIIII, IIIIII, etc. . . ,

sont désignés par des chiffres:

1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. . .

Or, au commencement de l'Arithmétigue pure, on devrait désigner chacun d'eux par un chiffre différent, les systèmes de numération ne pouvant être introduits qu'après la définition des opérations. Heureusement, les neuf premiers nombres de notre système décimal étant désignés ainsi, on peut illustrer sur eux toutes les opérations fondamentales de l'Arithmétique pure.

Dans le domaine des nombres entiers naturels on ne peut admettre que des opérations dont le résultat est, lui aussi, un nombre entier naturel. Il en existe deux espèces, opérations directes (addition, multiplication, élévation) et inverses (soustraction, division, extraction des racines, détermination des logarithmes).

En conformité avec les deux définitions du nombre entier naturel, chaque opération directe possède, elle aussi, une définition indépendante et une définition récurrente.

Voici la définition indépendante de l'addition: *additioner deux nombres entiers naturels, c'est en trouver un troisième qui contienne autant d'unités que les deux autres, c'est à dire*

$$a + b = \underbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}_{a} + \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{b} =$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{c}.$$

Et voici sa définition récurrente: *additioner deux nombres entiers naturels, c'est ajouter successivement les unités de l'un d'eux à l'autre,* c'est à dire

$$a + b = a + (n + 1) = (a + n) + 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = $$

$$= \{[(a + 1) + 1] + 1\} + 1 + \ldots\ldots\ldots$$

En comparant les deux définitions, on arrive aisément à la conclusion que l'addition ne peut être pratiquement effectuée qu'en suivant le procédé de la deuxième.[1])

L'addition est soumise aux trois lois fondamentales suivantes:

1. à la loi de commutation $a + b = b + a$;
2. „ d'association $a + (b + c) = (a + b) + c$, et
3. „ „ $(a + b) + c = (a + c) + b$.

[1]) En effet, l'addition de deux nombres entiers naturels, p ex. des nombres 7 et 5, s'effectue de la manière suivante.

On obtient d'abord, en appliquant la formule

$a + (n + 1) = (a + n) + 1$, la série régressive:

$$7 + 5 = 7 + (4 + 1) = (7 + 4) + 1,$$

$$7 + 4 = 7 + (3 + 1) = (7 + 3) + 1,$$

$$7 + 3 = 7 + (2 + 1) = (7 + 2) + 1,$$

$$7 + 2 = 7 + (1 + 1) = (7 + 1) + 1.$$

Et ensuite, par l'application de la formule

$a + b = \{[(a + 1) + 1] + 1\} + 1 \ldots$, la série progressive:

$$(7 + 1) + 1 = 8 + 1,$$

$$(8 + 1) + 1 = 9 + 1,$$

$$(9 + 1) + 1 = 10 + 1,$$

$$(10 + 1) + 1 = 11 + 1,$$

$$11 + 1 = 12.$$

Les deux premières de ces lois ne peuvent être démontrées rigoureusement que par l'induction mathématique (c'est-à-dire par récurrence)[2]), tandis que la troisième dérive analytiquement des deux premières[3]).

Voici la preuve récurrente de la loi de commutation.

On démontre d'abord la loi plus simple $a + 1 = 1 + a$ de la manière suivante.

En se basant sur la définition récurrente de l'addition on suppose vraie l'égalité:

$$1 + (b + 1) = (1 + b) + 1.$$

Supposons maintenant que la loi soit valable pour $a = n$ (c'est-à-dire pour un nombre déterminé de la série de nombres entiers naturels), on aura alors à démontrer que

$$(n + 1) + 1 = 1 + (n + 1).$$

Preuve. De

$$n + 1 = 1 + n$$

il s'ensuit immédiatement

$$(n + 1) + 1 = (1 + n) + 1,$$

et de

$$1 + (b + 1) = (1 + b) + 1$$

---

[2]) Que la preuve indépendante de la loi de commutation est impossible, on peut l'entrevoir aisèment. Supposons $a > b$ et $a = b + c$. On aura alors $a + b = (b + c) + b = b + (c + b)$. Or, on ne pourrait poser $c + b = a$ qu'en supposant $c + b = b + c$, c'est-à-dire la loi de commutation.

[3]) En effet, on a d'une part:

$$a + (b + c) = a + (c + b) = (a + c) + b$$

et d'autre part:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

d'où

$$(a + b) + c = (a + c) + b.$$

on aura

$$1 + (n + 1) = (1 + n) + 1.$$

Il se vérifie donc que

$$(n + 1) + 1 = 1 + (n + 1)$$

si

$$1 + n = n + 1.$$

Or, cette dernière égalité étant valable pour $n = 1$, elle doit être valable aussi pour $n = 2$, 3 etc..., donc en général (c'est-à-dire qu'on aura $1 + a = a + 1$).

Et on démontre ensuite la loi complète de la manière suivante.

La loi $1 + a = a + 1$ étant démontrée, on suppose en outre comme vraie l'égalité $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ (la définition récurrente de l'addition).

Supposons que la loi soit valable pour $b = n$, on aura à démontrer que

$$a + (n + 1) = (n + 1) + a.$$

Preuve. De

$$a + n = n + a$$

il s'ensuit immédiatement

$$(a + n) + 1 = (n + a) + 1.$$

De

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \text{ et } 1 + a = a + 1$$

on aura d'une part :

$$(a + n) + 1 = a + (n + 1)$$

et d'autre part:

$$(n + a) + 1 = n + (a + 1) = n + (1 + a) = (n + 1) + a.$$

Il se vérifie donc que

$$a + (n + 1) = (n + 1) + a$$

si

$$a + n = n + a$$

Or, cette dernière égalité étant valable pour $n = 1$, elle doit être valable aussi pour $n = 2$, 3 etc., donc en général (c'est-à-dire qu'on aura $a + b = b + a$).[4])

La définition iudépendante de la multiplication est exprimée par la formule:

$$a \,.\, b = a \,.\, \underbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1)}_{b} = \underbrace{a \,.\, 1 + a \,.\, 1 + a \,.\, 1 + a \,.\, 1}_{b\text{-fois}} =$$

$$= \underbrace{a + a + a + \ldots\ldots\ldots + a}_{b\text{-fois}},$$

et la définition récurrente par la formule:

$$a \,.\, b = a \,.\, (n + 1) = a \,.\, n + a \,.\, 1 = a \,.\, n + a = \ldots\ldots =$$

$$= \{ [(a \,.\, 1 + a) + a] + a \} + \ldots\ldots$$

---

[4]) La démonstration ci-dessus se trouve dans l'article de l'auteur „*Les lois fondamentales de l'addition arithmétique et le principe de l'induction mathématique*", publié dans la *Revie générale des Sciences*, No du 30 Juin, 1934. On y trouvera aussi la démonstration par récurrence de la loi d'association $a + (b + c) = (a + b) + c$

La multiplication est soumise aux lois fondamentales suivantes:

1. à la loi de commutation $a \cdot b = b \cdot a$,

2. „ „ distribution $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

3. „ „ „ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,

4. „ „ „ $a \cdot (b + c) = a \cdot (c + b)$,

5. „ „ d'association $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, et

6. „ „ „ $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$.

De ces lois, la première, la deuxième et la troisième peuvent être démontrées indépendamment aussi bien que par récurrence, la cinquième n'est démontrable que par récurrence, mais elle dérive aussi analytiquement de la première et de la sixième[5]), la sixième n'est démontable qu'indépendamment, mais elle dérive aussi analytiquement de la première et de la cinquième, tandis que la quatrième ne dérive qu'analytiquement de la première et de la deuxième[6]).

Voici p. ex. la preuve indépendanie de la loi de commutation :

---

[5]) Si l'on suppose

$$a \cdot b = b \cdot a$$

et

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$$

on aura:

$$(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot a) \cdot c = (b \cdot c) \cdot a = a \cdot (b \cdot c).$$

Comp. *E. Schröder,* Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Bd. I, 1873, p. 79.

[6]) En effet, de

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

et

$$a \cdot (c + b) = a \cdot c + a, b$$

on aura ($a \cdot b + a \cdot c$ étant $= a \cdot c + a \cdot b$):

$$a \cdot (b + c) = a \cdot (c + b).$$

$$a.b = \underbrace{a+a+a+\ldots.+a}_{b\text{-fois}} = b \begin{cases} \overbrace{1+1+\ldots+1}^{a} \\ +\overbrace{1+1+\ldots+1}^{a} \\ +\overbrace{1+1+\ldots.+1}^{a} \\ + \\ . \\ . \\ . \\ +\overbrace{1+1+\ldots.+1}^{a} \end{cases} = \underbrace{b+b+\ldots.+b}_{a\text{-fois}} = b.a.^{7})$$

Et voici sa preuve récurrente, qui est beaucoup plus compliquée.

On démontre d'abord la loi plus simple $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ de la manière suivante.

On considère comme valables les égalités:

$$(a + 1) \cdot 1 = a \cdot 1 + 1,$$

$$1 \cdot (b + 1) = 1 \cdot b + 1 .$$

Supposons que

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n,$$

on aura alors à démontrer que

$$(n + 1) \cdot 1 = 1 \cdot (n + 1).$$

---

[7]) Comp. *E. Schrödcr*, 1. c., p. 75.

On trouve souvent (comp. p. ex., *M. Stuvaert*, Introduction à la Méthodologie mathématique, 1923, p. 24) la preuve indépendante suivante de la loi en question: $a.b = \underbrace{(1+1+1+\ldots.+1)}_{a} .b = \underbrace{1.b + 1.b + \ldots + 1.b}_{a\text{-fois}} =$

$= \underbrace{b + b + \ldots. + b}_{a\text{-fois}} = b.a,$

mais cette peuve est moins rigoureuse que la preuve ci-dessus.

Preuve. De

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n$$

il s'ensuit immédiatement

$$n \cdot 1 + 1 = 1 \cdot n + 1 .$$

De

$$(a + 1) \cdot 1 = a \cdot 1 + 1$$

on aura d'une part:

$$(n + 1) \cdot 1 = n \cdot 1 + 1 ,$$

et de

$$1 \cdot (b + 1) = 1 \cdot b + 1$$

on aura d'autre part:

$$1 \cdot (n + 1) = 1 \cdot n + 1 .$$

Il se vérifie donc que

$$(n + 1) \cdot 1 = 1 \cdot (n + 1)$$

si

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n .$$

Or, cette dernière égalité étant valable pour $n = 1$, elle sera valable aussi pour $n = 2, 3$ etc., donc en général (c'est-à-dire qu'on aura $a \cdot 1 = 1 \cdot a$.[8])

---

[8]) La preuve indépendante de la loi $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ est beaucoup plus simple. On a d'une part par définition: $a \cdot 1 = a$, et on a d'autre part:

$$1 \cdot a = 1 \cdot \underbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}_{a} = \underbrace{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \ldots . + 1 \cdot 1}_{a\text{-fois}} =$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{a} = a,$$

d'où $a \cdot 1 = 1 \cdot a$.

Et on démontre ensuite la loi complète de la mänière suivante.

On considère comme valables les trois égalités:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a,$$

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1,$$

$$(b + 1) \cdot a = b \cdot a + 1 \cdot a.$$

Supposons que

$$a \cdot n = n \cdot a,$$

on aura alors à démontrer que

$$a \cdot (n + 1) = (n + 1) \cdot a.$$

Preuve. De

$$a \cdot n = n \cdot a$$

il s'ensuit immédiatement

$$a \cdot n + a = n \cdot a + a.$$

De

$$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1$$

on aura d'une part:

$$a \cdot n + a = a \cdot (n + 1),$$

et de

$$(b + 1) \cdot a = b \cdot a + a$$

on aura d'autre part:

$$n \cdot a + a = (n + 1) \cdot a.$$

Il se vérifie donc que

$$a \,.\, (n + 1) = (n + 1) \,.\, a$$

si

$$a \,.\, n = n \,.\, a.$$

Or, la dernière égalité étant valable pour $n = 1$, elle sera valable aussi pour $n = 2,3$ etc, donc en général (c'est-à-dire qu'on aura $a.\, b = b \,.\, a$).

La définition indépendante de l'élévation aux puissances est exprimée par la formule:

$$a^b = a^{\overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{b}} = a.^1\, a.^1\, a.^1 \ldots a^1 = \underbrace{a.\, a.\, a. \ldots a,}_{\text{b-fois}}$$

et la récurrente par la formule:

$$a^b = a^{n+1} = a.^n\, a^1 = a.^n\, a = \ldots = \Big\{\big[a^1 \,.a).\, a\big].a\Big\}.\ a \ldots$$

L'élévation est soumise aux lois fondamentales suivantes:

1. à la loi de distribution $a^{b+c} = a^b.\, a^c$,

2. „ „ „ „ $a^{b+c} = a^{c+b}$,

3. „ „ „ „ $(a \,.\, b)^c = a^c \,.\, b^c$,

4. „ „ d'association $(a^b)^c = a^{bc}$, et

5. „ „ „ „ $(a^b)^c = (a^c)^b$.

De ces lois, la première, la troisième et la quatrième peuvent être démontrées indépendamment aussi bien que par récurrence, la cinquième ne peut être démontrée qu'indépendamment, tandis que la deuxième dérive analytiquement de la première et de la loi de commutation pour la multiplication.

Voici p. ex. la preuve indépendante de la loi d'association $(a^b)^c = (a^c)^b$:

$$(a^b)^c = \underbrace{a^b \,.\, a^b \,.\, a^b \,.\, \ldots\, a^b}_{\text{c-fois}} = \underbrace{(a \,.\, a \,.\, a \,\ldots\, a)^b}_{\text{c-fois}} = (a^c)^b .^{9})$$

Et voici la preuve récurrente de la loi d'association

$(a^b)^c = a^{bc}$.

On considère comme valables les trois égalitées:

$$(a^b)^1 = a^b,$$

$$a^b . a = a^{b+1},$$

$$a^b . a^c = a^{b+c}.$$

Supposons que

$$(a^b)^n = a^{bn},$$

on aura alors à démontrer que

$$(a^b)^{n+1} = a^{b(n+1)}.$$

Preuve. De

$$(a^b)^n = a^{bn}$$

il s'ensuit immédiatement

$$(a^b)^n . a^b = a^{bn} . a^b .$$

De

$$a^b . a = a^{b+1}$$

on aura d'une part:

$$(a^b)^n . (a^b) = (a^b)^{n+1},$$

---

9) Comp. E. Schröder, 1. c., p. 105.

et de

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

on aura d'autre part:

$$a^{bn} \cdot a^b = a^{b(n+1)}.$$

Il se vérifie donc que

$$(a^b)^{n+1} = a^{b(n+1)}$$

si

$$(a^b)^n = a^{bn}.$$

Or, la dernière égalité étant valable pour n = 1, elle sera valable aussi pour n = 2, 3 etc., donc en général [c'est-à-dire qu'on aura $(a^b)^c = a^{bc}$][10]).

La soustraction est l'opération inverse de l'addition. Dans celle-ci nous ajoutons les unités du nombre b au nombre a pour obtenir le nombre-somme c; dans la soustraction, on retranche du nombre c les unités du nombre b pour obtenir le nombre primitif a. Ainsi la formule

$$c - b = a$$

---

[10]) La loi de commutation $a^b = b^a$ n'est pas valable pour l'élévation. Car la preuve récurrente de cette loi devrait avoir pour point de départ la loi plus simple $a^1 = 1^a$ qui n'est pas valable (a^1 étant = a et $1^a = 1$). Dans la preuve récurrente de la loi d'association $a^{(b^c)} = (a^b)^c$, qui n'est pas valable non plus, on aurait $a^{(b^1)} = (a^b)^1$, mais déjà $a^{(b^2)}$ n'est pas $= (a^b)^2$.

ou

$$c - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}_{b} = \Big\{\Big[(c - 1) - 1\Big] - 1\Big\} - 1 \ldots$$

représente la définition de la soustraction.

Mais à coté de la soustraction ainsi définie on peut concevoir encore une opération inverse de l'addition, par laquelle on détermine le nombre inconnu b en partant des nombres donnés a et c, et que nous désignerons par $c \smile a = b$. Ce n'est qu'en vertu de la loi de commutation $a + b = b + a$ que nous la réduisons à la soustraction. Car, si de $a + b = c$ s'ensuit $c - b = a$, on aura aussi de $b + a = c$, $c - a = b$ (c'est-à-dire qu'on aura $c \smile a = c - a$).

La division est l'opération inverse de la multiplication. Dans celle-ci nous ajoutons le nombre a à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre b, pour obtenir le produit c; dans la division (et c'est sa définition logique primaire) nous retranchons le nombre b du nombre c autant de fois nécessaires pour qu'il soit complètement épuisé. Ainsi $\frac{c}{b} = a$ signifie que

$$c - \underbrace{(b + b + b + \ldots\ldots)}_{x\text{-fois}} = \Big\{\Big[(c - b) - b\Big] - b\Big\} - b \ldots\ ,$$

où

$$c = \underbrace{(b + b + b + \ldots\ldots).^{11})}_{x\text{-fois}}$$

Ici aussi on peut concevoir à côte de la division encore une opération inverse de la multiplication, par laquelle on déter-

---

11) L'expression $c = \underbrace{(b + b + b + \ldots)}_{x\text{-fois}}$ de l'Arithmétique pure est equivalente à l'expression algébrique $c - \underbrace{(b + b + b + \ldots)}_{x\text{-fois}} = 0$.

mine le nombre inconnu b en partant des nombres donnés a et c, et que nous désignerons par c/a = b. Et ici aussi nous réduisons cette duexième opération à la première en vertu de la loi de commutatlon (a . b = b . a). Car, si de a . b = c s'ensuit $\frac{c}{b} = a$, on aura aussi de b . a = c, $\frac{c}{a} = b$ (c'est-à-dire qu'on aura $c/a = \frac{c}{a}$).

Et on entrevoit aisément que, la loi de commutation n'étant valable pour l'élévation aux puissances, ses deux opérations inverses (l'extraction des racines et la détermination ges logarithmes) ne peuvent pas être réduites à une seule. Mais si nous pouvons concevoir la division comme une soustraction répétée, nous pouvons, d'une manière analogue, concevoir la détermination des logarithmes comme une division répétée, ce qui est exprimé par la formule:

$$\log_a c = \underbrace{\left\{\left[(c : \underbrace{a) : a}\right] : a\right\} : a \ldots\ldots}_{x\text{-fois}},$$

où

$$\underbrace{\left\{\left[(c : \underbrace{a) : a}\right] : a\right\} : a \ldots}_{x\text{-fois}} = 1.$$

L'extraction des racines ($\sqrt[b]{c} = a$), au contraire, ne peut être conçue que comme un invertissement de l'élévation (en effet, nous ne pouvons déterminer la racine, dans les cas les plus simples, que par l'invertisse ment pur et simple).

Enfin, remarquons que dans le domaine des nombres enties naturels la soustraction n'est posible que si $c > b$ (ou, autrement dit, si $c = b + n$, où n est égal successivement à 1, 2, 3 etc.), la divisisn que si c est égal à bn, l'extraction des racines

que si $c = n^b$, et la détermination des logaritbmes que si $c = b^n$.[12])

[12]) Touchons très brièvement la question des opérations arithmétiques supérieures.

Dans un travail récent publié en serbe dans les *„Memoires de l'Académie royale serbe"* (Glas Srpske Kraljevske Akademije, vol. CLXXIX, 1939 p. 31 – 39) l'auteur de cet article a séparé, dans la quatrième opération directe (qu'il appelle *première élévation supérieure), l'opération générale* (qu'il désigne par $^b a$, dont la valeur est multiple) des ses trois *opérations spéciales* (désignées fpar ^{n+1}a, $^{2^n}a$ et ^{1+n}a, qui sont univoques). L'opératlon générale y est fixée par les deux définitions suivantes:

$$^b a = a^{\overbrace{a^{a^{\cdots^{a}}}}^{b\text{-fois}}},$$

$$^{n+m}a = \overbrace{a^{a^{\cdots^{a}}}}^{n\text{-fois}}{}^{\overbrace{a^{a^{\cdots^{a}}}}^{m\text{-fois}}} = (^n a)^{(^m a)},$$

tandis que les trois opérations spéciales sont définies par des formules:

1. $$^{n+1}a = (^n a)^a = \left\{\left[(a^a)^a\right]^a \cdots\right\}^a = a^{a^{a^{\cdots^{a}}}}$$ (n-fois)

2. $$^{(2^n)}a = \left\{\left[(a^a)(a^a)\right]\left[(a^a)(a^a)\right]\right\}\left\{\right\}\cdots$$

3. $$^{1+n}a = a^{(^n a)} = a^{\left\{a\left[a\cdot{}^{(a^a)}\right]\right\}} = a^{a^{(a^{\cdots^{(a}}}}$$ (n-fois)

II

La première extension du domaine des nombres consiste dans l'introduction du zéro, avec laquelle commence la science de l'Algèbre. On y définit le zéro comme la différence de deux nombres égaux (a — a = 0), cette différence (qui n'est pas admise dans l'Arthmétique pure) étant ici conçue comme un nombre spécial, moindre qui l'unité (la différence 1 — 1 étant posée = 0)[13]).

Mais la différence 1 — 1 = 0 une fois admise, pourquoi ne pas admettre des différences 1 — 2 (ou 0 — 1), 1 — 3, 1 — 4 etc...? L'Algèbre est ainsi amenée ä introduire la série des nombres entiers négatifs:

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots,$$

dont chaque terme est d'une unité plus petit que le terme précédent.

Par leur définition même les nombres entiers négatifs étant plus petits que zéro, on considère les nombres entiers naturels pour plus grands que zéro et, partant, pour positifs. Mais est-ce qu'on doit nécessairement les considérer pour positifs? On l'a toujours fait jusqu'à présent sans se poser même cette question. Pourtant, à coté de la supposition, qu'ils soient positifs, une autre supposition est aussi (au moins formellement) possible. On peut très bien supposer, que les nombres entiers naturels ne soinet *comme tels* ni positifs, ni négatifs, et qu'ils deviennent positifs quand on les imagine plus grands, et négatifs quand on les imagine plus petits que zéro. Ainsi deux conceptions bien différentes sur le rapport de leur grandeur au zéro deviennent possibles.

Dans la première conception le nombre entier naturel est comme tel positif, et le nombre positif la vaieur absolue du nombre négatif:

$$a = +a = |-a|,$$

tandis que dans la deuxième, le nombre entier naturel est la

[13]) Il faut bien distinguer le zéro-position de l'Arithmétique pure, qui est à la base de ses systèmes de numération, du zéro-nombre de l,Algèbre.

valeur absolue du nombre positif aussi bien que du nombre négatif correspondant:

$$a = |+a| = |-a|.$$

Dans la première conception le nombre négatif représente le résultat de la soustraction du nombre positif de zéro:

$$0 - (+a) = 0 - a = -a,$$

tandis que dans la deuxième la positivité et la négativité d'un nombre entier est tout-à-fait indépendante des opérations de l'addition et de la soustraction:

$$+a \text{ (resp. } +1) > 0 \text{ et } -a \text{ (resp. } -1) < 0.^{14})$$

Maintenant nous allons d'abord déduire les formules algébriques fondamentales de l'addition, de la soustraction et de la multiplication dans la première, et ensuite les mêmes formules de l'addition et de la multiplication dans la deuxième conception. Enfin, dans une remarque finale, nous énumérerons les côtés positifs et les difficultés des deux conceptions.

Première conception

A. Addition

1. $(+a) + (+b) =$ (puisque $+a = a$ et $+b = b$) $= a + b$;

2. $(+a) + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = (a + 0) - b =$
$= a - b$ pour $a > b$;

---

14) On pourrait essayer d'affirmer (et cela serait une troisième conception), que le nombre entier uaturel n'est comme tel ni positif ni négatif, mais que le nombre positif est le résultat de l'addition du nombre entier naturel au zéro et le nombre négatif le résultat de sa soustaction du zéro, c'est-à-dire

$$+a = 0 + a \quad \text{et} \quad -a = 0 - a.$$

Cependant, une telle affirmation n'est nullement possible, puisque de

$$+a = (a - a) + a = a - \underbrace{a + a} = a$$

d'une part et de

$$0 + a = +a$$

d'autre part, il s'ensuivrait

$$a = +a.$$

3. $(+a)+(-b)=a+(0-b)=(0-b)+a=0-b+a=$
$=0-(b-a)=-(b-a)$ pour $a<b$;[15])

4. $(-a)+(+b)=(0-a)+b=0-a+b=0-(a-b)=$
$=-(a-b)$ pour $a>b$;

5. $(-a)+(+b)=(0-a)+b=b+(0-a)=b+0-a=$
$=b-a$ pour $a<b$;

6. $(-a)+(-b)=(0-a)+(0-b)=0-a+0-b=$
$=0-(a+b)=-(a+b)$.

B. Soustraction

1. $(+a)-(+b)=a-b$ pour $a>b$;

2. $(+a)-(+b)=a-b=a+(0-b)=(0-b)+a=$
$=0-b+a=0-(b-a)=-(b-a)$ pour $a<b$;

3. $(+a)-(-b)=a-(0-b)=a-0+b=a+b$;

4. $(-a)-(+b)=(0-a)-b=0-a-b=0-(a+b)=$
$=-(a+b)$;

5. $(-a)-(-b)=(0-a)-(0-b)=0-a-0+b=$
$=0-(a-b)=-(a-b)$ pour $a>b$;

6. $(-a)-(-b)=(0-a)-(0-b)=(0-a)+b=b+$
$+0-a=b-a$ pour $a<b$.

C. Multiplication

1. $(+a).b=ab$;

2. $(-a).b=(0-a).b=0.b-ab=0-ab=-ab$;

3. $a.(+b)=ab$;

[15]) Nous appliquons ici d'abord la loi de commutation de l'Arithmétique pure, en l'étendant au zéro; et ensuite la règle des parenthèses de l'Arithmétique pure.

4. $a \cdot (-b) = a \cdot (0 - b) = a \cdot o - a \cdot b = 0 - ab = -ab$;

5. $(+a) \cdot (+b) = ab$;

6. $(+a) \cdot (-b) = a \cdot (-b) =$ (d'après la formule 4) $= -ab$;

7. $(-a) \cdot (+b) = (-a) \cdot b =$ (d'après la formule 2) $= -ab$;

8. $(-a) \cdot (-b) = (0 - a) \cdot (0 - b) = (0 - a) \cdot 0 - (0 - a) \cdot b =$
$= 0 - (0 - ab) = 0 - 0 + ab = +ab$.[16])

Deuxième conception

A. Addition

I. Formules axiomatiques

1. $\alpha + \beta = \gamma$;[17])

2. $(+a) + (+b) = +(\alpha + \beta) = +c$;

3. $(-a) + (-b) = -(\alpha + \beta) = -c$.

II. Formules déduites en supposant que le nombre positif soit égal au nombre absolu

1. $(+a) + (+b) =$ (si l'on suppose $+a = \alpha$ et $+b = \beta$) $=$
$= \alpha + \beta = +(\alpha + \beta)$;

2. $(+a) + (-b) = +(\alpha - \beta) = \alpha - \beta$ pour $\alpha > \beta$, car si $(+a) + (-b)$ était $= +(\alpha + \beta)$ on aurait (d'après la formule précédente) $(+a) + (-b) = (+a) + (+b)$, donc $-b = +b$, ce qui est impossible;

---

16) Nous appliquons ici d'abord la formule $(a - b)(c - d) = (a - b)c - (a - b)d$ de l'Aritmétique pure, en l'étendant au zéro; et ensuite la règle des parenthèses de l'Arithmétique pure.

Remarquons qu'on peut obtenir, de la même formule, par l'application de la même règle, la formule algébrigue $(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$, sans employer les formules 2, 4 et 8 ci-dessus.

17) Comme dans la deuxième conception, la diférence entre les nombres entiers naturels d'une part et les nombres entiers positifs et nègatifs d'autre part est une différence complète, nous désignerons, pour mieux faire resortir la nature des formules à déduire, les premiers par des lettres grecques et les deuxièmes par des lettres latines.

3. $(+a)+(-b) = -(\beta-\alpha)$ pour $\alpha<\beta$ (par preuve indirecte);

4. $(-a)+(+b) = -(\alpha-\beta)$ pour $\alpha>\beta$, car si $(-a)+(+b)$ était $= +(\alpha-\beta)$, on aurait (d'après la formule 2) $(-a)+(+b) = (+a)+(-b)$, donc $-a = +a$ et $+b = -b$, ce qui est impossible;

5. $(-a)+(+b) = +(\beta-\alpha)$ pour $\alpha<\beta$ (par preuve indirecte);

6. $(-a)+(-b) =$ (d'après la troisième formule axiomatique) $= -(\alpha+\beta)$;

7. $\alpha+(+b) =$ (d'après la formule 1) $= +(\alpha+\beta)$;

8. $\alpha+(-b) = (\ \ \ \ \ \ 2) = +(\alpha-\beta)$ pour $\alpha>\beta$;

9. $\alpha+(-b) = (\ \ \ \ \ \ 3) = +(\beta-\alpha)$ pour $\alpha<\beta$;

10. $(+a)+\beta = (\ \ \ \ \ \ 1) = +(\alpha+\beta)$;

11. $(-a)+\beta = (\ \ \ \ \ \ 4) = -(\alpha-\beta)$ pour $\alpha>\beta$;

12. $(-a)+\beta =$ (d'après la formule 5) $= +(\beta-\alpha)$ pour $\alpha<\beta$.

III. Formules déduites en supposant que le nombre negatif soit égal au nombre absolu

1. $(-a)+(-b) =$ (si l'on suppose $-a=\alpha$, $-b=\beta$) $= \alpha+\beta = -(\alpha+\beta)$;

2. $(-a+(+b) = -(\alpha-\beta)$ pour $\alpha>\beta$, car si $(-a)+(+b)$ était $= -(\alpha+\beta)$ on aurait (d'après la formule précédente) $(-a)+(+b) = (-a)+(-b)$, donc $+b = -b$, ce qui est impossible;

3. $(-a)+(+b) = +(\beta-\alpha)$ pour $\alpha<\beta$ (par preuve indirecte);

4. $(+ a) + (- b) = + (\alpha - \beta)$ pour $\alpha > \beta$ (par preuve indirecte);

5. $(+ a) + (- b) = - (\beta - \alpha)$ pour $\alpha < \beta$ (par preuve indirecte);

6. $(+ a) + (+ b) =$ (d'après la deuxième formule axiomatigue) $= + (\alpha + \beta)$;

7. $\alpha + (- b) =$ (d'après la formule 1) $= - (\alpha + \beta)$;

8. $\alpha + (+ b) =$ („ „ „ 2) $= - (\alpha - \beta)$ pour $\alpha > \beta$;

9. $\alpha + (+ b) =$ („ „ „ 3) $= - (\beta + \alpha)$ pour $\alpha < \beta$;

10. $(- a) + \beta =$ („ „ „ 1) $= - (\alpha + \beta)$;

11. $(+ a) + \beta =$ („ „ „ 4) $= + (\alpha - \beta)$ pour $\alpha > \beta$;

12. $(+ a) + \beta =$ („ „ „ 5) $= - (\beta - \alpha)$ pour $\alpha < \beta$.

B. Multiplication

I. Formules axiomatiques

1. $\alpha . \beta = \gamma$;

2. $$(+ a) . \beta = (\underbrace{+ a) + (+ a) + \ldots (+ a)}_{\beta\text{-fois}} =$$
$$= + \underbrace{(\alpha + \alpha + \ldots + \alpha)}_{\beta\text{-fois}} = + (\alpha . \beta);$$

3. $$(- a) . \beta = (\underbrace{- a) + (- a \ldots + (- a)}_{\beta\text{-fois}} =$$
$$- \underbrace{(\alpha + \alpha + \ldots + \alpha)}_{\beta\text{-fois}} = - (\alpha . \beta).$$

II. Formules déduites en supposant que le nombre positif soit égal au nombre absolu

1. $(+ a) . (+ b) =$ (si l'on suppose $+ a = \alpha$ et $+ b = \beta$) $= \alpha . \beta = + (\alpha . \beta)$;

2. $(- a) . (+ b) =$ (pour $+ b = \beta$) $= (- a) . \beta =$ (d'après la troisième formule axiomatique) $= - (\alpha . \beta)$;

3. $(+ a) . (- b) = - (\alpha . \beta)$, car si $(+ a) . (- b)$ était $= + (\alpha . \beta)$ on aurait $(+ a) . (- b) = (+ a) . (+ b)$, donc $- b = + b$, ce qui est impossible;

4. $(- a) . (- b) = + (\alpha . \beta)$, car si $(- a) . (- b)$ était $= - (\alpha . \beta)$ on aurait (d'après la formule 2) $(- a) . (- b) = (- a) . (+ b)$, donc $- b = + b$, ce qui est impossible;

5. $\alpha . (+ b) = + (\alpha . \beta)$;

6. $\alpha . (- b) = - (\alpha . \beta)$;

7. $(+ a) . \beta = + (\alpha . \beta)$;

8. $(- a) . \beta = - (\alpha . \beta)$.

III. Formules déduites en supposant que le nombre négatif soit égal au nombre absolu

1. $(- a) . (- b) =$ (pour $- a = \alpha$ et $- b = \beta$) $= \alpha . \beta = - (\alpha . \beta)$;

2. $(+ a) . (- b) = (+ a) . \beta =$ (d'après la deuxième formule axiomatique) $= + (\alpha . \beta)$;

3. $(- a) . (+ b) = + (\alpha . \beta)$, car si $(- a) . (+ b)$ était $= - (\alpha . \beta)$ on aurait $(- a) . (+ b) = (- a) . (- b)$, donc $+ b = - b$, ce qui est impossible;

4. $(+ a) . (+ b) = - (\alpha . \beta)$, car si $(+ a) . (+ b)$ ètait $= + (\alpha . \beta)$ on aurait (d'après la formule 2) $(+ a) . (+ b) = (+ a) . (- b)$, donc $+ b = - b$, ce qui est impossible;

5. $\alpha . (-b) = -(\alpha . \beta)$;

6. $\alpha . (+b) = +(\alpha . \beta)$;

7. $(-a) . \beta = -(\alpha , \beta)$;

8. $(+a) . \beta = +(\alpha . \beta)$.

Remarque finale

Si nous comparons maintenant les deux conceptions par rapport à leurs côtés positifs et leurs difficultés, nous arrivons aux conclusions suivantes.

La première conception est supérieure à la deuxième en tant qu'on y déduit directement les formules fondamentales des opérations envisagées, tandis que leurs preuves sont pour la plupart indirectes dans la deuxième.

La première conception semble être supérieure à la deuxième aussi en tant qu'elle ne mène qu'à un seul système algébrique, tandis que dans la deuxième on arrive aux deux systèmes algébriques différents, dont le premier est, par ses formules, identique au système algébrique de la première[18]).

Mais les difficultés logiques de la première conception sont, par contre, beaucoup plus grandes que celles de la deuxième. Car si les nombres entiers naturels étaient *comme tels* positifs (c'est-à-dire plus grands que zéro), comment ces mêmes nombres pourraient-ils être, en même temps, négatifs (c'est-à-dire plus petits que zéro)? Il est bien évident, que cela n'est guère possible et que les nombres négatifs, s'ils existent (au sens mathématique), ne pourraient être dans ce cas des nombres entiers. Ou, autrement dit, le nombre entier négatif représente, dans la première conception, une contradiction flagrante.

Dans la deuxième conception, au contraire, cette contradiction disparaît complètement. Car si les nombres entiers naturels ne sont comme tels ni positifs, ni négatifs, on peut, sans difficulté, les imaginer aussi bien comme positifs que comme négatifs.

---

[18]) Tandis que le deuxième pourrait être regardé en quelque sorte comme *système non-euclidien* de l'Algèbre.

Une deuxième difficulté de la première conception consiste dans l'usage beaucoup plus fréquent du zéro (dont la nature logique hybride — nombre et non-nombre en même temps, nombre positif et négatif en même temps — représente une difficulté inhérente aux deux conceptions également). Car les formules algébriques fondamentales ne peuvent être rigoureusement déduites, dans la première conception, qu'en se servant du zéro.

Ayant ainsi exposé les côtés positifs et les difficultés principales des deux conceptions, nous voulons nous abstenir de nous prononcer ici sur leur valeur logique définitive.[19]) Nous laissons au lecteur (et surtout au lecteur mathématicien) à en faire le choix.

D'ailleurs, le but principal de cet article, c'était de faire une séparation nette entre l'Arithmétique pure et l'Algèbre[20]), et de montrer que la première représente une discipline mathématique absolument exacte, tandis que, avec la deuxième, commencent les conventions, les incertitudes et les difficultés de la science mathématique.[21])

---

[19]) On pourrait affirmer p. ex., que la première n'est qu'un cas spécial (la supposition $+ a = \alpha$) de la deuxième.

[20]) Il y a très peu d'auteurs qui admetteut cette séparation. Pourtant elle est importante aussi en tant qu'elle nous fait entrevoir clairement, que tous les genres des nombres proprement algébriques (zero, nombres entiers positifs aussi bien que négatifs, nombres fractionnaires etc...) peuvent être regardés, par comparaison aux nombres entiers naturels, pour des nombres fictifs.

[21]) Dans cet article (comme dans nos travaux antérieurs de philosophie mathématique) nous soumettons, à l'opposé de la logistique (qui applique sans critique préalable la mathématique á la logique) la scienee mathématique à la critique d'une logique prémathématique.

BIBLIOGRAPHIE

1. *E. Schröder,* Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Bd I, 1873;

2. *O. Stolz* et *J. A. Gmeiner,* Theoretische Arithmetik, Erste Abteilung, 1911;

3. *H. Poincaré,* Sur la nature du raisonnement mathématique, dans *Revue de Métaphysique et de Morale,* 1894, p. 371—84 (réimprimé avec abréviations dans La Science et l'Hypothèse, ch. I, p. 9—28);

4. *B. Petronievics,* Les lois fondamentales de l'addition arithmétique et le príncipe de l'induction mathématique, dans la *Revue générale des Sciences,* 30 Juin 1924;

5. *H. Schubert, J. Tannery* et *J. Molk,* Principes fondamentaux de l'Arithmétique, dans *l'Encyclopédie des sciences mathématiques,* édition française, t. I, 1, p. 1—62.