

BIBLIOTEKA FILOZOFSKOG FAKULTETA

C



NOVI SAD

11736



010011736

COBISS

95
ACADEMIE ROYALE SERBE

BULLETIN

DE

L'ACADEMIE DES LETTRES

Nº 3

BELGRADE

1939

ACADÉMIE ROYALE SERBE

Bemerkungen zur vierten direkten Rechenoperation

№ 3

BELGRADE
1939

BEMERKUNGEN ZUR VIERTEN DIREKTEN RECHENOPERATION

VON

BRANISLAV PETRONIEVICS

Addition, Multiplikation und Potenzieren, die drei ersten direkten Rechenoperationen, können im Gebiete der natürlichen ganzen Zahlen sowohl in independenter wie in rekurrenter Weise definiert werden.

Die independente Definition der Multiplikation lautet:

$$a \cdot b = a \cdot \underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b\text{-mal}},$$

und die rekurrente:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a \cdot (n + 1) = a \cdot n + a \cdot 1 = a \cdot n + a = \dots = \\ &= \left\{ \left[(a \cdot 1 + a) + a \right] + a \right\} + a + \dots \end{aligned}$$

Die independente Definition des Potenzierens lautet:

$$a^b = a^{\overbrace{1+1+1+\dots+1}^b} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b\text{-mal}},$$



und die rekurrente:

$$a^b = a^{n+1} = a^n \cdot a^1 = a^n \cdot a = \dots = \left\{ \left[(a^1 \cdot a) \cdot a \right] \cdot a \right\} \dots$$

Für die Multiplikation gelten die Distributionsgesetze:

$$1. a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$2. (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

$$3. a \cdot (b + c) = a \cdot (c + b),$$

und für das Potenziren die Distributionsgesetze:

$$1. a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

und

$$2. a^{b+c} = a^{c+b}.$$

Auf Grund des dritten Distributionsgesetzes für die Multiplikation und des zweiten für das Potenziren lässt sich schliessen (vgl. weiter unten), dass für bestimmte Werthe von a und b die Ausdrücke $a \cdot b$ und a^b nur einen einzigen Werth besitzen. Da die vierte direkte Rechenoperation in dem wiederholten Potenziren durch dieselbe Zahl besteht, so ist sie durch den Ausdruck:

$${}_b a = a \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b\text{-mal}},$$

dargestellt. Im Gegensatz zu den beiden früheren Ausdrücken aber ist dieser Ausdruck für bestimmte Zahlen a und b vielwerthig (so hat 3_3 zwei verschiedene Werthe, jenachdem ${}^3_3 = (3^3)^3$ und ${}^3_3 = 3^{(3^3)}$ ist). Daher muss bei der vierten Operation (die wir als *erstes höheres Potenziren* benennen können) die *allgemeine* Operation $a^{a^{a^{\dots}}}$ von den *speciellen* Operationen $(a^a)^a$, $a^{(a^a)}$ etc. streng unterschieden werden, da jeder bestimmte Werth des Aus-

und die rekurrente:

$$a^b = a^{n+1} = a^n \cdot a^1 = a^n \cdot a = \dots = \left\{ \left[(a^1 \cdot a) \cdot a \right] \cdot a \right\} \dots$$

Für die Multiplikation gelten die Distributionsgesetze:

$$1. a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$2. (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

$$3. a \cdot (b + c) = a \cdot (c + b),$$

und für das Potenziren die Distributionsgesetze:

$$1. a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

und

$$2. a^{b+c} = a^{c+b}.$$

Auf Grund des dritten Distributionsgesetzes für die Multiplikation und des zweiten für das Potenziren lässt sich schliessen (vgl. weiter unten), dass für bestimmte Werthe von a und b die Ausdrücke $a \cdot b$ und a^b nur einen einzigen Werth besitzen. Da die vierte direkte Rechenoperation in dem wiederholten Potenziren durch dieselbe Zahl besteht, so ist sie durch den Ausdruck:

$${}_b a = a \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b\text{-mal}},$$

dargestellt. Im Gegensatz zu den beiden früheren Ausdrücken aber ist dieser Ausdruck für bestimmte Zahlen a und b vielwerthig (so hat ${}^3 3$ zwei verschiedene Werthe, jenachdem ${}^3 3 = (3^3)^3$ und ${}^3 3 = 3^{(3^3)}$ ist). Daher muss bei der vierten Operation (die wir als *erstes höheres Potenziren* benennen können) die *allgemeine* Operation $a^{a^{a^{\dots}}}$ von den *speciellen* Operationen $(a^a)^a$, $a^{(a^a)}$ etc. streng unterschieden werden, da jeder bestimmte Werth des Aus-

drucks ${}^b a$, wie wir sehen werden,, auf eine Specialoperation hinweist.

Die allgemeine Operation der vierten Rechnungsstufe ist durch die zwei Definitionen:

$${}^b a = \overbrace{1+1+1+\dots+1}^b a = a \underbrace{a \dots a}_{b\text{-mal}},$$

$${}^{n+m} a = \underbrace{a \underbrace{a \dots a}_{n\text{-mal}}}_{n+m\text{-mal}} = ({}^n a)^{(m)} a$$

fixiert, wobei $n+m$ als aufzugebene und nicht als ausgeführte Summe aufzufassen ist.¹⁾

Die zweite Definition entspricht dem ersten Distributionsgesetz der beiden früheren Operationen, während das Analogon des dritten Distributionsgesetzes der Multiplikation und des zweiten des Potenzirens bei der vierten nicht besteht, da

$${}^{n+m} a \neq {}^{m+n} a,$$

wie man das folgendermaassen nachweisen kann.

Das dritte Distributionsgesetz der Multiplikation

$$a \cdot (b + c) = a \cdot (c + b)$$

ist gültig nur, weil für die Addition das Kommutationsgesetz gilt. Denn dasselbe folgt aus

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

und

$$a \cdot (c + b) = a \cdot c + a \cdot b,$$

weil

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot c + a \cdot b$$

ist.

¹⁾ Denn nur in diesem Falle ist die zweite Formel eine Definition und nicht ein zu beweisender Satz.

Auf dieselbe Weise folgt aus

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

und

$$a^{c+b} = a^c \cdot a^b,$$

da $a^b \cdot a^c = a^c \cdot a^b$ ist, das Distributionsgesetz des Potenziers

$$a^{b+c} = a^{c+b}.$$

Da aber nach der zweiten Definition

$${}^{n+m}a = ({}^n a) ({}^m a) \text{ und } {}^{m+n}a = ({}^m a) ({}^n a)$$

ist und, infolge der Ungültigkeit des Kommutationsgesetzes

$$a^b = b^a,$$

$$({}^n a) ({}^m a) \neq ({}^m a) ({}^n a),$$

so ist das Distributionsgesetz ${}^{n+m}a = {}^{m+n}a$ für die allgemeine Operation der vierten Stufe ungültig.

Auf grund der zweiten Definition und der Ungültigkeit des Distributionsgesetzes ${}^{n+m}a = {}^{m+n}a$ lassen sich bei der neuen Operation die folgenden drei grundlegenden Specialoperationen unterscheiden:

$$1. \quad {}^{n+1}a = ({}^n a) a = \left\{ \left[(a^a)^a \right]^{a \dots} \right\}^a = a \underbrace{a(a \dots a)}_{n-mal} = a(a^n),$$

$$2. \quad ({}^{2^n})a = \left\{ \left[(a^a)(a^a) \right] \left[(a^a)(a^a) \right] \right\} \left\{ \left\{ \right\} \right\} \dots$$

$$3. \quad {}^{1+n}a = a({}^n a) = a \left\{ a \left[a \dots (a^a) \right] \right\} = a \underbrace{a(a \dots a)}_{n-mal}$$

Die Existenz der ersten Specialoperation folgt aus der Reihe :

$${}^1a = a$$

$${}^2a = {}^{1+1}a = ({}^1a)({}^1a) = a^a ,$$

$${}^3a = {}^{2+1}a = ({}^2a)({}^1a) = (a^a)^a = a^{(a^2)} ,$$

$${}^4a = {}^{3+1}a = ({}^3a)({}^1a) = (a^a)^{a^a} = a^{(a^3)} ,$$

$${}^{n+1}a = ({}^na)({}^1a) = \underbrace{(a^a)^{a^a \dots a^a}}_{n\text{-mal}} = a^{(a^n)}$$

die Existenz der zweiten aus der Reihe :

$${}^2a = a^a ,$$

$$({}^{2^2})a = {}^4a = {}^{2+2}a = ({}^2a)({}^2a) = (a^a)^{(a^a)} ,$$

$$({}^{2^3})a = {}^8a = {}^{4+4}a = ({}^4a)({}^4a) = \left[(a^a)^{(a^a)} \right] \left[(a^a)^{(a^a)} \right] ,$$

$$({}^{2^4})a = {}^{16}a = {}^{8+8}a = ({}^8a)({}^8a) = \left\{ \left[(a^a)^{(a^a)} \right] \left[(a^a)^{(a^a)} \right] \right\} \left\{ \left[(a^a)^{(a^a)} \right] \left[(a^a)^{(a^a)} \right] \right\} ,$$

$$({}^{2^n})a = \left\{ \left[(a^a)^{(a^a)} \right] \left[(a^a)^{(a^a)} \right] \right\} \left\{ \left[(a^a)^{(a^a)} \right] \left[(a^a)^{(a^a)} \right] \right\} \dots$$

und die Existenz der dritten aus der Reihe:

$$\begin{aligned} {}^2a &= {}^{1+1}a = ({}^1a)^{({}^1a)} = a^a, \\ {}^3a &= {}^{1+2}a = ({}^1a)^{({}^2a)} = a^{(a^a)}, \\ {}^4a &= {}^{1+3}a = ({}^1a)^{({}^3a)} = a[a^{(a^a)}], \\ {}^5a &= {}^{1+4}a = ({}^1a)^{({}^4a)} = a\{a[a^{(a^a)}]\}, \\ &\text{---} \end{aligned}$$

$${}^{1+n}a = ({}^1a)^{({}^na)} = a(\underbrace{a^{(a \dots a)}}_{n\text{-mal}})$$

wodurch jede von ihnen in rekurrennter Weise definiert ist.²⁾ Dieselben fangen an sich voneinander zu unterscheiden für $n > 1$.

Neben den drei grundlegenden bestehen auch andere Specialoperation. Dies wird am leichtesten aus dem speciellen Beispiel ⁿ3 ersichtlich werden, dessen Werthe wir für $n = 1, 2, 3, \dots$ ihrer Anzahl nach bestimmen wollen.

$${}^13 = 3 \quad \text{besitzt einen einzigen Werth;}$$

$${}^23 = 3^3 \quad \text{„ „ „ „ ;}$$

$${}^33 = 3^{3^3} \quad \text{„ zwei verschiedene Werthe:}$$

²⁾ Wie die rekurrente Definition des Potenzirens aus der Reihe folgt:

$$a^1 = a,$$

$$a^2 = a^{1+1} = a^1 \cdot a^1 = a \cdot a,$$

$$a^3 = a^{2+1} = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a,$$

$$a^4 = a^{3+1} = a^3 \cdot a^1 = [(a \cdot a) \cdot a] \cdot a,$$

$$\text{---} \\ a^{n+1} = a^n \cdot a^1 = \underbrace{(a \cdot a) \cdot a \dots a}_{n+1\text{-mal}}.$$

$$^3_3 = {}^{2+1}_3 = ({}^2_3)^3 = (3^3)^3 = 3^9,$$

$$^3_3 = {}^{1+2}_3 = 3^{(2)_3} = 3^{(3^3)} = 3^{27};$$

$^4_3 = 3^{3^3}$ hat fünf verschiedene Werthe:

$$^4_3 = {}^{3+1}_3 = ({}^{2+1}+1)_3 = (3^3)^3 = (3^9)^3 = 3^{27},$$

$$^4_3 = {}^{3+1}_3 = ({}^{1+2}+1)_3 = [3^{(3^3)}]^3 = 3^{27 \cdot 3},$$

$$^4_3 = {}^{2+2}_3 = (3^3)(3^3) = 27^{27},$$

$$^4_3 = {}^{1+3}_3 = {}^{1+(2+1)}_3 = 3^{[(3^3)^3]} = 3^{(3^9)},$$

$$^4_3 = {}^{1+3}_3 = {}^{1+(1+2)}_3 = 3^{[3^{(3^3)}]} = 3^{(3^{27})};$$

5_3 hat vierzehn verschiedene Werthe, und zwar:

$$1. \text{ für } 5 = 4 + 1 = (3 + 1) + 1 = [(2 + 1) + 1] + 1,$$

$$2. \text{ „ } 5 = 4 + 1 = (3 + 1) + 1 = [(1 + 2) + 1] + 1,$$

$$3. \text{ „ } 5 = 4 + 1 = (2 + 2) + 1,$$

$$4. \text{ „ } 5 = 4 + 1 = (1 + 3) + 1 = [1 + (2 + 1)] + 1,$$

$$5. \text{ „ } 5 = 4 + 1 = (1 + 3) + 1 = [1 + (1 + 2)] + 1,$$

$$6. \text{ „ } 5 = 3 + 2 = (2 + 1) + 2,$$

$$7. \text{ „ } 5 = 3 + 2 = (1 + 2) + 2,$$

$$8. \text{ „ } 5 = 2 + 3 = 2 + (2 + 1),$$

$$9. \text{ „ } 5 = 2 + 3 = 2 + (1 + 2),$$

$$10. \text{ „ } 5 = 1 + 4 = 1 + (3 + 1) = 1 + [(2 + 1) + 1],$$

$$11. \text{ „ } 5 = 1 + 4 = 1 + (3 + 1) = 1 + [(1 + 2) + 1],$$

$$13. \text{ „ } 5 = 1 + 4 = 1 + (2 + 2),$$

$$13. \quad „ \quad 5 = 1 + 4 = 1 + (1 + 3) = 1 + [1 + (2 + 1)];$$

$$14. \quad „ \quad 5 = 1 + 4 = 1 + (1 + 3) = 1 + [1 + (1 + 2)],$$

u. s. w., u. s. w.

Aus dem Angeführten ersieht man, dass 3_3 deshalb zwei verschiedene Werthe besitzt, weil 3 entweder $= 2 + 1$ oder $1 + 2$ ist; dass 4_3 fünf verschiedene Werthe besitzt, weil 4 entweder $= 3 + 1$ oder $1 + 3$, 3 (in $3 + 1$ und $1 + 3$) entweder $= 2 + 1$ oder $1 + 2$ ist, und ausserdem noch $4 = 2 + 2$ ist; dass 5_3 vierzehn Werthe besitzt, weil 5 entweder $= 4 + 1$ oder $1 + 4$ ist (wobei 4 in jedem dieser Fälle fünf verschiedene Werthe besitzt), und ausserdem noch $5 = 3 + 2$ und $2 + 3$ ist (wodurch vier neue Werthe entstehen).

In ähnlicher Weise lässt sich weiter zeigen, dass 6_3 zwei und vierzig Werthe besitzen wird, von denen 14 dem Falle $6 = 5 + 1$, andere 14 dem Falle $6 = 1 + 5$, wieder andere 14 den Fällen $6 = 4 + 2$ (5 Werthe), $6 = 3 + 3$ [4 Werthe, und zwar für $(2 + 1) + (2 + 1)$, $(2 + 1) + (1 + 2)$, $(1 + 2) + (2 + 1)$ und $(1 + 2) + (1 + 2)$] und $6 = 2 + 4$ (5 Werthe); dass 7_3 hundert zwei und dreissig Werthe besitzt, u. s. w.

Aus dem Angeführten ersieht man noch, dass die zwei Werthe von 3_3 den beiden extremen grundlegenden Specialoperationen (der ersten und der dritten) entsprechen; dass in 4_3 neben diesen auch die zweite grundlegende Specialoperation auftritt; dass aber in 5_3 , neben den beiden extremen, auch Operationen auftreten, die die drei grundlegenden als Bestandtheile in sich enthalten (während nämlich der erste und der vierzehnte Fall den beiden extremen Operationen entsprechen, tritt in dem dritten und dem zwölften Fall die zweite Operation als Bestandtheil auf), die zweite grundlegende Specialoperation als reine Operation fehlt dagegen vollständig; auch in 6_3 ist sie abwesend (sie erscheint wieder erst in 8_3), während hier die Fälle $3 + 3 = (2 + 1) + (2 + 1)$ und $3 + 3 = (1 + 2) + (1 + 2)$ die ersten Anfänge zweier gemischter Specialoperationen vom Typus $3 \cdot 2^n$ darstellen (worin n reihenweise $= 1, 2, 3 \dots$ zu setzen ist).

Man muss demnach neben den drei grundlegenden Specialoperationen, die als *reine* Specialoperationen zu bezeichnen

sind, auch Specialoperationen in unbestimmter Anzahl zulassen, die als *gemischte* zu bezeichnen sind. Die Reinheit der beiden extremen grundlegenden Specialoperationen besteht darin, dass in denselben b als (aufgegebene) Summe aus der vorhergehenden Zahl (n) und der Einheit, die vorhergehende Zahl wiederum als eine ebensolche Summe u. s. w. aufzufassen ist. Um diese Reinheit der beiden auch äusserlich zum Vorschein kommen zu lassen, wollen wir fortan die erste von ihnen mit dem Ausdruck $\widehat{n+1}a$ bezeichnen, und die zweite mit dem Ausdruck $\widehat{1+n}a$.

Ähnlich der vierten kann auch die fünfte allgemeine direkte Rechenoperation durch die folgenden zwei Definitionen fixiert werden:

$${}^b_1a = \underbrace{a \dots a}_{b\text{-mal}} a,$$

$${}^{n+m}_1a = \underbrace{a \dots a}_{m\text{-mal}} \underbrace{a \dots a}_{n\text{-mal}} = ({}^m_1a)({}^n_1a),$$

wobei wiederum $n + m$ nicht als ausgeführte sondern als aufgegebene Summe aufzufassen ist.

Wie b_1a die fünfte, so würde b_2a die sechste, b_3a die siebente, b_na die $n + 4$ -te direkte Operation bezeichnen, und jede von ihnen wäre durch die ähnlichen zwei Definitionen fixierbar, nur liessen sich diese Definitionen schwerlich in der Ebene des Papiers zur Darstellung bringen.

Von der wenig umfangreichen Litteratur über die vierte und die höheren Rechenoperationen war dem Verfasser vor der Abfassung dieser Abhandlung in serbischer Sprache nur die Abhandlung von *H. Gerlach* aus dem Jahre 1882 bekannt³⁾. Seitdem

³⁾ Vgl. *Dr. H. Gerlach*, Zur vierten Rechnungsstufe, erschienen in „*Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*“, Jahrgang 13, 1882, S. 423–436.

hat der Verfasser noch die wichtige Abhandlung von *F. Woepcke* einsehen können.⁴⁾ *Woepcke* war der erste der den Unterschied der beiden extremen Specialoperationen erkannte, er kennt aber unseren Unterschied der allgemeinen von den Specialoperationen ebensowenig wie *Gerlach*. Während *Woepcke* der ersten Specialoperation ernste Aufmerksamkeit widmet, beschäftigt sich *Gerlach* ausschliesslich mit der zweiten, für die er die bequeme Bezeichnung ${}^b a$ vorschlägt, die wir für die allgemeine Operation benutzen. Die wenigen Begeln, die *Woepcke* und *Gerlach* für die beiden extremen Specialoperationen aufgestellt haben, müssten im Lichte unserer neuen Auffassung derselben nachgeprüft werden.

⁴⁾ *F. Woepcke*, Note sur l'expression $\left((aa)^a\right)^a$ et les fonctions inverses correspondantes, erschienen in „*Journal für die reine und angewandte Mathematik*“ (Crelle's Journal), Bd. 42, 1851, s. 83—90.

Den in der „*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*“ (Bd. I, H. 1, s. 26 f.) zitierten Aufsatz von *E. Schulze* (*Archiv für Mathematik*, 1886) konnte der Verfasser noch nicht einsehen.

