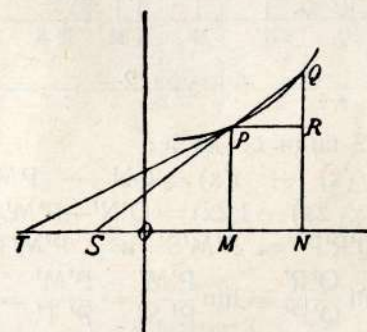


ИЗВОЂЕЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ КВОЦИЈЕНАТА ИЗРАЗА $y = \sin 2x$ И $y = 2\sin x$ НА ОСНОВУ ГЕОМЕТРИСКЕ МЕТОДЕ ГРАНИЦА

Претходна примедба

Суштину геометријске методе граница објаснићемо фигуром 1.¹⁾ У њој су $OM = x$ и $PM = y$ координате тачке P , $ON = x + \Delta x$, $QN = y + \Delta y$ и $PR = \Delta x$, $QR = \Delta y$. Из $\triangle PRQ \sim \triangle SMP$ следује $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PM}{SM}$. Што се тачка Q више



Фигура 1

приближује тачци P (P и Q су тачке у којима секанта сече криву, P је тачка додира њене тангенте), тим ће се и однос $\frac{PM}{SM}$ све више приближавати односу $\frac{PM}{TM}$, из чега излази да је овај последњи гранична вредност првога, дакле $\lim \frac{PM}{SM} = \frac{PM}{TM}$. А како је $\lim \frac{PM}{SM} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, то је $\frac{dy}{dx} = \frac{PM}{TM}$.

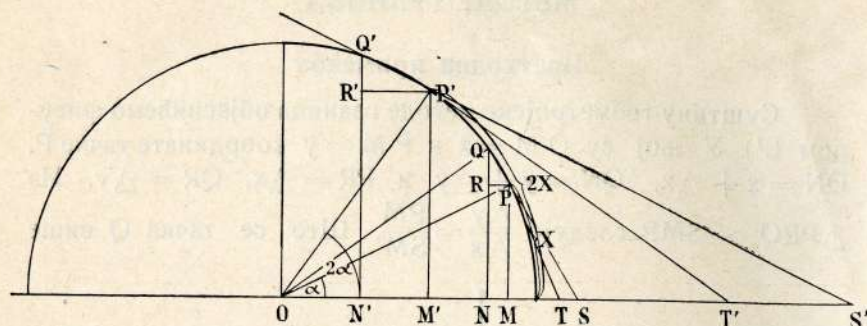
I

$$y = \sin 2x$$

У фигури 2, PM је синус лука x , $P'M'$ синус лука $2x$, $PQ = \Delta x$, $P'Q' = \Delta 2x$, P је додирна тачка тангенте PT ,

¹⁾ Види мој чланак „Извођење диференцијалних квоцијената израза $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y = \sqrt{2ax}$ на основу геометријске методе граница“ у „Гласнику професорског друштва“ за 1926 – у.

P и Q точки пресека секанте PS, P' је додирна тачка тангенте P'T', а P' и Q' тачке пресека секанте P'S'.



Фигура 2

Из фигуре 2 види се да је:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = QN - PM = QR = \Delta \sin x,$$

$$\Delta f(2x) = f(2x + \Delta 2x) - f(2x) = Q'N' - P'M' = Q'R' = \Delta \sin 2x.$$

Како је $\Delta Q'R'P' \sim P'M'S'$ и $\Delta P'M'T' \sim O M'P'$ то је:

$$\lim \frac{\Delta \sin 2x}{\Delta 2x} = \lim \frac{Q'R'}{Q'P'} = \lim \frac{P'M'}{P'S'} = \frac{P'M'}{P'T'} = \frac{OM'}{OP'} = \cos 2x.$$

Како је $\Delta 2x = 2\Delta x$ биће:

$$\lim \frac{\Delta \sin 2x}{\Delta 2x} = \lim \frac{\Delta \sin 2x}{2\Delta x}.$$

Како је даље

$$\lim \frac{\Delta \sin 2x}{\Delta 2x} = \frac{d \sin 2x}{d 2x} \text{ и } \lim \frac{\Delta \sin 2x}{2\Delta x} = \frac{d \sin 2x}{2dx} \text{ биће:}$$

$$\frac{d \sin 2x}{d 2x} = \frac{d \sin 2x}{2dx}.$$

Према томе биће напоследку:

$$\frac{d \sin 2x}{dx} = 2 \cos 2x.$$

II

$$y = 2 \sin x$$

У фигури 3, PM је синус лука x (тј. $PM = \sin x$), $P'M' = 2 \sin x$, $PQ = \Delta x$, P је додирна тачка тангенте PT, P и Q тачке пресека секанте PS.

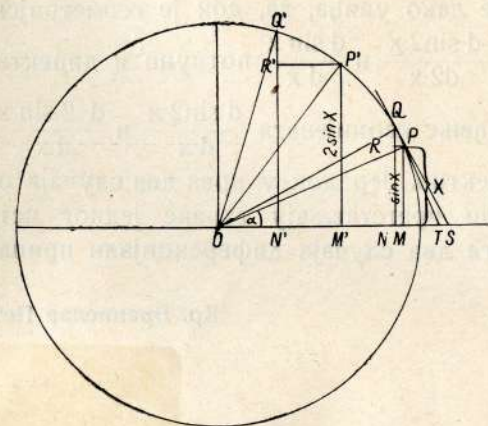
Из фигуре 3 види се да је:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = QN - PM = QR = \Delta \sin x,$$

$$\Delta 2 f(x) = 2 \Delta f(x) = 2[f(x + \Delta x) - f(x)] = 2f(x + \Delta x) - 2f(x) = Q'N' - P'M' = Q'R' = \Delta 2 \sin x = 2 \Delta \sin x.$$

Како је $\Delta 2 \sin x = 2 \Delta \sin x$, биће:

$$\lim \frac{\Delta 2 \sin x}{\Delta x} = \lim \frac{2 \Delta \sin x}{\Delta x} = 2 \lim \frac{\Delta \sin x}{\Delta x}.$$



Фигура 3

Како је даље

$$\lim \frac{\Delta 2 \sin x}{\Delta x} = \frac{d 2 \sin x}{d x} \text{ и } \lim \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{d \sin x}{d x}, \text{ и како је}$$

(на основу сличности троуглова P M T и O M P)

$$\frac{d \sin x}{d x} = \lim \frac{QR}{QP} = \lim \frac{PM}{PS} = \frac{OP}{OM} = \cos x, \text{ то ће бити}$$

напоследку:

$$\frac{d 2 \sin x}{d x} = 2 \cos x.$$

Завршна примедба

Упоредимо геометријско извођење диференцијалних квоцијената датих израза са аналитичким извођењем тих квоцијената:

$$1. \frac{d \sin 2x}{d x} = \frac{d \sin 2x}{d 2x} \cdot \frac{d 2x}{d x} = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x,$$

$$2. \frac{d 2 \sin x}{d x} = 2 \frac{d \sin x}{d x} = 2 \cos x.$$

Као што се види, геометријско извођење у првом случају утолико је простије што се у њему из $\frac{d \sin 2x}{d 2x}$ непосредно закључује (пошто је $d 2x = 2 dx$) да је $\frac{d \sin 2x}{dx} = 2 \cos 2x$.

Даље се лако увиђа, да, док је геометријско извођење квоцијената $\frac{d \sin 2x}{d 2x}$ и $\frac{d \sin x}{dx}$ потпуно и директно, да геометријско извођење квоцијената $\frac{d \sin 2x}{dx}$ и $\frac{d 2 \sin x}{dx}$ није ни потпуно ни директно. Јер док у прва два случаја одговарајући диференцијали претстављају стране једног истог троугла, дотле у друга два случаја диференцијали припадају разним троуглима.

Др. Бранислав Петронијевић