

БРАНИСЛАВ ПЕТРОНИЈЕВИЋ

ПРИМЕНА ХИПЕРБОЛНИХ ФУНКЦИЈА НА ИЗВОЂЕЊЕ
ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФОРМУЛА ПРАВОЛИНИЈСКОГ
ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА ЛОБАЧЕВСКОВЕ РАВНИ
ЧИСТО ПЛАНИМЕТРИЈСКИМ ПУТЕМ

Претходна примедба

Док су творци неевклидове геометије, Лобачевски и Бољај, могли да изведу те тригонометријске формуле само узимајући у помоћ фигуре тродимензионалног простора, дотле је немачки математичар Либман успео да те формуле изведе чисто планиметријски применом хиперболних функција и граничних лукова.¹⁾ То извођење донекле је упростио енглески математичар Сомервил.²⁾

У следећим редовима писац је покушао да Либман-Сомервилово извођење још више упрости, при чему му је било од извесне помоћи и Каганово извођење уз руски превод „Геометријских испитивања“ Лобачевскога.³⁾

Полазну тачку за ово извођење претставља гранични лук код кога је тангента у једној крајњој тачци (тј. управна на осу која пролази кроз ту тачку) паралелна са осом која пролази кроз другу крајњу тачку. Тај се гранични лук означава са S , а сваки други гранични лук са s .

¹⁾ Први пут је то извођење Либман саопштио у једној расправи из 1907-е г., па затим у другом издању своје „*Nichteuklidische Geometrie*“, 1912-е. У трећем издању од 1923-е то се извођење налази на стр. 32 ff и 55 ff.

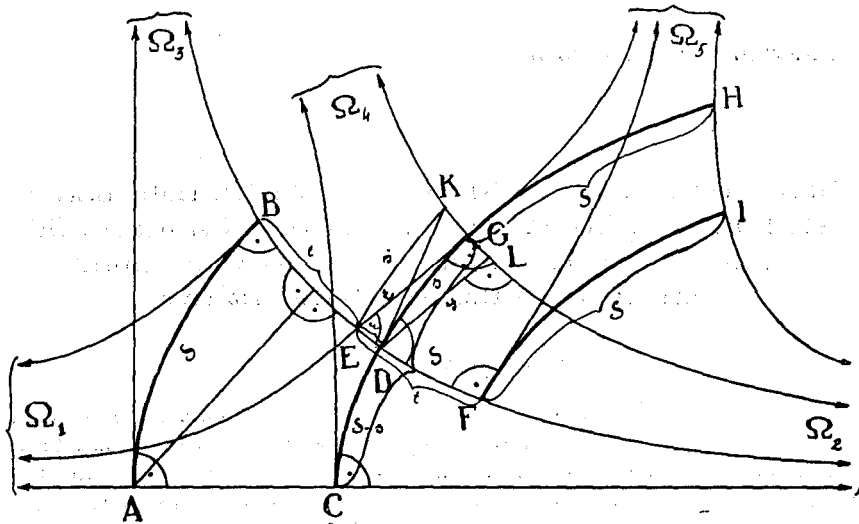
²⁾ D. M. Sommerville, *The Elements of Noneukclidean Geometry*, 1914 (p. 61—74),

³⁾ Каганов превод изашао је у првој свесци новог издања целокупних дела Лобачевскога од стране совјетске Академије наука у Москви 1945 г. под насловом: *Н. М. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий. Перевод... В. Ф. Кагана.*

У том преводу одговарајуће излагање налази се у „Приложеније VII“, стр. 164—166 (т. 14 и 15).

У следећем биће цитиран и мој српски превод Лобачевскога, чије је друго издање издала српска Академија наука у збирци „Класични научни списи“, књ. III, 1951 (и то биће цитирани „Додатци“ и параграфи).

У фиг. 1 гранични луци AB , CG , GH и FJ једнаки су и равни луку S , док је гранични лук $DG = s$, тако да је лук $CD = S - s$, а лук $DH = S + s$. Даље је (ако са Ω означимо тачку пресека двеју паралелних у бесконачности) $B\Omega_1 \parallel A\Omega_1$, $G\Omega_1 \parallel C\Omega_1$ и (према ставу 25-ом) $B\Omega_1 \parallel G\Omega_1$. Ако се дуж EG означаи са t , биће



Фиг. 1

$\angle GED = \Pi(t)$, пошто је $E\Omega_2 \parallel G\Omega_2$. Како је $\angle \Omega_1 EB = GED$, то је и $BE = t$. Како је пак $F\Omega_5 \parallel J\Omega_5$, $G\Omega_5 \parallel H\Omega_5$ и $E\Omega_5 \parallel F\Omega_5$, то је и $EF = t$ (и $DF = t - u$).

Ако се дуж ED означаи са u , следоваће непосредно из фигуре да је (према формули $s = s' \cdot e^x$ из става 33):

$$S : (S - s) = e^{t+u}, \quad (S + s) : S = e^{t-u},$$

а одавде

$$S - s = S e^{-(t+u)}, \quad S + s = S e^{t-u}.$$

Сабирањем последњих двеју једначина следоваће

$$\begin{aligned} 2S &= S(e^t e^{-u} + e^{-t} e^{-u}) = \\ &= S e^{-u} (e^t + e^{-t}), \end{aligned}$$

а одавде

$$e^u = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t;$$

одузимањем (претпоследње од последње) следоваће

$$\begin{aligned} 2s &= S(e^t e^{-u} - e^{-t} e^{-u}) = \\ &= S e^{-u} (e^t - e^{-t}) = \\ &= S \frac{2}{e^t + e^{-t}} (e^t - e^{-t}), \end{aligned}$$

а одавде

$$s = S \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = S \operatorname{tgh} t.$$

Ако се лук EK означаи са s' , биће

$$s' = s e^u = S \operatorname{tgh} t \cosh t = S \frac{\sinh t}{\cosh t} \cosh t = S \sinh t.$$

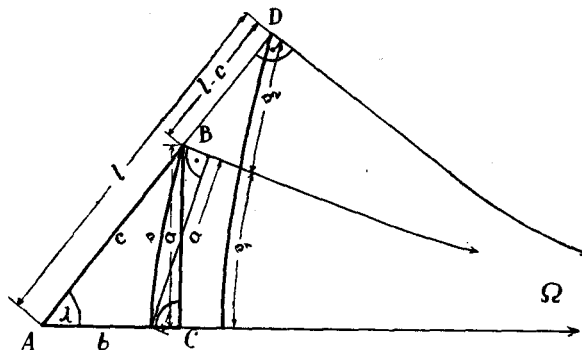
Ако се напоследку управна DL означаи са y , биће (пошто је у истом односу према луку s у коме је t према s')

$$s = S \sinh y.$$

II

Тригонометријске формуле за праволинијски правоугли троугао Лобачевске равни изводе се овако (хиперболическе функције изложене су у „Додатку II“).

Нека је у фиг. 2 ABC праволинијски правоугли троугао са правим углом C и странама a, b, c . Продужимо страну c иза темена B до тачке D тако, да управна у тачци D на то продужење буде паралелна са продужењем стране b иза тачке C , тј. да буде $DQ \parallel AQ$. Ако растојање AD означимо са l , биће према томе



Фиг. 2

$\angle \lambda = \Pi(l)$. Повуцимо из темена B полуправу $BQ \parallel DQ$, тада ће $\angle DBQ$ бити $= \Pi(l - c)$. Повуцимо даље из тачака B и D граничне луке s и $s_1 + s_2$, чије ће осе бити паралелне CQ , BQ и DQ .

Како је (на основу формула изведених у претходној фигури) с једне стране

$$s_1 + s_2 = S \operatorname{tgh}^* l$$

а с друге

$$s_1 + s_2 = S \frac{\sinh a}{\cosh(l - c)} + S \operatorname{tgh}(l - c),$$

[пошто је

$$s = S \sinh a, \quad e^u = \cosh (l - c),$$

дакле

$$s_1 = s e^{-u} = S \frac{\sinh a}{\cosh (l - c)}$$

и

$$s_2 = S \operatorname{tgh} (l - c) \quad],$$

то је

$$S \operatorname{tgh} l = S \frac{\sinh a}{\cosh (l - c)} + S \operatorname{tgh} (l - c),$$

$$\frac{\sinh l}{\cosh l} = \frac{\sinh a}{\cosh (l - c)} + \frac{\sinh (l - c)}{\cosh (l - c)},$$

дакле

$$\sinh l \cosh (l - c) = \sinh a \cosh l + \sinh (l - c) \cosh l.$$

Али како је

$$\cosh (l - c) = \cosh l \cosh c - \sinh l \sinh c,$$

$$\sinh (l - c) = \sinh l \cosh c - \cosh l \sinh c,$$

то је даље

$$\begin{aligned} \sinh l (\cosh l \cosh c - \sinh l \sinh c) &= \\ &= \sinh a \cosh l + \cosh l (\sinh l \cosh c - \cosh l \sinh c), \\ \sinh c (\cosh^2 l - \sinh^2 l) &= \sinh a \cosh l, \\ \sinh c &= \sinh a \cosh l. \end{aligned}$$

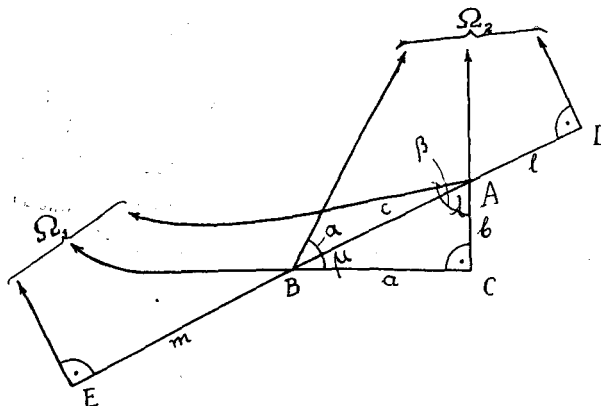
Ово је основна формула тригонометрије правоуглог троугла Лобачевскове равни, у којој се јављају само хиперболне функције страна троуглових (a и b) и дужи паралелизма (угла λ), а која је изведена чисто планиметријски, без употребе сферног троугла. Остале формуле изводе се чисто планиметријски на основу кореспонденције која постоји између правоуглог троугла и троправоуглог (тзв. Ламбертовог) четвороугла.

III

Та се кореспонденција утврђује на следећи начин.

У фиг. 3 полазну тачку сачињава правоугли троугао ABC са правим углом у C , оштрим угловима λ и μ и странама c , a и b . Како претпостављамо да је $\lambda = P(l)$ и $\mu = P(m)$, то је хипотенуза c продужена иза тачке A за l и иза тачке B за m , а из крајњих

тачка тих продужења D и E подигнуте су управне. Даље је катета a продужена иза B тако да BQ_1 буде $\parallel EQ_1$, катета b



Фиг. 3

продужена иза A тако да AQ_2 буде $\parallel DQ_2$, а из тачака A и B повучене полуправе AQ_1 и BQ_1 тако да је $\sphericalangle Q_2BC = \alpha = P(a)$, а $\sphericalangle Q_1AC = \beta = P(b)$.

Тада ће из фиг. 3 следовати да је:

$$(1) \quad P(c+l) = \alpha - \mu,$$

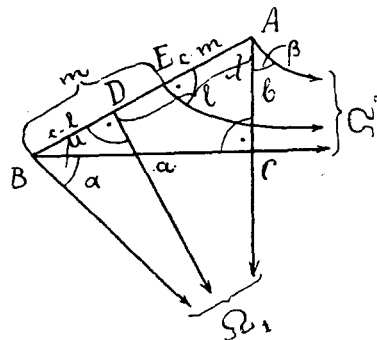
$$(1') \quad P(c+m) = \beta - \lambda.$$

У фиг. 4 на хипотенузи c правоуглог троугла ABC подигнута је у тачци D , која дели хипотенузу на одсечке $DB = c-l$ и $DA = l$, управна DQ_1 , тако да је $BQ_1 \parallel DQ_1$ и $AQ_1 \parallel DQ_1$. Даље је из тачке E на хипотенузи c , која ову дели на одсечке $BE = m$ и $AE = c-m$, подигнута управна EQ_2 тако да је $BQ_2 \parallel EQ_2$, а из тачке A повучена полуправа $AQ_2 \parallel CQ_2$ тако да је $\beta = P(b)$.

Тада ће из фигуре следовати да је:

$$(2) \quad P(c-l) = \alpha + \mu,$$

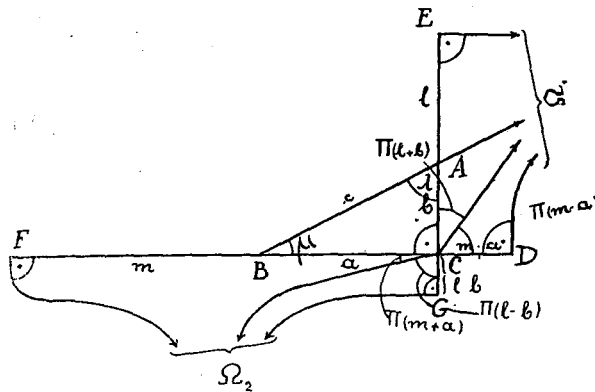
$$(2') \quad P(c-m) = \beta + \lambda.$$



Фиг. 4

Лако се да показати да би исти резултат следовао и за случајеве када је $l > c$ и $l = c$.

У фиг. 5 катета a правоуглог троугла ABC продужена је иза тачке C до тачке D тако да је $BD=m$, а катета b иза тачке



Фиг. 5

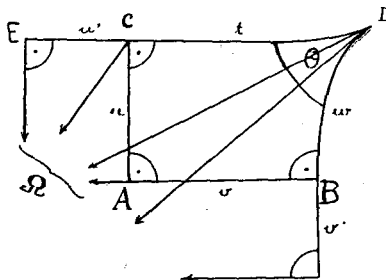
А до тачке E тако да је $AE=l$. Даље је катета a продужена иза тачке B до тачке F тако да је $BF=m$, а катета b иза тачке C до тачке G тако да је $AG=l$. Напоследку у тачкама D, E, F и G подигнуте су одговарајуће управне тако да је $CQ_1 \parallel DQ_1$, $CQ_1 \parallel EQ_1$, $CQ_2 \parallel GQ_2$ и $CQ_2 \parallel FQ_2$.

Тада ће из фигуре следовати да је:

$$(3) \quad \Pi(m-a) + \Pi(l+b) = \pi/2,$$

$$(3') \quad \Pi(m+a) + \Pi(l-b) = \pi/2.$$

Нека је у троправоуглом четвороуглу $ABCD$ (фиг. 6) $AC=u$, $AB=v$, $BD=w$, $CD=t$ и оштри угао $=\theta$. Ако продужимо страну t иза тачке C до тачке E за дуж u' и у крајњој тачки E подигнемо управну, а из тачке D овој паралелну DQ , биће:



Фиг. 6

$$(I) \quad \Pi(t+u') + \Pi(w) = \theta.$$

На сличан начин следоваће из исте фигуре да је:

$$(II) \quad \Pi(w+v') + \Pi(t) = \theta.$$

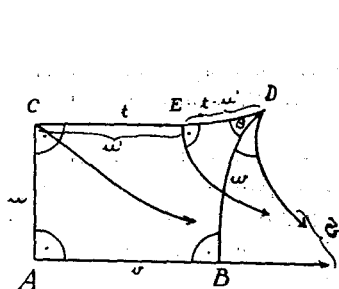
У фиг. 7 страна троправоуглог четвороугла ABC подељена је тачком E на одсечке u' и $t-u'$, у тачки E подигнута је управна EQ , а из тачке D овој паралелна DQ . Тада из фигуре следује да је:

$$(I') \quad \Pi(t-u') - \Pi(w) = \theta.$$

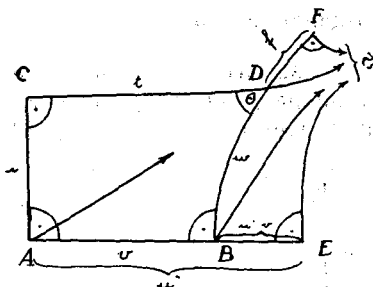
На сличан начин следоваће (одговарајућом допуном фигуре):

$$(II') \quad \Pi(w - v') - \Pi(t) = \theta.$$

У фиг. 8 страна v троправоуглог четвороугла $ABCD$ продужена је иза тачке B до тачке E тако да је $AE = u'$, $BE = u' - v$, у



Фиг. 7



Фиг. 8

тачки E подигнута је управна $E\Omega$, а страна w продужена иза тачке D за дуж $DF = f$ и из тачке F повучена управна $F\Omega$.

Тада из фигуре следује да је:

$$(III) \quad \Pi(u' - v) + \Pi(w + f) = \pi/2.$$

На сличан начин следоваће (одговарајућом допуном фигуре):

$$(III) \quad \Pi(v' - u) + \Pi(t + f) = \pi/2.$$

Како је троправоугли четвороугао одређен са два од својих пет комада (четири стране u , v , w и t и оштри угао θ), то ћемо да бисмо доказали да му одговара правоугли троугао са странама a , b , c , и угловима λ и μ , ставити $t = c$ (тј. претпоставити да је горња страна четвороугла равна хипетонузи троугла) и $u = m'$ (тј. претпоставити да је предња страна u четвороугла равна допунској дужи паралелизма угла μ). Како је тада

$$\Pi(c + m) = \Pi(t + u')$$

и

$$\Pi(c - m) = \Pi(t - u'),$$

то ће ид I' и I следовати

$$\Pi(c + m) = \theta - \Pi(w) = \beta - \lambda,$$

а из $2'$ и I' :

$$\Pi(c - m) = \theta + \Pi(w) = \beta + \lambda.$$

Сабирањем идентитета $\theta - \Pi(w) = \beta - \lambda$ и $\theta + \Pi(w) = \beta + \lambda$ следоваће да је $2\theta = 2\beta$, дакле $\theta = \beta$, тј. оштри угао θ троправоуглог четвороугла $ABCD$ биће једнак углу $\Pi(b) = \beta$ правоуглог троугла ABC . А из одузимања тих идентитета следоваће да је $\Pi(w) = \lambda$, тј. да је задња страна w троправоуглог четвороугла

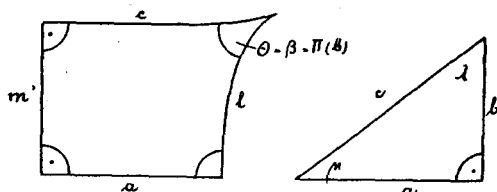
једнака дужи паралелизма l угла λ правоуглог троугла ($\Pi(\lambda) = l$). Како је даље $\Pi(f) = \theta = \beta = \Pi(b)$, то је и $f = b$.

Напоследку, како је $u' = m$, из III и 3 следоваће:

$$\Pi(m - v) = \pi/2 - \Pi(l + b) = \Pi(m - a),$$

а одавде $v = a$.

Као што се види, троправоуглом четвороуглу $c, m', a, l, \Pi(b)$ одговара доиста правоугли троугао $c, a, b, \Pi(l), \Pi(m)$, одн. правоугли троугао c, a, b, λ, μ (фиг. 9).



Фиг. 9

На сличан начин одговараће сваком од четири троправоугла четвороугла, који су још могући, по један нов правоугли троугао. Имаћемо према томе у свему следећих пет (тзв. асоцираних или придружених) правоуглих троуглова:

1. $c, a, b, \Pi(l), \Pi(m)$;
2. $l, b, m', \Pi(a'), \Pi(c)$;
3. $a', m', c', \Pi(b'), \Pi(l)$;
4. $b', c', l', \Pi(m), \Pi(a')$;
5. $m, l', a', \Pi(c), \Pi(b')$.

IV

Хиперболическе формуле добијају се применом формуле

$$1. \sinh c = \sinh a \cosh l,$$

која је изведена чисто планиметријски за троугао $c, a, b, \Pi(l), \Pi(m)$, на сваки од остала четири придружена троугла. На тај начин добијају се ове четири формуле:

2. $\sinh l = \sinh b \cosh a'$
3. $\sinh a' = \sinh m' \cosh b'$,
4. $\sinh b' = \sinh c' \cosh m$,
5. $\sinh m = \sinh l' \cosh c$.

Да бисмо дошли до дефинитивних формула, треба се ослободити чланова са акцентима (тј. допунских дужи). То бива на

основу следеће четири трансформационе формуле:

$$1'. \sinh a = [\cotg \Pi(a) = \cotg \alpha = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \Pi(a')] = \frac{1}{\sinh a'};$$

$$2'. \cosh a = \left[\frac{1}{\sin \Pi(a)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha'} = \frac{1}{\cos \Pi(a')} \right] \operatorname{ctgh} a';$$

$$3'. \sinh a' = [\cosh a] \frac{1}{\sinh a};$$

$$4'. \cosh a' = \operatorname{ctgh} a.$$

Применом четврте од ових формула претвара се формула

$$\sinh l = \sinh b \cosh a' = \sinh b \operatorname{ctgh} a = \sinh b \frac{1}{\operatorname{tgh} a}$$

у формулу

$$2. \sinh b = \sinh m \operatorname{tgh} a.$$

На тај начин добијају се дефинитивне формуле:

$$3. \sinh a = \sinh m \operatorname{tgh} b,$$

$$4. \sinh c = \sinh b \cosh m,$$

$$5. \cosh c = \sinh l \sinh m.$$

Из дефинитивних формула 2, 3 и 5 следује нова формула:

$$6. \cosh c = \cosh a \cosh b$$

на следећи начин.

Из

$$\sinh b = \operatorname{tgh} a \sinh l \text{ биће } \sinh l = \frac{\sinh b}{\operatorname{tgh} a},$$

из

$$\sinh a = \operatorname{tgh} b \sinh m \text{ биће } \sinh m = \frac{\sinh a}{\operatorname{tgh} b},$$

према томе из

$$\cosh c = \sinh l \sinh m.$$

следоваће заменом:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

Кад се овако добијена формула примени на придружене троугле 2, 3, 4 и 5 добиће се најпре формуле:

$$\cosh l = \cosh b \cosh m',$$

$$\cosh a' = \cosh m' \cosh c',$$

$$\cosh b' = \cosh c' \cosh l',$$

$$\cosh m = \cosh l' \cosh a,$$

па затим дефинитивне формуле:

$$7. \cosh l = \cosh b \operatorname{ctgh} m,$$

$$8. \operatorname{tgh} a = \operatorname{tgh} m \operatorname{tgh} c,$$

$$9. \operatorname{tgh} b = \operatorname{tgh} c \operatorname{tgh} l,$$

$$10. \cosh m = \operatorname{ctgh} l \cosh a.$$

V.

Кад се у ових десет формула, у којима се јављају само хиперболне функције (страна троуглових a, b, c и дужи паралелизма l и m) место хиперболних функција дужи паралелизма l и m уведу тригонометријске функције одговарајућих углова паралелизма $\Pi(l)$ и $\Pi(m)$, одн. углова λ и μ , што бива на основу нама већ познатих трансформационих формула (в. „Додатак III“):

$$\sinh l = \operatorname{ctg} \lambda = \operatorname{ctg} \Pi(l),$$

$$\cosh l = \frac{1}{\sin \lambda} = \frac{1}{\sin \Pi(l)},$$

$$\operatorname{tgh} l = \cos \lambda = \cos \Pi(l),$$

$$\operatorname{coth} l = \frac{1}{\cos \lambda} = \frac{1}{\cos \Pi(l)},$$

добити се следећих десет полутригонометријских формула:

$$1. \sinh a = \sinh c \sin \Pi(l),$$

$$2. \sinh b = \operatorname{tgh} a \operatorname{ctg} \Pi(l),$$

$$3. \sinh a = \operatorname{tgh} b \operatorname{ctg} \Pi(m),$$

$$4. \sinh b = \sinh c \sin \Pi(m),$$

$$5. \cosh c = \operatorname{ctg} \Pi(l) \operatorname{ctg} \Pi(m),$$

$$6. \cosh c = \cosh a \cosh b,$$

$$7. \cos \Pi(m) = \cosh b \sin \Pi(l),$$

$$8. \operatorname{tgh} a = \operatorname{tgh} c \cos \Pi(m),$$

$$9. \operatorname{tgh} b = \operatorname{tgh} c \cos \Pi(l),$$

$$10. \cos \Pi(l) = \cosh a \sin \Pi(m).$$

У ових десет формула налази се и оних пет (одн. седам) формула које су изведене у „Додатку III“ (то су формуле 6-10 и формуле 4 и 1).

Напоследку, кад се у ових десет полутригонометријских формула замене и хиперболне функције страна одговарајућим

угловима паралелизма $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$, добиће се следећих десет чисто тригонометријских формула за правоугли траоугао:

1. $\operatorname{tg} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(a) \sin \Pi(l)$,
2. $\operatorname{tg} \Pi(l) = \cos \Pi(a) \operatorname{tg} \Pi(b)$,
3. $\operatorname{tg} \Pi(m) = \cos \Pi(b) \operatorname{tg} \Pi(a)$,
4. $\operatorname{tg} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(b) \sin \Pi(m)$,
5. $\sin \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(l) \operatorname{tg} \Pi(m)$,
6. $\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$,
7. $\sin \Pi(l) = \sin \Pi(b) \cos \Pi(m)$,
8. $\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(m)$,
9. $\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(l)$,
10. $\sin \Pi(m) = \sin \Pi(a) \cos \Pi(l)$.

У ових десет формула налазе се и оних пет чисто тригонометријских формула (то су и овде формуле 6-10) које је Лобачевски извео у §-у 35-ом (в. и „Додатак III“).

APPLICATION DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES À LA RÉDUCTION DES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES DU TRIANGLE RECTANGLE DANS LE PLAN DE LOBATSCHESKY

Par

BRANISLAV PETRONIJEVIĆ

Les deux inventeurs de la géométrie non-euclidienne n'ont pu déduire les formules trigonométriques du triangle rectangle dans leur plan qu'en se servant des figures spatiales. *Liebmann* était le premier qui, en appliquant les fonctions hyperboliques, a pu effectuer cette déduction d'une manière purement planimétrique. *Sommerville* a, plus tard, simplifié le procédé planimétrique de *Liebmann*. Et l'auteur, dans cette étude, a voulu simplifier encore davantage le procédé de *Sommerville*.