Истраживачка тема: **Полигони и полиноми: геометрија, механика и интеграбилност**

Аутор: Владимир Драговић

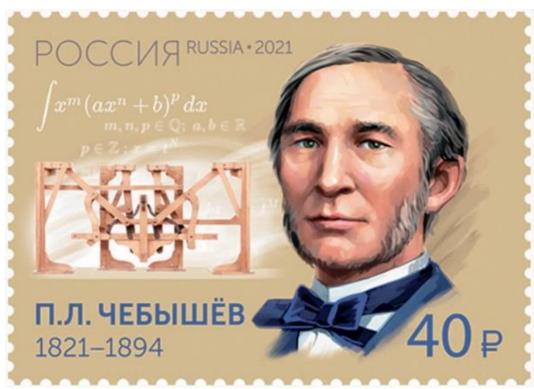
Описаћемо истраживачку тему која повезује алгебарску геометрију и интеграбилне системе са применама у геометрији, механици, математичкој физици и комбинаторици. Технике које се користе првенствено се заснивају на синергији између анализе на Римановим површима, интеграбилности, изомонодромним деформацијама, екстремалним полиномима, теорији потенцијала, билијарима и теорији партиција. Истраживање се фокусира на међусобним односима билијара унутар квадрика у простору R^d, елиптичких и хиперелиптичких Риманових површи рода g=d-1, екстремалних полинома на системима d интервала и сродне теорије потенцијала, Пенлевеове и Шлезингерове једначине и изопериодичне деформације.

Једна од мотивација за ово истраживање било је лепо запажање Најџела Хичина деведесетих година прошлог века [13] да Понселеови полигони у равни и с њима повезане тачке коначног реда на Римановим површима рода један дају алгебарска решења једне од класичних Пенлевеових VI једначина, видети такође [12] (Погледати и чланак Гајића и Јовановића из ове публикације о елиптичким кривама.) Наши резултати и најновија истраживања (заједно са Василисом Шрамченко [8, 10]) даља су уопштења овог Хичиновог запажања. Проширили смо ово тврђење на Понселеове полигоне као периодичне билијарске трајекторије у произвољној димензији, на дивизоре Јакобијана одговарајућих хиперелиптичких Риманових површи, пронашли одговарајуће једначине и њихова решења.

Добро је познато да су билијарни системи унутар елипсоида интеграбилни. Они се проучавају дуги низ година, видети [14, 15, 16] и тамошње референце. Њихова интеграбилност има лепу и прозрачну геометријску позадину: постоје d-1 каустика, које су квадрике конфокалне граничном елипсоиду. Сваку каустику додирује сваки сегмент дате билијарске трајекторије (или права која садржи сегмент билијарске трајекторије). Такође је широко распрострањено уверење да интеграбилни системи, који су концентрисани на тачна решења, нису толико повезани са теоријом апроксимација и нумеричком анализом као неинтеграбилни системи. Ми следимо идеју коришћења теорије апроксимација у истраживањима интергабилних система дате у раду [7]. Из историјске перспективе, обе стране овог приступа биле су повезане са радом Жана Виктора Понселеа у првој половини XIX века.

Сл. 1. Жан-Виктор Понсел (1788–1867), француски математичар и инжењер, литографија. (Smithsonian Libraries, https://library.si.edu/image-gallery/74037, Public domain, via Wikimedia Commons)

Следећи даље овај траг, видимо да су модерну теорију алгебарске апроксимације, екстремалне полиноме и теорију верижних разломака, установили и развијали Чебишев и његова школа у Санкт Петербургу у другој половини XIX века. Даљи развој је дошао са њиховим следбеницима од прве половине XX века до данас. Овде треба истаћи откриће Чебишевљевих полинома, њихова различита уопштења, укључујући и екстремалне полиноме на системима интервала, тачке наизменичности (тачке алтернанса) и теорему наизменичности (теорема алтернанса), верижне разломке, Падеову апроксимацију и слично. Сва ова открића и резултати имају запажену улогу у нашем раду.



Сл. 2. Пафнутиј Лвович Чебишев (1821 - 1894), руски математичар и родоначелник петроградске математичке школе, приказан на поштанској марки издатој у Русији 2021. године. (O. Savina, A. Kradyshev (Post of Russia), Public domain, via Wikimedia Commons)

Такође је важно истаћи да је мотивација Чебишева произашла из његовог интересовања за практичне проблеме: желео је да процени грешку механизама који трансформишу линеарно кретање у кружно, попут Ватовог комплетног паралелограма. Полазна тачка Чебишева био је рад на теорији механизама француског војног инжењера, професора механике и академика Жана Виктора Понселеа. Понселе је у својим истраживањима дошао тако до питања рационалне и линеарне апроксимације функција облика квадратног корена квадратних полинома и указао је на два приступа проблемима – један заснован на аналитичким аргументима и други, заснован на геометријским разматрањима (видети [7 , 14] и тамошње референце). Чебишев се упознао са Понселеовим радом током својих путовања у иностранство 1852. године. Чебишев и Понселе нису се лично срели, али Чебишев је на том путовању упознао Кејлија.

Артур Кејли је био водећи британски математичар тог времена. Кејли се управо педесетих година XIX века врло успешно бавио још једним проблемом који је такође потекао од Понселеа. Овог пута реч је о Понселеовом поризму, који је био плод Понселеовог рада као геометра. По повратку, Чебишев је описао Понселеа као „познатог научника у практичној механици" (видети [7, 14] и тамошње референце). У савременој математици, Понселе је пре свега познат као један од водећих геометара XIX века.

У [7] смо (заједно са Миленом Радновић) развили везу између теорије билијара унутар квадрика у R^d и теорије апроксимација, посебно екстремних полинома на системима d интервала на реалној правој. Ова веза је била плодоносна и омогућила нам је да дамо потпун опис периодичних трајекторија билијара унутар елипсоида у d-димензионалном еуклидском простору R^d. На овај начин, позитивно смо решили у [7] све три главне хипотезе у овој области, како их је формулисао Рамирез-Рос у [11]. Такође, увели смо нови тип целобројних партиција као средство којим смо класификовали периодичне трајекторије са датим периодом n билијара унутар елипсоида у R^d. Даље проучавање комбинаторних својстава таквих партиција дато је у [4].

Намеће се и питање о истовременој деформацији билијарске границе заједно са каустикама, уз услов да се током деформација очува период периодичних трајекторија. Даља анализа овог питања са становишта теорије потенцијала довела нас је до увођења новог типа деформација домена у проширеној комплексној равни са означеном тачком и припадајућим Гриновим функцијама. Такве деформације смо назвали изохармоничним деформацијама, јер чувају хармоничну меру. У случају раванских интеграбилних билијара (d=2, g=1), ово нас је довело до проучавања њихових изомонодромних својстава за двоструко повезане домене у [2]. У том циљу објединили смо неколико наизглед удаљених тема, почевши од Золотарјовљевих полинома. Золотарјовљеви полиноми су посебан случај уопштених Чебишевљевих полинома. То су минимални полиноми на два интервала (d=2). Увели смо деформације елиптичних кривих које подржавају Золотарјовљеве полиноме. Тиме се генеришу варијације Золотарјовљевих полинома. Индукована динамика се описује Пенлевеовим VI једначинама.

Сл. 3.Пол Пенлеве (1863 - 1933), француски математичар и политичар. (Bain, Public domain, via Wikimedia Commons)

Након преношења ових разматрања у општије и флексибилније подручје теорије потенцијала прстенастих домена, деформисали смо ове домене и полове придружених Гринових функција на специфичан нов начин, одржавајући инваријантну одговарајућу хармоничну меру граничних кругова. Закључили смо да критичне тачке Гринове функције уз такве деформације решавају Пенлевеову VI једначину, у складу са [12]. Даљи развој алгебарско-геометријских идеја у проучавању изомонодромних деформација, који је такође био повезан са важним класама полинома, недавно смо представили у [1].

Сл. 4. Михаило Петровић (1868 - 1943), родоначелник српске математичке школе, у својој радној соби, у кући на Косанчићевом венцу, око 1936. (Архив САНУ, 14188/21)

Наше истраживање о полигонима и полиномима такође укључује проучавање (заједно са Ирином Горијушкином) генезе и развоја Њутн-Пизоових полигоналних метода у алгебарским обичним диференцијалним једначинама [5, 6], повезујући фундаменталне резултате Михаила Петровића Аласа [17-21] са савременом математиком. Још једна линија нашег садашњег истраживања (са Бориславом Гајићем и Божидаром Јовановићем) повезује историју српске науке са савременим истраживањима. Развијамо нове примере нехолонимних механичких система крутог тела инспирисани радовима Билимовићеве школе у Београду двадесетих година XX века, видети [22, 3].

Литература:

1. V. Dragovic, R. Gontsov, V. Shramchenko, Triangular Schlesinger systems and superelliptic curves, Physica D, Volume 424, October 2021, 132947
2. V. Dragovic, V. Shramchenko, Deformation of the Zolotarev polynomials and Painleve VI equations, Letters Mathematical Physics, 111**,** 75 (2021). https://doi.org/10.1007/s11005-021-01415-z.
3. V. Dragovic, B. Gajic, B. Jovanovic, Demchenko's nonholonomic case of gyroscopic ball rolling without sliding over a sphere after his 1923 Belgrade doctoral dissertation, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 47, No. 2, p. 257-287, 2020. DOI:10.2298/TAM201106015D.
4. G. Andrews, V. Dragovic, M. Radnovic, Combinatorics of the periodic billiards within quadrics, The Ramanujan Journal, DOI: 10.1007/s11139-020-00346-y.
5. V. Dragovic, I. Goryuchkina, Polygons of Petrovic and Fine, algebraic ODEs, and contemporary mathematics, Archive for History of Exact Sciences, Vol. 74, No. 6, pp. 523-564, 2020, DOI: 10.1007/s00407-020-00250-3.
6. V. Dragovic, I. Goryuchkina, About the cover: The Fine - Petrovic Polygons and the Newton - Puiseux Method for Algebraic Ordinary Differential Equations, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 57, No 2, 2020. p. 293-299.
7. V. Dragovic, M. Radnovic, Periodic ellipsoidal billiard trajectories and extremal polynomials, Communications. Mathematical Physics, 2019, Vol. 372, p. 183-211.
8. V. Dragovic, V. Shramchenko, Algebro-geometric approach to an Okamoto transformation, the Painleve VI and Schlesinger equations, Annales Henri Poincare, 2019, Vol. 20, No. 4, 1121–1148.
9. V. Dragovic, M. Radnovic, Caustics of Poncelet polygons and classical extremal polynomials, Regular and Chaotic Dynamics, 2019, Vol. 24, No. 1, p. 1-35.
10. V. Dragovic, V. Shramchenko, Algebro-geometric solutions of the Schlesinger systems and the Poncelet-type polygons in higher dimensions, IMRN, 2018, Vol. 2018, No 13, p. 4229–4259.
11. R. Ramirez-Ros, On Cayley conditions for billiards inside ellipsoids, Nonlinearity 27 2014, no. 5, 1003–1028.
12. N. Hitchin, Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations, J. Diff. Geom. 3, 52-134, 1995.
13. N. Hitchin, Poncelet polygons and the Painlev´e equations, Geometry and analysis (Bombay, 1992), 151–185, Tata Inst. Fund. Res., Bombay 1995.
14. V. Dragovic, M. Radnovic, Poncelet Porisms and Beyond monograph, 2011, Springer, Birkhauser, ISBN 978-3-0348-0014-3.
15. V. Dragovic, M. Radnovic, Bicentennial of the Great Poncelet Theorem (1813-2013): Current Advances, Bulletin of the AMS 51, 2014. 373–445.
16. V. Dragovic, M. Radnovic, Pseudo-integrable billiards and arithmetic dynamics, J. Modern Dynamics, 2014, Volume 8, No. 1, 109–132.
17. Petrovitch, M. 1899. Sur une propriété des équations différentielles intégrables à l'aide des fonctions méromorphes doublement périodiques. *Acta Mathematica* 22: 379–386.
18. Petrovitch, M. 2018. On a property of differential equations integrable using meromorphic double-periodic functions. *Theoretical and Applied Mechanics* 45(1):121–127. English translation of the above Petrovitch'sActa Mathematica paper.

19. Petrowitch, M. 1894. *Thèses: Sur les zéro et les infinis des intégrales des équations différentielles algébraiques*. Paris: Propositions données par la Faculté.
20. Petrowitch. 1999. *Collected works of Mihailo Petrovi´c*, in 15 volumes. Belgarde: The State Textbook Company (**in Serbian**).
21. Mihailo Petrovic Alas: life work, times, Serbian Academy of Sciences and Arts, Editorin-chief:Marko Andjelkovic Editors of publication: Stevan Pilipovic, Gradimir V. Milovanovic, Žarko Mijajlovic, Belgrade.
22. V. Demchenko, Rolling without sliding of a gyroscopic ball over a sphere, doctoral dissertation, University of Belgrade, 1924, pp. 94, printed “Makarije” A.D. Beograd-Zemun. (in Serbian) http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/118