

Истраживачка тема: Екстремална геометријска, тополошка и алгебарска комбинаторика

Аутори: Раде Живаљевић, Филип Јевтић

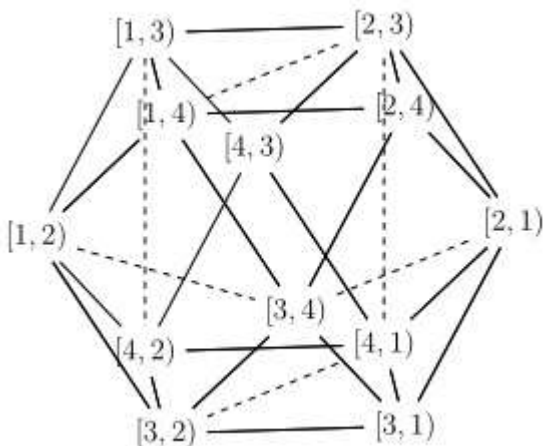
Конвексни политопи су централни објекти полиедарске комбинаторике и комбинаторне оптимизације. Они су такође заједнички објекти многих математичких области као што су механика (момент пресликавање), алгебарска геометрија (теорија торусних варијетета), алгебарска топологија (простори орбита торусних дејстава), итд. Идеје и алате из свих тих области користимо у нашем истраживању специјалних класа конвексних политопа – Канторовић-Рубинштајнових политопа, генерализованих пермутоедара, Биерових сфера, и многих других.

Мотивисани А. М. Вершиковим проблемима, проучавамо комбинаторну структуру Канторовић-Рубинштајнових политопа који се природно јављају у теорији оптималног транспорта и као канонске комбинаторне структуре придружене коначним метричким просторима. Специјално, проучавамо циклоедар као KR -политоп довољно генеричних метрика.

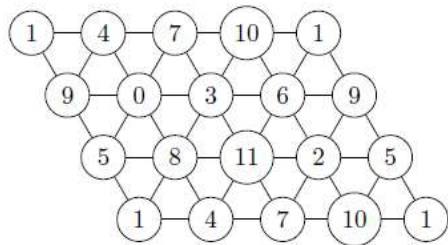
Познато је да нису све триагулације сфера границе конвексних политопа, и описивањем таквих сфера бави се „симплицијални Штајницов проблем“. Проучавање KR -политопа природно се везује за решавање Штајницовог проблема у класи триагулација познатих као *Биерове сфере*. Показујемо да су све Биерове сфере звездолике, штавише, да су оне које долазе од праг (*threshold*) комплекса политопалне. Показујемо, такође, да су Биерове сфере асоциране комплексима тзв. „кратких скупова“ KR -политопи.

Комбинујући идеје механике, геометријске комбинаторике, и торусне топологије, и користећи, поред осталог, дискретну верзију Абел-Јакобијевог пресликавања и Делоне триагулацију пермутоедралне решетке, проучавамо екстремална својства триагулација торуса. У фокусу истраживања су вишедимензионе генерализације класичног музичког *Tonnetz*-a, (<https://www.imaginary.org/program/tonnetz>), који је описао Леонард Ојлер 1739. године, у делу *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principii dilucide expositae*.

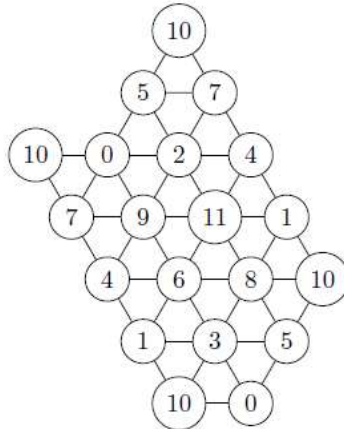
У оквиру тополошке комбинаторике и дискретне и рачунарске геометрије отворен је потпуно нов правац истраживања у коме се познати конфигурациони простори (везани за теорему Тверберга, ван Кампена-Флореса и њихове генерализације) на неочекиван начин појављују у проблемима постојања еквилибријума и фер подела (подела без зависти) у математичкој економији и кооперативној теорији игара.



Политоп $Root_4$, оригинално описан као дуал циклоедра W_4 , јавља се и као поларни дуал Канторовић-Рубинштајновог политопа $KR(\rho)$ за довољно генеричну (квази)-метрику ρ . (Filip D. Jevtić, Marija Jelić, Rade T. Živaljević, Cyclohedron and Kantorovich-Rubinstein polytopes, *Discrete Comp. Geom.* 2018.)

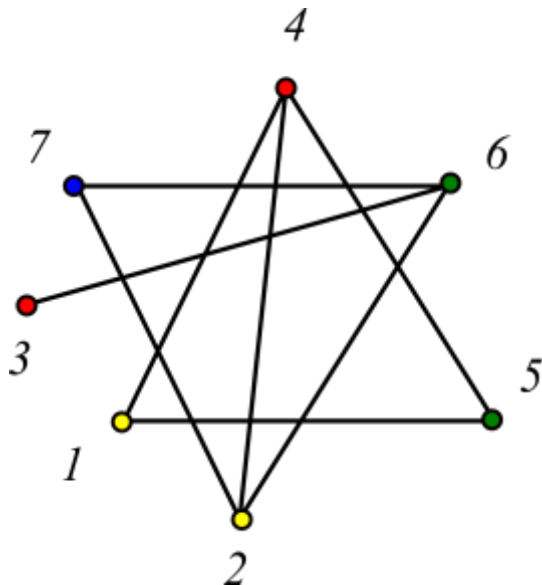


(a) $Tonn^{12,3}(3, 4, 5)$



(b) $Tonn^{12,3}(2, 3, 7)$

На слици су приказане две неизоморфне триангулације дводимензионалног торуса. Лева слика (са параметрима (3,4,5)) приказује класични Tonnetz. (Filip D. Jevtić, Rade T. Živaljević, *Generalized Tonnetz and discrete Abel-Jacobi map*, TMNA, 2021.)



Специјални случај „Теореме Тверберга за обојене мултискупове тачака“ (Д. Јојић, Г. Панина, Р. Живаљевич, Известиа РАН, 2021) тврди да је две жуте {1,2}, две црвене {3,4}, две зелене {5,6} и једну плаву тачку {7} у равни могуће разврстати у 4 (не обавезно дисјунктна) скупа А, В, С, D, тако да су:

- (1) све тачке у истом скупу разнобојне;
- (2) свака непарна тачка се појављује само у једној скупу;
- (3) свака парна тачка се појављује у највише две од четири скупа;
- (4) ковексни омотачи сва четири скупа (на слици два разнобојна троугла 145, 267 и дужи 24, 36) имају непразан пресек.

Доказ теореме у пуној генералности захтева методе алгебарске топологије.