СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

SERBIAN ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS

SCIENTIFIC MEETINGS

Book CLXXXII

PRESIDENCY

Book 12

MIHAILO PETROVIĆ ALAS

REGARDING ONE HUNDRED AND FIFTY YEARS SCIENCE BIRTH

Scientific meeting with an international partake,
held at the Serbian Academy of Sciences and Arts
on October 2–3, 2018

BELGRADE 2019

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЕТНОСТИ

НАУЧНИ СКУПОВИ

Књига CLXXXII

ПРЕДСЕДНИШТВО

Књига 12

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ АЛАС

ПОВОДОМ СТО ПЕДЕСЕТ ГОДИНА ОД РОЂЕЊА

Научни скуп са међународним учешћем одржан
у Српској академији наука и уметности,
2–3. октобра 2018.

БЕОГРАД 2019

Програмски одбор:
Копредседници: *Жарко Мијајловић, Градимир Миловановић, Стеван Пилиповић*
Чланови:*Војислав Андрић, Зоран Каделбург, Миљан Кнежевић, Александар Липковски, Зоран Огњановић, Зоран Марковић, Миодраг Михаљевић*

Организациони одбор:
Зоран Огњановић, Војислав Андрић, Миљан Кнежевић, Марија Шеган-Радоњић, Маја Новаковић, Јелена Катић, Небојша Икодиновић, Александра Делић, Марек Светлик

Уредници
академик Градимир Миловановић
академик Стеван Пилиповић
др Жарко Мијајловић

Издавачи
Српска академија наука и уметности
Београд, Кнеза Михаила 35
Математички факултет Универзитета у Београду
Београд, Студентски трг 16
Математички институт САНУ
Београд, Кнеза Михаила 36
Друштво математичара Србије
Београд, Кнеза Михаила 35/IV

Дизајн корица
Драгана Лацмановић-Лекић

Технички уредници
Александра Делић
Миљан Кнежевић
Никола Стевановић

Лектура и коректура
Весна Шубић

Штампа
Donat Graf, Мике Аласа 52, Београд

Тираж
600 примерака

Подршка Министарства просвете, науке и технолошког развоја

ISBN: 978-86-7025-825-9
ISBN: 978-86-7589-136-9

Садржај

ТЕОРИЈА АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

СИНИША ЦРВЕНКОВИЋ*

А п с т р а к т. – Михаило Петровић је предавао петнаест математичких предмета у својој каријери професора универзитета. У богатој литератури о животу и раду овог нашег великана најмање је било речи о алгебарским једначинама. Математички факултет у Београду и Департман за математику и информатику Природно-математичког факултета у Новом Саду баштине два текста предавања Михаила Петровића о алгебарским једначинама. У нашем раду биће речи о овим текстовима који представљају прави бисер математичке литературе.

Кључне речи: алгебарска једначина, кореновање

Everything about him was old except his eyes and they were the same color as the sea and were cheerful and undefeated.
Ernest Hemingway, *Old man and the sea*

1. Увод

Математичари проводе свој живот окружени књигама. Математичке књиге су збирке идеја и мисли из прошлости и будућности. Математичар може препознати своју књигу затворених очију. Непосвећенима није дозвољено узимати у руке књиге математичара. Назовимо ово *аксиомама Теорије књига.*

На полици успомена наше младости крије се мала жута књига. На корицама пише *Михаило Петровић,човек, филозоф, математичар*. Издавач је био *Завод за издавање уџбеника Социјалистичке Републике Србије, Београд 1968*. Књига је штампана у оквиру чувене *жуте серије* чији је назив Математичка библиотека. Прочитали смо књигу о Михаилу Петровићу за један дан.

* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, и-мејл: sinisa.crvenkovic@dmi.uns.ac.rs

Са нестрпљењем смо чекали излазак из штампе нове књиге жуте серије. Истина, добар део научних радова нисмо разумели. Главни уредник Математичке библиотеке био је Драгослав Митриновић, чувени професор Електротехничког факултета у Београду. Професор Митриновић је био један од ученика Михаила Петровића званог Мика Алас.

У малој жутој књизи постоји фотографија Мике Аласа. На њој је бркати чикица, живахних очију, који као да никад није био млад. Бар се то нама средњошколцима тако чинило. Диплома *Михаило Петровић Алас* додељивала се на крају средње школе за успехе из математике.

Онда је на нашим студијама Михаило Петровић потонуо у заборав. Можда смо чули неколико речи о њему у оквиру курса Теорије диференцијалних једначина. Мало људи је знало да постоје текстови из Теорије алгебарских једначина писаних по предавањима Михаила Петровића. Каква штета. Уместо да смо учили да решавамо алгебарске једначине из Петровићевих предавања, ми смо хитали у модерну алгебру. У овом тексту покушавамо донекле да исправимо ову неправду. Текст означен италиком у овом раду преузет је дословце из књиге Петровићевих предавања.

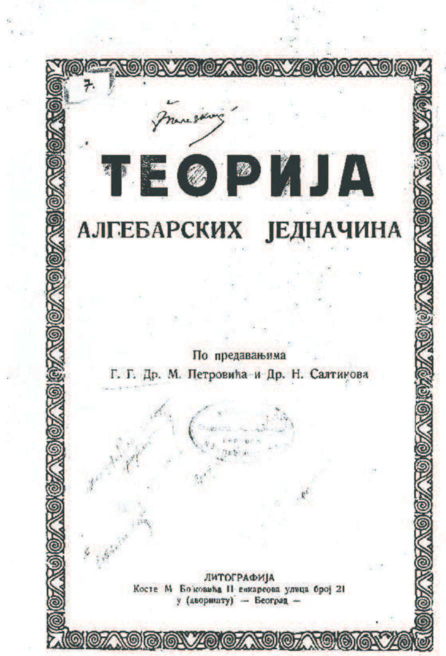
Петровићева предавања о једначинама су старог кова, као што је, на пример, књига William-a Burnside-a и Arthur-a Panton-a, Theory of Equations, из 1881. године. Можемо рећи да је књига Leonard-a Dickson-a, First Course in the Theory of Equations, John Wiley & Sons 1922, слична Петровићевим предавањима, али далеко слабија. У овим књигама се не спомиње Галоа.

2. О текстовима

Математички факултет у Београду баштини два текста о алгебарским једначинама. Прва скрипта, под насловом *Теорија алгебарских једначина*, писана су руком. Приметно је да се у излагању градива користе два различита рукописа. Ниједан не личи на Петровићев рукопис. Претпостављам да су то белешке студената који су слушали Петровићева предавања из Теорије алгебарских једначина. Други текст је дат у виду књиге и носи наслов *Теорија алгебарских једначина*.

То је књига о којој ћемо причати у овом раду. Штампана је 1927. године и права је математичка посластица, која на природан начин спаја алгебру и анализу.

Добар део формула у другој књизи писан је руком. Као извори, у излагању градива, коришћена су дела страних аутора Abel-a, Wanstel-a, Laurent-a, Comberousse-a, Camberome-a и српског математичара Димитрија Нешића. Старим језиком тече прича о алгебарским једначинама, као река. Петровићева предавања допуњују и далеко превазилазе књигу Димитрија Нешића *Теорија алгебарских једначина*, из 1883. године.



ТЕОРИЈА
АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

По предавањима
Г. Г. Др. М. Петровића и Др. Н. Салтикова

ЛИТОГРАФИЈА
Косте М Бо ковића II енкареова улица број 21
у (дворишту) — Београд —

Слика 1. Насловна страна

Предавање о алгебарским једначинама почиње дефиницијом:

Свака алгебарска једначина са једном непознатом количином, може се увек писати у облику

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots A_{m-1}x + A_m = 0. \tag{1}$$

Израз *количина* преузет је од Нешића. Даље се каже:

Ако су коефицијенти дати у симболима (словима) онда се та једначина назива општом једначином; ако су пак ти коефицијенти бројеви, онда се таква једначина назива бројном једначином.

Тешко је поверовати да је прва, руком писана, књига о алгебарским једначинама Петровићева. За Абела се каже да је *шведски математичар.*

У другој књизи, на страни 3 стоји:

Општу једначину, чији је степен виши од четвртог степена је немогуће решити, као што су показали Abel и пре свега али недовољно тачно, Wanstel.

Петровић и Салтиков се позивају на Abelove Ouvres complete, Camberousse-ov Cours de mathematique и Wanstel-ov рад у Journale de l'ecole Polytechnique.

Готово је сигурно да је име Wanstel, које је наведено као референца, у ствари погрешно написано име Wantzel. Реч је о познатом француском математичару чије име је Pierre Wantzel (1814–1848). То је човек који је решио *Проблем удвајања коцке* и *Проблем трисекције угла.* Наиме, као што знамо, Wantzel је показао да није могуће извршити тражене конструкције шестаром и равналом.

Године 1927. се добро знало ко је Évariste Galois. Абел је показао да за једначине степена $n \geqslant 5$ не постоји формула која даје све корене, као што је, на пример, формула за корене квадратне једначине. Овај Абелов резултат не значи да свака посебна једначина нема своју формулу за корене. Млађахни Галоа је *урадио* много више. Наиме,

Алгебарска једначина је решива кореновањем ако и само ако је одговарајућа група Галоа решива.

Évariste Galois ступа 1870. године на велику математичку сцену књигом Camille Jordan-a, *Traite des substitutions et des equations algebrique.* Издавач је био Gautier-Villars. Петровић је ову књигу морао имати у рукама. Одлучио се, с правом, да студентима предаје алгебарске једначине елементарним методама. У Петровићевим предавањима Галоа се не спомиње.

Знаменити Florian Cajori, у својој књизи *The Modern Theory of Equations*, New York, London, 1904. године уводи у причу групе пермутација корена у решавању алгебарских једначина, како је то радио Галоа односно Жордан. Edgar Dehn у књизи *Algebraic Equations an introduction to the theories of Lagrange and Galois*, Columbia University 1930, идући стопама Лагранжа, Галое и Жордана, излаже своје виђење теорије једначина. По многим ауторима, књига B. L. van der Waerden-a, *Moderne Algebra*, штампана 1930. године у Берлину, представља основу онога што данас називамо *Класична алгебра.* Van der Waerden је био студент велике математичарке Emmy Noether. Књижица Emil-a Artin-a, *Galois Theory*, штампана на Америчком универзитету Notre Dame, 1942. године, наравно послератним издањима, доводи до тога да Теорија Галоа постане саставни део математичких студија. Бурбакисти крећу у свој победоносни поход 1935. године. Алгебарске једначине постају школски део нове самосталне математичке дисциплине коју зовемо Алгебра.

3. Основна теорема алгебре

На страни 3 књиге предавања, под насловом *Деловни принцип*, се каже

Најглавнији принцип у теорији алгебарских једначина је т.зв. D'Alambert-ова теорема. Она гласи: Свака алгебарска једначина има најмање један реалан или имагинаран корен.

Jean le Rond d'Alambert је 1746. године, користећи технику анализе, покушао да докаже овај *принцип.* То се данас назива *Основна теорема алгебре.*

Практично од 1746. године настаје права лавина доказа ове теореме у покушају да се она докаже алгебарски.

Велики Гаус се доста негативно изразио о доказима Основне теореме алгебре, које су дали d'Alambert и Euler. Сам Гаус је дао неких пет доказа Основне теореме алгебре. Први доказ дао је у својој чувеној докторској дисертацији коју је, као што знамо, насловио *Disquisitiones Arithmeticae*. У савременим уџбеницима алгебре наводи се да је Гаус први доказао ову теорему. Међутим, Гаус је подразумевао, као интуитивно јасно, да свака непрекидна функција, која мења знак на неком интервалу, има бар једну нулу на том интервалу. Интересантно је да је ово први доказао чешки математичар Bernhard Bolzano 1817. године.

У наставку текста предавања о једначинама, Петровића и Салтикова, аутори показују основне ставове о полиномима како се то и данас предаје. Коефицијенти полинома су реални или комплексни.

Руком писани текст садржи симпатичан назив за конјуговано комплексне корене полинома. Они се називају *уображени*, што је преузето из Нешићеве књиге.

Да би доказали да свака алгебарска једначина са реалним коефицијентима, која има имагинаран корен, има и њему конјугован имагинаран корен, аутори књиге предавања развијају полином у Тејлоров ред. Ово је, наравно, непотребно јер се тврђење лако доказује користећи особине операције конјуговања.

Међутим, у наставку приче, методички сасвим оправдано, се каже

Треба добро имати на уму да ова особина имагинарних корена важи само ако су сви коефицијенти дате једначине реални.

Пример 1. *Једначина са имагинарним коефицијентима*

$$x^2 - ix - 1 - i = 0.$$

чији су корени $x = 1 + i$ и $x = -i$ неће имати корен $x = 1 - i$.

Јасно, грешка у преписивању с табле. Реч је о једначини

$$x^2 - x + 1 - i = 0.$$

У наставку предавања, методички поступно презентираним текстом, доказују се Вијетове формуле које дају везу корена и коефицијената једначина произвољног степена. Добија се n једначина са n непознатих $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, где су α_i корени полазне једначине. Затим се каже

Потребно је нагласити овде да нас решавање тих једначина са n непознатих количина $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ не доваћају до каквих нових резултата, јер кад би из тих једначина елиминисали $n-1$ непознатих $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ дошли би до једначине $F(\alpha_1) = 0$, т.ј. до првобитне једначине од које смо пошли, у којој је слово x смењено са α_1.

Аутори констатују да се ради о *симетричним функцијама корена* и налазе збир квадрата корена који је изражен коефицијентима једначине. Не ширећи даље причу о симетричним функцијама корена, у тексту се каже

Ко жели више да зна о симетричним функцијама нека види у доле споменутим делима.

Ипак, симетричне функције корена обрађене су у тексту касније. Даље се задају специјалне једначине са унапред датим везама корена. На пример

Какав услов треба да задовољавају коефицијенти дате једначине

$$x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

па да њени корени буду чланови једне геометријске прогресије, и у том случају дату једначину решити.

У делу који носи наслов *О заједничким коренима двеју алгебарских једначина* тражи се највећи заједнички делитељ два полинома. Корени овог полинома представљају решења датог система једначина. Практично, даје се Еуклидов алгоритам за налажење највећег заједничког делитеља два полинома. Природно, одмах затим, следи одређивање вишеструкости корена. Доказује се да

Један вишеструки корен l-тог реда једначине $F(x) = 0$ је вишеструки корен $l-1$ реда изводне једначине $F'(x) = 0$.

Показује се да важи

Теорема 1. *Ако је α један корен l-тог реда једначине $F(x) = 0$ тада је он у исто време корен свих једначина*

$$F'(x) = 0,\ F''(x) = 0, ..., F^{(l-1)}(x) = 0.$$

Приказујемо доказ ове теореме због његове елеганције. Нека је

$$f(x) = A_0(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_k)^{l_k}$$

Групишемо све корене првог реда, другог реда, ..., k-тог реда

$$\begin{aligned} X_1 &= (x-\alpha_{11})(x-\alpha_{21})\cdots(x-\alpha_{r_1 1}) \\ X_2 &= (x-\alpha_{12})(x-\alpha_{22})\cdots(x-\alpha_{r_2 2}) \\ &\dots \\ X_k &= (x-\alpha_{1k})(x-\alpha_{2k})\cdots(x-\alpha_{r_k k}) \end{aligned}$$

Дакле,

$$f(x) = A_0X_1X_2^2X_3^3\cdots X_k^k.$$

Ако нађемо све X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, решили смо једначину. У тексту је дат пример за $k = 4$.

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4.$$

$NZD(f(x), f'(x))$ је

$$D(x) = X_2 X_3^2 X_4^3.$$

Потражимо $NZD(D(x), D'(x))$ и добијамо $D_1(x) = X_3 X_4^2$. Даље је

$$NZD(D_1(x), D_1'(x)) = D_2(x) = X_4.$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{D(x)} &= Q(x) = X_1 X_2 X_3 X_4 \\
\frac{D(x)}{D_1(x)} &= Q_1(x) = X_2 X_3 X_4 \\
\frac{D_1(x)}{D_2(x)} &= Q_2(x) = X_3 X_4 \\
D_2(x) &= X_4.
\end{aligned}$$

Следи

$$X_1 = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}, \;\; X_2 = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}, \;\; X_3 = \frac{Q_2(x)}{D_2(x)}, \;\; X_4 = D_2(x).$$

Јасно је како се овај поступак може уопштити. Наравно, констатује се да се ово правило може применити на израчунавање вишеструкости корена само онда кад нам је дотични корен познат.

На страни 40 Петровићевих предавања, имамо примену хомогених функција у налажењу вишеструких корена. Наиме, ако је дата једначина

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

замени се x са $\frac{x}{y}$ и све се помножи са y^n. Добија се једначина

$$y^n F(\frac{x}{y}) = \varphi(x, y) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \cdots + A_{n-1} x y^{n-1} + A_n y^n = 0.$$

Јасно, $\varphi(x, 1) = F(x)$. Ојлеров идентитет за хомогене функције гласи

$$x\varphi_x'(x, y) + y\varphi_y'(x, y) = n\varphi(x, y).$$

Ако је $F(a) = 0$ и $F'(\alpha) = 0$, имамо

$$\varphi(\alpha, 1) = 0 \text{ и } \varphi'_x(\alpha, 1) = 0.$$

Добија се $\varphi'_y(\alpha, 1) = 0$, па је сваки двоструки корен једначине $F(x) = 0$ заједнички корен једначина

$$\varphi'_x(x, y) = 0 \text{ и } \varphi'_y(x, y) = 0,$$

за $y = 1$. Даље се може, на сличан начин, наставити поступак, у случају да једначина има корен већег реда. Опет је и ова метода илустрована многобројним примерима.

У делу о трансформацијама једначина даје се низ интересантних примера. На страни 58, у шестом задатку, се каже

Пример 2. *Образовати једначину чији су корени квадрати корена дате једначине*

Смена $y = x^2$, односно $x = \sqrt{y}$ даје једначину $F(\sqrt{y}) = 0$. Дакле,

$$F(\sqrt{y}) = A_n + A_{n-1}\sqrt{y} + A_{n-2}y + A_{n-3}y\sqrt{y} + \cdots = 0.$$

Груписањем чланова који садрже $\sqrt{y}$ добијамо

$$(A_n + A_{n-2}y + A_{n-4}y^2 + \cdots) + \sqrt{y}(A_{n-1} + A_{n-3}y + A_{n-5}y^2 + \cdots) = 0$$

или

$$\sqrt{y}(A_{n-1} + A_{n-3}y + A_{n-5}y^2 + \cdots) = -(A_n + A_{n-2}y + A_{n-4}y^2 + \cdots).$$

Квадрирањем имамо

$$y(A_{n-1} + A_{n-3}y + A_{n-5}y^2 + \cdots)^2 = (A_n + A_{n-2}y + A_{n-4}y^2 + \cdots)^2$$

и враћањем $y = x^2$ у игру, добијамо тражену једначину по x.

Погледајмо задатак 16 на страни 62.

Пример 3. *Ако су $\alpha_r, r = 1, 2, 3, \ldots, n$ корени једначине n-тог степена $f(x) = 0$, израчунати изразе*

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_r} \quad u \quad \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(x - \alpha_r)^2}.$$

Из тог доказати дакле да кад су сви корени једначине $f(x) = 0$ реални, једначина

$$F(x) = f(x)f''(x) - (f'(x))^2 = 0$$

има све корене имагинарне.

Нека су сви корени различити. Издвајамо овај пример због елеганције решења датог у тексту.

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Логаритмовањем добијамо

$$log f(x) = log(x - \alpha_1) + log(x - \alpha_2) + \cdots + log(x - \alpha_n),$$

наравно, под условом да је све дефинисано. Диференцирањем по x добијамо

$$\frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x - \alpha_n} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Поновним диференцирањем имамо

$$-\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(x - \alpha_r)^2} = \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{f^2(x)}.$$

Лева страна овог идентитета не може бити нула ни за једно реално x, па једначина

$$f(x)f''(x) - (f'(x))^2 = 0$$

нема реалне корене.

На страни 64, друге књиге о једначинама, почиње прича о симетричним функцијама. Дата са интересантним примерима симетричних функција, ова материја може и данас, деведесет година касније, бити део градива савремених уџбеника алгебре.

4. Решавање кубне једначине

Решавање *општих алгебарских једначина* почиње на 78. страни текста. Одмах се констатује да

Решавање општих алгебарских једначина виших од четвртог степена је немогуће, као што је доказао Абел. Једначине виших од четвртог степена могу се само приближно решити само ако су њихови коефицијенти дати у бројевима, а ова решења ћемо доцније видети.

Старински језик је део шарма овог текста. Постепено се долази до решења кубне једначине.

Пример 4.

Полазећи од једначине
$$x^3 - A = 0,$$
и стављајући да је
$$A = re^{i\alpha} = re^{(\alpha+2k\pi)i} = r[\cos(\alpha+2k\pi) + i\sin(\alpha+2k\pi)]$$
где је $r = |A|$, добија се
$$x = \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{r}e^{\frac{\alpha+2k\pi}{3}i} = \sqrt[3]{r}[\cos(\frac{\alpha+2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\alpha+2k\pi}{3})].$$
Ако сад дајемо количини k вредност 0,1,2 добијамо три различите вредности за x и то
$$\begin{aligned} x_1 =& \sqrt[3]{r}[\cos(\frac{\alpha}{3}) + i\sin(\frac{\alpha}{3})] \\ x_2 =& \sqrt[3]{r}[\cos(\frac{\alpha+2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\alpha+2\pi}{3})] \\ x_3 =& \sqrt[3]{r}[\cos(\frac{\alpha+4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\alpha+4\pi}{3})]. \end{aligned}$$

Дамо ли ми количини k још друге вредности, вредности за x ће се увек поклапати са једним од трију горе наведених израза.

Даље се доказује да, ако је α један од три наведена корена а
$$\varepsilon = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}),$$
онда су $\alpha, \varepsilon\alpha, \varepsilon^2\alpha$ корени полазне једначине.

Прелазећи на решавање *опште једначине*, елиминацијом квадратног члана, долази се до еквивалентне једначине
$$x^3 + px + q = 0.$$
Поступак налажења корена исти је као код Кардана, односно Тартаље, па се каже

Ова нам формула представља општи облик решења једначине трећег степена; њу је први нашао Tartaglia, и ако се зове Cardan-ова формула.

Двадесет година пре Тартаље, Scipione del Ferro, професор математике у Болоњи, је 1515. године решио једначину облика
$$x^3 + px = q.$$

Тартаља је исти облик једначине решио 1535. године уочи математичког двобоја са учеником Шипиона дел Фера. Врло је вероватно да је Тартаља знао да реши и једначину облика

$$x^3 + px^2 = q.$$

Све остало је решио Girolamo Cardano у својој књизи *Ars Magna* из 1545. године. Зато се формула за корене једначине трећег степена зове *Карданова*. Пребацивање q на леву страну знака једнакости за све њих је била права тешкоћа. Знак $=$ је увео енглески математичар Robert Recorde 1557. године, јер га је подсећао на паралелне дужи.

Преносимо решење кубне једначине из Петровићевих предавања. Као што је познато, једначина

$$x^3 + px + q = 0$$

се решава тако што уведемо смену $x = u + v$. Враћањем x у горњу једначину добијамо следеће везе за u и v

$$u^3v^3 = -(\frac{p}{3})$$
$$u^3 + v^3 = -q.$$

Решавањем овог система по u^3 и v^3 добијамо да је

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

где је

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Означимо са A једну вредност кубног корена од u и са B једну вредност кубног корена од v. Добијамо по три вредности за u и v

$$A,\ \varepsilon A,\ \varepsilon^2 A$$
$$B,\ \varepsilon B,\ \varepsilon^2 B.$$

Лако се показује да су корени полазне једначине

$$
\begin{aligned}
x_1 &= A + B \\
x_2 &= \varepsilon A + \varepsilon^2 B \\
x_3 &= \varepsilon^2 A + \varepsilon B,
\end{aligned}
$$

односно

$$
\begin{aligned}
x_1 &= A + B \\
x_2 &= -\frac{A+B}{2} + i\frac{A-B}{2}\sqrt{3} \\
x_3 &= -\frac{A+B}{2} - i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

где је $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, кубни корен из јединице.

У зависности од тога коју вредност има дискриминанта

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

унапред знамо какви су корени једначине. Ако је $D > 0$, онда је $\sqrt{D}$ реалан број, па узимајући за A и B реалне вредности, добијамо, у општем случају, један реалан и два комплексна корена.

Занимљиво је да се у тексту књиге предавања наводи Hudde као аутор овог метода решавања кубне једначине. Вероватно се мисли на холандског математичара Johannes van Waveren Hudde-a, градоначелника Амстердама од 1672. до 1703. године. На страни 84 разматра се случај кад је $D < 0$, који аутори називају несводљив случај (*casus irreducibile*). У тексту се каже

Но пошто су

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D_1}} \;\; u \;\; v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D_1}},$$

где је $D = -D_1$ тако да је $D_1 > 0$, две, имагинарне конјуговане величине, то ако једна од вредности u има облик $A = a + ib$, једна ће вредност од v имати облик $B = a - ib$. Тада ћемо имати вредности за u

$$a + ib, \;\; \varepsilon(a + ib), \;\; \varepsilon^2(a + ib)$$

а за v

$$a - ib, \;\; \varepsilon(a - ib), \;\; \varepsilon^2(a - ib).$$

Корени ће бити дати изразима

$$x_1 = (a+ib) + (a-ib) = 2a$$
$$x_2 = \varepsilon(a+ib) + \varepsilon^2(a-ib) = a(\varepsilon+\varepsilon^2) + ib(\varepsilon-\varepsilon^2)$$
$$x_3 = \varepsilon^2(a+ib) + \varepsilon(a-ib) = a(\varepsilon+\varepsilon^2) - ib(\varepsilon-\varepsilon^2)$$

Како је пак

$$\varepsilon+\varepsilon^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -1$$
$$\varepsilon-\varepsilon^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$$

то су сва три корена

$$x_1 = 2a$$
$$x_2 = -a - b\sqrt{3}$$
$$x_3 = -a + b\sqrt{3}.$$

Проблем је наћи a и b. Ово се не може урадити кореновањем. Петровић и Салтиков овако образлажу *casus irreducibilis*:

$$x_1 = 2a, \quad x_2 = -a - b\sqrt{3}, \quad x_3 = -a + b\sqrt{3},$$

знамо да постоје следеће везе

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \;\; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p, \;\; x_1x_2x_3 = -q.$$

Ако у њима сменимо горње вредности, прва ће веза бити индентично задовољена, а из друге две добијамо

$$a^2 + b^2 = -\frac{p}{3}, \;\; 2a^3 - 6ab^2 = -q.$$

Елиминишемо ли из ове две једначине b^2, *добијамо*

$$2a^3 - 6a\Big(-\frac{p}{3} - a^2\Big) = -q,$$

или

$$a^3 + \frac{p}{4}a + \frac{q}{8} = 0.$$

У овој једначини је такође

$$D_1 = \left(\frac{p}{4} \cdot \frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2 \cdot 8}\right)^2 < 0$$

јер је $D_1 = \frac{1}{64}D$, *а* $D < 0$ *по предпоставци.*

Ова једначина има према томе три реална и различита корена, и решавање те једначине нам задаје исто толико тешкоћа као и решавање првобитне једначине.

Наравно, све ово само значи да се тим путем не може доћи до корена. Можда бисмо неким другим алгебарским сменама дошли до израза за корене.

У данашњим уџбеницима алгебре доказује се следеће тврђење:

Casus irreducibilis. Ако је $f(x) = x^3 + px + q \in R[x]$ несводљив полином који има различите корене, онда било која коренска екстензија $K|Q(p,q)$ која садржи поље разлагања полинома $f(x)$ није реална; то значи $K \nsubseteq R$. Напоменимо да је управо *Casus Irreducibilis* био мотивација за увођење комплексних бројева у математику.

У наставку аутори дају решење кубне једначине $x^3 + px + q = 0$ у тригонометријском облику. Користи се познати тригонометријски идентитет

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - \cos\frac{\varphi}{3}$$
$$\cos\varphi = \cos\Big(\varphi + 2k\pi\Big),$$

па следи

$$4\cos^3\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) - \cos\varphi = 0.$$

Ако уведемо смену

$$\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} = \frac{x}{\rho},$$

добијамо једначину

$$4\frac{x^3}{\rho^3} - \frac{x}{\rho} - \cos\varphi = 0.$$

Ова једначина има корене

$$x = \rho\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right), \ \ k = 0, 1, 2.$$

Полазна једначина

$$x^3 + px + q = 0$$

претвара се у горњу, *тригонометријску једначину*, сменом

$$-\frac{3\rho^2}{4} = p, \quad \frac{-\rho^3 \cos\varphi}{4} = q,$$

па је

$$\rho = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \;\; \cos\varphi = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Корени су дати изразом

$$x = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\Big(\frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\Big), \;\; k = 0, 1, 2,$$

под условом да је $\cos\varphi \leqslant 1$, односно

$$\frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}} \leqslant 1$$

или

$$\frac{q}{2} \leqslant \sqrt{\Big(-\frac{p}{3}\Big)^3}.$$

Последња неједнакост важи ако и само ако је

$$\Big(\frac{q}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{p}{3}\Big)^3 \leqslant 0.$$

Као што знамо, ово је услов да корени буду реални. Свакако мора бити $p \leqslant 0$.

На страни 90, у задатку 2, се каже

Пример 5. *Разделити половину кугле у два једнака дела једном равни паралелној бази.*

Тражи се висина x одсечка сфере чија је запремина четвртина запремине сфере. Дакле,

$$\frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)$$

што је еквивалентно једначини

$$x^3 - 3Rx^2 + R^3 = 0.$$

Смена $x = Ry$ даје

$$y^3 - 3y^2 + 1 = 0.$$

Због квадратног члана уводимо смену, $y = z + 1$ и добијамо

$$z^3 - 3z - 1 = 0$$
$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0.$$

Решавамо тригонометријски

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{27}{27}} = 1, \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2\rho} = \frac{1}{2}.$$

Дакле,

$$\varphi = 60^\circ, \ \ \frac{\varphi}{3} = 20^\circ$$

и корени су

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\cos 20^\circ \\ z_2 &= 2\cos(20^\circ + 120^\circ) = 2\cos 140^\circ \\ z_3 &= 2\cos(20^\circ + 240^\circ) = 2\cos 260^\circ \end{aligned}$$

односно

$$z_1 = 2\cos 20^\circ, z_2 = -\cos 40^\circ, z_3 = 2\cos 100^\circ.$$

z_2 и z_3 су негативни па је $x = 2R\cos 20^\circ$. Лепо и корисно.

5. Решавање једначине четвртог степена

На 92. страни текста се каже

Начин решавања једначине 4-тог степена нашао је Euler, и он је сличан начину по којем смо решавали једначину трећег степена.

Ипак, *начин решавања* једначине четвртог степена први је нашао Ludovico Ferrari, Карданов ученик, а не Ојлер. Кардано је Ферaријево решење презентирао у књизи *Ars Magna* 1545. године. У руком писаном тексту *Теорија једначина*, као аутор решења једначине четвртог степена наводи се Тарталья.

Нема доказа да је Тарталья знао да реши било који нетривијалан облик једначине четвртог степена. Уосталом, Тарталья је одбио да се једначине уврсте у проблеме двобоја са Ферaријем у Милану 1548. године.

Ако погледамо књигу Кардановог савременика Rafael-a Bombelli-ja *L'Algebra*, Bologna, 1572, видимо да он нема лепо мишљење о Тартальи.

У новије време Тартальино место у историји математике одредио је један од водећих научника данашњице Sir Roger Penrose у књизи *Shadows of The Mind* из 1995. године.

Једначине четвртог степена обрађене су у другој књизи на веома елегантан начин. Ваља рећи да је овај приступ решавању једначина четвртог степена користио и Димитрије Нешић. Нешић, као изворну литературу за своју књигу, наводи немачке ауторе и практично нема пресека са литературом коју наводе Петровић и Салтиков.

Презентирани начин решавања једначине четвртог степена, у Петровићевим предавањима, природно се надовезује на Карданов метод решавања једначине трећег степена. Наиме, уводи се смена

$$x = u + v + t$$

према томе,

$$x^2 = u^2 + v^2 + t^2 + 2(uv + vt + tu)$$

или

$$x^2 - (u^2 + v^2 + t^2) = 2(uv + vt + tu)$$

Квадрирањем добијамо

$$x^4 - 2x^2(u^2 + v^2 + t^2) + (u^2 + v^2 + t^2)^2 = 4(u^2v^2 + v^2t^2 + t^2u^2) + 8uvt(u + v + t).$$

Враћањем $x = u + v + t$, добијамо

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + t^2)x^2 - 8uvtx + [(u^2 + v^2 + t^2)^2 - 4(u^2v^2 + v^2t^2 + t^2u^2)] = 0.$$

Ако је полазна једначина, која се добија после елиминације кубног члана,

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

онда, изједначавањем са коефицијентима претходне једначине добијамо

$$\begin{aligned} -(u^2 + v^2 + t^2) &= \frac{p}{2} \\ u^2v^2 + v^2t^2 + t^2u^2 &= \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4} \\ -u^2v^2t^2 &= -\frac{q^2}{64}. \end{aligned}$$

Решавањем овог система добијамо кубне једначине по u^2, v^2, t^2.

Интересантно је да Ферари није овако решавао једначину четвртог степена. Он је сводио једначину на једнакост два квадрата квадратних тринома и одатле добијао решења кореновањем леве и десне стране идентитета. Рецимо и то да се данас у уџбеницима алгебре, поред Фераријеве методе, користи и Декартова метода решавања *quartic*-а. Наиме, Декарт, једноставно, полином четвртог степена раставља на производ два квадратна тринома и, методом једнаких коефицијената, добија две квадратне једначине.

6. Општа једначина n-тог степена

У наставку текста, аутори крећу у решавање специјалних једначина произвољног степена. Полази се од *Биномне једначине*

$$x^n - A = 0$$

и, природно, сводећи ову једначину на

$$y^n - 1 = 0$$

и њене корене

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= 1\\
\varepsilon_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\\
&\vdots\\
\varepsilon_{n-1} &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

аутори текста добијају корене полазне једначине

$$x_r = \varepsilon_r \sqrt[n]{A}, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Даље се, аналогно, даје решење случаја кад је A комплексан број.

На страни 99 посматра се класа једначина облика

$$A_0x^{rn} + A_1x^{(r-1)n} + \cdots + A_{r-1}x^n + A_r = 0,$$

чије решење се тражи сменом

$$y = x^n.$$

Новодобијена једначина

$$A_0y^r + A_1y^{r-1} + \cdots + A_{r-1}y + A_r = 0,$$

разматра се за $r \leqslant 5$.

Следе примери.

Пример 6.

$$x^{2n} - 2ax^n \cos\alpha + a^2 = 0,$$

где је *a реална количина.* Јасно, смена $y = x^n$ даје квадратну једначину

$$y^2 - 2ay\cos\alpha + a^2 = 0,$$

чији су корени

$$y_1 = a(\cos\alpha + i\sin\alpha) \ \text{ и } \ y_2 = a(\cos\alpha - i\sin\alpha).$$

Остало је примена Моаврове формуле.

Други одељак се завршава реципрочним једначинама. То су једначине које имају особину да, ако је α један корен дате једначине, онда је $\frac{1}{\alpha}$ такође корен те једначине. Не рачунајући случајеве кад су корени 1 или -1, добијамо једначине парног степена.

Пример 7.

У тексту се реципрочна једначина облика

$$A_0x^{2n} + A_1x^{2n-1} + \cdots + A_nx^n + \cdots + A_{2n-1}x + A_{2n} = 0,$$

решава тако што се уводи смена

$$z = x + \frac{1}{x}$$

подели се лева и десна страна са x^n и добија једначина облика

$$B_0\Big(x^n + \frac{1}{x^n}\Big) + B_1\Big(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\Big) + \cdots + B_{n-1}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + B_n = 0.$$

Очигледно, треба $\Big(x^i + \frac{1}{x^i}\Big)$ изразити помоћу z. Користи се идентитет

$$\Big(x^r + \frac{1}{x^r}\Big)\Big(x + \frac{1}{x}\Big) = x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} + x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}},$$

односно

$$x^{r+1} + \frac{1}{x^{r+1}} = z\Big(x^r + \frac{1}{x^r}\Big) - \Big(x^{r-1} + \frac{1}{x^{r-1}}\Big).$$

Тако је

$$
\begin{aligned}
x^2 + \frac{1}{x^2} &= \Big(x + \frac{1}{x}\Big)z - \Big(x^0 + \frac{1}{x^0}\Big) = z^2 - 2\\
x^3 + \frac{1}{x^3} &= \Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big)z - \Big(x + \frac{1}{x}\Big) = z^3 - 3z\\
x^4 + \frac{1}{x^4} &= \Big(x^3 + \frac{1}{x^3}\Big)z - \Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) = z^4 - 4z^2 + 2.
\end{aligned}
$$

Видимо да је $x^n + \frac{1}{x^n}$ полином по z n-тог степена. Поглавље се завршава свођењем једначина

$$x^{2n} - 1 = 0$$

и

$$x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$$

на једначине n-тог степена.

7. Нумеричко решавање једначина

Трећи одељак носи назив *Решавање бројних једначина.* Данас кажемо, *бројевних.* Имајући у виду да је сваки реалан полином непрекидна функција, уколико постоје две вредности тог полинома које су различитог знака, полином има реалну нулу. Број реалних нула, у интервалу у коме полином мења знак, је непаран. У тексту се аутори једноставно позивају на слику. Такође, у доказима се користи знак ∞ као бесконачно велика вредност и често се њиме множи, дели и сабира. На пример, на страни 114 као правило III наводи се следеће, под условом да је водећи коефицијент позитиван.

Ако је задњи коефицијент једне алгебарске једначине негативан, она има најмање један позитиван корен. Јер ако уврстимо у дату једначину $F(x) = 0$ уместо x – а 0 и ∞, то ће она имати знаке

$$
\begin{array}{cc}
F(0) & F(\infty)\\
- & +
\end{array}
$$

Дакле, између 0 и ∞ мора се налазити најмање један корен.

Јасно је да водећи моном најбрже расте, па аутори одмах закључују да је $F(\infty) > 0$.

У овом одељку Петровић је код куће и градиво је пуно лепих примера. Прво се одређују границе корена. Прва метода одређивања границе реалних корена припада MacLaurin-у. Дакле, под условом да је водећи коефицијент полинома позитиван, имамо

Горњу границу позитивних корена једне алгебарске једначине добијамо ако јединици додамо апсолутну вредност највећег негативног коефицијента једначине, подељеног са коефицијентом највишег степена од x.

Следе Њутнова метода и метода груписања чланова.

На страни 119 се прелази на одређивање рационалних корена.

Ако једначина садржи ирационалне коефицијенте, ми ћемо место њих оставити њихове приближне вредности изражене рационалним бројевима и на тај начин ирационалне коефицијенте претворити у рационалне.

Одмах затим прелази се, природно, на једначине са целобројним коефицијентима. Поред познатог критеријума за целобројне нуле полинома, наводи се и следеће

Ако ни један од бројева

$$(III) \quad F(1), \;\; F(0) = A_n, \;\; F(-1)$$

није дељив са 3, једначина $F(x) = 0$ нема ни једног целог корена.

Доказ је леп и једноставан. Наиме, нека је a целобројни корен. Следи да је

$$\begin{aligned} F(1) &= -(a-1)F_1(1) \\ A_n = F(0) &= -aF_1(0) \\ F(-1) &= -(a+1)F_1(-1). \end{aligned}$$

Како један од бројева $a-1$, a, $a+1$ мора бити дељив са 3, следи тврђење. Затим се каже

Обратно правило не важи, т.ј. ако је један од бројева (III) дељив са 3, једначина не мора имати целе корене.

Следи познати алгоритам налажења рационалног корена целобројног полинома и мноштво лепих примера. Код налажења ирационалних корена приступа се одређивању броја реалних корена и њиховом раздвајању. За два суседна члана неког бројевног низа, који су супротног знака, аутори кажу да *представља једну мену*. Ако су истог знака, онда они *представљају један след*. После краће дискусије о менама низа коефицијената једначине, прелази се на доказ познатог Декартовог правила које гласи

У једној алгебарској једначини број позитивних корена R не може никад бити већи од броја мена M, а ако је мањи, тада је разлика $M - R$ један паран број.

Као последица претходног тврђења доказује се следеће правило
Број имагинарних корена једначине не може бити мањи од $n - (M + M')$, где је M број мена једначине $F(x) = 0$ а M' број мена једначине $F(-x) = 0$.

У доказу се каже
Ово правило је очевидно пошто број P не може бити већи од $(M + M')$. Кад означимо са J број имагинарних корена имамо дакле

$$n - J = M + M',$$

т.ј.

$$J = n - (M + M').$$

Одмах затим се одреди максималан број корена у датом интервалу. Следи, поново, мноштво лепих примера.

Страна 138 почиње Fourier-овом методом одређивања максималног броја корена једначине, који се налазе у датом интервалу. Данас се ово градиво предаје на студијама математике у оквиру групе предмета који спадају у *Нумеричку математику*.

Следећа метода је Rolle-ova метода коју наводимо из *сентименталних* разлога.

Између два узастопна корена једначине $F(x) = 0$ налази се најмање један корен изводне једначине $F'(x) = 0$ а, ако их има више, њихов број је непаран.

Између два узастопна корена изводне једначине $F'(x) = 0$ може се налазити само један корен $F(x) = 0$ или ни један.

Следе примери који и данас могу имати своје место у било ком уџбенику нумеричке математике.

Sturm-ова метода је дата на страни 156. Проблем настаје кад не можемо решити изводну једначину. У тексту се каже

Међутим ако ми изводну једначину не можемо решити, Ролеова се метода не може применити. Ако нам поред тога Декартова и Fourier-ова метода не дају довољно тачне резултате, то треба применити Штурмову методу, која нам потпуно тачно одређује број реалних корена, који се налазе у једном датом интервалу.

Потом следи доказ ваљаности Штурмовог алгоритма и низ задатака, од којих су неки комплетно решени.

На страни 165 приступа се *Приближном израчунавању ирационалних корена.* Дате су познате нумеричке методе *regula falsi* и Њутнова метода и све то са примерима.

Затим следи кратко поглавље о *Одређивању имагинарних корена једне бројне једначине.*

Полази се од једначине

$$F(x) = 0,$$

чији имагинарни корени имају облик

$$z = x + iy.$$

Проблем се своди на израчунавање реалних бројева x и y. Заменом добијамо

$$F(x + iy) = 0,$$

или

$$F(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

што је еквивалентно

$$P(x, y) = 0 \text{ и } Q(x, y) = 0.$$

Раздвајање једначине $F(x+iy) = 0$ добијамо тако што полином $F(x+h)$ развијамо у Тејлоров ред и у њему стављамо $h = iy$. Дакле,

$$\begin{aligned} F(x + iy) &= F(x) + i\frac{y}{1!}F'(x) - \frac{y^2}{2!}F''(x) - i\frac{y^3}{3!}F'''(x) + \cdots = \\ &= \Big(F(x) - \frac{y^2}{2!}F''(x) + \frac{y^4}{4!}F^{(iv)}(x) - \cdots\Big) + iy\Big(F'(x) - \frac{y^2}{3!}F'''(x) + \cdots\Big). \end{aligned}$$

Према томе

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \Big(F(x) - \frac{y^2}{2!}F''(x) + \frac{y^4}{4!}F^{(iv)}(x) - \cdots\Big) \\ Q(x, y) &= y\Big(F'(x) - \frac{y^2}{3!}F'''(x) + \frac{y^4}{5!}F^{(v)}(x) - \cdots\Big), \end{aligned}$$

и решавање полазне једначине сводимо на решавање две једначине са две непознате

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0 \\ Q(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Наравно, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ су коначне суме, јер се после одређеног броја корака изводи анулирају. У примеру који је дат, лако се елиминише y, па се прича своди на једначину са једном непознатом.

четврти одељак, последњи, прави је изазов за решавање. Реч је о *трансцендентним једначинама*. Разумљиво, ради се о једначинама у којима фигуришу *трансцендентне функције*.

У уводу поглавља наводе се суштинске разлике међу реалним полиномима и трансцендентним функцијама. Одмах се констатује да се Декартова и Фуријеова правила не могу применити на трансцендентне једначине. Међутим,

Rolle-ова се метода може применити на трансцендентну једначину

$F(x) = 0$ кад год су функције $F(x) = 0$ и њен извод $F'(x) = 0$ непрекидне функције.

И овде имамо два илустративна примера. Аутори текста се користе и графицима функција у одређивању корена. Најпре се једначини $F(x) = 0$ нађе еквивалентан израз у облику

$$\varphi(x) = \psi(x),$$

а затим се тражи пресек тих кривих.

Пример 8.

$$F(x) = e^x - ax = 0$$

се, јасно, преводи у

$$e^x = ax,$$

и онда се, за реалне вредности a, траже пресеци правих $y = ax$ са $y = e^x$.

Пример 9.

Мало сложенија је једначина

$$F(x) = x^x - 100 = 0.$$

Она се трансформише на облик

$$x^x = 100,$$

па се каже

и кад узмемо Briggs-ов логаритам обеју страна једначине добијамо

$$xlogx = 2,$$

т.ј.

$$F_1(x) = xlogx - 2 = 0.$$

Но ми ту једначину можемо писати у облику

$$logx = \frac{2}{x}.$$

У пресеку хиперболе и логаритамске криве добија се решење трансцендентне једначине

$$F(x) = 0.$$

Прецизна вредност корена, на шест децимала, одређује се Њутновом методом комбинованом са методом *Пропорционалних прираштаја.*

Овај занимљив текст завршава се применом *Методе узастопних приближавања.* Наиме, једначина $F(x) = 0$ се трансформише у израз

$$x = \varphi(x),$$

па ће корен од $F(x) = 0$ бити фиксна тачка $\varphi(x)$. Прича иде овако

Предпоставимо да знамо једну приближну вредност корена дате једначине. Нека је та вредност $x = x_0$ а нека је $x = a$ тачна вредност корена т.ј.

$$\alpha = \varphi(\alpha).$$

Добија се низ

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ...$$

где је

$$x_i = \varphi(x_{i-1}), \ \ i = 1, 2, ...$$

Ако се чланови низа приближавају корену, мора бити

$$|x_{r+1} - a| < |x_r - a|$$

за све вредности r. Знамо да је $x = \varphi(x)$ и $\alpha = \varphi(\alpha)$, што нам даје неједнакост

$$|\varphi(x_r) - \varphi(\alpha)| < |x_r - a|$$

или

$$\Big|\frac{\varphi(x_r) - \varphi(\alpha)}{x_r - \alpha}\Big| < 1.$$

Теорема о средњој вредности даје

$$\frac{\varphi(x_r) - \varphi(\alpha)}{x_r - \alpha} = \varphi'(\beta_r),$$

где је $\beta_r \in [\alpha, x_r]$. Ово значи да је

$$|\varphi'(x)| < 1,$$

кад x варира у интервалу $[x_0, x'_0]$ у коме се налази α. Закључак у тексту је тада низ

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}, ...$$

има за границу дотични корен.

Следе конкретни задаци у којима се вредност корена израчунава на шест децимала.

8. Закључак

Мало је вероватно да су аутори пажљивије гледали овај текст. Сигурно не би било толико штампарских недостатака. Међутим, сигурно је да су то белешке са Петровићевих предавања. Његов дух присутан је на свакој страници текста.

Неоспорно је и то да Петровић није у ова предавања укључио своје оригиналне резултате из *геометрије полинома*, његове омиљене математичке теме.

О Петровићевим оригиналним доприносима алгебри видети у књизи *Алгебра*, књига 4, едиције Сабраних дела Михаила Петровића. Књигу је зналачки приредио професор Жарко Мијајловић. Едицију Сабрана дела Михаила Петровића штампао је *Завод за уубенике и наставна средства*, Београд 1988. године.

Доприносе Теорији полинома Михаила Петровића цитирао је математичар Morris Marden у књизи *Geometry of polynomials*, у издању Америчког математичког друштва, из 1949. године.

Може се рећи да радови Михаила Петровића, о локацији корена алгебарских једначина, данас спадају у област Нумеричке линеарне алгебре, коју популарно називамо *Гершгоринови кругови.*

Теорија алгебарских једначина се данас предаје на свим математичким факултетима света. Круна приче о алгебарским једначинама је Теорија Галоа. Путеви алгебре су недокучиви. Историјски гледано, решавање алгебарских једначина довело је, пре свега, до развоја *Теорије група.* Међутим, доказивање Велике Фермаове теореме природно је водило до појмова *прстена* и *поља.* Развој рачунарства подстиче развој многих алгебарских уопштења група, прстена и поља. У Србији, овим се баве Петровићеви научни потомци.

Математичко потомство Михаила Петровића дало је и даје интересантне доприносе Теорији полинома. Ова тема заврећује посебан зборник прегледних радова домаћих аутора.

Ситне грешке у тексту предавања Михаила Петровића и Салтикова потичу, пре свега, од брзоплетог преписивања тадашњих студената.

Шестог маја, ове године, навршило се 150 година од рођења Михаила Петровића, учитеља многих генерација. Преселимо се у мислима, за тренутак, у Петровићева времена. Тадашњи млади професор математике, који је одслушао предавања о алгебарским једначинама, је врло добро знао да решава једначине. *Скупљачи бодова* данашњих студија математике једноставно не стижу да своје апстрактно знање опробају на конкретним примерима.

Величина једног математичара не мери се одсуством грешака, заблуда и промашаја, већ методама и концептима који воде будуће генерације. Сви народи имају своје великане. Ми поштујемо и волимо нашег Михаила Петровића.

Siniša Crvenković

THEORY OF ALGEBRAIC EQUATIONS OF MIHAILO PETROVIĆ

S u m m a r y

We can say that the lectures about algebraic equations, held by Mihailo Petrović, are mathematical cookies which in a natural way show the unity of algebra and analysis. Lost in space and time, the lectures were waiting for decades to be presented for students of mathematics. Our text recommends Theory of Algebraic Equations by Mihailo Petrović, as a required lecture in mathematical education of young generations.

ДЕЛО МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА „РАЧУНАЊЕ СА БРОЈНИМ РАЗМАЦИМА" И ИНТЕРВАЛНА МАТЕМАТИКА

ДУШАН ТОШИЋ*

А п с т р а к т. – Михаило Петровић објавио је своју књигу „Рачунање са бројним размацима" 1932. године на српском језику. Издање је поновљено 1969. у редакцији др Петра Васића и др Милорада Бертолина. Шездесетих година 20. века започиње развој интервалне математике чији главни протагониста је био R. E. Moore [3]. Интервална математика је брзо постала једна од важних области математике и нашла је велику примену у рачунарству. Настао је велики број радова из ове области. Поставља се питање: „Да ли је рад Михаила Петровића утицао на развој интервалне математике?" Развој интервалне математике је започео са интервалном аритметиком и био је инспирисан електронским рачунарима. Не може се рећи да је рад Михаила Петровића утицао на почетак развоја интервалне математике. Међутим, овај рад је веома значајан због широког спектра математичких дисциплина (почев од аритметике, преко геометрије до диференцијалних и интегралних једначина) у којима су примењени интервали. Радови руских математичара (посебно Чаплигина [7]), настали касније, показали су колико су биле значајне идеје Михаила Петровића у решавању почетног проблема код обичних диференцијалних једначина.

Кључне речи: Михаило Петровић, размак, интервална математика

1. Увод

Михаило Петровић је неколико година држао предавања на Београдском универзитету, а која су се односила на оперисање бројним размацима, тј. интервалима. Након серије курсева, 1932. године публиковао је књигу „Рачунање са бројним размацима". То је једна од првих књига у историји математке где се

* Математички факултет, Универзитет у Београду, и-мејл: dtosic@matf.bg.ac.rs

систематски обрађују интервали. Под размаком М. Петровић не подразумева само линијски интервал на бројној оси, већ и неку ограничену површину, односно, део простора. Ова књига је оригинално дело и у вези са њом појављује се низ интересантних питања, као што су: које изворе је користио Петровић приликом писања књиге, да ли је књига класичан уџбеник или монографија, да ли је непосредно (или посредно) утицала на настанак интервалне анализе, какав утицај је имала на развој математике у Србији итд. Надаље, у овом раду, настојаћемо да одговоримо на постављена питања.

2. О књизи „Рачунање са бројним размацима”

Књига „Рачунање са бројним размацима” је написана на српском језику. Након првог издања, поново је штампана 1969. године (видети [1] и [2]). Књига не садржи податке о коришћеној литератури, нити постоје неке референце у целокупном тексту. Такође, у другим радовима Михаила Петровића нема података о могућим изворима или утицајима. У раду [3] помињу се радови J. C. Burkill-а из 1924. године и R. C. Young-а из 1931. као први радови из математике у којима се оперише интервалима. Мало је вероватно да је Михаило Петровић знао за ове радове јер је махом био оријентисан на француску литературу. Осим тога, приступи интервалима у овим радовима битно се разликују од приступа који је користио у својој књизи. Књига се састоји из 3 одељка:

а) Бројни размаци у елементарним рачунима;
б) Бројни размаци у инфинитезималном рачуну;
в) Бројни размаци за интеграле диференцијалних једначина.

(У трећем одељку М. Петровић користи термин „Интеграл диференцијалне једначине”, а данас бисмо рекли „Решење диференцијалне једначине”.) Из назива одељака може се закључити да М. Петровић користи интервале у разним областима математике, али највише у инфинитезималном рачуну и диференцијалним једначинама.

За курсеве, које је држао о бројним размацима слободно се може рећи да су били оригинални и јединствени. Михаило Петровић је посећивао разне универзитетске центре у свету и сигурно је био упознат са курикулима из области математике. Без обзира што тамо није било курсева везаних за орерисање интервалима, он се није устезао, већ је храбро такве курсеве држао на Београдском универзитету. Како је књига „Рачунање са бројним размацима” настала из оригиналних идеја Михаила Петровића презентованих на предавањима, да ли представља монографију? У предговору другом издању, професор Митриновић третира ову књигу као уџбеник, међутим, приређивачи издања, професори Васић и Бертолино, у предговору, кажу да се књига може третирати и као монографија. На жалост, у књизи није наведена коришћена литература (нити постоје икакве референце) и није написана ни на једном од светских језика. Без сумње, књига представља уџбеник, али, због наведених недостатака, не може се третирати као монографија, и поред тога што обилује оригиналним идејама. Можемо констатовати да је штета што књига није преведена на неки од светских језика јер би, вероватно, имала велику улогу у историји математике.

3. Интервална анализа и „Рачунање са бројним размацима" Михаила Петровића

Шездесетих година 20. века заснована је нова математичка дисциплина – интервална математика. Реч је о математичкој области која се односи на операисање интервалима. Веома брзо ова област је постала врло актуелна јер се издвојила као значајна теоријска основа рачунарства. Велики број математичара заинтересовао се за интервалну анализу, настао је обиман скуп радова и одржане су бројне конференције које су се односиле на ову област. Оснивачем интервалне анализе сматра се Ramon Moore чија књига Interval analysis ([3]) је подстакла многе научнике да се заинтересују за ову област. Како је књига М. Петровића „Рачунање са бројним размацима" настала 40-ак година раније, поставља се питање да ли је она инспирисала Moore-а да оформи нову математичку дисциплину – интервалну анализу. (Интервална анализа је подстакла примену интервала у разним математичким дисциплинама и тако је оформљена интервална математика.) Ако књига М. Петровића није директно утицала на Moore-ов рад, да ли је можда посредно, тј. да ли је утицала на ауторе чије резултате је потом користио Moore? Најзначајније резултате у раду са интервалима, пре Moore-а, имали су јапански математичар T. Sunaga и пољски математичар M. Warmus (видети [4]). Резултати до којих су дошли су значајни и Moore је био упознат са некима од њих, посебно са резултатима T. Sunaga-е. Резултати до којих су дошла ова два математичара су добијени приближно у исто време и, по свему судећи, независно један од другог. Нема никаквих података да су они били упознати са радом М. Петровића. Ово се може закључити на основу коришћене нотације, односно, на основу начина приступа интервалима сваког од аутора.

3.1. Приступ интервалима у интервалној анализи

Основне операције у интервалној анализи су 4 аритметичке операције над интервалима. Нека су $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ и $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ два интервала од којих је сваки одређен доњом и горњом границом, а које представљају реалне бројеве. Тада можемо дефинисати следеће операције:

$$
\begin{aligned}
&X+Y=[\underline{x}+\underline{y},\overline{x}+\overline{y}],\\
&X-Y=[\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}],\\
&X*Y=[\min W,\max W] \quad \text{при чему је} \quad W=[\underline{x}*\underline{y},\underline{x}*\overline{y},\overline{x}*\underline{y},\overline{x}*\overline{y}],\\
&1/Y=[1/\overline{y},1/\underline{y}] \quad \text{при чему} \quad 0\notin Y.
\end{aligned}
$$

Акценат у интервалној анализи је на **поузданости** резултата. Наиме, познато је (видети [5]) да при рачунању са бројевима у покретном зарезу на електронским рачунарима могу да се добију некоректни резултати. R. Moore је био члан неколико тимова који су радили на првим електронским рачунарима и закључио је да помоћу интервала може да се гарантује поузданост резултата. Ако је при том интервал довољно мали, тј. ако је разлика између доње и горње границе интервала мања од захтеване тачности, онда се било који број из интервала може узети као решење. Дакле, поред поузданости, акценат у интервалној анализи је и на **тачности**. Стога је један од главних циљева интервалне анализе развијање метода за сужење (смањење дужине) интервала резултата. За детаљније упознавање интервалне анализе видети [6].

3.2. Приступ интервалима М. Петровића

Уместо директног оперисања са крајевима интервала (као што је урађено у интервалној анализи) М. Петровић уводи појам *рачунски представник размака* преко којег посредно оперише размацима (интервалима). Појам рачунски представник размака М. Петровић дефинише на следећи начин:

„Кад је дат размак (a,b), где је a његов предњи а b његов задњи крај, може се, и то на разне начине, формирати једна функција $f(w)$ једнога параметра w таква:

1. да се за једну дату вредност $w=w_1$, вредност функције поклапа са a, за другу једну дату вредност $w=w_2$ вредност функције поклапа са b;

2. да, док w прелази редом између w_1 и w_2, вредност функције пролази кроз све бројеве који се налазе у размаку (a,b). Такву једну функцију $f(w)$ назваћемо рачунским представником размака (a,b); размак (w_1,w_2) назваћемо *параметарским размаком*. Рачунски представник једнога размака обухвата у облику једног рачунског израза, све бројеве садржане у томе размаку.

Ставивши, краткоће ради:

$$\alpha=\frac{w-w_2}{w_1-w_2} \quad \text{и} \quad \beta=\frac{w-w_1}{w_2-w_1}$$

за рачунски представник размака (a, b) може се узети која било од функција:

$$f(w)=\alpha*a+\beta*b,$$

$$f(w) = (\alpha * a^m + \beta * b^m)^{\frac{1}{m}},$$
$$f(w) = a^\alpha * b^\beta.\text{”}$$

Користећи уведени појам, М. Петровић оперише интервалом само помоћу једног реалног броја – рачунског представника тог интервала. За разлику од интервалне анализе, М. Петровићу није главни циљ сужење размака, тј. није акценат на прецизности.

4. Допринос књиге „Рачунање са бројним размацима”

Уколико књига М. Петровића „Рачунање са бројним размацима” није директно допринела развоју интервалне анализе, поставља се питање: какав значај има и колики је њен допринос развоју математике? Слободно се може констатовати да ова књига представља значајан допринос српској па и светској математици. Сама идеја да се уведу интервали као математички објекти (не само преко бројне праве, већ у равни и простору) и да се оформи курс заснован на размацима је била револуционарна за тај период. М. Петровић је „наслутио” да су интервали значајни математички објекти и стога им је поклонио велику пажњу. Уводећи курсеве о интервалима у високошколску математику, крајем двадесетих и почетком тридесетих година 20. века и публиковањем уџбеника, М. Петровић је показао да је био испред времена у којем је живео (у [4] се каже да их је увео у математику пре времена) јер се тек касније (са појавом електронских рачунара) показује од коликог су значаја.

Поред идејног значаја, књига је допринела:

а) да се појави значајан број радова везаних за неједнакости;
б) да се неке идеје М. Петровића примене у интервалној анализи;
в) развоју квалитативне анализе диференцијалних једначина на Београдском универзитету.

Књига „Рачунање са бројним размацима” обилује неједнакостима. То је и разумљиво јер се, приликом рада са размацима, увек испитује да ли је нека вредност између доње и горње границе размака. У књизи су присутне елементарне неједнакости, али и сложене неједнакости везане за диференцијалне једначине. Велики број радова, везаних за неједнакости, објавили су Д. Митриновић (докторирао код М. Петровића) и његови докторанти.

Неке идеје М. Петровића примењиве су и у интервалној анализи. Тако E. R. Hansen ([8]) уводи појам уопштеног интервала оперишући интервалом само помоћу једног реалног броја као што чини М. Петровић помоћу рачунског представника размака. Посебно су интересантни резултати везани за диференцијалне једначине јер се, у комбинацији са резултатима Чаплигина, могу успешно користити у интервалној анализи.

М. Петровић је посебно заслужан за оформљење и неговање курсева квалитативне анализе диференцијалних једначина на Београдском универзитету. Велики број професора (Т. Пејовић, Д. Митриновић, П. Васић, М. Бертолино и др.), доктораната М. Петровића и њихових ученика, бавио се квалитативном анализом диференцијалних једначина. Посебан утицај, на развој квалитативне анализе, имао је трећи одељак књиге „Рачунање са бројним размацима”. У овом одељку описан је поступак за ограничавање области у равни (интервал у равни) у којој се налази решење диференцијалне једначине. Ово је важан почетни корак у квалитативној анализи који омогућава одређивање неких својстава решења диференцијалне једначине, без налажења самог решења.

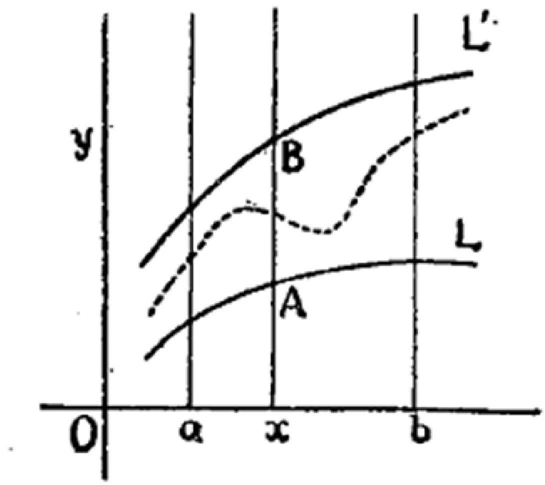
4.1. Размаци М. Петровића у диференцијалним једначинама

Неки резултати из одељка о диференцијалним једначинама могу се успешно и данас употребити па ћемо стога овом одељку посветити мало више пажње. М. Петровић пише: „...било да је тачна интеграција могућа или немогућа, постоје методе за одређивање интеграла у облику размака, тако да се за сваку вредност x садржану у једном размаку (a, b) може одредити одговарајући размак (A, B) у коме се насигурно налази вредност уоченог интеграла дате диференцијалне једначине. Такав је размак, као што се види, променљив, јер се он мења од једне вредности x до друге. Кад се x поступно мења у размаку (a, b), крајеви A и B интегралног размака (A, B) описују по једну линију у равни xOy: то су граничне линије интеграла у томе размаку променљиве x, и то доња и горња гранична линија L и L'.” (Слика 1 – оригинална слика из [1]).

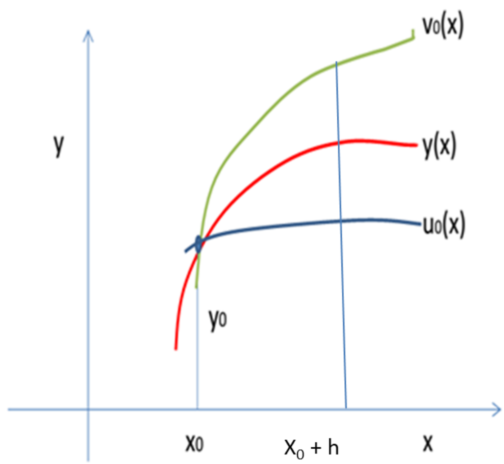
Ако је задат почетни проблем:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

М. Петровић разматра општи поступак за одређивање доње границе $u_0(x)$ и горње границе $v_0(x)$ између којих се налази решење датог почетног проблема, под условом да важи $y(x_0) = u_0(x_0) = v_0(x_0) = y_0$ на интервалу $[x_0, x_0 + h], h > 0$ (слика 2). На конкретним примерима он показује како се овај поступак може применити. Следи један поједностављен пример из [1], али довољно уопштен да демонстрира математичко умеће М. Петровића у одређивању граничних функција $u_0(x)$ и $v_0(x)$.



Слика 1. Површински размак у којем се налази решење диференцијалне једначине



Слика 2. Интервал решења одређен је правама $x = x_0, x = x_0 + h$ и функцијама $u_0(x), v_0(x)$.

Пример 10. *Нека је задат почетни проблем за Рикатијеву диференцијалну једначину:*

$$y' = y^2 + f(x), y(x_0) = y_0.$$

За функцију $f(x)$ *претпостављамо да је без сингуларитета,* $f(x_0) > 0$ *и да важи* $M \leqslant f(x) \leqslant N$ *за* $x \in [x_0, x_0 + h]$*. Користећи предложени, уопштени поступак за налажење ограничавајућих функција траженог решења* $y(x)$*, М. Петровић одређује:*

$$u_0(x) = \frac{y_0\sqrt{N} + Ntg[(x - x_0)\sqrt{N}]}{\sqrt{N} + y_0 tg[(x - x_0)\sqrt{N}]}, \quad v_0(x) = \frac{y_0\sqrt{M} + Mtg[(x - x_0)\sqrt{M}]}{\sqrt{M} + y_0 tg[(x - x_0)\sqrt{M}]}.$$

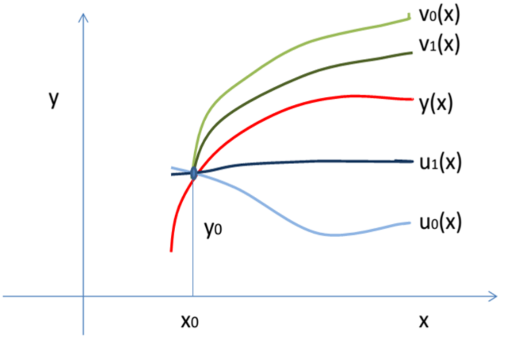
4.2. Чаплигинов метод за двострану апроксимацију решења обичне диференцијалне једначине

Руски математичар Чаплигин ([7]) предложио је аналитички, итеративни поступак за двострану апроксимацију решења почетног проблема обичних диференцијалних једначина. Нека је:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Када су познате почетне ограничавајуће функције $u_0(x)$ и $v_0(x)$ за које важи $y(x_0) = u_0(x_0) = v_0(x_0) = y_0$, онда се методом Чаплигина (слика 3) може одредити низ апроксимација $u_n(x)$ и $v_n(x), (n = 1, 2, 3, ...)$ за које важи:

$$u_0(x) \leqslant u_1(x) \leqslant ... \leqslant u_k(x) \leqslant y(x) \leqslant v_k(x) \leqslant ... \leqslant v_1 \leqslant v_0(x).$$



Слика 3. Графички приказ једне итерације Чаплигиновог метода

Битна карактеристика Чаплигиновог метода је брзина конвергенције. Наиме, за $n-$ту итерацију функција $u_n(x)$ и $v_n(x), (n = 1, 2, 3, ...)$ важи:

$$|v_n(x) - u_n(x)| < \frac{C}{2^{2^{n-1}}},$$

где је C позитивна константа. Чаплигинов метод омогућава да се брзо сужавају површински интервали у којима се налази решење датог почетног проблема. На тај начин се постиже прецизност битна за интервалну анализу. Важан корак у Чаплигиновом методу је одређивање почетних апроксимација $u_0(x)$ и $v_0(x)$. Већ смо констатовали да је овај корак важан и за квалитативну анализу диференцијалних једначина. Чаплигинов метод је настао 20-так година након публиковања књиге „Рачунање са бројним размацима" и није могао бити познат М. Петровићу. Да је овај метод био познат М. Петровићу, вероватно би књига о размацима била много богатија. Чаплигинов метод је аналитички и после неколико корака изрази за рачунање апроксимација постају врло комплексни. Један од начина да се имплементира је дискретизација. Постоји низ тешкоћа приликом дискретизације Чаплигиновог метода (видети [9]). У принципу, могуће је извршити дискретизацију на више начина, али се тиме овде нећемо бавити.

5. Закључак

Књига „Рачунање са бројним размацима" је једна од првих у историји математике у којој се систематски оперише интервалима. И поред тога, не може се рећи да је утицала на настанак интервалне математике. Међутим, књига је имала велики утицај на развој математике у Србији. Утицала је на настанак великог броја радова о неједнакостима, али посебно је значајна за оформљење курсева из квалитативне анализе диференцијалних једначина на Београдском универзитету. Поједини резултати из књиге могу се и данас употребити у интервалној анализи. За то је потребно детаљније упознавање тих резултата, што може бити предмет неког будућег истраживања.

Библиографија

[1] М. Петровић, *Рачунање са бројним размацима*, Издање задужбине Луке Ћелевића – Требињца, Београд (1932).

[2] М. Петровић, *Рачунање са бројним размацима*, Издавачко предузеће Грађевинска књига, Београд (1969).

[3] R. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N. J. (1966).

[4] S. Markov and K. Okumura, *The Contribution of T. Sunaga to Interval Analysis and Reliable Computing,* In: T. Csendes (ed.) Developments in Reliable Computing, Kluwer (1999), pp. 163–184.

[5] R. Hugo and N. Santiago, *Interval Computation*, www.informatik. uni-bremen.de/.../ Santiago102007Interval.pdf

[6] R. E. Moore, R. B. Kearfott, M. J. Cloud, *Introduction to interval analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2009).

[7] S. A. Chaplygin, *Collected Papers on Mechanics and Mathematics*, Moscow, (in Russian), (1954).

[8] E. R. Hansen, *A generalized interval arithmetic*, In: Nickel K. (eds) Interval Mathematics. IMath 1975. Lecture Notes in Computer Science, vol 29. Springer, Berlin, Heidelberg (1975).

[9] D. Tošić, *Some problems related to discretization of Chaplygin's method*, Mat. vesnik, 35(1983), pp. 305–318.

Dušan Tošić

THE WORK OF MIHAILO PETROVICH "CALCULATION WITH NUMERICAL INTERVAL" AND INTERVAL MATHEMATICS

S u m m a r y

Mihailo Petrovich first published "Calculation with numerical intervals" in 1932 in the Serbian language. The realese was reprinted in 1969 in the editorial Dr. Petar Vasic and Dr. Milorad Beretolino. The development of interval mathematics began in the 1960s with R. E. Moore [3] as its main protagonist. The interval mathematics quickly became a significant field in mathematics with prominent use in computer sciences and numerus papers were published in this field. The key question is: "Did M. Petrovich influence the development of interval mathematics?" The development of interval mathematics commenced with interval arithmetic and it was inspired by electronic computers. One could not make a strong claim that the work of M. Perovich directly influenced development of interval mathematics. However, his groundbreaking work was very important for a wide spectrum of mathematical disciplines in which the intervals are applied (arithmetic, geometry, differential and integral equations, to name a few). Subsequent publications by Russian mathematicians (especially Chaplygin [7]), pointed out the significance of M. Petrovich's ideas in solving the initial value problem at ordinary differential equations.

ЗНАЧАЈ ПЕТРОВИЋЕВИХ СПЕКТАРА У ЗАСНИВАЊУ МАТЕМАТИКЕ

МИЛОШ МИЛОВАНОВИЋ*

А п с т р а к т. – Феноменологију Михаила Петровића и његове спектре повезује намера да се иницирају дисциплине које би математици и њеним применама значиле суштински подстицај. Но док је феноменологија од свог настанка привлачила пажњу јавности и била предмет истраживања, за спектре се то не може рећи – премда је Петровић недвојбено изражавао наду да ће се управо на овој теорији засновати ефикасна и универзална метода. Математички спектри при том оцртавају два принципа од значаја током последње деценије његовог живота: линеаризацију података приликом рачунске обраде и поступак „геделизације" који кодира језик помоћу природних бројева [1]. Губи се из вида међутим да Петровићев код није представљен природним, него реалним бројевима који у том погледу сажимају целокупни предмет математичке анализе. Тако схваћена, математика одговара спектралном поступку чинећи јединство са својим применама у физици, хемији и другим областима. Категорички скелет ове методе је појам континуума, чиме се указује сродност са интуиционизмом Браувера код ког је то основна структура свести [2]. По Брауверовом назору, она је установљена интуицијом времена – што наговештава његову важност у заснивању математике. Од значаја је размотрити Петровићеву теорију из тог угла, чиме би се указала веза са математичком феноменологијом која времену такође придаје нарочито место [3].

Кључне речи: реални и p-адски бројеви; континуум; интуиционизам; време; математичка феноменологија

Спектрална метода се састоји у расипању непознатих у нумерички спектар као што анализатор при спектралној анализи расипа сноп зракова у светлосни спектар. Непознате се у нумеричком спектру налазе као спектралне пруге и линије на начин на који се одређују непознати елементи у некој супстанци. Главна

* Математички институт САНУ, и-мејл: milosm@mi.sanu.ac.rs

карактеристика пругастог спектра игра улогу што одговара снопу светлости који испушта анализирана супстанца, док спектрална генератриса одговара призми којом се анализа изводи.

Када су првобитне непознате цели бројеви, анализу њиховог комплекса непосредно врши спектрална генератриса – оне су расуте у спектру као што су то спектрални индекси карактеристични за елементе измешане у усијаном телу. Када непознате нису цели бројеви, потребно их је подвргнути претходној припреми пре него што се унесу у спектралну генератрису као што се подвргава одређеној модификацији светао сноп који емитује анализирану супстанцу пре но што се пропусти кроз дисперзивну призму (нпр. стављањем на пут светлости која се анализира стакленог балона са одређеним парама). Овде би се та припрема састојала у некој трансмутацији сагласној са низом непознатих.

Аналогија се наставља још много даље кад се запази да се дисперзија пругастог спектра мења са карактеристиком спектралног ритма који онај ко рачуна може по вољи модификовати. На сличан начин се дисперзија светлосног спектра мења са условима експеримента који се модификују за исту супстанцу подвргнуту анализи (мењајући температуру, притисак, густину итд.). Равномерна дисперзија нумеричких спектара налази свој аналогон у маси случајева које пружа спектрална анализа у хемији (такав је, на пример, случај извесних делова спектра сумпора произведеног помоћу обложене цеви); исто важи и за равномерно растућу дисперзију (на пример у случају обичног спектра сумпора код ког растојања између максимума равномерно расту у смеру љубичасте боје).

Промене дисперзије нумеричких спектара нису специфичне за извесни низ са којим се спектар доводи у везу. Када се мењају елементи који утичу на карактеристику ритма, модификује се дисперзија спектра било ког низа и то у истом смеру. Исто тако, промена температуре или притиска модификује дисперзију спектара неке светлости у истом смислу за различите зраке подвргнуте анализи.

Постоје при том трансмутације које извесну функцију претварају у вредност која не зависи од полазне и која на производ не оставља никакав траг, а та трансмутација се може састојати и у свођењу сваке функције на нулу. Спектар који би одговарао таквој трансмутацији може бити и континуиран тј. спектар који чине само нуле, мада ће друга трансмутација произвести дисконтинуиран спектар са линијама. Ова чињеница има свој аналогон у спектралној анализи када водоник, угљеников оксид или сумпорисани водоник горе у кисеонику – спектар пламена при анализи помоћу призме нема ниједну линију, мада је у другим околностима спектар истих гасова дисконтинуиран.

Такве аналогије као и велики број других које постоје између математичких и светлосних спектара оправдавају назив који смо дали изложеном поступку [4].

1. Увод

Целокупна филозофија математике у основи се дели на два става – платонизам и питагорејство. Оба стављају нагласак на аритметику, али се при том битно разилазе по питању њеног поимања. За идеалистичку филозофију Платона, бројеви представљају идеје које су савршене, вечне, безвремене и чију бледу сенку чине природне појаве. Свет идеја условљава творца који материју обликује сапет овим појмовима што оцртавају границу његове слободе. Модерна наука заузима ово становиште, уз ретке изузетке који се сматрају зачецима постмодерних схватања [5].

По Питагорином назору пак, бројеви су ствари што би значило да аритметика представља грану математичке физике. Он с тим у вези нарочити значај придаје музици, а потом и астрономији и геометрији чији је статус подударан са оним што га заступа теорија релативности [6].[2] И не само да је ово становиште подржано савременом физиком, већ присуствује и у математици чиме се дилема између платонистичког и питагорејског става одражава на питање њеног заснивања. Први од њих би одговарао Хилбертовом формализму, а други интуиционизму Брауера.

За разлику од Хилбертовог програма који математику своди на формални језик, интуиционизам је сматра изградњом све сложенијих структура чиме се време испоставља основом свести. Брауер с тим у вези уводи појам временског континуума који је категорички скелет ове методе, подразумевајући при том динамички идентитет налик Јунговој психологији где природни бројеви носе жиг времена [7]. Они означавају скале континуума који се у том погледу развија и чији израз представљају свеколике структуре математике.

Увидети однос који поједине структуре утапа у континуум ипак је нетривијалан задатак од суштинског значаја за интуиционистичко заснивање. С правом тврдимо да је Петровићева теорија математичких спектара њему посвећена. По среди је без сумње питагорејски став, што се види из навода на почетку овог рада који излаже ауторов назор о јединству математичке методе и њених примена – заснивајући је у аналогији са физиком, или пак физичком хемијом. Штавише, Михаило Петровић на ово и непосредно указује тврдећи како његова теорија даје прави смисао филозофији Питагоре [8].[3]

[2] Услед постојања тога становишта може се рећи да геометрија увире у физику; у јединствено гледање на природу, из кога је некад, пре више од две хиљаде година геометрија потекла.

[3] Констатујући овакву узајамност између појава и бројних спектара, немогућно је отети се од размишљања о мистичним слутњама старих филозофа који су у свему што постоји или се дешава налазили бројеве и привиђали игру бројева. За Питагорино се име нарочито везује тежња за изражавањем ствари и факата бројевима и једна фамозна његова формула гласи „ствари (бића) су бројеви". Док је Платон стављао бројеве, као атрибуте поред ствари, које се могу

2. Математички спектри

Појам спектра присуствује у исконском смислу који се јавља још код Њутна, означавајући слику добијену разлагањем светлости [9]. Његова разрада у хармонији и музици употпунила му је значење доводећи га у везу са диференцијалним једначинама и теоријом оператора, што важи и за математичке спектре Михаила Петровића који се могу излагати на тај начин. Он то међутим не чини управо због инсистирања на физикалности математике која је питагорејцима била, али модерним схватањима није баш тако очигледна. С тим у вези, и музичка хармонија се често разматра у појмовима идеализма који је своди на пуку апстракцију чему се с правом противе сами музиколози [10].[4]

Михаило Петровић се музиком бавио безмало професионално предводећи свирачко друштво *Суз*, основано 1896. године, на чије се састанке није могло лако ући и о којима се много причало. Естетски дојам суштински скопчан са етичким начелом чинио је бескомпромисни основ његове личности од ког није одступао ни за јоту [11].[5] Петровићево схватање естетике било је према томе делатно, али и сазнајно будући да математички спектри у целини представљају теорију музике – уколико се појми као математичка метода.

чулно опажати, питагорејци су тврдили да су бројеви саме ствари. Узајамност између факата и бројних спектара даје прави и тачан смисао таквим неодређеним мистичним рефлексијама.

[4] Музиком је време организовано и кондензовано у један скоро опипљив концентрат. Но посматрана са те тачке гледишта, музика је безмало више у домену теоријске физике него естетике. И можда је због тога мало ко пропуштао да уочи шансу коју музика пружа; али се мало ко њоме стварно користио.

[5] Ја га нисам видео како се гласно смеје. Само сам запамтио његов отмени смех уснама и очима. Тако сам видео да се смеју неки угледни сеоски домаћини на које би Петровић врло личио да је навукао гуњ. Испод његове привидне питомости, пробијала се бескомпромисна чврстина. Испод једноставности, на изглед, искуством у држању откривала се врло сложена природа. Испод научничког мира, крио се страсни немир једног интелектуалца који уме да поштује туђе назоре, али који не одступа од својих уверења. А умео је да буде и жесток. И сасвим сам разумео када је са жестином реаговао на помен једног познатог публицисте који је у Солуну, Првог светског рата, довео у сумњу његов, Петровићев, патриотизам због неких сплетака око бившег престолонаследника Ђорђа. Мишићи су му на лицу заиграли и изговорио је тешку реч, пуну презира и неопозиву, против оних који су у стању за љубав рачунице и каријере да прљају људе. Кажем, ту моралну побуну сам разумео и чинило ми се да Петровић може само тако да реагује. Али ми се, другом приликом, учинило мало необично када се повела реч о једном опет угледном човеку који је зажелео да дође на вечеру „сузоваца” и некако успео да буде позван. Понесен неконтролисаним расположењем, у једном тренутку док су Микини прсти дрхтали по виолинској жици, тај човек је дохватио са стола чашу и тресну̑о њоме о велико кафанско огледало. Причајући о томе, Петровић није могао, ни после неколико година, да савлада жестину: „И са њим је тада било свршено! Први и последњи пут! Никада више неће моћи да крочи тамо где ми седимо! Ми уживамо. А кад уживамо не ломимо намештај.” Дакле, не само онда када му је озлеђено етичко него и кад му је неко повредио естетско осећање он је кидао заувек с таквим човеком и није могло бити ни говора о помирењу.

Спектрална метода је оцењена као врло оштроуман начин аритметизације разноврсних проблема, чак и по цену великог броја операција практично неизводљивих у доба када рачунари још нису били развијени [12]. По Душану Адамовићу, Петровићеви спектри антиципирају два методолошка принципа примењивана у математици периода који почиње у последњој деценији његовог живота: *први од њих је линеаризација података приликом рачунске обраде, а други поступак „геделизације" којим се сви симболи, формуле, теореме и докази извесне теорије изражавају природним бројевима* [13].[6] Оно што Адамовић, међутим, по свој прилици намерно превиђа тиче се чињенице да ова метода математику не представља природним већ реалним бројевима. Ни појам линеаризације с тим у вези није посве адекватан будући да његово значење обично подразумева коначан низ података, док су у овом случају по среди пребројиви низови цифара.

Према томе, математика је за Петровића континуум и ни мање ни више од тога. Он ово становиште образлаже нашироко тврдећи како *никаква класа функција која има већу моћ од континуума не може бити предмет математичке анализе, а још мање инструмент њене примене* [8].[7] Петровић се дакле чврсто држи питагорејског става о јединству математике са примена, чиме се приближава Брауверовом схватању да је основ математике временски континуум који превазилази језик представљајући чин стварања. Брауер под тим превасходно подразумева формализам Хилбертовог програма који је у својој суштини дискретан, те ниуколико није кадар исцрпсти стваралачку моћ континуума [5].

3. Спектрална метода

Уобичајени поступци одређивања аналитичке функције дискретним условима захтевају бесконачно много података као што су коефицијенти редова који одговарају функцији, њене вредности итд. Показује се међутим да је функција потпуно одређена у некој области само једним податком са њом на погодан начин скопчаним, уз допунске услове који су квалитативне природе. Тако је она дефинисана без икакве двосмислености у околини тачке $x = 0$ условом да коефи-

[6] Овај други поступак примењиван у доказу Геделових теорема од есенцијалне је важности за савремене погледе на заснивање и суштину математике.

[7] То стога што се у рачунањима ради само са функцијама од којих је свака одређена пребројивим низом елемената. А за такве функције Беровим испитивањима је јасно ограничена реална функционална област која је довољна за све потребе математичке анализе и изван које свака генерализација изгледа да ће заувек остати бесплодна и узалудна. С друге стране, свака функција такве врсте може се сматрати као да одговара једној тачки функционалног простора у коме би једна класа или једна категорија функција представљала једно функционално поље. Штавише, према општој теорији скупова, функционални простор може се свести на елемент реалне праве ограничен тачкама 0 и 1. То значи да се функције могу нумерисати помоћу децималних разломака што се налазе између 0 и 1. По таквим се нумерама разликује једна функција од друге исте класе. Свака од њих је спектар функције на коју се односи.

цијенти њеног развоја у степени ред буду цели бројеви познатог знака и вредношћу коју узима за погодно изабрану независну променљиву. У случају када су сви коефицијенти позитивни цели бројеви мањи од 10 и када је $f(0.1) = \frac{1}{3}$, функција мора бити $f(x) = \frac{3x}{1-x}$ [14].

Уколико је дакле $f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots$ аналитичка функција чији су коефицијенти једноцифрени, она је одређена вредношћу $S = f(10^{-1}) = A_0.A_1\ldots$ која се добија ређањем ових цифара. На тај начин добијен број S се назива њеним *спектром јединичног ритма*, а функција $F(x) = f(10^{-1}x)$ таква да важи $S = F(1)$ *генератрисом спектра*. У случају да се коефицијенти развоја састоје од више цифара, потребно је ритам спектра ускладити са одговарајућим бројем места за представљање сваког од њих, која се називају *спектралне пруге*. Ритам може бити *равномеран* – када сваком од коефицијената одговарају пруге исте ширине – или пак *неравномеран* – када то није случај – а који може бити *равномерно* или *неравномерно убрзан*. Употреба кинематичких појмова за опис спектралног ритма наговештава да цифарска места позиционог система означавају време, баш као што је случај у временском континууму Браувера који се развија скалирањем.

Уколико коефицијенти нису целобројни, потребно је применити трансмутацију Δ коју функција f допушта – такву да се развој $\Delta[f] = B_0 + B_1 x + \ldots$ састоји од целих бројева. Функције које у некој области допуштају извесну трансмутацију чије је дејство обострано једнозначно чине спектралну класу. Она је према томе одређена обликом са њом сагласне трансмутације Δ, као што је класа површи одређена метричким тензором ds^2 [4]. Ова опаска указује на суптилну везу између математичких спектара и теорије релативности која се исказује језиком диференцијалне геометрије. Спектрални поступак састоји се у израчунавању свих коефицијената истовремено помоћу децимала извесног броја [15] – баш као што је у релативистичкој космологији време интегрисано у геометријску структуру теорије.

Спектрална метода се примењује на све проблеме између чијих се непознатих и извесног степеног реда са целим коефицијентима може успоставити кореспонденција. Благодарећи произвољности те кореспонденције, на такве проблеме се наилази у свим гранама рачуна од аритметике, алгебре и теорије вероватноће до разних проблема инфинитезималног рачуна и теорије функција [16]. Ефикасност методе илуструјемо примером из алгебре који се тиче факторизације у прстену полинома са целобројним коефицијентима. Како се ради о коначним низовима коефицијената, у овом случају је примерено користити тзв. *целобројне спектре* који се добијају ређањем цифара лево од децималне тачке.

Нека су дати полиноми $P_1(x) = 46x^2 - 54x + 18$ и $P_2(x) = 26x^2 + 21x - 23$. Њима додељујемо целобројне спектре равномерног ритма 4 који је одређен у складу са коефицијентима полинома. Они гласе $S_1 = P_1(10^4) = 45|9946|0048$

и $S_2 = P_2(10^4) = 26|0020|9977$. Спектар производа $P = P_1 \cdot P_2$ у истом ритму – такав да важи $S = P(10^4)$ – добија се множењем појединачних спектара $S = S_1 \cdot S_2 = 1195|9561|9056|2249|8896$. Овом спектру одговара полином $P(x) = 1196x^4 - 438x^3 - 944x^2 + 2250x - 1104$. Метода је такође примењива на растављање полинома, као и одређивање највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца сводећи ове проблеме алгебре на чисту аритметику. Поступак најпре подразумева изналажење одговарајућег ритма који је кадар представити спектрима како поставку проблема, тако и његово решење [17].

Употреба целобројних спектара, као и записивање негативних коефицијената у спектру, открива везу ове теорије са p-адском аритметиком. При том су p-адски бројеви и установљени у аналогији са развојем аналитичких функција, који их представља степенима нерастављивог елемента. На исти начин, прстен p-адских целих чине степени редови облика $C_0 + C_1 p + \dots$ где је p елемент који сматрамо нерастављивим. Будући да се развијају у смеру налево од децималне тачке, они су неупоредиво погоднији за израчунавања здесна налево [18]. У том погледу, теорија математичких спектара се знатно адекватније исказује у појмовима p-адике, премда на то нико – укључујући и Михаила Петровића – није обратио пажњу. Штавише, математички спектри представљају изврсну методологију за увођење p-адских бројева у настави нумеричке математике имајући на уму да их актуелни систем школства не заступа чак ни у високом образовању.

4. Развојни пут спектара

Одјек Петровићевих спектара у научној јавности није био завидан. Иако су расправе и монографије о математичким спектрима објављене на светском језику, интересовање није постојало. Поједини математичари, међу којима су били Окањ, Борел, Поја, Бул, Фер и Фројдентал, писали су приказе у реферативним часописима. Прикази су били углавном коректни и делимично уздржани, а један од њих се сматра негативним – потекао од Ђерђа Поје – услед ауторове тврдње да у књизи није нашао ниједан резултат који би тек спектрална метода учинила доступним [19].[8] Ово је гледиште напокон усвојио и Михаило Петровић који је, по сведочењу Драгослава Митриновића, био разо-

[8] Како потенцијални редови имају моћ континуума, могуће је сваком потенцијалном реду придружити један децималан број, и сваки проблем који се односи на потенцијални ред схватити као проблем који се односи на одговарајући децимални број. Писац себи поставља задатак да ову кореспонденцију „ефектуира” и да разне проблеме о потенцијалним редовима преведе у оне са децималним бројевима. Децимални број придружен потенцијалном реду назива се „спектар”. Уколико су коефицијенти $M_0, M_1, M_2, \dots$ потенцијалног реда

$$f(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \dots$$

чаран својом теоријом сматрајући да се спектри могу користити само уколико је неки алгоритам или резултат унапред познат. Митриновић томе додаје да су бесплодност теорије показали својим радовима малобројни београдски математичари који су јој се одали и да му није познато да се математичким спектрима ико бавио у иностранству [20].[9]

Овај суд, изречен дефинитивно, није међутим сасвим на месту. Математичким спектрима су се, поред Михаила Петровића, занимали Константин Павлович Орлов, Боривоје Михаиловић, Франтишек Пецка и Макс Арије Вотуло – што говори да су већину чинили странци. Орлов је наиме био Рус, Пецка је Чех, а Вотуло Индонежанин. То што је Београд и поред свега остао у целом свету једини центар ове теорије говори о космополитизму ње и њеног оснивача, а између осталог и његове престонице. Ни изјаву Душана Адамовића како су *„широки и плодни" токови математике заобишли и иза себе оставили спектре пре но што су они успели да задобију прави облик и стекну пуну делотворност* не сматрамо коначном и неопозивом [1].[10] Ипак, остаје његова тврдња да у радовима Петровићевих следбеника преовлађује третирање појединачних проблема и техничке преокупације, најчешће уз коришћење само коначних спектара, при чему је главна пажња посвећена алгоритамској економичности израчунавања. Иако је по том питању добијен већи број занимљивих резултата, целокупна проблематика је умногоме изгубила на значају неслућеним развојем дигиталних рачунара. Унеколико парадоксално звучи чињеница да је развој

цели бројеви, спектар се добија ако се бројеви $M_0, M_1, M_2, \ldots$ пишу један за другим. Ако бројеви $M_0, M_1, M_2, \ldots$ нису негативни и мањи су од 10, број $f(10^{-1})$ даје један спектар. Број $f(10^{-2})$ могао би се назвати „спектрална пруга" у којој се тамне и светле пруге (тј. цифра 0 и коефицијенти од $f(x)$) међусобно измењују. „Спектрална метода" састоји се у томе да се различити проблеми сведу на проучавање спектара, што је наравно могућно урадити помоћу најразноврснијих трансформација, а у свим случајевима се приближно постиже. Без доказа су наведени резултати разних новијих радова из теорије функција о потенцијалним редовима са целим и рационалним коефицијентима (Хурвиц, Борел, Фату, Поја, итд.). Цитирано је и четврто Хилбертово саопштење о интегралним једначинама, пошто је ту такође употребљен израз „спектар". Нове резултате које би тек спектрална метода учинила приступачним референт није нашао у овој књизи.

[9] И том приликом Петровић ми је рекао да је разочаран својим спектрима. То ми је изјавио и раније више пута. Први пут сам од њега чуо да нема смисла да се неко бави његовим спектрима у време када му је К. Орлов саопштио да припрема дисертацију из те области. Добро се сећам да је Петровић рекао да је саветовао Орлову да се не бави спектрима и додао ми је да спектри могу да се користе онда када је неки алгоритам или резултат познат. Уосталом, бесплодност теорије спектара показали су својим радовима малобројни београдски математичари који су се одали овој теорији. Није ми познато да се ма ко бавио спектрима у иностранству.

[10] Оно што овој Петровићевој замисли и настојањима, његовим и његових следбеника, ипак даје одређену, не баш малу, вредност – инспиративну, документарну и историјску – поред већег броја више или мање успелих и инвентивно добијених партикуларних резултата, чини то што они садрже својеврсну (истина, у рудиментарном облику) антиципацију неких важних подручја данашње математичке теорије и њених примена.

рачунарства, који је био неопходан предуслов свеобухватној примени теорије, уједно довео и до њеног сузбијања.

У предговору Петровићевој књизи која је објављена 1919. године, Емил Борел напомиње да су децимални записи најприступачнији облик бесконачности како за схватање тако и за баратање њоме [16]. Сходно томе, ако је могуће свести математичку анализу на проучавање извесних децимала – тиме се у најмању руку добија начин излагања или рачунски поступак, који би били драгоцени. На самом почетку Бореловог излагања, спектрални поступак се оправдава праксом мерења што је веома далековида опаска која сеже до сржи децималног система. Самеравање величина Еуклидовим алгоритмом наиме задаје верижни развој чији сваки члан, у складу са Лохсовом теоремом, настоји скоро сигурно определити децималу по децималу броја [2]. Математички спектри дакле, поред методолошке, без сумње задржавају и фундаментално-теоретску вредност која се тиче њене филозофије и онтолошког заснивања. Ово постаје нарочито врућа тема по слому Хилбертовог програма, што се у основним цртама збило за Петровићевог живота. Немогућност да се математика формално заснује отворила је врата питагорејским схватањима међу којима је интуиционизам свакако на првом месту, а чији потенцијал разраде поседује спектрална метода. Најављујући залазак и коначан пад формализма, Грегори Чејтин сматра да питање како би убудуће требало радити математику изискује барем наредни нараштај математичара [21]. Када ће он и како наступити зависи пре свега од наше смелости да преиспитамо темељна начела властитог постојања.

5. Спектри и феноменологија Михаила Петровића

У оквирима извесне класе, спектар функције варира не само са њом већ и са трансмутацијом која успоставља везу између дате функције и спектра. Ово наликује уобичајеним поступцима шифровања и дешифровања, при чему је функцији додељена улога чистог текста, улогу кључа игра трансмутација примењена у образовању спектра, а улогу криптограма сам спектар. Свака функција коју је могуће приказати аналитички може се тако шифровати неким реалним бројем, што се своди на нумерисање функција у класи. Како пребројиви скуп функција које припадају различитим класама има највише моћ континуума, можемо им образовати заједнички спектар. Тако се свака појава – било каква да јој је природа, врста и сложеност – коју је могуће изразити пребројивим скупом једначина, на исти начин шифрује у складу са спектралном методом [4].

Виспреношћу овог закључка, Михаило Петровић превазилази сопствене увиде отварајући пут разматрању своје теорије из сасвим другог угла – не ради се пак о шифровању, већ управо о дешифровању природних појава. Ако наиме усвојимо Брауверово становиште да је време основна интуиција свести, онда је очигледно по среди њено разоткривање које свеколике структуре математике сматра изразом временског континуума. Ово би одговарало појму *аналошког језгра* – или *феноменолошког типа аката*, илити *феноменолошког пресликавања* – чија примена на математичке структуре још није дала последњу реч. Петровићева феноменологија се прећутно заснива на принципу општег јединства, *јер је само тако појмљиво постојање аналошког језгра у диспаратним појавама* [12].[11] Језик теорије категорија ово назива *категоричким скелетом*, па је према томе континуум категорички скелет спектралне методе.

Покушавајући да са становишта самог аутора сажме феноменолошку доктрину, Душан Недељковић истиче како *он елиминише материјалистичке појмове гравитације, афинитета, виталне силе итд. посматрајући само елементе аналогија који сачињавају законе слојевите стварности* [22].[12] По његовом сведочењу, Петровић се углавном сложио са овим приказом приметивши ипак како га је зачудило кад је видео да је прешао преко механичких основа његове феноменологије. Недељковић му је при том одговорио да то не би била јака страна већ пре ограниченост концепције у којој би се, као у квантној механици, могао наћи и другачији пут тумачења од оног што га пружа класична [23].[13]

Математичка феноменологија Михаила Петровића је већ од првог издања 1921. године стала у ред врхунских дела природне филозофије и епистемологије, која су најчешће управо са механистичких позиција чинила напоре и отварала путеве да се механицизам превазиђе [24]. У основи његових истраживања остале су конкретне супротности *које су позивале на нова и даља продубљивања, те свестранија и целовитија сагледавања и овладавања природним по-*

[11] Он недвосмислено истиче да математичке аналогије „нису случајности, већ да имају своје подлоге и дубљег разлога у егзистенцији нечег заједничког у самој суштини појава и њихових механизама". Отуда истоветност математичких релација за квалитативно различите процесе.

[12] Проникнути у оно што је аналогно и заједничко у диспаратним феноменима (физичким, хемијским, биолошким, економским, друштвеним итд.), разликовати у њему аналошке групе, одредити у овим групама типичне схеме и формуле, који су само делови више целине и који, компликујући се извесним социјалним карактеристикама и параметрима, могли би математички објаснити свеколико мноштво ствари – то је задатак који је Петровић поставио преда се оснивајући своју математичку феноменологију – ту занимљиву доктрину која замењује посебне природне законе општим схемама које се према њима односе као целина према деловима које поставља.

[13] Увек и са млађим колегама присан и духовит одговорио ми је да би без Декарта и класичне механике некако осећао да у својој математичкој феноменологији губи чврсто тле под ногама. Рекао сам му да је то свакако тачно, али је тачно и да је сама његова феноменологија један од моћних оригиналних и донекле изграђених путева да се не само то већ и сама феноменологија превазиђе, на шта је он слегао раменима и сумњајући, али и одобравајући допуштао са: „Можда" ... „Има и тога".

јавама [23].[14] Основним разлогом што она заиста није имала непосредних следбеника Недељковић сматра то што у конкретним анализама показује управо супротно од стриктног механицизма који би у почетном и основном усмерењу хтела доказати.

Развијајући своје увиде, Петровић доспева до метафора и алегорија у постхумно објављеном делу које садржи тестаменталне мисли и погледе аутора [25]. Насупрот каузалном детерминизму његове феноменологије, ова књига се већ првим одељцима посве изричито отвара обичном животу, поезији и науци указујући обиљем конкретних примера на природну употребу аналошког изражавања. На тај начин, математичка феноменологија бива уткана у бурни развој свеопштег стваралаштва, који је суштинско обележје револуције у науци двадесетог века [23].[15]

Он заправо на томе ради још од своје књиге о феноменолошком пресликавању из 1933. године, која нарочито избегава математички језик у потрази за аналошком методом кадром да обухвати и расветли револуцију у науци од лорда Келвина до Ајнштајна. Ово дело принципијелно отклања механицизам феноменологије, ограничавајући га само на механичке појаве [26].[16] Оно пред-

[14] ... од математичких и физичких до друштвених и психичких у нераздвојној целини њихове узајамне дијалектичке повезаности и условљености, у којој би постало јасно да у целокупном природном „току развоја" свако кретање у својој суштини и заметку је самокретање које после низа квалитативних скокова у данашњем развитку друштва и човека остварава и скоковит прелаз из света нужности у свет слободе.

[15] Тако, пошавши овог пута од метафора и алегорија из живота и књижевности и набрајајући их на стотине и хиљаде, Петровић укључује своју аналошку природну филозофију у бурни развитак самог стваралачког аналошког пресликавања, предвиђања и моделовања уопште, којим је између осталог окарактерисан револуционарни преокрет делатног дијалектичког развитка методологије природних, техничких, друштвених и филозофских наука, као и мишљења уопште у живој пракси и уметности. И као што се овде сасвим природно окрећу леђа једностраности сваког математизма, јер, иако истиче изванредан значај „механистичког пресликавања" које се „остварава помоћу механичких модела" на пољу физичких наука, Петровић усваја да на разним ступњевима развитка света „владају закони сасвим друкчије врсте" и да је погрешно сводити на механичке оне који то нису, као што су биолошке, физиолошке, друштвене, економске, естетичке итд., пишући: „То се сводило на извештачено механистичко објашњење свега и свачега, натегнуто, неприродно и лишено сваке логичке основице, осим неке овлашне и недовољне сличности. Довољно је подсетити на поменута некадашња јатрохемичарска објашњења физиолошких појава законима механичке равнотеже и кретања."

[16] Још Декарт је казао да треба тежити томе да се природне појаве представе и објасне „per figuras et per movement". То је и дало повода ономе што Мах назива „механистичком митологијом", која је покушала да све што се дешава у свету материјалних факата, сведе не појаве равнотеже и кретања материјалних сила. Међутим, модерне физичке концепције као што су нпр. оне у таласној механици Де Броја и Хајзенберга, показују да је то немогућно чак и за мноштво појава материјалне природе. То ће утолико пре бити случај и за пространи свет имподеробилних појава, где се могућност или немогућност тога не може ни доказивати.

стављa покушај филозофске систематизације методолошког преокрета који је наступио, што се сматра *новом митологијом науке* [23].[17] Петровић примећује како механистичка митологија овим прераста у прозаичну митологију факата сводећи се на пуку геометрију [26].[18] Постулиравши линеарно време које је израз картезијанског начела, он невољно примећује како нова митологија примењена на овај модел било какву феноменологију чини беспредметном. Управо стога и остаје до крајности скептичан према теорији релативности, упитан неће ли се време поново успети на истакнуто место које му је одувек припадало [3].[19]

Реч је о алегоријама, метафорама и афоризмима које времену придају нарочиту важност, објављеним у Петровићевом чланку из 1931. године. Он их међутим све оставља по страни руководећи се доследним картезијанством, чије преимућство никада није доводио у питање. Управо стога, изван његовог домета остају пре свега широка пространства квантне физике недокучива картезијанском начелу. Но баш је њено заснивање у појмовима функционалне анализе довело до операторске формулације комплексних система који се одређују оператором својственог времена скопчаним са неповратним и иновативним збивањима [27]. У том погледу, ова теорија је ослободила време из окова линеарности, раскривајући му исконски значај који наговештавају Петровићеви спектри. Покушај да се Брауверов интуиционизам искаже у појмовима вре-

[17] У последњој глави под насловом „Митологија факата", Петровић разматра развитак свеколиког људског сазнања као „митског пресликавања" које почиње ступњем древне верске антропоморфне митологије, наставља ступњем развитка механистичког пресликавања рационалне и небеске механике као „механистичке митологије" која је у Лапласово доба, како Петровић критички вели, „била узела маха и била у моди и тамо где јој нимало није било места", и која се на данашњем ступњу математичким феноменолошким пресликавањем превазилази у „феноменолошку митологију", или како Петровић вели: „Антропоморфистичка митологија уступа место прво оној коју је Мах назвао механистичком митологијом, која све што се може пресликава на свет појава равнотеже и кретања, а ова затим феноменолошкој митологији која све своди на комбинације апстрактних типова, улога и манифестација њихове сарадње и која ће, несумњиво, у своје време обухватити целокупан свет фактора приступачан људскоме сазнању и људској изражљивости".

[18] Та су питања створила једну врсту научне митологије факата која се из основе разликује од свих досадашњих митологија, у којој нестаје свих и механистичких и феноменолошких ентитета чијом би се закулисном игром стварали материјални факти, и у којој су ти ентитети смењени чисто геометријским ентитетима у четвородимензионалном простору.

[19] Међутим, није потпуно сигурно да ће се нова слика одржати и да се Хронос неће опет успети на место које су му одредиле људска машта и позитивна наука. Јер може лако испасти да такве слике не произилазе од саме суштине ствари, већ од начина како се посматра и мери време. Изразита и духовита слика енглеског релативисте Едингтона употребљена у другој прилици, то врло лепо илуструје: „Открили смо чудне отиске стопала на обали онога што се не зна. Да бисмо себи објаснили откуда ти отисци, конструисали смо теорије све оштроумније и дубље једне од других. На послетку смо успели реконструисати створа који је оставио те отиске, и нашли смо да је тај створ нико други до ми сами!"

менског оператора уродио је плодом [2] – па према томе математичке спектре с правом сматрамо њеном методом.

6. Закључак

Феноменологију Михаила Петровића и његове спектре повезује намера да се иницирају дисциплине које би математици и њеним применама значиле суштински подстицај. Но док је феноменологија од свог настанка привлачила пажњу јавности и била предмет истраживања, за спектре се то не може рећи – премда је Петровић недвојбено изражавао наду да ће се управо на овој теорији засновати ефикасна и универзална метода [1]. То би по својој прилици и био случај да је имао спремности на тежак подвиг њеног утемељења, који би захтевао значајан искорак у поимању научне заснованости. Исход овог подухвата може се сматрати општом цртом доба у ком је живео и стварао – доба које је било кадро наговестити постмодерна стремљења, али не и определити им закључни облик.

Захвалница. *Рад је подржало Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије кроз пројекте ОИ 174014 и ИИИ 044006.*

Библиографија

[1] D. Adamović. *Matematički spektri Mihaila Petrovića.* U: D. Adamović and D. Trifunović (eds.), Sabrana dela Mihaila Petrovića, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1998, vol. 5, pp. 239–248.

[2] M. Milovanović. *Dynamical identity of the Brower continuum.* In: V. Ilić and M. Stanković (eds.),The Fifth National Conference on Information Theory and Complex Systems – TINKOS 2017, Belgrade, November 9–10, 2017, Mathematical Institute SASA, Belgrade, 2017, pp. 9–10.

[3] M. Petrović. *Vreme u alegorijama, metaforama i aforizmima.* Letopis Matice srpske, Novi Sad, 1927, 313, 185–192.

[4] M. Petrovitch. *Leçon sur les spectres mathématiques.* Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[5] V. Tasić. *Matematika i koreni postmodernog mišljenja.* Svetovi, Novi Sad, 2002. Mathematics and the Roots of Postmodern Thought. Oxford University Press, New York, 2001.

[6] M. Radojčić. *O stanovištima u geometriji.* U: T. Anđelić (ed.), Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ, Bled, 8–12. XI 1949, Naučna knjiga, Beograd, 1950, pp. 37–48.

[7] M.-L. von Franz. *Number and Time: Reflections Leading toward a Unification of Depth Psychology and Physics.* Northwestern University Press, Evanston, 1974.

[8] M. Petrović. *Brojni spektri pojava.* Srpska kraljevska akademija, Glas, CXVII, Prvi razred, 58, 1927, 45–66.

[9] J. Mawhin. *Spectra in mathematics and physics: from the dispression of light to nonlinear eigenvalues.* Ulmer Seminar, 2011, 15, 133–146.

[10] D. Gostuški. *Vreme umetnosti: prilog zasnivanju jedne opšte nauke o oblicima.* Prosveta, Beograd, 1968.

[11] M. Đoković. *Fragmenti sećanja na Mihaila Petrovića.* U: D. S. Mitrinović (ed.), Mihailo Petrović: čovek, filozof, matematičar, Zavod za udžbenike, Beograd, 1968, pp. 39–43.
[12] E. Stipanić. *Mihailo Petrović, matematičar i fenomenolog.* U: D. S. Mitrinović (ed.), Mihailo Petrović: čovek, filozof, matematičar, Zavod za udžbenike, Beograd, 1968, pp. 87–92.
[13] D. Adamović. *Moderne matematičke discipline, posebno teorija skupova, u radovima Mihaila Petrovića.* Dijalektika, 1968, 2, 95–103.
[14] M. Petrovitch. *Détermination spectrale de fonction.* Comptes rendus des séances de l'Académie des Science, 1918, 22, 774–776.
[15] M. Petrovitch. *Notice sur les travaux scientifiques des M. Michel Petrovitch.* Gauthier-Villars, Paris, 1922.
[16] M. Petrovitch. *Les spectres numériques.* Gauthier-Villars, Paris, 1919.
[17] K. Orlov. *Aritmetičke i analitičke primene matematičkih spektara.* Filozofski fakultet, Beograd, 1935.
[18] A. Rich. *Leftist numbers.* The College Mathematics Journal, 2008, 39(5), 330–336.
[19] G. Pòlya. *M. Petrovitch, Les spectres numériques.* Paris 1919. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 1919–1920, 47, 320–321.
[20] D. S. Mitrinović. *Mihailo Petrović i Stirling-ovi brojevi.* U: D. S. Mitrinović (ed.), Mihailo Petrović: čovek, filozof, matematičar, Zavod za udžbenike, Beograd, 1968, pp. 113–116.
[21] G. Chaitin. *Randomness in arithmetic and the decline and fall of reductionism in pure mathematics.* Chaos, Solitons and Fractals, 1995, 5(2), 143–159.
[22] D. Nedeljković. *Aperçu de la philosophie contemporaine en Yougoslavie.* Imperie de l'Etat, Paris, 1934.
[23] D. Nedeljković. *Etape i perspektive prirodne filozofije Mihaila Petrovića.* U: D. S. Mitrinović (ed.), Mihailo Petrović: čovek, filozof, matematičar, Zavod za udžbenike, Beograd, 1968, pp. 61–86.
[24] M. Petrovitch. *Mécanismes communs aux phénomènes disparates.* F. Alcan, Paris, 1921.
[25] M. Petrović. *Metafore i alegorije.* Srpska književna zadruga, Beograd, 1967.
[26] M. Petrović. *Fenomenološko preslikavanje.* Srpska kraljevska akademija, Beograd, 1933.
[27] I. Prigogine. *From Being to Becoming: Time and Complexity in Physical Science.* W. H. Freeman & Co., New York, 1980.

Miloš Milovanović

LA SIGNIFICANCE DES SPECTRES DE PETROVITCH POUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATHIQUES

R é s u m é

La phénoménologie de Michel Petrovitch et ses spectres sont liés par l'intention d'initier les disciplines qui seraient le stimulant subsentiel pour les mathématiques et leurs emplois. Or, tandis que la phénoménologie attirait l'attention du public et était le sujet des recherches depuis son apparition, ce n'était pas le cas pour les spectres – bien que Petrovitch ait eu sans aucun doute l'espoir que la méthode efficace et universelle sera fondée justement sur cette théorie. Les spectres mathématiques reflètent deux principes importants pendant la dernière décennie de sa vie: la linéarisation des données utilisées dans la procédure du computation et la méthode du "gödelisation" qui code le langue mathématique à l'aide des nombres naturels [1]. Cependant, on ne tient pas compte du fait que le code de Petrovitch n'est pas présenté en tant que les nombres naturels mais les nombres réels qui, dans ce sens là, résument le sujet entier de l'analyse mathématique. Ainsi conçue, les mathématiques correspondent à la méthode spectralle en créant l'unité avec ses usages en physique, chimie et dans les autres disciplines. La squellete catégorique de cette méthode est le concept du continuum ce qui montre le rapport avec l'intuitionnisme dont c'est la fondation de la concsience. Selon Brouwer, elle est instaurée par l'intuition du temps ce qui indique son importance par les fondements des mathématiques [2]. C'est important d'envisager la théorie de Petrovitch de ce point de vue ce qui permettra détablir le lien avec la phénoménologie mathématique qui accorde aussi un rôle important au temps [3].

Miloš Milovanović

THE SIGNIFICANCE OF PETROVICH'S SPECTRA FOR THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

S u m m a r y

Phenomenology of Michael Petrovich and his spectra are combined by a common tendency to initiate disciplines that should constitute a substantial stimulus to mathematics and its application. But whilst phenomenology has attracted the public attention since its publication and has been the subject of research, it cannot be said for spectra – although Petrovich was expressing the strong hope an efficient and universal method to be based upon this theory. The mathematical spectra anticipate two principles which were significant during the last decades of his life: linearization of the data in computer pro-

cessing and procedure of “gödelization” that is coding mathematical language by natural numbers [1]. It has been out of sight however that Petrovich’s code is not represented by the natural, but the real numbers summarizing in that respect the entire subject of mathematical analysis. So conceived, mathematics corresponds to the spectral method being unified with applications in physics, chemistry and other domains. The categorical skeleton of the method is the concept of the continuum, which discloses a relationship to intuitionism that considers it to be the fundament of consciousness. According to Brouwer, consciousness is established by an intuition of time which indicates its significance for the foundation of mathematics [2]. It is important to consider Petrovich’s theory from that viewpoint, which should elucidate a relation to the mathematical phenomenology, which also attributes time a special significance [3].

LIFE OF A STUDENT-CORPORAL MIHAILO MAKSIĆ – STUDENT OF MIHAILO PETROVIĆ-ALAS AND MILUTIN MILANKOVIĆ

NATALIJA JANC*

A b s t r a c t. – The biography of Mihailo Maksić (Belgrade, 1894 – Knjaževac, 1915) is a story about broken youth, unrealized beauty, and unfulfilled ambitions. He wanted to put his wisdom and knowledge into the service of his recently liberated country, but the country wanted from him something else – his life. He made this ultimate sacrifice. Mihailo Maksić was a very ambitious student of Mihailo Petrović-Alas and Milutin Milanković. Certificates from colloquia have been preserved in which the top scores, grades 10, were signed by these professors. His name is engraved in a marble memorial plaque dedicated to the students and professors of the Belgrade University who died in the wars for liberation, located in the Rectorate of the University of Belgrade, Studentski trg 1. On page 34 of the publication "A memorial to students of the Belgrade University that died in the wars for the liberation and unification of 1912–1918" it is written "Mihailo Đ. Maksić, a student of philosophy, a student and corporal; died in October 1915 in Knjaževac."

Keywords: Mihailo Maksić, Mihailo Petrović Alas, student-corporal, student, First World War

1. Introduction

Biography of Mihailo Maksić (1894–1915) (Figure 1) is a story about the youth cut short, beauties not experienced, ambitions not fulfilled. He wanted to serve the recently liberated Serbia with his wisdom and knowledge, but his homeland asked from him something else – his life; and he gave it to Serbia.

* Baltimore, Maryland, USA, e-mail: natalijanc@earthlink.net

Figure 1. Mihailo Maksić (1894–1915) [Михаило Максић (1894–1915)]

2. The Family of Mihailo Maksić

Mihailo Maksić's father was Đorđe Maksić (Orašje, 1856 – Beograd, 1915) (Figure 2). He wanted to become a priest under the influence of his mother, and primarily of her brother. His uncle was Vasilije, Vasa, Pelagić (Gornji Žabari, now Pelagićevo, 1833 – Požarevac, 1899), who graduated from the Faculty of Theology in Belgrade. Pelagić was a writer, physician, educator and clergyman. Đorđe Maksić enrolled in the Serbian Orthodox Seminary in Banja Luka, which was the first secondary school in Bosnia. Vasa Pelagić was the Dean of the School at that time. But Pelagić fell into disfavor with Turkish authorities who forced him into exile to Kutahya in Asia Minor in 1869. Due to this unfortunate situation, Đorđe Maksić had to leave the Seminary and with it his dream to become a priest. He came soon to Serbia to engage in the barrel-making trade. Then he went to Germany for further vocational training, where he spent six years and passed the craftsman

Figure 2. Đorđe Maksić (1856–1915) and Yelisaveta Maksić (1861–1922)
[Ђорђе Максић (1856–1915) и Јелисавета Максић (1861–1922)]

exam in the city of Kassel. When he returned, he worked in barrel-making workshops in Aleksinac and in the area of Obrenovac – Umka.

In Belgrade, Đorđe Maksić met Yelisaveta Predić (Pančevo, 1861 – Šid, 1922), (Figure 2), a widow at that time. Yelisaveta had been married to the brother of the painter Uroš Predić (1857–1953). She lived in Pančevo with her husband, and when the Serbian-Bulgarian war commenced, her husband joined the Serbian Army as a volunteer. Unfortunately, he was wounded and the wound "turned from bad to worse" so he died young, in his twenties.

Đorđe and Yelisaveta Maksić were married and started a nice and happy life together, hoping to keep it that way. Đorđe opened his own workshop first in Topčider, and then in Belgrade, at the banks of the river Sava. Barrel-making business was blooming, especially at the time of the great exports to Austria-Hungary.

The birth of the first child, Mihailo, in the cold winter, on January 22, 1894 brought immense joy to parents who were in their thirties what was at that time considered as quite some age for expecting a first child. They lived in Kraljević Marko Street in the vicinity of Karađorđeva Street.

Figure 3. Mihailo Maksić, circa 1900. and Mihailo and Olga Maksić, circa 1905
[Михаило Максић, око 1900. и Михаило и Олга Максић око 1905]

Almost six years after the birth of their son, while the cold Belgrade was white under the snow, they had a daughter Olga on December 28, 1899. Brother and sister (Figure 3) received plenty of love, tenderness and care and they shared it between themselves unselfishly. They were very close, despite different interests and affinities.

For his sister Olga, Mihailo was an idol, the best and the smartest person. She was very proud of his knowledge of mathematics. Whenever it was necessary he helped her with her homework. Olga did not have the affinity for mathematics; she was attracted to drawing. That is why her parents arranged the lessons for her with Nadežda Petrović (1873–1915), a well-known Serbian painter.

3. The Boyhood and Youth

Mihailo in his childhood days spent every free moment carefree, running barefoot along the banks of the river Sava, swimming and fishing. The Sava influenced the way of life, as for all the others that were growing along it. He even attended the "Primary School on the Sava" in Belgrade. He finished the fourth grade on June 29, 1905 with all "excellent" marks.

He sat for the entrance exam at the Second Belgrade High School on August 12, 1905. The exam consisted of three subjects: Serbian language, Mathematics and History. He passed them all with "excellent" marks.

He enrolled in the first year of the high school known as Realka in the fall of 1905. That was the only year when he had a “very good” mark in Math. In all the following years he obtained “excellent” marks in that subject.

School life in Belgrade went as usual. At that time, an exam, “lower school exam” had to be passed at that level after the first four finished years of the secondary school. Mihailo passed it on June 15, 1909 with “excellent” marks in Religious Instruction, Serbian Language, German, French, Geography, History, Chemistry and Mathematics. His only “very good” mark was in the Arts.

He enrolled in the fifth year of Realka in 1909. The number of subject increased in that year: Religious Instruction, Serbian, German, French, Geography, History, Natural Sciences, Chemistry, Mathematics, Arts, Shorthand (Stenography), and Physical Education. He excelled in all of them, except in Physical Education, where he earned a “very good” mark. He studied Stenography only in the fifth year. In the seventh and eighth year, Russian Language was added to the list of foreign languages.

Mihailo started the eighth year in 1912 when Serbia started the war for final liberation and realizing the five-century dream of freedom and independence. The first Balkan war lasted from October 1912 to May 1913. At that time, there were only around 400 students capable for heavy military duty. Many young men went to the combat but *Mihailo’s time had not yet come.*

The Second Balkan War started immediately after the First. The war started on June 29/30 and finished on August 10, 1913 by signing the peace treaty in Bucarest, Romania. Serbian intelligence suffered great losses in bloody battles. Many of Mihailo’s friends and cousins participated in it, being just a few years older. However, *his time had not yet come.* The Second Balkan War started that year. Mihailo was not mobilized yet.

Mihailo was not a boy anymore. He grew to a tall, slender and strong young man. He gained strength by helping his father in their workshop and there was always a lot to do.

During the entire schooling, Mihailo Maksić was a diligent pupil, with exemplary manners and commendable behavior. He passed the Maturity Exam after finishing the eighth year of Realka. He was preparing it during the time when heavy battles were fought on the remote fronts. He passed the exam in the first attempt. The exam started immediately after the end of the war, it lasted from August 12 to 18, 1913.

Since he was always an excellent student and showed on the written Maturity Exams excellent results in all the subjects, on the basis of the Article 16, Item “a” of the “Rules of the Higher Exam” he did not have to pass the oral part of that exam. On the basis of the achieved results, the examiners “affirmed his maturity and the qualifications for the University, Polytechnics.”

4. Student Days

Mihailo Maksić loved Mathematics and after finishing Realka in 1913 he enrolled at the Faculty of Philosophy in Belgrade (Figure 4). Dedicated to his books and his

Figure 4. The Rector's Office of the University of Belgrade, 1 Studentski trg, (Photo: N. Janc, 2015)
[Зграда Ректората Београдског универзитета, Студентски трг бр. 1, (Фото: Н. Јанц, 2015)]

work, he excelled among the best students of the professors that were the legends of the Serbian science, Mihailo Mika Petrović-Alas and Milutin Milanković. Mihailo Maksić drew attention and became the favorite student of professor Mika Alas who brought the young student even closer to mathematics. Professor Mihailo recognized himself in his namesake student Mihailo, as modest in life, diligent and excellent student, and his heart filled with love for mathematics. And for both of them in their veins did not flow blood but the river water.

Two most important and most difficult exams Mihailo passed in one day, on March 14, 1914 and we have preserved exam certificates (Figure 5).

"Mihailo Đ. Maksić, student of mathematics, attended lectures and exercises in theoretical mathematics regularly and at the exam earned the 'excellent' grade (10)." This was signed by Mihailo Petrović.

"Mihailo Đ. Maksić, student of mathematics, attended regularly the lectures in applied mathematics and at the exam earned the 'excellent' grade (10)". This was signed by Milutin Milanković.

In June, the end of the exam period came followed by the beginning of summer vacation, menaing the season of swimming on the river Sava could begin. At the same

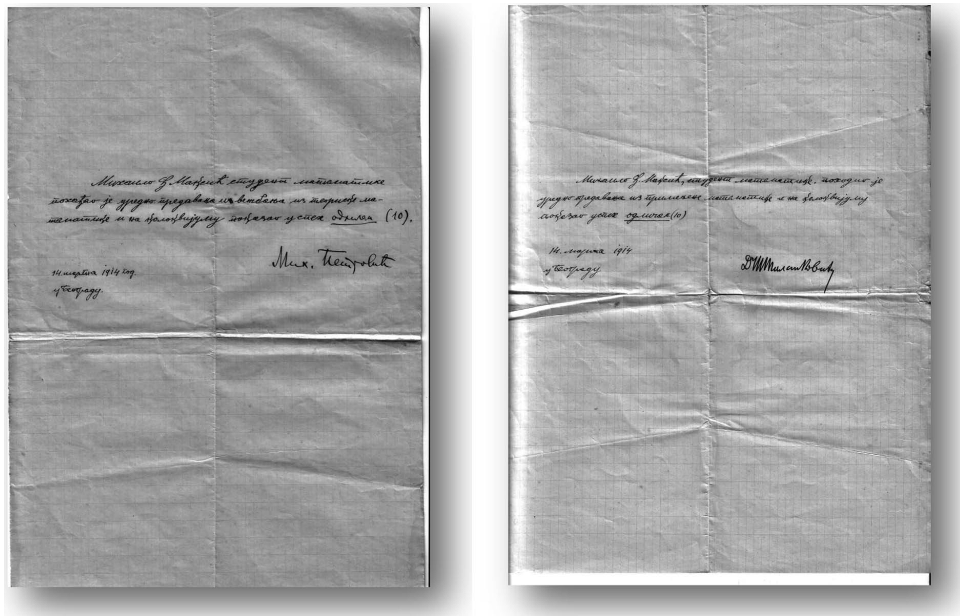


Figure 5. The exam certificates, "excellent" grades (10), in theoretical mathematics from professor Mihailo Petrović and in applied mathematics from professor Milutin Milanković [Потврде о положеном колоквијуму и оценама (10) из теоријске математике код професора Михаила Петровића и из примењене математике код професора Милутина Миланковића]

time, different plans were made in other places. In Sarajevo, Bosnia, on June 28, 1914, the Austrian-Hungarian heir to the throne, Archduke Franz Ferdinand, was assassinated. And thus, when Mihailo only finished the first year of the University, in the summer of 1914, Serbia was attacked by the Austria-Hungary and was forced into the war. Three wars in three years.

5. The Time Came for Mihailo's Battles

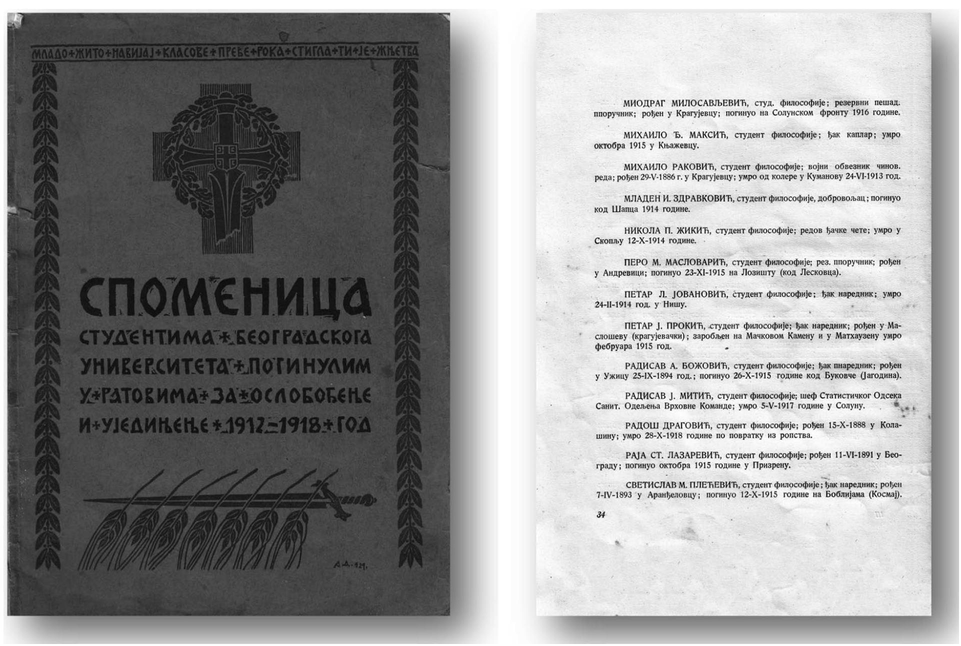
The generation of 1894 was of age and was drafted. That was the generation of Mihailo. *His time for bloody battles had come.* Already at the beginning of heavy and bloody fighting, 85 students of the Belgrade University were killed and 350 were wounded. After only three months of military training, Mihailo, together with 1500 secondary school and University students, was ready for the front where they filled in the reduced ranks of officers.

Mihailo Maksić got the rank of a student-corporal. Being young and inexperienced in warfare, he soon got a serious wound in his leg. He was hospitalized in Knjaževac, at the foothill of the Old Mountain (Stara planina). His joy was in corresponding with his family and occasional package that arrived from home. Only one letter survived, but even that is enough to reveal all family harmony and their closeness and it also speaks about Mihailo himself.

> *Knjaževac, March 8, 1915*
>
> *Dear parents and my darling sister,*
>
> *I received your letter of the 4th of this month and it brought joy to me, for knowing that you received the news from me, as your son, and second, for receiving the news from you. It touched my heart to read that my father goes to work early every day and how you, my sister and my mother see him off, and how you, my sister diligently help your mother and how mother worries so much about me! I know quite well how difficult it is for our father to be so troubled in his old days having me so young, but one day the Sun will shine on us and the situation will soon improve for us, only with health and patience. You are well aware that I was always good and grateful son, although you were often angry for my minor faults, but now I am still in different situation. With God's permission we shall see each other soon. I long to see you all, but it seems to me, most my mother; only now I can fathom the mother's heart and mother's love.*
>
> *My every other word is: mother, mother and only mother. My father and my sister, do not be sad about this (as I am writing this, two tears dropped which is something most unusual in my life), but I know that my mother did not make a step without thinking of me, her son, who is so far from her on this duty delegated to me by my country. Oh, my mother, how you nursed me in my many illnesses while I was a little boy, three cases of pneumonia and when I suffered the most difficult stage of typhoid when you spent so many nights besides me, ready to die yourself (I will not forget those nights). Then I felt the full meaning of being a mother. That is why you deserve that we see each other soon, and God permit, it will happen. But my father has never forgotten me, too. I know very well that because of me he suffers such difficult problems at the threshold of his old age. And my sister, what am I to tell you, my sister never let her brother down.*
>
> *I told something to all of you and now I am going to tell you something about myself. I am still lying here eagerly awaiting the day when I shall come to Belgrade to embrace you. After all the troubles I experienced here and that had to be experienced, I hope that finally all will end well, you know in what sense.*
>
> *I do not know how long I shall stay here since I am already planned for wound revison in Zaječar but I can not go there before the 18th due to train schedules.*

I shall have to wait to see what they will tell me about my leg, because it all depends on that since it causes me great pains and troubles. But, anyway, do send me cakes for the Easter. It can be addressed to the hospital like the letter you had sent. Oh, how I long now for all the cakes that before I did not want even to taste. (Without signature)

He eagerly waited to be sent to Belgrade. But war conditions did not permit that, so he stayed at the same place. In the autumn of 1915, strong military pressure was exerted on Serbia by the armies of Germany, Austria-Hungary and the Kingdom of Bulgaria. The epic retreat of the Serbian Army to the island of Corfu, Greece, occurred. This Army included University-educated people, recruits, high school and University students. Very few of them stayed in the country, mostly those heavily wounded and sick. Mihailo Maksić stayed as one of those heavily wounded. His leg was getting worse. There was not any chance that he could at least go to his mother for her care in Belgrade. He died of typhoid fever on a rainy and cold October day of 1915 in Knjaževac. Mihailo Maksić was one of 350 students that lost their lives during the seven war years, from 1912 to 1918 (Figures 6, 7, and 8).



МИОДРАГ МИЛОСАВЉЕВИЋ, студ. философије; резервни пешад. ппоручник; рођен у Крагујевцу; погинуо на Солунском фронту 1916 године.

МИХАИЛО Ђ. МАКСИЋ, студент философије; ђак каплар; умро октобра 1915 у Књажевцу.

МИХАИЛО РАКОВИЋ, студент философије; војни обвезник чинов. реда; рођен 29-V-1886 г. у Крагујевцу; умро од колере у Куманову 24-VI-1913 год.

МЛАДЕН И. ЗДРАВКОВИЋ, студент философије, добровољац; погинуо код Шапца 1914 године.

НИКОЛА П. ЖИКИЋ, студент философије; редов ђачке чете; умро у Скопљу 12-X-1914 године.

ПЕРО М. МАСЛОВАРИЋ, студент философије; рез. ппоручник; рођен у Андревици; погинуо 23-XI-1915 на Лозишту (код Лесковца).

ПЕТАР Л. ЈОВАНОВИЋ, студент философије; ђак наредник; умро 24-II-1914 год. у Нишу.

ПЕТАР Ј. ПРОКИЋ, студент философије; ђак наредник; рођен у Маслошеву (крагујевачки); заробљен на Мачковом Камену и у Матхаузену умро фебруара 1915 год.

РАДИСАВ А. БОЖОВИЋ, студент философије; ђак пнаредник; рођен у Ужицу 25-IX-1894 год.; погинуо 26-X-1915 године код Буковче (Јагодина).

РАДИСАВ Ј. МИТИЋ, студент философије; шеф Статистичког Одсека Санит. Одељења Врховне Команде; умро 5-V-1917 године у Солуну.

РАДОШ ДРАГОВИЋ, студент философије; рођен 15-X-1888 у Колашину; умро 28-X-1918 године по повратку из ропства.

РАЈА СТ. ЛАЗАРЕВИЋ, студент философије; рођен 11-VI-1891 у Београду; погинуо октобра 1915 године у Призрену.

СВЕТИСЛАВ М. ПЛЕЋЕВИЋ, студент философије; ђак наредник; рођен 7-IV-1893 у Аранђеловцу; погинуо 12-X-1915 године на Боблијама (Космај).

34

Figure 6. Volume commemorating students of Belgrade University that lost their lives in the liberation and unification wars
[Споменица студентима Београдског универзитета погинулим у ратовима за ослобођење и уједињење 1912–1918. год.]

Figure 7. Marble commemorative plaque dedicated to students and professors of Belgrade University that lost their lives 1912–1919. The name of Mihailo Đ. Maksić is carved in the first plaque from the left at the entrance into the hall of the Rector's Office of the University of Belgrade, Studentski trg 1; an endowment of Captain Miša Atanasijević,
(Photo: N. Janc, 2015)
[Мермерна спомен-плоча посвећена погинулим студентима и професорима Београдског универзитета 1912–1919. Име Михаила Максића је уклесано у прву плочу лево од улаза у аули Ректората Универзитета у Београду, Студентски трг 1, Задужбина капетана Мише Атанасијевића,
(Фото: Н. Јанц, 2015)]

Figure 8. The name of Mihailo Đ. Maksić (first) carved in the commemorative plaque (detail) (Photo: N. Janc, 2015)
[Име Михаило Ђ. Максић урезано у спомен-плочу (детаљ) (Фото: Н. Јанц, 2015)]

That same October, bombs and howitzer shells were falling on Belgrade from the other bank of the river Sava. The house of the Maksić family was near the river bank. One morning, while the father Đorđe was sitting at the sewing machine, a shell hit the wall behind it. It did not explode but the force of it made the sign "Singer" of the sewing machine break and hit Đorđe and he died of it. Mourning overcame the once happy family.

6. Epilogue

The purpose of this paper was to keep the memory of unfortunate and forcefully cut life of a talented and diligent young man, Mihailo Maksić. It was the short road from leaving his footprints on the soft and warm bank of the river Sava to his engraved name on the hard and cold marble commemorative plaque.

References

[1] *For the King and the Country*, Belgrade 1930.
[2] *Volume Commemorating Students of Belgrade University that Lost Their Lives in the Liberation and Unification Wars, 1912–1918*, State Printing Office in Belgrade, 1930.
[3] *Small Encyclopedia Prosveta*, Prosveta, Belgrade, 1978.
[4] Olga Pejić, personal communications of the sister of Mihailo Maksić.
[5] Danica Spasova and Natalija Janc, *Results of the Observations of the Meteorological Observatory in Belgrade in the Period of 1887–1987*, Republic Hydrometeorological Service of Serbia, Belgrade, 1987.

Наталија Јанц

ЖИВОТОПИС ЂАКА-КАПЛАРА МИХАИЛА МАКСИЋА – СТУДЕНТА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА-АЛАСА И МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА

Р е з и м е

Животопис Михаила Максића (Београд, 1894 – Књажевац, 1915) је прича о прекинутој младости, недоживљеним лепотама, неоствареним амбицијама. Желео је да тек ослобођеној Србији стави у службу своју мудрост и знање, али отаџбина је од њега тражила нешто друго – његов живот, и он јој је и то пружио. Михаило Максић био је веома амбициозан студент Михаила Петровића-Аласа и Милутина Миланковића. Сачуване су потврде са положених колоквијума на којима је добио највише оцене (10), са потписима професора. Име Михаила Максића је угравирано у мермерну спомен-плочу посвећену студентима и професорима Београдског универзитета који су погинули учествујући у ослободилачким ратовима. Спомен-плоча се налази у аули Ректората Београдског универзитета, Студентски трг 1. У публикацији „Споменица студентима Београдског универзитета погинулим у ратовима за ослобођење и уједињење 1912–1918. год.” На страни 34 записано је: „Михаило Ђ. Максић, студент философије, ђак каплар; умро октобра 1915 у Књажевцу.”

САВРЕМЕНИ ПОГЛЕД НА ДИСЕРТАЦИЈУ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

АЛЕКСАНДАР Т. ЛИПКОВСКИ*

А п с т р а к т. – Михаило Петровић је своју докторску дисертацију одбранио у Паризу 1894. године пред комисијом коју су чинили Ермит, Пикар и Пенлеве. Од тада до данас много је писано о Михаилу Петровићу, о овим и другим његовим резултатима, као и о његовом утицају на српску математику и математичаре. Па ипак, до данас нема ниједне суштинске анализе комбинаторно-геометријских метода које је Петровић користио у својој дисертацији. Циљ предавања је да ову чињеницу промени и са савременог становишта објасни порекло и значај Петровићеве методе, као и да покуша да дâ неке смернице за наставак његовог рада.

1. Тема и метод Петровићеве дисертације

Михаило Петровић Алас завршио је Велику школу у Београду 1889. године и отишао у Париз да настави студије, уписавши се после положеног пријемног испита 1890. на École normale supérieure (Section des Sciences). Тамо је завршио студије (licence) из математике 1892. и физике 1893, и 29. јуна 1894. докторирао са темом „Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algebriques" пред комисијом коју су чинили највећи француски математичари тога времена различитих генерација: Шарл Ермит[2] као председник и Емил Пикар[3] и Пол Пенлеве[4] као испитивачи. Петровић је свој рад посветио математичарима Жилу Танерију[5] и Полу Пенлевеу, одакле се може закључити да су

* Математички факултет, Универзитет у Београду, и-мејл: acal@matf.bg.ac.rs

[2] Charles Hermite, 1822–1901.
[3] Charles Emile Picard, 1856–1941.
[4] Paul Painlevé, 1863–1933.
[5] Jules Tannery, 1848–1910.

они били главни ментори и инспиратори Петровићевог рада. Исте те 1894. године Петровић постаје професор на Великој школи у Београду, наследивши на том месту математичког доајена у Србији Димитрија Нешића [1]. Петровићева дисертација је преведена на српски језик и објављена [2].

Као прави ученик француске математичке школе тога времена, Михаило Петровић је проучавао квалитативне особине диференцијалних једначина. Крај 19. века обележен је напорима на проучавању квалитативног понашања решења одређених класа диференцијалних једначина, што је кулминирало Поенкареовим виђењем Analysis Situs – анализе положаја. Петровићеви математички узори имали су сличан пут. Танери је докторирао код Ермита двадесет година пре Петровића, 1874. године са темом „Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables”. Пенлеве је био Пикаров ученик и докторирао је код њега 1887. године са темом „Sur les lignes singulières des fonctions analytiques”, мада је смернице за научни рад добијао и из Гетингена, од Феликса Клајна[6] и Хермана Шварца[7]. Петровићев докторат био је посвећен специјалним условима под којима опште решење дате диференцијалне једначине има непокретне нуле и полове (тј. нуле и полове који не зависе од избора константи у општем решењу).

Значајно је питање историје српске математике зашто Петровићеви резултати из дисертације нису привукли друге математичаре да их наставе и побољшају. Одговор се обично тражи на две стране. Прво, Петровић је дошао из „математички слабе” Србије и вратио се у њу, па други крупни математичари нису озбиљно анализирали његове резултате. Друго, у математичкој средини у Србији нико није био у стању да озбиљно схвати и унапређује његове резултате, промовишући његове революционарне идеје, а и сам Петровић беше захваћен вртлогом бурних историјских догађаја по свом повратку. На жалост, оваква се ситуација одржава до данашњег дана. Постоје многи прикази Петровићеве дисертације у српској литератури (М. Томић [3], Б. Станковић [4] и др.), али нико, барем колико је познато аутору ових редова, није проучавао Петровићев рад са становишта његових метода, и није покушао да га настави. Али, по мишљењу аутора, то нису једини разлози оваквог историјског развоја догађаја. Као што је речено, Петровићев докторат био је посвећен истраживању критичних тачака општих решења дате диференцијалне једначине. Он је покушао да дâ анализу непокретних (тј. независних од интеграционих константи) нула и полова решења обичне диференцијалне једначине користећи своју комбинаторно-геометријску методу у којој централно место има један конвексни равански полигон повезан са том једначином. У другом делу своје дисертације, Петровић покушава да пренесе своје резултате на вишедимензиони случај.

[6] Christian Felix Klein, 1849–1925.

[7] Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921.

2. Преглед историје, развоја и примена Њутновог полигона пре Петровића

Методе Петровићевог типа имају дугу и веома сличну историју. Оне се појаве у инспирацији генија, а онда падају у заборав, јер од математичара који би се њима бавио изискују дубоко познавање више математичких области. У времену уске специјализације и омеђивања области математике то је бивало све теже и теже. И тако то траје, све док не дође нова инспирација генија, која методу оживи и допринесе даљем развоју да би, као по неписаном правилу, у наредној генерацији математичара све опет пало у заборав, срећом (или Божјим провиђењем) привремени.

Није јасно када се први пут појавила репрезентација монома $x^m y^n$ тачкама равни (m, n) и одговарајућег конвексног омотача. Прво записано помињање такве методе у историји математике забележено је у приватној преписци несумњивог математичког генија, Исака Њутна. У свом писму Олденбургу[8] [5] датованом 26. октобра 1676. године Њутн је описао геометријско-комбинаторну методу за налажење решења алгебарских једначина $f(x, y) = 0$ у облику (формалних) степених редова $y = y(x)$. Метода је много касније названа по свом проналазачу методом Њутновог полигона. Писмо је део преписке коју је Њутн преко Олденбурга водио са Лајбницом и Чирнхаузом[9]. Њутн разматра комбинаторне везе међу мономима $x^m y^n$ у f односно, са данашњег гледишта, односе одговарајућих тачака целобројне мреже $(m, n) \in \mathbb{N}_0^2$. У претходном писму, датованом 13. јуна, Њутн показује како решити једначину

$$y^3 + axy + a^2 y - x^3 - 2a^3 = 0$$

низом апроксимација

$$\begin{aligned} y &= a + p \\ p &= q - x/4 \\ q &= r + x^2/64a \\ r &= ... \\ s &= ... \end{aligned}$$

Олденбург тражи детаљнија објашњења, и у наредном писму Њутн објашњава да ако конструишемо полигоналну линију која је конвексни омотач одређених

[8] Henry Oldenburg, 1615–1677, научни секретар Лондонског краљевског друштва.

[9] Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz, 1646–1716; Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, 1651–1708. За нас је можда занимљиво да су обојица били Лужички Срби.

тачака у равни које одговарају датој једначини, можемо да решимо „словну” једначину

$$y^6 - 5xy^5 + \frac{1}{a}x^3y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

У Њутновом опису кључни су чланови y^6, x^2y^2, x^3 који се могу видети на наредном дијаграму. Приметимо да су x и y заменили места у односу на данас уобичајене конвенције: x је вертикално а y хоризонтално, као и да је Њутн тачке стављао у квадратиће, а не на пресечне тачке мреже, како то радимо данас.

Fig. 1

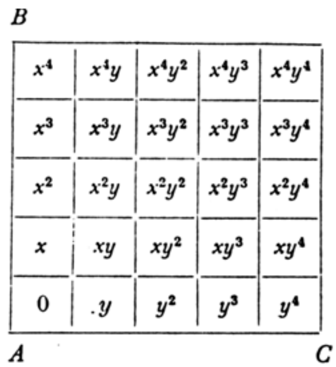
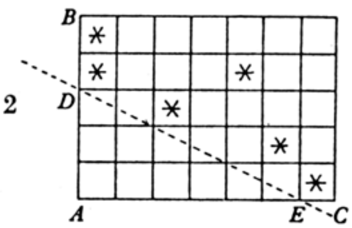


Fig. 2



Њутн у ствари сугерише да прва апроксимација решења односно почетни члан развоја решења $y = y(x)$ у (формални, јер се у његово време математичари нису бринули о конвергенцији редова: сви значајни редови ионако конвергирају) степени ред треба да садржи оне чланове чије се одговарајуће мрежне тачке налазе на рубу Њутновог полигона, како бисмо то данас рекли. Одличан приказ садржаја и коментар ових писама дат је у [6].

Њутнова метода је нажалост пала у заборав, све док је два века касније у свом раду [7] није поново открио француски математичар Виктор Пизо[10]. Развијајући теорију алгебарских функција и проучавајући сингуларитете алгебарских кривих, Пизо је увео степене редове са разломљеним, рационалним експонентима и у теореми која се данас назива Њутн-Пизоовом теоремом закључио да се свака грана алгебарске криве у околини сингуларне тачке може изразити таквим једним редом. Алгебарски гледано, поље Пизоових редова је директан лимес индуктивне фамилије пôља Лоранових редова $K_n \cong k((x))$ у којој је везујући хомоморфизам $K_m \longrightarrow K_n$ дат са $x \mapsto x^{n/m}$ када m дели n. У конструкцији тог решења односно гране одлучујућу улогу има Њутнов полигон.

[10] Victor Alexandre Puiseux, 1820–1883.

3. Епистемолошки корени Петровићеве методе

Веома је занимљиво питање како је Михаило Петровић као млад студент који је, кад се обрео у Паризу, имао 22 године а докторирао са 26 година, дошао на једну такву необичну и значајну идеју. Био је то свакако тренутак инспирације припремљен његовим радом у току четири године. Да ли је можда млади Петровић био упознат са методом Њутновог полигона? Одговор на ово питање се може наћи пажљивим читањем његове дисертације. Она се наравно базира на радовима његових математичких узора Поенкареа, Пикара и Пенлевеа, али се на више места у његовој дисертацији помињу и Брио и Буке. Драган Трифуновић је у [8] на једном месту сабрао све референце на литературу коју Михаило Петровић у свом докторском раду цитира. Има их само осам. Међу њима је само једна књига: уџбеник Брио и Букеа „Теорија елиптичких функција" [9]. О каквој књизи је реч? Два аутора Шарл Брио и Жан Клод Буке су своје познанство започели још у школи, да би касније студирали у École normale supérieure и докторирали на Faculté des sciences. Објавили су заједно велики број радова и књига, представљајући тако редак пример заједничког рада у XIX веку. У математици су остали запамћени по класификацији обичних диференцијалних једначина једног одређеног типа, који се данас зове једначина Брио–Буке. Књига о којој је реч представља уџбеник из у то доба веома значајне математичке теорије – теорије елиптичких функција. Михаило Петровић је свакако књигу веома озбиљно изучавао. Прелиставањем ове књиге, што је у веку интернета уз Пројекат Гутенберг данас постало доступно, у тачки 34 другог поглавља прве књиге (стр. 37–39) наилазимо управо на Њутнове полигоне. Истина, Брио и Буке не помињу Њутна, приписујући откриће ове методе Пизоу. Да ли је у питању француски национализам, или је Виктор Пизо заиста учинио независно поновно откриће методе, тешко је рећи. Свакако је млади Петровић у овој књизи нашао једну необичну комбинаторно-геометријску методу за налажење развоја решења алгебарских једначина у степене редове. Одатле до развоја аналогне методе за алгебарске диференцијалне једначине је само један корак. За тај корак је свакако било потребно Петровићево надахнуће, јер је од изласка књиге 1875. до Петровићеве дисертације 1894. протекло скоро двадесет година а да нико пре њега у тој изузетно активној математичкој средини није дошао на такву идеју.

4. О развоју Њутнових полиедара у XX веку и предлогу наставка Петровићевог рада

Петровићев докторат се састоји из два дела. У првом делу уводи свој полигон и примењује га на алгебарске (полиномијалне) обичне диференцијалне једначине облика

$$\sum f_{i,j}\left(x\right) y^{i} y'^{j} = 0.$$

Петровић анализује понашање нула и полова решења ове једначине помоћу геометријских особина полигона који представља конвексни омотач скупа тачака (i, j) које одговарају свим члановима горње једначине, дајући заокружену целину у неколико теорема.

У другом делу своје тезе Петровић покушава да методу уопшти на алгебарске ОДЈ вишег реда, облика

$$\sum f_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\left(x\right) y^{i_1} y'^{i_2} \ldots y^{(k)^{i_k}} = 0.$$

Конструкција коју нуди је аналогна: он уводи равни полигон одређен тачкама које узимају у обзир све експоненте $(i_1, \ldots, i_k)$. Међутим, овај полигон у ствари не може да представи све могућности комбинаторног распореда у овом вишедимензионалном случају. Петровић добија делимичне резултате, формулисане у неколико теорема, али ни сам није до краја задовољан урађеним. У вези са тим, постављају се два важна питања. Прво, зашто ни Петровић, ни нико од његових ученика у Србији никад нису покушали да наставе овај рад на задовољавајући начин. Делимичан одговор дат је на почетку овог прилога. Друго питање је нешто конкретније: да ли је Петровићев полигон у облику у ком га он примењује, уопште одговарајући за опис много сложенијег понашања у вишедимензионалном случају. Развој технике Њутновог полигона у двадесетом веку можда може да дâ одговор на ово питање. Као што је већ поменуто, комбинаторно-геометријска техника Њутнових полигона је више пута откривана и заборављана. У јеку Другог светског рата, чувени руски математичар Чеботарјов[11] написао је поводом тристоте годишњице Њутновог рођења прегледни чланак посвећен методи Њутновог полигона [10], у коме поред Њутновог помиње и Пизоов рад. Чудно је, ипак, да ни речју не помиње полигон Михаила Петровића. Очигледно, ни Чеботарјов није био свестан принципијелне везе између ове две комбинаторне методе. Даљи развој Њутновог полигона тече преносом „са деде на унука”. Један од најзначајнијих ученика Чеботарјова био је велики руски математичар Игор Шафаревич, који је имао

[11] Чеботарёв Никола́й Григо́рьевич, 1894–1947.

изузетан утицај на плејаду својих ученика из московске математичке школе шездесетих и седамдесетих година двадесетог века. Поменућу само двојицу: Јурија Мањина и Владимира Арнољда. Потоњи је у свом семинару 1970-тих са својим ученицима оживео методу Њутнових полигона и у серији радова довео њену примену до неслућених размера. Метода је пренета у више димензије као метода Њутнових полиедара и примењивана на широки спектар математичких проблема, од пребројавања решења алгебарских система једначина (Кушниренко [11], Бернштајн, Ховански [12]), до класификације сингуларитета и анализе брзо осцилујућих интеграла (Варченко, Гусеин-Заде, Арнољд [13]). Проучавајући класификацију сингуларитета равних кривих, а будући упознат са радовима школе Арнољда, и аутор је својевремено у свом докторату „Једнограни сингуларитети алгебарских многострукости и нерастављивост у прстенима формалних степених редова” из 1985. користио методу Њутновог полигона за проучавање факторизације у прстену формалних степених редова и делимично је уопштио на вишедимензиони случај [14]. Подстицај за то је била једна неопрезна констатација Бернара Тесијеа у [15].

Користећи поменуту технику, било би веома занимљиво да се покуша допуна Петровићевих резултата о алгебарским ОДЈ базирајући се на вишедимензионалном аналогону његовог полигона, који се добија потпуно аналогно дводимензионалном случају. Можда би то дало бољу слику повезаности понашања нула и полова решења дате диференцијалне једначине са вишедимензионалним особинама одговарајућег Њутновог или Петровићевог полиедра, асоцираног са овом једначином. Надајмо се да ће до реализације овог плана убрзо доћи.

Библиографија

[1] Драган В. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, САНУ, Београд (1969).

[2] Михаило Петровић, *О нулама и бесконачностима интеграла алгебарских диференцијалних једначина*, У књизи Михаило Петровић: Сабрана дела. Књига 1. Завод за уџбенике и наставна средства, Београд (1999), стр. 27–127.

[3] М. Томић, *Михаило Петровић и његов допринос у развоју математичких наука*, Ибид., стр. 9–21.

[4] Б. Станковић, *Аналитичка теорија диференцијалних једначина Михаила Петровића*, Ибид., стр. 367–378.

[5] I. Newton, *The correspondence of Isaac Newton*, Cambridge University Press, vol. 1 (1960), pp. 20–42, pp. 110–163.

[6] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves* Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart (1986).

[7] V. Puiseux, *Recherches sur les fonctions algébriques*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XV (1850).

[8] Д. Трифуновић, *Литература. У књизи Михаило Петровић: Сабрана дела*, Књига 1. Завод за уџбенике и наставна средства, Београд (1999), стр. 379–381.

[9] Ch. Briot, J. C. Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, Gauthier-Villars, Paris (1875).
[10] Н. Г. Чеботарёв, *Многоугольник Ньютона и его рольв современном развитии математики* (из сборника „Исаак Ньютон"). АН СССР (1943).
[11] А. Г. Кушниренко, *Многогранники Ньютона и теорема Безу*, Функц. анализ и его прил., т. 10, вып. 1 (1976), с. 82–83.
[12] А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона. Современные проблемы математики*, Итоги науки и техн. М.: ВИНИТИ, т. 22 (1983), с. 207–239.
[13] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. Н. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений (ОДО-2)*, Наука, Москва, (1984).
[14] A. Lipkovski, *Newton polyhedra and irreducibility*, Math. Z., 199 (1988) pp. 119–127.
[15] B. Teissier, *Polyèdre de Newton jacobien et équisingularité*, Seminar on Singularities (Paris, 1976/1977), Publ. Math. Univ. Paris VII, 7, Univ. Paris VII, Paris, (1980), pp. 193–221.

Aleksandar T. Lipkovski

A CONTEMPORARY VIEW OF MIHAILO PETROVIĆ'S DOCTORAL THESIS

S u m m a r y

Mihailo Petrović (1868–1943), the most prominent and influential Serbian mathematician, defended his doctoral thesis entitled "Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations differentielles algébriques" in Paris 1894, in front of the highly prominent defence committee: Hermite, Picard and Painlevé. Since then, much has been written about Petrovic himself, his thesis and other scientific achievements, and about the influence he had on Serbian mathematics, mathematicians and society in general. However, until this very day, there has been no proper analysis of the original combinatory geometrical method he used in the thesis. The purpose of this paper is to change this fact and to clarify the origins and the importance of Petrović's method, as well as to give some directions for continuation of his work, which has not been satisfactory even today.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ АЛАС – НАШ ВОДЕЋИ КРИПТОГРАФ ИЗМЕЂУ ДВА СВЕТСКА РАТА

РАДОМИР С. СТАНКОВИЋ*

МИОДРАГ МИХАЉЕВИЋ**

А п с т р а к т. – Шифровање је данас један од стандардних приступа за остваривање безбедности и приватности у дигиталном простору и постоји велики број експерата који се баве шифровањем како са научно-истраживачког становишта тако и у доменима великог броја различитих примена. У време Михаила Петровића Аласа, бављење шифровањем је било веома редак и веома специфичан посао, а он је истовремено био и главни научник-истраживач и главни државни саветник одговоран за шифре између два светска рата. О овом, за то време и историју, веома битном сегменту рада и достигнућа М. П. Аласа остало је релативно мало записа у форми војних докумената али који неспорно указују на велике заслуге М. П. Аласа за нашу државу у домену криптологије и пре него што је она оформљена као светска научна дисциплина [4]. Овај рад, на основу [1] – [3] и [5] – [6], сумира неке од историјских чињеница о М. П. Аласу као нашем главном криптографу између два светска рата.

У поменутим документима је забележено да су се рад М. П. Аласа и резултати овога рада налазили у: (1) методама за шифровање, (2) методама за „разбијање” шифара и (3) едукацији о техникама шифровања и разоткривању порука које су биле предмет шифровања.

Историја признаје, а због растућег значаја области у којој је оставио траг, историја ће још више истицати рад Михаила Петровића Аласа у домену државне шифре између два светска рата.

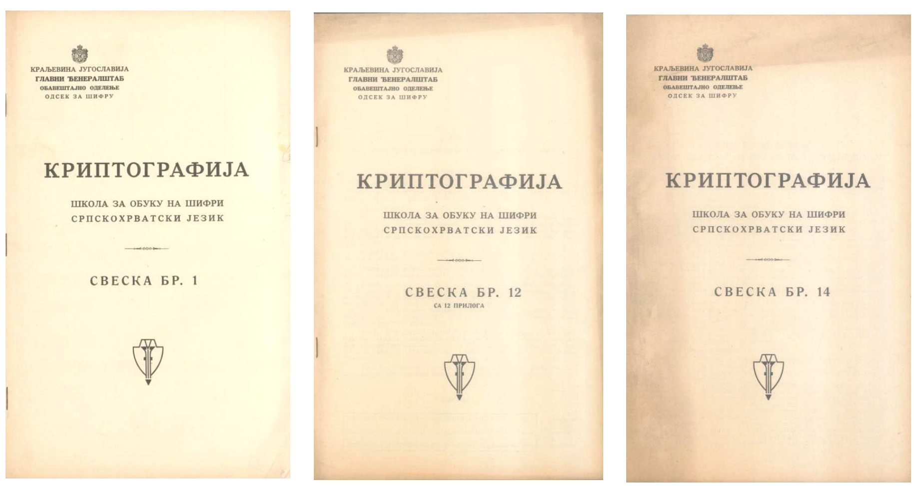
Кључне речи: заштита тајности, шифровање, криптографија

* Математички институт САНУ, и-мејл: radomir.stankovic@gmail.com

** Математички институт САНУ, и-мејл: miodragm@turing.mi.sanu.ac.rs

1. Увод

Непосредно пред Први светски рат у Краљевини Србији, за време рата, затим у Држави Срба, Хрвата и Словенаца, и касније у Краљевини Југославији, свест о потреби и значају шифровања у војној и дипломатској државној преписци била је на врло високом нивоу о чему јасно сведоче бројни документи и приручници за обуку кадрова из ове области. Слика 1 приказује корице неких од свезака посвећених криптографији а намењених обуци људства у Обавештајном одељењу Ђенералштаба Краљевине Југославије.



(*a*) (*b*) (*c*)

Слика 1. Корице докумената о криптографији – шифровању (*a*) Шифровање методом замене и анализа ових шифрата, (*b*) Метод шифровања и дешифровања помоћу нарочитих справа, (*c*) Шифровање помоћу Кодекса – Речника за тајну кореспонденцију

Имајући у виду значај оваквих послова, сасвим је природно да је на томе био ангажован Михаило Петровић као један од најобразованијих и најумнијих грађана тога доба. Радећи у овој области Михаило Петровић је остварио значајна достигнућа у

1. пројектовању и анализи шифарских система,
2. едукацији кадрова коју су оперативно радили у областима шифровања за државне потребе.

У овом раду нећемо се бавити анализом сигурности техника шифрирања коришћених у доба када је Михаило Петровић радио у овој области. Сасвим је разумљиво да су напретком научне мисли као и технолошким достигнућима ове методе превазиђене. Уосталом, Михаило Петровић је јако добро разумео проблеме и несавршености свих оваквих система о чему сведочи његово тврђење

Поуздано се зна, да за време последњег светског (*Првог*) *рата ни један метод, начин или систем тајне преписке није се могао дуже време употребљјавати* [1].

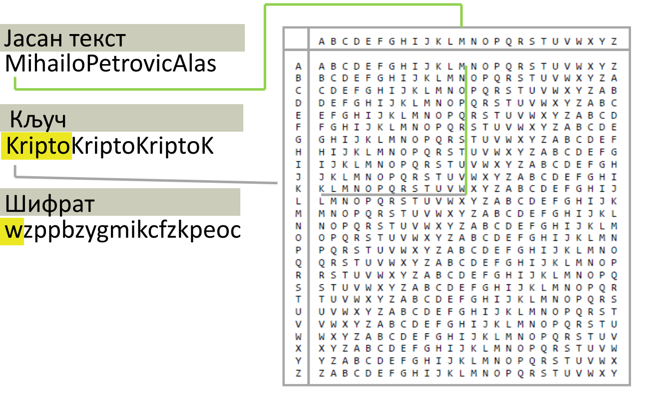
Циљ излагања је да се истакне улога и значај дела Михаила Петровића Аласа у научној дисциплини данас познатој као криптологија, а која у времену од 80 до 100 година уназад није била уобличена као наука какву данас познајемо и чије резултате користимо у свакидашњој пракси. Као илустрацију нивоа знања у Србији у области криптологије у време Михаила Петровића, навешћемо неке од метода коришћених у пракси од стране војних и државних институција у Србији у то време, а представљале су основу за даљу разраду и побољшања од стране Михаила Петровића као и његов рад на припреми приручника за обуку кадрова у одговарајућим службама.

2. Реглета

Једна од поменутих свезака о криптографији садржи опис *Метода шифровања и дешифровања помоћу нарочитих справа*, под чим се подразумева рад са реглетом за извршавање Виженерове методе назване по Blaise De Vigènere-у који је још у 16-том веку разрадио метод најпре оригинално предложен 1550. од стране Ђованија Батисте Беласо (Giovani Battista Bellaso). Метод је био толико поуздан да је тек 1863. Фридрих Касиски (Friedrich Kasiski) објавио општи начин његовог дешифровања.

Реглета је једноставна справа која се састоји од једног покретног и једног или два непокретна дела који сви подсећају на дрвени лењир. На свим деловима исписан је алфабет који се користи за исписивање јасног текста, при чему алфабет може бити исписан у нормалном или пермутованом редоследу ради повећања сложености поступка а тиме и његове поузданости. Померањем покретног дела одређују се слова којима се замењују слова јасног текста како би се добио шифрат. Поузданост шифре се заснива на броју могућих комбинација замене слова. Уколико се користи свих 30 слова, број комбинација је $30 \times 30 = 900$. У шифрирању се најчешће ради без акцентованих слова ч, ћ, ж, љ, њ, ш, џ, у ком случају је број комбинација $22 \times 22 = 484$.

Беласо је користио такозване табеле са 5 алфабета, док је Виженер радио са 10 алфабета. Такође, у оригиналном Беласовом методу шифре су биле засноване на првом слову речи, док је Виженер користио слово унапред усаглашено између страна које комуницирају. У суштини, овде се ради о добро познатој Цезаровој шифри где се свако слово замењује словом које одговара алфабету



Слика 2. Пример шифровања Виженеровом методом

померeном за неку вредност. На пример, низ $(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, \ldots) \rightarrow (D, E, F, G, H, I, J, K, \cdots)$. У том смислу, Виженеров метод је примена више Цезарових шифри за различите помераје. При томе избор алфабета за дато слово зависи од поновљене кључне речи до дужине јасног текста. Слика 2 илуструје овај поступак шифрирања који је био описан у поменутим Свескама намењеним обуци кадрова у Србији због његове једноставности и релативне поузданости.

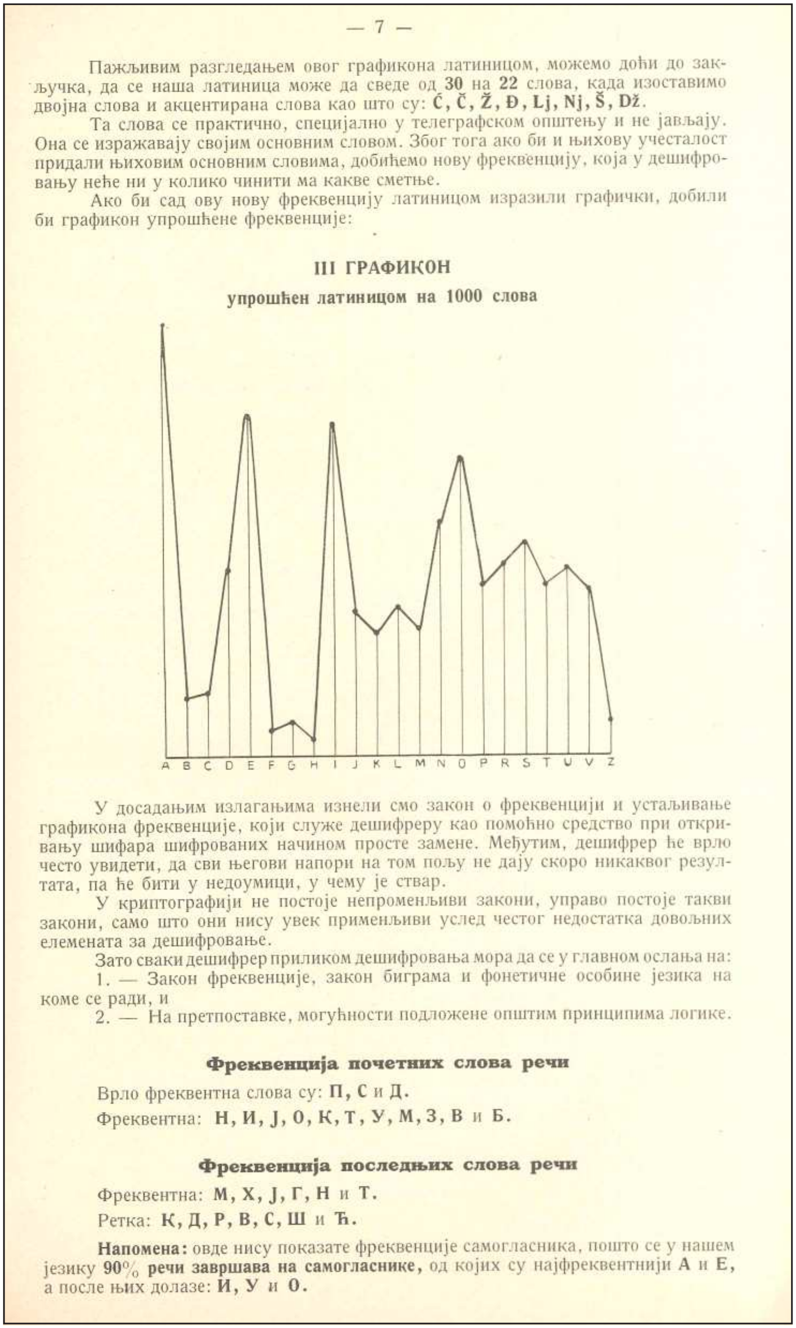
3. Технике фреквентирања симбола шифрата

Слика 3 је извод из Свеске 1, који потврђује добро познавање начина за разбијање шифре замене применом технике фреквентирања симбола шифрата. Техника се састоји у запажању да ако је у криптограму најфреквентније слово K, а друго по фреквенцији слово D, тада су њихове декрипције слова E и T као најфреквентнија слова латинског језика. Важно је уочити да се у то време у Србији било у току са савременим достигнућима у овом подручју.

4. Метода шифровања помоћу Кодекса

У контексту шифрирања, *Кодекс* је листа или таблица у коју су алфабетским поретком унета слова, речи, одломци речи и изрази који су највише у употреби у неком језику. Елементи из листе или свеске замењују се групом од 2 до 5 слова или цифара.

Слика 4 приказује прву страну свеске у којој се образлаже поступак шифрирања применом Кодекса посматраног као речник за тајну кореспонденцију.



— 7 —

Пажљивим разгледањем овог графикона латиницом, можемо доћи до закључка, да се наша латиница може да сведе од **30** на **22** слова, када изоставимо двојна слова и акцентирана слова као што су: **Ć, Č, Ž, Đ, Lj, Nj, Š, Dž**.

Та слова се практично, специјално у телеграфском општењу и не јављају. Она се изражавају својим основним словом. Због тога ако би и њихову учесталост придали њиховим основним словима, добићемо нову фреквенцију, која у дешифровању неће ни у колико чинити ма какве сметње.

Ако би сад ову нову фреквенцију латиницом изразили графички, добили би графикон упрошћене фреквенције:

III ГРАФИКОН

упрошћен латиницом на 1000 слова

У досадањим излагањима изнели смо закон о фреквенцији и устаљивање графикона фреквенције, који служе дешифреру као помоћно средство при откривању шифара шифрованих начином просте замене. Међутим, дешифрер ће врло често увидети, да сви његови напори на том пољу не дају скоро никаквог резултата, па ће бити у недоумици, у чему је ствар.

У криптографији не постоје непромењиви закони, управо постоје такви закони, само што они нису увек примењиви услед честог недостатка довољних елемената за дешифровање.

Зато сваки дешифрер приликом дешифровања мора да се у главном ослања на:

1. — Закон фреквенције, закон биграма и фонетичне особине језика на коме се ради, и

2. — На претпоставке, могућности подложене општим принципима логике.

Фреквенција почетних слова речи

Врло фреквентна слова су: **П, С** и **Д.**

Фреквентна: **Н, И, Ј, О, К, Т, У, М, З, В** и **Б.**

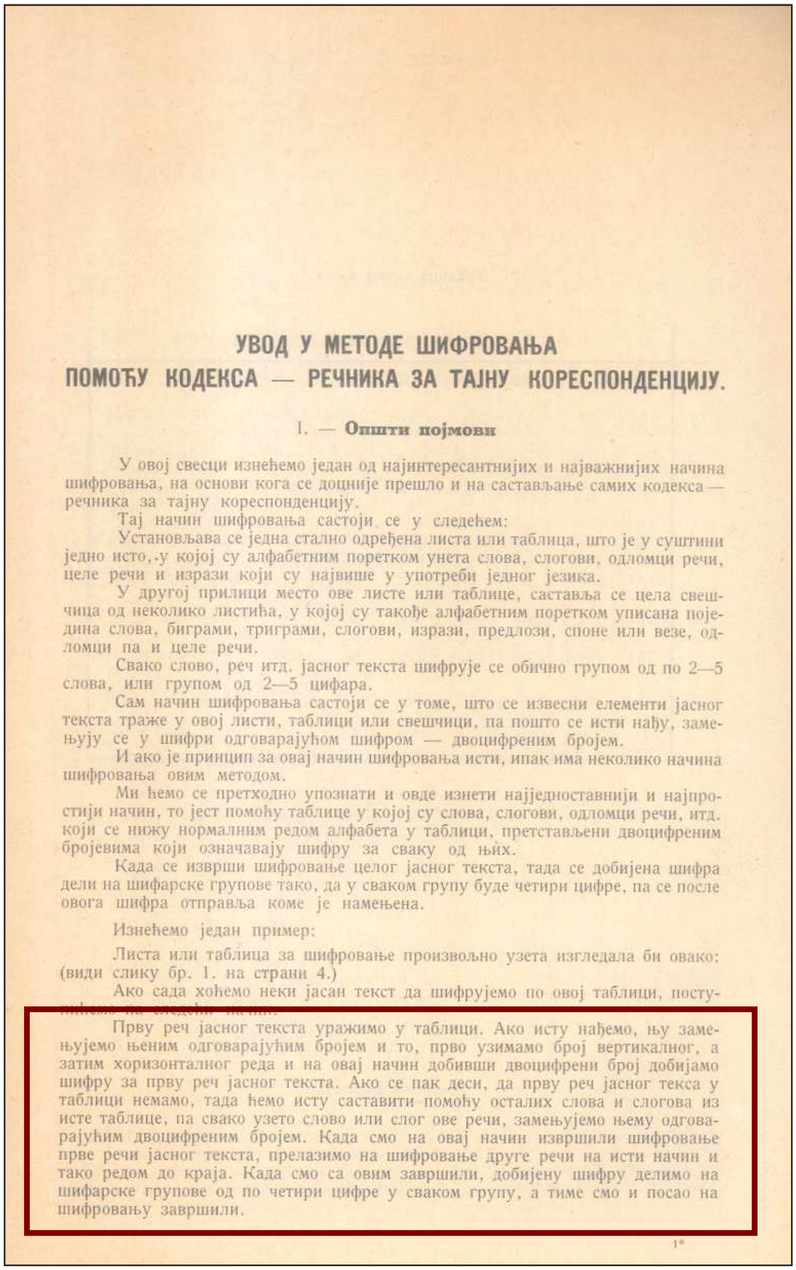
Фреквенција последњих слова речи

Фреквентна: **М, Х, Ј, Г, Н** и **Т.**

Ретка: **К, Д, Р, В, С, Ш** и **Ћ.**

Напомена: овде нису показате фреквенције самогласника, пошто се у нашем језику **90% речи завршава на самогласнике,** од којих су најфреквентнији **А** и **Е,** а после њих долазе: **И, У** и **О.**

Слика 3. Илустрација познавања технике фреквентирања



УВОД У МЕТОДЕ ШИФРОВАЊА ПОМОЋУ КОДЕКСА — РЕЧНИКА ЗА ТАЈНУ КОРЕСПОНДЕНЦИЈУ.

I. — **Општи појмови**

У овој свесци изнећемо један од најинтересантнијих и најважнијих начина шифровања, на основи кога се доцније прешло и на састављање самих кодекса — речника за тајну кореспонденцију.

Тај начин шифровања састоји се у следећем:

Установљава се једна стално одређена листа или таблица, што је у суштини једно исто, у којој су алфабетним поретком унета слова, слогови, одломци речи, целе речи и изрази који су највише у употреби једног језика.

У другој прилици место ове листе или таблице, састаља се цела свешчица од неколико листића, у којој су такође алфабетним поретком уписана поједина слова, биграми, триграми, слогови, изрази, предлози, споне или везе, одломци па и целе речи.

Свако слово, реч итд. јасног текста шифрује се обично групом од по 2—5 слова, или групом од 2—5 цифара.

Сам начин шифровања састоји се у томе, што се извесни елементи јасног текста траже у овој листи, таблици или свешчици, па пошто се исти нађу, замењују се у шифри одговарајућом шифром — двоцифреним бројем.

И ако је принцип за овај начин шифровања исти, ипак има неколико начина шифровања овим методом.

Ми ћемо се претходно упознати и овде изнети најједноставнији и најпростији начин, то јест помоћу таблице у којој су слова, слогови, одломци речи, итд. који се нижу нормалним редом алфабета у таблици, претстављени двоцифреним бројевима који означавају шифру за сваку од њих.

Када се изврши шифровање целог јасног текста, тада се добијена шифра дели на шифарске групове тако, да у сваком групу буде четири цифре, па се после овога шифра отправља коме је намењена.

Изнећемо један пример:

Листа или таблица за шифровање произвољно узета изгледала би овако: (види слику бр. 1. на страни 4.)

Ако сада хоћемо неки јасан текст да шифрујемо по овој таблици, поступићемо на следећи начин:

Прву реч јасног текста уражимо у таблици. Ако исту нађемо, њу замењујемо њеним одговарајућим бројем и то, прво узимамо број вертикалног, а затим хоризонталног реда и на овај начин добивши двоцифрени број добијамо шифру за прву реч јасног текста. Ако се пак деси, да прву реч јасног текса у таблици немамо, тада ћемо исту саставити помоћу осталих слова и слогова из исте таблице, па свако узето слово или слог ове речи, замењујемо њему одговарајућим двоцифреним бројем. Када смо на овај начин извршили шифровање прве речи јасног текста, прелазимо на шифровање друге речи на исти начин и тако редом до краја. Када смо са овим завршили, добијену шифру делимо на шифарске групове од по четири цифре у сваком групу, а тиме смо и посао на шифровању завршили.

1*

Слика 4. Илустрација познавања технике шифрирања помоћу Кодекса

Поступак шифрирања Михаило Петровић је објаснио следећим речима

Прву реч јасног текста тражимо у таблици. Ако исту нађемо, њу замењујемо њеним одговарајућим бројем и то прво узимамо број вертикалног, а затим хоризонталног реда и на овај начин добивши двоцифрени број добијамо шифру за прву реч.

Ако се пак деси, да прву реч јасног текста у таблици немамо, тада ћемо исту саставити помоћу осталих слова и слогова из исте таблице, па свако узето слово или слог ове речи, замењујемо њему одговарајућим двоцифреним бројем.

Када смо на овај начин извршили шифровање прве речи јасног текста, прелазимо на шифровање друге речи на исти начин и тако редом до краја.

Када смо са овим завршили, добијену шифру делимо на шифарске групове од по четири цифре у сваком групу, а тиме смо и посао на шифровању завршили.

5. Нумерички спектри и криптографија

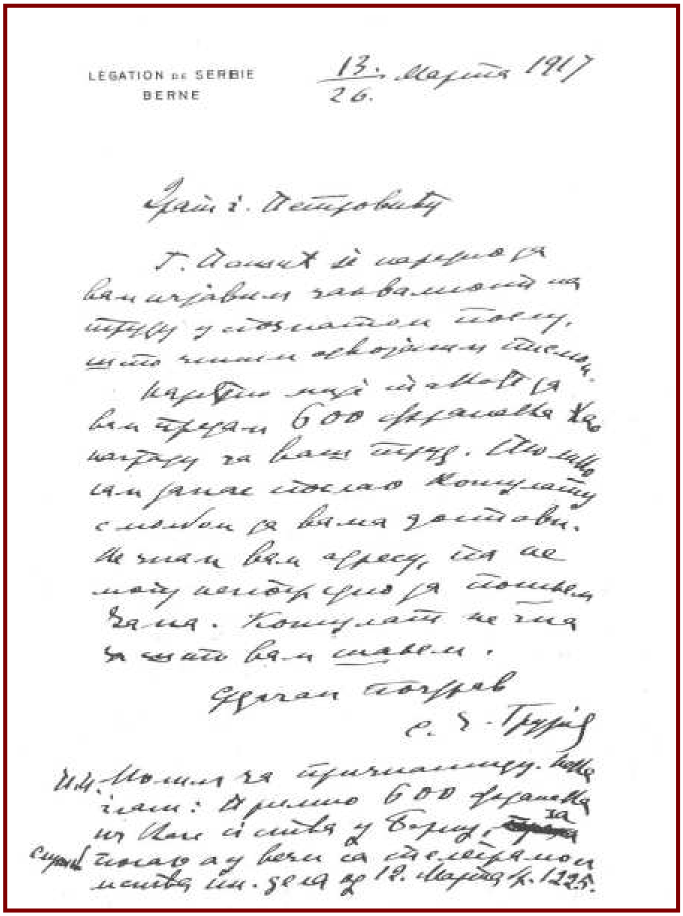
Занимљиво је уочити да је упоредо са практичним радом у криптографији, Михаило Петровић у истом раздобљу радио на дефиницији и развоју теорије нумеричких спектара. О вези између ових готово паралелних делатности најбоље сведоче речи Петровићевог најпотпунијег и најпосвећенијег биографа проф. др Душана Трифуновића [6].

Погрешно је мишљење да су нумерички спектри директна последица аналогија у физичким и хемијским наукама. Шифровање дипломатске поште (криптографија), које изискује налажење одређеног кода између писма једног језика и цифара декадног система, било је пресудно у Петровићевом проналаску.

Петровић је своје спектре поставио као врсту кода – функционале или оператора између функције и скупа децималних бројева. Петровић је спектре пронашао у времену када је највише радио на криптографији (1917–1918) под директном контролом Николе Пашића, председника владе Краљевине Србије у то време. У доцнијем раду Бројни спектри појава *Петровић је ове поверљиве чињенице и јавно објавио* [2].

Петровић је 1917. године дефинисао нумеричке спектре и реализовао свој познати систем шифровања и дешифровања *Три картона* који појмове описане речима кодира цифрама декадног система за потребе војске и дипломатије [3]. Предложени метод је био тако успешно решен да је остао у важности све до 1926. године.

Колико је рад Михаила Петровића био од значаја за Србију јасно говори податак да је о томе лично водио рачуна тадашњи председник владе Никола Пашић, који му на томе захваљује посредством др Славка Грујића посланика Краљевине Србије у Швајцарској у писму од 13. марта 1917. године приказаном на слици 5.



LÉGATION DE SERBIE
BERNE

13./26. Марта 1917

Драги г. Петровићу

Г. Пашић је наредио да вам изјавим захвалност на труду у познатом послу, што чиним искреним писмом.

Наредио ми је такође да вам предам 600 франака као награду за ваш труд. Ово сам јуче послао конзулату с молбом да вам достави. Не знам вашу адресу, па не могу непосредно да пошаљем вама. Конзулат не зна за што вам шаљем.

Одани поздрав

С. Д. Грујић

П.С. Молим за признаницу. Ова гласи: Примио 600 франака из Пос. [illegible] у Берну, ~~[illegible]~~ за [illegible] у вези са [illegible] [illegible] до 19. Марта г. 1925.

Слика 5. Писмо др Славка Грујића у коме се преноси захвалност председника владе Николе Пашића Михаилу Петровићу за рад на шифрама за потребе Краљевине Србије

Михаило Петровић је наставио рад у области криптографије и након Првог светског рата, а у вези са тим задацима октобра 1919. године боравио је у Француској по налогу Министарства исхране и обнове земље и Министарства спољних послова јер је радио на изради новог система шифровања дипломатске поште. Као резултат тог рада, 5. децембра 1919. предаје дорађену верзију система *Три картона* министру спољних послова уз следећу пратећу поруку:

По поруци Министарства част ми је поднети нов систем за шифровање депеша, о коме сам раније имао споразум са помоћником Министра г. др Михаилом Гавриловићем.

Предности овог новог система у односу на дотада коришћени Михаило Петровић је сумирао на следећи начин

1. *што је шифровање по њему боље сакривено, јер се и последња цифра шифрује, а не дописује онаква каква је, као до сада,*

2. *што један прибор за шифровање даје* 720 *разних кључева на место* 196 *као до сада,*

3. *што се у њему промена кључа врши само једном петоцифреном групом, која и извештава дешифрера о тој промени и даје у исто време нов кључ, што се до сада постизало помоћу двеју петоцифрених група,*

4. *што се не захтева никакав апарат, не квари се, заузима веома мали простор и лако се чува и преноси,*

5. *што се после извесног времена могу лако променити свих* 720 *кључева. Промена се састоји само у томе да се на већ постојећих* 10 *картона, не мењајући им централну таблицу, ни нумере на наличју, преко црних шифара прелепе две узане траке од хартије на којима су одштампане две нове пермутације цифара* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$ (*таквих пермутација има на хиљаде милијарди*).

Следећи детаљи много говоре о начину размишљања и рада Михаила Петровића, његовом приступу ка послу и ефикасности при томе, што је и разлог и оправдање за њихово навођење.

Узимајући у обзир обуку надлежног особља, Михаило Петровић надаље извештава да се механизам шифровања и дешифровања не разликује много од досадашњег, тако да ће се они који су већ радили по досадашњем систему, лако и са мало пажње прлагодити новом.

У овом поднеску Министарству Михаило Петровић извештава да је прибор израђен у 100 примерака од којих сваки стаје по 4 динара. Даље наводи

Те примерке предајем Министарству заједно са упутством за шифровање и дешифровање. Све је израђено у дефинитивном облику тако да се може одмах разаслати Посланствима и пустити у рад почевши од једног одређеног дана.

У пратећем писму ресорном Министру Михаило Петровић наводи

По поруџи Министарства Спољних послова исплатио сам за рачун Министарства за 100 *примерака прибора за шифровање депеша* (*систем Три картона*) *и то за* 1000 *картона, штампање у две боје и нумерисање картона и за* 100 *комада куверата за прибор, суму од* 400 (*четири стотине*) *динара у сребру.*

Из ових детаља се јасно види да је Михаило Петровић налазио за потребно да комплетан посао уради до коначног производа и преда га спремног за непосредну примену практично од момента предаје. Такође, занимљиво је приметити да је сматрао једноставнијим да у реализацију најпре уложи сопствена средства, а касније тражи надокнаду, избегавајући при томе вероватно сложену комуникацију и процедуру са државном администрацијом што би могло да утиче на ефикасност извршавања посла. Чини се да и овом приликом до потпуног изражаја долази изванредна комбинација његове свестране, научничке, и практичне, рибарске, природе и начина размишљања.

6. Завршни коментари

Према расположивим подацима, о чему с обзиром на предмет разматрања, из разумљивих разлога нема много записа и докумената, Михаило Петровић је за време Првог светског рата, конкретно од 1916. и посебно 1917, и надаље више година по завршетку рата, био водећа личност у Србији на пословима израде метода шифровања и дешифровања државних докумената и војне и дипломатске преписке. Једнако важно, радио је на практичној реализацији одговарајућих система до њихове спремности за напосредну примену, као и на припреми материјала за обуку кадрова одговарајућих државних институција.

Библиографија

[1] *Криптографија – школа за обуку на шифри*, свеске 1–15, Одсек за шифру, Обавештајно одељење, Ђенералштаб Краљевине Југославије, оквирно 1930–1940.

[2] М. П. Петровић, *Бројни спектри појава*, Српска краљевска академија, Глас, књ. CRXXVII, први разред, књ. 58, Београд, 1927, стр. 45–66. Саопштено у Академији природних наука, АПН 20. 12. 1926., резиме на француском.

[3] М. П. Петровић, *Transformateur des chiffres, Genève*, 1917, 50 страна, формат $12,4 \times 18,6$. Издање Посланства Краљевине Србије у Швајцарској.

[4] C. E. Shannon, *Communication Theory of Secrecy Systems.* Белл Сyстем Течницал Јоурнал, 1949, 28, 656–715.

[5] *Систем* (*за шифру*), свеске 1–24, Одсек за шифру, Обавештајно одељење, Ђенералштаб Краљевине Југославије, оквирно 1930–1940.

[6] Д. В. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, Српска академија наука и уметности, Одељење природно-математичких наука, Београд, Србија, 1969, примљено 16. 2. 1968. на основу реферата академика Радивоја Кашанина и Војислава В. Мишковића, 631 страна.

Radomir S. Stanković
Miodrag Mihaljević

MIHAILO PETROVIĆ ALAS – OUR LEADING CRYPTOGRAPHER BETWEEN THE TWO WORLD WARS

S u m m a r y

Encryption is today one of standard approaches for achieving security and privacy in the digital space, and a large number of experts works in this area both from a scientific and research perspective and in the domains of a large number of different applications. At the time of Mihail Petrović Alas, dealing with encryption was a rather rare and very specific job, and he was at the same time the main scientist-researcher and chief state advisor responsible for the codes between the two world wars. It is preserved a relatively small number of records mainly in the form of military documents about this very respectable segment of work and achievements of Mihailo Petrović that was very important at that time and is also important and interesting from the historical perspective. These documents undoubtedly indicate great merits of M. P. Alas for our country in the domain of cryptology even before it was established as a world level scientific discipline [4]. This paper summarizes, based on [1] – [3] and [5] – [6], some of the historical facts about the M. P. Alas as our main cryptographer between the two world wars.

In the mentioned documents, it was noted that the work of M. P. Alas and the results of this work can be found in: (1) Methods for encryption, (2) methods for "breaking" the codes and (3) education on encryption techniques as well as deciphering of encrypted messages.

History acknowledges, and due to the growing importance of the area in which M. P. Alas has left his mark, history will even further emphasize the work of Mihailo Petrović Alas in the domain of the development of the Serbian state ciphering methods between the two world wars.

ГЕОМЕТРИЈА ПОЛИНОМА У РАДОВИМА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА И ЊЕГОВИХ НАСЛЕДНИКА

РАДОШ БАКИЋ*

ЖАРКО МИЈАЈЛОВИЋ**

ГРАДИМИР В. МИЛОВАНОВИЋ***

А п с т р а к т. – Поред *Диференцијалних једначина*, где је Михаило Петровић био најуспешнији, *Геометрија полинома* је још једна математичка област у којој је он био веома успешан и где је постигао значајна достигнућа. Не само да је донео ову област код нас, већ је захваљујући његовом утицају, више значајних српских математичара радило у тој области и имало препознатљиве и вредне прилоге. Поред прегледа Петровићевих резултата из ове области, у овом раду дајемо кратку историју развоја области, доприносе Петровићевих наследника, као и општи тренд у развоју области у последњим деценијама.

Кључне речи: геометрија полинома, нуле полинома, тригонометријске суме, неједнакости

1. Увод

Главни доприноси Михаила Петровића у математици налазе се у области диференцијалних једначина, затим у реалној и комплексној анализи. Мада је скоро четвртина његовог научног опуса класификовано у алгебру (видети *Летопис живота и рада Михаила Петровића* аутора Д. В. Трифуновића [47]), и од тога више од половине је објављено у иностранству, углавном у француским часописима, ови радови такође су прожети идејама и методама математичке анализе и теорије диференцијалних једначина. Скоро да нема радова

* Учитељски факултет Универзитета у Београду, и-мејл: rados.bakic@uf.bg.ac.rs

** Математички факултет Универзитета у Београду, и-мејл: zarko.mijajlovic@gmail.com

*** Српска академија наука и уметности, и-мејл: gvm@mi.sanu.ac.rs

чисто алгебарског карактера. Ипак, први Петровићев рад *О једној модификацији Грефеовог метода решавања виших бројних једначина*, има алгебарско обележје. Споменимо да је Петровић овај рад написао већ у деветнаестој години, као студент прве године Велике школе у Београду 1886. године. Рад није објављен и постоји само у рукопису.

Петровићеви радови из алгебре могу се разврстати у три области: теорију полинома, теорију бројева и теорију детерминаната. У оквиру теорије полинома занимао се за неколико тема: геометрију полинома, тј. распоред нула полинома (са реалним и комплексним коефицијентима) у комплексној равни, опште проблеме у вези са алгебарским једначинама, теорију симетричних функција и нумеричко решавање алгебарских једначина. У теорији бројева Петровић је имао нарочито интересовање за својства простих бројева и Вилсонову теорему. Из теорије детерминаната има заправо пар радова који се углавном односе на њихову примену, пре свега у теорији полинома, али и ван математике, на пример у хемији.

Далеко најзначајнији и најдубљи Петровићеви радови из алгебре припадају области *геометрија полинома*. Погледајмо на шта се тачно односе ови Петровићеви радови.

Велики број резултата који се односе на полиноме успешно је пренет на важне класе других функција, као што су на пример, целе и мероморфне функције, и уопште функције комплексне променљиве представљене Тејлоровим редовима. Петровић је управо у овој области испољио велики таленат и оригиналност. Рад у области геометрије полинома и генерално у теорији функција започиње под утицајем Ермита (*C. Hermite*) и Адамара (*J. Hadamard*). Петровићеви радови из геометрије полинома додирују велики број напред описаних тема и метода.

У наредним секцијама размотрићемо укратко Петровићеве радове из ове области, кратку историју развоја области, као и доприносе Петровићевих наследника и општи тренд у развоју области у последњим деценијама.

2. Допринос Михаила Петровића у геометрији полинома

Један од првих радова из геометрије полинома је [23] из 1899. Рад се односи на распоред корена у комплексној равни алгебарске једначине $f(x) = 0$ у односу на дату кружницу C са центром у координантном почетку O. Овде Петровић одређује услове за спољашњи и унутрашњи полупречник кружног прстена P, такође са центром у O, а који садржи кружницу C. На основу полупречника кружница којим је дефинисан прстен P налази алгебарски израз, одакле одређује тачан број p „унутрашњих” корена ове једначине, тј. нула садржаних унутар кружнице C. Овај израз је логаритамски извод трансформисаног полинома $f(x)$. Трансформација коју примењује на полином добија се итерацијом алгебарског пресликавања $x \mapsto \sqrt{x}$. Споменимо да је рад презентовао Ермит у оквиру геометријске секције у часопису у којем је објављен.

У раду [25] (1901), штампан у Билтену француског математичког друштва, Петровић се бави одређивањем доњих граница модула нула датог Тејлоровог реда уз претпоставку да постоји зависност у низању коефицијената реда, или бар нумеричке вредности довољног броја тих коефицијената. У одређивању ове оцене полази од Адамарове неједнакости која се односи на норму детерминанте и модула вектора врсте исте детерминанте. Такође наводи више примера на којима су те оцене илустроване. Овим радом Петровић заправо наставља истраживање понашања функција представљених Тејлоровим редовима које је започео Адамар. Нарочито је занимљив Петровићев резултат о кругу у којем такве функције немају нула. Не само резултат већ и идеја доказа су Петровићева оригинална замисао. Рад је привукао пажњу неколико познатих математичара оног времена. На пример, немачки математичар Е. Ландау (*E. Landau*) изучава овај рад и четири године касније у истом часопису детаљно анализира поменути Петровићев резултат. Тако, доказује да је он последица Јенсенове неједнакости. Занимљиво је да је дански математичар Јенсен (*J. Jensen*) доказао своју неједнакост исте године када је Петровић објавио овај рад. И други познати математичари се надовезују и допуњују Петровићев рад: Фејер (*L. Fejér*), Харди (*G. E. Hardy*), Монтел (*P. Montel*).

У раду [27] (1906), Петровић утврђује за једну широку класу полинома област комплексне равни која садржи све нуле полинома из те класе. Реч је о полиномима $J(x) = \sum_{k \leq n} a_k x^k$ где су коефицијенти представљени интегралом:

$$a_k = \int_a^b A(t) r(t)^k \, dt,$$

где су $A(t)$ и $r(t)$ разне функције променљиве t, реалне и позитивне за све вредности t у размаку интеграције. Област се састоји из пресека сектора и кружних прстена, а углови сектора и пречници кружних прстена се прецизно описују утврђивањем аргумената и оцене модула полинома $p(x)$. Занимљиво је да се оцене вредности аргумената једноставно одређују на основу промене знака три функције $\sin(x)$, $\sin(nx)$ и $\sin((n+1)x)$. Рад садржи велики број интересантних примера за које су изведене оцене конкретизоване, тј. тачно су описане области комплексне равни наведене врсте. Такође утврђује реалан интервал који садржи све реалне корене полинома $J(x)$.

Први део рада [29] (1908) делимично се преплиће са једним претходним Петровићевим радом [28] и односи се на симетричне функције. При томе уводи низ рационалних функција $N_{k(x)}$ придружених датом полиному применом логаритамског извода на претходне чланове низа. У другом делу рада бави се распоредом нула у комплексној равни дате алгебарске једначине. Утврђује природну везу између низа $N_{k(x)}$ и броја корена једначине чији модул је ограничен неким позитивним реалним бројем ϱ. Као и остали радови, и овај је илустрован бројним нумеричким примерима.

У раду [30] (1913) Петровић најпре изводи, полазећи од основне Адамарове неједнакости, неколико нових неједнакости – оцена максималног модула детерминанте D n-тог реда над пољем комплексних бројева. Тако, користећи однос аритметичке и геометријске средине налази:

$$|D| \leq \frac{B^n}{\sqrt{n^n}},$$

где је B квадратни корен из суме квадрата модула свих елемената детерминанте. Потом користи ове неједнакости за разне оцене решења алгебарских једначина и система линеарних једначина. На пример, изводи оцену модула основне симетричне функције

$$s_n = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k$$

корена α_i алгебарске једначине n-тог реда. Надовезујући се на Адамарове теореме, Петровић даје оцене нула целих функција. На крају, користећи само цитирану неједнакост о модулу детерминанте, даје директан и у основи елементаран доказ теореме која се односи на нуле најмањег модула Тејлоровог реда. Овај доказ посебно је занимљив с обзиром да је Ландау доказао исту теорему на сасвим други (и тежи) начин користећи апарат аналитичких функција.

У раду [31] (1913) Петровић се бави следећим проблемом: *Одредити низове* $\omega_0, \omega_1, \ldots$ *реалних бројева такве да ако алгебарска једначина*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

има све корене имагинарне, онда и једначина

$$\omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 x + \cdots + \omega_n a_n x^n = 0$$

такође има све корене имагинарне.

Сличан задатак, али за реалан случај, расправљао је Лагер (*E. Laguerre*). Петровић даје опште решење проблема у виду производа релативно једноставних интеграла. Затим наводи више занимљивих примера бирајући конкретне примере интеграла. Исти проблем варира, да својство реалности, односно имагинарности корена буде одржано у случају да се испусти одређен број чланова полинома. У другом делу рада расправља сличне проблеме, али сада у случају степених редова. Све ове резултате користи у одређивању распореда нула ових функција, на пример, у налажењу доње границе модула нула функција представљених Тејлоровим редом. Рад је богато илустрован занимљивим примерима. Делове овог рада Петровић је саопштио на Међународном конгресу у Риму 1908. године и резултати рада имали су запажен одјек. На пример, даља проширења и генерализације дао је Полиа (*G. Pòlya*), док Р. Јенч (*R. Jentzsch*) наводи исти рад у својој тези. Према речима академика М. Томића, Јенчова теорема да одсечци Тејлоровог реда имају тачке нагомилавања на целој периферији круга конвергенције представља само крајњи домет ове врсте ставова.

Један од последњих Петровићевих списа посвећен у потпуности геометрији полинома је рад [33] (1919). И овде се Петровић бави распоредом нула алгебарске једначине $f(x) = 0$ у комплексној равни. Наиме, одређује кружни прстен C у којем полином $f(x)$ има бар један корен и то најмањег модула. Дакле, $f(x)$ нема нула окружених прстеном C. Примерима полинома показује да је тако добијен прстен C најбоље одређен. Овај рад је у вези са резултатима неколико других математичара који су се бавили истим питањем, између осталих Фејера и Ландауа.

У једном броју радова Петровић се бави разним питањима из теорије алгебарских једначина која нису у непосредној вези са геометријом полинома. Ови проблеми најћешће су везани за разне алгебарске и трансцендентне трансформације алгебарских једначина, симетричне функције, неједнакости и сумационе формуле из анализе. Занимљиво је да у основи неколико радова лежи Грефеова (*K. H. Graeffe*) трансформациона метода за издвајање нула највећег модула дате алгебарске једначине. Подсетимо се да је Петровић први пут о томе писао још као студент и већ у њему имао оригиналних доприноса. Детаљну анализу овог рукописа урадили су М. Стојаковић и Д. Трифуновић у чланку *Петровићева модификација Грефеове методе за решавање алгебарских једначина* који је објављен у књизи поводом стогодишњице Петровићевог рођења, „Споменица Михаила Петровића, 1868–1968". Стога се овом приликом нећемо детаљно бавити овим рукописом, али зато погледајмо о чему је Петровић писао у осталим радовима из ове области.

У доста опсежном раду [24] (1899) Петровић примењује трансцендентне трансформације на алгебарске једначине, али тако да трансформисана једначина остаје алгебарска. Петровић заправо решава следећи проблем: образовати нову алгебарску једначину J' из дате алгебарске једначине J такву да између корена α_i једначине J и корена β_i једначине J' постоји веза облика

$$\beta_i = R(e^{r\alpha_i}, e^{r\alpha_j}, \ldots)$$

или

$$\beta_i = R(\sin(r\alpha_i), \sin(r\alpha_j), \ldots)$$

или

$$\beta_i = R(\cos(r\alpha_i), \cos(r\alpha_j), \ldots),$$

где R означава некакву алгебарску, рационалну или симетричну функцију. Као што видимо, у овом раду се појављује одсјај идеја из првог Петровићевог необјављеног рукописа. Истина, овде се не бави поступцима за нумеричко израчунавање корена полинома већ ове трансформације уводи са циљем да утврди распоред и број нула датог полинома у комплексној равни. Дакле, овде најављује тему којом ће се са великим успехом бавити у следеће две деценије. У самом раду решава неколико проблема. Први је у вези са Хурвицовом теоремом, да се одреди број комплексних корена алгебарске једначине чији је реални део мањи од нуле. Други задатак који решава је да се за дату алгебарску једначину одреди полином чије су нуле једнаке парцијалним збировима корена полазне једначине. Најзад, у трећем делу, користећи већ добијене резултате, даје метод за израчунавање једне класе интеграла. Споменимо да је Петровић овај рад објавио у *Rad*-у JAZU, непосредно по пријему у чланство JAZU.

У раду [26] (1906) Петровић даје нов, и у основи елементаран, доказ једне Њутнове теореме која даје довољне услове за коефицијенте полинома да дата алгебарска једначина има корен који није реалан. Мада је Њутн теорему формулисао, доказ није објавио, нити је оставио наговештај доказа у било којем виду. Први доказ Њутнове теореме потиче од енглеског математичара Силвестера (*J. J. Sylvester*) из 1866. године. Заправо ова теорема је последица једне општије Силвестерове теореме о броју реалних корена алгебарске једначине у датом интервалу. У свом доказу Петровић уводи низ алгебарских трансформација да би на крају применио Ролову теорему. У другом делу рада детаљно анализира примену теореме у случају кубне једначине. На крају изводи применом Њутнове теореме занимљиву неједнакост за реални полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, степена n, са позитивним коефицијентима и чије су све нуле реалне:

$$f(x) \leq \left(1 + \frac{a_1}{na_0}x\right)^n.$$

У раду [28] (1907) Петровић налази аналитички израз за једну симетричну функцију корена датог полинома. Овај образац Петровић изводи на два начина. У првом користи својства логаритамског извода, док у другом извођењу примењује Грефеову методу, вршећи трансформације на полазној једначини тако да су корени трансформисаног полинома добијени применом итерације корене функције на нуле првобитног полинома. Сличним поступком изводи одговарајућу формулу за симетричне функције целих функција. Један део рада односи се на проблем раздвајања нула полинома у комплексној равни. Рад садржи неколико детаљних примера који илуструју Петровићеве методе.

Преостала два рада у овом избору из теорије алгебарских једначина немају исту тежину као остали радови на ову тему. Ипак и ови чланци илуструју одређене Петровићеве идеје. Тако, у раду [32] (1914) Петровић је уочио да се полином $f(x)$ парног степена $2n$ може представити у облику $f(x) = P^2 + Q^2 - M^2$, где су P, Q и M полиноми степена n. Користећи ово својство Петровић даје поступак свођења алгебарских једначина парног степена на алгебарске једначине двоструко мањег степена. Овај поступак примењује и детаљно анализира у случају алгебарских једначина степена 4 и 6. У раду [34] (1933), Петровић се бави бесконачним сумама S низа полинома истог степена. Уз претпоставку да производ коефицијената полинома уз x^{2k} и броја n^{2k} зависи једино од k, доказује да је сума S једнака вредности једног полинома $f(x)$ за $x = \pi^2$. У основи доказа лежи позната формула:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = A_{2n} B_{2n} \pi^{2k},$$

где је A_{2k} одређена рационална константа и B_{2k} је Бернулијев број.

Петровић је био веома плодан и разноврстан математичар. Објавио је пар стотина радова, већином у најпознатијим страним часописима. Изнео је нове и оригиналне идеје и учинио значајне продоре у светској науци. Ова чињеница мора се нарочито ценити имајући у виду околности и време у Србији када је Михаило Петровић стварао. Његови резултати из алгебре који су тесно везани за теорију функција, били су препознати, цитирани и даље развијани од стране водећих математичара: Ермита, Ландауа, Полиа, Фејера, Хардија, Монтела и других.

У немачком реферативном журналу из математике *Zentralblatt MATH*, који се сада уређује од стране *Европског математичког друштва* и *Хајделбершке академије наука*, и чија је база 2003. године обогаћена садржајем сличног журнала *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (JFM), који је егзистирао у периоду 1868–1942, налази се 228 Петровићевих публикација, укључујући 12 књига (претраживати као „ai:petrovitch.michel"). Његове теореме и радови из геометрије полинома забележени су у најпознатијој монографији из ове области: Morris Marden, *Geometry of Polynomials*, American Mathematical Society, 1949 (друго издање 1966. год.). Цитирана су четири Петровићева рада: [23, 25, 29] и [31]. Споменимо да је у овој монографији цитирано и неколико других наших математичара: Ј. Карамата, М. Томић, Б. Бајшански, Д. Марковић и Ш. Рађевић.

Стога се са разлогом може прихватити мишљење академика Томића, да је геометрија полинома, заједно са теоријом функција (области које се тешко могу раздвојити), можда најзначајнија Петровићева област и да је у њој постигао највеће достигнуће. Такође видимо да је Петровић донео ову област код нас и да је захваљујући његовом утицају више значајних српских математичара радило и ту имало препознатљиве и вредне прилоге.

3. Кратка историја развоја области

Геометрија полинома препозната је и под другим називима, као што су геометрија нула полинома комплексне променљиве, затим аналитичка теорија полинома, или аналитичка теорија једначина. Реч „аналитичка" овде се користи да би се нагласило да се једначине полиномног типа изучавају са неалгебарског становишта, односно методама теорије функција. Ипак, преовладао је једноставан назив геометрија полинома с обзиром да главно место у изучавању ових једначина има геометријска теорија функција комплексне променљиве. Проблеми ове теорије углавном се односе на разматрање распореда нула у комплексној равни полиномне функције $f(z)$ као функције неких, унапред изабраних параметара. Ови параметри најчешће су коефицијенти полинома $f(z)$, или нуле, или коефицијенти неког придруженог полинома добијеног алгебарском трансформацијом из $f(z)$, на пример применом оператора диференцирања. Ако се параметри варирају у некој области комплексне равни, централни је проблем одредити геометријско место тачака Γ нула полинома $f(z)$. Скуп G се може састојати из неколико дисјунктних региона G_1, G_2, ..., G_m, и тада се може поставити питање одређивање скупова G_i, као и броја нула у сваком региону G_i. Друго питање од интереса је, на пример, одређивање региона који садржи унапред задат број нула, или нула најмањег модула полинома $f(z)$. Може се десити да је одређивање региона Γ исувише компликовано и у том случају Γ се апроксимира неким једноставнијим скупом, на пример кругом или кружним прстеном С који садржи G. Тада тачно одређивање полупречника круга S даје горњу границу модула нула полинома $f(z)$, док се у случају прстена добија оцена горњих и доњих граница модула нула.

Методе истраживања укључују геометријске операције над комплексним бројевима, примену разних неједнакости и оцена, затим примену извесних принципа на којима су ове конструкције базиране. Међу овим најпознатији је такозвани *Принцип аргумента* и његове последице: *Rouché*-ова теорема, *Cauchy*-ева индексна теорема, теорема о непрекидности нула и *Hurwitz*-ова теорема. Дакле, не само по природи проблема, већ и по методама ова област највећим делом припада геометријској теорији функција.

Први проблеми везани за полиноме и њихове нуле јавили су се много раније него сам појам полинома. Наиме, у историји цивилизације врло рано се јавила потреба за решавањем линеарне и квадратне једначине. Све древне цивилизације (Вавилон, Грчка, Кина, Индија, Египат) су више или мање успешно решавале проблем решавања квадратне једначине. При томе су често решавани само неки облици ове једначине, а негативна и поготову комплексна решења су по правилу занемаривана. Једначине трећег и четвртог степена су успешно решене у 16. веку напорима италијанских математичара (*G. Cardano, L. Ferrari, N. Tartaglia*).

Као јасно формулисан математички објекат, полиноми се у савременом облику јављају први пут код Декарта (*R. Decartes*). Претходно се већ била појавила потребна нотација у радовима Симона Стевина (*S. Stevin*) и Франсоа Вијета (*F. Viète*). Декарт је у свом раду *La geometrie* из 1637. године увео неке елементе нотације који се користе до данашњих дана, као на пример коришћење латиничних слова са краја алфабета за обележавање променљиве, а са почетка за обележавање константи. У то време јављају се и прва тврђења о полиномима која нису везана за проблем одређивања његових нула. Тако Вијет открива правила, тј. везу између нула полинома и његових коефицијената (која су по њему и названа), док Декарт доказује да је сваки полином $p(x)$ дељив са $x - a$, ако је a једна његова нула. Декарт је такође у свом поменутом делу *La geometrie* доказао своје познато правило (тзв. *Декартово правило*) којим се за дати полином са реалним коефицијентима даје процена броја његових позитивних, односно негативних корена, и то полазећи од броја промена знакова суседних коефицијената.

Следећи важан моменат у развоју области, али и математике генерално, везан је за тзв. *Основну теорему алгебра* која тврди да сваки неконстантни полином са комплексним коефицијентима има бар један корен у скупу комплексних бројева. На овом проблему су радили највећи математичари 18. века али са половичним успехом. Први (некомплетан) покушај доказа дао је Даламбер (*J. d'Alembert*) 1746. а затим су следили нови покушаји да се докаже ово фундаментално тврђење, и то практично од стране свих великих математичара који су живели у то време. Тако Ојлер (*L. Euler*) (1749), Фонценек (*F. D. Foncenex*) (1759), Лагранж (*J. L. Lagrange*) (1772) и Лаплас (*P. S. Laplace*) (1795) решавају овај проблем условно. То значи да су они доказали егзистенцију комплексног корена, али под претпоставком да тај корен уопште постоји (при чему се априори ништа не зна о томе да ли је он комплексан или не). Другим речима, они су претпоставили егзистенцију онога што ће касније бити названо *поље разлагања полинома* или *коренско поље полинома.* У некомплетне доказе убраја се и Гаусов доказ из 1799. године, који је комплетиран тек 1920. године. Гаус (*K. F. Gauss*) је дао још три доказа: два 1816. и још један 1849. године. У овим радовима Гаус је дао и процене величине корена, а не само доказ њихове егзистенције. Тако је у доказу из 1799. показао да су сви корени полинома $p(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n$, са реалним коефицијентима, по модулу не већи од R, где је $R = \max(1, \sqrt{2}S)$ и S је збир позитивних коефицијената A_i. У доказу из 1849. године показао је да се за R може узети $R = \max\left(\sqrt{2}n\lfloor A_k\rfloor\right)^{1/k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Најзад, у раду из 1849. показао је да се за R може узети позитивни корен једначине

$$z^n - \sqrt{2}\left(\lfloor A_1\rfloor z^{n-1} + \cdots + \lfloor A_n\rfloor\right) = 0,$$

при чему коефицијенти могу бити и комплексни.

4. Допринос Петровићевих наследника и даљи трендови

Михаило Петровић се појавио на међународној сцени у тренутку када је геометрија полинома почела да се постепено уобличава као релативно самостална математичка дисциплина. Његово интересовање за полиноме и њихове нуле у ствари потиче од најранијих дана. Као што је описано у уводу, његово интересовање за ову област је даље продубљено боравком у Француској, што је логично, посебно када се узме у обзир традиција која је постојала у једној тако великој математичкој школи каква је француска. Из историјата ове области се види да се та традиција протезала уназад све до Декарта. Због тога је било више него природно да се захваљујући Михаилу Петровићу ова област развије и у српској математичкој школи и то од самих њених почетака, при чему се истраживачка нит протеже све до данашњих дана.

Јован Карамата (1903–1967) био је докторанд Михаила Петровића код кога је докторирао 1926. године са тезом под називом „*О једној врсти граница сличних одређеним интегралима*". Бавио се углавном разним аспектима анализе који су у то време били актуелни. У свету је познат по својој теорији споро променљивих функција. У својој чувеној монографији [10] *Geometry of Polynomials*, Морис Марден у списку референци наводи два његова рада.

Миодраг Томић (1912–2001) био је докторанд Јована Карамате код кога је докторирао 1950. године са тезом „*О тригонометријским збировима*" [43]. Бавио се анализом, тригонометријским полиномима и редовима, као и диференцијалним једначинама.

Познату теорему Енестрема (*G. Eneström*) и Какеиа (*M. S. Kakeya*) по којој полином $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, са реалним коефицијентима за које важи $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 > 0$, има све нуле у јединичном диску $|z| \leq 1$, уопштио је М. Томић [42] геометријском интерпретацијом суме $\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ik\theta}$ $(a_k \geq a_{k+1})$ и исти метод применио на одређивање граница тригонометријских полинома и редова.

За реални полином $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ за чије коефицијенте важи

$$a_m - a_{m+1} \geq a_{m-1} - a_{m+1} \geq \cdots \geq a_1 - a_{2m} \geq a_0 - a_{2m+1} \geq 0,$$

где су $m = [n/2]$ и $a_{2m+1} = 0$ ако је m парно, Томић је доказао да се не анулира на јединичном кругу. Ако је још испуњен услов $a_m \geq a_{m-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0$, тада овај полином има тачно m нула у јединичном диску.

Интересантно је да су 1967. године Јојал (*A. Joyal*), Лабел (*Q. Labelle*) и Рахман (*Q. I. Rahman*) одбацили претпоставку о позитивности низа a_k и задржали само услов монотоности у оригиналној теореми Енестрема и Какеиа, и тада доказали да све нуле полинома леже у диску $|z| \leq (a_n - a_0 + |a_0|)/|a_n|$. Након тога појављује се низ радова на ову тему и то траје све до данашњих дана. Недавно су Гарднер (*R. B. Gardner*) и Говил (*N. K. Govil*) публиковали историјски преглед [6] о развоју теореме Енестрема и Какеиа.

Користећи свој геометријски метод Томић [42] је доказао позитивност синусне суме

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta, \qquad 0 < \theta < 2\pi,$$

при чему коефицијенти a_k чине нерастући низ $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$. Како сам констатује у својој тези [43], као повод за испитивање позитивности тригонометријских редова, поред осталог, послужила је и Фејерова хипотеза из 2010. године да је, за свако $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin k\theta > 0, \qquad 0 < \theta < \pi,$$

коју су касније доказали Џексон (*D. Jackson*) (1911), Гронвал (*Th. Gronwall*) (1912), Ландау (*E. Landau*) (1933), као и сам Фејер (1928). Користећи исти геометријски метод, Карамата и Томић [8] су доказали (видети такође Томићеву докторску тезу [43]) да за општију синусну суму

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin(\alpha k + \beta)\theta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

под условима $a_{k-1} \geq a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, важе следеће неједнакости за $0 < \theta < \pi$

$$-a_0 \sin^2\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\theta}{2} \leq \sin\frac{\alpha\theta}{2} S_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) \leq a_0 \cos^2\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\theta}{2}.$$

Томић [43] је, такође, својом геометријском методом доказао један Фејеров резултат из 1925. године о позитивности косинусне суме

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta, \qquad 0 < \theta < 2\pi,$$

под условом да је низ a_k двоструко монотон, тј. да важе неједнакости $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$ и $\Delta^2 a_k = a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Штавише, Томић је добио и горњу границу,

$$C_n(\theta) \leq \frac{a_0 - a_1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}, \qquad 0 < \theta < 2\pi,$$

као и низ других неједнакости, претпостављајући монотоност вишег реда. Посебно је интересантна сума $C_n(\theta)$, у случају специјалног низа $a_0 = 0$ и $a_k = 1/k$ $(k \geq 1)$, за који је Јунг (*W. H. Young*) 1913. године доказао неједнакост $C_n(\theta) > -1$ за $0 \leq \theta \leq \pi$. Томић [46] је побољшао овај резултат доказујући егзистенцију позитивне константе K, независне од n и θ, тако да важи $C_n(\theta) > -1+K$ (на пример, таква једна константа је $K = 1/20$, тј. $C_n(\theta) > -19/20$. Браун (*G. Brown*) и Коумандос (*S. Koumandos*) су 1997. године одредили најбољу могућу границу за $n \geq 2$, тј. $C_n(\theta) > -5/6$, а недавно су Алцер (*H. Alzer*) и Квонг (*M. K. Kwong*) [1] проширили овај резултат доказујући да свако $n \geq m-1$ $(m \geq 3)$ важи

$$C_n(\theta) \geq C_m(\pi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k},$$

као и неједнакости Турановог типа

$$-\frac{5}{12} \leq C_{n-1}(\theta) C_{n+1}(\theta) - C_n(\theta)^2 \leq \frac{7}{12}, \qquad n \geq 2.$$

Слично Јунговом тригонометријском полиному, Рогозински (*W. W. Rogosinski*) и Сеге (*G. Szegő*) су разматрали специјални косинусни полином

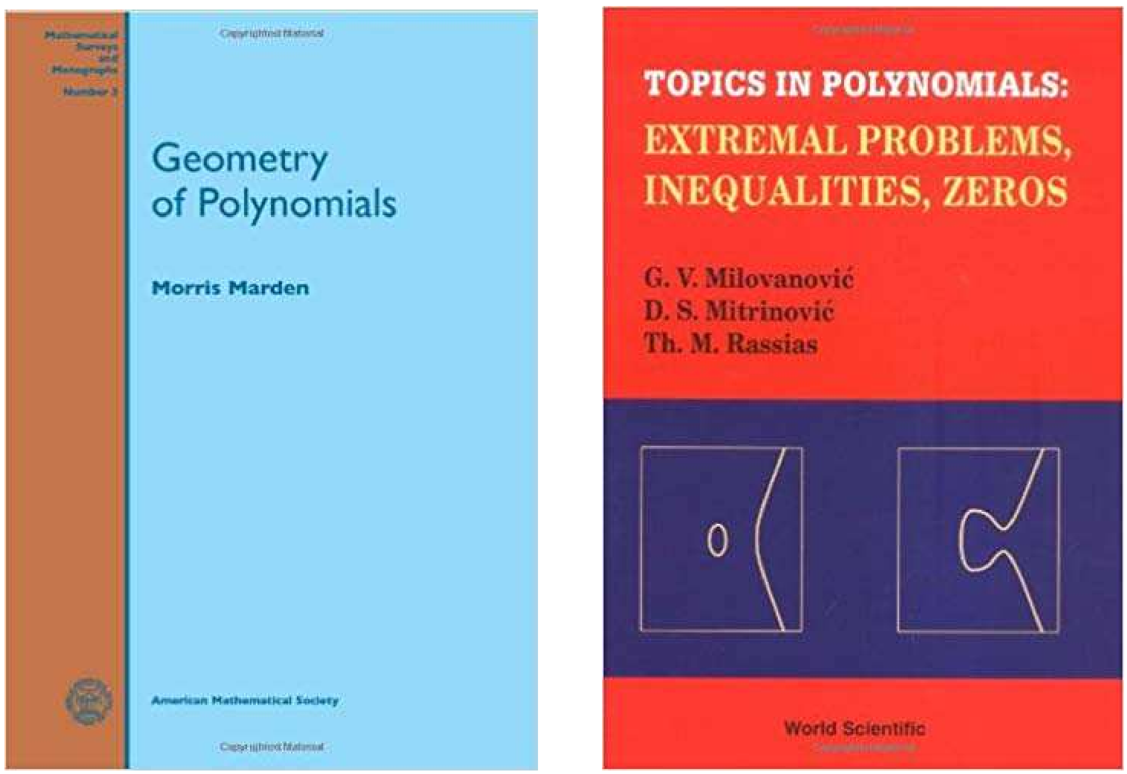
$$C_n^{(1)}(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{3} + \cdots + \frac{\cos n\theta}{n+1},$$

за који су доказали ненегативност за свако реално θ и свако $n \in \mathbb{N}$. Томић [46] је и за овај полином нашао побољшање за свако реално θ и свако $n \geq 2$,

$$C_n^{(1)}(\theta) > K > \frac{1}{168}.$$

На основу Томићеве идеје, константа K се у овој неједнакости може заменити са $1/73$, а за свако $n \geq 4$ може се доказати да је $K > 1/67$, како је наведено у монографији [19] Миловановића, Митриновића и Расиаса из 1994. године под насловом *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, у издању World Scientific.

Драгослав С. Митриновић (1908–1995) био је докторанд Михаила Петровића са тезом „*Истраживања једне важне диференцијалне једначине првог реда*" (1933), а бавио се диференцијалним и функционалним једначинама, неједнакостима, теоријом бројева, специјалним функцијама и комплексном анализом. Његов докторанд је Градимир В. Миловановић са тезом „*О неким функционалним неједнакостима*" (1976). Бави се нумеричком анализом и теоријом апроксимација, а посебно ортогоналним системима, интерполационим и квадратурним процесима, као и екстремалним проблемима, неједнакостима и нулама полинома.



Слика 1. Монографије о полиномима [10] и [19]

Драгољуб Марковић (1903–1965) био је докторанд Михаила Петровића, са тезом под називом „*О границама корена алгебарских једначина*" (1938). Као што се види, његов докторат је баш из области геометрије полинома, а ова област је и остала његово главно поље рада. У својој монографији, Марден у списку референци наводи чак седам Марковићевих радова. У самом тексту експлицитно су дата два Марковићева резултата која ћемо овде навести. У првом раду [11] је дато доње ограничење за модуле нула полинома $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Наиме, нека је дато $t > 0$ и нека је $M = \max\{|a_k|t^k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Тада све нуле полинома $p(z)$ леже у области $|z| \geq |a_0|t/(|a_0| + M)$. У другом раду [12] Марковић је одредио диск $|z| \leq Mr$ у коме се налазе све нуле тзв. композитног полинома $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k z^k$. Овде, r је позитивни корен једначине

$$|a_n|z^n = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|z^k,$$

а $M = \max |b_k/b_{k+1}|^{\frac{1}{n-k}}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Јован J. Петрић (1930–1997) био је докторанд Марковића, са тезом „*Одређивање нула алгебарских и тригонометријских полинома помоћу репетитивног диференцијалног анализатора и примена на испитивање динамичке стабилности*" (1960). Интересантно је да је трећепотписани аутор овог чланка дипломирао код Петрића са темом „*Метода за симултано налажење нула алгебарских једначина и њена примена на испитивање стабилности система аутоматске регулације и решавање неких диференцијалних, диференцијских и трансцендентних једначина*" (1971), што је на неки начин определило његову усмереност ка полиномима и нумеричкој анализи. Иначе, један итеративни метод за нумеричку факторизацију полинома и симултано налажење његових нула објавио је Славиша Прешић (1933–2008) у радовима [37] и [38]. Прешић је био докторанд Тадије Пејовића, са тезом под називом „*Прилог теорији алгебарских структура*" (1963). Поред алгебре бавио се и логиком, теоријским програмирањем, функционалним једначинама, нумеричком анализом, и геометријом полинома.

Из последње наведене области Прешић је објавио неколико радова од којих се посебно издваја рад [35] из 1970. године, у коме он на елегантан начин доказује резултат из тезе грчког математичара Зервоса (*S. P. Zervos*) [48], који наводимо у даљем тексту. Нека је дат полином $p(x) = x^n - (a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$, при чему су сви a_k ненегативни, а бар један је позитиван. Нека су $I_1, I_2, \ldots, I_n$ коначни скупови ненегативних бројева $\theta_{i,j} \in I_i$ и нека је $\sum_j \theta_{i,j} = i - t$, где је t фиксни број, $0 < t \leq 1$. Ако дефинишемо функцију

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\prod_j \alpha_i^{\theta_{i,j}}} \right)^{1/t},$$

тада, за произвољне позитивне $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, важи да су све позитивне нуле овог полинома по модулу не веће од ξ, где је $\xi = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}$.

Варијацијом параметара $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, Зервос је успео да као специјалне случајеве своје теореме добије читав низ познатих резултата чији су аутори Коши (*A.-L. Cauchy*), Ландау, Монтел, Јенсен, Бирхоф (*G. D. Birkhoff*), Марковић, Кармишел (*R. D. Carmichael*), Волш (*J. L. Walsh*), Којима (*M. Kojiima*), итд. Прешић је, међутим, у раду [35] приметио да је услов $p(\alpha) = 0$ еквивалентан са $F(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) = \alpha$. Стога, за позитивне $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, и позитивни корен α полинома $p(x)$, важи следеће: ако је $\alpha \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, тада теорема Зервоса следи непосредно. У супротном, из чињенице да је $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ опадајућа функција по свим аргументима (ако су позитивни), следује да је $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geq F(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) = \alpha$, па према томе теорема Зервоса опет важи. Мала екстензија овог резултата је дата у раду [41]. У раду [36] Прешић даје метод за налажење минималног растојања између нула полинома, под претпоставком да су све нуле различите.

Претходно поменути радови [37] и [38] третирају проблем нумеричке факторизације полинома. Нажалост, прва скраћена верзија [37] се појавила на само две странице на француском језику у општем часопису Француске академије наука, док је комплетна верзија рада [38] штампана на српском језику две године касније (1968), тако да је рад остао незапажен. Такође, постојао је још један хендикеп у презентацији резултата, што је пренаглашен део о $1-1-\cdots-1$ факторизацији, а што ће се касније показати да је то већ познат Вајештрасов (*K. Weierstrass*) резултат из 1903. Иначе, Прешићеви радови садрже доказ опште факторизације. У књизи [18] аутор се осврнуо на варијанту метода, познатог у литератури као Грауов метод (објављен у престижном специјализованом часопису *SIAM J. Numer. Anal.*), уз коментар да је Прешићев приступ факторизацији много елегантнији од Грауовог (*A. A. Grau*), а уз то се појавио пет година раније.

Шефкија Раљевић, са тезом под називом „*О једној класи полинома и распореду њихових нула*" докторирао је под руководством Јована Карамате 1955. године. Занимљиво је поменути да је у свом раду [39] показао да је једна теорема Мардена некоректна у свом исказу.

Богдан Бајшански (1930–2010) био је докторанд Николе Салтикова и Јована Карамате, са тезом под називом „*Општи поступци збирљивости Euler-Borel-овог типа и њихова примена на аналитичко продужење*" (1956). У свом раду [3] дао је једно занимљиво уопштење чувене Гаус-Лукашове теореме за рационалне функције.

Радош Бакић је докторанд Жарка Мијајловића, са тезом „*Семидиректна факторизација коначних група*" (2002). Поред радова из алгебре, објављује радове из комплексних неједнакости и геометрије полинома. Ако за полином $p(z)$ степена n, претпоставимо да круг K (отворени или затворени) садржи његових $n-1$ нула (рачунајући и вишеструкост), при чему се његов центар налази у њиховој аритметичкој средини, Бакић [4] је доказао да се у кругу K мора налазити бар $[(n-1)/2]$ критичних тачака датог полинома.

Жарко Мијајловић је докторанд Славише Прешића, са тезом под називом „*Прилог теорији модела и Булових алгебри*" (1977). Бави се математичком логиком, алгебром, теоријом бројева, комбинаториком, теоријом релативности и гравитационом теоријом, рачунарским наукама, као и проблемима дигитализације научне и културне баштине.

На крају дајемо неколико детаља о претходно поменутој монографији [19], која је у свету позната као *Библија о полиномима*. Монографија садржи најважније резултате из анализе полинома и њихових извода. Поред фундаменталних резултата, књига обезбеђује преглед резултата у области екстремалних проблема за полиноме, као и неједнакости за тригонометријске суме и алгебарске полиноме. Посебна пажња је посвећена хипотези Сендова, као и границама за нуле полинома и њихов број у датој области (видети, такође, радове [21] и [22]). С обзиром на значај, неједнакости повезане са тригонометријским сумама и ортогоналним полиномима се третирају у посебној глави. Напоменимо да је једна од таквих неједнакости,

$$\sum_{k=0}^{n} P_k^{(\alpha,0)}(x) > 0, \qquad -1 < x < 1,$$

где је $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ Јакобијев полином, ортогоналан на интервалу $(-1,1)$ у односу на тежинску функцију $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, била кључна у доказу познате Бибербахове хипотезе (1916), коју је доказао Луј де Бранж (*L. de Branges*) 1985. године [5]. Иначе, ова неједнакост је партикуларни случај једне опште неједнакости коју су доказали Аски (*R. Askey*) и Гаспер (*G. Gasper*) 1976. године [2] (за детаље видети одељак 4.2.7 у [19] или [20]).

Захвалница. *Рад Г. В. Миловановића је подржан пројектом САНУ* (Ф-96).

Библиографија

[1] H. Alzer, M. K. Kwong. *On Young's inequality.* J. Math. Anal. Appl., 2019, 469, 480–492.

[2] R. Askey, G. Gasper. *Positive Jacobi polynomial sums, II.* Amer. J. Math., 1976, 98(3), 709–737.

[3] B. Bajšanski. *O nulama izvoda racionalne funkcije.* Zbornik radova Mat. inst. SAN, 1955, 43(4), 131–134.

[4] R. Bakić. *On the number of critical points of a polynomial in a disc.* C. R. Acad. Bulgare Sci., 2016, 69, 1249–1250.

[5] L. de Branges. *A proof of the Bieberbach conjecture.* Acta Math., 1985, 154(1–2), 137–152.

[6] R. B. Gardner, N. K. Govil. *Eneström-Kakeya theorem and some of its generalizations.* In: Current topics in pure and computational complex analysis, Trends Math., pp. 171–199, Birkhäuser/Springer, New Delhi, 2014.

[7] J. Karamata. *Sur la limite inférieure des modules des zéros des fonctions analytiques.* Publ. Acad. Roy. Serbe., 1927, 127, 103–117.

[8] J. Karamata, M. Tomić. *Considérations géométriques relatives aux polynômes et séries trigonométriques.* Acad. Serbe. Sci. Publ. Inst. Math., 1948, 2, 157–175.

[9] J. Karamata, M. Tomić. *Sur une inégalité de Kusmin-Landau relative aux sommes trigonométriques et son application à la somme de Gauss.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1950, 207–218.

[10] M. Marden. *Geometry of Polynomials.* American Mathematical Society, Providence, R. I., 1966.

[11] D. Marković. *Sur la limmite supériuere des modules des zéros des polynômes.* Publ. Math. Univ. Belgrade 1938, (1939), 6-7, 36–47.

[12] D. Marković. *Sur la quelques limites supériueres des modules des zéros d'un polynome.* Mathematica (Cluj), 1939, 15, 8–11.

[13] D. Marković. *Sur la limite supérieure des modules des racines d'une équation algébrique.* Acad. Serbe. Bull. Acad. Sci. Mat. Nat. A. 1939, (1939), no. 6, 91–97.

[14] D. Marković. *Sur le théorème de Grace.* In: Premier Congrès des Mathématiciens et Physiciens de la R.P.F.Y., 1949. Vol. II, Communications et Exposés Scientifiques, pp. 67–71, Naučna knjiga, Beograd, 1951.

[15] D. Marković. *Extension d'un théorème de Hurwitz.* Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 1949, 1(3-4), 113–115.

[16] D. Marković. *Domaines contenant le zero du plus petit module des polynômes.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1950, 3, 197–200.

[17] D. Marković. *On the composite polynomials.* Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, 1951, 3(3-4), 11–14.

[18] G. V. Milovanović. *Numerička analiza i teorija aproksimacija – Uvod u numeričke procese i rešavanje jednačina.* Zavod za udžbenike, Beograd, 2014.

[19] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros.* World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1994.

[20] G. V. Milovanović, Th. M. Rassias. *Inequalities connected with trigonometric sums.* In: Constantin Carathéodory: an international tribute, Vol. I, II, pp. 875–941, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1991.

[21] G. V. Milovanović, Th. M. Rassias. *Inequalities for polynomial zeros.* In: Survey on classical inequalities, pp. 165–202, Math. Appl., 517, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[22] G. V. Milovanović, Th. M. Rassias. *Distribution of zeros and inequalities for zeros of algebraic polynomials.* In: Functional equations and inequalities, pp. 171–204, Math. Appl., 518, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[23] M. Petrović. *Théorème sur le nombre de racines d'une équation algébrique comprises à l'intérieur d'une circonféerence donnee.* Comptes rendus, Paris. 1899, t. CXXIX, 16, 583–586.

[24] M. Petrović. *Transcendentne transformacije algebarskih jednačina.* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 143, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 29, Zagreb, 1900, str. 107–141.

[25] M. Petrović. *Remarque sur les zéros des séeries de Taylor.* Bulletin de la Sociétè mathématique de France, Paris, 1901, t. XXIX, 303–312.

[26] M. Petrović. *O algebarskim jednačinama i imaginarnim korenima.* Srpska kraljevska akademija, Glas, knj. LXXI, Prvi razred, knj. 28, Beograd, 1906, str. 12–29.

[27] M. Petrović. *O rasporedu korena jedne opšte klase algebarskih jednačina.* Srpska kraljevska akademija, Glas, knj. LXXI, Prvi razred, knj. 28, Beograd, 1906, str. 99–121.

[28] M. Petrović. *Jedna simetrična funkcija korena i njene osobine.* Srpska kraljevska akademija, Glas, knj. LXXV, Prvi razred, knj. 30, Beograd, 1908, str. 75–100.

[29] M. Petrović. *Sur une suite des fonctions rationnelles ratachées aux équations algébriques.* Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1908, t. XXXVI, 141–150.

[30] M. Petrović. *Teorema o maksimalnom modulu determinante i nekolike njene analitičke primene.* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 200, Razred matematičko--prirodoslovni, knj. 55, Zagreb, 1913, str. 1–18.

[31] M. Petrović. *Equations algébriques et transcendantes dépourvues de racines réelles.* Bulletin de la Société mathématique de France, Paris, 1913, t. XLI, 3-4, 194–206.

[32] M. Petrović. *Teorema o algebarskim jednačinama parnog stepena.* Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Rad, knj. 202, Razred matematičko-prirodoslovni, knj. 56, Zagreb, 1914, str. 124–131.

[33] M. Petrović. *Théorème général sur les équations algébriques.* Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1919, 4e serie, t. XIX, 9–12, 281–284. Revue sémestrielle, 1927, t. XXXIII (A 3 e).

[34] M. Petrović. *Sur les series de polynomes de meme degre.* Publications mathématiques de l'Universite de Belgrade, Belgrade, 1933, T. II, 82–84.

[35] S. B. Prešić. *Sur un théorème de S. Zervos.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.), 1970, 10 (24), 51–52.

[36] S. B. Prešić. *On the minimal distance of the zeros of a polynomial.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.), 1985, 38 (52), 35–38.

[37] S. B. Prešić. *Un procédé itératif pour la factorisation des polynòmes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 1966, 262, A862–A863.

[38] S. B. Prešić. *A certain iterative method for the factorization of a polynomial.* Mat. Vesnik, 1968, 5 (20), 205–216.

[39] Š. Raljević. *Sur une droite et sur un segment caractéristique dans les polygones des zéros des polynômes.* Zbornik radova Mat. inst. SAN, 1953, 35(3), 89–94.

[40] Š. Raljević. *Remarque sur un théorème de M. Marden.* Zbornik radova Mat. inst. SAN, 1957, 55(6), 69–72.

[41] M. R. Tasković. *Remark on some results of S. Prešić and S. Zervos.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.), 1971, 11 (25), 121–122.

[42] M. Tomić. *Généralisation et démonstration géométrique de certains théorèmes de Fejér et Kakeya.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1948, 2, 146–156.

[43] M. Tomić. *O trigonometrijskim zbirovima.* Zbornik radova Mat. inst. SAN, 1952, 18(2), 13–52.

[44] M. Tomić. *Sur les zéros de séries trigonométriques à coefficients monotones.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1954, 6, 79–90.

[45] M. Tomić. *Einige Sätze über die Positivität der trigonometrischen Polynome.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1952, 4, 145–156.

[46] M. Tomić. *Sur les polynômes de Fejér.* Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1958, 12, 39–52.

[47] D. V. Trifunović. *Letopis života i rada Mihaila Petrovića.* Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd, 1969.

[48] S. P. Zervos. *Aspects modernes de la localisation des zéros des polynomes d'une variable.* Ann. Sci. École Norm. Sup., 1960, (3) 77, 303–410.

Radoš Bakić
Žarko Mijajlović
Gradimir Milovanović

MIHAILO PETROVIĆ AND GEOMETRY OF POLYNOMIALS

S u m m a r y

Works in the field of geometry of polynomials occupy a prominent place in the scientific opus of Mihailo Petrović. He demonstrated interest in this field since his earliest days. His first scientific work, written at the age of 19, relates to one method for determination the roots of a polynomial. Petrović appeared on the international arena at a time when this field began to form as a relatively independent mathematical discipline. During his stay in France, his interest in this field deepened, among other things, and because the French mathematical school has traditionally dealt with these problems. The geometry of polynomials is one of those areas that Petrović founded and started in Serbian mathematics. The paper presents a short history of this area as well as the contribution of Mihailo Petrović and his students until today.

АЛГЕБАРСКО НАСЛЕЂЕ МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА АЛАСА И СРПСКА АЛГЕБАРСКА ШКОЛА

МИРОСЛАВ ЋИРИЋ*

А п с т р а к т. – У овом раду дајемо кратак историјски преглед развоја алгебре у Србији, са посебним освртом на наслеђе Михаила Петровића Аласа, родоначелника српске математике, и његову улогу у стварању Српске алгебарске школе.

Кључне речи: историја математике, историја алгебре, алгебра у Србији, Михаило Петровић Алас

Математика је у 19. веку прошла кроз веома крупне промене. Појава нееуклидских геометрија довела је до ревизије традиционалног концепта математичке истине, а нов начин гледања на алгебру, који су иницирали чланови Британске алгебарске школе, довео је и до новог начина гледања на математичке теорије и математику у целини. Те промене су увеле математику у нову етапу свог развоја, коју А. Н. Колмогоров [3] назива период савремене математике. Међутим, развој математике у Србији имао је сасвим другачији ток. Српска држава се тек обнављала, друштвене институције су биле на самом почетку изградње, а математика, као и наука уопште, била је у повоју. Ипак, како истиче S. Lawrence у [4], за релативно кратко време пређен је пут од стања када је у Србији било мало или нимало математичке културе, на почетку 19. века, до стања када су српски математичари постизали научне резултате светског нивоа и публиковали их у водећим иностраним часописима, на крају 19. и почетку 20. века. Огромну захвалност за то српска математика дугује читавој плејади српских математичара тог доба, а понајвише најпознатијем од њих, Михаилу Петровићу Аласу[2] (1868–1943).

* Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, и-мејл: miroslav.ciric@pmf.edu.rs

[2] Више о Михаилу Петровићу Аласу може се наћи у чланку J. Кечкића [3] и другим чланцима у овој књизи.

Формирање државне администрације и друштвених институција у Србији у првој половини 19. века створило је потребу за високо образованим кадровима, што је довело до оснивања Лицеја, прве више школе у Србији. Лицеј је основан 1838. године у Крагујевцу, тадашњој престоници Србије, а када је 1841. године за престоницу проглашен Београд, тамо је премештен и Лицеј. Математика се на Лицеју учила у оквиру предмета „чиста математика”, на првој години, и практична геометрија (геодезија), на другој години. Први професор математике на Лицеју, а такође и први ректор Лицеја, био је Атанасије Николић (1803–1882), који је студирао у Бечу и Будимпешти. Његов главни задатак био је да напише прве високошколске уџбенике на српском језику, и већ 1838. године штампан је његов уџбеник „Алгебра – устројена за употребљењие слишатеља философије у Лицеуму Књажевства Сербије”, док је 1841. године штампан и уџбеник из елементарне геометрије [8]. Када се говори о првим високошколским уџбеницима из математике, посебно о уџбеницима чији садржај задире у алгебру, треба поменути и књиге Емилијана Јосимовића (1823–1897), који је предавао математику на Лицеју и Артиљеријској школи, а касније и на Великој школи. Јосимовић је аутор тротомног дела „Начела више математике”, првог уџбеника више математике на српском језику. Први том је из штампе изашао 1858, други 1860, а трећи 1872. године. У другој књизи првог дела обрађују се теме из алгебре – полиноми, алгебарске једначине и њихово решавање [6].

Један од кључних момената у развоју високог школства у Србији било је претварање Лицеја у Велику школу, 1863. године. Велика школа састојала се од Филозофског, Техничког и Правног факултета, а све до 1873. године виша математика се изучавала само на Техничком факултету. Те године је у оквиру Филозофског факултета формиран Природно-математички одсек, са Катедром за математику, где су по први пут кренуле студије математике у Србији. Од настанка Велике школе до 1887. године, једини професор математике и на Филозофском и на Техничком факултету био је Димитрије Нешић (1836–1904).[3] Он је студирао математику у Бечу и Карлсруеу, и његовим доласком на Велику школу дошло је до квалитативног скока у настави математике. Извршио је модернизацију високошколске наставе математике и написао веома значајне уџбенике „Тригонометрија” (1875), „Наука о комбинацијама” (1883), „Алгебарска анализа” (1883) и „Теорија алгебарских једначина” (1883). Осим тога, био је један од првих српских математичара који су се бавили научним радом. И поред силних обавеза у настави, писању књига и разних других академских и друштвених активности, смогао је времена и снаге да напише седам оригиналних научних

[3] О Димитрију Нешићу су писали Б. Јовановић и Ј. Петковић у [1], па овде наводимо само неке основне детаље.

радова. Два од тих седам радова су из комбинаторике, математичке дисциплине коју традиционално убрајају у област алгебре.

Предмет математика је 1885. године подељен на вишу и нижу математику. Вишу математику је задржао Димитрије Нешић, док је за нижу математику, између више кандидата, 1887. године изабран Богдан Гавриловић[4] (1864–1947), који је те 1887. године стекао докторат у области математичких наука на Универзитету у Будимпешти (данас Eötvös Loránd University).[5] Тема његове докторске дисертације била је у области теорије функција комплексне променљиве, а касније је, осим у тој области, истраживао и у области алгебре и аналитичке геометрије. У алгебри, Богдана Гавриловића су посебно занимале комбинаторика, теорија бројева и линеарна алгебра. Објавио је двадесетак научних радова и две књиге: „Аналитичка геометрија" (1896) и „Теорија детерминаната" (1899). Међутим, математика није била једина област интересовања Богдана Гавриловића. Писао је и расправе које су се тицале филозофије, историје, језика, образовања, културе и политике. Обављао је и важне административне дужности. Између осталог, био је декан Техничког факултета (1909–1910), ректор Београдског универзитета (1910–1913, 1921–1924) и председник Академије наука (1931–1937).

Када 1894. године Димитрије Нешић одлази у пензију, на његово место, такође између више кандидата, изабран је Михаило Петровић, који је те исте године стекао докторат из математичких наука на Универзитету Париз IV – Сорбона, под менторством чувених математичара Шарла Ермита (Charles Hermite, 1822–1901) и Шарла Емила Пикара (Charles Émile Picard, 1856–1941), и са Полом Пенлевеом (Paul Painlevé, 1863–1933), као чланом комисије. На студијама у Паризу учио је и од Анрија Поенкареа (Jules Henri Poincaré, 1854–1912), једног од највећих математичара тог доба. Исте 1894. године се издваја настава математике за студенте Техничког факултета, коју преузима Богдан Гавриловић, док Михаило Петровић остаје на Филозофском факултету. Од тада, па све до Другог светског рата, тандем Петровић–Гавриловић игра главну улогу у развоју математике у Србији. Године 1894. оснива се и библиотека Математичког семинара, о којој све до Првог светског рата брину Гавриловић и Петровић, а 1900. године оснива се Семинар за математику, механику и теоријску физику, где њих двојица такође играју главну улогу. Велика школа се 1905. године трансформише у Универзитет, и њих двојица добијају водећу улогу у организацији научног рада и наставе на новооснованом универзитету.

[4] Богдану Гавриловићу пише Ж. Мијајловић у [6].

[5] Илустрације ради, споменимо да је у 19. веку било само шест математичара српског порекла који су стекли звање доктора математичких наука: Димитрије Данић (Јена, 1885), Богдан Гавриловић (Будимпешта, 1887), Владимир Варићак (Загреб, 1891), Ђорђе Петковић (Беч, 1893), Михаило Петровић (Париз, 1894) и Петар Вукићевић (Берлин, 1894).

На њихов предлог, Београдски универзитет из Беча позива Милутина Миланковића (1879–1958), још једно име које ће прославити српску науку, и он 1909. године постаје професор примењене математике.

По општем мишљењу, Михаило Петровић и Богдан Гавриловић су поставили темељ Српске математичке школе. Међутим, са аспекта научног рада и развоја науке мора се посебно нагласити улога Михаила Петровића. Он је био први српски математичар који је постизао резултате светског нивоа и објављивао у угледним иностраним часописима (углавном на француском језику). До 1905. године већ је имао 60 објављених научних радова[6] и стекао је завидан углед у свету. Младим сарадницима је давао подстрека за научни рад, али је поставио строге научне критеријуме и од ученика захтевао да их испуне. То је довело до знатног подизања нивоа научног рада српских математичара и ствара се нова генерација српских математичара који и сами постижу врхунске научне резултате. Према Јовану Кечкићу, у периоду од 1912. до 1938. године Михаило Петровић је био ментор 11 докторских дисертација. Штавише, готово сви математички докторати у Србији пре Другог светског рата били су рађени под његовим менторством. Јован Кечкић у [3] пише: „Петровићев утицај на развој математике у Србији био је огроман а његов успех у стварању научних и наставних кадрова изванредан. Када је 1894. године постао професор Велике школе, он је на Филозофском факултету био сам. Када је 1938. године отишао у пензију иза себе је оставио „кошницу научног рада” како је написано у „Политици” од 8. маја 1938. у репортажи посвећеној Михаилу Петровићу.”

Михаило Петровић је преминуо 1943. године, али они његови ученици који су остали у земљи након рата настављају рад на развоју математике. Већ 1946. године је основан Математички институт САНУ, који постаје епицентар математичких истраживања у Србији, а 1948. године је формирано Друштво математичара и физичара Србије, чији је оснивач и први председник био Тадија Пејовић (1892–1982), један од доктораната Михаила Петровића. Педесетих и шездесетих година оснивају се бројни факултети у Новом Саду, Нишу, Крагујевцу и Приштини, најпре као одељења Универзитета у Београду, а потом из њих израстају универзитети у Новом Саду (1960), Нишу (1965), Приштини (1969) и Крагујевцу (1976). Студије математике покрећу се у Новом Саду (1954), Приштини (1960), Нишу (1971) и Крагујевцу (1972). Значајну помоћ у креирању студијских програма, извођењу наставе и обезбеђењу наставног и научног подмлатка пружају професори са Универзитета у Београду. Држава подстиче повећање броја факултетски образованих људи, услед чега долази до раста броја студената и јавља се потреба за новим наставницима и асистентима. Наставни планови и програми се иновирају, уводе се нови предмети и

[6] У бази Zentralblatt MATH индексиране су 232 публикације Михаила Петровића (укључујући и 12 књига).

садржаји из модерних области математике, мада на рачун смањења садржаја из сродних наука и удаљавања од механике, теоријске физике и астрономије. Све то доводи и до ширења области научног интересовања српских математичара, и почев од педесетих година двадесетог века наука у Србији почиње да се обогаћује новим, модерним математичким дисциплинама.

До друге половине 20. века малобројни српски математичари су се бавили истраживањима у области алгебре. Већ је речено да су научне радове у областима које се традиционално убрајају у алгебру имали само Димитрије Нешић и Богдан Гавриловић. Михаило Петровић је један број својих радова посветио алгебарским једначинама, али је у њима користио искључиво идеје и методе математичке анализе. Исто важи и за докторску дисертацију Драгољуба Марковића (1903–1965) „Границе корена алгебарских једначина”, која је урађена под менторством Михаила Петровића и одбрањена 1938. године у Београду. Прва докторска дисертација српског математичара, за коју се без резерве може рећи да је из области алгебре, је дисертација Мирка Стојаковића (1915–1985). Назив дисертације је био „Прилог теорији матрица”, урађена је под менторством Ђуре Курепе и одбрањена 1953. године у Загребу. Тих година у неколико математичких центара тадашње Југославије продиру и идеје савремене апстрактне алгебре. Тако 1956. године Владимир Девиде (1925–2010) у Загребу брани докторску дисертацију под називом „Једна класа групоида”, а Горги Чупона (1930–2009) 1959. године у Скопљу брани докторску дисертацију која се бави алгебарским структурама, урађену под менторством Владимира Девидеа. Ширење идеја савремене алгебре у Београду је започео напред поменути Драгољуб Марковић [7]. На студијама математике у Београду, све до педесетих година 20. века, алгебра се није слушала као посебан предмет. Теме из класичне алгебре биле су укључене у садржаје општих курсева математике, а касније у садржај предмета Анализа. У наставном плану из 1952. године, на иницијативу Драгољуба Марковића, као посебни предмети се уводе Алгебра, са темама из класичне алгебре, и Алгебра II, са темама из савремене алгебре (групе, поља и теорија Галоа). Предмет Алгебра II је предавао Драгољуб Марковић, а један од студената које су та његова предавања привукла ка савременој алгебри био је Славиша Прешић (1933–2008). Он је 1963. године у Београду одбранио прву докторску дисертацију у Србији са темом из модерне алгебре, под називом „Прилог теорији алгебарских структура”. Ментор ове дисертације био је Тадија Пејовић, а члан комисије за одбрану био је и Драгољуб Марковић. Нешто касније, 1966. године, још један српски алгебриста, Веселин Перић (1930–2009), одбранио је у Загребу докторску дисертацију „Прилог теорији идеала”, под менторством Ђуре Курепе. Овде треба рећи да се у развоју алгебре у Србији условно могу разликовати две главне линије.[7] Бројнија линија, коју чине академски потомци Михаила Петровића,[8] преко Т. Пејовића и С. Прешића, углавном је развијала модерну алгебру, односно алгебарске структуре. Другу линију су чинили академски потомци Ђуре Курепе, који су се превасходно бавили проблемима сродним онима из класичних алгебарских дисциплина, мада је и ту било оних који су се бавили алгебарским структурама.

Развој савремене алгебре у Србији се интензивирао 1970-тих година, а главну улогу у њеном развоју у том периоду одиграо је Славиша Прешић.[9] Иако се касније окренуо ка развоју математичке логике, крајем 1960-тих је формирао групу алгебриста која се бавила теоријом квазигрупа, и почетком 1970-тих у тој области докторске дисертације бране Јанез Ушан (1971), Светозар Милић (1972) и Бранка Алимпић (1973), под менторством С. Прешића, Зоран Стојаковић (1974), под менторством С. Милића, и Александар Крапеж (1980), под менторством Б. Алимпић. Под менторством С. Прешића бране се и дисертације Наташе Божовић (1975), са темом из теорије група, и Жарка Мијајловића (1977), са темом из теорије модела и Буловых алгебри. Значајно место у развоју алгебре 1970-тих година имао је и Ђуро Курепа, под чијим менторством је у том периоду урађено пет докторских дисертација, које су се претежно бавиле класичним алгебарским темама. То су дисертације Драгомира Симеуновића (1969) и Марице Прешић (1972), које су се бавиле коренима полинома, Александра Ивића (1975) и Зорана Шамија (1978), из теорије бројева, и дисертација Ратка Тошића (1978), која се бавила Буловим алгебрама.

До великих промена у српској алгебри долази 1980-тих година. После периода апсолутне доминације Београда, који је био центар научних истраживања у области алгебре и где су до тада брањене све докторске дисертације у Србији из те области, примат у развоју алгебре преузима Нови Сад. Највеће заслуге за то има Светозар Милић (1934–2008), за кога се може слободно рећи да је родоначелник Српске алгебарске школе. Милић 1974. године прелази на Природно-математички факултет у Новом Саду, где окупља групу млађих колега, уводи их у проблеме савремене алгебре и научни рад у тој области. Под његовим менторством се у Новом Саду бране дисертације Стојана Богдановића (1980) и Синише Црвенковића (1981), са темама из теорије полугрупа, и Бранимира Шешеље (1981), са темом из универзалне алгебре.

[7] Одредба условно стоји јер две поменуте линије нису биле међусобно изоловане. Напротив, оне су одувек имале велики утицај једна на другу.

[8] Термин „академски потомак” овде има исто значење као „descendant” у Mathematics Genealogy Project.

[9] Славиша Прешић је највећи допринос дао развоју математичке логике у Србији и сматра се родоначелником Српске логичке школе [7]. Био је ментор 14 докторских дисертација одбрањених на Универзитету у Београду.

То су биле прве докторске дисертације у Србији у области алгебре одбрањене ван Београда. На тај начин је на Природно-математичком факултету у Новом Саду формирана у то доба најјача група алгебриста у Србији, Новосадска алгебарска школа, коју су 1980-тих година чинили Светозар Милић, Стојан Богдановић, Синиша Црвенковић, Бранимир Шешеља, Јанез Ушан, Зоран Стојаковић, Градимир Војводић и Ђура Паунић. До 1980. године, алгебристи у Србији су се највише бавили теоријом квазигрупа, а 1980-тих главна област научног интересовања српских алгебриста постаје теорија полугрупа, и то остаје све до краја 1990-тих. Осим већ поменутих докторских дисертација Богдановића и Црвенковића, у Новом Саду и Београду се осамдесетих брани још шест докторских дисертација и публикује се велики број радова са темама из теорије полугрупа. У Београду осамдесетих докторирају и Гојко Калајџић (1982), у области теорије прстена, под менторством Ђ. Курепе, и Александар Липковски (1985), у области алгебарске геометрије и комутативне алгебре, под менторством Ђ. Курепе и В. Перића, а у Новом Саду докторске дисертације бране Ђура Паунић (1987), у области алгебарских n-арних структура, под менторством З. Стојаковића, и Розалија Мадарас (1989), у области универзалне алгебре, под менторством С. Црвенковића.

После Београда и Новог Сада, осамдесетих година почиње развој алгебре и у Нишу. Родоначелник алгебре у Нишу је Стојан Богдановић (1944–), у то време доцент на Природно-математичком факултету у Новом Саду, који је 1982. године ангажован за извођење наставе из предмета Алгебра I за студенте математике на Филозофском факултету у Нишу. По доласку у Ниш, он са Владимиром Ракочевићем покреће Семинар за теорију полугрупа и функционалне једначине, који је касније подељен на два семинара, један за теорију полугрупа, а други за функционалну анализу. Око Семинара за теорију полугрупа Богдановић окупља групу нишких математичара и ствара Нишку алгебарску школу, у свету познату као Нишка школа за теорију полугрупа [1].

Упркос великој друштвеној и економској кризи, деведесетих година је научна продукција српских алгебриста значајно порасла, и за разлику од претходних деценија, када се објављивало углавном у домаћим часописима, деведесетих долази до наглог пораста броја радова објављених у угледним међународним часописима. Посебно велику научну продукцију су у то време имали нишки алгебристи, који су тада преузели водеће место у српској алгебри. Тих година на научну сцену ступају и неки нови математичари, који ће у годинама које следе водити алгебру у Србији. У Нишу научну каријеру почиње Мирослав Ћирић (1964–), који 1991. године у Београду брани докторску дисертацију из области теорије полугрупа, под менторством Стојана Богдановића. У Новом Саду, докторску дисертацију из теорије мрежа, под менторством С. Милића, 1993. године брани Андреја Тепавчевић (1964–), а 1999. године докторску дисертацију са темом из универзалне алгебре, под менторством Р. Тошића, брани Драган Машуловић (1969–). Зоран Петровић (1965–) из Београда одлази на докторске студије у Балтимор, САД, где је 1996. докторирао у области теорије матрица и алгебарске топологије, након чега се вратио на Математички факултет у Београду. Подмлађивање Српске алгебарске школе није се завршило на томе, јер су нове наде српске алгебре стизале и наредне деценије. У Новом Саду, 2000. године Игор Долинка (1973–) брани дисертацију чија тема су примене универзалне алгебре у теорији формалних језика, под менторством С. Црвенковића, а из Сједињених Америчких Држава се враћа Петар Марковић (1974–), који је 2003. године на Вандербилт универзитету докторирао са темом из универзалне алгебре, под менторством Р. Мекензија. У Нишу на научну сцену ступа Јелена Игњатовић (1973–), која је 2007. године, под менторством Мирослава Ћирића, одбранила дисертацију која се бавила фази релацијским системима и њиховим применама у алгебарској теорији аутомата, а исте године у Београду Бранко Малешевић (1965–) брани дисертацију у области теорије поља, под менторством Ж. Мијајловића.

Заслугом свих оних који су овде поменути, али и још многих других које није било могуће поменути у овако кратком тексту, алгебра у Србији је последњих педесет година доживела свој пуни развој, а српски алгебристи су последњих деценија својим резултатима досегли сам светски врх. После великог скока у броју публикованих радова српских алгебриста, до којег је дошло осамдесетих и деведесетих година, тај број и даље бележи умерен раст,[10] при чему се публикује у све квалитетнијим часописима. Од самог почетка развоја алгебре у Србији, шездесетих година, по броју публикованих радова предњаче новосадски алгебристи, а прате их алгебристи из Ниша и Београда. Након квазигрупа, које су биле доминантна тема истраживања српских алгебриста 1960-тих и 1970-тих, и полугрупа, које су то биле 1980-тих и 1990-тих, деведесетих година су српски алгебристи значајно проширили своје области научног интересовања. У Новом Саду су пажњу привукли општи алгебарски системи (универзална алгебра), мреже и алгебарски аспекти теорије фази скупова, и заједно са полугрупама су постали доминантне теме новосадских алгебриста у последњих двадесет година. У Нишу је средином деведесетих направљен блажи, а средином 2000-тих још оштрији заокрет од теорије полугрупа ка рачунарским наукама, и последњих десетак година главни предмет интересовања нишких алгебриста постају релацијски и матрични рачун, а системи релацијских и матричних неједначина и једначина се користе у решавању фундаменталних проблема теорије аутомата и анализе социјалних мрежа. Београдски алгебристи у новије време постижу изузетне резултате у теорији поља, комутативној алге-

[10] Анализа броја радова урађена је на основу података из базе Zentralblatt MATH (zbMATH).

бри, алгебарској геометрији и теорији матрица. Од 1963. године, у Србији је одбрањено 94 докторских дисертација са темама из области алгебре,[11] од чега 45 у Београду, 31 у Новом Саду, 15 у Нишу и 3 у Приштини.[12]

Библиографија

[1] M. Ćirić, J. Ignjatović, Ž. Popović, *Stojan M. Bogdanović – scientist, teacher, and poet*, Facta Universitatis (Niš), Ser. Math. Inform., 24(2009), str. 1–13.

[2] Б. Јовановић, Ј. Петковић, *Димитрије Нешић* (*1836–1904*). У: Живот и дело српских научника, књига 3, М. Р. Сарић (ур.), Српска академија наука и уметности, Београд, (1998), стр. 1–32.

[3] Ј. Кечкић, *Михаило Петровић Алас* (*1868–1943*). У: Живот и дело српских научника, књ. 2, М. Р. Сарић (ур.), Српска академија наука и уметности, Београд, (1997), стр. 325–370.

[4] А. Н. Колмогоров, *Математика.* У: Математический энциклопедический словарь, Ю. В. Прохоров (гл. ред.), Советская энциклопедия, Москва, (1988), стр. 7–38.

[5] S. Lawrence, *A Balkan trilogy: mathematics in the Balkans before World War I. In: E. Robson and J. Stedall (eds.)*,The Oxford Handbook of The History of Mathematics, Oxford University Press, Oxford, (2009), chap. 2.4.

[6] Ж. Мијајловић, *Богдан Гавриловић* (*1863–1947*). У: Живот и дело српских научника, књ. 2, М. Р. Сарић (ур.), Српска академија наука и уметности, Београд, (1997), стр. 71–103.

[7] Ž. Mijajlović, *On the scientific work of Slaviša B. Prešić.* In: A. Krapež (ed.), A tribute to S. B. Prešić: Papers celebrating his 65th birthday, Matematički institut SANU, Beograd, (2001), str. 9–14.

[8] М. Ђ. Пауниħ, *Емилијан Јосимовић* (*1823–1897*). У: Споменица: 125 година Математичког факултета, Н. Бокан (ур.), Математички факултет, Београд, (1998), стр. 197–202.

[9] С. Прешић, *Драгољуб Марковић* (*1903–1965*). У: Споменица: 125 година Математичког факултета, Н. Бокан (ур.), Математички факултет, Београд, (1998), стр. 221–223.

[10] Р. Сарић, З. Сарић, *Атанасије Николић* (*1803–1882*). У: Живот и дело српских научника, књ. 7, М. Р. Сарић (ур.), Српска академија наука и уметности, Београд, (2001), стр. 1–28.

[11] Највећи број тих дисертација се бавио теоријом полугрупа (15), општим алгебарским системима (14), комутативном алгебром (9), релацијским системима (9), квазигрупама, теоријом матрица и алгебарским аспектима теорије фази скупова (по 6), итд.

[12] Занимљиво је приметити да су у области алгебре 1960-тих одбрањене 2 дисертације, 1970-тих 10, 1980-тих тај број скаче на 23, да би 1990-тих пао на само 8, потом је 2000-тих порастао на 17, а 2010-тих опет долази до великог скока на 34.

Miroslav Ćirić

ALGEBRAIC HERITAGE OF MIHAILO PETROVIĆ ALAS AND SERBIAN ALGEBRAIC SCHOOL

S u m m a r y

In this paper we provide a brief historical overview of the development of algebra in Serbia, with special emphasis on the legacy of Mihailo Petrović Alas, the father of Serbian mathematics, and its role in the creation of the Serbian algebraic school.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ – МЕТАФОРЕ ДЕТИЊСТВА

ДУШИЦА МАРКОВИЋ*

А п с т р а к т. – „Има створења на којима зло не оставља никаквог трага, она су као дијамант на коме се иступи најтврђи челик” је цитат Михаила Петровића из његовог дела *Метафоре и алегорије*, а овај рад говори о чему треба њему као дијаманту изузетне интелектуалне и духовне чистоте и вредности. Циљ рада је да симболе детињства, који су определили структуру личности Михаила Петровића, прикаже као праслику његовог каснијег живота. Одрастање уз параболе и алегорије духовних књига породичне библиотеке и хуманиоре, уз танане метафоре епског предања, обликовало је снажну емотивну конструкцију и јасне когнитивне и интуитивне представе, будућег научника. Тако су „метаболизам и моторика” саме природе пресликани у формуле диференцијалних једначина, у првим радовима Михаила Петровића представљале својеврсно метафоричко придруживање. Кроз пресликавање „феноменолошког огледала” опажао је симболе и објашњавао њихово вишезначје. Тако и изрезбарена контура рибе, на улазним вратима његовог дома, говори о улову са чистих путописних дубина рационалног и ирационалног, у схватању великог математичара. Слика живота и дела Михаила Петровића је тако кристално чиста, да откуцаји његовог интелекта и данас виртуално живе кроз математичку школу и богато, разгранато стабло његових ученика.

Кључне речи: метафора, детињство, пресликавање

1. Увод

Када је, 27. фебруара 1905. године Скупштина изгласала предлог о оснивању Универзитета од 117 присутних, за закон је гласало 110 посланика.[2] Тако је сталеж занатлија и сељака, излазак из сиромаштва препознао у образовању.

* Основна школа „Стефан Немања”, Ниш, и-мејл: dusicamarkovic33@hotmail.com

[2] Зборник закона и уредби о Лицеју, Великој школи и Универзитету у Београду, (приредио Драгољуб Баралић), Научна књига, Београд 1967. године.

Именовано је осам редовних професора, а катедра за математику припала је Михаилу Петровићу. Овај интердисциплинарни полиглота који је у домену математичких дисциплина дао нову парадигму, а у различитим научним и уметничким областима открио идентично језгро, заједно са Руђером Бошковићем и Милутином Миланковићем, као јединим математичарима, налази се међу сто најзнаменитијих Срба. Јер „не може се град сакрити кад на гори стоји”.[3]

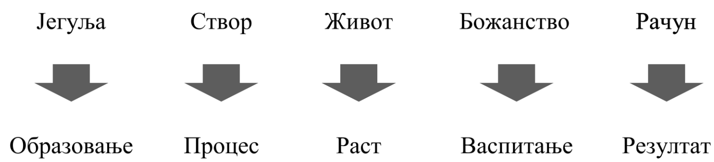
Циљ рада је тумачење оног дела личности научника која приводи стваралаштву, кроз дешифровање „кодираних” порука остављених у виду бројних радова и постављање детињства као могуће метафоре будућег живота. То је трагање које води до најранијег детињства и оних слика и симбола које обележе карактер појединца. Јер разумевање и тумачење алегорија и метафора носио је Михаило у срцу као завет који је имао испунити. Параболу о талантима: „И једноме дакле даде пет таланата, а другоме два, а трећем један, свакоме према његовој моћи. А онај што прими пет таланата отиде те ради са њима и прими још пет таланата”,[4] доживео је као свој лични дуг и похвалу универзуму. Стилови васпитања и образовања, значај породице у процесу откривања и неговања обдарености, филозофске и научне доктрине друштвених и околности времена, јесу индикатори који су обликовали коначне закључке посматрања. У процесу расуђивања велики је удео мудрости Соломона, да је циљ учења разликовање добро од зла и може се сматрати почетком и суштином овог процеса. У раду је наглашен моменат детињства као могућа praслика будућих доживљаја и одлука великог научника. Визуализације и идеје, дескрипција и нарација, синтетишу и генерализују неколико независних методолошких фактора истраживања. Анализирајући стваралаштво научника из математичке, филозофске и књижевне перспективе, на основу писама, проучавањем историјских, друштвених и културних околности времена у коме је живео, посматрајући музејске експонате доступне материјалне заоставштине и на основу сведочанстава оних који су професора познавали, дата је рефлексија детињства на каснији живот и рад. Јер много је симбола и пресликавања којима се може аргументовати узрочно-последична кореспонденција васпитања и васпостављања личности.

2. Тајна јегуље

Различито у појавном облику не значи функцијски дисјунктно. Зато проналажење заједничког у диспаратним областима науке и живота, може једним моделом, разрешити више феноменолошких загонетки. Илустрације ради, уколико се реч јегуља, замени васпитањем, уз минималне језичке ко-

[3] Јеванђеље по Матеју, глава 5, стих 14.
[4] Јеванђеље по Матеју 25:15; 25:16.

рекције, уводна реч о мистерији њеног постојања у „Роману Јегуље” Михаила Петровића, могла би постати уводном „мистеријом” васпитања у каквој педагошко-психолошкој литератури: „Јегуља је од вајкада сматрана као живи створ коме нико не зна ни почетка ни краја. Питање о томе како јегуља постаје, била је загонетка која је држала радозналост и машту природњака и филозофа свих времена. Оно је занимало и Аристотела, који је мислећи о њему, налазио да је то нерешљива загонетка, као и питање о томе на који начин јегуља завршује свој живот. Мистерија је толико узбуњавала свет да се, кад се видело да о њој не може нико ништа да каже, створило мишљење да је она недокучива, људском разуму за вечита, времена неприступна и да залази у област мистерије религије. Херодот је, пишући о јегуљи, казао да је то свети створ о коме само божанство може дати рачуна”.[5] После језичких корекција на коначном броју речи, односно после пресликавања које једном значењу придружује друго, понекад и диспаратно:



текст гласи: Образовање је од вајкада сматрано као живи процес коме нико не зна ни почетка ни краја. Питање о томе како образовање постаје, била је загонетка која је држала радозналост и машту природњака и филозофа свих времена. Оно је занимало и Аристотела, који је мислећи о њему, налазио да је то нерешљива загонетка, као и питање о томе на који начин образовање завршује свој раст. Мистерија је толико узбуњавала свет да се, кад се видело да о њој не може нико ништа да каже, створило мишљење да је она недокучива, људском разуму за вечита времена неприступна и да залази у област мистерије религије. Херодот је, пишући о образовању, казао да је то свети процес о коме само васпитање може дати (довести до) резултата. Текст је дат у сврху апострофирања аналогије којом се Михаило Петровић бави у својим филозофско-математичким радовима.

3. На рубу науке и поезије

Рад *Метафоре детињства* је на рубу науке и поезије јер препознаје да стваралаштво Михаила Петровића гравитира истини и лепоти истовремено. Ако изузмемо научне радове и стручну математичку литературу, професор

[5] „Роман Јегуље”, Михаило Петровић, страна 3. Антологија српске књижевности www.ask.rs 2009.

умногоме бира језик метафоре и алегорије, као заједнички израз логичке дедукције и предвиђања и импресије ствараоца. Веома сликовито у делу *Метафоре и алегорије*[6] објашњава структуру апстраховања као битан корак когнитивног процеса: „Метафоре и алегорије имају много дубљи смисао и дубљи корен у људској свести: оне одговарају једној инстинктивној и неодољивој потреби духа, која се испољава у свима фазама развића свести". За разлику од Сенеке који је своје „Презирање богатстава" писао на сточићу од злата Михаило Петровић је једноставним и скромним начином живота осликао своје вишеслојно поимање његовог смисла. Своје прве године живота, које попут какве матрице уписују доживљаје и емоције, провео је на ушћу две реке, у порти Саборног храма, на београдској калдрми или на оближњим атарима док је са дедом обилазио виноград. Рођење у честитој породици интелектуалаца, оца Никодима који је теолошке науке докторирао у Новгороду и Кијеву и мајке Милице, нежног и побожног заштитника, представља хармоничне предуслове доброг васпитања. О себи је мало говорио, а није се разметао причама ни успоменама из детињства. Реч је о префињеној хришћанској етици која у скромности, тишини и уздржању показује своје плодове. Зато се у том делу рад не може поткрепити материјалним доказима. Закључци су изведени на основу личних визуализација и представа аутора и представљају синтезу комплементарно логичких тврђења на основу узрочно-последичне повезаности догађаја. Недостатак аутентичног у сврху постављања доброг модела васпитања и образовања, замењен је алтернативном, „реконструисаном" грађом. Тај део припада интуитивној, подсвесној представи, која временом може бити поткрепљена ваљаним доказима или оповргнута једним примером када се до релевантних сазнања дође. Писмо Павлу Павловићу свом школском другу, делимично аргументује речено. Написано је у Паризу 8. октобра 1887. године: „Драги Пајо, Синоћ испратих деду, па сад дође на ред да ти пишем. Нећу ти писати како ми је сада, како се осећам у оваквим приликама, у оваквом свету, овако одвојен од куће од које се никад нисам одвајао и која је за мене увек била место у коме сам био сретан и задовољан, нећу ти о томе писати, једно зато да ти не досађујем казивањем оног што и сам унапред знаш; друго, зато, што сам се ја некад смејао Марку, кад ми је у писмима туговао; и најзад за то, да ти не изгледам малодушан какав у овој прилици нисам."

4. „Очи и уши су лоши сведоци ако дух није образован"[7]

Свето писмо у виду многих парабола даје метафоричке одговоре на значајна животна питања. Унук свештеника Новице Лазаревића, са овог кладенца

[6] „Метафоре и алегорије" страна 23. Српска књижевна задруга, коло LX, књига 405.
[7] Хераклит.

пио је слатку и живу воду подучавања, да никада не ожедни. Слушање и читање молитава од најранијег детињства морало је оплеменити његов карактер унутрашњим, скривеним миром и скромношћу. Ову смерност поседовао је целог живота. Тиха радост огледа се у чистоти „дечијег" погледа сачуваним на фотографијама и портрету који је насликао Урош Предић. А чистота духа најрадије корача у потрази за истином. У породици која је неговала просветитељски дух, разборитост је морала тражити и постављати своје упориште: „Није по јакости кадрости беседљивца, него беседа је по разбирању слушаоцем. Заплине ли човек, не ласно исплива: писмо се шири, ни га ко икад може прецрпсти, ни му краја наћи. Него колико је ко собом кадар полнети толико учења и захвата"[8] – писао је у својој књизи Гаврило Стефановић Венцловић. Љубав унутар дома, рођење тројице браће и једне сестре, учинили су да се код деце развије осећај припадности, својство да се има шта поделити, поклонити или ко утешити. У време велике глади 1920. године, забележено је да је Мика Алас, уловљену рибу поклањао на пијаци која се налазила на месту данашњег Студентског парка.

5. „Од дудовог листа време прави свилу"[9]

Друштвене околности и просветитељски дух науке који је снажно захватио изнова слободну српску државу наставља интензивније да разлистава богато стабло стваралаштва људи са овог поднебља. Колективни дух страдања и радости једног народа, почео је да се кроз нове пупољке романтизма и импресионизма у књижевности, сликарству и музици изнова оснажује. И наука је дала своје изданке. Било је то време које је тражило храброст: „Јунаштво је цар зла свакојега, а и пиће најслађе душевно, којијем се пјане покољења."[10] Михајло је без оца остао када му је било седам година и без браће у наредних неколико година живота. Забележено је да се једино сестра Марија удала и да су тим поводом из Париза дошле колеге и професори са Сорбонског универзитета. За људе који су у раном детињству изгубили неког од најдражих кажу да добијају посебан дар разумевања догађаја из перспективе вечности и времена које је непроменљиви параметар. Стицање узвишенијег става у односу на материјалну и импондерабилну природу бића и чињеница и свођење њихове интимне природе на симболе, који могу бити број, поредак или нека друга категорија, постаје њихов дар. То приводи схватању „да у импондерабилном свету, поред општих природних закона, влада читав један сплет закона сасвим друге врсте, последица чисто људских погледа и мотива, који у себи немају

[8] Гаврило С. Венцловић, *Црни биво у срцу*, избор, предговор и редакција Милорад Павић, Београд 1966.

[9] Народна пословица.

[10] *Горски вијенац*, стих 603–611.

ничег апсолутног, већ произилазе из људских утилитарних, етичких, естетских, верских и др. принципа и конвенционалности, а који су неоспорно, и потребни, неопходни и врло корисни за људске заједнице, али нису нешто што носи обележје апсолутнога, вечитог, независног од људских схватања, потреба и целисходности."[11] Постављање етичких питања, борбе савести и осећања дужности, духовне уравнотежености, истог су феноменолошког смисла као и поремећај равнотеже у материјалном свету. Да ли то доводи до закључка да су и типске последице исте само на други начин испољене? Свођење појава на исти проблем и проналажење математичког модела, односно теорије која би као последицу имала предвиђања догађаја или облика манифестације, јесте идеја која је разрађивана у феноменолошкој расправи. Јунаштво је једна категорија и њиме се свако зло савлађује. Метафоре о јунаштву као великом моралном принципу и свакодневном ратовању унутар себе, али и са надолазећим околностима, вазда су присутне. Његош подучава: „Благо томе ко довијек живи, имао се рашта и родити! Вјечна зубља вјечне помрчине, нит' догори нити свјетлост губи"[12] и Михаило Петровић се не колеба. Јунаштво је најслађе пиће душе за сва поколења. Овакве мудрости, слично као и мотиви и симболи епских народних песама, формирају такву менталну структуру која прихвата и живи по кодексима узвишеног морала и хришћанске етике. Уколико знамо да је рођени брат баке по мајци, Сима Нешић из угледне трговачке породице, погинуо од Турака на Чукур-чесми, нема сумње да се епско песништво слушало у дому Петровића: „Јер, тако ме вјера не убила... Него сутра мислим на Косову, за ришћанску вјеру погинути!"[13] Из ритмике десетерца развио је своју криптографску риму 1898. године. Наведена разматрања би могла да се сведу на шематизовани приказ, пресликавање, где уређене парове треба схватити у најдубљем, вишезначном и симболичком смислу: (математичар; тумачење Светог писма), (путописац; авантуристички романи), (криптограф; епска поезија), (алас; молитве), (стваралац; народно предање и хуманиоре). Овакво расуђивање приводи закључку да је откривање симбола и њиховог значења један од најважнијих задатака образовања. То је процес емотивног и интелектуалног узрастања током читавог живота. Јер Михаило Петровић је своју мрежу бацао на велике дубине, различитих подручја науке и уметности, приводећи их јединственом језгру апсолутне истине.

[11] Михаило Петровић, *Метафоре и алегорије*, страна 171. Српска књижевна задруга, коло LX, књига 405.

[12] *Горски вијенац*, стих 609–611.

[13] Кнежева вечера.

6. Једноставност и скромност

Снажно је сведочанство Милутина Миланковића о свом првом сусрету са професором Миком, с почетка 1905. године у згради тадашње Велике школе, данас зграде старог Универзитета. Када се обратио домаћину, старијем чичици речима да жели да говори са господином доктором Михаилом Петровићем: „Он ме премери од главе до пете па рече: „Не познајем". „Како га не познајете?", узвикнух, „нашег славног математичара, познатог у целом свету!" Он се тада присети: „Јес', јес', то је наш Мика! Сад ћу да видим!" ... Попех се горе у Петровићеву собу, где ме он пријатељски дочека, ми се упознасмо и ступисмо у размену наших научних публикација".[14] Човек кога одликује тако снажна стваралачка енергија тумачи компликоване релације и манифестације догађаја са једног посве тихог становишта. Потпуно самосталан тежи оригиналном изразу. Опредељује се за скроман животни простор, јер снажна суштина не трпи китњасту форму. У једноставно уређеној соби, „гвоздени" кревет не опредељује висину снова, а скромни писаћи сто дубину научних истина. Књиге и неколико мајсторских писама на зиду, за површног посматрача представљају одсуство авантуристичког духа. А управо је то још једна одлика детета коју је Михаило Петровић сачувао читавог живота. Авантуристички романи које је као дете волео да чита, а деда их је крадимице потурао како би поспешио радозналост малишана, подстакли су машту која најдубљом бити подсећа, на машту Жил Верна. Оригинални концепти и идеје попут амфибије, проналазе изразе и у науци и у уметности. И непрестано су у потрази за подстицајем, од оних лако доступних, где је као алас учествовао у риболову до скупих истраживачких експедиција француских научника. Колико надахњује боравак на поларном снегу и леду, пловидба до Бермудских острва и Саргаског мора приказују путописна казивања Михаила Петровића. Поред неизвесности истраживача, научника су попут каквих мисаоних игара окупирале и стратегије ратова. Великог Наполеона је сматрао за метафору јуначког и мудрог војевања и у више наврата цитирао његова размишљања и ставове: „У свему што се предузме, треба дати две трећине разуму, а оставити осталу трећину случају; повећати први разломак, значи неодлучност, повећати други, значи претерану смелост."[15] И сам је учествовао у балканским, Првом светском рату, а са седамдесет година није имао дилему да ли треба да као краљев војник ступи у одбрану своје домовине. Заробљен је 1941. и одведен у немачко заробљеништво.

[14] „Мика Алас, белешке о животу великог математичара Михаила Петровића", Милутин Миланковић и Јеленко Михаиловић, приредио Владо Милићевић, Београд – Калгари 2012. године.

[15] Михаило Петровић, *Метафоре и алегорије*, страна 176. Српска књижевна задруга, коло LX, књига 405.

7. Филозофија или мистерија броја

У свом раду, Петрић о тајнама броја, Стипе Кутлеша[16] цитира расправу Петрића о бројевима. „Ако би неко од људске природе одузео број ми никада не бисмо били разборити."[17] Да ли је све у природи уређено по принципу броја, како су тврдили питагорејци или се математика бави суштином, односно идејом како је мислио Платон, свакако је на почетку свог општег образовања расуђивао и Михаило Петровић. Свестан илузије и тешкоће дефинисања бесконачности и неспособности схватања трансфинитног, јер оне „потичу од саме суштине нашег духа", говори о базичном пољу истраживања, проблему бројева и њиховој конструкцији: „Овај појам децималног броја постао нам је толико близак и чини нам се толико једноставним да имамо природну склоност да исто тако сматрамо бесконачан децимални разломак најједноставнијим од оних математичких бића у чију дефиницију улази појам бесконачности или, прецизније, пребројиве бесконачности... Постоји овде једно неограничено поље истраживања, у којима се главна потешкоћа, као и многим другим математичким питањима, састоји у избору интересантних и плодних логичких форми међу бесконачно много њих које нам се нуде."[18] Синтезу математичких истина са тајнама природе објаснио је кроз свој научни рад у домену логике. На граници нереалног и несхватљивог, тајни прилази да би је истражио и проучио. „У нас има реч слуктити, човек слукти, осећа појаве, догађаје и процесе. То је врло често случај с научним проблемима... Можда је то стање инкубације дубоких проматрања идеја"[19] – описивао је Јован Цвијић интуитивне представе ствараоца. Заиста целокупан рад Михаила Петровића, „слукти" комплементарност диспаратних области приводећи идеји суштине, лепоте и хармоније. Његова чистота откривања егзактног огледа се у проналажењу пресликавања која приводе замишљеним формама, чија је егзистенција извесна. На тасу стваралаштва теоријски и практични рад Михаила Петровића стоје у равнотежи.

8. Закључак

Михаила Петровића је карактерисало елегантно научно излагање, лакоћа приповедача, оптималност математичара и посвећеност филозофа, дубоког, поетичног склада. Једнозначна, вишезначна или немогућа решења једначина имају своје аналогне представе у догађајима и свакодневним искуствима по-

[16] Стипе Кутлеша, *Петрић о тајнама броја*, 2006, страна 172.

[17] Franciscii Patrici, De numerorum mymisteris opuskulum anno 1594 scriptum poglavlje 1 „... si quis ab hominum natura numerum auferat, numquam prudentes nos fore..."

[18] *Бројни спектри*, Михаило Петровић, Предговор Емил Борел, Париз, јул 1919.

[19] J. Цвијић, *О научном раду и о нашем Универзитету*, Београд, 1907, страна 36.

јединаца. Дивергентно мишљење које расипа различита идејна решења и конвергентно које приводи јединственом, су наше представе о природи и разноликости живота. Значај речи лежи у њеној метаморфози и вероватноћи да се тумачи на више начина. Научни рад и уметничко дело имају снагу да покрену промену и преображај, потакну непрестани раст. Др Душан Недељковић емотивно и снажно говори о свом виђењу математичко-метафоричких представа професора Михаила: „Толико је буран дијалектички развитак Петровићеве аналошке природне филозофије, верна слика революционарног развитка нових метода аналогије и моделовања савремене науке и филозофије данашњице...али и толико је разноликих, развојних дубинских отворених и пређених нових методолошких и принципијелних перспектива...”.[20]

Коначно, све што је везано за име Михаила Петровића, поседује савршенство једноставних форми и дубину суштинских истина, у које метафора живота и његовог смисла, жели да нас упути.

Библиографија

[1] Михаило Петровић, *Метафоре и алегорије*, приредио Драган Трифуновић, Београд (1967).

[2] Михаило Петровић, *Метафоре и алегорије*, Српска књижевна задруга, коло LX, књига 405, стр. 23, 167, 171.

[3] Михаило Петровић, *Математички спектри, Сабрана дела Михаила Петровића*, књига 5, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

[4] Михаило Петровић, *Метафоре и алегорије*, приредила др Слободанка Пековић, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд (1997).

[5] Младен Ст. Ђуричић, *Успомене на Михаила Петровића*, Републички одбор за прославу стогодишњице рођења Михаила Петровића, Београд, (1968).

[6] Драган Трифуновић, *Михаило Петровић Алас*, „Дечије новине” Горњи Милановац (1982).

[7] Јереј Лука, *Религија и феноменолошка математика Михаила Петровића – Мике Аласа*, поводом стогодишњице рођења, 31–41.

[8] Гаврило С. Венцловић, *Црни биво у срцу*, избор, предговор и редакција Милорад Павић, Београд (1966).

[9] Милутин Миланковић и Јеленко Михаиловић, *Мика Алас, белешке о животу великог математичара Михаила Петровића*, приредио Владо Милићевић, Београд – Калгари (2012).

[10] Михаило Петровић, *Бројни спектри*, Предговор Емил Борел, Париз, јул (1919).

[11] Ј. Цвијић, *О научном раду и о нашем Универзитету*, Београд, (1907), стр. 36.

[20] Др Душан Недељковић, *Етапе и перспективе природне филозофије Михаила Петровића*, посебан отисак из књиге „Михаило Петровић, човек – филозоф – математичар”, Математичка библиотека, 38, 1968. г.

[12] Михаило Петровић, *Роман Јегуље*, страна 3. Антологија српске књижевности www.ask.rs (2009).

[13] Михаило Петровић, *Елементи математичке феноменологије*, Државна штампарија Краљевине Србије, (1911).

[14] Српска академија наука и уметности, *Михаило Петровић Алас, родоначелник Српске математичке школе*, Београд (2018).

[15] Универзитетска библиотека „Светозар Марковић" у Београду, *Легенде Београдског универзитета*, Зборник предавања одржаних у Универзитетској библиотеци у периоду 2002 –2004, Београд (2005), стр. 10–76.

[16] Петар Петровић Његош, *Горски вијенац*, стих 603–611.

[17] *Зборник закона и уредби о Лицеју, Великој школи и Универзитету у Београду*, (приредио Драгољуб Баралић), Научна књига, Београд (1967).

[18] Љубинко М. Јањушевић, Докторска дисертација: *Технолошко-херитолошка валоризација патената Михаила Петровића Аласа у индустријском и научном наслеђу Србије*, Универзитет у Београду.

[19] Српска академија наука и уметности, *Зборник предавања* одржаних на скупу Српски математичари у оквиру манифестације Мај месец математике 2012, Универзитет у Београду, Завод за уџбенике, Београд (2015).

[20] Српска академија наука и уметности, посебна издања, *Споменица* о свечаном скупу поводом прославе 100-годишњице од рођења Михаила Петровића 1868–1968. године, књига 39, Београд (1968).

Dušica Marković

MIHAILO PETROVIĆ – METAPHORS OF CHILDHOOD

S u m m a r y

“There are creatures never influenced by evil, they are like diamonds that blunt the hardest of steel” is a quote from Mihailo Petrović’s piece Metaphors and allegories; and this piece demonstrates himself as a diamond of an exceptional intellectual, and spiritual purity and value. The aim of this piece is to show symbols of Mihailo Petrović’s childhood, which determined his personality, as a prior picture of his later life. Growing up with parabolas and allegories of spiritual and humanities books from his family library, with slight metaphors of epic literature, shaped a strong, emotional construction of his mind and clear cognitive and intuitive performance for the future scientist. In that way “metabolism and motoric” of nature are translated into differential equations, in the first pieces of Mihailo Petrović’s work, and they showed certain metaphoric associations. Following “phenomenological mirror” he observed symbols and explained their multiple meanings. In that sense, even carved contour of a fish, at the main entrance of his home, talked about a catch coming from pure depths of his travelogue into what is rational and irrational, in comprehensions of this great mathematician. The picture of life and work of Mihailo Petrović is so crystal clear that beats of his intellect, even today, virtually live through a school of maths and rich, ramose tree of his pupils.

СТОХАСТИЧКА ГРАНА МАТЕМАТИЧКОГ ГЕНЕАЛОШКОГ СТАБЛА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА АЛАСА

СВЕТЛАНА ЈАНКОВИЋ*

МИЉАНА ЈОВАНОВИЋ**

А п с т р а к т. – Академик Михаило Петровић Алас је највећи српски математичар и оснивач Српске математичке школе који је одиграо кључну улогу у развоју математичког образовања и науке, не само у Србији, већ и у њеном окружењу. Изузетна креативност, инвентивност и универзалност биле су главне карактеристике научног рада Михаила Петровића Аласа. Иако се није непосредно бавио стохастиком, индиректно је утицао кроз своје докторанде, пре свега Драгољуба Марковића, Тадије Пејовића и Јована Карамате, као и млађих научника после њих, на развој вероватноће и статистике у универзитетским центрима у Србији. Сврха овог рада је да се размотри стохастичка генеалошка грана Михаила Петровића Аласа, пре свега кроз гране Тадије Пејовића и Јована Карамате, као и да се презентује научно-истраживачки развој вероватноће и статистике у Србији кроз урађене докторске дисертације.

Кључне речи: генеалошко стабло М. Петровића, вероватноћа, статистика

Историјски, први пробабилистички појам у образовању у Србији јавља се још далеке 1838. године у наставном програму Више школе – Лицеја, као наследника прве Велике школе, тзв. „Устаничке велике школе", основане 1808. године, у коме се поред осталих предмета предају *чиста математика* и *статистика*, ма шта да се под тим појмовима подразумевало. Ове предмете је предавао Петар Радовановић (рођен 1808). Реформом Лицеја 1863. године основана је Велика школа, која је 1905. прерасла у Универзитет у Београду.

* Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, и-мејл: svjank@pmf.ni.ac.rs

** Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, и-мејл: mima@pmf.ni.ac.rs

Рад Велике школе одвијао се у оквиру три факултета: Филозофског, Правног и Техничког. Године 1873. оснивају се на Филозофском факултету два одсека, Историјско-филолошки и Природно-математички, који је 1947. прерастао у Природно-математички факултет. Математика се предавала на Природно-математичком факултету, а међу осам обавезних предмета на Филозофском факултету налазио се и предмет *Статистика*.

Школске 1885/86. на Природно-математички одсек Филозофског факултета уписао се Михаило Петровић. Убрзо по дипломирању 1889. године отишао је у Париз, где је на Париском универзитету јуна 1894. стекао докторат из математичких наука, прецизније, из области диференцијалних једначина. Непосредно потом вратио се у Београд и отпочео своју универзитетску каријеру као професор математике на Филозофском факултету. Поред импресивног научног рада који се првенствено односи на квалитативну анализу диференцијалних једначина и решавање помоћу редова, на специјалне функције, пре свега елиптичке функције, на одређивање корена алгебарских једначина, итд., и на његова капитална дела *Елементи математичке феноменологије* (1911) и *Феноменолошко пресликавање* (1933), интензивно се бавио педагошким радом и развојем високошколских установа. У периоду од 1912. до 1939. године једанаест врсних математичара, од којих је сваки оставио значајан траг у развоју и утемељењу теоријске и примењене математике на Универзитету, одбранило је своје докторске дисертације под менторством Михаила Петровића (отишао у пензију 1938). Међу њима посебно треба апострофирати Драгољуба Марковића (1903–1965) и Тадију Пејовића (1892–1982) због њиховог непосредног утицаја на формирање наставног кадра из вероватноће, као и Јована Карамату (1902–1967) који је засновао теорију правилно променљивих функција које су, између осталог, од посебне важности за граничне теореме у теорији вероватноћа.

Од оснивања Природно-математичког факултета 1947. године, *Одсек за математику* је један од пет одсека. Наставним планом из 1949. године уведен је на трећој години студија математике предмет *Теорија рачуна вероватноће*, а изменом плана 1952. студенти треће године слушају један од два предмета, Алгебру II (алгебарске структуре) или *Теорију вероватноће*. Ове предмете предаје Драгољуб Марковић и тиме званично постаје први предавач теорије вероватноће у Србији. Он је био и први руководилац касније формираног *Одсека за теорију вероватноће и математичку статистику*, све до свог одласка у пензију.

Иако се само спорадично бавио вероватноћом, јер је главна област његове научне делатности била алгебра, Драгољуб Марковић је препознао значај најмлађе математичке дисциплине, теорије вероватноће, аксиоматски засноване 1933. године од стране руског математичара А. Н. Колмогорова (1903–1987), једног од највећих математичара двадесетог века. Због тога је подстицао млађе колеге да вероватноћа постане предмет њиховог изучавања. У томе је имао несебичну подршку Тадије Пејовића, који се није бавио вероватноћом, али је подстицао млађе сараднике да проведу дуже студијске боравке на познатим иностраним универзитетима да би на извору стекли потребна знања за бављење науком у области стохастике. Са пуним поверењем у њихов рад и иновације, преузимао је менторство на њиховим докторским дисертацијама.

Прву докторску дисертацију из вероватноће на Природно-математичком факултету у Београду, *О строгом закону великих бројева*, одбранио је Часлав Станојевић (1928–2008) 1955. године пред комисијом Никола Салтиков, Тадија Пејовић и Драгољуб Марковић. По одласку Драгољуба Марковића у пензију, он предаје *Теорију вероватноће* и *Примену теорије вероватноће*, све до свог одласка у САД 1962. године, где је остварио завидну универзитетску каријеру.

Средина шездесетих година је била изузетно плодна за развој пробабилистичке мисли на Природно-математичком факултету. Зоран Поп-Стојановић (1935–2011) је 1964. одбранио докторску дисертацију *Примена филтер трансформације случајне Lebesgue-ове мере на случајна поља* пред комисијом коју су чинили Тадија Пејовић, Драгољуб Марковић и Боривоје Рашајски. Његова дисертација је базирана на резултатима које је добио боравећи школске 1962/63. на Хебрејском универзитету у Израелу. Он напушта Србију 1965. године и одлази у САД на Универзитет Geinsvil на Флориди и остварује изузетно плодну универзитетску каријеру у области стохастичке анализе, годинама сарађујући са познатим математичарем Мурали Раом. Иако је одавно напустио Србију, остао је у контакту са многим својим колегама и несебично им је помагао у сваком смислу при њиховом боравку у САД. При крају своје универзитетске каријере, а посебно по пензионисању, сваке године је долазио у Београд и активно учествовао у раду *Семинара за стохастику* при Математичком институту.

Још две докторске дисертације из вероватноће су одбрањене 1964. године. Петар Тодоровић је одбранио докторску дисертацију *Случајне трансформације структуре статистичких скупова*, а Зоран Ивковић (1934–2011) *О предвиђањима случајних процеса*, обе пред истом комисијом у саставу Тадија Пејовић, Драгољуб Марковић и Боривоје Рашајски.

На развој стохастике на Универзитету у Београду, као и на универзитетима у Нишу, Новом Саду и Крагујевцу, непосредно или посредно најзначајнији је допринос Зорана Ивковића, под чијим је менторством одбрањено једанаест доктората и више од двадесет пет магистарских теза, о чему говори и његова богата библиографија. Одржао је више предавања по позиву на међународним и домаћим конгресима и конференцијама и био на студијском боравку на Париском универзитету 1961. године, Московском државном универзитету Ломоносов 1967. године и на Универзитету Мисури-Рола, САД, школске 1969/70. године.

Смер за статистику, уведен школске 1966/67. као четворогодишње студије примењене математике, у значајној мери је комплетирао свој наставнички и научни кадар пошто је Стеван Стојановић одбранио докторску дисертацију *Проблеми управљања и оптимизације математичке теорије масовног опслуживања* 1969. године под менторством Ђура Курепе. Иако није директно укључен у стохастичку грану генеалошког математичког стабла Михаила Петровића, Курепа је индиректно утицао на више припадника ове гране. Школску 1966/67. годину Стеван Стојановић је провео на научној специјализацији на Московском државном универзитету Ломоносов под руководством Б. В. Гнеденка, академика АН УССР. Отишао је у пензију као шеф Катедре за теорију вероватноћа и математичку статистику.

После научног усавршавања код професора А. М. Јаглома на Московском државном универзитету Ломоносов школске 1966/67, Јован Малишић је 1973. године одбранио докторску дисертацију *Екстраполација и други линеарни проблеми једне класе стационарних случајних процеса са нерационалним спектралним густинама* под менторством Зорана Ивковића. Наставничким тандемом Зоран Ивковић, Стеван Стојановић и Јован Малишић је комплетирана научна база за даље бављење науком у области вероватноће и математичке статистике. У наредних петнаестак година докторске дисертације су под њиховим менторством одбранили: Јелена Булатовић (*Спектрална анализа случајних процеса другог реда са несепарабилним просторима*, 1975, ментор З. Ивковић), Драган Банјевић (*Оптимални планови за неке моделе контроле у теорији поузданости*, 1976, ментор С. Стојановић), Слободан Јанковић (*Неергодички извори у теорији информација*, 1979, ментор З. Ивковић), Ратомир Пажанин (*Инваријантност спектралног типа случајног процеса у односу на трансформацију времена*, 1980, ментор З. Ивковић), Фуат Ритваноли (*Метод Хилбертових простора репродукујућих језгара у испитивању спектралног мултиплицитета случајног процеса*, 1982, ментор З. Ивковић), Предраг Перуничић (*Неконстантно решетање процеса обнављања*, 1984, ментор С. Стојановић), Слободанка Јанковић (*Прилог теорији сумирања и максимума случајног броја случајних променљивих*, 1985, ментор С. Стојановић), Павле Младеновић (*Оцењивање спектра стационарног низа*, 1985, ментор Ј. Малишић), Благота Лучић (*Временска анализа уопштених случајних процеса*, 1985, ментор З. Ивковић), Љиљана Петрушевски (*Стохастички процеси Ito у сепарабилном простору* (*еквивалентност Wiener-овом процесу*), 1986, ментор З. Ивковић), Тибор Погањ (*Сингуларни случајни процеси Pade-апроксимација и средњеквадратна конвергенција*, 1986, ментор Ј. Малишић), Зоран Глишић (*Квантилни процеси и њихова примена за тестирање статистичких хипотеза*, 1987, ментор З. Ивковић), Светлана Јанковић (*Неки итеративни пос-*

тупци и граничне теореме у теорији случајних диференцијалних једначина, 1987, ментор З. Ивковић, коментор Ј. Стојанов), Слободанка Митровић (*Једна класа случајних процеса мултиплицитета један*, 1987, ментор З. Ивковић), Дражен Пантић (*Решавање једначина кретања стохастичком симулацијом*, 1988, ментор З. Ивковић), Биљана Поповић (*Прогнозе и оцене параметара ARMA серија са експоненцијалним расподелама*, 1990, ментор Ј. Малишић), Весна Јевремовић (*Статистичка својства временских серија са експоненцијалном маргиналном расподелом и мешавинама експоненцијалних расподела*, 1991, ментор Ј. Малишић), Виктор Обуљен (*Теореме кодирања за неке нестационарне канале везе*, 1997, ментор З. Ивковић), Драган Ђорић (*Статистичка анализа модела временских серија са праговима*, 2002, ментор Ј. Малишић).

Под менторством Драгана Бањевића је Ранко Недељковић одбранио докторску дисертацију *Оптимални планови превентивних замена у системима са непотпуном контролом* 1993. године.

По одбрани докторске дисертације 1985. године у рад са докторантима се укључује Павле Младеновић, а од 2008. године и Слободанка Јанковић по доласку на Математички факултет. Под менторством Павла Младеновића су одбранили докторске дисертације: Синиша Стаматовић (*Асимптотско понашање процеса одређених статистиком са временским померањем*, 1993), Јован Вукмировић (*О брзини конвергенције у граничним теоремама за екстремне вредности*, 2010), Ивана Илић (*О оцењивању индекса репа расподеле помоћу некомплетних узорака*, 2013), Јелена Јоцковић (*Стохастички модели прекорачења високог нивоа и проблеми чекања*, 2013), Ehfayed Shneina (*Екстремне вредности у низовима независних случајних величина са мешавинама расподела*, 2013), Јелена Станојевић (*Статистички проблеми оцењивања количника дисперзија и високих квантила расподела*, 2015), Милан Јовановић (*Оцењивање параметра поузданости двокомпонентног система*, 2015), Бојана Милошевић (*Асимптотска својства непараметарских тестова на У-статистикама и В-статистикама са недегенерисаним и слабо дегенерисаним језгром*, 2016, коментор Ј. Никитин), Ленка Главаш (*Граничне расподеле парцијалних максимума равномерних АР(1) процеса*, 2016), Кристина Вељковић (*Контрола квалитета праћењем централне тенденције негаусових случајних величина*, 2016).

Под менторством Слободанке Јанковић су одбранили докторске дисертације Марко Обрадовић (*Карактеризације неких расподела и Бахадурова асимптотска ефикасност тестова сагласности*, 2015, коментор Ј. Никитин) и Halima Elfaghihe (*Конструкција и особине контролних картица за стационарне и некорелисане податке*, 2016).

Наставним планом од 2005. године смер *Вероватноћа и статистика* добија нов назив *Статистика, финансијска и актуарска математика*, који у потпуности описује сфере интересовања наставног кадра из стохастике на Математичком факултету. Наиме, по престанку рада Зорана Ивковића и по одласку неких његових млађих колега и сарадника у иностранство, где су махом остварили завидне каријере, слаби интересовање за бављење случајним процесима и стохастичком анализом, док се тежиште помера ка проучавању временских серија, теорији екстремних вредности и њиховој примени у финансијској и актуарској математици, што се може закључити из назива докторских дисертација одбрањених на Математичком факултету последњих десетак година.

Овим изучавање теорије случајних процеса није запостављено у Србији, јер су у другим универзитетским центрима, пре свега у Нишу и Новом Саду, стасали тимови истраживача који се успешно баве овом облашћу. На Природно-математичком факултету у Нишу првенствено се изучавају проблеми егзистенције, јединствености, стабилности, аналитичког и нумеричког решавања различитих типова стохастичких диференцијалних једначина, на темељима које је поставио један од аутора овог текста, Светлана Јанковић, после одбране своје докторске дисертације 1987. године. Под њеним менторством одбраниле су докторске дисертације Миљана Јовановић (*Пертурбоване стохастичке диференцијалне једначине*, 2002), Јасмина Ђорђевић (*Беквард стохастичке диференцијалне једначине са пертурбацијама*, 2013), Биљана Тојтовска (*Општа стабилност стохастичких неуронских диференцијалних једначина (неуронских мрежа)*, 2014, одбрањена на Универзитету Ћирило и Методије у Скопљу) и Горица Павловић (*Општи тип стабилности стохастичких функционалних диференцијалних једначина*, 2014). Под менторством Миљане Јовановић докторске дисертације су одбраниле Марија Милошевић (*Нумеричке и аналитичке апроксимације решења стохастичких диференцијалних једначина*, 2011), Маја Василова (*Стохастички Гилпин-Ајала модел компетиције*, 2012) и Марија Крстић (*Утицај Гаусовог белог шума на стабилност неких популационих и епидемиолошких модела*, 2013). Суштински, у већини ових дисертација су класични проблеми теорије обичних диференцијалних једначина, пре свега егзистенција, јединственост и стабилност решења, приближно решавање, решавање помоћу редова, нумеричко решавање, пренети у теорију стохастичких диференцијалних једначина. Имајући у виду да су обичне диференцијалне једначине биле главни предмет изучавања Михаила Петровића и већине његових доктораната, потпуно је очекивана појмовна повезаност у генеалошком стаблу ове групе стохастичара са Природно-математичког факултета у Нишу са Михаилом Петровићем, преко Тадије Пејовића и Зорана Ивковића. Због актуелности стохастичког моделирања разнородних појава у природним и друштвеним наукама стохастичким диференцијалним једначинама истог типа, на пример у медицини, екологији и економији, што је директна асоцијација на аналогије у математичкој феноменологији Михаила Петровића, не изненађује интересовање значајне групе млађих истраживача за ову област.

На Природно-математичком факултету у Нишу стасао је и тим истраживача који се првенствено баве проучавањем временских серија. Ово проучавање је започела Биљана Поповић која је ментор докторских дисертација Мирослава Ристића (*Стационарни униформни ауторегресивни процеси*, 2002) и Владице Стојановића (*Временске серије као нелинеарни стохастички модели*, 2007), док је Мирослав Ристић ментор докторских дисертација Божидара Поповића (*Неки модели временских серија са маргиналном апроксимираном бета расподелом*, 2011), Александра Настића (*Допринос анализи временских низова са негативним целобројним вредностима генерисаним геометријским бројачким низовима*, 2012), Ане Милетић Илић (*Временски низови са ненегативним целобројним вредностима генерисаних зависним бројачким низовима*, 2014), Предрага Поповића (*Моделовање дводимензионалних ауторегресивних временских низова са негативним целобројним вредностима*, 2015) и Миодрага Ђорђевића (*Допринос анализи временских низова са целобројним вредностима*, 2016).

На Природно-математичком факултету у Крагујевцу је Љиљана Петровић 1988. године одбранила докторску дисертацију *Узрочност и марковско својство* под менторством Јована Малишића. Бавећи се континуирано теоријом узрочности, она је у свој рад укључила млађе сараднике и ментор је докторских дисертација Драгане Ваљаревић (*Статистичка теорија узрочности, стохастичке диференцијалне једначине и мартингалне репрезентације*, 2013) и Слађане Димитријевић (*Статистичка теорија узрочности у непрекидном случају*, 2013).

Узрочност, односно *активитет узрока* је, поред *аналогија*, фундаменталан појам у математичкој феноменологији Михаила Петровића. Овом појму је он посветио највећи део монографије *Елементи математичке феноменологије* и неколико чланака и расправа. Штавише, о њему је одржао приступно предавање, тј. академску приступну беседу, *О математичкој теорији активности узрока*, при проглашењу за редовног члана Српске краљевске академије 4. фебруара 1900. године. Под узроком он подразумева „сваки феномен који тежи да мења какво стање или да уноси пертурбације у какав други феномен, а његов активитет је његова динамичка страна … оличена … својим *смислом* и *интензитетом*”. Јасно, под интензитетом узрока се у терминима вероватноће подразумева вероватноћа догађаја (узрока). С обзиром на претходна три доктората у којима узрочност има пробилистички смисао, јасно је да је од *Елемената* до данас у математичким наукама које се баве појмом узрочности пређен огроман развојни пут.

Грана математичког генеалошког стабла Михаила Петровића која преко Караматине линије доводи до изучавања стохастике посебно је значајна за Природно-математички факултет у Новом Саду. Караматин студент Богољуб Станковић (1924–2018), а потом и његов студент и млађи колега Стеван Пилиповић, постигли су значајне резултате у функционалној анализи, посебно у теорији уопштених функција. Стеван Пилиповић и његови сарадници већ дуже време интензивно изучавају уопштене стохастичке процесе са применама на стохастичке диференцијалне једначине. Неки од резултата тих истраживања су делови докторских дисертација Загорке Црвенковић Лозанов (*Прилог теорији уопштених случајних процеса*, 1989, ментор С. Пилиповић), Доре Селеши (*Уопштени стохастички процеси у бесконачнодимензионалним просторима са применама на сингуларне стохастичке парцијалне диференцијалне једначине*, 2007, ментор С. Пилиповић) и Тијане Левајковић (*Малиавенов рачун за хаос експанзије уопштених стохастичких процеса са применама у неким класама диференцијалних једначина*, 2012, ментор Д. Селеши), одбрањене на Природно-математичком факултету у Новом Саду. Неке класе Караматиних правилно променљивих функција су од фундаменталног значаја у теорији и применама више области стохастике, на пример, у теорији информација, актуарској математици, пре свега у теорији ризика, теорији масовног опслуживања и статистичкој механици.

Поред стохастичара који се налазе у ове две гране генеалошког стабла Михаила Петровића, постоје и они који су посредно повезани са њим. Такав је случај са Миланом Мерклеом који је 1984. године докторирао на Департману за вероватноћу и статистику Мичигенског државног универзитета, али је био близак сарадник Драгослава Митриновића, једног од најуспешнијих доктораната Михаила Петровића.

Научни рад стохастичара са различитих факултета универзитетских центара у Србији једним делом се одвијао, а и данас се одвија, на семинарима. Током осамдесетих и у првој половини деведесетих на Природно-математичком факултету у Београду је радио семинар под називом *Вероватноћа и примене* којим су руководили Зоран Ивковић и Драган Бањевић. Од 1996. године семинар мења назив у *Теорија вероватноћа и математичка статистика* и од тада њиме руководи Павле Младеновић. Поред тога, у Математичком институту САНУ, као водећој институцији која окупља математичаре у Србији, 1996. године је почео са радом *Семинар за стохастику*, којим су наредне две године руководили Слободанка Јанковић и Дражен Пантић, а од 1998. до 2007. године Слободанка Јанковић и Светлана Јанковић, после чега је семинар престао са радом. На семинарима на Природно-математичком факултету, касније на Математичком факултету, и у Математичком институту предавања су поред домаћих, држали и многи признати стохастичари из иностранства. Тако је Зоран Поп-Стојановић неколико последњих година рада Семинара за стохастику у Математичком институту држао блокове предавања из стохастичке анализе, што се веома позитивно одразило на научно усавршавање млађих учесника семинара.

Поред својих редовних ангажовања у настави и науци, стохастичари из свих универзитетских центара су учествовали у раду многих домаћих и међународних конференција, симпозијума и летњих школа, успостављајући притом сарадњу са стохастичарима из иностранства, често преко пројеката Министарства за науку и међународних пројеката.

На основу математичког генеалошког стабла Михаила Петровића, преко грана које воде од Драгољуба Марковића и Тадије Пејовића, односно Јована Карамате, Богољуба Станковића и Стевана Пилиповића, може се закључити да је пређен веома дуг али успешан пут у формирању научног кадра из стохастике и у развоју пробабилистичке мисли у Србији. Штавише, пошто је случајност пратећи феномен скоро свих појава у природним и друштвеним наукама, стохастика је незаобилазно присутна у теорији и применама ових наука. Због тога је логично очекивати у наредним годинама интензиван раст и вишеструко гранање стохастичке гране математичког генеалошког стабла Михаила Петровића.

Библиографија

[1] Михаило Петровић Алас, *Математичка феноменологија*, (приредио Д. Трифуновић), Завод за уџбенике и наставна средства, Београд (1998).

[2] Михаило Петровић, *Феноменолошко пресликавање*, Српска Краљевска Академија Београд (1933).

[3] Михаило Петровић Алас, *Елементи математичке феноменологије*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд (1998).

[4] *Дигитални легат Михаила Петровића*, Математички факултет у Београду, http://alas.matf.bg.ac.rs/ websites/digitalnilegatmpalas/

[5] *Историјат Катедре за статистику, финансијску и актуарску математику*, Математички факултет у Београду, http://www.stat.matf.bg.ac.rs/srpski.htm

[6] Загорка Шнајдер, Славиша Прешић, *Поглед на развој Математичког факултета у Београду*, Споменица поводом 125 година Математичког факултета, Математички факултет у Београду, 1998.

[7] Mathematics Genealogy Project, https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=53473

Svetlana Janković
Miljana Jovanović

THE STOCHASTIC BRANCH TO THE MATHEMATICAL GENEALOGICAL TREE OF MIHAILO PETROVIĆ ALAS

S u m m a r y

Academician Mihailo Petrović Alas is a great Serbian mathematician and founder of the Serbian School of Mathematics who played a crucial rule in the development of the mathematical education and research, not only in Serbia, but in its neighborhood. The outstanding creativity, inventivity and universality were the main characteristics of the scientific work of Mihailo Petrović Alas. Although he was not directly interested in stochastics, he indirectly influenced it through his doctorands, first of all through Dragoljub Marković, Tadija Pejović and Jovan Karamata, and also through younger scientists who came after them, in the development of Probability and Statistics in the university centers in Serbia. The purpose of this paper is to review the stochastic genealogical branch of Mihailo Petrović Alas, first of all through the branches of Tadija Pejović and Jovan Karamata, as well as to present the scientific development of Probability and Statistics in Serbia through received doctoral theses.

МИХАИЛО ПЕТРОВИЋ АЛАС И КРИПТОГРАФИЈА

МИОДРАГ ЖИВКОВИЋ*

А п с т р а к т. – Приказана је улога Михаила Петровића у шифрантској служби на основу расположивих докумената о школи криптографије, односно описа шифарских система коришћених у Краљевини Југославији.

Кључне речи: криптографија, шифровање, дешифровање, декриптирање

1. Увод

Криптографија је наука која се бави начинима очувања тајности података, а Петровић је у томе постигао велике резултате. О његовом бављењу криптографијом нема много писаних трагова, што се може разумети, с обзиром на тајновитост којом је криптографија окружена. Драган Трифуновић у књизи [1] каже:

„Још почетком 20. века Михаило Петровић, као математичар, који је познавао дискретну математику и комбинаторику, бавио се шифровањем, односно криптографијом за дипломатску и војну пошту. За Крфску декларацију, састанак вођа Краљевине Србије, Краљевине Црне Горе, Хрватске, Славоније, Војводине из Аустроугарске, Никола Пашић је захтевао од Михаила Петровића да направи шифре преко којих ће те делегације, док рат још траје, да се обавештавају, а да непријатељ не дозна садржај писма-поруке. Тако је почело. Између два рада Михаило Петровић је у Генералштабу, у Обавештајном одељењу, држао часове из шифровања и водио ову службу.

Михаило Петровић је мобилисан у 73. години као потпуковник и ти официри су имали збег у Сарајеву.”

Понекад и обичним смртницима буде омогућено да стекну увид у свет посвећених људи који се баве криптографијом. Занимљива слика о томе може

* Математички факултет, Универзитет у Београду, и-мејл: ezivkovm@matf.bg.ac.rs

се наћи у филму[2] The Falcon and the Snowman Џона Шлезинџера. Бојса, главног јунака човек из обезбеђења доводи до врата са електронском шифром[3]. Он има шифру, а човек из обезбеђења – не. Унутра наилази на сараднике посвећене у тајну. Чињеница да у те просторије имају приступ само они утиче на природан начин на њихово понашање: у тешкој каси за тајне документе чувају алкохол; машину за сецкање докумената користе као миксер да смућкају коктел. Наравно, правила која важе за људе у оваквом окружењу пре свега подразумевају строгу обавезу чувања тајне. Михаило Петровић Алас као главни криптограф имао је врхунску одговорност за шифрантску службу.

1.1. Основни појмови

Уобичајени модел шифроване комуникације има три учесника: пошиљаоца A, примаоца B и „прислушкивача” C. Пре него што A пошаље поруку (*јасни текст*) M намењену примаоцу B, он је *шифрује*, примењујући на њу шифарску трансформацију F_K са *кључем* K, и тако израчунава *шифрат* $F_K(M)$. Израчунати шифрат он шаље примаоцу B посредством јавног (несигурног) канала. Када B прими шифрат, он га *дешифрује* применом инверзне трансформације F_K^{-1}: $M = F_K^{-1}(C)$. Трећи учесник C прислушкује канал везе, и тако долази до шифрата C. На основу тога он покушава да реконструише поруку M. Уобичајена претпоставка је да поступак (алгоритам) шифровања – трансформацију F знају сви, A, B и C, али да кључ K знају само A и B. Дакле, C хоће да прочита (*декриптира*) поруку, иако не зна кључ K. Његова основна идеја је да испроба све могуће кључеве. Због тога сви шифарски системи који претендују на то да буду сигурни, имају астрономски велики број могућих кључева. Декриптирање проверавањем свих могућих кључева је понекад могуће, и за такве потребе C обично има на располагању изузетно моћне рачунаре.

Од давнина криптографију примењују посебно војска, дипломатија. У данашње време су области примене јако раширене, између осталог и за *интернет ствари* (Internet of Things).

1.2. Примери шифри из најновије историје

Са шифрама се мора пажљиво руковати. Између осталог, то је разлог зашто се о (правим) шифрама мало зна. Неки од примера који показују да постоје изузеци од овог правила су шифре о којима се из разних разлога понешто сазнало, као што су

- Енигма и друге немачке и јапанске шифре из Другог светског рата,
- наши уређаји за шифровање коришћени у рату у Босни,

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/The_Falcon_and_the_Snowman

[3] https://www.youtube.com/watch?v=YzzeMDJ4lvk, погледати део који почиње од 4:20

- шифарски системи Краљевине Југославије које је смислио Михаило Петровић Алас.

Занимљиво је да се подаци о нашим крипто уређајима могу наћи у холандском музеју криптографије.[4] Уређај за шифровање говора КзУ-63 играо је значајну улогу у „југословенским ратовима” (1991–2001) у току којих је коришћен за заштиту неких важних радио комуникација. Скраћеница КзУ настала је од Крипто-заштитни уређај. За разлику од претходног, несигурног скремблера КзУ-61, уређај КзУ-63 обезбеђивао је сигурно шифровање дигитализованог говорног сигнала[5].

Уређај КзУ-42 служи за ручно шифровање или дешифровање порука у локалу, после чега би те поруке биле преношене куриром, Морзеовом азбуком, телепринтером или гласом помоћу радио уређаја или телефона. Коришћен је у ЈНА[6].

Хрватска војска користила је амерички уређај, скремблер KY-189 [7], као и швајцарски уређај HC-5205 CRYPTOMATIC Electronic Message Unit за преношење порука са уграђеним шифровањем (развијен у Crypto AG у Цугу око 1988. године).[8]

О овим нашим уређајима може се наћи и у записницима Хашког трибунала, посебно у сведочењу Неђа Благојевића задуженог за везе у Војсци Републике Српске (1992–1997).[9]

2. Шифарска служба у Краљевини Југославији – школа криптографије

Серија докумената [2] служила је за обуку шифраната, односно разбијача шифри. Приказаћемо укратко неке делове прве две од ових свезака.

2.1. Криптографија – општи појмови

Ова свеска нуди увод у криптографију. Уводе се основни појмови, на начин карактеристичан за оно време. Илустроваћемо то са неколико карактеристичних пасуса.

[4] http://www.cryptomuseum.com

[5] http://www.cryptomuseum.com/crypto/yugo/kzu63/img/302088/026/full.jpg

[6] http://www.cryptomuseum.com/crypto/yugo/kzu42/img/302210/028/small.jpg

[7] http://www.cryptomuseum.com/crypto/usa/ky189/img/ky189_controls.png

[8] http://www.cryptomuseum.com/crypto/hagelin/hc5205/img/302206/009/small.jpg

[9] International Criminal Tribunal for the Former Yugoslavia. Case IT-05-88-T. Prosecutor versus Vujadin Popovic et al. 17 June 2008 (Transcript). http://www.icty.org/x/cases/popovic/trans/en/080617IT.htm

Суштина тајне преписке види се из самога њенога назива. Другим речима, ако две особе хоће и желе да једно другом нешто јаве, саопиште или поруче, а да то остане тајна за сваког другог, они ће међусобно морати утврдити и начин којим ће се послужити, те да то остане апсолутна тајна за остале.

Жеља, а врло често и прека потреба трећег лица да у туђу тајну по сваку цену продре, натераће га да употреби сва могућа и немогућа средства, док у овом на било који начин не успе, о чему ће бити говора доцније.

У случају да тајна преписка дође у руке ненадлежног лица, зашто се он истом не може користити? У чему се састоји та тајна? У уговореном кључу између две стране, и све дотле, док се не дође до кључа, тајну преписку је врло тешко, али не и немогуће одгонетати.

У наставку се излажу важни појмови и њихове дефиниције:

- **Криптографија**, наука о тајном писању
- **Криптограф** – човек који се практично бави овом науком; такви се људи зову још: шифрери и дешифрери. Њихов се рад назива: шифровање и дешифровање.
- **Криптограм-шифра,** је резултат крајњега рада шифрера. Другим речима – **шифра-криптограм** је скривеност правог – јасног текста извесним уговореним знацима, који за непозвана лица чине – тајну.

Важан део упутства чине правила „руковања са тајним средствима”. Набројане су мере опреза, између осталог

- пре самог шифровања треба настојати да се непозвана лица одстране па и онда, кад је реч о пријатељској особи или члану породице;
- код дешифровања се морају предузети исте мере сигурности као и код шифровања.

2.2. Шифра просте замене и њено декриптирање

У Свесци бр. 1 описан је основни начин шифровања, *проста замена* састоји се од „замене слова или бројева нечим другим”. Код просте замене, на пример, користи се фиксирана табела у којој се у првом реду налазе сва слова алфабета („нормалан алфабет”), а у другом реду сва слова алфабета, али измењеним редоследом („алфабет замене”). Једноставан пример такве табеле је следећи:

А	Б	В	Г	Д	Ђ	Е	Ж	З	И	нормалан алфабет
Њ	О	П	Р	С	Т	Ћ	У	Ф	Х	алфабет замене
Ј	К	Л	Љ	М	Н	Њ	О	П	Р	нормалан алфабет
Ц	Ч	Џ	Ш	А	Б	В	Г	Д	Ђ	алфабет замене
С	Т	Ћ	У	Ф	Х	Ц	Ч	Џ	Ш	нормалан алфабет
Е	Ж	З	И	Ј	К	Л	Љ	М	Н	алфабет замене

Пример 11. *Шифровањем поруке*
„вечерас полазим дочекај ме”
добија се шифрат
„пћљћђње дгуњфха сгљћчњц аћ”.

Наведена табела није карактеристична за општи случај, јер је у њој алфабет замене добијен цикличком пермутацијом нормалног алфабета. У општем случају примењује се произвољна пермутација нормалног алфабета. За декриптирање („дешифровање” је израз који се у свескама користи и када се зна, и када се не зна кључ) користи се хистограм фреквенција слова, односно чињеница да су просечне учестаности појављивања појединих слова у тексту на сваком, па и нашем језику приближно пропорционалне дужини текста. Те учестаности дакле карактеришу наш језик. У тексту од 10000 слова укупно око 8500 слова је неко од слова из следеће табеле, у којој су приказане и учестаности појављивања тих слова.

А	1159	Н	517	У	393	К	343
О	980	Т	480	Д	381	П	311
И	881	С	476	М	363	Л	273
Е	862	Р	470	В	357	Ј	268

У наставку се детаљно наводе остале особине нашег језика – слова која претходе или следују неком другом слову, посебно за самогласнике и сугласнике; учестаности парова слова (биграма), итд.

Термин *тежиште сваке шифре* односи се на важне речи које се могу очекивати у отвореном тексту. Ове речи олакшавају декриптирање.

Ако се у времену рата ухвати нека војна шифра, природно је, да у њој треба тражити елемент, који је у непосредној вези са ратом. Ти елементи су чисто војничке и ратне природе и треба их тражити у речима војне терминологије као: непријатељ, корпус, армија, дивизија, артиљерија, пешадија, пук, батаљон, напад, муниција, комора, попуна итд.

Или пак, ако се тиче неке мирнодопске дипломатске шифре, природно је, да се у њој неће тражити горњи елементи, већ неки сасвим други као: влада, министар, нота, криза, протест, председник, већина, опозиција, или имена важнијих политичких личности, земаља, актуелни догађаји итд., а што се све може закључити из дневне штампе појединих земаља.

За рад на декриптирању шифрата користи се термин *криптографска студија*. Организација рада приликом криптографске студије према упутству састоји се од три фазе:

- прве фазе: бројања слова, биграма; уочавање понављања у шифрату; из таблице биграма се може са много вероватноће рећи које слово шифре представља самогласник, а које сугласник ...
- друге фазе: тумачења резултата из прве фазе;
- треће фазе: изналажења (по смислу) слова, слогова, речи и одломака речи које се нису могле установити у другој фази.

Ова упутства за декриптирање пропраћена су конкретним задацима – вежбањима.

Остале свеске из ове серије односе се на анализу других, компликованијих система шифровања.

3. Шифарски системи Краљевине Југославије

Занимљиво је да су сачувани описи шифарских система коришћени у Краљевини Југославији. Системи 1а, 1б, 2а, 2б, 3а, 4а, 5, 6а, 6б, 7а, 7б, 8, 9, 10а, 10б, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 описани су у посебним штампаним документима [3].

3.1. Шифарски систем 1а

Прибор за шифровање чине три реглете (траке) са исписаним низом слова. Плава (означена са Ш) и црвена (означена са Д) су са испретураном азбуком, а средња, бела је са нормалном азбуком. Траке су непомичне и исписане заједно једна испод друге у облику таблице. Изнад плаве реглете налазе се редом исписани бројеви од 1 до 30 који дају редни број слова нормалне азбуке. Таквих таблица има 30 и свака је нумерисана једним словом азбуке.

Другим речима, користи се 30 таблица са простом заменом, при чему се уз сваку пермутацију Ш (плаву) азбуке заједно са њом налази и њена инверзна пермутација Д (црвена). Као пример наводе се три таблице, означене словима П, Ф и О.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	П
к	м	у	а	з	ж	н	х	ћ	у	ч	ј	и	ф	е	Ш
а	б	в	г	д	ђ	е	ж	з	и	ј	к	л	љ	м	
г	ч	њ	п	с	ш	м	ђ	д	л	к	а	у	р	б	Д

16	17	18	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	П
с	в	р	г	љ	д	ш	њ	л	т	п	џ	б	о	ђ	Ш
н	њ	о	п	р	с	т	ћ	у	ф	х	ц	ч	џ	ш	
е	ћ	џ	х	о	н	ф	з	в	љ	ж	и	ј	у	т	Д

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Ф
з	о	р	љ	ш	к	с	н	ж	ф	и	м	т	д	у	Ш
а	б	в	г	д	ђ	е	ж	з	и	ј	к	л	љ	м	
у	џ	с	р	љ	о	ф	з	а	ј	ч	ђ	ч	г	к	Д

16	17	18	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Ф
х	л	ђ	џ	г	в	п	ц	а	с	ћ	ч	ј	б	њ	Ш
н	њ	о	п	р	с	т	ћ	у	ф	х	ц	ч	џ	ш	
ж	ш	б	т	в	с	л	х	м	и	н	ћ	ц	п	д	Д

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	О
л	њ	ћ	в	у	џ	ћ	ф	о	м	б	с	ђ	ш	т	Ш
а	б	в	г	д	ђ	е	ж	з	и	ј	к	л	љ	м	
ц	ј	г	џ	т	л	а	н	њ	ф	г	ш	х	р	и	Д

16	17	18	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	О
ж	з	р	ц	љ	н	д	ч	х	и	л	а	ј	г	к	Ш
н	њ	о	п	р	с	т	ћ	у	ф	х	ц	ч	џ	ш	
с	б	з	в	о	к	м	е	д	ж	у	п	ћ	ђ	л	Д

Поступак шифровања почиње тиме што шифрер испред јасног текста ставља произвољно ДВА слова, на пример пи. Прво слово је редни број таблице која се користи, а друго својим редним бројем казује број слова групе која ће се шифровати по тој таблици. Пошто је ових десет слова шифровао, ставља поново два произвољна слова, на пример фе и наредну групу од 7 слова (јер је 7 редни број слова е) шифрује по табели ф итд.

При завршетку јасног текста, кад остане неколико слова, на пример 12, онда као друго слово узети 12-то слово, тј. слово к.

Само шифровање појединих група врши се тако што се слово јасног текста тражи на средњој, белој реглети и замењује наизменично одговарајућим словом прво са плаве реглете, друго са црвене, треће са плаве итд.

Пример 12. *Јасан текст НЕПРИЈАТЕЉ ЈЕ У ПОВЛАЧЕЊУ може се шифровати на следећи начин.*

Нумера таблице	*Број слова групе*	
п	*и*	*н е п р и ј а т е љ* *с м г о ц к к ф н р*
ф	*е*	*ј е у п о в л* *и ф а т ђ с т*
о	*д*	*а ч е њ у* *с ћ ћ б х*

Добијени шифрован текст је писмгоцккфнрфеифатђстодсћћбх.

Поступак дешифровања је сличан. Слова шифре траже се на белој реглети и наизменично замењују одговарајућим словима прво са црвене реглете, друго са плаве, треће са црвене итд.

Запажа се да сам шифрер бира које ће таблице да користи. У упутству се каже да се њему може дати неки подскуп таблица. Од њега се очекује да неправилно мења број слова у групама.

За Систем 1а са латиницом користе се 22 таблице нумерисане словима од a до z.

Занимљив детаљ је да је на маргини текста уз пример отиснут печат са натписом

МИНИСТАРСТВО ВОЈСКЕ И МОРНАРИЦЕ
Краљевине Југославије

3.2. Шифарски систем 1б

Систем 1б користи сличан систем таблица са три реглете: плавом и црвеном са испретураном азбуком и белом са нормалном азбуком.

Нарочитим кључем у бинарној азбуци од два знака, плавог и црвеног, одређује се редослед којим ће се употребљавати плава, односно црвена реглета. Тај кључ се доставља на један од четири начина и остаје исти за целу депешу.

I начин У посебним таблицама написани су један испод другог 30 кључева који су нумерисани редом словима азбуке. Кључ се доставља тако што се слово које га одређује стави као индикатор испред шифрованог текста.

II начин За достављање кључева може се узети текст једне уговорене књиге која има најмање 30 страна. Прво слово шифрованог текста је индикатор, који својим редним бројем одређује страну књиге. Почев од првог слова означене стране латиничне књиге исписује се бинарни кључ (плаво, црвено, односно $\cdot$, $-$) на тај начин што се испод сваког самогласника стави плаво или $\cdot$, а уместо сваког сугласника црвено или $-$ (шифрер сам бира начин означавања).

III начин Испред шифре ставља се индикатор од пет слова. Та слова исписана Морзеовом азбуком дају бинарни низ ($\cdot$, $-$, односно плава, црвена црта) који се користи као кључ. На пример, кључу Гирфо одговара низ

$- - \cdot$ (г), $\cdot\ \cdot$ (и), $\cdot - \cdot$ (р), $\cdot\ \cdot - \cdot$ (ф), $- - -$ (о).

IV начин Датум и месец на депешама не шифровати, већ га на депеше јасно написати. Датум преведен на Морзеову азбуку даје бинарни низ кључа (плаво, црвено, односно $\cdot$, $-$). На пример, датум 3. март 1940. одређује кључ

$\cdot\ \cdot\ \cdot - -$ (3), $- -$ (м), $\cdot -$ (а), $\cdot - \cdot$ (р), $-$ (т).

Поступак шифровања почиње подвлачењем јасног текста црвеним или плавим цртама, односно са $\cdot$ или $-$. Ако се кључ исцрпи, понавља се истим редом до краја текста. Свако слово јасног текста тражи се на средњој белој реглети таблице означене са Ш и замењује се (шифрује) одговарајућим словом црвене, односно плаве реглете према томе којом је бојом слово подвучено. Испред шифрованог текста ставља се индикатор кључа, чији број слова зависи од изабраног начина достављања кључа.

Пример 13. *Порука „Непријатељ је у повлачењу" се шифрује кључем б на први начин. Елементи бинарног кључа су у табели означени словом ц (црвена боја) или п (плава боја).*

	Н	*е*	*п*	*р*	*и*	*ј*	*а*	*т*	*е*	*љ*	*ј*	*е*	*у*	*п*	*о*	*в*	*л*	*а*	*ч*	*е*	*ћ*	*у*
б	*ц*	*п*	*п*	*ц*	*п*	*ц*	*п*	*п*	*ц*	*п*	*п*	*ц*	*ц*	*п*	*ц*	*ц*	*п*	*п*	*ц*	*ц*	*ц*	*п*
	п	*љ*	*н*	*ж*	*п*	*б*	*з*	*е*	*т*	*е*	*б*	*т*	*б*	*н*	*д*	*ј*	*т*	*з*	*р*	*т*	*в*	*к*

Пошто се дода индикатор б, добија се шифровани текст (подељен у групе по пет слова)

бпљнж пбзет ебтбн ђтзр твк

3.3. Шифарски системи 6а

Не користи се никакав посебан прибор. Датум даје кључ. Датум се не шифрује, већ се на депеши јасно испише. Дан и месец датума се испишу Морзеовом азбуком и тако добијеним низом Морзеових знакова исподвлаче се слова јасног текста, и то: тачком два, а цртом три слова. Кад се кључ исцрпи, он се понавља до краја депеше.

У току шифровања слова означена тачком шифрују се тако да се прво слово замени претходним, а друго наредним словом нормалне азбуке. Слова означена цртом шифровати овако: прво слово заменити претходним, друго не шифровати, а треће заменити наредним словом нормалне азбуке. Ако се текст завршава са једним словом подвученим цртом, оно се замењује претходним словом; ако се текст завршава са два слова подвучена цртом, прво се замењује претходним, а друго наредним словом.

Пример 14. *Потребно је шифровати јасан текст*

23 март 1940

Непријатељске трупе се повлаче

Кључ се формира на основу датума из јасног текста:

2	3	м	а	р	т
. . – – –	. . . – –	– –	. –	. – .	–

Поступак шифровања приказује следећа табела:

Н	*е*	*п*	*р*	*и*	*ј*	*а*	*т*	*е*	*љ*	*с*	*к*	*е*
·		·		–			–			–		
м	*ж*	*о*	*с*	*з*	*ј*	*б*	*с*	*е*	*м*	*р*	*к*	*ж*

т	*р*	*у*	*п*	*е*	*с*	*е*	*п*	*о*	*в*	*л*	*а*	*ч*	*е*
·		·		·		–			–			–	
с	*и*	*ћ*	*р*	*џ*	*т*	*џ*	*п*	*п*	*б*	*л*	*б*	*ц*	*ж*

Према томе, шифрат поруке је

23 март 1940

мжосз јбсем ркжси ћрџтџ ппблб цж

Запажа се да овај поступак није сигуран, јер се кључ – датум исписује на депеши. Неко ко неовлашћено дође до депеше може да је без проблема прочита ако зна за примењени систем, јер се кључ за дешифровање може реконструисати на основу поруке која му је у рукама.

4. Закључак

Михаило Петровић имао је значајну улогу у шифарској служби у Краљевини Југославији. Шифарски системи које је креирао су занимљиви имајући на уму време у ком су настали. Неке варијанте усаглашавања кључа између пошиљаоца и примаоца шифроване поруке су били проблематични.

Захвалница. *Захваљујем се професору Жарку Мијајловићу за помоћ приликом набавке [2, 3].*

Рад је подржан од стране Министарства образовања, науке и технолошког развоја, пројекат 174021.

Библиографија

[1] Универзитет у Београду, Универзитетска библиотека „Светозар Марковић” у Београду. *Легенде Београдског универзитета. Михаило Петровић Алас, Аница Савић-Ребац, Александар Ђ. Костић, Александар Дероко*, Зборник предавања одржаних у Универзитетској библиотеци у периоду 2002–2004, Београд, 2005.

[2] Краљевина Југославија, Главни Ђенералштаб, Обавештајно одељење, Одсек за шифру. *Криптографија. Школа за обуку на шифри*, српскохрватски језик. Адлигат, Музеј српске књижевности. Дигитализовано у Математичком институту.

[3] Краљевина Југославија, Главни Ђенералштаб, Обавештајно одељење, Одсек за шифру. *Шифарски системи 1а, 1б, 2а, 2б, 3а, 4а, 5, 6а, 6б, 7а, 7б, 8, 9, 10а, 10б, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.* Адлигат, Музеј српске књижевности. Дигитализовано у Математичком институту.

Miodrag Živković

MIHAILO PETROVIĆ AND CRYPTOGRAPHY

S u m m a r y

The role of Mihailo Petrović in cryptographic service of Kingdom of Yugoslavia is presented, based on documents about school of cryptography and on descriptions of cryptographic systems.

ОД БЕОГРАДСКЕ ШКОЛЕ МИХАЈЛА ПЕТРОВИЋА АЛАСА ДО САРАЈЕВСКЕ ШКОЛЕ АНАЛИЗЕ

МИРЈАНА ВУКОВИЋ*

А п с т р а к т. – Након краћег осврта на Михајла Петровића Аласа, оснивача у свијету познате Београдске школе математике, говорићу о Сарајевској школи анализе која је израсла из Београдске школе, а коју су чинили београдски студенти Вера Поповић (удата Шнајдер) – прва жена математичар у БиХ која је уједно била и аутор првог научног рада којег је објавио аутор рођен на просторима БиХ у Контрандију (Comptes Rendus) Француске академије наука у Паризу (1931), академик Махмут Бајрактаревић, први доктор математичких наука из БиХ, који је докторирао на париској Сорбони (Sorbonne) 1953, професори Шефкија Раљевић, Миленко Штековић, академик Бранислав Мартић и, посебно, академик Манојло Маравић, који је, по завршетку Другог свјетског рата и студија математике, академску каријеру започео као први асистент на Математичком институту САН и асистент Јована Карамате на Природно-математичком факултету у Београду, по којем сам и ја, као његова докторантица, потомак Београдске школе математике.

Кључне речи: Београдска школа математике, Сарајевска школа математике

О академику Михајлу Петровићу Аласу, оснивачу Београдске школе математике се писало много, како о његовим математичким резултатима, његовим путописима и филозофским расправама и есејима, тако и о његовом рибарењу, његовом оркестру и боемском животу. Овдје ћемо споменути само неке од момената значајних за развој математике у Београду и Србији, у којим је он одиграо кључну улогу.

* Ауторка припада вертикали Београдске математичке школе као докторандица академика Манојла Маравића, докторирала 1979. Академија наука и умјетности Босне и Херцеговине, и-мејл: mvukovic@anubih.ba, mvukovic@anubih.ba

У првој половини прошлог вијека, пред избијање Првог свјетског рата, 1905. године основан је Београдски универзитет у чијем оснивању су важну улогу имали Михајло Петровић Алас и Богдан Гавриловић, као и у организовању Математичког семинара који је почео са радом 1896. године. Затим, на Београдски универзитет, долази Милутин Миланковић и већ 1912. и 1913. године, на Универзитету, крећу одбране првих доктората. Тако рад Михајла Петровића полако прераста у праву школу математике, која ће довести до стварања чувене Београдске школе математике. Захваљујући њему у Београд стиже дух француске школе, која је, уз њемачку, у то вријеме, била најзначајнија школа математике у Европи, што ће бити од посебног значаја за развој математичких наука и укључивање Београда у европске центре науке.

О значају и доприносу Михајла Петровића за развој математике су оставили записе скоро сви његови ученици, али најдрагоцјенији су они које су писали његови пријатељи попут Милутина Миланковића, једног од најзначајнијих српских научника. Захваљујући тим забиљешкама, Михајло Петровић Алас је представљен као икона Београда.

У чланку ћу говорити, најприје, о значају Михајла Петровића Аласа и Београдске школе математике за настанак Сарајевске школе математике, посебно школе математичке анализе. О томе се мало говорило, тако да се скоро ни не зна да је у њеном настанку битну улогу одиграла Београдска школа и да је Михајло Петровић Алас био учитељ првих математичара из Босне и Херцеговине (БиХ), као и да је већина првих босанскохерцеговачких математичара, преко линије математичког генеалошког стабла Ј. Карамате и В. Авакумовића израсло из стабла Михајла Петровића.

Док су будући љекари, сликари и ини из БиХ, одлазили на студије у Беч и Праг, математичари су се школовали у Београду, јер ни један од поменутих центара није био пуно бољи, а Београд је био ближи.

Први професори математике на Сарајевском универзитету били су студенти Београдског универзитета: Вера Поповић (удато Шнајдер) (1904), затим Махмут Бајрактаревић и Шефкија Раљевић (1909), Миленко Штековић (1915), рођени у БиХ и Манојло Маравић (1919) и Бранислав Мартић (1923) родом из Хрватске, односно Србије.

Рецимо да су они, у правом смислу, били сљедбеници Београдске школе. Кроз свој стручно и педагошки обављан наставнички рад, давали су врло значајан дугогодишњи, пионирски допринос развоју образовања, како високог, тако и основног и средњег, ангажовањем на изради планова и програма школа, рецензирањем уџбеника и препоручивањем најбољих, а покретањем постдипломског студија образоване су и одгајане генерације младих математичара, што је било од посебног значаја за развој науке у БиХ.

Проф. Вера Поповић Шнајдер (Рељево 1904 – Сарајево 1976) – прва жена математичар

Своју причу започећу причом о Вери Поповић, младој дјевојци која ће, иако је, у то вријеме, била права ријеткост да се женска дјеца школују, прва кренути на студиј математике у Београд и тако постати прва професорица математике у БиХ, али не само због тога, него и зато што је у Сарајево пренијела дух Београдске школе, а затим одиграла битну улогу у покретању студија математике у Сарајеву и стварању Сарајевске школе математике, о којој ћемо касније рећи нешто више.

Вера Поповић је рођена у Рељеву код Сарајева, гдје се, у то вријеме, налазила православна Богословија, на чијем челу се, као ректор, налазио њен отац. Потицала је из угледне породице у којој је постојала традиција доброг образовања, а која је била добростојећа, тако да ју је могла послати на студиј у Београд. Одмах по завршетку Класичне гимназије у Сарајеву, школске 1922/23. године, Вера Поповић уписује, на Филозофском факултету у Београду, студиј математике, група: примјењена математика, теоријска математика и експериментална физика. По завршетку студија, кратко ради као професор Женске гимназије у Сарајеву, а затим, као један од најбољих студената генерације, добија стипендију Француске владе и одлази, у Париз, на Институт „*Анри Поенкаре*" (*Henri Poincaré*, 1929), иако је имала препоруку, двојице великана Београдске школе: Милутина Миланковића и Антона Билимовића, за рад на докторској дисертацији у Њемачкој.

Током боравка у Паризу Вера Шнајдер учествује у раду Научног Семинара, али ради и у Лабораторију Института. Пошто се истакла у Семинару, добија понуду за рад у својству хонорарног сарадника у Лабораторију за хидродинамику на Сорбони (Université Paris IV – Sorbonne), коју она прихвата. Посебно је значајно истакнути да, у току студијског боравка у Паризу, Вера Шнајдер објављује, у „*Комптрандију*" (*Comptes Rendus*) – научном часопису Француске академије наука, свој први научни рад (1931), који је уједно био и први научни рад у области математике којег је објавио аутор рођен у БиХ.

Постоји документ, из ког се види да је Вери Поповић нуђен и ангажман у Министарству ваздухопловства Француске, али, наша *Марија Кири* (*Marie Curie*), и поред постигнутих успјеха, одлучује да се врати у Сарајево (1932), гдје је чека *Марсел Шнајдер*.[2]

[2] Професор филозофије и математике и један од првих доктора филозофије у БиХ; као Јеврej и истакнути интелектуалац љевичар постаће једна од првих усташких жртава, чији гроб није никада пронађен.

Године 1950, Вера Шнајдер учествује у оснивању Филозофског факултета у Сарајеву, посебно у стварању и организовању Катедре за математику која 1960. године прераста у Одсјек за математику Природно-математичког факултета. Школске 1950/51. године, је први пут организован студиј математике у БиХ, а 1951/52. Вера Шнајдер је изабрана за декана Филозофског факултета у Сарајеву и тако ушла у историју као прва жена декан, не само једног од првих босанскохерцеговачких факултета, него и једног југословенског факултета.

Рат и дубока лична трагедија, која ју је задесила, хапшењем и убиством супруга Марсела, лоше здравствено стање, бројне обавезе и бриге о малој кћерки, мајци и брату, спријечили су Веру Шнајдер, да се врати у Париз и продужи рад на свом докторату. Али, она, мислећи на добробит Факултета, у Париз, на Сорбону, шаље колегу Махмута Бајрактаревића.

Нешто касније ће обезбиједити по једну стипендију за Московски државни универзитет Ломоносов, на који ће послати Фикрета Вајзовића, једног од најбољих ученика Светозара Курепе и, за Универзитет у Гетингену (Göttingen) – за који се везује чувена алгебарска школа Еми Нетер (Amalie Emmy Nöther), на који шаље Веселина Перића – загребачког ученика Ђуре Курепе, који, на југословенске просторе, први доноси модерну алгебру. Светројица поменутих математичара ће касније постати окосница Одсјека за математику, као и математике у БиХ.

На Катедри за математику, касније Одсјеку за математику, Вера Шнајдер је предавала Диференцијалну геометрију и Рационалну механику, а повремено, нарочито првих година, и Линеарну алгебру и Увод у алгебру.

У свом научном раду Вера Шнајдер се бавила Римановом и Финслеровом геометријом у рационалној механици, дајући интегралним принципима рационалне механике геометријску интерпретацију.

Ипак, њена највећа заслуга је била да је, у Сарајево, донијела дух београдске математике, а касније и француске и одиграла битну улогу у формирању, прво Катедре, а затим Одсјека за математику и покретању студија математике, као и школовању универзитетског наставно-научног кадра. Тако, захваљујући њој, Сарајево хвата корак с југословенским центрима.

Академик Махмут Бајрактаревић (Сарајево 1909 – Бугојно 1985) – први доктор математичких наука

Основну школу и гимназију Махмут Бајрактаревић је завршио у Сарајеву. Након матуре 1929. године уписао се на студиј математике, на Филозофском факултету у Београду, и то на првој групи предмета: математика, рационална механика с теоријском физиком и експериментална физика. Дипломирао је 1933. године, а докторат математичких наука стекао 1953. године, на Сорбони с дисертацијом: „*Sur certaines suites itérés*" (*О неким итеративним низовима*), под руководством Жана Фавара (Jean Favard). Тако је постао први доктор математичких наука у БиХ.

Од 1934. године до рата, као и послије рата, до оснивања Више педагошке школе, радио је на сарајевским средњим школама. Од априла 1950. до краја 1960. године М. Бајрактаревић радио је на Филозофском факултету Универзитета у Сарајеву, када се дотадашњи Природно-математички одсјек Филозофског факултета издвојио у засебан факултет.

Махмут Бајрактаревић је, заједно с Вером Шнајдер и Шефкијом Раљевићем био оснивач Одсјека за математику новооснованог Природно-математичког факултета.

Проф. Бајрактаревић је објавио шездесетак научних радова. Његов научни интерес био је усмјерен углавном ка двјема важним областима математичке анализе: Теорији функционалних једначина, односно Теорији низова и Сумабилности у којој је посебно проучавао, како сумабилност итеративних низова, помоћу уопштених средина, тако и брзину њихове конвергенције. У својим првим радовима, који су се односили на низове добијене итерацијама, М. Бајрактаревић је испитивао конвергенцију одређених итеративних низова, а затим граничне функције тих низова доводио у везу с рјешењима разних функционалних једначина, односно система функционалних једначина, као што су Шредерова (Schröder), односно Абелова (Abel) једначина. Тако добивени резултати М. Бајрактаревића представљају модификације и побољшања резултата неких других аутора, као што су Морган (Morgan), Фулер (Fuller), Коркин (Korkin), Бенет (Bennet).

Велика већина радова М. Бајрактаревића односила се директно на функционалне једначине или су, на неки начин, повезивани са њима, као што је случај с интегро-функционалним једначинама. М. Бајрактаревић се бавио и разним питањима везаним за сумабилност и у оквиру те проблематике постигао је значајне резултате.

Значајно је, истаћи да су радови М. Бајрактаревића, у вријеме када су настајали, имали чисто теоретски карактер, али су, неки од њих, развојем компјутерске геометрије, постали интересантни и за примијењену математику. Тако је, примјеном Мепла (Maple), доказано да се фракталне криве могу добити као рјешења неке функционалне једначине с тзв. Рид–Бајрактаревић (Read–Bajraktarević) оператором.

Његови научни радови побуђивали су запажен интерес како код домаћих, тако и код страних математичара тако да су, поред врло повољних оцјена у међународним референтним журналима, укључивани и у познате монографије, Ј. Ацела (J. Aczel), М. Кучма (M. Kuczma), Варшава (Warszawa), К. Зелер и В.

Бекман (K. Zeller, W. Beckmann), Springer-Verlag, 1970; Итоги науки и техники. Мат. анализ, Москва, 1974, у којима су цитирани.

М. Бајрактаревић је 1961. године изабран за дописног члана Научног друштва НР БиХ да би 1966. године, прерастањем Научног друштва у Академију наука и умјетности БиХ, прешао у састав Академије, најприје као њен дописни члан, а од 1967. године, редовни члан.

Академик Манојло Маравић (Дрежница 1919 – Београд 2000) – творац Сарајевске школе

Основну школу је похађао у Дрежници и Огулину. По завршетку гимназије у Карловцу, 1938. уписује се на студиј математике на Филозофском факултету у Београду који избијањем рата прекида, враћа се у Дрежницу и укључује у НОБ, у којој учествује од почетка 1941. до ослобођења 1945. године.

Послије рата, одмах по завршетку студија, запажен као изразито талентован и вриједан студент, М. Маравић започиње универзитетску каријеру као један од првих асистената на Одсеку за математику Природно-математичког факултета у Београду и као сарадник на Математичком институту САНУ (1947). У Сарајеву је, 1953. године изабран за доцента на Техничком факултету, а 1956. стекао докторат на Филозофском факултету, одбранивши докторску дисертацију „*О једном поступку збирљивости дивергентних редова*", коју је урадио под менторством Војислава Авакумовића. Манојло Маравић је тако постао први математичар из БиХ, који је докторирао на Универзитету у Сарајеву.

Научна дјелатност М. Маравића одвијала се у двјема важним областима математичке анализе: Теорији сумабилности и Фуриеровој анализи. Докторском дисертацијом започео је истраживања у области теорије сумабилности, за коју је остао трајно везан, било да је у њој започињао нова истраживања или је њене резултате користио у другим областима. Друга област, у којој је интензивно радио и постигао значајне резултате, била је Фуриерова анализа и са њом повезана питања теорије диференцијалних једначина, у оквиру које је посебно проучавао примјену теорије сумабилности на вишеструке Фуриерове редове и сумабилност развитка функција по сопственим функцијама Лапласова оператора у n-димензионалном простору. Споменућу само неке од његових најзначајнијих резултата:

У радовима који припадају области Теорије сумабилности, М. Маравић је постигао низ значајних резултата од којих посебно издвајам рад у којем је доказао једну, од свега двије, до тада познате, теореме конвексности[3], за Авакумовићев G – поступак сумабилности.

У радовима који се односе на проблеме G – сумабилности развитака функција из класе L^2, по сопственим функцијама Лапласовог оператора у n-димензионалном простору одредио је потребне и довољне услове под којим је G – сумабилност локална особина функције, у тачки у којој се она развија. Свакако треба истаћи и оне радове, који се односе на спектралну функцију Лапласовог оператора, у којим је М. Маравић, полазећи од резултата Авакумовића, Тичмарша, (Tichmarsh), Левитана, Авадханија (Avadhani) и Минакшисундарама (Minakshisundaram), проширио низ класичних резултата и отворио низ нових истраживања.

Већина преосталих научних радова Манојла Маравића припада Теорији вишеструких Фуриерових редова функција из класе L^1. Полазећи од фундаменталних резултата Бохнера (Bochner) и Чандрасехарана (Chandrasekharan), М. Маравић добија низ резултата у овој области, међу којим посебно мјесто припада, поопштењу основне Бохнерове теореме у којој изражава Рисове (Riesz) средине парцијалних сферних сума вишеструког Фуриеровог реда посматране функције, помоћу њене сферне средине вишег реда.

Посљедњи радови М. Маравића били су везани за Рисову сумабилност комплексног реда вишеструких Фуриерових редова, коју је увео познати амерички математичар Елиас Штајн (Elias Stein).

У рјешавања проблема, које је сам изучавао, Манојло Маравић је укључио и своје докторанте: Михајла Галића (1934–), докторирао са тезом: *О једној класи поступака сумабилности и о њиховој примјени на генералисане Фуриерове редове*, ПМФ, Сарајево, 1974; Калмија Финција (1926–1996), докторирао са тезом: *О неким проблемима сумабилности развитка по сопственим функцијама*, ПМФ, Сарајево, 1977; Семиху Шлаковић (1929–2002), докторирала са тезом: *О неким проблемима сумабилности Дирихлеових и генералисаних Фуриерових редова*, ПМФ, Сарајево, 1978. и Мирјану Вуковић (1948–) *О неким проблемима сумабилности о примјенама на генералисане Фуриерове редове*, ПМФ, Сарајево, 1979.

Тако, преко Маравићеве линије математичког генеалошког стабла Михајла Петровића израста једна грана математичара у БиХ који се баве Теоријом сумабилности, Фуриеровом анализом и Караматином теоријом. Групу математичара, окупљену око М. Маравића, извјеститељ Б. Крстичи (B. Crstici), у њемачком реферативном журналу „*Zentralblatt für Mathematik*", назива ученицима Сарајевске школе [1979; Zbl. 0435.42001, 238].

Академик Манојло Маравић је објавио преко 40 научних радова и једну научну монографију „*Сумабилност развитка по сопственим функцијама*

[3] Прву теорему конвексности је доказао М. Рис (M. Riesz).

Лапласова оператора у n-димензионалном простору", која је публикована у едицији „Дјела АНУБиХ" Одј. Тех. Наука, LV/8 (1979), пп. 151. [1979; Zbl. 0435.42001, 237–238].

О научним радовима академика Манојла Маравића дати су врло позитивни прикази у најугледнијим свјетским реферативним часописима као што су: Mathematical Reviews, USA; Реферативнии Журнал Академије наука СССР и Zentralblatt MATH којег сада уређују Европско математичко друштво и Хајделбершка академија наука. Осим тога, цитирани су у монографији K. Zeller-W. Beckmana, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1970, а низ радова М. Маравића цитиран је и у публикацији Свесавезног Института научних и техничких информација Академије наука СССР – „*Итоги науки и техники*", серија Математичка анализа.

Захваљујући својим резултатима, Манојло Маравић је, на позив Даниела Вотермана (Daniel Waterman) провео 2 године као гостујући професор на *Wayne State University*, USA.

И не само од Д. Вотермана, стизали су позиви да држи предавања, о својим резултатима, и на бројним одсјецима, катедрама и математичким институтима. Набројаћемо само неке од њих: *University of London; University College; Woolwich Polytechnic* (сви из Лондона, Енглеска); *Syracuse University, Syracyse, New-York; University of South Florida, Tampa, Florida; University of California* (UCLA), Los Angeles (сви из USA).

Поред научне монографије, М. Маравић је написао, прекрасним ћириличним рукописом, Збирку (ријешених и неријешених) задатака из Комплексне анализе које је Ј. Карамата састављао и давао на испитима, у вријеме када је он био његов асистент, а учествовао је и у писању књиге „*Партизанска Дрежница*" (Хисторијски архив у Карловцу, Зборник 12, Карловац 1982) у којој је обрадио временски период од досељавања Срба на подручје Дрежнице до 1918. године, уз свесрдну помоћ свог учитеља вјеронауке Милана Радеке, веома образованог човјека, који је био изузетан познавалац историје Срба из Хрватске.

Академик Манојло Маравић је спадао међу најзначајније математичаре посљератне плејаде математичара БиХ. Добио је бројна веома значајна признања и награде за науку: „*Веселин Маслеша*", 27-јулска и ЗАВНОБиХ.

Академик Бранислав Мартић (Ваљево 1923 – Сарајево 1985)

Бранислав Мартић је школовање започео у Сарајеву и прекинуо га 1941. године, као ученик 7. разреда гимназије, када је избјегао у Србију. Као ученик 8. разреда гимназије у Ваљеву, ухапшен је и одведен у логор Дахау у Њемачкој. У мају 1944, послије бјекства из логора, прикључује се партизанима у Словенији и у њиховим редовима остаје до краја рата.

Послије ослобођења завршава гимназију и студиј математике, на Природно-математичком факултету у Београду (1950).

Године 1954. је изабран за асистента, а 1960. за предавача Техничког факултета у Сарајеву. Убрзо, након тога је, на Природно-математичком факултету Универзитета у Сарајеву одбранио докторску дисертацију „*О једном скупу двопараметарских поступака збирљивости и њиховим примјенама*” (1961) и, исте године, изабран за ванредног професора Електротехничког факултета у Сарајеву. За редовног професора на Природно-математичком факултету у Сарајеву изабран је 1975. године.

Бранислав Мартић је био дописни члан АНУ БиХ од 1971. године. За свој рад добио је 1984. године највећу републичку награду за науку „*Веселин Маслеша*”.

Плодна научна дјелатност проф. Мартића трајала је непрекидно преко 25 година, све до смрти. У том периоду објавио је више од 100 научних радова из разних области математике. У њима је обрађивао проблематику из теорије сумабилности, теорије функција комплексне промјенљиве, теорије специјалних функција, функционалних једначина, аналитичких једнакости, математичке логике и алгебре, те обичних и парцијалних диференцијалних једначина. Више од једне трећине његових радова припада области теорије сумабилности, којом је Б. Мартић започео свој научни рад и у којој је постигао најзначајније резултате. У својој докторској дисертацији започео је истраживање једне класе двопараметарских поступака сумабилности, готово потпуно испитао неке особине тих поступака, доказао разне релације инклузија за њих и размотрио неке могућности њихових примјена. Истраживања ових поступака наставио је у низу даљих својих радова, којима је у великој мјери заокружио ову проблематику. Ти радови, као и други његови радови из теорије сумабилности, наишли су на широк одзив математичара.

Резултати више радова Б. Мартића ушли су у више познатих монографија, као што су: K. Zeller, W. Beckmann, Theorie der Limitierungsverfahren, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1970 (цитиран 21 рад) и Итоги науки и техники, Свесавезни институт научне и техничке информације Академије наука СССР, Том 12, 1974 (цитирано 20 радова).

Ови резултати афирмисали су професора Мартића као значајног математичара у међународној математичкој јавности.

Бранислав Мартић био је изванредан наставник и предавач. Трагови предавања бројних курсева које је држао остали су не само у сјећањима његових слушаоца, него и у облику више врло успјешних уџбеника и скрипата које је писао ћириличним писмом и која су умножена „офсет” техником.

По обиму и значају свог научног опуса Бранислав Мартић представља једног од најплоднијих и најзначајнијих математичара у БиХ.

Проф. Шефкија Рaљевић (Мостар 1909 – Сарајево 1976)

Основну школу и гимназију Шефкија Рaљевић је завршио у родном Мостару. Након матуре, 1930. године, уписао се на студиј математике на Филозофском факултету у Београду, који је завршио 1934. Послије тога, радио је као професор математике, у Реалној гимназији у Требињу и Државној учитељској школи у Мостару, а након рата, до покретања Катедре за математику на Филозофском факултету у Сарајеву (1950) био је директор Реалне гимназије у Приједору.

Докторску дисертацију, под насловом „*О извјесним класама полинома и о распореду њихових нула*", урадио је под менторством Јована Карамате, једног од најзначајнијих представника Београдске школе математике. Одбранио ју је у Српској академији наука и умјетности (САНУ), у Београду, 1956. године.

Научни интерес Шефкије Рaљевића остао је трајно везан за геометрију нула полинома. Тој проблематици посвећена је већина његових радова, као и његова докторска дисертација.

Предавао је више предмета, углавном из разних области геометрије, као што су Аналитичка геометрија, Геометријска пресликавања и Виша геометрија, прецизније Геометрија Лобачевског. За Аналитичку геометрију написао је један од првих уџбеника на Одсјеку за математику под насловом: Основе векторске алгебре I и II с примјенама у геометрији (1962). Шефкија Рaљевић је осим научне и наставне, имао богате и друге активности на Факултету, Универзитету, Друштву математичара, физичара и астронома БиХ и Југославије и др. Био је дугогодишњи декан Факултета и у том периоду дао велики допринос развоју Природно-математичког факултета.

Проф. Миленко Л. Штековић (Клашница, Бања Лука 1915 – Сарајево)

Миленко Штековић је рођен у Клашници код Бања Луке, гдје је завршио основну школу. Гимназију је похађао у Приједору и Бањој Луци. Студиј математике је завршио на Одсеку за математику и физику Природно-математичког факултета у Београду, прије рата. Универзитетску каријеру је започео 1950. године, избором за асистента на Архитектонском факултету у Сарајеву. Двије године (1955. и 1956) провео је на постдипломском студију у Женеви. Докторирао је 1956. године на Одсјеку за математику Природно-математичког факултета у Сарајеву, одбраном докторске дисертације: „*Теорија рашћења која се заснива на испитивању уређених скупова на основу локалног понашања функција*" коју је урадио под менторством Јована Карамате.

Научни рад Миленка Штековића засновао се на проучавању реалних функција у домену Хардиевог (Hardy) тијела за која је била везана и његова докторска дисертација.

Закључак

1. Може се закључити да је Србија почетком прошлог вијека била напреднија и либералнија од Европе. На Универзитету у Београду, студирало је мало жена, али, за разлику од европских универзитета, женама није било забрањено да се уписују на студиј и да студирају. Примјер је проф. Вера Поповић Шнајдер.

За разлику од ње, сјетимо се двију великих математичарки: Софије Ковалевске (1850–1891) и Амалие Еми Нетер (Amalie Emmy Nöther) (1882–1938) које су, само стицајем околности, завршиле студиј математике, а да га никада нису ни уписале: Софија захваљујући великом математичару Карлу Вајерштрасу (Weierstrass), који ју је приватно подучавао, док је Еми могла присуствовати предавањима, на Универзитету у Ерлангену, само захваљујући оцу Максу, који је на том Универзитету био професор математике. Али, у родној Њемачкој, као жена, није никада добила посао.

2. Али, ако бисмо се упитали ко је међу сарајевским математичарима био најуниверзалнији, онда би то сигурно био Манојло Маравић, који је био двоструким нитима везан за Београдску школу математике: преко Јован Карамате чији је био асистент, и Војислава Авакумовића, који му је био ментор, дакле, двојице тада најзначајнијих потомака Београдске школе. Манојло Маравић је био изузетан математичар и научник, аутор научне монографије, вриједне збирке задатака које је састављао и давао на испитима Јован Карамата у вријеме када је био његов асистент, радио на школовању подмлатка и тако постао творац школе математике у Сарајеву, био је гостујући професор и предавач по позиву на бројним универзитетима, укључујући и Wayne State University (на ком му је нуђен стални посао) и научник с препознатљивим стилом Београдске, посебно Караматине школе: уз што је могуће мање претпоставки доћи до што је могуће више закључака, водећи рачуна да и поред краткоће све буде кристално јасно. Ако још додамо да је волио и путовања и да је о њима умио врло интересантно да прича, да је био патриота – добровољац 1941. када је требало да се Земља брани, онда можемо закључити да је био прави ученик великог учитеља Михајла Петровића Аласа.

Mirjana Vuković

FROM THE BELGRADE SCHOOL OF MIHAJLO PETROVIĆ ALAS TO THE SARAJEVO SCHOOL OF ANALYSIS

Summary

After a short review of Mihajlo Petrović Alas, the founder of the world-famous Belgrade School of Mathematics, I will speak about the Sarajevo School of Analysis that grew out of the Belgrade School, and which consisted of Belgrade students: Vera Popović Šnajder – the first female mathematician in Bosnia and Herzegovina and the author of the first scientific work published by an author born in Bosnia and Herzegovina in Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (1931), academician Mahmut Bajraktarević, first Doctor of Mathematical Sciences in Bosnia and Herzegovina (acquired a doctorate at Sorbonne University) and professors Šefkija Raljević, Milenko Šteković, academician Branislav Martić, and, particularly, academician Manojlo Maravić, who at the end of the war and the studies started his academic career as the first assistant at the Institute of SAN (Serbian Academy of Sciences) and assistant to Jovan Karamata, by whom I am a descendant of the Belgrade School as well.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51:929 Петровић М.(082)

МИХАИЛО Петровић Алас : научни скуп са међународним учешћем одржан у Српској академији наука и уметности, 2–3. октобра 2018. године : поводом сто педесет година од рођења / [уредници Градимир Миловановић, Стеван Пилиповић, Жарко Мијајловић]. – Београд : САНУ : Математички факултет Универзитета : Математички институт САНУ : Друштво математичара Србије, 2019 (Београд : Donat Graf). – 172 стр. : илсутр. ; 24 cm – (Научни скупови / Српска академија наука и уметности ; књ. 182. Председништво ; књ. 12)

На спор. насл. стр.: Mihailo Petrović Alas. – Радови на срп. и енгл. језику. – Текст ћир. и лат. – Тираж 600. – Напомене и библиографске референце уз радове. – Библиографија уз већину радова. – Резимеи на срп., енгл. или франц. језику уз сваки рад.

ISBN 978-86-7025-825-9 (САНУ)
ISBN 978-86-7589-136-9

а) Петровић, Михаило (1868–1943) – Зборници

COBISS.SR-ID 278538508