ПРЕДГОВОР

За време мојих тридесетпетогодишњих предавања из рационалне механике на Београдском универзитету разрађивао сам многа питања динамике чврстог тела на основама које се разликују од уобичајених у уџбеницима теориске механике. Због тих отступања од уобичајеног начина излагања желео сам да штампам ову књигу као посебно издање Математичког института. Да би књига извршила и свој практични задатак, па послужила и као завршетак мог уџбеника рационалне механике, морао сам обрадити у нешто скраћеном облику и оне делове динамике чврстог тела који не уносе у књигу ништа нарочито ново.

Математички институт ми је у том изишао у сусрет и зато му дугујем дубоку захвалност, нарочито његовој Управи и академику професору Радивоју Кашанину, као управнику.

Професору Т. П. Анђелићу, који ми је и овог пута много помогао при остварењу ове књиге, најсрдачније захваљујем.

Асистенту катедре механике Београдског универзитета Мирославу Шевићу и асистенту Астрономско-нумеричког отсека Математичког института Иванки Поповић изражавам најтоплију захвалност за преглед рукописа.

Београд
29 V 1955

А. Б.

ЛИТЕРАТУРА

Сем низа уџбеника — P. **Appell'a**, E. T. **Routh'a**, Г. К. **Суслова**, E. T. **Whittaker'a**, T. **Levi-Civita** e U. **Amaldi'a**, G. **Hamel'a** и др. — где се опширно третира Механика чврстог тела, треба нарочито навести ове две књиге, које су углавном посвећене динамици чврстог тела:

1. F. **Klein** und A. **Sommerfeld** — Über die Theorie des Kreisels, I—IV. Leipzig. 1897—1923.
2. R. Grammel — Der Kreisel. I.—II. Berlin. 1950.

Дозвољавам себи да у овој књизи, на крају моје наставне делатности, по молби својих ученика, наведем у хронолошком реду списак мојих радова који се односе на теорију вектора и рационалну механику.

1. Теоремы Jacobi и Sylvester'a. Кіевъ. 1904.
2. Геометрическіе дифференціалы въ теоріи поверхностей. К. 1905.
3. Приложеніе геометрическихъ производныхъ къ теоріи кривыхъ и поверхностей. К. 1906.
4. О соприкосновеніи геометрическихъ образовъ. К. 1908.
5. Уравненія движенія для консервативныхъ системъ съ линейными интегралами. К. 1910.
6. Die Bewegungsgleichungen konservativer Systeme mit linearen Bewegungsintegralen. Mathem. Annalen. B. 69. 1910.
7. Векторіальный анализъ. Библіографическій очеркъ. К. 1910.
8. Уравненія движенія тяжелаго твердаго тела около неподвижной точки. К. 1911.
9. Двѣ модели. К. 1911.
10. Нѣкоторыя частныя рѣшенія задачи объ *n* тѣлахъ. К. 1911.

— Einige partikulare Lösungen des Problems der *n* Körper. Astronomische Nachrichten. B. 189. Kiel. 1911.

11. Уравненія движенія для консервативныхъ системъ и ихъ приложенія. К. 1912.
12. О каноническомъ преобразованіи. К. 1913.
13. Sur les équations du mouvement des systèmes conservatifs non holonomes. Comptes Rendus. t. 156. Paris. 1913.
14. Sur les systèmes conservatifs non holonomes avec des liaisons dépendantes du temps. C. R. t. 156. 1913.
15. Sur les transformations canoniques spéciales. C. R. t. 157. 1913.
16. Sur les transformations canoniques des équations du mouvement d'un système non holonome. C. R. t. 158. 1914.
17. Неголономный маятник. Математическій сборникъ. Москва. 1914.
18. Приборы для интегрированія какъ звенья неголономнаго механизма. К. 1915.
19. Къ вопросу объ основахъ механики. Москва. 1916.
20. Sur les trajectoires d'un système non holonome. C. R. t. 1916.

— Къ ученію о траэкторіи неголономной системы. Одесса. 1916.

21. Соприкасательныя движенія твердаго тѣла. Одесса. 1919.
22. Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un corps solide. C. R. t. 171. 1920
— Природне једначине кретања чврстог тела. „Глас“. XCIX. Београд. 1922.
23. Рачун са облицима. Б. 122.
24. Des lignes d'inertie sur une surface. C. R. t. 175. 1922.
— О линијама инерције на површини. „Глас“. CIX.
25. Једначине кретања чврстог тела у новој векторској форми. „Глас“. CXXV. 1927.
26. О неким специјалним случајевима проблема *n* тела. „Глас“. CXXIII. 1927.
27. О једначинама кретања нехолономног система. „Глас“. CXXVIII. 1927.
28. Једначине кретања материјалног система, ако су осе потпуно произвољне. „Глас“. CXXVIII. 1927.
29. О хеликоидалним случајевима проблема *n* тела. „Глас“. CXXXIV. 1928.
30. Приложеніе абсолютной геометріи къ классической механикѣ. Труды IV Съѣзда. 1929.
31. Объ уравненіяхъ механики по отношенію къ главнымъ осямъ. Записки Р. Н. И. 1930.
32. Геометриске основе рачуна са диадама. I. Диада и афинор. Б. 1930.
— Fondements géométriques de la théorie des diades et des affineurs. Stockholm. 1931.
34. Природне једначине кретања материјалног система. CXLIII. „Глас“. 1931.
35. Über den Begriff der Erdachse. „Gerlands Beiträge zur Geophysik“. B. 33. 1931.
34bis Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un système matériel. Bologna. 1932.
36. О кретању материјалног система, који мало отступа од чврстог тела. „Глас“. CXLVI. 1932.
37. Sur les produits de deux systèmes de vecteurs glissants. Publ. math. T. I. 1932.
38. О вращеніи произвольной матеріальной системы какъ целаго. Записки Р. Н. И. 1932.
39. О могућности секуларних померања Земљиног пола. „Глас“. CLII. 1932.
40. Sur une forme nouvelle des équations différentielles du mouvement d'un système matériel arbitraire. Zürich. 1932.
36.^{bis} Sur le mouvement d'un système matériel peu différent d'un corps solide. Cracovie. 1932.
41. Прилог алгебри везаних вектора. „Глас“ CLIV. 1933.
42. Zum Mechanismus der Polverlagerungen. Publ. math. T. II. 1933.
39.^{bis} Sur la possibilité du mouvement séculaire du pôle terrestre. Bull. de l'Académie. N. 1. A. 1933.
41.^{bis} Sur l'algebre du système de vecteurs glissants. Bull. de l'Académie. N 1. A. 1933.
42. Прилог геометриској теорији инваријаната. „Глас“ CLXIII. 1934.
43. О ротацији Земље као система са шест степена слободе. „Глас“. CLXIII. 1934·
44. Über den Begriff des Einheitsmotors. Ztschr. f. angew. Math. und Mech. Band 14. 1934.
45. Über ein Modell zur Demostration der säkularen Polverlagerungen. Publ. math. T. III. 1954.
46. Заједно са Б. Петронијевићем. Елементарно решење два позната случаја проблема трију тела. „Гласник“. 1935.
— Beitrag zur elementaren Lösung der zwei speziellen Fälle des Dreikörperproblems. Astron. Nachr. B. 258. 1936.

47. О природним једначинама котрљања чврстог тела по непокретној површини. „Глас“. CLXV. 1935.
48. О независним производима двају вектора. „Глас“. CLXX. 1936.
49. О једном хидродинамичком парадоксу. „Глас“ CLXX. 1936.
50. О геометрији степенованих маса. „Глас“. CLXX. 1936.
51. Über den vektoriellen Begriff des Trägheitsproduktes. Publ. math. T. IV. 1935.
52. О векторском излагању геометрије маса. Технички лист. 1936.
53. Über einige nichtholonome Mechanismen. Publ. math. T. V. 1936.
54. Коефицијент раширености једне области. „Глас“. CLXXV. 1937,
55. Природна проучавања у геометрији и механици. „Глас“. CLXXV. 1937.
56. Über ein nichtholonomes Pendel. Publ. math. T. VI—VII. 1938.
57. Рационална механика. I. Механика тачке. Б. 1939.

— „ „ „ „ Друго издање. Б. 1950.

58. О кретању чврстог тела са допунским покретним телом. „Глас“. CLXXXI. 1939.
59. Улога једнако-рогљастих Архимедових полиједаре у проблему више тела. „Глас“. CLXXXV. 1941.
60. О једном специјалном проблему четирију тела. „Глас“. CLXXXV. 1941.
61. Über die Anwendungen der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie. Astr. Nachr. Б. 273. 1943.
62. Прилог геометриској теорији генералисаних састављених и пројецираних вектора. „Глас“. CLXXXIX. 1946.
63. Пфафов општи принцип механике. „Глас“. CLXXXIX. 1946.
64. Хилбертов интеграл независности и Пфафове једначине варијационог рачуна. „Глас“. CLXXXIX. 1946.
65. Пфафова метода у геометриској оптици. „Глас“. CLXXXIX. 1946,
66. Sur l'accroissement pur de la forme différentielle et son application. Publ. de l'Inst. math. T. I. 1947.
67. Aires et volumes vélocidiques et hodografiques dans un mouvement du fluide. Publ. de l'Inst. math. T. II. 1948.
68. Примена Пфафове методе на теорију подешеник каноничних промењивих. „Глас“. CXCI. 1948,
69. Пфафов израз и векторске диференцијалне једначине планетских поремећаја. „Глас“. CXIC. 1948.
70. О геометриској конструкцији и инструменту за приближно решавање Кеплерове једначине. „Глас“. CXCI. 1948.
71. Примена Пфафове методе и векторских елемената на проблем трију тела. „Глас“. CXCI. 1948.
72. Sur la transformation canonique des équations d'un système non holonome. Publ. de l'Inst. math. T. II 1948.
73. Sur la variation saisonnière de la rotation de la Terre. C. R. t. 231. 1950.
74. Рационална механика. II. Механика система. 1951.

73.^{bis} О сезонским променама Земљине ротације. „Глас“. CXC. 1950.

75. О успостављању хомогености у једначинама велоцидне природе. „Глас“ CCVI. 1953.
76. Аполонијева теорема о застоју планета. Ibidem.
77. Дивектор и његова алгебра. Ibidem.
78. Рационална механика. III. Механика чврстог тела. Први део. Кинематик чврстог тела. 1954.
79. О девијационом центру. Зборник радова Мат. Инст. 4. 1955.
80. Кинематика и динамика чврстог тела у природним координатама (у штампи).

ДИНАМИКА ЧВРСТОГ ТЕЛА

ГЛАВА ПРВА

Количина кретања, момент количина кретања и жива сила чврстог тела

§ 1 · 1. Материјално чврсто тело. Динамика чврстог тела.

Материјално тело које има особину да растојање између сваке две тачке тог тела остаје исто зове се *апсолутно чврсто материјално тело*. Непроменљив систем геометриских тачака таквог тела је *чврсто геометриско тело*. Кинематика таквог тела је била предмет наше књиге: „Рационална механика III. Механика чврстог тела. Први део. Кинематика чврстог тела.“ Кад се зна да се говори о материјалном чврстом телу, реч „материјално“ се изоставља. Према томе у даљим излагањима речи „чврсто тело“ кратко означују апсолутно чврсто материјално тело. Динамика таквог материјалног система је *динамика чврстог тела*.

Како у динамику чврстог тела улази појам масе, у излагању тог дела механике велику улогу игра геометрија маса. Само излагање динамике чврстог тела оснива се на механици система, која је заједно са геометријом маса изложена у другој књизи наше „Рационалне механике“.

§ 1 · 11. Динамички параметри чврстог тела. Инерциона матрица.

За проучавање кретања чврстог тела под утицајем сила које дејствују на тело није потребно знати у детаљима све особине распореда маса тог тела и унутрашњу структуру тих маса. Особине потребне за проучавање кретања чврстог тела као материјалног система јесу *динамичке особине чврстог тела*. Величине које одређују динамичке особине називају се *динамички параметри чврстог тела*. За такве параметре се узимају ове величине (§ 1.68, II):

1. *Маса* m чврстог тела. Ако се тело креће транслаторно, место њега можемо проучавати кретање материјалне тачке масе m. У овом специјалном случају за проучавање кретања чврстог тела потребан је само тај динамички параметар чврстог тела.

2. *Вектор положаја* $\vec{\rho}_C$ *центра маса тела*, тачке C, у односу на неку уочену тачку A тела са триједром $A\xi\eta\zeta$ чврсто везаним са телом. Тај вектор се може одредити помоћу координата ξ_C, η_C, ζ_C тачке C у односу на триједер $A\xi\eta\zeta$. У вези са тим вектором имамо три скаларна динамичка параметра.

3. *Тензор инерције тела*, рецимо, за тачку C, у односу на осе $C\xi\eta\zeta$ са правцима оса паралелним осама $A\xi\eta\zeta$, одређен матрицом

$$\begin{Vmatrix} J_\xi^{(C)}, & \Pi_{\xi\eta}^{(C)}, & \Pi_{\xi\zeta}^{(C)} \\ \Pi_{\eta\xi}^{(C)}, & J_\eta^{(C)}, & \Pi_{\eta\zeta}^{(C)} \\ \Pi_{\zeta\xi}^{(C)}, & \Pi_{\zeta\eta}^{(C)}, & J_\zeta^{(C)} \end{Vmatrix},$$

где су $J_\xi^{(C)}, \ldots, \ldots$ моменти инерције и $\Pi_{\xi\eta}^{(C)}, \ldots, \ldots$ производи инерције око одговарајућих оса које пролазе кроз тачку C. Како је $\Pi_{\xi\eta}^{(C)} = \Pi_{\eta\xi}^{(C)}$ итд., матрица тензора инерције је симетрична те је он одређен са шест скаларних динамичких параметара. Тензор инерције можемо одредити и на други начин, наиме помоћу главних централних момената инерције које означимо са J_1, J_2, J_3, и положајем главних централних оса инерције, а за то одређивање потребне су још три величине, напр. три Ојлерова угла.

На тај начин у општем случају за динамичку карактеристику чврстог тела потребно је десет независних скаларних динамичких параметара. Ови параметри одређују: један скалар — масу тела, једа вектор — вектор положаја центра маса, и један тензор — тензор инерције.

Десет динамичких параметара чврстог тела одређују једну нарочиту квадратну матрицу шестог реда коју можемо написати и овако у односу на триједар $A\xi\eta\zeta$ (§ 1.68, II):

$$\boldsymbol{J}^{(A)} = \left\| \begin{array}{cccccc} m\,, & 0\,, & 0\,, & 0\,, & m\zeta_C\,, & -m\eta_C \\ 0\,, & m\,, & 0\,, & -m\zeta_C\,, & 0\,, & m\xi_C \\ 0\,, & 0\,, & m\,, & m\eta_C\,, & -m\xi_C\,, & 0 \\ 0\,, & -m\zeta_C\,, & m\eta_C\,, & J_\xi^{(A)}\,, & \Pi_{\xi\eta}^{(A)}\,, & \Pi_{\xi\zeta}^{(A)} \\ m\zeta_C\,, & 0\,, & -m\xi_C\,, & \Pi_{\eta\xi}^{(A)}\,, & J_\eta^{(A)}\,, & \Pi_{\eta\zeta}^{(A)} \\ -m\eta_C\,, & m\xi_C\,, & 0\,, & \Pi_{\zeta\xi}^{(A)}\,, & \Pi_{\zeta\eta}^{(A)}\,, & J_\zeta^{(A)} \end{array} \right\| .$$

Ову матрицу ћемо назвати *инерциона матрица чврстог тела за дати триједар.* То је матрица тензора инерције *проширена* на одговарајући начин. Много концизније можемо формулисати неке ставове динамике чврстог тела, нарочито општег карактера, помоћу инерционе матрице или њених субматрица.

Инерциона матрица мења своје координате, сем масе, у вези са променом положаја триједра референције $A\xi\eta\zeta$ према телу. За главне централне осе инерциона матрица за произвољно чврсто тело има најпростији облик дијагоналне матрице

$$\boldsymbol{J}^{(C)} = \left\| \begin{array}{cccccc} m & 0 & 0 & & & \\ 0 & m & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & m & & & \\ & & & J_1 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & J_2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & J_3 \end{array} \right\| .$$

§ 1 · 2. Количина кретања чврстог тела

Количина кретања или импулс материјалног система (§ 4.1,II), вектор $\vec{K}$, има вредност

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \,,$$

где је m_i маса i'те материјалне тачке система, $\vec{v}_i$ брзина те тачке а збир је распрострт на свих n материјалних тачака система.

У случају чврстог тела са континуалним распоредом маса под m_i треба разумети диференцијални елемент масе тела, који је једнак производу густине тела у датој тачки и диференцијалног елемента запремине тела, а под $\vec{v}_i$ брзину тачке тог елемента. Збир се односи на све тачке тела и претвара се према томе у троструки интеграл распрострт на сву област тела. Место познате ознаке тог интеграла задржимо свуда, по договору, знак збира без навођења броја тачака. Према томе за количину кретања чврстог тела имамо

$$\vec{K}=\Sigma m_i \vec{v}_i\,. \tag{1}$$

Из кинематике чврстог тела знамо (§ 4.12, III-1) да се брзина $\vec{v}_i$ произвољне тачке чврстог тела може одредити из једначине

$$\vec{v}_i=\vec{v}_A+[\vec{\Omega},\ \vec{\rho}_i]\,, \tag{2}$$

где је $\vec{v}_A$ транслаторна брзина тела, тј. брзина изабраног пола, одређене тачке A тела, $\vec{\rho}_i=\overrightarrow{AM_i}$ је вектор положаја тачке M_i у односу на тачку A, и $\vec{\Omega}$ тренутна угаона брзина тела, за коју можемо употребити и ознаку $\vec{\omega}$, ако нису назначене осе у односу на које се одређују координате тог вектора.

После множења (2) са m_i и сабирања из (1) изводимо

$$\vec{K}=m\vec{v}_A+[\vec{\Omega},\ \Sigma\ m_i\,\vec{\rho}_i]\,,$$

где је m целокупна маса чврстог тела, тј.

$$m=\Sigma\, m_i\,.$$

Ако са $\vec{\rho}_C$ означимо вектор положаја тачке C, центра маса тела, збир у другом члану можемо, на основу (1) § 1.2, II, према

$$\Sigma\, m_i\,\vec{\rho}_i=m\,\vec{\rho}_C\,,$$

написати

$$\vec{K}=m\vec{v}_A+m\,[\vec{\Omega},\ \vec{\rho}_C]\,. \tag{3}$$

Најзад, ако за пол узмемо центар инерције тела, $\vec{\rho}_c=0$, добићемо

$$\vec{K}=m\vec{v}_C\,. \tag{4}$$

Пошто је

$$\vec{v}_c=\vec{v}_A+[\vec{\Omega},\ \vec{\rho}_C]$$

упоређивање (3) и (4) доводи до резултата да вектор $\vec{K}$ заиста има исту векторску вредност без обзира на то коју смо тачку изабрали за одређивање транслаторне брзине чврстог тела.

При одређивању координата како вектора $\vec{K}$ тако и других, векторских и тензорских величина, углавном ћемо узимати два триједра за пројицирање:

1. Непокретни триједар, који означимо, као и раније, са $Oxyz$,
2. Триједар $A\xi\eta\zeta$, односно $C\xi\eta\zeta$, чврсто везан са телом.

Понекад ћемо узимати и неки покретни триједар $M u_1 u_2 u_3$, чије кретање прво сматрамо као потпуно произвољно, а после ћемо, према конкретној природи проблема, удешавати кретање тог триједра тако да проучавање кретања чврстог тела буде шта једноставније. Обрасце за такав триједар наводићемо у сваком специјалном случају.

Координате вектора K изгледају: 1. за триједар $Oxyz$:

$$K_x = mx_A' + m\ [Q(z_C - z_A) - R(y_C - y_A)],$$

$$K_y = my_A' + m\ [R(x_C - x_A) - P(z_C - z_A)],$$

$$K_z = mz_A' + m\ [P(y_C - y_A) - Q(x_C - x_A)]$$

а 2. за триједар $A\xi\eta\zeta$

$$K_\xi = mv_{A\xi} + m(q\zeta_C - r\eta_C),$$

$$K_\eta = mv_{A\eta} + m(r\xi_C - p\zeta_C),$$

$$K_\zeta = mv_{A\zeta} + m(p\eta_C - q\xi_C),$$

при чему смо употребили ознаке раније уведене у кинематици чврстог тела.

Специјално за триједар $C\xi\eta\zeta$ имамо једноставно

$$K_\xi = mv_{C\xi},\quad K_\eta = mv_{C\eta},\quad K_\zeta = mv_{C\zeta}.$$

§ 1 · 3. Момент количина кретања

Други вектор који игра врло важну улогу у динамици чврстог тела је *моменат количина кретања чврстог тела за одређени пол*. Тај вектор, према § 4.3, II, за непокретни пол O има вредност

$$\vec{l}^{(O)} = \Sigma\, [\vec{r}_i,\ m_i\, \vec{v}_i],$$

где је $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM}_i$, а за покретну тачку A тела са $\vec{\rho}_i = \overrightarrow{AM}_i$ вредност

$$(1) \qquad \vec{l}^{(A)} = \Sigma\, [\vec{\rho}_i,\ m_i\, \vec{v}_i].$$

Како је $\vec{r}_i = \vec{r}_A + \vec{\rho}_i$, први образац даје

$$\vec{l}^{(O)} = \Sigma\, [\vec{r}_A,\ m_i\, \vec{v}_i] + \Sigma\, [\vec{\rho}_i,\ m_i\, \vec{v}_i]$$

и према томе је

$$\vec{l}^{(O)} = \vec{l}^{(A)} + [\vec{r}_A,\ \vec{K}].$$

Пошто је вектор $\vec{K}$ већ проучен, можемо се зауставити само на проучавању момента $\vec{l}^{(A)}$.

Ако у (1) ставимо вредност брзине тачке чврстог тела добићемо

$$\vec{l}^{(A)} = \Sigma\, m_i\, [\vec{\rho}_i,\ \vec{v}_A + [\vec{\Omega},\ \vec{\rho}_i]] = \Sigma\, [m_i\, \vec{\rho}_i,\ \vec{v}_A] + \Sigma\, m_i\, [\vec{\rho}_i\, [\vec{\Omega},\ \vec{\rho}_i]].$$

Пошто је

$$\Sigma\, m_i\, \vec{\rho}_i = m\, \vec{\rho}_C,$$

први сабирак је

$$m\, [\vec{\rho}_C,\ \vec{v}_A].$$

За тумачење динамичке природе другог сабирка раставимо вектор $\vec{\rho}_i$ у три компоненте:

$$\vec{\rho}_i = h_i\, \vec{\Omega}_0 + d_i'\, \vec{n}' + d_i''\, \vec{n}'',$$

где је $\vec{\Omega}_0$ орт вектора $\vec{\Omega}$, а $\vec{n}'$ и $\vec{n}''$ нека два орта ортогонална према орту $\vec{\Omega}_0$ и међусобом. Збир квадрата $d_i'^2 + d_i''^2$ означимо са d_i^2, а то је квадрат растојања тачке M_i чврстог тела од осе вектора $\vec{\Omega}$. После извршеног растављања други сабирак можемо овако трансформисати:

$$\Sigma\, m_i\, [\vec{\rho}_i\, [\vec{\Omega},\ \vec{\rho}_i]] = \vec{\Omega}\, \Sigma\, m_i\, \rho_i^2 - \Sigma\, m_i\, \vec{\rho}_i\, (\vec{\Omega},\ \vec{\rho}_i) =$$

$$= \vec{\Omega}\, \Sigma\, m_i\, (d_i^2 + h_i^2) - \Omega\, \Sigma\, m_i\, h_i\, \vec{\rho}_i =$$

$$= \vec{\Omega}\, \Sigma\, m_i\, d_i^2 - \Omega\, \vec{n}'\, \Sigma\, m_i\, h_i\, d_i' - \Omega\, \vec{n}''\, \Sigma\, m_i\, h_i\, d_i'' =$$

$$= J_\Omega^{(A)} \vec{\Omega} + \Pi_{\Omega n'}^{(A)} \Omega \vec{n}' + \Pi_{\Omega n''}^{(A)} \Omega \vec{n}'',$$

где су: $J_\Omega^{(A)}$ момент инерције тела око осе вектора $\vec{\Omega}$,

$$\Pi_{\Omega n'} = -\Sigma m_i h_i d_i', \quad \Pi_{\Omega n''} = -\Sigma m_i h_i d_i'',$$

према (2) § 1.68, II, производи инерције тела око показаних оса.

Два члана са овим производима можемо спојити у један природан члан који не зависи од избора положаја ортова $\vec{n}'$ и $\vec{n}''$ у равни нормалној на правац вектора $\vec{\Omega}$. За тај циљ уведимо појам *девијационог центра тела за дати правац.*

Збир

$$\vec{n}' \Sigma m_i h_i d_i' + \vec{n}'' \Sigma m_i h_i d_i''$$

можемо заменити овим

$$\Sigma m_i h_i (d_i' \vec{n} + d_i'' \vec{n}'') = \Sigma m_i h_i \vec{d}_i,$$

где је $\vec{d}_i$ вектор положаја пројекције тачке тела M_i са масом m_i на раније наведену нормалну раван на правац вектора $\vec{\Omega}$. Сваки од ових вектора је у збиру оптерећен скаларом $m_i h_i$. Сад, слично случају увођења центра маса, можемо и овде добивени збир претставити овако:

$$\Sigma m_i h_i \vec{d}_i = m h \vec{d}_D,$$

где смо ставили

$$m = \Sigma m_i, \quad mh = \Sigma m_i h_i.$$

Тачку D са вектором положаја $\vec{d}_D$, дефинисану претходном векторском једначином, називаћемо *девијациони центар тела за дати правац*, у датом случају за правац вектора $\vec{\Omega}$. Скалар mh је његово *девијационо оптерећење*. Према томе је

$$m h \vec{d}_D = \vec{S}_D$$

вектор положаја девијационог центра оптерећеног девијационим оптерећењем.

На тај начин момент количина кретања можемо изразити у овој природној форми:

$$\vec{l}^{(A)} = m[\vec{\rho}_C, \vec{v}_A] + J_\Omega^{(A)} \vec{\Omega} - \Omega \vec{S}_D. \qquad (1)$$

Овај образац показује да у општем случају момент количина кретања у односу на тачку тела има две компоненте: једну од транслаторног кретања и другу од обртног кретања, при чему ова последња има два дела: један чисто обртни део у правцу угаоне брзине и други, девијациони део, у правцу нормалном према угаоној брзини.

Изразимо још координате вектора $\vec{l}^{(A)}$ у односу на триједар $A\xi\eta\zeta$ тела. Ако векторе једначине

$$\vec{l}^{(A)} = m[\vec{\rho}_C, \vec{v}_A] + \vec{\Omega}\,\Sigma\, m_i\, \rho_i^2 - \Sigma\, m_i\, \vec{\rho}_i\,(\vec{\Omega}, \vec{\rho}_i)$$

пројицирамо на осе тог триједра, тада ћемо, узимајући у обзир да је, напр.,

$$l_\xi^{(A)} = m\,(\eta_c\, v_{A\zeta} - \zeta_c\, v_{A\eta}) + p\,\Sigma\, m_i\,(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - \Sigma\, m_i\, \xi_i\,(p\,\xi_i + q\,\eta_i + r\,\zeta_i),$$

добити

$$\begin{aligned} l_\xi^{(A)} &= m\,(\eta_C\, v_{A\zeta} - \zeta_C\, v_{A\eta}) + J_\xi^{(A)}\, p + \Pi_{\xi\eta}^{(A)}\, q + \Pi_{\xi\zeta}^{(A)}\, r, \\ l_\eta^{(A)} &= m\,(\zeta_C\, v_{A\xi} - \xi_C\, v_{A\zeta}) + \Pi_{\eta\xi}^{(A)}\, p + J_\eta^{(A)}\, q + \Pi_{\eta\zeta}^{(A)}\, r, \\ l_\zeta^{(A)} &= m\,(\xi_C\, v_{A\eta} - \eta_C\, v_{A\xi}) + \Pi_{\zeta\xi}^{(A)}\, p + \Pi_{\zeta\eta}^{(A)}\, q + J_\zeta^{(A)}\, r. \end{aligned}$$

Ако се тачка A поклопи са центром инерције, имамо са скраћеним ознакама обрасце:

$$\begin{aligned} l_1 &= J_1\, p + \Pi_{12}\, q + \Pi_{13}\, r, \\ l_2 &= \Pi_{21}\, p + J_2\, q + \Pi_{23}\, r, \\ l_3 &= \Pi_{31}\, p + \Pi_{32}\, q + J_3\, r. \end{aligned} \tag{2}$$

Најзад ако су осе триједра $C\xi\eta\zeta$ главне осе инерције тела, имамо:

$$l_1 = J_1\, p, \quad l_2 = J_2\, q, \quad l_3 = J_3\, r. \tag{3}$$

Ако једначине (2), односно (3) решимо по p, q, r, добићемо ове вредности:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\Delta}[l_1(J_2 J_3 - \Pi_{23}^2) + l_2(\Pi_{31}\Pi_{23} - \Pi_{12} J_3) + l_3(\Pi_{12}\Pi_{23} - \Pi_{13}J_2)], \\ q &= \frac{1}{\Delta}[l_1(\Pi_{23}\Pi_{31} - \Pi_{12}J_3) + l_2(J_3 J_1 - \Pi_{13}^2) + l_3(\Pi_{12}\Pi_{31} - \Pi_{23}J_1)], \\ r &= \frac{1}{\Delta}[l_1(\Pi_{23}\Pi_{12} - \Pi_{13}J_2) + l_2(\Pi_{31}\Pi_{12} - \Pi_{23}J_1) + l_3(J_1 J_2 - \Pi_{12}^2)], \end{aligned} \tag{4}$$

где је

$$\Delta = J_1 J_2 J_3 - (J_1 \Pi_{23}{}^2 + J_2 \Pi_{31}{}^2 + J_3 \Pi_{12}{}^2) + 2 \Pi_{23} \Pi_{12} \Pi_{31},$$

односно за главне осе

$$(5) \qquad p = l_1 : J_1, \quad q = l_2 : J_2, \quad r = l_3 : J_3 .$$

§ 1 · 4. Жива сила чврстог тела као функција транслаторне и угаоне брзине

Жива сила или кинетичка енергија T материјалне тачке масе m и брзине $\vec{v}$ дефинише се једнакошћу

$$2T = mv^2.$$

Слично, за живу силу чврстог тела, са истом ознаком, имамо

$$2T = \Sigma m_i v_i^2,$$

при чему и овде знак збира означава интеграл распрострт на сву област чврстог тела.

Ако у претходни израз ставимо брзину тачке чврстог тела

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + [\vec{\Omega}, \vec{\rho}_i],$$

добићемо:

$$(1) \qquad 2T = mv_A^2 + 2m\,(\vec{v}_A\,[\vec{\Omega}, \vec{\rho}_C]) + \Sigma m_i\,[\vec{\Omega}, \vec{\rho}_i]^2$$

или

$$(2) \qquad 2T = mv_A^2 + 2m\,(\vec{v}_A\,[\vec{\Omega}, \vec{\rho}_C]) + \Omega^2 J_\Omega^{(A)} .$$

Ако имамо у виду да одређујемо угаону брзину помоћу координата у односу на триједар $A\xi\eta\zeta$, исти образац можемо написати и овако:

$$(3) \qquad 2T = mv_A^2 + 2m\,(\vec{v}_A\,[\vec{\omega}, \vec{\rho}_C]) + \omega^2 J_\omega^{(A)} .$$

У случају кад је за тачку A изабран центар маса, тачка C, биће $\vec{\rho}_C = 0$, па претходна једначина даје

$$(4) \qquad 2T = mv_C^2 + \omega^2 J_\omega^{(C)} .$$

Ова једначина показује да се жива сила чврстог тела у општем случају може изразити као збир два сабирка:

$$T = T_1 + T_2 .$$

Први сабирак

$$(5) \qquad T_1 = \frac{1}{2} m v_C^2$$

може се протумачити као жива сила материјалне тачке са масом чврстог тела и са брзином центра инерције тела. Овај део живе силе чврстог тела зовемо *транслаторни део живе силе чврстог тела.*

Други сабирак

$$(6) \qquad T_2 = \frac{1}{2} J_\omega^{(C)} \omega^2$$

стоји у вези са обртањем тела око осе тренутне угаоне брзине. Овај део живе силе може се назвати *обртни део живе силе чврстог тела.*

Изрази (5) и (6) аналогни су по свом саставу. Сем истог бројног множитеља, једне половине, они садрже кинематички множитељ v_C^2 односно ω^2, и множитељ m одн. $J_\omega^{(A)}$, заснован на геометрији маса. Сваки од последњих множитеља игра улогу инерционог коефицијента. Коефицијенти m и $J_\omega^{(C)}$ разликују се не само по својим димензијама, M односно ML^2, већ и по томе што је први коефицијент сталан за сва могућа кретања одређеног чврстог тела, а други се у општем случају мења у вези са променом положаја осе обртања у односу на простор тела. Само у специјалним случајевима и други инерциони коефицијент може имати сталну вредност, напр. у случају кад се централни елипсоид инерције претвара у лопту.

§ 1 · 41. Жива сила чврстог тела у функцији координата

Из обрасца (2) претходног параграфа за живу силу чврстог тела , а са координатама у односу на непокретни триједар $Oxyz$ можемо написати

$$(1) \qquad 2T = m\,(x_A'^2 + y_A'^2 + z_A'^2) + 2\,m \begin{vmatrix} x'_A, & y'_A, & z'_A \\ P, & Q, & R \\ x_C - x_A, & y_C - y_A, & z_C - z_A \end{vmatrix} +$$

$$+ J_x^{(A)} P^2 + J_y^{(A)} Q^2 + J_z^{(A)} R^2 + 2\,\Pi_{yz}^{(A)} QR + 2\,\Pi_{zx}^{(A)} RP + 2\,\Pi_{xy}^{(A)} PQ,$$

где смо ради краткоће увели детерминанту.

Треба учинити примедбу да у општем случају координате тензора инерције у овом обрасцу нису константне величине, јер тело мења свој положај према осама триједра $Axyz$, који има покретни почетак и сталан правац оса.

За триједар $A\xi\eta\zeta$, чврсто везан за тело, жива сила се изражава овако:

$$(2) \qquad 2T = m\,(v_{A\xi}^2 + v_{A\eta}^2 + v_{A\xi}^2) + 2m \begin{vmatrix} v_{A\xi}, & v_{A\eta}, & v_{A\zeta} \\ p, & q, & r \\ \xi_C, & \eta_C, & \zeta_C \end{vmatrix} +$$

$$+ J_\xi^{(A)} p^2 + J_\eta^{(A)} q^2 + J_\zeta^{(A)} r^2 + 2\Pi_{\eta\zeta}^{(A)}\, qr + 2\Pi_{\zeta\xi}^{(A)}\, rp + 2\Pi_{\xi\eta}^{(A)}\, pq.$$

У овом изразу су константне не само координате ξ_C, η_C, ζ_C, центра маса, већ и све координате тензора инерције.

У случају кад за пол A узимамо центар маса тела, тачку C, и за ту тачку конструишемо триједар $CXYZ$ главних оса инерције са главним централним моментима инерције J_X, J_Y, J_Z, жива сила одређује се из једначине

$$(3) \qquad 2\,T = m\,(v_{CX}^2 + v_{CY}^2 + v_{CZ}^2) + J_X\, p^2 + J_Y\, q^2 + J_Z\, r^2.$$

Приметимо да у последњем обрасцу обртни део живе силе можемо изразити и помоћу координата момента количина кретања, наиме на основу (5) § 1.3 тај део можемо написати овако

$$(4) \qquad 2\,T = l^2{}_X / J_X + l^2{}_Y / J_Y + l^2{}_Z / J_Z.$$

§ 1 · 42. Жива сила чврстог тела у Лагранжевом облику

Као што знамо, положај чврстог тела можемо одредити са шест координата. Узмимо за те координате x_C, y_C, z_C, центра инерције, тачке C, у односу на непомични триједар $Oxyz$ и три Ојлерова угла φ, ψ, θ (§ 2.21, III) који одређују положај главних централних оса инерције триједра $CXYZ$ у односу на исти непомични триједар.

Како према (3) § 1.41 живу силу тела у овом случају можемо написати у облику

$$2T = m\,(x_C'^2 + y_C'^2 + z_C'^2) + J_X\, p^2 + J_Y\, q^2 + J_Z\, r^2,$$

за израчунавање живе силе помоћу Ојлерових углова треба вредности [(3) § 4.22, III]

$$
\begin{aligned}
p &= \varphi' \sin\theta - \psi' \cos\theta \sin\varphi,\\
q &= \varphi' \cos\theta + \psi' \sin\theta \sin\varphi,\\
r &= \psi' \cos\varphi + \theta'
\end{aligned}
$$

увртстити у претходну једначину. Тада се добије вредност живе силе тела из једначине

$$
\begin{aligned}
(1)\quad 2T = m\,(x_C'^2 + y_C'^2 + z_C'^2) &+ (J_X \sin^2\theta + J_Y \cos^2\theta)\,\varphi'^2 +\\
&+ [(J_X \cos^2\theta + J_Y \sin^2\theta)\sin^2\varphi + J_Z \cos^2\varphi]\,\psi'^2 +\\
&+ J_Z\,\theta'^2 + 2\,(J_Y - J_X)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cdot\varphi'\cdot\psi' + 2J_Z\cos\varphi\cdot\theta'\cdot\psi'.
\end{aligned}
$$

Наведимо ову једначину за специјалан случај кад је $J_X = J_Y$, тј. кад имамо тело обртно у динамичком смислу:

$$
\begin{aligned}
(2)\quad 2T = m\,(x_C'^2 + y_C'^2 + z_C'^2) &+ J_X\,\varphi'^2 +\\
&+ (J_X \sin^2\varphi + J_Z \cos^2\varphi)\,\psi'^2 + J_Z\,\theta'^2 + 2J_Z\cos\varphi\cdot\theta'\cdot\psi'.
\end{aligned}
$$

Најзад за лопту у динамичком смислу са $J_X = J_Y = J_Z = J$ имамо

$$
(3)\quad 2T = m\,(x_C'^2 + y_C'^2 + z_C'^2) + J\,(\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2 + 2\cos\varphi\cdot\theta'\cdot\psi').
$$

Облици живе силе одређени из једначииа (1), (2), (3) су Лагранжеви облици живе силе чврстог тела.

§ 1 · 5. Делимични градијенти живе силе

Као што знамо, ако је неки скалар S функција вектора $\vec{r}$, односно функција тачке M краја вектора $\vec{r}$, за сваку вредност $\vec{r}$, са изузетком неких сингуларних тачака поља скалара S, можемо конструисати вектор, градијент са ознаком grad S, који има: 1. правац нормале $\vec{n}$ на еквискаларну површину $S(\vec{r}) = \text{const.}$ која пролази кроз тачку M, 2. смер у ону област од те површине према којој скалар S расте и 3. интензитет једнак граничној вредности количника позитивног прираштаја $\Delta S = S(M') - S(M)$ скалара S у правцу нормале $\vec{n}$ и растојања MM' на тој нормали кад тачка M' тежи тачки M. Ако вектор $\vec{r}$ има координате x, y, z, у односу на Декартов триједар, координате у односу на исти триједар градијента скалара S јесу

$$
\frac{\partial S}{\partial x},\quad \frac{\partial S}{\partial y},\quad \frac{\partial S}{\partial z}.
$$

Вредности скалара S могу зависити од више вектора

$$(1) \qquad \vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n.$$

Тада се може претпоставити да су сви вектори (1), сем једног, рецимо i'тог стални. Скалар S је функција, под том претпоставком, само једног вектора $\vec{r}_i$ па можемо конструисати градијент скалара S у односу на тај вектор. Такав градијент се зове *делимични градијент* скалара S за вектор $\vec{r}_i$. Њега можемо означити са $\mathrm{grad}_{r_i} S$, или кратко $\mathrm{grad}_i S$. Он има за Декартове координате

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}, \ \frac{\partial S}{\partial y_i}, \ \frac{\partial S}{\partial z_i}.$$

Није тешко потврдити два једноставна става за делимичне градијенте. Ти ставови се примењују у наредним излагањима.

I. Делимични градијент скаларног производа два вектора у односу на један од тих вектора једнак је другом вектору, тј.

$$\mathrm{grad}_{r_1} (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \vec{r}_2.$$

То непосредно следује из обрасца

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

II. Делимични градијент скаларног производа два векторска производа једнак је сложеном векторском производу према обрасцу

$$\mathrm{grad}_{r_1} ([\vec{r}_1, \vec{r}_2] [\vec{r}_3, \vec{r}_4]) = [\vec{r}_2 [\vec{r}_3, \vec{r}_4]].$$

Овај резултат непосредно следује из претходног става а на основу векторског обрасца

$$([\vec{r}_1, \vec{r}_2] [\vec{r}_3, \vec{r}_4]) = (\vec{r}_1 [\vec{r}_2 [\vec{r}_3 \vec{r}_4]]).$$

Применимо сад појам делимичног градијента и докажимо ову теорему:

Делимични градијент живе силе чврстог тела по транслаторној брзини тела једнак је количини кретања тог тела, а делимични градијент по тренутној угаоној брзини има вредност момента количина кретања око оне тачке тела која одређује транслаторну брзину тог тела.

Заиста, ако израз (1) § 1.4 за живу силу напишемо у облику

$$2\,T = m\,v_A{}^2 + 2\,m\,(\vec{v}_A\,[\vec{\Omega}, \vec{\rho}_C]) + \Sigma\,m_i\,([\vec{\Omega}, \vec{\rho}_i]\,[\vec{\Omega}, \vec{\rho}_i]),$$

непосредно на основу наведених ставова добивамо

$$\operatorname{grad}_{v_A} T = m\,\vec{v}_A + m\,[\vec{\Omega}, \vec{\rho}_C] = \Sigma\,m_i\,(\vec{v}_A + [\vec{\Omega}\,\vec{\rho}_i]) = \Sigma\,m_i\,\vec{v}_i = \vec{K},$$

$$\operatorname{grad}_{\Omega} T = m\,[\vec{\rho}_C, \vec{v}_A] + \Sigma\,m_i\,[\vec{\rho}_i\,[\vec{\Omega}, \vec{\rho}_i]] = \Sigma\,m_i\,[\vec{\rho}_i, \vec{v}_A + [\vec{\Omega}, \vec{\rho}_i]] =$$

$$= \Sigma\,[\vec{\rho}_i, m_i\,\vec{v}_i] = \vec{l}^{(A)},$$

а то потврђује нашу теорему.

Две основне векторске једначине

$$\operatorname{grad}_{v_A} T = \vec{K},$$

$$\operatorname{grad}_{\Omega} T = \vec{l}^{(A)}$$

постављају везе између живе силе чврстог тела и два вектора — количине кретања тела и момента количина кретања.

§ 1 · 6. Кинетички дивектор чврстог тела. Жива сила чврстог тела као скаларни производ кинетичког и кинематичког дивектора.

У кинематици чврстог тела увели смо (§ 4.2, III 1) кинематички дивектор са главним вектором $\vec{\Omega}$ и главним моментом $\vec{v}_A$. Пошто сада, у динамици чврстог тела, уводимо и друге дивекторе, означимо тај дивектор са допунским индексом, тј. ставимо

$$\vartheta_c = \vartheta\,(\vec{\Omega}, \vec{v}_A)$$

Паралелно са кинематичким дивектором уводимо сад и *кинетички дивектор чврстог тела* са главним вектором — количином кретања $\vec{K}$ и главном моментом $\vec{l}^{(A)}$. Означимо тај дивектор са ϑ_k, па имамо

$$\vartheta_k = \vartheta_k\,(\vec{K}, \vec{l}^{(A)}).$$

У § 1.43, III-1 дефинисали смо скаларни производ два дивектора правилом

$$(\vartheta_1, \vartheta_2,) = (\vec{R}_1, \vec{M}_2{}^{(P)}) + (\vec{M}_1{}^{(P)}, \vec{R}_2).$$

Применимо сад то правило на скаларни производ кинетичког и кинематичког дивектора:

$$(\vartheta_k, \vartheta_c) = (\vec{K}, \vec{v}_A) + (\vec{l}^{(A)}, \vec{\Omega}).$$

Ако искористимо обрасце (3) § 1.5 и (1) § 1.3, наиме

$$\vec{K} = m\,\vec{v}_A + m\,[\vec{\Omega}, \vec{\rho}_C],$$

$$\vec{l}^{(A)} = m\,[\vec{\rho}_C, \vec{v}_A] + J_{\Omega}^{(A)}\,\vec{\Omega} - \Omega\,\vec{S}_D,$$

где је $\vec{S}_D$ вектор управан на правац вектора $\vec{\Omega}$, онда после скаларног множења изводимо

$$(\vartheta_k, \vartheta_c) = m\,v_A^2 + 2\,m\,(\vec{v}_A\,[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}_C]) + J_{\Omega}^{(A)}\,\Omega^2,$$

а то према (3) § 1.4 доводи до резултата

(1) $$(\vartheta_k, \vartheta_c) = (\vec{K}, \vec{v}_A) + (\vec{l}^{(A)}, \vec{\Omega}) = 2\,T$$

или речима: скаларни производ кинетичког и кинематичког дивектора чврстог тела једнак је двострукој живој сили тог тела.

Важна особина скаларног производа два дивектора, његова инваријантност, овде се тумачи независношћу кинетичке енергије чврстог тела од избора тачке тела за одређивање његове транслаторне брзине.

§ 1 · 61. Дивектор градијент живе силе чврстог тела

Пошто смо показали да је количина кретања чврстог тела делимични градијент живе силе по транслаторној брзини, а момент количина кретања делимични градијент живе силе по угаоној брзини, кинетички дивектор чврстог тела можемо претставити и овако

(1) $$\vartheta_k = \vartheta_k\,(\mathrm{grad}_{v_A}\,T,\ \mathrm{grad}_{\Omega}\,T).$$

Кад такав кинетички дивектор помножимо скаларно кинематичким дивектором добићемо овај резултат

$$2\,T = (\vartheta_k, \vartheta_c) = (\mathrm{grad}_{v_A}\,T, \vec{v}_A) + (\mathrm{grad}_{\Omega}\,T, \vec{\Omega}),$$

који одговара познатој Ојлеровој теореми о хомогеној функцији.

Кинетички дивектор претстављен у форми (1) називаћемо *дивектор-градијент живе силе чврстог тела.*

§ 1 · 7. Матрице кинематичког и кинетичког дивектора и њихова примена

Са кинематичким дивектором

$$\vartheta_c\,(\vec{\omega}, \vec{v}_A) = \vartheta_c\,(p, q, r, v_{A\xi}, v_{A\eta}, v_{A\zeta})$$

можемо повезати матрицу на два начина: матрицу-врсту, са ознаком $_{\overline{m}}\vartheta_c$, у облику

$$_{\overline{m}}\vartheta_c = \| p, q, r, v_{A\xi}, v_{A\eta}, v_{A\zeta} \|$$

и матрицу-колону са ознаком $_m\vartheta_c$ у облику

$$_m\vartheta_c = \left\| \begin{matrix} p \\ q \\ r \\ v_A \\ v_{A\eta} \\ v_{A\zeta} \end{matrix} \right\| .$$

Ове две матрице, без обзира на то што су састављене од истих елемената, различите су матричне природе. Оне су транспоноване једна према другој.

Ако уведемо симетричну матрицу облика

$$\sigma = \left\| \begin{matrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{matrix} \right\| ,$$

где су A_{ij} квадратне субматрице трећега реда са вредностима

$$A_{11} = A_{22} = 0, \quad A_{12} = A_{21} = I_3$$

са јединичном матрицом I_3 трећега реда, као резултат множења претходних матрица овом матрицом добићемо две нове матрице, за које уводимо и нарочите ознаке

$$_{\overline{m}}\vartheta_c \times \sigma = \| v_{A\xi}, v_{A\eta}, v_{A\zeta}, p, q, r \| = {}^{\overline{m}}\vartheta_c$$

и

$$\sigma \times {}_m\vartheta_c = \left\| \begin{matrix} v_{A\xi} \\ v_{A\eta} \\ v_{A\zeta} \\ p \\ q \\ r \end{matrix} \right\| = {}^m\vartheta_c .$$

Према томе, у вези са кинематичким дивектором можемо формирати четири матрице

$${}_{\overline{m}}\vartheta_c, \quad {}_m\vartheta_c, \quad {}^{\overline{m}}\vartheta_c, \quad {}^m\vartheta_c .$$

Прва и друга су матрице са нормалним редом елемената, наиме, прво су стављени, као елементи, координате главног вектора дивектора, а затим главног момента; при томе је прва претстављена у облику врсте, што је означено цртом над m (matrix), а друга у облику колоне; слово m игра улогу претходног индекса. За матрицу-колону могли бисмо употребити и ознаку ${}_{m|}\vartheta_c$, али додату црту можемо изоставити.

Трећа и четврта су матрице са обрнутим редом елемената: прво стоје координате главног момента, а затим координате главног вектора одговарајућег дивектора. Такве матрице ћемо називати *пермутоване матрице дивектора*. У ознакама тих матрица је њихова пермутованост наглашена премештањем индекса m у положај горњег претходног индекса. Приметимо да прелазу индекса из доњег положаја у горњи одговара матрична операција одговарајућег множења матрицом σ. Поновно множење матрицом σ враћа пермутовану матрицу у основну.

На сличан начин за кинетички дивектор

$$\vartheta_k (\vec{K}, \vec{l}^{(A)}) = \vartheta_k (K_\xi, K_\eta, K_\zeta, l_\xi^{(A)}, l_\eta^{(A)}, l_\zeta^{(A)})$$

уводимо ове четири матрице

$${}_{\overline{m}}\vartheta_k, {}_m\vartheta_k, {}^{\overline{m}}\vartheta_k, {}^m\vartheta_k .$$

Напр., трећа од њих има облик

$${}^{\overline{m}}\vartheta_k = \| l_\xi^{(A)}, l_\eta^{(A)}, l_\zeta^{(A)}, K_\xi, K_\eta, K_\zeta \| .$$

Између кинематичког и кинетичког дивектора може се поставити, помоћу инерционе матрице, ова матрична веза

$$_{m}\vartheta_{k} = \boldsymbol{J}^{(A)} \times {}^{m}\vartheta_{c}$$

или речима:

Матрица-колона кинетичког дивектора једнака је производу инерционе матрице чврстог тела за одређену тачку тог тела и пермутоване матрице-колоне кинематичког дивектора.

Заиста, имамо

$$\left\| \begin{array}{cccccc} m & 0 & 0 & 0 & m\zeta_C & -m\eta_C \\ 0 & m & 0 & -m\zeta_C & 0 & m\xi_C \\ 0 & 0 & m & m\eta_C & -m\xi_C & 0 \\ 0 & -m\zeta_C & m\eta_C & J_{\xi}^{(A)} & \Pi_{\xi\eta}^{(A)} & \Pi_{\xi\zeta}^{(A)} \\ m\zeta_C & 0 & -m\xi_C & \Pi_{\eta\xi}^{(A)} & J_{\eta}^{(A)} & \Pi_{\eta\zeta}^{(A)} \\ -m\eta_C & m\xi_C & 0 & \Pi_{\zeta\xi}^{(A)} & \Pi_{\zeta\eta}^{(A)} & J_{\zeta}^{(A)} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} v_{A\xi} \\ v_{A\eta} \\ v_{A\zeta} \\ p \\ q \\ r \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} mv_{A\xi} + m\,(q\,\zeta_C - r\,\eta_C) \\ mv_{A\eta} + m\,(r\,\xi_C - p\,\zeta_C) \\ mv_{A\zeta} + m\,(p\eta_C - q\,\xi_C) \\ m(\eta_C\,v_{A\zeta} - \zeta_C v_{A\eta}) + J_{\xi}^{(A)}p + \Pi_{\xi\eta}^{(A)}q + \Pi_{\xi\zeta}^{(A)}r \\ m(\zeta_C\,v_{A\xi} - \xi_C v_{A\zeta}) + \Pi_{\eta\xi}^{(A)}p + J_{\eta}^{(A)}q + \Pi_{\eta\zeta}^{(A)}r \\ m(\xi_C\,v_{A\eta} - \eta_C v_{A\xi}) + \Pi_{\zeta\xi}^{(A)}p + \Pi_{\zeta\eta}^{(A)}q + J_{\zeta}^{(A)}r \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} K_{\xi} \\ K_{\eta} \\ K_{\zeta} \\ l_{\xi}^{(A)} \\ l_{\eta}^{(A)} \\ l_{\zeta}^{(A)} \end{array} \right\| = {}_{m}\vartheta_{k}\,.$$

Ако раздвојимо инерциону матрицу $\boldsymbol{J}^{(A)}$ на матрицу $\boldsymbol{J}_{1}^{(A)}$ састављену само од три горње врсте и на матрицу $\boldsymbol{J}_{2}^{(A)}$ састављену од три доње врсте, можемо потврдити једначине:

$$\boldsymbol{J}_{1}^{(A)} \times {}^{m}\vartheta_{c} = {}_{m}\vec{K}, \quad \boldsymbol{J}_{2}^{(A)} \times {}^{m}\vartheta_{k} = {}_{m}\vec{l}^{(A)},$$

где индекс m поново означава матрицу-колону, у овом случају трећег реда, одговарајућег вектора.

Најзад, једнакост

$$2\,T = (\vartheta_{k}, \vartheta_{c}) = (\vartheta_{c}, \vartheta_{k}) = (\vec{K}, \vec{v}_{A}) + (\vec{l}^{(A)}, \vec{\omega})$$

може се извести и помоћу матричног множења

$$ {}^{\overline{m}}\vartheta_k \times {}_m\vartheta_c = {}^{\overline{m}}\vartheta_c \times {}_m\vartheta_k = 2\ T. $$

Приметимо да из матричног множења

$$ {}^{\overline{m}}\vartheta_c \times \| a_{ij} \| \times {}^m\vartheta_c = 2\ T, $$

где је $\| a_{ij} \|$ непозната квадратна матрица шестог реда, можемо одредити елементе ове матрице. Заиста, лева и десна страна претходне једнакости су квадратне форме у односу на координате дивектора ϑ_c. Изједначење коефицијената тих форми доводи до одређивања елемената матрице $\| a_{ij} \|$, која се јавља као инерциона матрица. Тако се одређује састав ове матрице која на први поглед изгледа вештачки формулисана.

ГЛАВА ДРУГА

Диференцијалне једначине кретања чврстог тела

§ 2 · 1. Закони количине кретања и момента количина кретања

У механици система формулисали смо закон количине кретања и закон момента количина кретања, који изражавају важне особине кретања материјалног система (II, § 4 · 1 и § 4 · 3). Под извесним условима изводили смо из тих закона интеграле кретања система и на тај начин, у специјалним случајевима, били смо у могућности да олакшамо решавање проблема о кретању система. Важно је приметити да је одређивање извесних интеграла у тим специјалним случајевима следило непосредно из узимања у обзир чисто механичких података о кретању система.

Две векторске диференцијалне једначине које изражавају оба наведена закона еквивалентне су са шест независних скаларних диференцијалних једначина. У општем случају материјалног система, кад је број степена слободе тог система већи од шест, систем од шест наведених скаларних диференцијалних једначина не може у потпуности заменити целокупни систем диференцијалних једначина кретања тог система. Један и други закон и њихове диференцијалне једначине могу у том случају играти само горе наведену помоћну улогу.

Међутим, у случају кретања чврстог тела, које не може имати број степена слободе већи од шест, диференцијалне једначине које изражавају [оба закона довољне су да сачињавају потпуни систем диференцијалних једначина кретања овог специјалног материјалног система, чврстог тела. Због тога у динамици чврстог тела оба наведена закона играју изузетно важну улогу и могу бити извор за састављање диференцијалних једначина кретања чврстог тела, било слободног била неслободног. Формирање диференцијалних једначина кретања чврстог тела помоћу наведених закона ипак не искључује могућност састављања тих једначина и на друге начине, напр. помоћу формирања Лагранжевих диференцијалних једначина кретања друге врсте и за чврсто тело, нарочито за независне координате кад је тело неслободно. Јасно је да систем диференцијалних једначина написаних према једном правилу треба да буде еквивалентан са системом једначина написаних према другом правилу, кад се постави веза између променљивих које су биле употребљене у једном и у другом случају.

Ако, као и раније, са m_i означимо масу материјалне тачке чврстог тела, са $\vec{v}_i$ и $\dot{v}_i$ брзину односно убрзање те тачке, а са $\vec{F}_i$, $\vec{R}_i$ резултанте свих сила, активних и реакција, како спољашњих тако и унутрашњих, што дејствују на тачку, онда према другом Њутновом закону имамо

$$(1) \qquad m_i \dot{v}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i. \qquad i = 1, 2, \ldots n \; (n \to \infty)$$

Ако такве једначине применимо на све тачке чврстог тела, начинимо збирове

$$\vec{K} = \Sigma\, m_i \vec{v}_i,$$

$$\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i, \qquad \vec{R} = \Sigma \vec{R}_i$$

и пређемо на граничне вредности, онда из (1) следује једначина

$$(2) \qquad \dot{K} = \vec{F} + \vec{R},$$

при чему резултанте $\vec{F}$ и $\vec{R}$ садрже само спољашње силе — активне и реакције — ако је тело слободно, а не садрже унутрашње силе између појединих делова, макроскопских и микроскопских, јер унутрашње силе улазе, према трећем Њутновом закону, увек по паровима и не утичу на вредност резултанте без обзира на силе напрезања које постоје у унутрашњости тела.

Векторска једначина (2) изражава закон количине кретања за чврсто тело.

Као што је познато (§ 4·1, II) тај закон можемо изразити и у облику

$$(3) \qquad m \dot{v}_C = \vec{F} + \vec{R},$$

где је m целокупна маса тела и $\vec{v}_C$ брзина центра маса тела; ова једначина тврди да се центар маса чврстог тела креће као материјална тачка са целокупном масом тела, а под утицајем резултанте свих спољашњих сила — активних и реакција — које дејствују на тело.

Наведимо сад закон момента количина кретања за чврсто тело. Слично § 4·3, II, после увођења вектора

$$\vec{l}_i = [\vec{r}_i\,,\ m_i\,\vec{v}_i]\,, \tag{4}$$

момента количине кретања $m_i\,\vec{v}_i$ тачке са вектором положаја $\vec{r}_i$ у односу на непокретну тачку O и вектора

$$\vec{l} = \Sigma\,[\vec{r}_i\,,\ m_i\,\vec{v}_i]\,,$$

$$\vec{M} = \Sigma\,[\vec{r}_i\,,\ \vec{F}_i]\,,$$

$$\vec{L} = \Sigma\,[\vec{r}_i\,,\ \vec{R}_i]\,,$$

изводимо, после диференцирања и узимања у обзир једнакости вектора $\dot{r}_i$ и $\vec{v}_i$, ову векторску једначину:

$$\dot{l} = \vec{M} + \vec{L}\,. \tag{5}$$

Ако место непокретног пола, O, узмемо за конструисање момента неки покретни пол, тачку A, која може да буде тачка тела, а може да буде и нека покретна тачка која се креће и у односу на тело, онда за поједину тачку можемо ставити

$$\vec{l}_i^{(N)} = [\vec{\mathrm{v}}_i\,,\ m_i\,\vec{v}_i]\,,$$

где смо са $\vec{\mathrm{v}}_i$ означили вектор положаја тачке са масом m_i у односу на тачку N. Ставимо сад

$$\vec{l}^{(N)} = \Sigma\,[\vec{\mathrm{v}}_i\,,\ m_i\,\vec{v}]$$

и диференцирајмо

$$\dot{l}^{(N)} = \Sigma\,[\dot{\mathrm{v}}_i\,,\ m_i\,\vec{v}_i] + \Sigma\,[\vec{\mathrm{v}}_i\,,\ m_i\,\dot{v}]\,.$$

Како је

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_N$$

и

$$\dot{\mathrm{v}}_i = \dot{r}_i - \dot{r}_N = \vec{v}_i - \vec{v}_N$$

добивамо овај резултат за покретни пол N са произвољним кретањем,

$$(6) \qquad \dot{I}^{(N)} + [\vec{v}_N, \vec{K}] = \vec{M}^{(N)} + \vec{L}^{(N)},$$

где су ознаке очигледне.

Једначине (5) и (6) изражавају закон момента количина кретања у случајевима непокретног и покретног пола за кретање чврстог тела.

Једначина (6) неће се мењати ако за тачку N узмемо тачку чврстог тела. У случају кад је за тачку N узет центар маса тела, тачка C, лева страна једначине (6) због колинеарности вектора $\vec{v}_C$ и $\vec{K}$ губи свој допунски члан и узима исти облик као и у случају непокретног пола:

$$\dot{I}^{(C)} = \vec{M}^{(C)} + \vec{L}^{(C)}.$$

Допунски члан исто тако отпада кад се тачка N налази у тренутном миру, како се то претпоставља за случај дејства тренутних сила са коначним импулсом.

§ 2 · 11. Закон кинетичког дивектора чврстог тела

Кинетички дивектор чврстог тела за непокретну тачку O

$$\vartheta_k (\vec{K}, \vec{I})$$

у општем случају је функција времена. Дивектор са векторима $\dot{K}$ и $\dot{I}$ је *извод по времену кинетичког дивектора.* Тај дивектор означимо са $\dot{\vartheta}_k$, тј. ставимо

$$\dot{\vartheta}_k = \dot{\vartheta}_k (\dot{K}, \dot{I}).$$

Уведимо сад нов дивектор, *динамички дивектор сила* што дејствују на чврсто тело, састављен од главног вектора тих сила и главног момента око одговарајућег пола, у датом случају око непокретне тачке O. Означимо га са ϑ_d, тј. ставимо

$$\vartheta_d = \vartheta_d (\vec{\Phi}, \vec{\mathrm{M}})$$

где смо увели кратке ознаке

$$\vec{F} + \vec{R} = \vec{\Phi}, \quad \vec{M} + \vec{L} = \vec{\mathrm{M}}.$$

Непосредно из закона количине кретања и закона момента количина кретања за непокретни пол следује ова дивекторска једначина

$$\dot{\vartheta}_k = \vartheta_d . \tag{1}$$

Ова једначина изражава закон *кинетичког дивектора* чврстог тела. Закон гласи:

За непокретни пол извод по времену кинетичког дивектора чврстог тела једнак је динамичком дивектору свих спољашних сила што дејствују на чврсто тело.

Једначина (1) важи за сваки дати тренутак кретања тела. Замислимо сада да је иста дивекторска једначина изражена за исти тренутак времена али с обзиром на неку другу тачку простора, тачку N, било непокретну било покретну, која у том тренутку заузима одређени положај са вектором положаја $\vec{r}_N$ у односу на тачку O. Тада, према основном правилу (13. § 1.41, III-1), и у једном и у другом дивектору треба променити моменте и написати ту једначину овако:

$$(\dot{\vartheta}_k)^{(N)} (\dot{K}, \dot{l}+[\dot{K}, \vec{r}_N]) = \vartheta_d{}^{(N)} (\vec{\Phi}, \vec{M}+[\vec{\Phi}, \vec{r}]), \tag{2}$$

где ознака са леве стране показује да је прелаз на нови пол извршен досле диференцирања.

Ако са друге стране, узмемо кинетички дивектор конструисан за тачку N

$$\vartheta_k{}^{(N)} (\vec{K}, \vec{l}^{(N)}) = \vartheta_k{}^{(N)} (\vec{K}, \vec{l} + [\vec{K}, \vec{r}_N]),$$

па га диференцирамо непосредно,

$$\dot{\vartheta}_k{}^{(N)} (\dot{K}, \dot{l}^{(N)}) = \vartheta_k{}^{(N)} (\dot{K}, \dot{l} + [\dot{K}, \vec{r}_N] + [\vec{K}, \dot{r}_N]),$$

видимо да тај резултат не одговара левој страни у једначини (2). Према томе од резултата непосредног диференцирања треба одузети сувишни момент и написати овако:

$$\dot{\vartheta}_k{}^{(N)} - \vartheta_k \, (0, [\vec{K}, \dot{r}_N]) = \vartheta_d{}^{(N)}$$

или

$$\dot{\vartheta}_k{}^{(N)} + \vartheta_k \, (0, [\vec{v}_N, \vec{K}]) = \vartheta_d{}^{(N)} . \tag{3}$$

Ова једначина изражава закон кинетичког дивектора за случај покретног пола. За центар маса допунски дивектор отпада, па за тај пол важи једначина

$$\dot{\vartheta}_k^{(C)} = \vartheta_d^{(C)},$$

еквивалентна по својој форми са дивекторском једначином (1) за непокретни пол.

Како је (§ 1.5) количина кретања чврстог тела једнака делимичном градијенту живе силе по транслаторној брзини, тј. по брзини изабране тачке, рецимо тачке A чврстог тела, а момент око те исте тачке количина кретања једнак је делимичном градијенту живе силе по угаоној брзини, то је кинетички дивектор за исту тачку

$$\vartheta_k^{(A)}\,(\mathrm{grad}_{v_A} T,\ \mathrm{grad}_{\omega} T).$$

За тачку O кинетички дивектор се тада изражава

$$\vartheta_k\,(\mathrm{grad}_{v_A} T,\ \mathrm{grad}_{\omega} T + [OA, \mathrm{grad}_{v_A} T]).$$

Према тим изразима, закон кинетичког дивектора помоћу дивектора-градијента можемо изразити овако:

за непокретни пол

$$\dot{\vartheta}_k\left(\frac{d}{dt}\ \mathrm{grad}_{v_A} T,\ \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{grad}_{\omega} T + \left[\overrightarrow{OA}, \mathrm{grad}_{v_A} T\right]\right\}\right) = \vartheta_d\,(\vec{\Phi}, \vec{M})$$

за покретни пол, за тачку A,

$$\dot{\vartheta}_{k^{(A)}}\left(\frac{d}{dt}\ \mathrm{grad}_{v_A} T,\ \frac{d}{dt}\mathrm{grad}_{\omega} T\right) + \vartheta_k\,(0, [\vec{v}_A, \mathrm{grad}_{v_A} T]) = \vartheta_d\,(\vec{\Phi}, \vec{M}^{(A)}).$$

Најзад, у матричном рачуну једначинама (1) односно (3) одговарају ове једначине

$$\frac{d}{dt}\,{}_m\vartheta_k = {}_m\vartheta_d,$$

где је

$$\frac{d}{dt}\,{}_m\vartheta_k = \left\| \begin{matrix} K_x' \\ K_y' \\ K_z' \\ l_x' \\ l_y' \\ l_z' \end{matrix} \right\|,$$

при чему цртица означава извод по времену, и

$$\frac{d}{dt}\,{}_{m}\vartheta_{k}{}^{(N)}+\mu={}_{m}\vartheta_{d}{}^{(N)},$$

где је

$$\mu=\left\|\begin{matrix}0\\0\\0\\v_{Ny}\,K_{z}-v_{Nz}\,K_{y}\\v_{Nz}\,K_{x}-v_{Nx}\,K_{z}\\v_{Nx}\,K_{y}-v_{Ny}\,K_{x}\end{matrix}\right\|.$$

Остале ознаке су очигледне.

§ 2 · 2. Диференцијалне једначине кретања чврстог тела у векторском облику

Из претходног излагања је јасно да закон кинетичког дивектора, који је еквивалентан са две векторске једначине односно са шест скаларних једначина, одређује систем диференцијалних једначина кретања чврстог тела, који је за случај кретања слободног тела потпуно довољан, јер слободно чврсто тело има шест степена слободе.

Ако је тело неслободно, у шест скаларних једначина улазе још и реакције које треба да буду одређене према карактеру веза које ограничавају кретање тела. При томе се може појавити случај, како ћемо то видети и на конкретном примеру, да, сматрајући тело за идеално чврсто, не можемо решити проблем о одређивању реакција било за време кретања било за време мировања таквог неслободног тела. То се односи на такозване *динамички*, односно *статички неодређене проблеме*. Да такав проблем постане потпуно одређен, треба дубље проучити као природу самог тела тако и оног механизма који остварује везе, напр. узети у обзир еластичне силе, које се појављују било у телу било у механизму. Јасно је да за такве проблеме схема идеалног чврстог тела и идеалног механизма није довољна.

Остављајући засада пострани проучавање диференцијалних једначина кретања неслободног чврстог тела, изведимо разне форме диференцијалних једначина кретања слободног тела, и то прво у векторској форми.

Ако непосредно одређивање вектора количине кретања чврстог тела и момента количина кретања не задаје тешкоће, векторске једначине

$$\dot{\vec{K}}=\vec{F}, \tag{1}$$

$$\dot{\vec{I}}=\vec{M}, \tag{2}$$

односно

$$\dot{\vec{I}}^{(A)}+[\vec{v}_A, \vec{K}]=\vec{M}^{(A)} \tag{3}$$

можемо искористити као основне диференцијалне векторске једначине кретања чврстог тела.

Ако је проблем сложенијег карактера, онда је за састављање диференцијалних једначина кретања довољно израчунати само живу силу чврстог тела, па извршити оне формалне операције које захтева одређивање делимичних градијената и диференцирање. Диференцијалне једначине тада можемо написати у једном од ових векторских облика.

За непокретни пол

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{v_A} T=\vec{F}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\{\operatorname{grad}_{\Omega} T+[\overrightarrow{OA}, \operatorname{grad}_{v_A} T]\}=\vec{M}; \tag{5}$$

за покретни

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{v_A} T=\vec{F}, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{\omega} T+[\vec{v}_A, \operatorname{grad}_{v_A} T]=\vec{M}^{(A)}. \tag{7}$$

Векторске једначине (1) — (7) овог параграфа треба сматрати као најважније у динамици слободног чврстог тела.

§ 2 · 21. Скаларне диференцијалне једначине кретања чврстог тела за непокретне осе

За добивање скаларних једначина из векторских треба изабрати одговарајуће осе и начин пројицирања. Овде се ограничимо на ортогонално пројицирање и на извођење једначина за три триједра ортогоналних оса: за триједар непомичних оса, за триједар оса чврсто везаних са телом и за триједар који има произвољно кретање.

За непомични триједар можемо искористити израз за живу силу у облику (1) § 1.41 и тада написати систем скаларних диференцијалних једначина кретања из (4) и (5) § 2.2 у облику

$$\text{(1)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_A'} = F_x, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y_A'} = F_y, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial z_A'} = F_z;$$

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial P} + y_A\frac{\partial T}{\partial z_A'} - z_A\frac{\partial T}{\partial y_A'}\right) = M_x, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial Q} + z_A\frac{\partial T}{\partial x_A'} - x_A\frac{\partial T}{\partial z_A'}\right) = M_y, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial R} + x_A\frac{\partial T}{\partial y_A'} - y_A\frac{\partial T}{\partial x_A'}\right) = M_z. \end{aligned}$$

Ове једначине имају тај крупан недостатак што елементи тензора инерције нису константни. Према томе је од користи написати и за непомичне осе диференцијалне једначине кретања чврстог тела са употребом живе силе у облику (2) § 1.41, где су координате тензора инерције сталне.

Ако искористимо ознаке косинуса углова између оса $Oxyz$ и оса $A\xi\eta\zeta$ из схеме (13) § 2.2, III – 1 исте једначине (4) и (5) § 2.2 дају ову серију скаларних једначина:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}\lambda_x + \frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}}\mu_x + \frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\nu_x\right) = F_x, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}\lambda_y + \frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}}\mu_y + \frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\nu_y\right) = F_y, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}\lambda_z + \frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}}\mu_z + \frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\nu_z\right) = F_z; \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial p}\lambda_x+\frac{\partial T}{\partial q}\mu_x+\frac{\partial T}{\partial r}\nu_x+y_A\left(\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}\lambda_z+\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}}\mu_z+\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\nu_z\right)-\right.$$
$$\left.-z_A\left(\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}\lambda_y+\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}}\mu_y+\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\nu_y\right)\right]=M_x,$$

$$(4)\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial p}\lambda_y+\frac{\partial T}{\partial q}\mu_y+\frac{\partial T}{\partial r}\nu_y+z_A\left(\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}\lambda_x+\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}}\mu_x+\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\nu_x\right)-\right.$$
$$\left.-x_A\left(\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}\lambda_z+\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}}\mu_z+\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\nu_z\right)\right]=M_y,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial p}\lambda_z+\frac{\partial T}{\partial q}\mu_z+\frac{\partial T}{\partial r}\nu_z+x_A\left(\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}\lambda_y+\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}}\mu_y+\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\nu_y\right)-\right.$$
$$\left.-y_A\left(\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\lambda_x+\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}}\mu_x+\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}\nu_x\right)\right]=M_z.$$

§ 2 · 22. Скаларне диференцијалне једначине кретања чврстог тела за осе чврсто везане са телом

За писање скаларних диференцијалних једначина кретања чврстог тела за осе триједра $A\xi\eta\zeta$, који се креће заједно са чврстим телом, треба узети живу силу у облику (2) § 1.41. Сем тога, пошто сад вршимо пројицирање векторског извода по времену на променљив правац, треба узети у обзир образац који смо примењивали више пута и који гласи

$$(\dot{\vec{V}}, \vec{u}) = \frac{d}{dt}(\vec{V}, \vec{u}) - (\vec{V}, \dot{\vec{u}}),$$

где је $\vec{V}$ променљив вектор, $\dot{V}$ — његов извод по времену, $\vec{u}$ променљив орт и $\dot{u}$ његова брзина скретања. Према томе за пројекцију, нпр. извода

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{v_A} T$$

на осу $A\xi$ са ортом $\vec{\lambda}$ треба написати

$$\left(\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{v_A} T, \vec{\lambda}\right) = \frac{d}{dt}(\operatorname{grad}_{v_A} T, \vec{\lambda}) - (\operatorname{grad}_{v_A} T, \dot{\lambda});$$

како је, према (3) § 4.2, III - 1

$$\dot{\lambda}=[\vec{\Omega},\vec{\lambda}]=[\vec{\omega},\vec{\lambda}],$$

имамо

$$\left(\frac{d}{dt}\mathrm{grad}_{v_A}T,\vec{\lambda}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}+q\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}-r\frac{\partial T}{\partial v_{A_\eta}}\cdot$$

После искоришћавања живе силе чврстог тела у облику (2) § 1.41 и узимања у обзир наведене примедбе о пројицирању векторског извода на промењљив правац, добивамо из једначина (6) и (7) § 2.2 ове две серије скаларних једначина:

$$(1)\qquad \begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}+q\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}-r\frac{\partial T}{\partial v_{A_\eta}}=F_\xi,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_{A_\eta}}+r\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}-p\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}=F_\eta,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}+p\frac{\partial T}{\partial v_{A_\eta}}-q\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}=F_\zeta\,;
\end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial r}-r\frac{\partial T}{\partial q}+v_{A_\eta}\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}-v_{A\zeta}\frac{\partial T}{\partial v_{A_\eta}}=M_\xi^{(A)},\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial p}-p\frac{\partial T}{\partial r}+v_{A\zeta}\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}-v_{A\xi}\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}}=M_\eta^{(A)},\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}+p\frac{\partial T}{\partial q}-q\frac{\partial T}{\partial p}+v_{A\xi}\frac{\partial T}{\partial v_{A_\eta}}-v_{A_\eta}\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}}=M_\zeta^{(A)}.
\end{aligned}$$

За триједар $A\xi\eta\zeta$ увек можемо узети триједар главних централних оса. За такве осе $CXYZ$ живу силу чврстог тела можемо написати у облику (3) § 1.41 или са другим, краћим, ознакама ($v_{CX}=v_1$, $v_{CY}=v_2$, $v_{CZ}=v_3$; $J_X=A$, $J_Y=B$, $J_Z=C$) овако:

$$2T=m\,(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+Ap^2+Bq^2+Cr^2.$$

Ако сад узмемо за одређивање транслаторног кретања тела једначине у односу на непокретни триједар $Oxyz$, а за одређивање обртног кретања једначине у односу на триједар $CXYZ$, онда ћемо добити две серије једначина:

$$(3) \qquad m x_C'' = F_x\,, \quad m y_C'' = F_y\,, \quad m z_C'' = F_z\,;$$

$$A\frac{dp}{dt} - (B-C)\,qr = M_x^{(C)}\,,$$

$$(4) \qquad B\frac{dq}{dt} - (C-A)\,rp = M_y^{(C)}\,,$$

$$C\frac{dr}{dt} - (A-B)\,pq = M_z^{(C)}\,.$$

Овај систем од шест диференцијалних једначина може се сматрати као најпростији за одређивање кретања слободног чврстог тела. Једначине (4) се називају *Ојлерове диференцијалне једначине обртања чврстог тела око центра инерције.*

§ 2 · 23. Скаларне диференцијалне једначине кретања чврстог тела за произвољне осе

У § 2.1 навели смо законе количине кретања и момента количина кретања за произвољан у општем случају покретан пол N. За слободно тело ови закони дају

$$(1) \qquad \dot{\vec{K}} = \vec{F}\,,$$

$$(2) \qquad j^{(N)} + [\vec{v}_N\,, \vec{K}] = \vec{M}^{(N)}\,.$$

Пођимо од живе силе чврстог тела у облику

$$(3) \qquad 2T = m v_C^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\,,$$

где је $\vec{v}_C$ брзина центра маса, тачке C, а p, q, r су пројекције, на главне централне осе инерције тела, угаоне брзине $\vec{\Omega}$ обртања тела према непокретном простору.

Брзину $\vec{v}_C$ можемо изразити помоћу брзине $\vec{v}_N$ оне тачке тела која се у датом тренутку поклапа са тачком N, наиме помоћу обрасца

$$(4) \qquad \vec{v}_C = \vec{v}_N + [\vec{\Omega}, \overrightarrow{NC}]$$

а величине p, q, r помоћу пројекција Ω_1, Ω_2, Ω_3 тренутне угаоне брзине тела на осе ортогоналног триједра $Nu_1u_2u_3$ са одређеним ортовима $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$. Тако, напр., имамо

$$(5) \qquad p = \Omega_1 \cos(\vec{u}_1, \xi) + \Omega_2 \cos(\vec{u}_2, \xi) + \Omega_3 \cos(\vec{u}_3, \xi).$$

Помоћу (4) и (5) живу силу (3) можемо изразити као квадратну форму координата вектора $\vec{v}_N (v_{N1}, v_{N2}, v_{N3})$ и $\vec{\Omega} (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$, тј.

$$2T = \text{fonct}\,(\vec{v}_N, \vec{\Omega}),$$

и затим за овај израз живе силе без тешкоће показати да су

$$\text{grad}_{v_N} T = \vec{K},$$

$$\text{grad}_\Omega T = \vec{I}^{(N)} = \vec{I}^{(C)} + [\overrightarrow{NC}, \vec{K}].$$

Тада векторске једначине (1) и (2) можемо заменити овима:

$$\frac{d}{dt} \text{grad}_{v_N} T = \vec{F},$$

$$\frac{d}{dt} \text{grad}_\Omega T + (\vec{v}_N, \text{grad}_{v_N} T] = \vec{M}^{(N)}.$$

За добивање одговарајућих скаларних једначина при пројицирању треба као и раније, узети у обзир 1. да је пројекција на променљив правац извода по времену једнака изводу пројекције без скаларног производа вектора који диференцирамо и брзине скретања променљивог правца и 2. да се брзина скретања $\dot{u}_i$ $(i=1, 2, 3)$ одређује из векторске једначине

$$\dot{u}_i = [\vec{\omega}^*, \vec{u}_i],$$

где је $\vec{\omega}^*$ дата угаона брзина триједра $N u_1 u_2 u_3$ са координатама ω_1^*, ω_2^*, ω_3^* у односу на тај триједар.

Ако искористимо та правила, можемо написати ове две серије скаларних диференцијалних јадначина:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{N1}} - \omega_3^* \frac{\partial T}{\partial v_{N2}} + \omega_2^* \frac{\partial T}{\partial v_{N3}} &= F \cos(\vec{F}, \vec{u}_1), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{N2}} - \omega_1^* \frac{\partial T}{\partial v_{N3}} + \omega_3^* \frac{\partial T}{\partial v_{N1}} &= F \cos(\vec{F}, \vec{u}_2), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v_{N3}} - \omega_2^* \frac{\partial T}{\partial v_{N1}} + \omega_1^* \frac{\partial T}{\partial v_{N2}} &= F \cos(\vec{F}, \vec{u}_3); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \Omega_1}-\omega_3{}^*\frac{\partial T}{\partial \Omega_2}+\omega_2{}^*\frac{\partial T}{\partial \Omega_3}+\nu_{N2}\frac{\partial T}{\partial \nu_{N3}}-\nu_{N3}\frac{\partial T}{\partial \nu_{N2}}=\\
&\qquad= M^{(N)}\cos(\vec{M}^{(N)},\vec{u}_1),\\
(7)\qquad&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \Omega_2}-\omega_1{}^*\frac{\partial T}{\partial \Omega_3}+\omega_3{}^*\frac{\partial T}{\partial \Omega_1}+\nu_{N3}\frac{\partial T}{\partial \nu_{N1}}-\nu_{N1}\frac{\partial T}{\partial \nu_{N3}}=\\
&\qquad= M^{(N)}\cos(\vec{M}^{(N)},\vec{u}_2),\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \Omega_3}-\omega_2{}^*\frac{\partial T}{\partial \Omega_1}+\omega_1{}^*\frac{\partial T}{\partial \Omega_2}+\nu_{N1}\frac{\partial T}{\partial \nu_{N2}}-\nu_{N2}\frac{\partial T}{\partial \nu_{N1}}=\\
&\qquad= M^{(N)}\cos(\vec{M}^{(N)},\vec{u}_3).
\end{aligned}
$$

§ 2·3. Лагранжеве диференцијалне једначине кретања чврстог тела

Без обзира на то што из изведених скаларних једначина понеке, напр. Ојлерове једначине (4) § 22.2, изгледају врло једноставно, за решавање конкретних проблема о ротацији чврстог тела чак и оне нису увек и најзгодније. Ово стоји у вези с тим што ове једничине нису састављене непосредно помоћу било којих координата чврстог тела. Ако *p*, *q*, *r* изразимо у функцији координата чврстог тела и извода тих координата по времену, тек тада ћемо добити систем диференцијалних једначина од којих је свака другог реда. Интеграција тог система решава проблем обртања чврстог тела. Само у специјалним случајевима, кад се, напр. вектор $\vec{M}^{(C)}$ не мења у простору тела, из једначина (4) § 2.22 можемо одредити *p*, *q*, *r*, у функцији времена, а затим се само обртање чврстог тела одређује после интеграције Рикатијеве једначине (§ 4.25, III) или, у специјалним случајевима, после извршења квадратура.

Из наведеног разлога треба показати како се састављају диференцијалне једначине кретања чврстог тела непосредно за координате тог тела. За тај циљ изведимо Лагранжеве једначине друге врсте у односу на координате центра инерције тела и Ојлерове углове.

Узмимо за независне координате чврстог тела ових шест величина: координате x_C, y_C, z_C, центра маса у односу на непомични тријeдар $Oxyz$ и Ојлерове углове φ, ψ, θ, (§ 2.21, III) које одређују положај тиједра $CXYZ$ у односу на тријeдар $Oxyz$.

Видели смо да се за такве координате жива сила изражава једначином (§ 1.42)

$$\begin{aligned}2T = m\,(x_C'^2 + y_C'^2 + z_C'^2) + (A \sin^2\theta + B \cos^2\theta)\,\varphi'^2 + \\ + [(A \cos^2\theta + B \sin^2\theta) \sin^2\varphi + C \cos^2\varphi]\,\psi'^2 + C\,\theta'^2 + \\ + 2\,(B - A) \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cdot \varphi'\,\psi' + 2C \cos\varphi \cdot \theta'\,\psi'.\end{aligned}$$

Помоћу ове једначине можемо израчунати леве стране свих шест Лагранжевих једначина типа

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1,2,\ldots,6.$$

где су q_i наше координате тела. Нећемо испитивати у детаљима те леве стране. За израчунавање генералисаних сила Q_i ($i = 1,2,\ldots,6$) треба израчунати рад спољашњих сила на елементарним померањима тј. коефицијенте израза

$$(1) \quad \delta A = Q_1\,\delta x_C + Q_2\,\delta y_C + Q_3\,\delta z_C + Q_4\,\delta\varphi + Q_5\,\delta\psi + Q_6\,\delta\theta.$$

Како је, с друге стране,

$$\delta A = \Sigma\,(\vec{F}_i, \vec{\delta s_i}),$$

а за сваку тачку тела у нашем случају имамо

$$\overrightarrow{\delta s_i} = \overrightarrow{\delta s_C} + [\overrightarrow{\delta\Omega}, \vec{\rho}_i],$$

то можемо рачунати овако

$$\begin{aligned}\delta A &= \Sigma\,(\vec{F}_i, \overrightarrow{\delta s_C}) + \Sigma\,(\vec{F}_i\,[\overrightarrow{\delta\Omega}, \vec{\rho}_i]) = \\ &= (\Sigma\,\vec{F}_i, \overrightarrow{\delta s_C}) + (\overrightarrow{\delta\Omega}, \Sigma\,[\vec{\rho}_i, \vec{F}_i] = \\ &= (\vec{F}, \overrightarrow{\delta s_C}) + (\overrightarrow{\delta\Omega}, \vec{M}^{(C)}).\end{aligned}$$

Али, према (1) § 4.22, III, у нашем случају је

$$\overrightarrow{\delta\Omega} = \overrightarrow{(\delta\varphi)}_{CN} + \overrightarrow{(\delta\psi)}_{Cz} + \overrightarrow{(\delta\theta)}_{C\zeta}$$

па на тај начин можемо дефинитивно написати

$$(2) \qquad \delta A = F_x\,\delta x_C + F_y\,\delta y_C + F_z\,\delta z_C + (\vec{M}^{(C)}, \overrightarrow{CN})\,\delta\varphi + $$

$$+ (\vec{M}^{(C)}, \overrightarrow{Cz})\,\delta\psi + (\vec{M}^{(C)}, \overrightarrow{C\zeta})\,\delta\theta,$$

где су $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{Cz}$, $\overrightarrow{C\zeta}$ ортови ових праваца: 1. линије чворова, 2. сталне осе у непокретном простору, прецесионе осе, и 3. једне од главних оса инерције — осе чистог обртања тела.

После упоређивања (1) и (2) долазимо до резултата:

$$Q_1 = F_x, \qquad Q_2 = F_y, \qquad Q_3 = F_z;$$

$$Q_4 = Q_\varphi = (\vec{M}^{(C)}, \overrightarrow{CN}) = \vec{M}_\varphi^{(C)},$$

$$Q_5 = Q_\psi = (\vec{M}^{(C)}, \overrightarrow{Cz}) = \vec{M}_\psi^{(C)},$$

$$Q_6 = Q_\theta = (\vec{M}^{(C)}, \overrightarrow{C\zeta}) = \vec{M}_\theta^{(C)}.$$

Последње три једначине показују механички смисао генералисаних сила које одговарају Ојлеровим угловима. Свака таква генералисана сила је момент спољашњих сила око оне осе обртања која одговара промени само једног Ојлеровог угла.

На тај начин, систем Лагранжевих диференцијалних једначина кретања чврстог тела има облик

$$m x_C'' = F_x, \qquad m y_C'' = F_y, \qquad m z_C'' = F_z;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_\varphi^{(C)}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \psi'} = M_\psi^{(C)}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = M_\theta^{(C)}.$$

Ако је $A = B$, елипсоид инерције је обртни елипсоид, чврсто тело је *обртно тело у динамичком смислу*. За такво тело обртни део живе силе има вредност T_1 са

$$2T_1 = A\varphi'^2 + (A \sin^2\varphi + C\cos^2\varphi)\,\psi'^2 + C\theta'^2 + 2C\cos\varphi\cdot\theta'\psi'.$$

Најзад за тело са $A = B = C$, *лопту у динамичком смислу*, имамо за живу силу T_2 једначину

$$2T_2 = A\,(\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2 + 2\cos\varphi\cdot\theta'\psi').$$

У последњем случају, диференцијалне једначине обртања узимају облик

$$A\,(\varphi''+\sin\varphi\cdot\theta'\,\psi')=M_{\varphi}^{(C)},$$

$$A\,\frac{d}{dt}\,(\psi'+\cos\varphi\cdot\theta')=M_{\psi}^{(C)},$$

$$A\,\frac{d}{dt}\,(\theta'+\cos\varphi\cdot\psi')=M_{\theta}^{(C)}.$$

§ 2 · 4. Природне диференцијалне једначине кретања чврстог тела

Како смо видели, за постављање скаларних диференцијалних једначина кретања чврстог тела потребно је изабрати триједар оса, сталних или променљивих, конструисаних по одређеним правилима, и пројицирати на те осе, ортогонално или косо, чланове векторских диференцијалних једначина кретања чврстог тела. Карактер добивених диференцијалних једначина кретања зависи, с једне стране, од суштине постављеног задатка, са друге, од правила на основу којих су конструисане осе триједра.

У претходним параграфима узимали смо за осе: 1. осе непокретног триједра 2. осе триједра чврсто везаног за тело, 3. произвољне покретне осе и 4. у случају Лагранжевих једначина за транслаторно кретање осе непокретног триједра, а за обртно кретање осе оних обртања, које, свака посебно, одговарају промени само једног од Ојлерових углова. Јасно је да сем наведених оса могу бити изабране и различите друге осе, које су нарочито згодне или за решавање једног или другог конкретног задатка или за општа проучавања кретања чврстог тела под утицајем датих сила.

У овом параграфу показаћемо један нарочити начин конструисања оса триједра, који је везан са објективним елементима самог кретања чврстог тела. Диференцијалне једначине кретања које ћемо при томе добити називаћемо, слично познатим Ојлеровим природним једначинама кретања материјалне тачке, *природне диференцијалне једначине кретања чврстог тела*.

Узмимо неки променљив правац са ортом $\vec{u}=\vec{u}(t)$. Тај *основни правац* бирамо за правац прве осе са ортом $\vec{u}_1$. Векторски извод орта $\vec{u}$, вектор $\dot{u}$, својим правцем одређује нам другу осу триједра са ортом $\vec{u}_2$, који стоји управно на прву осу. Најзад, нека трећи орт $\vec{u}_3$ стоји управно на прва два и има смер који одговара смеру z осе, ако се ортови $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ поклапају са x и y осама. Узимајући сад за почетак триjетра неку тачку П простора, која може бити и променљива, конструишимо триједар $\Pi\, u_1\, u_2\, u_3$.

Није тешко видети да координате извода $\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$, $\dot{u}_3$ у односу на триједар $\Pi\, u_1\, u_2\, u_3$ имају вредности

$$\begin{array}{ll} & \dot{u}_1\,(\ 0,\ \ \varkappa_u,\ \ 0\ ), \\ (1) & \dot{u}_2\,(-\varkappa_u,\ \ 0\ ,\ \ \lambda_u), \\ & \dot{u}_3\,(\ 0,\ -\lambda_u,\ \ 0\ ), \end{array}$$

при чему смо са $\varkappa_u$, λ_u означили наредне величине:

$$\varkappa_u = |\,\dot{u}\,| = +\sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2},$$

$$\lambda_u = \frac{1}{\varkappa_u^2}\,(\vec{u}\,[\dot{u}, \ddot{u}]) = \frac{1}{\varkappa_u^2}\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ u_x' & u_y' & u_z' \\ u_x'' & u_y'' & u_z'' \end{vmatrix}.$$

Ако сад узмемо закон количине кретања (2) § 2.1 за слободно тело

$$\dot{K} = \vec{F}$$

и закон момента количина кретања за произвољан покретни пол (6) § 2.1, који у нашем случају гласи

$$\dot{\vec{l}}^{(\Pi)} + [\vec{v}_\Pi, \vec{K}] = \vec{M}^{(\Pi)},$$

онда после примене таблице (1) долазимо до једначина

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{dK_1}{dt} - K_2\varkappa_u = F_1,\ \ \dfrac{dK_2}{dt} + K_1\varkappa_u - K_3\lambda_u = F_2,\ \ \dfrac{dK_3}{dt} + K_2\lambda_u = F_3; \\ & \dfrac{dl_1^{(\Pi)}}{dt} - l_2^{(\Pi)}\varkappa_u \qquad\qquad\qquad + v_{\Pi 2}K_3 - v_{\Pi 3}K_2 = M_1^{(\Pi)}, \\ (2) & \dfrac{dl_2^{(\Pi)}}{dt} + l_1^{(\Pi)}\varkappa_u - l_3^{(\Pi)}\lambda_u + v_{\Pi 3}K_1 - v_{\Pi 1}K_3 = M_2^{(\Pi)}, \\ & \dfrac{dl_3^{(\Pi)}}{dt} + l_2^{(\Pi)}\lambda_u \qquad\qquad\qquad + v_{\Pi 1}K_2 - v_{\Pi 2}K_1 = M_3^{(\Pi)}. \end{array}$$

где су ознаке очигледне. Векторе $\vec{K}$ и $\vec{I}^{(\Pi)}$ можемо изразити као делимичне градијенте живе силе чврстог тела са транслаторном брзином $\vec{v}_\Pi$ и угаоном брзином $\vec{\omega}$.

Једначине (2) су природне диференцијалне једначине кретања чврстог тела за основни правац $\vec{u}$. У једном нашем раду анализирали смо природне једначине кад основни орт има правац: 1. једне праве чврсто везане са телом, 2. тангенте на трајекторију одређене тачке чврстог тела, 3. тренутне угаоне брзине, 4. количине кретања и 5. момента количина кретања. У случају 2. кад се тело креће транслаторно наше једначине се поклапају са поменутим природним Ојлеровим једначинама кретања материјалне тачке.

§ 2·5. Диференцијалне једначине кретања неслободног чврстог тела

Према ономе што смо изложили у општој теорији кретања неслободног материјалног система, можемо и при решавању проблема о кретању неслободног чврстог тела употребити две основне методе, ако почињемо то решавање од састављања диференцијалних једначина кретања. Наиме, можемо, прво, употребити диференцијалне једначине кретања чврстог тела са множитељима веза, односно са реакцијама или, друго, без реакција, у облику Лагранжевих једначина друге врсте за независне координате, па и Хамилтонове каноничне једначине и то за случај холономних веза. Нема потребе развијати ту другу методу специјално и за неслободно чврсто тело, јер, с једне стране, она не би имала ништа новог према општој теорији, а са друге она је углавном била показана у § 2 · 3, где смо изводили Лагранжеве једначине за случај кретања слободног чврстог тела. Зауставимо се према томе на третирању само једначина са множитељима веза односно са реакцијама.

Означимо са $q_i\,(i=1,2,\ldots,6)$ неких шест координата чврстог тела. Нека су

$$f_l(q_i, t) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,6;\ l = 1,2,\ldots,k_1 \tag{1}$$

коначне везе и

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{6} A_{ij}\, q_i' + B_j = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,k_2 \tag{2}$$

диференцијалне; $k_1+k_2\leqslant 5$. Зауставимо се на случају задржавајућих веза.

Резултат диференцирања (1) по времену је

$$\frac{df_l}{dt}=\sum_{i=0}^{6}\frac{\partial f_l}{\partial q_i}q_i'+\frac{\partial f_l}{\partial t}=0. \tag{3}$$

У једначине (3) и (2) улазе генералисане брзине q_i'. У случају кретања чврстог тела те брзине можемо изразити као линеарне функције, рецимо, координата транслаторне брзине $\vec{v}_A$ и угаоне брзине $\vec{\omega}$ тела. Ако добивене вредности генералисаних брзина ставимо у (3) и (2), добићемо једначине:

$$f_l=\frac{df_l}{dt}=(\vec{V}_l,\vec{v}_A)+(\overrightarrow{W_l},\vec{\omega})+U_l=0 \qquad l=1,2,\ldots,k_1$$

$$\varphi_j=(\vec{V}_j{}^*,\vec{v}_A)+(\overrightarrow{W_j{}^*},\vec{\omega})+U_j{}^*=0, \qquad j=1,2,\ldots,k_2$$

где су уведени вектори и скалари функције координата чврстог тела и времена. Вектори $\vec{V}_l$ и $\vec{W}_l$ играју улогу градијената а $\vec{V}_j{}^*$ и $\vec{W}_j{}^*$ квази-градијената.

После увођења ових вектора, понављајући расуђивања из опште теорије, можемо написати ове векторске једначине за кретање неслободног чврстог тела:

$$\dot{K}=\vec{F}+\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\vec{V}_l+\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\vec{V}_j{}^*,$$

$$j^{(A)}+[\vec{v}_A,\vec{K}]=\vec{M}^{(A)}+\sum_{l=1}^{K_1}\lambda_l\vec{W}_l+\sum_{j=1}^{K_2}\mu_j\vec{W}_j{}^*.$$

Ако узмемо у обзир да су

$$\vec{V}_l=\operatorname{grad}_{v_A}f_l',\ \vec{V}_j{}^*=\operatorname{grad}_{v_A}\varphi_j,$$

$$\vec{W}_l=\operatorname{grad}_{\omega}f_l',\ \vec{W}_j{}^*=\operatorname{grad}_{\omega}\varphi_j,$$

како то непосредно следује из одређивања градијената скаларних производа, једначине (4) могу бити написане овако

$$\dot{\vec{K}} = \vec{F} + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_{v_A} f_l' + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{grad}_{v_A} \varphi_j , \tag{5}$$

$$\dot{I}^{(A)} + [\vec{v}_A, \vec{K}] = \vec{M}^{(A)} + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \operatorname{grad}_\omega f_l' + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \operatorname{grad}_\omega \varphi_j . \tag{6}$$

Овим једначинама одговара овај систем скаларних једначина за случај пројицирања на осе триједра

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} + q\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} - r\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} = F_\xi + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l'}{\partial v_{A\xi}} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial v_{A\xi}} ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} + r\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} - p\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} = F_\eta + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l'}{\partial v_{A\eta}} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial v_{A\eta}} ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} + p\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} - q\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} = F_\zeta + \sum_{l=1}^{h_1} \lambda_l \frac{\partial f_l'}{\partial v_{A\zeta}} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial v_{A\zeta}} ;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} + v_{A\eta}\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} - v_{A\zeta}\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} =$$

$$= M_\xi^{(A)} + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l'}{\partial p} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial p} ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} + v_{A\zeta}\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} - v_{A\xi}\frac{\partial T}{\partial v_{A\zeta}} =$$

$$= M_\eta^{(A)} + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l'}{\partial q} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q} ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} + v_{A\xi}\frac{\partial T}{\partial v_{A\eta}} - v_{A\eta}\frac{\partial T}{\partial v_{A\xi}} =$$

$$= M_\zeta^{(A)} + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l'}{\partial r} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} .$$

Написани систем диференцијалних једначина садржи шест координата чврстог тела и k_1+k_2 множитеља веза. Као допунске једначине служе k_1+k_2 једначина веза, односно резултати диференцирања тих једначина два пут или један пут.

Изложили смо општу теорију решавања проблема о кретању неслободног чврстог тела. У конкретним случајевима та теорија знатно се упрошћава, нарочито у случајевима кад један део једначина сасвим не садржи реакција; тада задатак може бити рашчлањен на два задатка: на одређивање кретања тела и затим на одређивање реакција веза.

Пошто решавање неких важних задатака о кретању чврстог тела са нехолономним везама, напр. решавање проблема о котрљању тела по површини, захтева неке допуне у изнесеној општој теорији, намеравамо проучавању кретања чврстог тела са нехолономним везама посветити нарочити рад.

§ 2 · 6. Матрично-дивекторска форма диференцијалне једначине кретања чврстог тела

Покажимо како се може написати у матричној форми систем скаларних једначина (1) и (2) § 2.22 кретања чврстог тела у односу на осе чврсто везане са телом.

Узмимо за кинематички дивектор ϑ_c $(\vec{\omega}, \vec{v}_A)$ пермутовану матрицу-колону (§ 1.7)

$$^{m}\vartheta_c = \left\| \begin{matrix} v_{A\xi} \\ v_{A\eta} \\ v_{A\zeta} \\ p \\ q \\ r \end{matrix} \right\|$$

и помножимо је, како смо то радили у истом параграфу, инерционом матрицом $\boldsymbol{J}^{(A)}$, тада ћемо добити матрицу-колону кинетичког дивектора

$$\boldsymbol{J}^{(A)} \times {}^{m}\vartheta_c = {}_{m}\vartheta_k\,(\vec{K}, \vec{l}^{(A)}) = {}_{m}\vartheta_k\,(\mathrm{grad}_{v_A}\, T,\ \mathrm{grad}_{\omega}\, T).$$

Затим узимамо збир три квадратне матрице шестог реда, које означимо овако

$$ID + \mu_6 \vec{\omega}_{11,22} + \mu_6 \vec{v}_{A,21} \,.$$

Прва матрица је скаларна матрица-оператор диференцирања

$$ID = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} D & 0 & 0 & & & \\ 0 & D & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & D & & & \\ \hline & & & D & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & D & 0 \\ & & & 0 & 0 & D \end{array} \right\|$$

при чему је $D = \frac{d}{dt}$ симбол диференцирања.

За тумачење две остале матрице уведимо појам *моментне матрице* трећег реда састављене од једнога вектора $\vec{V}\,(V_1,\, V_2,\, V_3)$ у облику

$$\mu_3 \vec{V} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -V_3 & V_2 \\ V_3 & 0 & -V_1 \\ -V_2 & V_1 & 0 \end{array} \right\|$$

У зависности од природе векрора $\vec{V}$ она може бити: за вектор $\vec{r}$ односно $\vec{\rho}$ *моментна положајна матрица*, за $\vec{\omega}$ *моментна обртна матрица* и за $\vec{v}_A$ *моментна транслаторна матрица*.

Свака од ових моментних матрица може бити субматрица матрице шестог реда. Да не компликујемо ознаке, место на којем треба да стоји одговарајућа моментна матрица трећег реда у матрици шестог реда означено је паром једноцифрених бројева у индексу. Према томе друга је матрица

$$\mu_6 \vec{\omega}_{11,22} = \begin{Vmatrix} \begin{matrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{matrix} \end{Vmatrix}$$

а трећа је

$$\mu_6 \vec{\nu}_{A,21} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_{A\zeta} & \nu_{A\eta} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{A\zeta} & 0 & -\nu_{A\xi} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{A\eta} & \nu_{A\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Није тешко потврдити да резултат множења

$$(ID + \mu_6 \vec{\omega}_{11,22} + \mu_6 \vec{\nu}_{A,21}) \cdot {}_m\vartheta_k$$

даје матрицу левих страна једначина (1) и (2) § 2.22.

Матрица динамичког дивектора $\vartheta_d\ (\vec{F}, \vec{M}^{(A)})$ је

$${}_m\vartheta_d = \begin{Vmatrix} F_\xi \\ F_\eta \\ F_\zeta \\ M_\xi^{(A)} \\ M_\eta^{(A)} \\ M_\zeta^{(A)} \end{Vmatrix}$$

при чему рачунати овако (ознаке су очигледне):

$$
{}_{m}\vartheta_{d}=\sum_{i=1}^{n}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\zeta_i & \eta_i \\ \zeta_i & 0 & -\xi_i \\ -\eta_i & \xi_i & 0 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{matrix}\right\|
$$

где код прве матрице имамо јединични и моментно-положајни део.

Према томе дефинитивно једначину кретању чврстог тела у матрично-дивекторској форми можемо написати у облику:

$$
(ID+\mu_6\,\vec{\omega}_{11,12}+\mu_6\,\vec{v}_{A,\,21})\cdot \boldsymbol{J}^{(A)}\,.\,{}^{m}\vartheta_{c}={}_{m}\vartheta_{d}\,.
$$

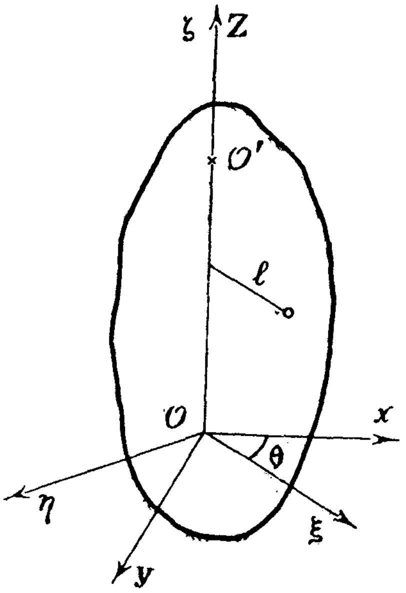
ГЛАВА ТРЕЋА

Обртање чврстог тела око непомичне осовине физичко клатно

§ 3 · 1. Обртање чврстог тела око непомичне осовине

Случај обртања чврстог тела око непомичне осовине, кад две тачке тела остају непокретне, с једне стране, је најпростији, ако не рачунамо елементарне случајеве транслаторног кретања, јер је то случај кретања са једним степеном слободе; са друге стране, тај случај је и најважнији, нарочито у пракси, јер је такво кретање тела (ротора) основни елемент код многих машина.

Нека су O и O' (сл. 1) две непомичне тачке чврстог тела. Нека оса Oz непомичног триједра $Oxyz$ пролази и кроз тачку O'. Означимо са C центар (кружић на слици) маса тела. Покретни триједар $O\xi\eta\zeta$ чврсто везани са телом, бирамо тако да се тачка C налази у равни $O\xi\zeta$ ($\eta_C = 0$). У специјалном случају, када се тачка C налази на оси OO', осу $O\xi$ бирамо произвољно у телу. Положај тела се одређује углом θ између Ox и $O\xi$ осе. Момент инерције тела око непомичне осе означавамо са J.



Слика 1

Нека на тело дејствује више спољашњих сила $\vec{F}_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, а n број тих сила. Нека $\vec{F}$ буде главни вектор, резултанта тих сила, а $\vec{M}$ главни момент свих тих сила око непомичне тачке O. Са $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$ и $\vec{R'}(R_x', R_y', R_z')$ означимо реакције које дејствују на тело у тачкама O и O' са координатама у односу на триједар $Oxyz$.

§ 3 · 11. Диференцијална једначина кретања и њена интеграција

Диференцијалну једначину кретања овог случаја најпростије је написати непосредно из закона момента количина кретања и то за непокретни пол и непокретну осу.

Пошто свака тачка тела описује око осе Oz круг, интензитет њене брзине v_i има вредност ωd_i, где је d_i растојање тачке од осе, а $\omega = \theta'$. Момент количине кретања $m_i \omega d_i$ око осе Oz има према томе вредност $m_i \omega d_i^2$ за тачку m_i, а за цело тело $J\omega$, где је $J = \Sigma m_i d_i^2$ сталан момент инерције тела око непомичне осе. Према закону момента количина кретања, извод по времену од те величине треба да буде једнак моменту сила, активних и реакција што дејствују на то тело. Према томе пишемо

$$(1) \qquad J\frac{d\omega}{dt} = J\theta'' = M,$$

где смо са M кратко означили момент само свих активних сила око осе Oz, јер реакције које пролазе кроз тачке на оси Oz не дају моменте око те осе. У општем случају тај момент може зависити: 1. од положаја тела, тј. од угла θ, 2. од брзине θ' и 3. од времена, а може, разуме се, да буде константан. Ако једначину (1) поделимо са J, добићемо диференцијалну једначину

$$(2) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = f\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}, t\right).$$

Ако угао θ означавамо са x и замислимо на правој фигуративну тачку са апсцисом x, једначина (2) прелази у једначину

$$x'' = f(x, x', t)$$

и одговара једначини (2) § 5 · 1, I, диференцијалној једначини праволиниског кретања материјалне тачке. Пошто смо са том једначином повезали читав низ елементарних проблема и резултата, сви ти резултати могу бити примењени и протумачени и у случају обртања чврстог тела око непомичне осе. На томе се нећемо овде заустављати.

Обратимо пажњу само на важан случај кад момент, M а то значи и функција f, зависи само од положаја тела. Тада једначина (2) добива облик

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta)$$

и има очевидан интеграл

$$(3) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = F(\theta),$$

где је

$$F(\theta) = 2\int f(\theta)\, d\theta + \text{const}.$$

Тај интеграл је интеграл живе силе; према томе је у овом случају кретање конзервативно. Ради проширења области механичких задатака за конзервативна кретања са једним степеном слободе задржаћемо се касније на неким детаљима при проучавању кретања за специјалне функције $F(\theta)$ у једначини (3).

А сад прелазимо на одређивање реакција у тачкама O и O' у оштем случај обртања тела око непомичне осовине.

§ 3 · 12. Одређивање реакција у непомичним тачкама у случају обртања око непомичне осовине

За одређивање реакција $\vec{R}$ и $\vec{R'}$ које дејствују на тело у тачкама O и O' ослободимо наше неслободно тело од веза и заменимо те везе дејством наведених реакција. Тада и за наше специјално кретање тела можемо искористити диференцијалне једначине (1) и (2) § 2 · 21 кретања слободног тела. За састављање тих једначина искористимо израз (1) § 1 · 41 за живу силу. Обраћамо пажњу да не можемо непосредно у тај израз ставити услове нашег кретања

$$(1) \qquad x_A' = y_A' = z_A' = P = Q = 0$$

сматрајући да се тачка A тела увек налази у непокретној тачки O. Треба прво одредити делимичне градијенте, а затим искористити услове (1); у противном случају можемо занемарити члан који линеарно зависи од величина (1), али који има коефицијент различит од нуле и према томе остаје у градијенту.

Под условима (1) из (1) § 1 · 41, у нашем случају имамо

$$\frac{\partial T}{\partial x_A'} = -m R y_C, \qquad \frac{\partial T}{\partial y_A'} = m R x_C, \qquad \frac{\partial T}{\partial z_A'} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \Pi_{zx} R, \qquad \frac{\partial T}{\partial Q} = \Pi_{yz} R, \qquad \frac{\partial T}{\partial R} = J_z R.$$

Пре диференцирања ових израза узећемо у обзир наредне резултате.

Пошто је

$$x_C = \xi_C \cos\theta, \qquad y_C = \xi_C \sin\theta,$$

то је

$$x_C' = -\xi_C \sin\theta \cdot \theta' = -y_C \cdot \theta',$$

$$y_C' = \xi_C \cos\theta \cdot \theta' = x_C \cdot \theta'.$$

Даље је

$$\Pi_{zx} = -\Sigma m_i x_i z_i = -\Sigma m_i z_i d_i \cos(\theta + \alpha_i),$$

$$\Pi_{yz} = -\Sigma m_i y_i z_i = -\Sigma m_i z_i d_i \sin(\theta + \alpha_i),$$

где је d_i, као и раније, отстојање тачке m_i од осе Oz, а α_i је угао који гради правац d_i са равни $O\xi\zeta$; тај угао је према томе сталан. Стога можемо написати ове резултате:

$$\frac{d\Pi_{zx}}{dt} = -\Sigma m_i z_i x_i' = \Sigma m_i z_i d_i \sin(\theta + \alpha_i) \cdot \theta' = \theta' \Sigma m_i z_i y_i = -\theta' \Pi_{zy}.$$

$$\frac{d\Pi_{zy}}{dt} = -\Sigma m_i z_i y_i' = -\Sigma m_i z_i d_i \cos(\theta + \alpha_i) \cdot \theta' = -\theta' \Sigma m_i z_i x_i = \theta' \Pi_{zx}.$$

Узимајући у обзир наведене резултате диференцирања, можемо сад према (1) и (2) § 2 · 21 писати ове једначине:

$$\text{(I)} \qquad -m\theta'' y_C - m\theta'^2 x_C = F_x + R_x + R_x',$$

$$\text{(II)} \qquad m\theta'' x_C - m\theta'^2 y_C = F_y + R_y + R_y',$$

$$\text{(III)} \qquad 0 = F_z + R_z + R_z',$$

$$\text{(IV)} \qquad \theta'' \Pi_{zx} - \theta'^2 \Pi_{zy} = M_x - lR_y',$$

$$\text{(V)} \qquad \theta'' \Pi_{zy} + \theta'^2 \Pi_{zx} = M_y + lR_x',$$

$$\text{(VI)} \qquad J\theta'' = M_z.$$

Једначину (VI) већ смо имали — она служи за одређивање кретања чврстог тела и не садржи реакција. За одређивање шест координата реакција имамо само пет једначина. Задатак је према томе неодређен. Почнимо одређивати координате реакције. Из једначине (V) можемо одредити R_x', а из једначине (IV) величину R_y'. Кад су те две величине одређене, из једначине (I) можемо одредити R_x, а из једначине (II) R_y. За одређивање величина R_z и R_z' остаје само једна једначина (III), у коју те величине улазе у облику збира. Према томе за те величине можемо одредити само збир.

Ако претпоставимо да тачка O' тела није потпуно утврђена, већ да може клизити дуж O_z, онда је $R_z' = 0$; тада сву реакцију у правцу те осе узима на себе тачка O и једначина (III) даје

$$R_z = -F_z .$$

Задатак одређивања реакција са тим допунским условом постаје потпуно одређен.

Задатак одређивања реакција за време кретања материјалног система спада у једну нарочиту грану динамике која се назива *кинетостатика.* У претходним расуђивањима решили смо један проблем из кинетостатике, наиме одредили смо *кинетостатичке реакције* које дејствују на чврсто тело за време кретања. Силе супротних знакова су притисци које треба да издржe масе оног механизма који остварује постављене везе.

Ако се наше тело заустави у једном одређеном положају, да би оно и даље остало у миру, на њега сем датих активних сила треба у општем случају да дејствују и реакције у тачкама O и O', али се те реакције уопште разликују од реакција $\vec{R}$ и $\vec{R'}$. Назовимо те реакције, у случају мировања, *статичке реакције* и означимо их са $\vec{S}$ и $\vec{S'}$.

Јасно је да статичке реакције $\vec{S}$ и $\vec{S'}$ задовољавају једначине: (III) и (I), (II), (IV), (V) кад у последње четири једначине ставимо место левих страна нуле. Према томе за отступања кинетостатичких реакција од статичких са ознакама $\vec{\Delta}$, $\vec{\Delta'}$ можемо написати

$$\begin{aligned} -m\theta'' y_C - m\theta'^2 x_C &= \Delta_x + \Delta_x' , \\ m\theta'' x_C - m\theta'^2 y_C &= \Delta_y + \Delta_y' , \\ 0 &= \Delta_z + \Delta_z' ; \\ \theta'' \Pi_{zx} - \theta'^2 \Pi_{zy} &= -l\Delta_y' , \\ \theta'' \Pi_{zy} + \theta'^2 \Pi_{zx} &= l\Delta_x' . \end{aligned}$$

Ове једначине показују да разлике између кинетостатичких и статичких реакција ишчезавају под условима: 1. оса Oz треба да буде главна оса инерције, тј.

$$\Pi_{zx} = \Pi_{zy} = 0$$

и 2. да она буде централна оса, тј. $x_C = y_C = 0$.

Ако претпоставимо да је $\Delta_z' = 0$, онда је тада и $\Delta_z = 0$.

§ 3 · 121. Перманентна и слободна оса

Претпоставимо да на чврсто тело које се обрће око непомичне осовине дејствују само такве силе које немају моменте око Ox и Oy осе, тј. $M_x = 0$, $M_y = 0$. Тада из једначина (IV) и (V) претходног параграфа непосредно следује да је

$$R_x' = R_y' = 0\,,$$

а под условом да су

$$\Pi_{zx} = \Pi_{zy} = 0\,,$$

тј. да је оса Oz главна оса инерције тела за тачку O. У овом случају, под претпоставком да је и $R_z' = 0$, у тачки O' на тело не дејствује реакција. Према томе главна оса инерције тела за одређену тачку те осе може служити непроменљивом осом обртања тела и ако није утврђена у двема тачкама. За главну осу је довољно да она буде утврђена само у једној својој тачки. Таква оса се назива *перманентна оса обртања.*

Уочимо сад обртање чврстог тела око перманентне осе и претпоставимо да резултанта спољашњих сила има правац осе обртања, тј. $F_x = F_y = 0$. Тада за обртање око такве перманентне осе важе једначине

$$-m\theta'' y_C - m\theta_C'^2 x_C = R_x\,,$$

$$m\theta'' x_C - m\theta'^2 y_C = R_y\,.$$

Из ових једначина следује да реакција у тачки O нема компоненте у правцу нормалном на O_z осу, тј. $R_x = R_y = 0$, ако су

$$x_C = y_C = 0\,,$$

тј. ако је оса Oz не само главна оса већ и главна централна оса инерције за тачку O.

Такво кретање чврстог тела можемо остварити тиме да реакција дејствује само у једној тачки O и то само у правцу осе обртања. Оса око које се може остварити наведено обртање чврстог тела назива се *слободна оса.* Слободна оса обртања чврстог тела може бити само главна централна оса инерције за дату тачку.

Најзад под претпоставком да је и $F_z = 0$ и да спољашње силе дају само момент $M_z \neq 0$ око осе Oz, тело може да се обрће око Oz осе као потпуно слободно тело, без дејства реакције на њега, ако је та оса главна централна оса инерције тела.

§ 3 · 2. Из теорије елиптичких интеграла и функција

У случају кретања конзервативног система са једним степеном слободе (в. напр. § 3 · 11) интеграл живе силе доводи до диференцијалне једначине у којој је квадрат извода једнак функцији зависне променљиве. Напишимо ту једначину у облику

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = F(z).$$

Интеграција ове једначине се врши квадратуром

$$x - x_0 = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{F(z)}}. \tag{1}$$

Ознаке су очигледне, а знак испред корена се бира из почетних услова на познати начин.

Има у механици низ проблема који се решавају помоћу квадратуре облика (1), где је функција $F(z)$ полином четвртог односно трећег степена по променљивој z. Пошто проучавање таквих квадратура не улази у уобичајен курс математике, овде ћемо се зауставити на неким елементарним особинама тих интеграла. Излагање има конспективни карактер. Његов циљ је само да свесније повежемо одговарајући математички материјал са могућношћу решавање одређених механичких проблема.

a. Елиптички интеграл

У општем случају интеграл

$$I = \int R(z, \sqrt{F(z)}dz.$$

где је R симбол рационалне функције написаних аргумената, а

$$F(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4,$$

назива се *елиптички интеграл*, а његова инверзна функција

$$z = z(I)$$

стоји у вези са *елиптичким функцијама*, ако се не изражава елементарним функцијама.

Како сваку рационалну функцију $R(z, \sqrt{F(z)})$ можемо претставити овако

$$R(z, \sqrt{F(z)}) = R_1(z) + R_2(z)\frac{1}{\sqrt{F(z)}}$$

а $R_2(z)$ можемо претставити збиром

$$R_2(z) = A(z) + B(z)/C(z),$$

где су A, B, C ознаке полинома по z, имамо два могућа интеграла

$$(2) \qquad \int A_m(z)\frac{dz}{\sqrt{F(z)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{B_{n-1}(z)\,dz}{(z-z_0)^n\sqrt{F(z)}},$$

где су: $A_m(z)$ полином m'ог степена, $B_{n-1}(z)$ полином $(n-1)$'ог степена и z_0 n'тоструки корен полинома $C(z)$.

После примене познатих образаца за редукцију

$$\int A_m(z)\frac{dz}{\sqrt{F(z)}} = A_{m-2}(z)\cdot F(z) + \int\frac{az+b}{\sqrt{F(z)}}dz,$$

$$\int\frac{B_{n-1}\,dz}{(z-z_0)^n\sqrt{F(z)}} = \frac{B_{n-2}(z)}{(z-z_0)^{n-1}}\sqrt{F(z)} + \int\frac{az+b}{\sqrt{F(z)}}dz + D\int\frac{dz}{(z-z_0)\sqrt{F(z)}},$$

где су a, b, D константе које подлеже одређивању заједно са коефицијентима полинома $A_{m-2}(z)$ и $B_{n-2}(z)$, интеграле (2) можемо свести на ове интеграле

$$(3) \qquad \int\frac{dz}{\sqrt{F(z)}}, \qquad \int\frac{zdz}{\sqrt{F(z)}}, \qquad \int\frac{dz}{(z-z_0)\sqrt{F(z)}}.$$

То су *елиптички интеграли прве, друге и треће врсте.*

За даља проучавања елиптичких интеграла згодно је извршити такву трансформацију полинома $F(z)$ да тај полином буде што једноставнији.

Уводи се нова променљива ζ познатом билинеарном везом

$$(4) \qquad z = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$$

коју можемо дефинисати и овако

$$(4') \qquad \gamma\zeta z + \delta z - \alpha\zeta - \beta = 0,$$

са константама α, β, γ, δ, при чему је

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Тада се полином $F(z)$ трансформише овако:

$$F(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 =$$

$$= \frac{\alpha_0\zeta^4 + \alpha_1\zeta^3 + \alpha_2\zeta^2 + \alpha_3\zeta + \alpha_4}{(\gamma\zeta+\delta)^4}(\alpha\delta-\beta\gamma)^2,$$

где су $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_4$, функције коефицијената $a_0, a_1, \ldots, a_4$ и коефицијената трансформације $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Може се показати да се сви елиптички интеграли (3), после извршене трансформације (4), изражавају помоћу елиптичких интеграла истог облика

$$(5) \qquad \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\Phi(\zeta)}}, \qquad \int \frac{\zeta\, d\zeta}{\sqrt{\Phi(\zeta)}}, \qquad \int \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)\sqrt{\Phi(\zeta)}},$$

али полином $\Phi(\zeta)$ има друге коефицијенте

$$(6) \qquad \Phi(\zeta) = \alpha_0 \zeta^4 + \alpha_1 \zeta^3 + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha^3 \zeta + \alpha_4 .$$

У теорији елиптичких интеграла разликују се три *нормална* облика полинома $\Phi(\zeta)$ и према томе три *нормална облика елиптичких интеграла.*

1. *Вајерштрасов облик.*

Вајерштрас узима за полином $\Phi(\zeta)$ полином трећег степена, и то у једноставном облику без квадратног члана

$$(7) \qquad \Phi(\zeta) = 4\zeta^3 - g_2 \zeta - g_3 .$$

Коефицијенти трансформације (4′) се одређују из ових услова; 1. однос α/γ треба да буде корен једначине $F(z) = 0$, 2. коефицијент код ζ^2 једнак је нули, 3. коефицијент код ζ^3 једнак је 4. Коефицијенти g_2 и g_3 тада се изражавају овако:

$$g_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 ,$$
$$g_3 = a_0 a_2 a_4 - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 .$$

Према томе имамо ова три *Вајерштрасова нормална елиптичка интеграла* (без везе са претходним излагањем променљиву у општем случају означавамо са z)

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \qquad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \qquad \int \frac{dz}{(z - z_0)\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} .$$

Корени Вајерштрасовог полинома се означавају са e_1, e_2, e_3; њихов збир једнак нули: $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

2. *Риманов облик.*

Риман је исто тако дао врло једноставну трансформацију (4). Полином трећег степена код њега има облик

$$\Phi(\zeta) = C\zeta(1-\zeta)(1-\lambda\zeta),$$

где су C и λ константе. У овом случају коефицијенти трансформације (4) се одређују из услова: однос α/γ треба да буде корен једначине $F(z) = 0$, други и трећи корени да буду 0 и 1. Трансформисани четврти корен се означује са $\frac{1}{\lambda}$.

Риманови нормални елиптички интеграли изгледају овако

$$(7) \quad \int \frac{dz}{\sqrt{Cz(1-z)(z-\lambda z)}}, \quad \int \frac{zdz}{\sqrt{Cz(1-z)(1-\lambda z)}},$$

$$\int \frac{dz}{(z-z_0)\sqrt{Cz(1-z)(1-\lambda z)}}.$$

3. *Лежандров облик*

Ако у Римановим интегралима:

1. ставимо $z = \sin^2 \varphi$;

2. зауставимо се само на реалном подручју и зато ставимо $\lambda = k^2$ и при томе се ограничимо на вредности $k^2 \leqslant 1$;

3. константу C узмемо позитивну;

4. од неодређених интеграла пређемо на одређене са границама 0 и φ, што не ограничава проучавање интеграла, онда добивамо три *Лежандрова нормална елиптичка интеграла* са овим усвојеним ознакама:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$\Pi(\varphi, m, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+m \sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Константа k се назива *модул елиптичких интеграла.*

Лежандрове интеграле извели смо из Риманових интеграла због једноставнијег излагања, али треба навести да је Лежандр (1752—1834) дао своје интеграле раније него Риман (1826—1866).

b. Елиптичке функције

1. *Јакобијеве елиптичке функције*

Не улазећи у теорију елиптичких функција, као дво-периодичних функција у комплексном подручју, зауставимо се само на основним појмовима и операцијама у вези са такозваним *Јакобијевим елиптичким функцијама*, и то у реалном подручју. После тога ћемо навести и елементе из теорије Вајерштрасових $p(z)$, $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ функција. Најзад ћемо показати у теорији елиптичких функција улогу Јакобијевих ϑ функција и Al функција. Уносећи у ову књигу и овај материјал, сматрамо да у некој мери подмирујемо ону потребу која стоји у вези са применом елиптичких функција на проблеме механике.

Готово су исто време Н. Х. Абел (1801—1829) и К. Г. Јакоби (1804—1851), место проучавања елиптичког интеграла као функције горње границе тог интеграла, почели проучовати горњу границу као функцију интеграла, тј., како смо казали, извршили инверзију интеграла. Да таква инверзија може бити од велике користи, то се види на овом елементарном примеру. Узмимо интеграл

$$(8) \qquad v = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u.$$

Функција v, интеграл, сматрана као функција u' а, горње границе интеграла је аркуссинус, многозначна функција аргумента u. Као што знамо из тригонометрије, ова функција није згодна за непосредну употребу, нарочито у применама.

Ако сад извршимо инверзију и почнемо анализирати горњу границу u као функцију интеграла v из (8), видимо да је то позната функција синус:

$$u = \sin v.$$

Помоћу инверзије поставили смо врло једноставну везу између истих променљивих. Као што је познато, синусоида служи у исто време као график и функције $\arcsin u$; довољно је променити улоге апсцисе и ординате.

Применимо сад инверзију на Лежандров елиптички интеграл прве врсте

$$F(\varphi, k) = u(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

и уведимо функцију

$$(9) \qquad \varphi = \varphi(u, k).$$

Сматрајући φ као функцију u, вредности интеграла, навели смо да она зависи и од параметра k, модула елиптичког интеграла. Присуство променљивог параметра, разуме се, много отежава проучавање такве функције кад се упореди са проучавањем инверзије интеграла који не зависи од параметра, као што је случај интеграла (8).

Јакоби је назвао функцију (9) *амплитуда и* и писао

$$\varphi = am\,(u, k)\,.$$

Видимо да појам амплитуде одговара појму угла, јер у елиптички интеграл улази $\sin\varphi = \sin am\, u$.

Јакоби је увео три основне елиптичке функције које се зову *Јакобијеве елиптичке функције*. То су функције

$$(10) \qquad \sin am\, u = sn\, u\,,$$

$$(11) \qquad \cos am\, u = cn\, u\,,$$

$$(12) \qquad \Delta\, am\, u = +\sqrt{1 - k^2 \sin^2 am\, u} = +\sqrt{1 - k^2\, sn^2\, u} = dn\, u\,.$$

Скраћене ознаке sn, cn, dn увео је Гудерман.

Из тих дефиниција непосредно следују ове везе између тих функција:

$$(13) \qquad sn^2\, u + cn^2\, u = 1\,,$$

$$(14) \qquad dn^2\, u + k^2\, sn^2\, u = 1\,.$$

Уведимо сад интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = F\left(\frac{\pi}{2},\, k\right) = K\,,$$

који се назива *потпуни елиптички интеграл прве врсте.*

Докажимо да је

$$(16) \qquad \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = F(\pi, k) = 2\,K\,.$$

Заиста, можемо рачунати:

$$\int_0^{\pi} = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} = K + \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = 2\,K,$$

при чему смо при израчунавању другог интеграла увели замену $\varphi = \pi - \theta$.

Приметимо да резултате (15) и (16) можемо изразити и овако:

$$am\,K = \pi/2, \qquad am\,K = \pi .$$

Непосредно на основу дефиниција (10) — (12) и изведених резултата можемо саставити ову таблицу специјалних вредности функција *sn*, *cn*, *dn*:

$$sn\,0 = \sin am\,0 = 0, \quad cn\,0 = \cos am\,0 = 1, \quad dn\,0 = \sqrt{1-k^2\sin^2 0} = 1,$$

$$sn\,K = \sin am\,K = 1, \quad cn\,K = \cos am\,K = 0, \quad dn\,K = \sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1-k^2},$$

$$sn\,2K = \sin am\,2K = 0; \quad cn\,2K = \cos am\,2K = -1; \quad dn\,2K = \sqrt{1-k^2\sin^2\pi} = 1.$$

Покажимо сад периодичност ових функција, наиме докажимо једначине:

$$(17) \qquad sn\,(u+4K) \equiv sn\,u,$$

$$(18) \qquad cn\,(u+4K) \equiv cn\,u,$$

$$(19) \qquad dn\,(u+2K) \equiv dn\,u,$$

које показују да је период функција *sn* и *cn* четворострука вредност потпуног интеграла (15), а функције *dn* — двострука вредност истог интеграла.

Пре свега покажимо да је

$$(20) \qquad am\,(u+2K) = am\,u + am\,2K = \varphi + \pi .$$

Заиста, ако напишемо, према једнакости за границе

$$(u+2K) = (u) + (2K),$$

једнакост за интеграле

$$\int_0^s \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} + \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},$$

где је s непозната амплитуда $u+2K$, и десну страну трансформишемо овако

$$\int_0^\varphi + \int_0^\pi = \int_0^\pi + \int_\pi^{\varphi+\pi} = \int_0^{\varphi+\pi},$$

$\left(\text{јер је} \int_\pi^{\varphi+\pi} = \int_0^\varphi\right)$, можемо закључити да је $s = am\,(u+2K) = \varphi + \pi$.

Сад ће на основу (20) бити

$$sn\,(u+2\,K)=\sin am\,(u+2\,K)=\sin\,(\varphi+\pi)=-\sin\,\varphi=-\sin am\,u=-sn\,u\,.$$

После овог имамо

$$sn\,(u+4\,K)=-sn\,(u+2\,K)=sn\,u\,.$$

На сличан начин се доказује и једначина (18). За функцију dn непосредно имамо

$$dn\,(u+2\,K)=\sqrt{1-k^2\,sn^2\,(u+2\,K)}=\sqrt{1-k^2\,sn^2\,u}=dn\,u.$$

У вези са периодичношћу функција sn, cn, dn наведимо да у имагинарном подручју ове функције сем својих стварних имају и имагинарне периоде, па се према томе јављају као дво-периодичне функције.

Одредимо изводе тих функција. За sn непосредно имамо

$$\frac{d\,sn\,u}{du}=\frac{d}{du}\sin\varphi=\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{du}=\cos\varphi:\frac{du}{d\varphi}=\cos\varphi:\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\cos\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\cos am\,u\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2 am\,u}=cn\,u\cdot du\,u\,;$$

према томе пишемо кратко

$$(sn\,u)'=cn\,u\cdot dn\,u\,. \tag{21}$$

После тога из (13) и (14) диференцирањем добивамо

$$(cn\,u)'=-sn\,u\cdot dn\,u\,, \tag{22}$$

$$(dn\,u)'=-k^2\,sn\,u\cdot cn\,u\,. \tag{23}$$

Наведимо још вредности других и трећих извода тих функција:

$$(sn\,u)''=-(1+k^2-2\,k^2\,sn^2 u)\,sn\,u\,,$$
$$(cn\,u)''=-(1-2\,k^2\,sn^2\,u)\,cn\,u\,,$$
$$(dn\,u)''=-k^2\,(1-2\,sn^2\,u)\,dn\,u\,;$$
$$(sn\,u)'''=-(1+k^2-6\,k^2\,sn^2\,u)\,cn\,u\cdot dn\,u\,,$$
$$(cn\,u)'''=(1+4\,k^2-6\,k^2\,sn^2\,u)\,sn\,u\cdot dn\,u\,,$$
$$(dn\,u)'''=k^2(4+k^2-6\,k^2\,sn^2\,u)\,sn\,u\cdot cn\,u\,.$$

Тако можемо израчунати вредности и наредних извода. Пошто је

$$sn\,0=0\,,\ cn\,0=1\,,\ dn\,0=1$$

можемо израчунати вредности тих извода за $u = 0$, па на основу тих вредности, применом Меклоренова обрасца, доћи до ових формалних редова:

$$sn\, u = u - \frac{1}{3!}(1 + k^2)\, u^3 + \frac{1}{5!}(1 + 14\, k^2 + k^4)\, u^5 - \ldots,$$

$$cn\, u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}(1 + 4\, k^2)\, u^4 - \frac{1}{6!}(1 + 44\, k^2 + 16\, k^4)\, u^6 + \ldots,$$

$$dn\, u = 1 - \frac{1}{2!}k^2 u^2 + \frac{1}{4!}k^2 (4 + k^2)\, u^4 - \frac{1}{6!}k^2 (16 + 44\, k^2 + k^4)\, u^6 + \ldots,$$

који могу служити за израчунавање тих функција у области конвергентности. Постоје и други, згоднији начини за израчунавање тих функција. Сем тога постоје и нарочите таблице са бројним вредностима елиптичких функција. Врло добре су таблице E. Jahnke und F. Emde (Funktionentafeln mit Formeln und Kurven), где су дати и графици одговарајућих функција. 1954 г. P. Byrd и M. Friedmann штампали су под насловом Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists врло опширну збирку образаца за елиптичке интеграле и функције. На слици (сл. 2) дајемо графике за *sn*, *cn*, *dn*.

Јакобијеве елиптичке функције су нарочито згодне због тога што су дегенаративни облици функција $sn\, u$ и $cn\, u$ тригонометриске функције $\sin u$ и $\cos u$, и што су многи обрасци који важе за те елиптичке функције аналогни обрасцима за тригонометриске функције.

Наведимо још три диференцијалне једначине и један систем од три диференцијалне једначине чија су решења Јакобијеве елиптичке функције.

Ако подигнемо сваку од једначина (21) — (23) на квадрат и изразимо десне стране на основу (13) односно (14) у функцији само одговарајуће променљиве, добићемо ове три диференцијалне једначине:

$$\left(\frac{d\, sn\, u}{du}\right)^2 = (1 - sn^2 u)\,(1 - k^2 sn^2 u),$$

$$\left(\frac{d\, cn\, u}{du}\right)^2 = (1 - cn^2 u)\,(1 - k^2 + k^2 cn^2 u),$$

$$\left(\frac{d\, dn\, u}{du}\right)^2 = -\,(1 - dn^2 u)\,(1 - k^2 - dn^2 u).$$

Значи, обратно, ако је дата, напр., диференцијална једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

њен интеграл је функција

$$y = sn(x+C)$$

где је C произвољна константа.

Напишимо још систем од три диференцијалне једначине

$$\begin{aligned} &\frac{du}{d\tau} - vw = 0, \\ (24)\qquad &\frac{dv}{d\tau} + wu = 0, \\ &\frac{dw}{d\tau} + k^2uv = 0, \end{aligned}$$

где су u, v, w непознате функције променљиве τ, а k^2 једна константа.

Ако написани систем упоредимо са једначинама (21)—(23), видимо да u, v, w могу бити изједначени са функцијама sn, cn, dn и према томе интеграле једначина система (24) можемо написати у облику

$$(25)\qquad u = sn(\tau + c), \qquad v = cn(\tau + c), \qquad w = dn(\tau + c),$$

где је c произвољна константа. Систем (24) биће потребан при решавању једног проблема о кретању чврстог тела.

2. Вајерштрасове елиптичке функције

Вајерштрас је, на основу проучавања елиптичких интеграла и функција у комплексној области, дошао до једне нарочите елиптичке функције као резултат инверзије елиптичког интеграла прве врсте

$$(26)\qquad z = -\int_{\infty}^{u} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}.$$

Он је ту функцију означио са $\wp(z)$ и она је сачувала ту ознаку и сад. Како је

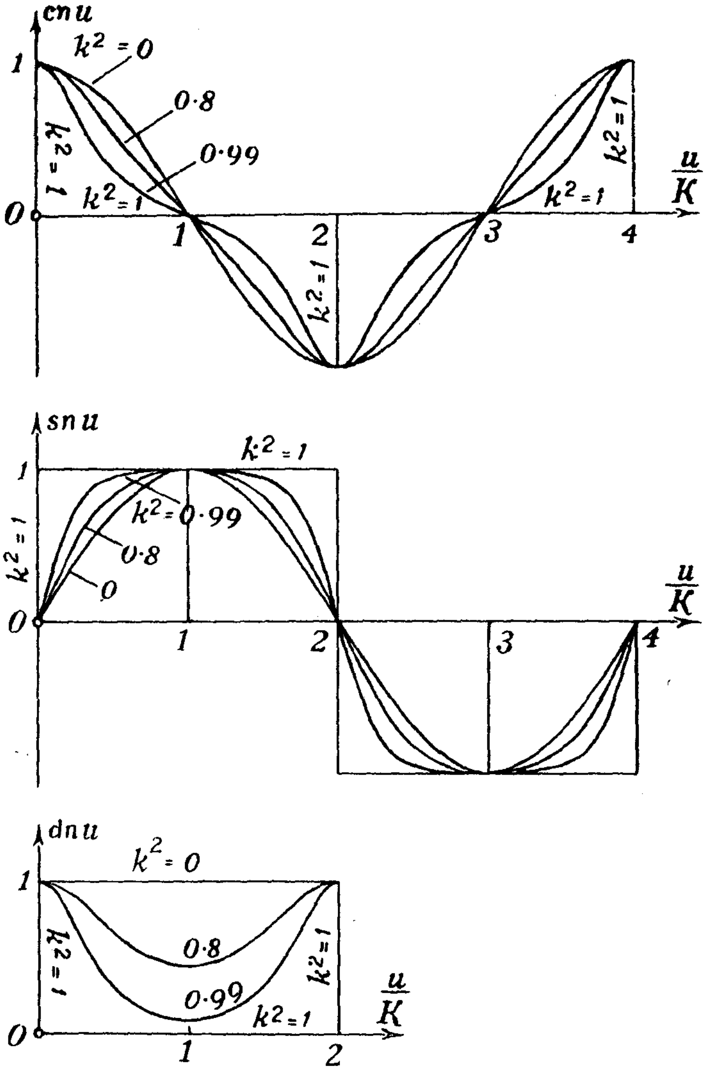
$$u = \wp(z)$$

из (26) имамо диференцијалну једначину за $\wp(z)$:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Вајерштрасова функција $\wp(z)$ се издваја од свих елиптичких функција тиме што је напростија, па се сматра као *елиптички елемент*. Она се развија у ред

$$(27)\qquad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + \frac{1}{1200} g_2^2 z^6 + \ldots$$



Слика 2

који није прегледан и не служи за израчунавање те функције, али показује структуру те функције са двоструким полом $z = 0$. На основу Абелове теореме да је инверзна функција сваког елиптичког интеграла прве врсте дво-периодична функција, функција $p(z)$ има два периода. Од три величине ω_1, ω_2, ω_3, које задовољавају једначине

$$p\left(\frac{1}{2}\omega_i\right) = e_i \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

и између којих постоји веза

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0,$$

две величине су независни периоди функције $p(z)$. Оне имају вредности

$$\omega_i = 3\int_{\infty}^{e_i} \frac{du}{\sqrt{4\,u^3 - g_2 u - g_3}} \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

У вези са функцијом $p(z)$ Вајерштрас је увео две функције, такозвану *зета-функцију* и *сигма-функцију* са ознакама $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$. Формално оне се уводе једначинама

$$\frac{d}{dz}\zeta(z) = -p(z),$$

$$\frac{d}{dz}\log\sigma(z) = \zeta(z).$$

Функција $\zeta(z)$ може се одредити редом

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + a_3 z^3 + a_5 z^5 + ..,$$

а функција $\sigma(z)$ је цела функција (без полова).

Функција σ је послужила Вајерштрасу за претстављање сваке елиптичке функције у облику количника целих функција.

3. Јакобијеве тета-функције

За претстављање елиптичке функције као мероморфне функције у облику количника две целе функције постоји више начина. Један начин се оснива на увођењу такозваних *тета-финкција.* То су функције одређене редовима

$$\vartheta_1(v) = 2\,(q^{\frac{1}{4}}\sin v - q^{\frac{9}{4}}\sin 3\,v + q^{\frac{25}{4}}\sin 5\,v - \ldots),$$

$$\vartheta_2(v) = 2\,(q^{\frac{1}{4}}\cos v + q^{\frac{9}{4}}\cos 3\,v + q^{\frac{25}{4}}\cos 5\,v + \ldots),$$

$$\vartheta_3(v) = 1 + 2(q\cos 2v + q^4\cos 4v + q^9\cos 6v + \ldots),$$

$$\vartheta_4(v) = 1 - 2(q\cos 2v - q^4\cos 4v + q^9\cos 6v - \ldots),$$

где су

$$v = \pi u/2K, \qquad q = e^{-m\pi}$$

са

$$m = K(k')/K(k),$$

при чему је $4K$ период Јакобијеве функције, рецимо, $sn\,u$, а k и k' су модули интеграла, *основни* и *допунски*, тако да је

$$k^2 + k'^2 = 1\,.$$

Помоћу тета-функција Јакобијеве елиптичке функције се изражавају овако

$$sn\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \qquad cn\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \qquad dn\,u = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}.$$

4. Вајерштрасове функције

Вајерштрас је са своје стране предложио четири бесконачна реда, такозване *Вајерштрасове Al функције,* и изразио Јакобијеве елиптичке функције $sn\,z$, $cn\,z$, $dn\,z$ помоћу количника

$$sn\,z = Al_1(z)/Al(z), cn\,z = Al_2(z)/Al(z), dn\,z = Al_3(z)\,Al(z). \tag{28}$$

Функције Al имају вредности (в. М. Петровић, Елиптичке функције, стр. 83, 84)

$$Al\,z = 1 - \frac{1}{4!}A_4 z^4 + \frac{1}{6!}A_6 z^6 - \frac{1}{8!}A_8 z^8 + \ldots,$$

$$Al_1\,z = z - \frac{1}{3!}B_3 z^3 + \frac{1}{5!}B_5 z^5 - \frac{1}{7!}B_7 z^7 + \ldots, \tag{29}$$

$$Al_3\,z = 1 - \frac{1}{2!}C_2 z^2 + \frac{1}{4!}C_4 z^4 - \frac{1}{6!}C_6 z^6 + \ldots,$$

$$Al_4\,z = 1 - \frac{1}{2!}D_2 z^2 + \frac{1}{4!}D_4 z^4 - \frac{1}{6!}D_6 z^6 + \ldots,$$

где су коефицијенти полиноми по k:

$$A_4 = 2k^2,$$

$$A_6 = 8(k^2+k^4),$$

$$A_8 = 32(k^2+k^6) + 68k^4,$$

$$A_{10} = 128(k^2+k^8) + 480(k^4+k^6),$$

. . . .

$$B_3 = 1+k^2,$$

$$B_5 = 1+k^4+4k^2,$$

$$B_7 = 1+k^6+9(k^2+k^4),$$

$$B_9 = 1+k^8+16(k^2+k^6)-6k^4,$$

. . . .

$$C_2 = 1,$$

$$C_4 = 1+2k^2,$$

$$C_6 = 1+6k^2+8k^4,$$

$$C_8 = 1+12k^2+60k^4+32k^6,$$

. . . .

$$D_2 = k^2,$$

$$D^4 = 2k^2+k^4,$$

$$D_6 = 8k^2+6k^4+k^6,$$

$$D_8 = 32k^2+60k^4+12k^6+k^8,$$

. . . .

Редови (29) су врло згодни за израчунавања, јер су конвергентни за све вредности z.

Приметимо да за $k=0$ функције Al дегенеришу у ове функције

$$Al = 1, \quad Al_1 = \sin z, \quad Al_2 = \cos z, \quad Al_3 = 1.$$

§ 3 · 3. Физичко клатно

Тешко чврсто тело приморано да се обрће око сталне хоризонталне осовине је *физичко клатно*, а проблем одређивања кретања тог тела је *проблем физичког клатна*. Овај проблем треба сматрати као важан специјалан случај претходног проблема о обртању чврстог тела око непомичне осе под утицајем датих сила.

Ако са θ означимо угао између нормале, дужине l, спуштене из тежишта тела, тачке C, на осу обртања, и вертикале надоле, онда, према (VI) § 3.12, диференцијална једначина кретања тела изгледа овако

$$(1) \qquad J\theta'' = M,$$

где је J момент инерције тела око осе обртања и M алгебарска вредност момента свих сила што дејствују на тело око осе обртања. Тај момент је позитиван ако се тело обрће у смислу рашћења угла θ.

За израчунавање тог момента узмимо у обзир да је момент паралелних сила једнак моменту резултанте тих сила (ако она постоји) са нападном тачком у центру (§ 1.8, III-1) тих сила. Како на све тачке тела дејствују само паралелне силе теже, момент тих сила је једнак моменту силе $\overrightarrow{mg}$ са нападном тачком C око осе обртања. Његова алгебарска вредност износи — $mgl\sin\theta$. На тај начин једначина (1) добива облик

$$J\theta'' = -mgl\sin\theta.$$

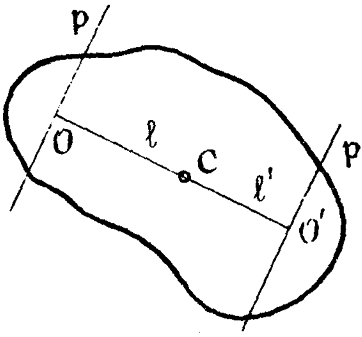
Ако уведемо ознаку

(2) $$J/ml = R$$

претходна једначина прелази у једначину

$$R\theta'' = -g\sin\theta$$

и поклапа се са једначином (1) § 10.52, I, која је диференцијална једначина кретања математичког клатна. Дужина R се назива *редукована дужина физичког клатна*. Према томе физичко клатно се креће на исти начин као и математичко клатно. Пошто је кретање математичког клатна било детаљно проучено у §§ 10 · 52, 10 · 521, 10 · 522, 10 · 523, 10 · 53 динамике тачке, нећемо понављати исте резултате у примени на физичко клатно.



Слика 3

Специјално питање које се поставља за физичко клатно је питање одређивања редуковане дужине физичког клатна.

Нека је права p кроз тачку O (сл. 3) оса обртања физичког клатна. Узмимо на продужењу праве OC тачку O' и кроз њу замислимо праву p' паралелну са правом p. Нека права p' буде друга оса обртања истог тела. Са l' означимо растојање CO', а са R' редуковану дужину истог тела кад се оно обрће око праве p'.

Како је момент инерције тела око праве p кроз O, према (1) § 1. 61, II.

$$J_0 = J_C + ml^2 = m(k^2 + l^2),$$

где је $J_C = mk^2$ централни момент инерције око осе паралелне са p и p' и k његов крак инерције, то за R према (2) можемо написати

$$R = J_0/ml = \frac{k^2+l^2}{l} = \frac{k^2}{l} + l.$$

На сличан начин, за редуковану дужину R' имамо

$$R' = \frac{k^2}{l'} + l'.$$

Претпоставимо сад да је постигнут такав положај оса p и p' да су мале осцилације око тих оса истих периода; тада одговарајуће редуковане дужине треба да буду исте, тј.

$$R' = R$$

или

$$\frac{k^2}{l} + l = \frac{k^2}{l'} + l'.$$

Из ове једначине следује да је

(3) $$ll' = k^2.$$

Са том везом између l и l' имамо

$$R = R' = \frac{k^2}{l} + l = l' + l = OO'.$$

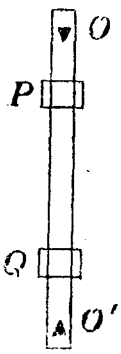
Ова једначина тврди: ако су редуковане дужине физичког клатна за две паралелне осе једнаке, свака од тих дужина једнака је растојању између тих оса (теорема Хајгенса).

Две паралелне праве чија отстојања од центра маса у њиховој равни задовољавају услов (3) називају се *конјуговане осе физичког клатна.*

На основу ове теореме Кејтер је конструисао тaкозвано *реверзибилно клатно,* чија је схема показана на слици (сл. 4). O и O' су призме помоћу којих се остварују паралелне осе; P и Q су допунске масе чијим се премештањем постиже изједначење времена осцилација. Из обрасца за мале осцилације математичког клатна

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

где је R' редукована дужина физичког клатна, једнака дужини OO' реверзибилног клатна, можемо према датој вредности T одредити интензитет убрзања g силе теже.



Слика 4

ГЛАВА ЧЕТВРТА

Обртање чврстог тела око непомичне тачке

§ 4. 1. Обртање чврстог тела око непомичне тачке

Проучимо сад класични проблем механике чврстог тела, проблем о обртању тог тела око непомичне тачке под утицајем датих сила, односно по инерцији.

Чврсто тело које се обрће око непомичне тачке има три степена слободе. Положај тела се одређује, напр., помоћу Ојлерових углова φ, ψ, θ, који у овом случају могу играти улогу независних координата тела.

Положај тела ћемо одређивати у односу на непомични триједер оса $Oxyz$, при чему ћемо тачку O сместити у непомичну тачку око које се врши обртање тела. Са телом повежимо триједер $A\xi\eta\zeta$, тачку A сместимо у исту непомичну тачку O, а осе овог триједра нека буду главне осе инерције тела за тачку O.

Овај проблем механике је врло важан како са практичног тако и са теориског гледишта. Практички значај тог проблема се нарочито наглашава због тога што се овај проблем поклапа са проблемом о обртању слободног чврстог тела око свог центра инерције. А овај последњи проблем игра капиталну улогу у оним гранама механике (напр. балистици, аеронаутици и др.), где се проучава не само кретање центра маса већ и обртање тела око тог центра.

Што се тиче теориског значаја, специјални проблем о кретању тешког чврстог тела око непомичне тачке постао је, слично проблему трију тела у механици система, извор за читав низ математичких проучавања система диференцијалних једначина који у општем случају не може бити решен у коначном облику помоћу познатих функција.

§ 4 · 11. Диференцијалне једначине проблема. Одређивање реакције.

Диференцијалне једначине обртања чврстог тела око непомичне тачке можемо написати на основу закона момента количина кретања за непокретан пол.

За непокретан пол имамо, према (2) и (3) § 2 · 2, векторске једначине

$$\dot{I} = \vec{M}, \qquad \dot{I}^{(A)} = \vec{M}^{(A)},$$

или, према (5) и (7),

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{\Omega} T = \vec{M}, \qquad \frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{\omega} T = \vec{M}^{(A)}.$$

Овим векторским једначинама одговарају скаларне једначине: за непокретне осе

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial P} = M_x, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial Q} = M_y, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial R} = M_z$$

са вредношћу живе силе из једначине

$$2\,T = J_x P^2 + J_y Q^2 + J_z R^2 + 2\,\Pi_{yz}\,QR + 2\,\Pi_{zx} RP + 2\,\Pi_{xy} PQ,$$

где су моменти и производи инерције узети за непокретну тачку; за покретне осе

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = M_\xi\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} = M_\eta\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta\,,$$

— тј.

$$
\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt}-(B-C)\,qr=M_{\xi}\,,\\
(2)\qquad &B\frac{dq}{dt}-(C-A)\,rp=M_{\eta}\,,\\
&C\frac{dr}{dt}-(A-B)\,pq=M_{\zeta}\,,
\end{aligned}
$$

јер за покретне осе у нашем случају жива сила има вредност

$$2\,T=Ap^2+Bq^2+Cr^2,$$

при чему смо овде са A, B, C означили главне моменте инерције за тачку A. Једначине (2) се формално поклапају са једначинама (4) § 2 · 22. Разлика је у томе што су у једначинама (4) § 2 · 22 величине A, B, C означавале главне централне моменте инерције, а овде у једначинама (2) то су главни моменти инерције за тачку A, која може да се и не поклапа са центром инерције.

Као и једначине (4) § 2 · 22, исто тако једначине (2) називају *Ојлерове једначине обртања чврстог тела* у датом случају *око непомичне тачке.*

Јасно је да за решавање овог специјалног проблема могу послужити и Лагранжеве једначине за Ојлерове углове, које смо навели у § 2 · 23.

Што се тиче одређивања реакције $\vec{R}$ у тачки O, односно A, треба искористити закон количине кретања. У нашем случају имамо

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{v_A}T=\vec{F}+\vec{R}\,, \tag{3}$$

где је $\vec{F}$ резултанта активних сила.

Како је, према (2) § 1 · 4,

$$\operatorname{grad}_{v_A}T=m\vec{v}_A+m\,[\vec{\Omega},\ \vec{r}_C-\vec{r}_A]\,,$$

у нашем случају ($\vec{v}_A=0$) имамо

$$\operatorname{grad}_{v_A}T=m\,[\vec{\Omega},\ \vec{r}_C]\,.$$

Једначина (3) тада даје

$$\vec{R}=-\vec{F}+m\,[\dot{\vec{\Omega}},\vec{r}_C]+m\,[\vec{\Omega},\ \vec{v}_C]\,,$$

а како је

$$\vec{v}_C = [\vec{\Omega}, \vec{r}_C],$$

дефинитивно добијамо резултат

$$\vec{R} = -\vec{F} + m\left\{[\dot{\Omega}, \vec{r}_C] + \vec{\Omega}(\vec{\Omega}, \vec{r}_C) - \vec{r}_C\,\Omega^2\right\}.$$

Први део $-\vec{F}$ је статички део реакције, а остатак је кинетостатичка допуна реакције. Ако је тело учвршћено у свом центру маса ($\vec{r}_C = 0$), реакција се своди само на статички део $-\vec{F}$. Ако на такво тело спољашње силе не дејствују ($\vec{F} = 0$), тј. ако се кретање врши по инерцији, реакција је једнака нули, тело се обрће око центра инерције као потпуно слободно тело.

§ 4 · 111. Случај тешког тела

Зауставимо се сад на случају тешког чврстог тела на које не дејствују друге спољашње силе сем сила теже. Пошто су то паралелне силе, њихов момент око непокретне тачке једнак је моменту силе $m\vec{g}$ са нападном тачком у C око исте непокретне тачке O. Према томе у овом случају

$$\vec{M} = \vec{M}^{(A)} = m[\vec{r}_C, \vec{g}].$$

Ако осу Oz наперимо вертикално навише, момент $\vec{M}$ има у односу на триједар $Oxyz$ координате: — mgy_C, mgx_C, 0; зато једначине (1) претходног параграфа гласе

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial P} = -mg\,y_C, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial Q} = mg\,x_C, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial R} = 0.$$

За покретне осе момент треба одредити као векторски производ вектора $\vec{r}_C(\xi_C, \eta_C, \zeta_C)$ и $m\vec{g}$ са $\vec{g}(-g\lambda_z, -g\mu_z, -g\nu_z)$, где су, као и раније, λ_z, μ_z, ν_z косинуси углова осе O_z са осама триједра $A\xi\eta\zeta$. Према томе Ојлерове једначине (2) § 4 · 11 изгледају овако:

$$A\frac{dp}{dt} - (B-C)\,qr = mg\,(\zeta_C\,\mu_z - \eta_C\,\nu_z),$$

$$(2) \qquad B\frac{dq}{dt} - (C-A)\,rp = mg\,(\xi_C\,\nu_z - \zeta_C\,\lambda_z),$$

$$C\frac{dr}{dt} - (A-B)\,pq = mg\,(\eta_C\,\lambda_z - \xi_C\,\mu_z).$$

При интеграцији овог система једначина треба имати у виду да променљиви косинуси λ_z, μ_z, ν_z морају задовољавати овај систем кинематичких једначина [в. (7) § 4 · 21, III-1]:

$$(3)\ \frac{d\lambda_z}{dt}+q\nu_z-r\mu_z=0\,,\quad \frac{d\mu_z}{dt}+r\lambda_z-p\nu_z=0\,,\quad \frac{d\nu_z}{dt}+p\mu_z-q\lambda_z=0.$$

У вези са решавањем проблема о обртању тешког чврстог тела око непомичне тачке помоћу интеграције система диференцијалних једначина (2) и (3) треба навести важну примедбу да је, сем интеграције тог система за решење задатка, тј. за одређивање, рецимо, Ојлерових углова у функцији времена, потребно извршити још једну квадратуру. Детаљније ћемо о томе говорити у вези са конкретним примерима.

§ 4 · 2. Ојлеров случај. Основни интеграли.

Случај обртања тешког чврстог тела под условом да се тежиште тела налази у непомичној тачки назива се *Ојлеров случај.* Према (2) § 4 · 111, диференцијалне једначине кретања тог случаја имају облик:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &A\frac{dp}{dt}-(B-C)\,qr=0\,,\\ &B\frac{dq}{dt}-(C-A)\,rp=0\,,\\ &C\frac{dr}{dt}-(A-B)\,pq=0\,, \end{aligned}$$

где су A, B, C главни централни моменти инерције тела.

Пошто исте диференцијалне једначине одговарају и случају обртања по инерцији слободног чврстог тела око његовог центра инерције, Ојлеров случај обухвата и тај други проблем.

Забележимо да спољашње силе чија резултанта пролази кроз центар инерције, па је њихов момент око тог центра једнак нули, ни у једном од тих проблема не утичу на обртање тела. У првом проблему резултанта мења само реакцију која дејствује на тело у непомичној тачки, а у другом она стоји у вези са кретањем тежишта тела.

Пошто под наведеним условима наше тело претставља конзервативни систем, диференцијалне једначине (1) имају интеграл живе силе

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h, \tag{2}$$

где је h произвољна константна, једнака двострукој живој сили.

Сем тога, према закону момента количина кретања имамо интеграл тог момента за непокретни пол

$$\vec{l} = \vec{G}, \tag{3}$$

где је $\vec{G}$ сталан вектор. Како су координате вектора $\vec{l}$ у односу на осе триједра $A\xi\eta\zeta$ једнаке Ap, Bq, Cr, можемо написати други интеграл једначина (1) у облику

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2. \tag{4}$$

Интеграли (2) и (4) су *основни интеграли једначина* (1). Ови интеграли се могу добити и непосредно множењем једначина са p, q, r односно са Ap, Bq, Cr и сабирањем. Како су h и G^2 позитивне константе, можемо са *Гринхил*-овим ознакама тих констаната

$$h = D\mu^2 \qquad G^2 = D^2\mu^2$$

основне интеграле написати и овако:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = D\mu^2, \tag{I}$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = D^2\mu^2. \tag{II}$$

Величина D има димензију момента инерције, а μ — угаоне брзине.

Векторски интеграл (3) игра важну улогу у проблему. Он тврди да са овим кретањем чврстог тела стоји у вези Лапласова непроменљива раван (односно породица паралелних равни), чији је положај одређен почетним условима кретања.

Векторском интегралу (3) одговарају три скаларна интеграла

$$Ap\lambda_x + Bq\mu_x + Cr\nu_x = G_x,$$

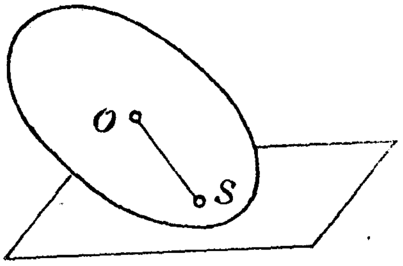
$$Ap\lambda_y + Bq\mu_y + Cr\nu_y = G_y,$$

$$Ap\lambda_z + Bq\mu_z + Cr\nu_z = G_z,$$

где су G_x, G_y, G_z константе.

§ 4 · 21. Геометриске интерпретације Ојлеровог случаја

Ако се за неко кретање, у датом случају чврстог тела, наводе оне геометриске особине кретања које одређују, без обзира на време, трајекторију (као скуп трајекторија свих тачака) тела, онда се каже да се даје *геометриска интерпретација* тог кретања. Геометриска интерпретација је од нарочите вредности, ако се при томе наводи и онај геометриски елеменат, који је за време стварног кретања пропорционалан времену.



Слика 5

а. Прва Poinsot' ова интерпретација Ојлеровог случаја

Нека правац тренутне угаоне брзине $\vec{\omega}$ сече површину елипсоида инерције

$$(1) \qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

у тачки S (сл. 5).

Докажимо ове теореме:

I. Угаона брзина $\vec{\omega}$ је пропорционална вектору $\overrightarrow{OS}$.

За доказ теореме довољно је показати пропорционалност њихових интензитета.

Како се жива сила чврстог тела при обртању одређује из једначине

$$(2) \qquad 2\,T = J_\omega\,\omega^2,$$

при чему је у нашем случају

$$(3) \qquad 2\,T = h = D\mu^2,$$

и како је према конструкцији елипсоида инерције

$$OS = 1\,/\,\sqrt{J_\omega},$$

то из (2) и (3) имамо

$$(4) \qquad \omega = OS\,\sqrt{h} = OS\cdot\mu\,\sqrt{D}\,;$$

одавде следује и пропорционалност вектора $\vec{\omega}$ и $\overrightarrow{OS}$. Из овог резултата непосредно следују вредности координата тачке S:

$$(5) \qquad \xi_S = p\,/\,\sqrt{h}, \quad \eta_S = q\,/\,\sqrt{h}, \quad \zeta_S = r\,/\,\sqrt{h}.$$

II. Тангентна раван површине елипсоида инерције у тачки S је Лапласова раван.

Како једначина тангентне равни површине (1) у тачки S гласи

$$A\xi_S\xi + B\eta_S\eta + C\zeta_S\zeta = 1\,, \tag{6}$$

где су ξ, η, ζ координате променљиве тачке те равни, косинуси углова које заклапа нормала на ту раван са координатним осама триједра $O\xi\eta\zeta$, према (5), биће пропорционални са

$$Ap\,/\,\sqrt{h}\,, \qquad Bq\,/\,\sqrt{h}\,, \qquad Cr\,/\,\sqrt{h}\,.$$

Према томе та нормала има правац вектора $\vec{G}$ $(Ap,\ Bq,\ Cr)$. Тангентна раван стоји управно на сталан правац тог вектора, тј. она је Лапласова раван.

III. Тангентна раван површине елипсоида инерције у тачки S је на сталном растојању од тачке O.

Заиста, према познатом обрасцу, растојање δ равни (6) од тачке O износи

$$\delta = 1\,/\,\sqrt{A^2\xi_S^2 + B^2\eta_S^2 + C^2\zeta_S^2}\,, \tag{7}$$

или на основу (5)

$$\delta = \sqrt{h}\,/\,G = \text{const.} = 1\,/\,\sqrt{D}\ ; \tag{8}$$

тиме је теорема доказана.

Из наведених теорема следује:

За време кретања елипсоид инерције додирује сталну раван у тачки која се налази у тренутном мировању и на тај начин за време кретања елипсоид инерције котрља без клизања по непокретној равни а угаона брзина је пропорционална вектору положаја тачке додира. У томе је прва Poinsot-ова интерцретација. Због ове интерпретације, кретање Ојлеровог случаја понекад се назива Poinsot-ово кретање.

За време котрљања тачка S описује две криве: једну на површини елипсоида и другу у непокретној равни. Прву криву Poinsot је назвао *полходија*, другу *херполходија*. За време котрљања конус са врхом у O и са као полходијом водиљом, који је чврсто везан са телом, котрља се без клизања по непокретном конусу са врхом исто у тачки O и са као херполходијом водиљом.

Једначине полходије, као једначине геометриског места тачака на површини елипсоида у којима тангентна раван има стално растојање од центра елипсоида, имају облик

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1, \tag{1}$$

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = D. \tag{9}$$

Друга једначина непосредно следује из (7), ако искористимо (8).

Из једначина (1) и (9) добива се једначина

$$A(A-D)\xi^2 + B(B-D)\eta^2 + C(C-D)\zeta^2 = 0. \tag{10}$$

Из једначина (1) и (10) закључујемо да је полходија алгебарска крива: пресек елипсоида и конуса другог реда.

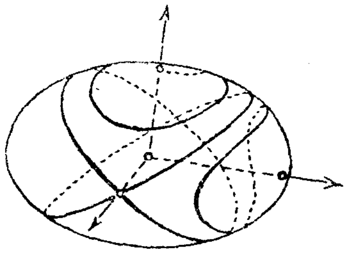
Претпоставимо да је

$$A \geqslant B \geqslant C.$$

Како је према особини елипсоида $\frac{1}{A} \leqslant \delta^2 \leqslant \frac{1}{C}$ и $\frac{1}{A} \leqslant \frac{1}{D} \leqslant \frac{1}{C}$, величина D је у границама

$$A \geqslant D \geqslant C.$$

Од величине D зависи положај полходије на површини елипсоида. Набројимо резултате (сл. 6):



Слика 6

(I) $D = C$ Полходија се редукује на тачке на оси $O\zeta$, великој оси елипсоида инерције.

(II) $B > D > C$ Полходија се од осе $O\zeta$ приближује двема равнима α и β које се секу дуж осе $O\eta$, средње осе елипсоида инерције.

(III) $D = B$ Полходија се распада у две криве у поменутим равнима α и β.

(IV) $A > D > B$ Полходија се од равни α и β, у другим угловима, приближује $O\xi$ оси.

(V) $D = A$ Полходија се редукује на тачке на $O\xi$ оси.

Што се тиче херполходије, она је трансцендентна крива, чија се природа одређује анализом елиптичких функција. Обим наше књиге не дозвољава проучавање те криве.

b. Друга Poinsot-ова интерпретација Ојлеровог случаја

У претходној геометриској интерпретацији има геометриски елемент који је пропорционалан угаоној брзини, али се сама угаона брзина мења са временом и према томе нема непосредног геометриског елемента пропорционалног времену. Наведимо сад другу интерпретацију, где тај елемент постоји.

Из интеграла живе силе, који можемо написати у облику

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = (\vec{G},\ \vec{\omega}) = h,$$

непосредно следује

$$\omega \cos(\vec{\omega},\ \vec{G}) = h/G = \text{const.} = \mu.$$

Ова особина угаоне брзине, позната под именом *Лагранжеве теореме*, тврди да за време кретања тела пројекција угаоне брзине на правац сталног момента количина кретања има сталну вредност.

Раставимо угаону брзину $\vec{\omega}$ у две компоненте: једну $\vec{\mu}$ у правцу вектора $\vec{G}$ са сталним интензитетом $\mu = h/G$, и другу μ_1 управну на $\vec{G}$, тј. у Лапласовој равни кроз тачку O. Ову раван означимо са α. Према том растављању угаоне брзине

$$\vec{\omega} = \vec{\mu} + \vec{\mu}_1 \tag{11}$$

и само кретање чврстог тела можемо сматрати као састављено 1. из равномерног обртања равни α око своје нормале брзином $\vec{\mu}$ и 2. из обртања тела око осе у равни α брзином $\vec{\mu}_1$. Оса вектора $\vec{\mu}_1$ описује у телу површину — покретни аксоид. За време кретања тај аксоид се котрља без клизања по равни α, која овде служи као непокретни аксоид за друго компонентно кретање.

Изведимо једначину покретног аксоида. Означимо крај вектора $\vec{\mu}_1$ са P, а његове координате са ξ_P, η_P, ζ_P. Како вектори $\vec{\omega}$ и $\vec{\mu}$ имају координате p, q, r, и $Ap/D, Bq/D, Cr/D$, јер је, напр.

$$\mu \cos(\vec{\mu}, \xi) = \mu \cos(\vec{G}, \xi) = \mu\, Ap/G = Ap/D,$$

из (11) изводимо

$$p - Ap/D = \xi_P,\quad q - Bq/D = \eta_P,\quad r - Cr/D = \zeta_P\,.$$

Одавде је

$$p = D\xi_P : (D - A),\quad q = D\eta_P : (D - B),\quad r = D\zeta_P : (D - C).$$

Како сад правац вектор $\vec{\omega}$ (p, q, r) припада конусној површини (10), закључујемо да тачка P, а затим и свака тачка на правцу вектора $\vec{\mu}_1$ припада површини

$$A\xi^2:(A-D)+B\eta^2:(B-D)+C\zeta^2:(C-D)=0.$$

То је једначина такозваног *другог Poinsot-овог конуса* који се котрља без клизања по једној равни, која се са своје стране равномерно обрће око своје нормале у тачки O. У томе је друга Poinsot-ова интерпретација Ојлеровог случаја.

c. Mac Cullagh-ова интерпретација

Ова интерпретација са добива из прве Poinsot-ове интерпретације после реципрочне трансформације целе геометриске слике везане за Poinsot-ову интерпретацију.

Елипсоид инерције се трансформише у гирациони елипсоид (§ 1 · 66, II), а сама интерпретација изгледа овако.

За време кретања тела у Ојлеровом случају гирациони елипсоид, чврсто везан са телом, увек пролази кроз две непомичне симетричне тачке на сталном правцу главног момента $\vec{G}$. Ако кроз једну од тих тачака повучемо тангентну раван на површину гирационог елипсоида, угаона брзина $\vec{\omega}$ име правац нормале спуштене из непомичне тачке O на ту раван, њен интензитет је обрнуто пропорционалан дужини те нормале. У доказ ове интерпретације нећемо улазити.

§ 4 · 22. Одређивање p, q, r у функцији времена

За одређивање p, q, r у функцији времена треба интегрисати систем једначина (1) § 4 · 2:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}-(B-C)\,qr&=0,\\ (1)\qquad B\frac{dq}{dt}-(C-A)\,rp&=0,\\ C\frac{dr}{dt}-(A-B)\,pq&=0. \end{aligned}$$

Већ смо навели два интеграла (I) и (II) § 4 · 2 тог система, наиме

$$(2)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=D\mu^2,$$

$$(3)\qquad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=D^2\mu^2.$$

У § 3 · 2 (24) навели смо систем диференцијалних једначина овако састављених

$$
\begin{aligned}
&\frac{du}{d\tau} - vw = 0, \\
(4) \qquad &\frac{dv}{d\tau} + wu = 0, \\
&\frac{dw}{d\tau} + k^2uv = 0,
\end{aligned}
$$

чије је решење

$$u = sn(\tau + c), \qquad v = cn(\tau + c), \qquad w = dn(\tau + c),$$

где је c произвољна константа.

Ако упоредимо систем (4) са нашим системом (1), видимо да су та два система састављена на исти начин од промењљивих и разликују се само вредностима константних коефицијената. За потпуно изједначење тих система поставимо ове везе између промењљивих

$$(6) \qquad p = -av, \qquad q = bu, \qquad r = cw, \qquad nt = \tau,$$

где су a, b, c, n и k^2 константе које подлеже одређивању.

Систем (1) тада даје

$$
\begin{aligned}
A\,an\frac{dv}{d\tau} + (B - C)\,bc\,u\,w = 0, \\
B\,bn\frac{du}{d\tau} - (A - C)\,ca\,w\,v = 0, \\
C\,cn\frac{dw}{d\tau} + (A - B)\,ab\,uv = 0.
\end{aligned}
$$

При упоређивању са (4), сматрајући да је $A > B > C$, долазимо до ових једначина за коефицијенте:

$$
\begin{aligned}
(7_1) \qquad & Aan = (B - C)\,bc, \\
(7_2) \qquad & Bbn = (A - C)\,ca, \\
(7_3) \qquad & Cck^2n = (A - B)\,ab.
\end{aligned}
$$

Сем тога, како према (5) и (6) величине

$$p = -a\,cn\tau, \qquad q = b\,sn\tau, \qquad r = c\,dn\tau$$

треба да задовољавају и интеграле (2) и (3), и то за сваку вредност τ, имамо још два идентитета

$$Aa^2 cn^2\tau + Bb^2 sn^2\tau + Cc^2 dn^2\tau = D\mu^2,$$

$$A^2 a^2 cn^2\tau + B^2 b^2 sn^2\tau + C^2 c^2 dn^2\tau = D^2\mu^2.$$

Ако $cn\tau$ и $dn\tau$ изразимо помоћу $sn\tau$ и изједначимо у тим једначинама чланове слободне од $sn^2\tau$ и коефицијенте код $sn^2\tau$, добићемо још ове четири једначине које треба да задовољају уведене константе:

$$(8_1) \qquad Aa^2 + Cc^2 = D\mu^2,$$

$$(8_2) \qquad -Aa^2 + Bb^2 - Cc^2k^2 = 0,$$

$$(8_3) \qquad A^2a^2 + C^2c^2 = D^2\mu^2,$$

$$(8_4) \qquad -A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2k^2 = 0.$$

Овај систем од четири једначине линеарне у односу на a^2, b^2, c^2, c^2k^2 даје ова решења

$$a = \pm\mu\sqrt{\frac{D(D-C)}{A(A-C)}}, \qquad b = \pm\mu\sqrt{\frac{D(D-C)}{B(B-C)}}, \qquad c = \pm\mu\sqrt{\frac{D(A-D)}{C(A-C)}};$$

$$k^2 = \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)}.$$

При томе се заустављамо на вредности D, која задовољава услове

$$A > D > C.$$

После тога из (7_1) одређујемо

$$(9) \qquad n = \pm\mu\sqrt{\frac{D(A-D)(B-C)}{ABC}}.$$

Две остале једначине (7_2) и (7_3) претварају се, на основу одређених вредности констаната, у идентитете. Што се тиче двоструких знакова, они се одређују из почетних услова са познатом обазривошћу кад одговарајућа величина узима вредност нулу.

На тај начин долазимо дефинитивно до овог решења:

$$(10) \qquad \begin{aligned} p &= \mp\mu\sqrt{\frac{D(D-C)}{A(A-C)}}\, cn(nt+c), \\ q &= \pm\mu\sqrt{\frac{D(D-C)}{B(B-C)}}\, sn(nt+c), \\ r &= \pm\mu\sqrt{\frac{D(A-D)}{C(A-C)}}\, dn(nt+c), \end{aligned}$$

где n има вредност (9).

При дискусији решења (10) за различите почетне услове, пре свега треба узети у обзир да k^2 мора да задовољава услов

$$0 \leqslant k^2 \leqslant 1 .$$

Анализа проучавања вредности k^2 доводи до ових случајева, који се поклапају са случајевима које смо имали при проучавању полходије (§ 4 · 21)

(I) $k^2 = 0$; тада је $D = C$. Решење из (10) дегенерише у

$$p = q = 0, \qquad r = \text{const}.$$

(II) $0 < k^2 < 1$, $C < D < B$. Важи решење (10); особине полходије су наведене под (II) у § 4 · 21.

(III) $k^2 = 1$, $D = B$. Решење дегенерише у познато решење помоћу e^z функције, и то

$$p = \mp \mu \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \frac{2}{e^\tau + e^{-\tau}},$$

$$q = \pm \mu \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{e^\tau + e^{-\tau}},$$

$$r = \pm \mu \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \frac{2}{e^\tau + e^{-\tau}},$$

где је $\tau = nt + c$.

(IV) Што се тиче случајева кад је

$k^2 > 1$, а тада је $B < D < A$, решење (10) губи свој смисао у реалној области. Али тада елиптички интеграл

$$I = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

од којег зависи решење, може бити сменом

$$ku = v$$

трансформисан у интеграл

$$I = \frac{1}{k} \int_0^{v/k} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'^2v^2)}}$$

који са

$$k' = 1/k$$

даје решење поново у реалној области, само са том разликом што се раније имагинаран период трансформише у реалан.

Дискусија се завршава са случајем

(V) кад је $D = A$; тада ново елиптичко решење поново дегенерише у елементарно решење. Заиста из (I) и (II) § 4 · 2 тада имамо једначину

$$B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2 = 0,$$

а она се претвара у идентитет само за решење

$$q = r = 0.$$

После тога имамо и ову вредност

$$p = p_0 = \text{const.} = \mu.$$

Тако изгледа решење Ојлеровог случаја помоћу Јакобијевих елиптичких функција. Ово решење је било засновано на упоређењу Ојлеровог система диференцијалних једначина са оним системом диференцијалних једначина који задовољавају функције $sn\,z$, $cn\,z$, $dn\,z$.

Исти проблем, само у другој форми, може се решити без наведеног упоређивања. Не наводећи дискусију тог новог решења, покажимо само пут којим се оно може извести.

Једначинама (I) и (II) § 4 · 2 додајмо још једначину

$$(11) \qquad p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$$

и саставимо систем

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= \omega^2, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= G\mu^2, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= G^2\mu^2. \end{aligned}$$

Решимо тај систем по p^2, q^2, r^2:

$$p^2 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)}(\omega^2 - \omega_1^2) \qquad q^2 = \frac{CA}{(B-C)(B-A)}(\omega^2 - \omega_2^2),$$

$$r^2 = \frac{AB}{(C-A)(C-B)}(\omega^2 - \omega_3^2),$$

где су

$$\omega_1^2 = \frac{D\mu^2}{BC}(B+C-D), \quad \omega_2^2 = \frac{D\mu^2}{CA}(C+A-D), \quad \omega_3^2 = \frac{D\mu^2}{AB}(A+B-D).$$

Пошто је $B + C > A$, а $A > D$, свака од величина ω_1^2, $\omega_2^2\,\omega_3^2$ позитивна је.

Ако сад уведемо још ознаке

$$\alpha^2 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)}, \quad \beta^2 = \frac{CA}{(A-B)(B-C)}, \quad \gamma^2 = \frac{AB}{(A-C)(B-C)},$$

имамо ову вредност производа

$$p^2 q^2 r^2 = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_3^2).$$

Пошто непосредно из једначина (1) § 4 · 1 следује

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} + r \frac{dr}{dt} = \left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right) pqr,$$

можемо после незнатних израчунавања саставити ову једначину

$$\frac{d\omega^2}{dt} = 2 \sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}$$

која са ознакама

$$\omega^2 = z, \quad \omega_1^2 = e_1, \quad \omega_2^2 = e_2, \quad \omega_3^2 = e_3$$

доводи до ове елиптичке квадратуре

$$(12) \qquad 2(t - t_0) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(e_2-z)(z-e_3)}}.$$

Приметимо да релативна вредност корена $e_1 = \omega_1^2$ према корену $e_3 = \omega_3^2$ стоји поново у вези са вредношћу константе D, наиме: за $D < B$ имамо $\omega_1^2 > \omega_3^2$, а за $D > B$, $\omega_1^2 < \omega_3^2$.

Интеграл (12) спада у интеграле Вајерштрасовог типа и једноставније се изражава помоћу елиптичке функције $\wp(z)$, али у та израчунавања нећемо улазити.

§ 4 · 23. Одређивање Ојлерових углова у функцији времена

За дефинитивно решење проблема о кретању тела треба одредити координате тела, рецимо Ојлерове углове φ, ψ, θ у функцији времена, а на основу познатих p, q, r одређених у функцији времена у претходном параграфу.

Учврстимо у непомичном простору триједар $Oxyz$ тако да оса Oz има правац константног момента количина кретања, вектора $\vec{I} = \vec{G}$ (§ 4 · 2) са интензитетом $D\mu$. Пошто тај исти вектор има у односу на триједор $O\xi\eta\zeta$ координате Ap, Bq, Cr, можемо написати

$$(1) \qquad Ap = G\lambda_z, \quad Bq = G\mu_z, \quad Cr = G\nu_z .$$

Како је, према (2) § 2 · 21, III-1,

$$\lambda_z = -\cos\theta\sin\varphi ,$$
$$\mu_z = \sin\theta\sin\varphi ,$$
$$\nu_z = \cos\varphi ,$$

то имамо две једначине

$$(2) \qquad \cos\varphi = Cr/G = Cr/D\mu ,$$
$$(3) \qquad \operatorname{tg}\theta = -\mu_z/\lambda_z = -Bq/Ap,$$

из којих се одређују углови φ и θ.

За одређивање последњег угла, угла ψ, узмимо ове две једначине из (3) § 4 · 22, III-1:

$$p = \varphi'\sin\theta - \psi'\cos\theta\sin\varphi,$$
$$q = \varphi'\cos\theta + \psi'\sin\theta\sin\varphi$$

и искористимо последицу тих једначина

$$\psi'\sin\varphi = -p\cos\theta + q\sin\theta.$$

После одређивања тригонометриских функција из (2) и (3) и искоришћавања интеграла (I) и (II) § 4 · 2, добићемо ову вредност извода ψ'

$$\psi' = D\mu\frac{D\mu^2 - Cr^2}{D^2\mu^2 - C^2r^2} .$$

Према томе се угао ψ одређује квадратуром

$$\psi - \psi_0 = D\mu\int_{t_0}^{t}\frac{D\mu^2 - Cr^2}{D^2\mu^2 - C^2r^2}\,dt.$$

Изражавање тог интеграла у елиптичким функцијама захтева специјално знање тих функција и зато не можемо улазити овде у те рачуне.

§ 4 · 24. Ојлеров случај за динамички симетрично тело

Ако је елипсоид инерције обртни елипсоид односно сфера, можемо, задржавајући увек услове $A \geqslant B \geqslant C$, које смо поставили у општој анализи, разликовати три случаја:

1. $A = B,\ B > C$.

То је случај издуженог обртног елипсоида.

2. $B = C,\ A > B$.

Случај спљоштеног елипсоида.

3. $A = B = C$.

Случај сфере.

У првом случају диференцијалне једначине имају једноставни облик

$$(1_1) \qquad A\frac{dp}{dt} - (A - C)\,qr = 0,$$

$$(1_2) \qquad A\frac{dq}{dt} - (C - A)\,rp = 0,$$

$$(1_3) \qquad C\frac{dr}{dt} = 0.$$

Интеграли (I) и (II) § 4 · 2 у примени на ове једначине дају

$$A\,(p^2+q^2) + Cr^2 = D\mu^2,$$

$$A^2(p^2+q^2) + C^2r^2 = D^2\mu^2,$$

те је

$$r^2 = \text{const.} = D\mu^2\,(A - D)/C\,(A - C),$$

$$p^2+q^2 = \text{const.} = D\mu^2\,(D - C)/A\,(A - C).$$

Према томе имамо и ову једначину

$$\omega^2 = p^2+q^2+r^2 = \text{const.} = D\mu^2\,(A + C - D)/AC.$$

Како је у овом случају

$$k^2 = \frac{(A - B)(D - C)}{(B - C)(A - D)} = 0,$$

елиптичке функције дегенеришу у тригонометриске и решење (10) § 4 · 22 треба написати овако:

$$p = \mp\,\mu\sqrt{\frac{D\,(D - C)}{A\,(A - C)}}\cos\,(nt + c),$$

$$(2) \qquad q = \pm\,\mu\sqrt{\frac{D\,(D - C)}{A\,(A - C)}}\sin\,(nt + c),$$

$$r = \pm\,\mu\sqrt{\frac{D\,(A - D)}{C\,(A - C)}},$$

где је

$$n = \pm \frac{\mu}{A} \sqrt{\frac{D(A-D)(A-C)}{C}},$$

а c је, као и раније, произвољна константа.

Решење (2) у једноставнијој форми може се добити и непосредно из система (1). Заиста, из (1_3) имамо

$$(3) \qquad r = \text{const.} = r_0,$$

а затим из (1_1) и (1_2)

$$(4) \qquad p = -M\cos(nt+c), \quad q = M\sin(nt+c),$$

где је $n = (A-C)r_0/A$, а r_0, M, c су константе интеграције. Под условом да у почетку кретања оса $O\xi$ пролази кроз почетни положај тачке на полходији, а при томе се време рачуна од тог почетног момента, ове константе имају вредности $M = +\sqrt{p_0^2+q_0^2}$, $c = 0$.

Једначине (3) и (4) показују да је полходија круг на површини елипсоида на растојању r_0 од непомичне тачке.

Ако осу Oz непомичног триједра поново узмемо у правцу константног момента количина кретања, пројекција угаоне брзине на тај правац такође има, према Лагранжевој теореми, сталну вредност; како је та угаона брзина сталног интензитета, херполходија је такође круг, на растојању $\delta = \sqrt{2T/G}$.

На тај начин кретање се врши тако да се кружни конус везан са чврстим телом котрља без клизања по непомичном кружном конусу, и то тако да се у овом случају један конус налази ван простора другог, како то следује из прве Poinsot-ове интерпретације. Котрљање се врши равномерно. Такво је кретање, како смо то видели у § 4 · 431, III-1, *регуларна прецесија*, и то *епициклоидна*.[5]

У случају 2. не можемо непосредно применити решење (10) § 4 · 22 јер је $k^2 \to \infty$. Али систем једначина овог случаја

$$A\frac{dp}{dt} = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-B)pr = 0,$$

$$B\frac{dr}{dt} - (A-B)pq = 0$$

даје решење

$$p = p_0,$$

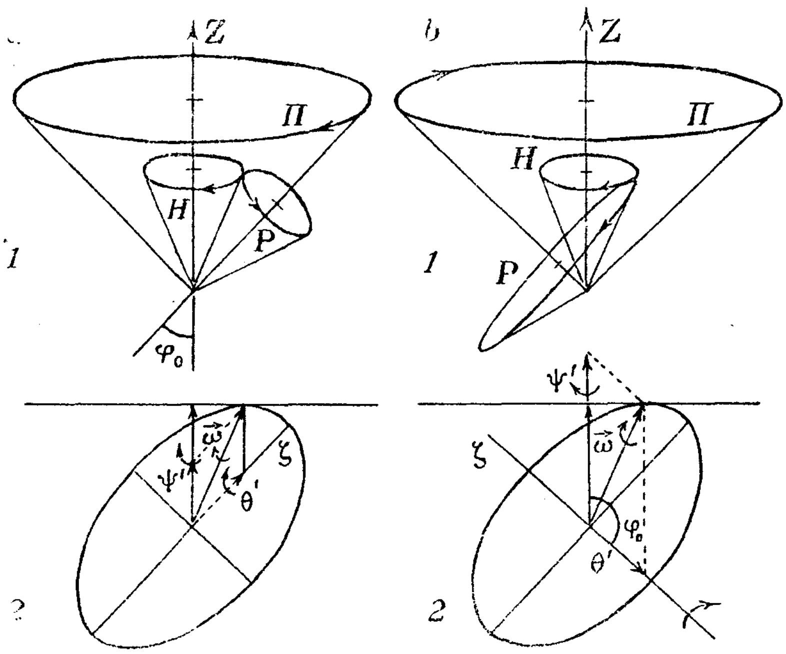
$$q = N\sin(nt + c), \qquad r = -N\cos(nt + c),$$

где су

$$n = (A - B)p_0/B, \qquad N = +\sqrt{q_0^2 + r_0^2};$$

изабравши згодно правац осе $O\zeta$ можемо и овде ставити $c = 0$.

И у овом случају кретање се може остварити котрљањем без клизања једног конуса по другом, али сад покретни конус обухвата непокретни. И то је регуларна прецесија. По једној терминологији то је *перициклоидна регуларна прецесија*, а по нашој (§ 4 · 431. III-1) то је један случај *хипоциклоидне прецесије*. Важно је приметити да се и у једном и у другом случају регуларна прецесија врши тако да се покретни конус налази ван области непокретног простора.



Слика 7

На сликама (7, *a*, 1) и (7, *b*, 1) означени су: са *H херполходијални конус* са осом O_z, непокретном у простору, са *P* — *полходијални конус* са осом — осом симетрије тела, са П — *прецесиони конус* са осом Oz. Производиља конуса *H* и *P* је оса тренутне угаоне брзине, а производиља конуса П — оса тела.

На сликама (7, a, 2) и (7, b, 2) показани су пресеци површина елипсоида инерције, који се котрља по непокретној равни, као и компоненте угаоне брзине у равнима тих пресека.

Није тешко у оба случаја одредити Ојлерове углове у функцији времена.

Најзад, у случају кад се елипсоид инерције претвара у сферу, тј. при

$$A = B = C,$$

диференцијалне једначине кретања дају ове очигледне интеграле

$$p = p_0, \ q = q_0, \ r = r_0 .$$

Угаона брзина $\vec{\omega}$ има сталан положај у телу. Полходија се претвара у тачку која мора лежати на сталном правцу момента количина кретања. Тело врши равномерно обртање око тог правца.

§ 4 · 3. Лангранжев случај обртања тешког чврстог тела око непомичне тачке

Сем Ојлеровог случаја кретања тешког чврстог тела кад се тежиште налази у непокретној тачки има још само два случаја кретања тешког тела око непомичне тачке кад се решење проблема са *произвољним почетним условима кретања* може добити у коначном облику, и то у случајевима који се зову *случај Лагранжа* и *случај Ковалевске* и то по оним писцима који су први дали одговарајућа решења.

Проучимо Лагранжев случај. У овом случају 1. елипсоид инерције за непокретну тачку тела је обртни елипсоид и 2. тежиште тела треба да се налази на оси симетрије наведеног елипсоида. Према томе у овом случају имамо услове:

$$A = B, \ \ \xi_C = \eta_C = 0, \ \ \zeta_C \neq 0,$$

при чему смер осе $O\zeta$ у телу увек можемо изабрати тако да $\zeta_C = \zeta$ буде позитивно. Такво тело кратко ћемо звати *Лагранжево симетрично тело*. Ако је $A = B = C$, $\zeta_C \neq 0$, оно је *Лагранжево сферно тело*.

Према § 4 · 111 диференцијалне једначине кретања у овом случају имају облик

$$A\frac{dp}{dt} - (A - C)\,qr = mg\zeta\mu_z,$$

$$A\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp - = mg\zeta\lambda_z,$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

Како је, према последњој једначини, r константно, могу се увести ове константе

$$\frac{A - C}{A}\,r = a, \qquad mg\zeta/A = b,$$

при чему је b позитивно.

Тада претходне једначине добивају овај једноставнији облик

(1) $$\frac{dp}{dt} - aq = b\mu_z,$$

(2) $$\frac{dq}{dt} + ap = -b\lambda_z,$$

(3) $$\frac{dr}{dt} = 0.$$

Тај систем једначина има ове интеграле: интеграл момента количина кретања у односу на вертикалан правац у непокретном простору, интеграл живе силе и допунски интеграл, потпуно очигледан, који омогућава довршавање интеграције. Ти интеграли јесу:

(4) $$p\lambda_z + q\mu_z + r_1\nu_z = \Gamma,$$

(5) $$p^2 + q^2 = -2\,b\nu_z + h,$$

(6) $$r = \text{const.} = r_1 + a,$$

где су Γ, h, r_1 произвољне константе.

При аналитичком извођењу ових интеграла треба узети у обзир обрасце (7) § 4 · 21, III-1:

(7) $$\frac{d\lambda_z}{dt} = r\mu_z - q\nu_z, \qquad \frac{d\mu_z}{dt} = p\nu_z - r\lambda_z, \qquad \frac{d\nu_z}{dt} = q\lambda_z - p\mu_z.$$

Ако једначине (1) — (3) редом помножимо са λ_z, μ_z, ν_z и резултате саберемо добићемо

$$\lambda_z \frac{dp}{dt} + \mu_z \frac{dq}{dt} + \nu_z \frac{dr}{dt} - a\,(q\lambda_z - p\mu_z) = 0\,.$$

Како је

$$p\frac{d\lambda_z}{dt} + q\frac{d\mu_z}{dt} + r\frac{d\nu_z}{dt} \equiv 0\,,$$

претходна једначина узима облик

$$\frac{d}{dt}\,(p\lambda_z + q\mu_z + r\nu_z) - a\,\frac{d\nu_z}{dt} = 0$$

и доводи до интеграла (4).

За извођење интеграла живе силе у облику (5), помножимо (1) са p, (2) са q и саберимо:

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = -b\,(q\lambda_z - p\mu_z) = -b\frac{d\nu_z}{dt}\,.$$

Одавде непосредно следује тражени интеграл.

Покажимо сад како из интеграла (4), (5), (6) можемо помоћу квадратура одредити Ојлерове углове φ, ψ, θ у функцији времена. У ту сврху уврстимо у те интеграле вредности p, q, r у функцији углова и њихових извода (§ 4 · 22, III-1):

$$p = \varphi'\sin\theta - \psi'\cos\theta\sin\varphi,$$

$$q = \varphi'\cos\theta + \psi'\sin\theta\sin\varphi,$$

$$r = \psi'\cos\varphi + \theta'.$$

Ако уведемо краћу ознаку

$$\nu_z = \cos\varphi = u,$$

при чему је

$$\varphi' = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,,$$

интеграли (4) — (6) дају

$$\psi'(1-u^2) + r_1 u = \Gamma,$$

$$\varphi'^2 + \psi'^2(1-u^2) = -2bu + h,$$

$$\psi' u + \theta' = r.$$

Одавде изводимо

$$(8) \qquad \psi' = \frac{\Gamma - r_1 u}{1 - u^2},$$

$$(9) \qquad \theta' = r - \frac{(\Gamma - r_1 u) u}{1 - u^2},$$

$$(10) \qquad u'^2 = (-2bu + h)(1 - u^2) - (\Gamma - r_1 u)^2 = Q_3(u),$$

где смо са $Q_3(u)$ означили наведени полином трећег степена.

Тај полином мења знак према таблици

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} u & -\infty & -1 & u_0 & +1 & +\infty \\ Q_3(u) & - & - & \geqslant 0 & - & + \end{array}$$

$$u_1 \qquad u_2 \qquad u_3$$

где је u_0 вредност у почетку кретања кад је $|u_0| \leqslant 1$.

На тај начин полином $Q_3(u)$ можемо претставити као производ

$$Q_3(u) = 2b(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3),$$

где су u_1, u_2, u_3, реалне нуле нашег полинома, при чему u_1 и u_2 леже између -1 и $+1$, а u_3 између $+1$ и $+\infty$. Променљива u може се мењати само у границама од u_1 до u_2, јер је ван тих граница $Q_3(u)$ негативно, а то је немогуће према једначини (10).

Ако уведемо нову променљиву τ сменом

$$(11) \qquad u = u_1 \cos^2 \tau + u_2 \sin^2 \tau,$$

једначина (10) се замењује једначином

$$2\tau'^2 = b(u_3 - u_1)(1 - k^2 \sin^2 \tau),$$

где је

$$k^2 = (u_2 - u_1)/(u_3 - u_1).$$

Ова једначина доводи до елиптичке квадратуре

$$n\,dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}},$$

где је

$$n^2 = \frac{1}{2} b(u_3 - u_1);$$

двозначност корена решавају почетни услови кретања.

Ако време рачунамо од момента кад је $\tau = 0$ $(u = u_1)$, претходна квадратура даје решење $\tau = am(nt)$ или

$$\sin \tau = sn(nt).$$

После тога из (11) одређујемо променљиву u у функцији времена. Најзад после квадратура (8) и (9) одређујемо и углове ψ и θ у функцији времена. Тиме се завршава аналитичко решење Лагранжева случаја.

§ 4 · 31. Геометриска интерпретација Лагранжевог случаја

У претходном параграфу наведено аналитичко решење Лагранжевог случаја је доста компликовано, јер не даје јасно слику тог кретања. Због тога су од велике користи геометриске интерпретације како специјалних случајева овог кретања тако и општег случаја.

а. Интерпретација специјалног случаја кад је $r_0 = 0$.

Пошто је у општем случају $r = \text{const.}$, а $r_0 = 0$, тело неће имати то обртање за све време кретања, те диференцијалне једначине узимају облик

$$(1) \qquad \frac{dp}{dt} = b\mu_z, \qquad \frac{dq}{dt} = -b\lambda_z, \qquad \frac{dr}{dt} = 0,$$

где је $b = mg\zeta/A$.

Замислимо сад једно дегенеративно чврсто тело, које је исто тако везано за непокретну тачку O, али је дегенерисало само у једну тешку материјалну тачку масе m на растојању R од тачке O. Пошто не узимамо у обзир масу штапа који веже масу m са тачком O, кретање тачке m је еквивалентно кретању сферног клатна. Како за такво тело важе диференцијалне једначине (1) са новом константом $b_1 = mgR/mR^2 = g/R$, јер је за дегенерисано тело $A = mR^2$, можемо закључити да се диференцијалне једначине једног и другог кретања поклапају под условом $b = b_1$, или $mg\zeta/A = g/R$, а то значи за

$$R = A/m\zeta.$$

Са том дужином сферно клатно се креће на исти начин као и Лагранжево симетрично тешко тело, разуме се, под условом да је $r_0 = 0$, и да интеграционе константе имају одговарајуће вредности у једном и другом кретању.

b. Интерпретација општег случаја

Обим ове књиге не дозвољава потпуно извођење геометриске интерпретације општег случаја Лангранжевог кретања, чак ни у оној упрошћеној форми коју сам дао пре 50 година[1]. Могу само кратко изложити оне ставове на којим се заснива ова интерпретација.

Став први. Кретање Лангражевог *симетричког* тела може се раставити на два кретања: на кретање Лагранжевог *сферног* тела и на стално обртање тела око осе симетрије.

За формулисање других ставова уведимо неке нове појмове у вези са обртањем тела око непомичне тачке.

Котрљање без клизања централне површине другога реда са непомичним центром по непомичној равни са угаоном брзином пропорционалном вектору положаја додирне тачке назива се *генералисано* Poinsot-ово кретање или кретање à la Poinsot. За такво кретање централна површина другога реда не мора бити елипсоид, како је то у случају правог Poinsot-овог кретања у Ојлеровом случају.

Два генералисана Poinsot-ова кретања су *коњугована (Darboux-ова кретања),* ако су им угаоне брзине истог правца и интензитета, али супротног смера. Таква два обртања имају исте полходије.

Ако се раван, чврсто везана са телом, налази на сталном растојању од непомичне тачке и котрља без клизања по непокретној централној површини другог реда са центром у непомичној тачки, а има брзину пропорционалну вектору положаја тачке додира, такво кретања тела је инверзно кретање генералисаном Poinsot-овом кретању.

Став други. Кретање Лагранжевог сферног тела може се раставити на генералисано Poinsot-ово кретање и на кретање инверзно таквом кретању.

Став трећи. Додавање генералисаном Poinsot-овом кретању сталног обртања мења само површину која се котрља у нову површину која је конфокална са првом (Sylvester-ова теорема).

Према наведеним теоремама можемо навести ову геометриску интерпретацију Лагранжевог кретања.

Замислимо три средине. Средину I непокретног простора, средину II Лагранжевог симетричног тела и помоћну средину III. Све три средине имају заједничку непокретну тачку *O*.

---

[1] Теоремы Якоби и Сильвестра. Кіевск. Универс. Извѣстія. 1905 г.

Нека сад помоћна средина III врши према средини I генералисано Poinsot-ово кретање. Полходијални конус средине III врши котрљање по херполходијалном конусу средине I.

Нека даље средина II врши према средини III инверзно кретање генералисаном конјугованом Poinsot-овом кретању средине III према средини II. Херполходијални конус у средини тела врши котрљање по полходијалном конусу у средини III; тај полходијални конус је исти са претходним полходијалним конусом у тој средини.

Ако том последњем кретању додамо сталну угаону брзину око правца $O\zeta$ тела, а то значи да централну површину другога реда променимо у другу, конфокалну, дефинитивно ће средина II тела вршити према непокретној средини I кретање Лагранжевог симетричног тела. У резултату херполходијални конус везан за тело котрљаће се без клизања по другом херполходијалном конусу у непокретном простору.

Јасно је да константе одговарајућих интеграла компонентних кретања треба да се одреде према датим почетним условима. Могућност таквог одређивања је скопчана са врло гломазним израчунавањима.

§ 4 · 4. Случај С. В. Ковалевске. Њен интеграл

У овом случају треба да буду испуњена три услова: 1. елипсоид инерције за непомичну тачку треба да буде обртни елипсоид; 2. момент инерције око осе симетрије елипсоида треба да износи половину вредности момента инерције око осе у екваторијалној равни; 3. тежиште тела лежи у равни једнаких момената инерције. Пошто положај оса $O\xi$ и $O\eta$ у тој равни можемо бирати на произвољан начин, бирамо их тако да оса $O\xi$ прође кроз тежиште тела. На тај начин услове овог случаја кретања тешког тела можемо изразити овако

$$A = B = 2C, \quad \xi_C = l, \quad \eta_C = 0, \quad \zeta_C = 0,$$

где је l растојање тежишта од непокретне тачке; смер осе $O\xi$ је изабран тако да је $\xi_C > 0$. Такво тело ћемо кратко називати *тело Ковалевске*.

Према § 4 · 111, диференцијалне једначине кретања у овом случају имаће облик:

$$(1)\qquad 2\frac{dp}{dt} - qr = 0,\qquad 2\frac{dq}{dt} + rp = k^2\gamma_z,\qquad \frac{dr}{dt} = -k^2\mu_z,$$

где је

$$k^2 = mgl/C.$$

При интегрисању овог система треба узети у обзир познате везе између извода косинуса, самих косинуса и угаоне брзине:

$$(2)\qquad \frac{d\lambda_z}{dt} = r\mu_z - q\nu_z,\qquad \frac{d\mu_z}{dt} = p\nu_z - r\lambda_z,\qquad \frac{d\nu_z}{dt} = q\lambda_z - p\mu_z.$$

Систем једначина (1) и (2) има ове алгебарске интеграле: интеграл живе силе, интеграл момента количина кретања у односу на непомичну Oz осу и интеграл косинуса:

$$2(p^2 + q^2) + r^2 = -2k^2\lambda_z + h,$$

$$2(p\lambda_z + q\mu_z) + r\nu_z = \Gamma,$$

$$\lambda_z^2 + \mu_z^2 + \nu_z^2 = 1,$$

где су h и Γ произвољне константе интеграције.

Пре извођења још једног алгебарског интеграла одговоримо на питање: Зашто је С. В. Ковалевска била сигурна да је довољно наћи само још један алгебарски интеграл и да се после тога проблем решава у квадратурама?

Ево схеме могућности решавања овог проблема.

Интеграл живе силе (један интеграл) даје могућност елиминисања времена, које улази само у облику диференцијала dt. После решења проблема само у координатама може се увести време квадратуром (други интеграл). Интеграл момента и интеграл косинуса су трећи и четврти интеграл, последњи без произвољне константе. Та константа се уводи допунски при одређивању Ојлерових углова после одређивања p, q, r, λ_z, μ_z, ν_z у функцији времена. Затим теорија последњег фактора (§ 5 · 6 и 5 · 61, II) тврди да је довољно пронаћи још један интеграл (пети интеграл), и после тога се проблем доводи до квадратуре (шести интеграл). Тај пети интеграл је пронашла С. В. Ковалевска. Она га изводи овако.

Помножимо другу од једначина (1) са $i = \sqrt{-1}$ и саберимо са првом једначином

$$2\frac{d}{dt}(p+iq) = -ri(p+iq) + ik^2 v_z,$$

па помножимо добивени израз са $p + iq$, што даје

$$\frac{d}{dt}(p+iq)^2 = -ri(p+iq)^2 + ik^2 v_z(p+iq).$$

Затим као последицу из прве две једначине система (2) саставимо једначину:

$$\frac{d}{dt}(\lambda_z + i\mu_z) = -ri(\lambda_z + i\mu_z) + iv_z(p+iq).$$

Помножимо ову једначину са k^2 и одузмимо од претходне једначине. Резултат је

$$\frac{d}{dt}[(p+iq)^2 - k^2(\lambda_z + i\mu_z)] = -ri[(p+iq)^2 - k^2(\lambda_z + i\mu_z)]$$

или

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\Psi = -ri\Psi,$$

где је

$$\Psi = (p+iq)^2 - k^2(\lambda_z + i\mu_z).$$

Претходно извођење једначине (3) из (1) и (2) можемо изменити у том смислу што ћемо множити не са i, већ са $-i$, тј. што ћемо увести конјуговане комплексне величине. Тада, ако уведемо ознаку

$$\overline{\Psi} = (p-iq)^2 - k^2(\lambda_z - i\mu_z),$$

као резултат добићемо једначину

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\overline{\Psi} = +ri\overline{\Psi}.$$

Ако сад једначину (3) помножимо са $\overline{\Psi}$, а једначину (4) са Ψ, добићемо после сабирања једначину

$$\frac{d}{dt}\Psi\overline{\Psi} = 0,$$

која доводи до интеграла

$$\Psi\overline{\Psi} = [(p+iq)^2 - k^2(\lambda_z + i\mu_z)][(p-iq)^2 - k^2(\lambda_z - i\mu_z)] = \text{const}.$$

а то је интеграл С. В. Ковалевске.

Реалан облик тог интеграла је

$$(p^2 - q^2 - k^2 \lambda_z)^2 + (2\,pq - k^2 \mu_z)^2 = \mathrm{const.}$$

После добивања овог интеграла можемо тврдити да се довршавање интегрисања система једначина (1) и (2) врши помоћу квадратура, али извођење тих квадратура је толико компликовано да му не може бити места у овој књизи.

После решења система једначина (1) и (2) потребно је извршити још једну квадратуру за одређивање последњег Ојлеровог угла у функцији времена, како смо то радили и при решавању Ојлеровог случаја.

§ 4 · 5. Партикуларна решења проблема обртања тешког чврстог тела око непомичне тачке

У случајевима Ојлера, Лагранжа и Ковалевске чврсто тело које се обрће око непомичне тачке, не може имати произвољан распоред маса у односу на непомичну тачку. У том смислу сваки од ових случајева је специјалан случај општег проблема обртања тешког чврстог тела око непомичне тачке. Али у сваком од та три случаја почетни услови не подлеже ограничењу и у том смислу за свако специјално тело, Ојлерово, Лагранжево и оно Ковалевске, наведена решења су општа решења. При томе сем основних интеграла у сваком од тих случајева потребни допунски интеграл је алгебарски. На основу дубљег проучавања система одговарајућих диференцијалних једначина доказано је (Painlevé, Husson, Burgatti) да сем наведена три специјална, других специјалних случајева са општим решењем и са допунским алгебарским интегралом не може бити.

Али постоји читав низ таквих специјалних случајева, то значи са специјалним распоредом маса тела у односу на непомичну тачку, кад се проблем једноставно решава, али само у случајевима кад почетно кинематичко стање задовољава одређене услове. То ćу партикуларна решења за неке специјалне распореде маса чврстог тела. Навешћемо један пример таквог партикуларног решења, које су дали Д. К. Бобилев и В. А. Стеклов.

Нека је за непокретну тачку

$$2\,A = B, \quad \xi_C = \zeta_C = 0;$$

тада, према § 4 · 111, диференцијалне једначине кретања имају облик:

$$A\frac{dp}{dt} - (2A - C)\,qr = -mg\eta_C\,\nu_z,$$

$$2A\frac{dq}{dt} - (C - A)\,rp = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt} + A\,pq = mg\eta_C\,\lambda_z.$$

Ако потражимо партикуларно решење у облику

(1) $$r = 0, \quad q = \text{const.} = q_0, \quad p = n\lambda_z,$$

где је

$$n = mg\eta_C/Aq_0,$$

прва од претходних једначина даје

(2) $$\frac{d\lambda_z}{dt} = -q_0\,\nu_z,$$

а остале две се претварају у идентитете. Једначине (3) § 4 · 111 за косинусе додају још две једначине

(3) $$\frac{d\mu_z}{dt} = n\lambda_z\nu_z,$$

(4) $$\frac{d\nu_z}{dt} = q_0\lambda_z - n\lambda_z\mu_z.$$

Систем једначина (2)—(4) се интегрише на овај начин. Прво, он има интеграл

(5) $$\lambda_z^2 + \mu_z^2 + \nu_z^2 = \text{const.} = 1.$$

Затим, ако једначину (2) помножимо са $n\lambda_z$, а (3) са q_0, и резултате саберемо, онда ћемо добити једначину

$$q_0\frac{d\mu_z}{dt} + n\lambda_z\frac{d\lambda_z}{dt} = 0;$$

она доводи до другог интеграла

(6) $$2q_0\mu_z + n\lambda_z^2 = \Gamma,$$

где је Γ произвољна константа интеграције.

Ако сад из (5) и (6) искључимо μ_z и одредимо ν_z^2, добићемо

$$\nu_z^2 = 1 - \lambda_z^2 - \left(\frac{\Gamma - n\,\lambda_z^2}{2\,q_0}\right)^2 = Q_4(\lambda_z),$$

где је $Q_4(\lambda_z)$ полином четвртог степена по λ_z.

Како сад једначину (2) можемо написати у облику

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = -q_0\sqrt{Q_4(\lambda_z)},$$

имамо елиптичку квадратуру за одређивање λ_z у функцији времена.

После тога за дефинитивно решење проблема треба извршити још једну квадратуру за одређивање последњег Ојлеровог угла у функцији времена.

ГЛАВА ПЕТА

Равно кретање чврстог тела

§ 5 · 1. Равно кретање чврстог тела

У кинематици чврстог тела (§ 2.312, III-1) било је дефинисано равно кретање чврстог тела. При таквом кретању три неколинеарне[1] тачке тела увек се налазе у истој равни непокретног простора. За динамичко проучавање таквог кретања чврстог тела треба да знамо и природу оног механизма који остварује такво неслободно кретање тела, које, као што знамо, има у овом случају само три степена слободе. Природа таквог механизма може бити врло разнолика. Материјални цилиндар са основом на непокретној равни или између две паралелне равни, плоча у равни, статив са три или више ногу на столу или на поду, — то су примери равног кретања тела са три степена слободе. Наведимо ону схему механизма равног кретања на коју се могу свести сви случајеви равног кретања чврстог тела. Наиме поново узмемо три неколинеарне тачке A_1, A_2, A_3 чврстог тела које су приморане да увек остану у истог непомичној равни. Такав механизам можемо замислити или као задржавајући кад ниједна од три тачке не може да напусти раван ни на једну страну од те равни или као незадржавајући кад тачке могу да оду са равни. Ако се зауставимо на главном случају, на случају задржавајућих идеалних веза, на тело може дејствовати у свакој од тачака A_1, A_2, A_3 реакција у правцу нормале на непокретну раван у једном или у супротном смеру.

---

[1] На страни 76, III погрешно је штампано „некомпланарне“.

Пошто се за време равног кретања тела савака тачка тела налази у истој непокретној равни, узимамо за раван Oxy непокретног триједра $Oxyz$ баш ону раван у којој се налази центар маса тела, тачка C. Тада је увек $z_C=0$. Са телом повежимо триједар $C\xi\eta\zeta$, при чему нека раван $C\xi\eta$ буде у равни Oxy. За координате тела можемо узети: координате x_C, y_C тачке C и угао θ између осе Ox и осе $C\xi$. Сталне координите тачака A_1, A_2, A_3 тела у односу на триједар $C\xi\eta\zeta$ означимо са (ξ_1, η_1, h), (ξ_2, η_2, h), (ξ_3, η_3, h). Приметимо да наша расуђивања неће изгубити своју суштину, ако тачке A_1, A_2, A_3 изаберемо у специјалним положајима, наиме са координатима у односу на триједар тела $C\xi\eta\zeta$: A_1 $(0, 0, h)$, A_2 $(1, 0, h)$, A_3 $(0, 1, h)$.

Основни задатак динамике равног кретања је у одређивању координата, рецимо, x_C, y_C, θ у функцији времена. Али, сем тога, треба да буду одређене и реакције у тачкама A_1, A_2, A_3, односно реакције при каквом другом начину остварења веза. Према томе и овај задатак у општем случају састоји се из чисто динамичког дела и из кинетостатичког дела. Решење другог дела може постати и неодређено, кад је тело везано за непокретну раван тачкама којих је више од три.

§ 5 · 2. Диференцијалне једначине равног кретања

Према законима количине кретања и момента количина кретања, примењеним на наш случај равног кретања, можемо написати ове две векторске једначине:

$$\dot{K}=\vec{F}+\vec{R}_1+\vec{R}_2+\vec{R}_3, \tag{1}$$

$$\dot{l}=\vec{M}+\vec{M}_1+\vec{M}_2+\vec{M}_3, \tag{2}$$

где смо моменте узели у односу на тачку C. Ознаке су очигледне.

Пројицирајмо сад чланове претходних једначина прво на правце оних оса за које одговарајуће пројекције реакција имају вредност нула. За осе Ox и Oy непокретног триједра Oxy из (1) имамо

$$mx_C''=F_x, \quad my_C''=F_y, \tag{3}$$

при чему су F_x, F_y координате резултанте $\vec{F}$ свих активних сила које дејствују на наше тело. Пошто су реакције наперене само у правцу Oz осе, оне не учествују у једначинама (3).

Из (2) за правац $C\zeta$ осе триједра $C\xi\eta\zeta$ имамо

$$J\theta'' = M_\zeta. \tag{4}$$

Пошто су реакције паралелне оси $C\zeta$, оне не дају момента око те осе. Сем тога, треба приметити да у трећој једначини система једначина (8) § 2.3, који одговара обртању неслободног чврстог тела, чланови са $\partial T/\partial p$ и $\partial T/\partial q$ испадају, пошто имају коефицијенте p и q који су у нашем случају једнаки нули.

Једначине (3) и (4) су диференцијалне једначине равног кретања нашег тела. Њихови интеграли после одређивања произвољних констаната, решавају проблем о кретању тела.

Ова једноставна теорија може бити протумачена на више примера који дају добар материјил за вежбања.

§ 5 · 21. Одређивање реакција у случају равног кретања

Поставимо сад задатак о одређивању реакција које дејствују на тело у тачкама A_1, A_2, A_3.

Жива сила чврстог тела за центар маса израчунава се из

$$2T = mv_C{}^2 + \omega^2 J_\omega^{(C)};$$

при томе је за покретне осе $C\xi\eta\zeta$

$$\omega^2 J_\omega^{(C)} = J_\xi^{(C)} p^2 + J_\eta^{(C)} q^2 + J_\zeta^{(C)} r^2 + 2\,\Pi_{\eta\zeta}^{(C)} qr + 2\,\Pi_{\zeta\xi}^{(C)} rp + 2\,\Pi_{\xi\eta}^{(C)} pq.$$

У нашем случају ($v_{C\zeta} = 0,\quad p = q = 0,\quad r = \theta'$) имамо

$$\frac{\partial T}{\partial v_{C\zeta}} = 0,\quad \frac{\partial T}{\partial p} = \Pi_{\zeta\xi}\theta',\quad \frac{\partial T}{\partial q} = \Pi_{\zeta\eta}\theta',\quad \frac{\partial T}{\partial r} = J_\zeta^{(C)} r = J\theta'.$$

Ако сад те вредности искористимо за трећу једначину система (7) и за прве две једначине система (8) § 2.3, долазимо до једначина

$$0 = F_\zeta + R_1 + R_2 + R_3,$$

$$\Pi_{\xi\zeta}\theta'' - \Pi_{\eta\zeta}\theta'^2 = M_\xi + \eta_1 R_1 + \eta_2 R_2 + \eta_3 R_3,$$

$$\Pi_{\eta\zeta}\theta'' + \Pi_{\xi\zeta}\theta'^2 = M_\eta - \xi_1 R_1 - \xi_2 R_2 - \xi_3 R_3.$$

Ове три једначине, линеарне по R_1, R_2, R_3 дају могућност одређивања ових реакција, у општем случају, кад је кретање тела познато.

Може се поставити питање: под дејством којих сила и под којим условима тело може вршити произвољно равно кретање као слободно тело, тј. са $R_1 = R_2 = R_3 = 0$? Како у произвољно кретање спада и мировање ($\theta' = \theta'' = 0$), претходне једначине захтевају да спољашње силе треба да задовољавају услове

$$F_\zeta = 0, \quad M_\xi = M_\eta = 0,$$

тј. силе могу дејствовати само у равни кретања. После тога остају још два услова

$$\Pi_{\xi\zeta}\,\theta'' - \Pi_{\eta\zeta}\,\theta'^2 = 0,$$

$$\Pi_{\eta\zeta}\,\theta'' + \Pi_{\xi\zeta}\,\theta'^2 = 0,$$

који треба да важе за произвољне вредности θ' и θ'', а то може да буде само ако је

$$\Pi_{\xi\zeta} = \Pi_{\eta\zeta} = 0;$$

другим речима, оса $C\zeta$ треба да буде главна централна оса инерције тела.

У категорију последњег питања спадају и друга питања кинетостатичког карактера, напр. питање: под којим условима тело може изводити равно кретање под утицајем две односно само једне реакције?

§ 5 · 3. Равно кретање са два и једним степеном слободе

У општем случају равног кретања тело има три степена слободе. Ако такво кретање ограничимо једном везом односно са две везе, тело ће имати два односно само један степен слободе. Као пример првог кретања може служити механизам, који једну тачку тела, напр. тачку A_1 претходног параграфа, води по датој кривој у равни Oxy. Тада за непокретну криву имамо везу

$$f(x_{A_1}, y_{A_1}) = 0.$$

За координате тела можемо узети, рецимо, дужину s на тој кривој, која одређује на њој положај тачке A_1, и угао θ са раније утврђеним значењем тог угла.

Важан је, нарочито у техници, у теорији механизама, случај равног кретања тела са једним степеном слободе. За време рада машине сваки део машине, сем појединих изузетних делова, као, напр., регулатора, креће се са једним степеном слободе. У тим машинама има пуно делова који врше равно кретање; према томе у свакој фабрици имамо примера равног кретања тела са једним степеном слободе.

У сваком конкретном примеру равног кретања са два или са једним степеном слободе лако је поставити диференцијалне једначине кретања тела, било на основу закона количине кретања и закона момента количина кретања, било према правилу састављања Лагранжевих диференцијалних једначина друге врсте. У техници су неки од конкретних примера од капиталне важности. У такве примере спада, напр., кретање укрсне глане, основног механичког елемента парне машине. Нећемо улазити у проучавање динамике тог елемента.

§ 5 · 4. Интеграл живе силе у случају равног кретања

Променимо закон живе силе на равно кретање тела.

Жива сила тела одређује се из једначине

$$2\,T = mv_C^2 + J_\zeta^{(C)}\,\omega^2 = m\,(v_C^2 + k^2\,\theta'^2),$$

где је k крак инерције тела у односу на централну осу $C\zeta$.

Елементаран рад спољашњих сила је

$$\Sigma\,(\vec{F}_i\,,\,\overrightarrow{ds_i}) = \Sigma\,(\vec{F}_i\,,\,\vec{v}_i)\,dt,$$

где је сума распрострта на све поједине силе које дејствују на тело.

Како са познатим ознакама

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + [\vec{\omega},\,\vec{\rho}_i]$$

имамо за рад збир

$$\Sigma\,(\vec{F}_i\,,\,\vec{v}_C)\,dt + \Sigma\,(\vec{F}_i\,[\vec{\omega},\,\vec{\rho}_i])\,dt = (\Sigma\,\vec{F}_i\,,\,\vec{v}_C)\,dt + (\Sigma\,[\vec{\rho}_i\,,\,\vec{F}_i]\,\vec{\omega})\,dt,$$

или дефинитивно

$$\Sigma\,(\vec{F}_i\,,\overrightarrow{ds_i}) = (\vec{F},\overrightarrow{ds_C}) + (\vec{M},\,\omega\,dt)\,,$$

где је $\vec{F}$ резултанта свих компонената спољашњих сила паралелних непокретној равни, а $\vec{M}$ момент тих компонената у односу на тачку C.

Као што знамо раван систем вектора (§ 1.7, III-1) може бити еквивалентан једном везаном вектору, спрегу и нули. У вези са тим претходни израз за елементаран рад може задржити: два члана, један члан и ниједан (кретање по инерцији).

Према претходним резултатима можемо закон живе силе изразити једначином

$$d\left[\frac{m}{2}(v_C^2+k^2\theta'^2)\right]=(\vec{F},\vec{ds_C})+(\vec{M},\vec{d\theta}),$$

где смо ставили $\vec{\omega}\,dt=\vec{d\theta}$.

Силу $\vec{F}$ и момент $\vec{M}$ за дате силе, које зависе само од положаја тела, треба сматрати као функције променљивих x_C, y_C, θ. Под тим условом закон живе силе изражава се једначином

$$d\left\{\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx_C}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_C}{dt}\right)^2+k^2\theta'^2\right]\right\}=Xdx_C+Ydy_C+Md\theta.$$

Ако коефицијенти код диференцијала са десне стране задовољавају услове

$$\frac{\partial X}{\partial y_C}-\frac{\partial Y}{\partial x_C}=0,\quad \frac{\partial Y}{\partial \theta}-\frac{\partial M}{\partial y_C}=0,\quad \frac{\partial M}{\partial x_C}-\frac{\partial X}{\partial \theta}=0,$$

та десна страна претставља тотални диференцијал функције $U(x_C, y_C, \theta)$, функције сила. Тада је кретање тела конзервативно и постоји интеграл

$$m(v_C^2+k^2\theta'^2)=2U(x_C, y_C, \theta)+2h,$$

где је h произвољна константа.

Нарочито је важан случај конзервативног равног кретања са једним степеном слободе. Ако независну координату тог тела означимо са σ, жива сила у општем случају је

$$T=S(\sigma)\sigma'^2,$$

где је $S(\sigma)$ инерциони коефицијент нашег тела изражен као функција координате положаја σ. Пошто се елементаран рад спољашњих сила изражава овако

$$Q(\sigma)\,d\sigma\,,$$

где је $Q(\sigma)$ генералисана сила која одговара координати σ, тај рад увек претставља тотални диференцијал функције

$$U(\sigma)=\int Q(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Према томе имамо интеграл живе силе

$$S(\sigma)\,\sigma'^2=U(\sigma)+h\,.$$

Тај интеграл одређује могућност потпуног одређивања кретања тела помоћу квадратуре

$$t-t_0=\pm\int_{\sigma_0}^{\sigma}\sqrt{\frac{S(\sigma)}{U(\sigma)+h}}\,d\sigma\,.$$

Треба навести овде једну практичну примедбу: за решавање задатака такве врсте уопште није потребно писати одговарајућу диференцијалну једначину кретања, јер интеграл живе силе и наведена квадратура потпуно решавају задатак о кретању тела.] Само за одређивање реакција, а оне се одређују са пет скалара, треба узети у обзир пет „кинетостатичких“ једначина проблема.

ГЛАВА ШЕСТА

Гироскоп

§ 6 · 1. Гироскоп

Као што знамо, при теориском проучавању разноврсних кретања материјалних система посматрамо три основна кретања сваког система: 1. кретање центра маса система, 2. обртање око тог центра система као непромењивог, и 3. кретање у вези са променом распореда маса у самом систему као промењивом систему. Проучавање последњег кретања не спада у наш задатак.

Као основна елементарна слика првог кретања, кретања центра маса односно транслаторног кретања чврстог тела, јавља се равномерно праволиниско кретање. Проучавање сваког другог кретања тог центра као носиоца материјалног система заснива се на проучавању отступања од тог основног елементарног кретања, прво у једноставним облицима а затим у све компликованијим, и и то у вези са стварно постојећим кретањима у природи. Закон по коме се врше та оступања је закон количине кретања

$$\dot{\vec{K}} = \vec{F},$$

где је $\vec{K} = m\vec{v}_C$ количина кретања система и $\vec{F}$ резултанта свих спољашних сила које дејствују на систем.

Основна елементарна слика другог кретања, обртања система као чврстог тела око центра маса, а у општем случају око било које друге тачке, јесте равномерно обртање тела око непомичне осе. Раније смо видели да слободно чврсто тело, кад на њега не дејствују никакве спољашне силе, може вршити такво обртање, при чему као непомична оса служи главна централна оса инерције тела. Таква оса може бити и оса симетрије у динамичком смислу чврстог тела.

Да такво елементарно кретање симетричног тела буде што изразитије, то значи да се не мења под дејством релативно малих споредних утицаја (отпор ваздуха и др.) и да јасно испољава битне особине обртног кретања, угаона брзина треба да буде велика и треба да буде велики момент инерције тела око осе обртања, краће речено, да обртање треба да има велики момент количина кретања

$$\vec{I}=J\vec{\omega},$$

где је: $\vec{I}$ момент количина кретања, J момент инерције тела и $\vec{\omega}$ угаона брзина обртања тела.

И овде се проучавање сваког другог обртања заснива на проучавању отступања обртања од наведеног основног обртања. Закон по коме се врше та отступања је закон момента количина кретања, који у својој најпростијој форми за непокретни пол гласи

$$\dot{I}=\vec{M},$$

где тачка поново означава извод по времену, а $\vec{M}$ момент свих спољашњих сила око истог непокретног пола.

Тело које се обрће око своје динамичке осе симетрије са великим моментом количина кретања назива се *гироскоп*. Ту реч (од грчких речи *γῆρος* — круг, обртање и *σϰοπέω* — гледам) први пут је употребио 1852 године Фуко у свом саопштењу Парискoj академији наука, кад је помоћу обртања тела око осе приказао једну методу за непосредни лабораториски доказ Земљиног обртања. Сад се под гироскопом разуме динамички симетрично тело које се обрће око своје осе (један степен слободе) са великим моментом количина кретања, али може имати још један, два, три до пет допунских степена слободе. Теориски и практични значај гироскопског кретања је у третирању и у применама закона момента количина кретања. Тај закон тумачен на гироскопском телу показује врло важне и карактеристичне особине обртања материјалног система. Специјално за гироскоп те особине се називају *гироскопске особине*. Гироскопске особине су толико карактеристичне и толико важне у савременим применама да се њихово проучавање издвојило у нарочиту *теорију гироскопа*. Ако је горенаведени момтнт $J\vec{\omega}$ толико велики да су према њему други утицаји на обртање гироскопа мали, онда се ствара, математички речено, *приближна теорија гироскопа* која знатно упрошћава општу теорију третирања гироскопских појава.

Материјални систем може бити састављен од два дела: основног, који означимо са A, и гироскопа, који означимо са $Г$. Ради примера нека основни део буде лађа, аероплан, бицикл, кола на једној шини или ма који други материјални систем са којим хоћемо да вежемо гироскоп. Означимо симболички кретање тог система у случају кад тело гироскопа $Г$ остаје непомично у односу на A са $A_0+Г_0$. Ако сад гироскоп почне да се креће у односу на A са великом угаоном брзином, систем ће добити ново кретање које означимо са $A+Г$. Промена $A-A_0$ коју изазива допунско кретање гироскопа у кретању основног дела може бити и врло велика и врло важна по својој природи. Јасно је да та промена изазива промену и у кретању гироскопа упоредно са оним кретањам које би гироскоп имао кад би основни део система био непокретан. У општем случају дејство гироскопа на систем A назива се *гироскопски ефект*. На тим ефектима се заснивају стабилизатори, амортизери штетних кретања и читав низ других инсталација и апарата. Проучавање гироскопских ефеката исто тако спада у теорију гироскопа. У овој глави ћемо се зауставити само на елементима теорије гироскопа. Сви ти елементи су непосредна примена добро познатог нам закона момента количина кретања.

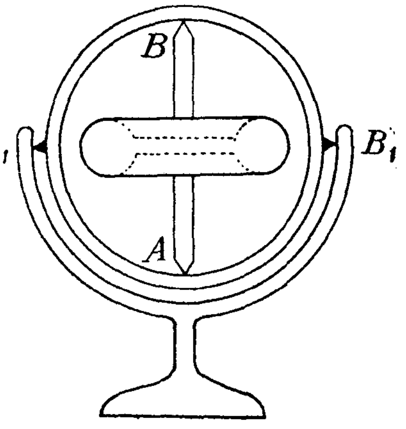
§ 6 · 2. Гироскоп са два степена слободе

Узмимо обртно чврсто тело у облику, рецимо, точка са нарочито повећаним моментом инерције за осу точка (сл. 8). Нека се крајеви A и B те осе, који се налазе на истом растојању од тежишта C точка, ослањају о унутрашњу страну прстена са центром у C. Тај прстен има централну осу, управну на осу AB, са крајевима A_1 и B_1 ван прстена, који се ослањају о непокретне тачке статива N. Према томе оса A_1B_1 има сталан положај у непокретном простору. Прстен се може обртати око те осе коју, ради конкретности, узимамо у хоризонталном положају. Точак се може сматрати као тело гироскопа. Његов положај можемо одредити помоћу 1. угла θ између одређене равни точка и равни прстена и

2. угла φ између равни прстена и сталне равни у простору која пролази кроз праву A_1B_1. Ако точку саопштимо велику угаону брзину око осе AB наш модел остварује гироскоп са два степена слободе. Оса AB се назива *гироскопска оса.*

Проучимо кретање таквог гироскопа. Зато употребимо прво Лагранжеве једначине друге врсте. Како се углови θ и φ могу сматрати као одговарајући Ојлерови углови, према (2) § 1.42 живу силу одређујемо једначином

$$2\,T = J\,\theta'^2 + J_e\,\varphi'^2,$$



Сл. 8

где су: J момент инерције тела око AB осе, а J_e момент инерције око правца у екваторској равни, тј. равни управној на AB кроз тачку C. Лангранжеве једначине добивају облик

$$J\theta'' = Q_\theta = M_\theta\,,$$

$$J_e\varphi'' = Q_\varphi = M_\varphi\,,$$

где генералисане силе Q_θ и Q_φ имају вредности момената свих спољашњих сила које дејствују на тело око AB односно око $A_1\,B_1$ осе.

Ако спољашње силе не дају моменте, тј. $Q_\theta = Q_\varphi = 0$, први интеграли претходних једначина дају:

$$\theta' = \mathrm{const} = \theta_0', \quad \varphi = \mathrm{const} = \varphi_0'.$$

a. Ако је при томе $\varphi_0' = 0$, угао φ остаје сталан, те оса гироскопа задржава свој положај у простору. Тај факт се у елементарном излагању теорије гироскопа наводи у облику *принципа перманенције*: угаона брзина тела задржава не само свој правац већ и свој интензитет.

b. Ако је у почетку кретања $\varphi_0' \neq 0$, тело задржава ту угаону брзину и равномерно се обрће и око осе $A_1\,B_1$, разуме се, под условом да спољашње силе не дају моменте и да је статив непокретан.

Да видимо још какве реакције дејствују у тачкама A, B, A_1, B_1.

Означимо силе реакција које дејствују на тело у наведеним тачкама са $\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{R}_{A_1}, \vec{R}_{B_2}$. Како центар инерције система остаје непокретан, из закона количине кретања за тешко тело следује векторска једначина

$$(1) \qquad \vec{R}_A+\vec{R}_B+\vec{R}_{A_1}+\vec{R}_{B_1}+m\vec{g} = 0,$$

где је m маса тела и $\vec{g}$ убрзање силе теже.

С друге стране, у случају *a.*, кад је $\varphi_0'=0$, момент количина кретања остаје непроменљив, и према томе момент свих сила реакција око тачке C треба да буде једнак нули, тј.

$$(2) \qquad [\vec{r}_A, \vec{R}_A] + [\vec{r}_B, \vec{R}_B] + [\vec{r}_{A_1}, \vec{R}_{A_1}] + [\vec{r}_{B_1}, \vec{R}_{B_1}] = 0,$$

где су ознаке очигледне; при томе је

$$\vec{r}_A+\vec{r}_B=0, \quad \vec{r}_{A_1}+\vec{r}_{B_1}=0.$$

Једначине (1) и (2) показују да је проблем одређивања реакција у нашем случају динамички неодређен: из две векторске једначине треба одредити четири вектора. Тај проблем постаје одређен, ако поставимо допунске услове: 1. де оса AB буде слободна и 2. да у тачкама A_1 и B_1 реакције могу дејствовати само вертикално, тј. претпоставимо

$$\vec{R}_A=\vec{R}_B=0,$$

$$\vec{R}_{A_1}=k_1\vec{g}, \quad \vec{R}_{B_1}=k_2\vec{g},$$

где су k_1 и k_2 неодређени множитељи. Под тим условима једначине (1) и (2) добивају облик

$$(k_1+k_2+m)\vec{g}=0,$$

$$(k_1-k_2)[\vec{r}_{A_1}, \vec{g}] = 0.$$

Како вектори $\vec{r}_A$ и $\vec{g}$ нису колинеарни, из претходних једначина имамо $k_1=k_2=-\frac{1}{2}m$; према томе дефинитивно реакције имају вредности

$$\vec{R}_A=\vec{R}_B=0, \quad \vec{R}_{A_1}=\vec{R}_{B_1}=-\frac{1}{2}m\vec{g}.$$

Дакле, реакције дејствују само у тачкама A_1 и B_1, и то са истим интензитетом, те уравнотежују тежину гироскопа.

Сад пређимо на случај *b.*, кад оса гироскопа мења свој положај у простору ($\varphi' = \varphi_0'$).

У овом случају момент количина кретања има облик

$$\vec{l} = J\theta'\vec{k} + J_e\varphi'\vec{n},$$

где је $\vec{k}$ орт осе AB, а $\vec{n}$ орт A_1B_1. Како су у нашем случају θ' и φ' константни скалари, а $\vec{n}$ константан вектор, извод вектора $\vec{l}$ по времену има вредност

$$\dot{l} = J\theta'\dot{k},$$

при чему је, према познатом правилу о изводу при ротацији [(3) § 4.2, III – 1],

$$\dot{k} = \varphi'[\vec{n}, \vec{k}] = \varphi'\vec{\sigma},$$

где је $\vec{\sigma}$ орт нормалан на раван прстена, која садржи ортове $\vec{n}$ и $\vec{k}$. На тај начин је

$$\dot{l} = J\theta'\varphi'\vec{\sigma}.$$

Како је

$$\dot{l} = \vec{M},$$

где је $\vec{M}$ момент свих реакција око тачке C, можемо написати

$$J\theta'\varphi'\vec{\sigma} = \vec{M}. \tag{3}$$

Ова једначина потврђује такозвани *принцип паралелизма*: померање краја гироскопске осе је паралелно моменту сила које дејствују на гироскоп. Јасно је да је тај принцип непосредни закључак из закона момента количина кретања у примени на наш случај.

Сходно (1) и (2) претходног случаја сада имамо

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_{A_1} + \vec{R}_{B_1} + m\vec{g} = 0,$$

$$[\vec{r}_A, \vec{R}_A] + [\vec{r}_B, \vec{R}_B] + [\vec{r}_{A_1}, \vec{R}_{A_1}] + [\vec{r}_{B_1}, \vec{R}_{B_1}] = J\theta'\varphi'\vec{\sigma}.$$

Поново имамо динамички неодређен проблем одређивања реакција.

Можемо опет претпоставити да у тачкама A и B реакције не дејствују. Тада имамо ове две једначине

$$\vec{R}_{A_1}+\vec{R}_{B_1}+m\vec{g}=0,$$

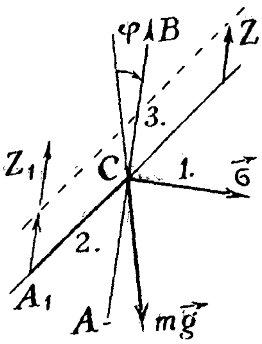
$$[\vec{r}_{A_1}, \vec{R}_{A_1}-\vec{R}_{B_1}]=J\theta'\varphi'\vec{\sigma}.$$

За одређивање реакција $\vec{R}_{A_1}$ и $\vec{R}_{B_1}$, које сад једноставније означимо са $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$, саставимо одговарајуће скаларне једначине у односу на ортогонални триједар (сл. 9) начињен од оса ових праваца и смерова: 1. вектора $\vec{\sigma}$, 2. вектора $\overrightarrow{CA_1}$ и 3. вектора $\overrightarrow{CB}$. Ако координате вектора у односу на уведене осе означимо са

$$\vec{R}_1(X_1, Y_1, Z_1), \quad \vec{R}_2(X_2, Y_2, Z_2)$$

и дужину CA_1 са a, тражене скаларне једначине узимају облик:

$$\begin{aligned}
&X_1+X_2+mg\sin\varphi=0,\\
&Y_1+Y_2=0,\\
&Z_1+Z_2-mg\cos\varphi=0;\\
&a(Z_1-Z_2)J\theta'\varphi',\\
&\quad 0=0,\\
&-a(X_1-X_2)=0.
\end{aligned}$$



Сл. 9

Ове једначине показују да реакције дају: 1. резултанту са координатама X_1+X_2, 0, Z_1+Z_2 која уравнотежује силу теже $\overrightarrow{mg}$, 2. момент са правцем и смером вектора $\vec{\sigma}$ и са интензитетом

$$(3^*) \qquad M=aF=J\theta'\varphi',$$

где је $F=Z_1-Z_2$.

Једна од координата Y_1, Y_2 остаје динамички неодређена; њихов збир треба да буде једнак нули. Можемо претпоставити да су

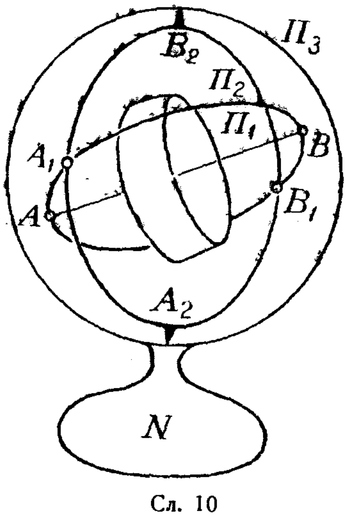
$$Y_1=Y_2=0.$$

Једначина (3), односно (3*), основна је у теорији гироскопа.

У елементарној теорији гироскопа изведени резултат стоји у вези са такозваним *гироскопским парадоксом*. Померање у правцу вектора $\vec{\sigma}$ краја B гироскопске осе не изазива *сила* у правцу тог померања, већ спрег са *моментом* паралелним померању.

Моменту $\vec{M}$ реакција које дејствују на гироскоп одговара момент $(-\vec{M})$ сила које дејствују на непокретни статив гироскопа од стране маса гироскопа у кретању. Ако је статив непокретан, дејство тог момента не може да се прикаже у облику неког кретања; оно се изражава само у разлици притисака гироскопа у лежиштима у крајевима осе $A_1 B_1$. И само се у томе испољава гироскопски ефект дејства гироскопа са два степена слободе на спољашњи материјални систем.

§ 6 · 3. Гироскоп са три степена слободе. Регуларна прецесија.



Сл. 10

У гироскопу са два степена слободе имали смо динамички симетрично тело са осом симетрије AB, која служи као оса обртања гироскопског тела. Та оса својим крајевима A и B била је утврђена у простору Π_1 (сл. 10) са осом $A_1 B_1$ нормалном на осу AB. Додајмо још један покретан прстен Π_2 у којем је утврђена оса $A_1 B_1$ прстена Π_1, а сам допунски прстен Π_2 има осу $A_2 B_2$, управну на осу $A_1 B_1$, и нека је оса $A_2 B_2$ утврђена својим крајевима у непокретном стативу, рецимо, помоћу непокретног прстена Π_3 учвршћеног у основи N статива. Сва три прстена можемо саставити у једној вертикалној равни. Ако при томе осу $A_2 B_2$ наместимо вертикално, оса $A_1 B_1$ биће хоризонтална, а оса AB поново вертикална. Произвољан положај гироскопског тела одређује се помоћу три Ојлерова угла: 1. угла ψ између прстенова Π_3 и Π_2, 2. угла φ између прстенова Π_2 и Π_1 и 3. угла θ између прстена Π_1 и сталне равни гироскопског тела која пролази кроз осу *AB*.

Жива сила таквог тела, према (2) § 1.42, одређује се из једначине

$$2\,T = J_e\,\varphi'^2 + (J_e \sin^2\varphi + J\cos^2\varphi)\,\psi'^2 + J\theta'^2 + 2\,J\cos\varphi.\,\theta'\,\psi',$$

где су, као и раније, J момент инерције тела око *AB* осе, а J_e око једне од екваторијалних оса. Према томе генералисани импулси имају вредности:

$$\frac{\partial T}{\partial\psi'} = (J_e \sin^2\varphi + J\cos^2\varphi)\,\psi' + J\cos\varphi\cdot\theta',$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi'} = J_e\,\varphi',$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = J\,(\theta' + \psi'\cos\varphi),$$

а од извода по угловима само један је различит од нуле:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = (J_e - J)\,\psi'^2 \sin\varphi\cos\varphi - J\,\theta'\,\psi'\sin\varphi.$$

С тим вредностима извода Лагранжеве једначине гласе

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial\psi'} = Q_\psi,\qquad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial\varphi'} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi,\qquad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial\theta'} = Q_\theta.$$

У односу на силе, које дејствују на гироскоп, ограничимо се само на два случаја: *a.* кад на тело не дејствују силе (Ојлеров случај) и *b.* кад дејствује само сила теже $\overrightarrow{mg}$ сталне векторске вредности са нападном тачком на гироскопској осовини на растојању ζ_C од центра гироскопа (Лагранжев случај).

a. Пошто је у Ојлеровом случају

$$Q_\psi = Q_\varphi = Q_\theta = 0,$$

једначине (1) добивају облик

$$\frac{d}{dt}\,[(J_e \sin^2\varphi + J\cos^2\varphi)\,\psi' + J\cos\varphi\cdot\theta'] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\,J_e\,\varphi' - (J_e - J)\,\psi'^2 \sin\varphi\cos\varphi + J\theta'\psi'\sin\varphi = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\,J\,(\theta' + \psi'\cos\varphi) = 0.$$

У § 4.24, полазећи непосредно од Ојлерових једначина, дали смо решење овог проблема о кретању симетричног тела у облику регуларне прецесије. Помоћу Ојлерових углова ово решење изражава се овако:

$$\varphi' = 0, \quad \theta' = \theta_0', \quad \psi' = \psi_0',$$
$$\varphi = \varphi_0, \quad \theta = \theta_0 + \theta_0' t, \quad \psi = \psi_0 + \psi_0' t,$$

што се лако потврђује супституцијом у претходне једначине. При томе се утврђује да константе φ_0, ψ_0', θ_0' морају задовољавати услов

$$[(J_e - J)\psi_0' \cos\varphi_0 - J\theta_0']\,\psi_0' \sin\varphi_0 = 0,$$

који се распада у два тривијална услова: 1. $\varphi_0' = 0$, 2. $\varphi_0 = 0$ и у 3. услов у облику

$$(J_e - J)\psi_0' \cos\varphi_0 = J\theta_0'. \tag{2}$$

Тај услов може се извести и из непосредног геометриског посматрања, ако упоредимо вредности вектора $\vec{G}$, момента количина кретања, одређених помоћу две њихове пројекције: једне на правац осе симетрије гироскопског тела, која са вектором $\vec{G}$ чини угао φ_0, и друге на правац у екваторијалној равни.

Једначина (2) је врло корисна и за анализу знака величина θ_0', ψ_0', $\cos\varphi_0$, $J_e - J$. Приметимо да у случају кад су θ_0' и ψ_0', рецимо, позитивни, знак $\cos\varphi_0$ је исти са знаком разлике $J_e - J$, а она је за издужени обртни елипсоид позитивна, а за спљоштени негативна (упореди слике 7,*a* и 7,*b*).

b. За Лагранжев случај, једначине (1) са

$$Q_\psi = 0, \quad Q_\varphi = mg\zeta_C \sin\varphi = EJ\sin\varphi, \quad Q_\theta = 0,$$

где је $E = mg\zeta_C/J$, имају две цикличне координате ψ и θ; овим координатама одговарају два интеграла, које можемо написати овако:

$$\theta' u + \psi'[(1 - e)u^2 - e] = \Gamma, \tag{3}$$

$$\theta' + \psi' u = r = r_0, \tag{4}$$

где су: $e = J_e/J$, $u = \cos\varphi$, а Γ и r_0 две произвољне константе интеграције.

Трећа једначина има облик

(5) $$J_e\,\varphi'' - [(J_e - J)\cos\varphi\cdot\psi' - J\theta']\,\psi'\sin\varphi = EJ\sin\varphi\,.$$

Потражимо сад партикуларно решење једначина (3), (4) и (5) у облику регуларне прецесије и одредимо услове под којима је она могућа, ако постоји.

Ако ставимо $\varphi''=0$, из (5) имамо

(6) $$[\theta' + (1-e)\,u.\,\psi']\,\psi' - E = 0,$$

при чему смо искључили случај $\sin\varphi = 0$, кад је оса $O\zeta$ вертикална.

Решимо сад једначине (3) и (4) по θ' и ψ'

(7) $$\theta' = \frac{r[(1-e)\,u^2 + e] - \Gamma\,u,}{e\,(1-u^2)}$$

(8) $$\psi' = \frac{\Gamma - ru}{e\,(1-u^2)}\,,$$

где је $1-u^2 = \sin^2\varphi \neq 0$, и ставимо те вредности у једначину (4) Добићемо полином по u и једначину:

(9) $$P\,(u) = (r - \Gamma\,u)\;(\Gamma - ru) - Ee\,(1-u^2)^2 = 0.$$

Како је за $u = +1$

$$P\,(+1) = -(r - \Gamma)^2 < 0,$$

а за $u = -1$

$$P\,(-1) = (r + \Gamma)^2 > 0,$$

закључујемо да у границама од -1 до $+1$ постоји корен наше једначине који ћемо означити са $u_0 = \cos\varphi_0$. За ту вредност угла φ_0 величине θ' и ψ' узимају одговарајуће сталне вредности и наше тело врши кретање регуларне прецесије. Из детаљнијег проучавања констаната одређује се карактер те прецесије. Једначина (9) даје услов могућности прецесионог кретања у овом партикуларном решењу Лагранжевог случаја.

§ 6 · 31. Псеудо-регуларна прецесија

Потражимо сад решење једначина (3), (4), (5) претходног параграфа под претпоставкама:

1. Стална брзина r има велику вредност.
2. Угао нутације φ тражимо у облику

$$\varphi = \varphi_0 + \mu,$$

где је φ_0 константни угао и μ је мала величина, и то таквог реда да у приближном рачуну узимамо

$$\mu \approx 0, \quad r\mu \approx 0, \quad r^2\mu \neq 0.$$

3. У почетку кретања, тј. за $\varphi = \varphi_0$, брзина $\psi_0' = 0$.

Под таквим условима из (8) § 6.3 имамо

$$(1) \quad \psi' = \frac{\Gamma - ru}{e(1-u^2)} = f(u) = f(u_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_0 \mu = \frac{k\mu}{\sin\varphi_0},$$

јер је по услову $f(u_0) = \psi_0' = 0$; са k смо означили r/e.

После тога из (4) § 6.3 изводимо

$$\theta' = r - k\mu \operatorname{cotg}\varphi_0,$$

а из једначине (5) истог параграфа, после кратког рачуна, добивамо једначину

$$\mu'' + k^2\mu = F,$$

где је $F = \dfrac{E}{e}\sin\varphi_0$.

Добивена једначина има ово опште решење:

$$\mu = \frac{F}{k^2} + C_1\cos kt + C_2\sin kt,$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе. Ако претпоставимо да за $t_0 = 0$ величина μ има максималну вредност μ_0, константа C_2 има вредност нулу и према томе је

$$C_1 = \mu_0 - \frac{F}{k^2}.$$

Са том константом дефинитивно решење за μ имамо у облику

$$\mu = \frac{F}{k^2} + \left(\mu_0 - \frac{F}{k^2}\right)\cos kt,$$

који показује мала хармониска отступања угла нутације за време кретања. За одређивање прецесије према (1) вршимо квадратуру, која даје

$$\psi = \frac{k}{\sin\varphi_0}\int_0^t \mu\,dt = \frac{1}{\sin\varphi_0}\left[\frac{F}{k}\,t + \left(\mu_0 - \frac{F}{k^2}\right)\sin kt\right].$$

Како $\frac{1}{\sin\varphi_0} F/k = E/r$ за велико r има малу вредност, угао прецесије се мења прогресивно врло споро у току времена, али пропорционално времену.

Добивено кретање зове се *псеудо-регуларна прецесија.*

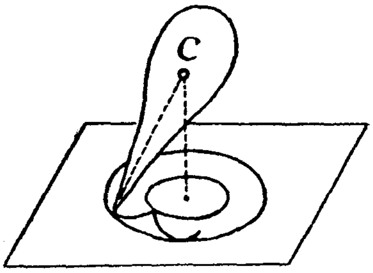
Како је у посматраној апроксимацији $\theta' = r$, угао θ се мења такође пропорционално времену.

За време кретања свака тачка осе симетрије тела описује на сфери полупречника једнаког отстојању те тачке од непокретне тачке једну сферну криву сличну циклоиди (растегнутој, спљоштеној или обичној).

§ 6·4. Гироскоп са више степена слободе

Анализирали смо кретање гироскопског тела са непомичном тачком. Ако та тачка може да се креће по некој линији, гироскоп има четири степена слободе. Ако ова тачка може да се креће по некој површини, гироскоп има пет степена слободе. Потпуно слободно тело, нарочито кад има велику угаону брзину, може се сматрати као гироскоп са шест степена слободе.

Ради проучавања гироскопа са више степена слободе, навешћемо један пример гироскопа са пет степена слободе који проучава више писаца.



Слика 11

Нека је гироскопско тело тешко чврсто тело (чигра) са динамичком осом симетрије која се завршава тачком A, оштрицом на слици, и нека је та тачка приморана да се налази на хоризонталној равни (сл. 11). Такво тело има пет степена слободе. Овај пример неслободног материјалног система је згодан и због тога што је при решавању проблема згодно узети диференцијалне једначине кретања неслободног материјалног система у облику (23) § 3.3,II за произвољне координате, али кад између тих координата постоје и коначне везе.

За координате тела узимамо: координате x_C, y_C, z_C, центра C маса тела у односу на координатни систем $Oxyz$ са осама Ox и Oy у хоризонталној равни и са Oz осом вертикално навише, Ојлерове углове φ, ψ, θ, при чему је $A\zeta$ оса динамичке симетрије тела. Ове координате нису све независне. Ако са l означимо растојање AC, између координате z_C и угла нутације φ постоји незадржавајућа веза

$$z_C - l\cos\varphi \geqslant 0.$$

Жива сила тела одређује се из једначине

$$2T = m\,(x_C'^2 + y_C'^2 + z_C'^2) + J_e\,\varphi'^2 + (J_e\sin^2\varphi + J\cos^2\varphi)\,\psi'^2 + \\ + J\theta'^2 + 2J\cos\varphi\cdot\theta'\,\psi'.$$

Функција силе је

$$U = -mg\,z_C.$$

Даље пишемо, ~~према~~ (23) § 3.3,II, диференцијалне једначине кретања

$$m x_C'' = 0, \qquad m y_C'' = 0, \qquad m z_C'' = -mg + \lambda,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\varphi'} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \lambda\,l\sin\varphi, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\psi'} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\theta'} = 0,$$

где је λ множитељ везе.

Пре свега видимо да горњи систем једначина има ове очевидне интеграле:

(1) $$x_C = C_1 t + C_2,$$

(2) $$y_C = C_3 t + C_4,$$

(3) $$\frac{\partial T}{\partial\psi'} = (J_e\sin^2\varphi + J\cos^2\varphi)\,\psi' + J\cos\varphi\cdot\theta' = C_5,$$

(4) $$\frac{\partial T}{\partial\theta'} = J(\theta' + \psi'\cos\varphi) = Jr = C_6.$$

Сем тога имамо интеграл сиве силе

(5) $$T = U + h,$$

где су h, C_1, $C_2, \ldots, C_6$, произвољне константе интеграције.

Покажимо пре свега да је за довршење решавања овог проблема у општем случају довољно извршити само квадратуре.

У ствари, из једначине (3), коју можемо написати у облику

$$(3^*) \qquad J_e \psi' \sin^2\varphi + Jr \cos\varphi = C_5,$$

можемо одредити ψ' у функцији угла φ.

Узимајући даље у обзир да је $z_c' = -l\varphi' \sin\varphi$, интеграл (5) изражавамо овако

$$(5^*) \qquad m\,(C_1^2 + C_3^2) + (ml^3 \sin^2\varphi + J_e)\,\varphi'^2 +$$

$$+ J_e \sin^2\varphi . \psi'^2 + Jr^2 = -2\,mgl \cos\varphi + 2\,h;$$

из ове једначине можемо закључити, после смене ψ' из (3*), да је φ'^2 функција самог угла φ, а то доводи до одговарајуће квадратуре за одређивање угла φ у функцији времена. После тога једначина (3*) даје квадратуру за одређивање угла ψ, а једначина (4) за одређивање угла θ.

Пошто је наведено решење компликованог карактера, зауставимо се ради конкретности на једном специјалном решењу.

Нека су у почетку кретања за $t_0 = 0$ дате почетне вредности

$$(x_C')_0 = 0, \quad (y_C')_0 = 0, \quad (z_C')_0 = 0,$$

$$\varphi_0' = 0, \quad \psi_0' = 0, \quad \theta_0' \neq 0,$$

које су у сагласности са једначином везе.

Са таквим почетним условима интеграли (1), (2), (3*), (4), (5*) имају облик:

$$(1') \qquad x_C = C_2,$$

$$(2') \qquad y_C = C_4,$$

$$(3') \qquad J_e \psi' \sin^2\varphi = Jr\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi),$$

$$(4') \qquad J\,(\theta' + \psi' \cos\varphi) = Jr = J\theta_0',$$

$$(5') \qquad (ml^2 \sin^2\varphi + J_e)\,\varphi'^2 + J_e \sin^2\varphi \cdot \psi'^2 = 2mgl\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi).$$

Елиминисање ψ' из једначина (3') и (5') доводи до једначине

$$(5'') \qquad J_e \sin^2\varphi \cdot (ml^2 \sin^2\varphi + J_e)\,\varphi'^2 =$$

$$= (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,[2mgl\,J_e \sin^2\varphi - J^2 r^2 (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)],$$

која омогућује квадратуру за одређивање угла φ.

Протумачимо добивене резултате.

Једначине (1′) и (2′) тврде да се тачка C увек налази на истој вертикали; ову можемо узети за z осу, и тада је

$$x_C = y_C = 0.$$

Из једначине (5″) следује да разлика $\cos\varphi_0 - \cos\varphi$ не може бити негативна; јер кад би она била негативна, цела десна страна би такође била негативна, а то је немогуће зато што лева страна није негативна. Према томе је $\cos\varphi_0 - \cos\varphi \geqslant 0$ и значи $\varphi \geqslant \varphi_0$, али при томе угао φ не може бити већи од π, јер за $\varphi = \pi$ десна страна једначине (5) поново узима негативну вредност

$$-J^2 r^2 (1 + \cos\varphi_0)^2 .$$

Одавде следује да се угао φ мења у границама $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 < \pi$, а тачка A се налази између два концентрична круга полупречника $\sin\varphi_0$ и $l \sin\varphi_1$. Тачка C осцилује на вертикали између две висине: $z_0 = l\cos\varphi_0$ и $z_1 = l\cos\varphi_1$, при чему је $z_0 \geqslant z_1$.

Из једначине (3′) следује да угао ψ не може опадати. Тај угао или расте кад је $\varphi \neq \varphi_0$ или се зауставља кад тачка A долази на мањи круг. Ови положаји тачке A одговарају повратним тачкама трајекторије те тачке у хоризонталној равни.

ГЛАВА СЕДМА

Статика чврстог тела

§ 7·0. Излагање статике чврстог тела

Статика уопште, па и статика чврстог тела, обично се излаже у почетку механике. Такво излагање се изводи, нарочито у вези са техничким образовањем, углавном из ових практичних разлога: 1. у тим излагањима се статика чврстог тела састоји упола из теорије вектора, која се тек у последње време појављује као самосталан претходни предмет који укључује и теорију везаних вектора, толико важну за статику чврстог тела; 2. претходно излагање кинематике и динамике захтева знање инфинитезималног рачуна; тог знања читаоци у почетку својих студија могу још немати. 3. потреба знања статике се појављује на првим корацима практичног образовања; статика служи као основа и многих графичких радова, за које је потребно више времена. Међутим, тамо где се механика сматра као теориска дисциплина сви ови разлози губе своју вредност, јер је 1. теорија вектора, потребна и савременој анализи и геометрији, постала општим претходним предметом; 2. изучавање механике почиње тада кад су већ познате основе инфинитезималног рачуна; 3. систем студија није оптерећен графичким радовима на бази механике. Према томе, статика се може у систему механике, као научне дисциплине, ставити на своје природно место, на место специјалног случаја динамике. Са логичког гледишта је врло важно да појам силе буде први пут уведен у динамици, и тада целокупна концепција механике добива свој правилни логички основ и свој природни рационални развитак. При томе се статика, као први део механике, из једног опширног предмета претвара у релативно кратке главе одговарајућих делова механике, механике тачке, система и чврстог тела. Таква узастопност излагања статике највише растерећује излагање последњег дела статике, статику чврстог тела.

§ 7 · 1. Услови равнотеже чврстог тела

Као што смо видели (§ 2·1), закон количине кретања и закон момента количина кретања у примени на чврсто тело дају могућност постављања система диференцијалних једначина кретања тог тела. Интеграција тог система с обзиром на почетне услове решава питање о кретању тела под утицајем датих сила како у случају слободног тако и у случају неслободног чврстог тела ако су дате везе. Пошто је мировање тела само специјално кинематичко стање тела, наведени закони могу бити база проучавања и статике чврстог тела.

Заиста, из поменута два закона

$$\dot{K} = \vec{F} + \vec{R} = \vec{\Phi},$$

$$\dot{l} = \vec{M} + \vec{L} = \vec{\mathfrak{M}},$$

где су употребљене ознаке из §§ 2.1 и 2.11, а у њима је изостављена, ради краткоће, ознака непокретног пола за моменте, следују два закључка:

1. Пошто је за све време трајног мировања, кад су брзине свих тачака тела једнаке нули, $\vec{K} = 0$ и $\vec{l} = 0$, морају у исто време бити испуњени услови

$$\text{(I)} \qquad \vec{F} + \vec{R} = \vec{\Phi} = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \vec{M} + \vec{L} = \vec{\mathfrak{M}} = 0.$$

Према томе су услови (I) и (II) неопходни за равнотежу чврстог тела.

2. Обратно, ако су испуњени услови (I) и (II), из тих услова следује

$$\dot{K} = 0, \qquad \dot{l} = 0.$$

Пошто претпостављамо да за t_0 тело мирује и према томе су

$$\vec{K}_0=0,\quad \vec{l}_0=0,$$

закључујемо да су и за све време

$$\vec{K}=0,\quad \vec{l}=0.$$

Из првог услова следује да ако се центар инерције тела у тренутку t_0 налази у миру, налазиће се у миру и у току идућег времена. Из другог услова следује да тело нема ни ротације. Заиста, вектор $\vec{l}^{(C)}$ има у односу на главне осе инерције координате Ap, Bq, Cr, па зато из услова $\vec{l}^{(C)}=0$ следује услов $\vec{\omega}(p,q,r)=0$.

Према томе услове (I) и (II) треба сматрати као неопходне и довољне за равнотежу чврстог тела. Речима ти услови гласе:

За време равнотеже чврстог тела главни вектор и главни момент у односу на тачку, по жељи изабрану, свих спољашњих активних сила и сила реакција треба да буду једнаки нули.

Да је довољно да силе не дају момент само у односу на једну произвољно изабрану тачку простора следује из једнакости

$$\vec{\mathrm{M}}^{(A)}=\vec{\mathrm{M}}^{(C)}+[\overrightarrow{AC},\vec{\Phi}],$$

јер при $\vec{\Phi}=0$ допунски члан има вредност нуле.

Услови (I) и (II) могу се изразити и у дивекторском облику: динамички дивектор спољашњих сила које дејствују на чврсто тело треба да буде једнак нули, тј.

$$\vartheta_d\,(\vec{\Phi},\vec{\mathrm{M}})=0.$$

Не би било тешко написати, сходно § 2.4, услов равнотеже чврстог тела и у матрично-дивекторском облику.

Видимо да у основи услова равнотеже чврстог тела леже два вектора — главни вектор и главни момент. Према томе сва она расуђивања и конструкције, које су биле наведене у теорији система везаних вектора могу бити примењене и овде. Нема потребе да их понављамо. У статици је нарочито важно претварање једног система у други, еквивалентан првом, који задовољава неке унапред постављене услове. При томе се поставља низ проблема, нарочито важних у пракси, о одређивању појединих активних сила или реакција. За решавање тих проблема углавном се употребљавају две методе — аналитичка и графичка.

§ 7 · 11. Аналитичка метода у статици

Условима равнотеже (I) и (II) претходног параграфа одговарају ови скаларни услови:

$$
(\mathrm{I}^*)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{k} R_{jx} = 0\,,\\
&\sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{j=1}^{k} R_{jy} = 0\,,\\
&\sum_{i=1}^{n} Z_i + \sum_{j=1}^{k} R_{jz} = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{II}^*)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) + \sum_{j=1}^{k} (y_j R_{jz} - z_j R_{jy}) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} (z_i X_i - x_i Z_i) + \sum_{j=1}^{k} (z_j R_{jx} - x_j R_{jz}) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) + \sum_{j=1}^{k} (x_j R_{jy} - y_j R_{jx}) = 0,
\end{aligned}
$$

где су ознаке очигледне.

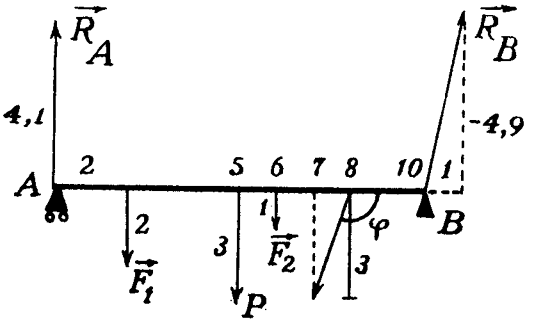
За случај равног система сила од (I*) се задржавају прва два, а од (II*) само трећи услов.

Једначине (I*) и (II*) могу корисно послужити за решавање многих проблема статике рачунским путем.

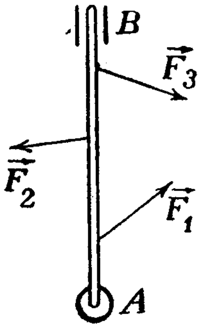
У случају равнотеже неслободног чврстог тела треба да буду наведени и допунски услови о реакцијама које дејствују на чврсто тело у појединим тачкама. Карактер тих реакција зависи од начина повезивања тела са спољашњим масама. Реакција са датом нападном тачком може бити: 1. произвољног правца, 2. управна на дату линију и 3. управна на дату површину. Она може имати оба смера у случају задржавајуће везе, или само један, одговарајући смер у случају незадржавајуће везе.

За објашњење поступка при решавању статичких задатака аналитичким методом навешћемо три примера.

1. На хоризонталну хомогену греду дужине $AB=l$ (сл. 12) и тежине P са крајем A на ваљцима и потпуно утврђеним крајем B дејствују, сем теже $\vec{P}$ две вертикалне силе $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и једна коса сила $\vec{F}_3$ са нападним тачкама на растојањима l_1, l_2, l_3 од тачке A. Сила $\vec{F}_3$ чини угао φ са хоризонтом. Треба одредити реакције $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ у тачкама A и B.



Сл. 12



Сл. 13

Ако x осу наперимо од тачке A према B, а осу y поставимо вертикално наниже, услови равнотеже у вертикалној равни ће изгледати :

$$R_{Bx}+F_3\cos\varphi=0, \tag{1}$$

$$R_{By}+R_A+F_1+F_2+F_3\sin\varphi+P=0, \tag{2}$$

$$l_1F_1+l_2F_2+l_3F_3\sin\varphi+\frac{1}{2}lP+lR_{By}=0. \tag{3}$$

Из ових једначина одређујемо редом: из (1) пројекцију реакције R_{Bx}; из (3) другу пројекцију R_{By}; и најзад, из (2) рекцију R_A.

2. На вертикални стуб тежине P и дужине $AB=l$ (сл. 13), утврђен у тачкама A и B дејствују три хоризонталне силе $\vec{F}_1$ (X_1, Y_1), $\vec{F}_2$ (X_2, Y_2), $\vec{F}_3$ (X_3, Y_3) са координатима у односу на ортогоналне

осе Ax и Ay и са нападним тачкама на растојањима z_1, z_2, z_3 од тачке A. Одредити силе реакција у тачкама A и B.

За овај пример једначине (I*) и (II*), сем последње, која се претвара у идентитет, дају:

$$(4)\qquad X_1+X_2+X_3+R_{Ax}+R_{Bx}=0,$$

$$(5)\qquad Y_1+Y_2+Y_3+R_{Ay}+R_{By}=0,$$

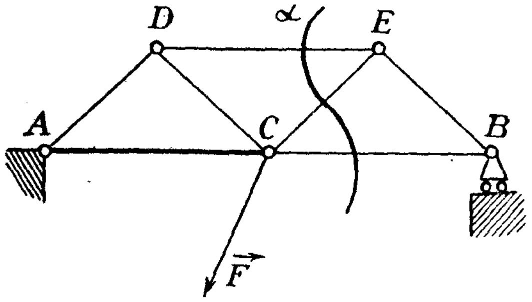
$$(6)\qquad R_{Az}+R_{Bz}-P=0;$$

$$(7)\qquad -z_1\,Y_1-z_2\,Y_2-z_3\,Y_3-l\,R_{By}=0,$$

$$(8)\qquad z_1\,X_1+z_2\,X_2+z_3\,X_3+l\,R_{Bx}=0.$$

Из ових једначина овим редом одређујемо пројекције реакција: из (8) R_{Bx}, из (7) R_{By}, после тога из (4) R_{Ax}, из (5) R_{Ay}.

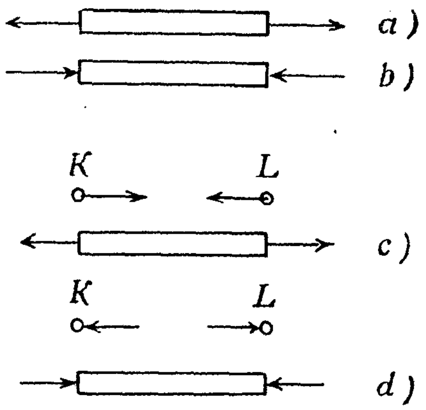
За две остале пројекције R_{Az} и R_{Bz} имамо само једначину (6) и према томе можемо одредити само збир тих пројекција. На тај начин је у постављеном облику *задатак статички неодређен*. Ако изменимо услов задатка у том смислу да у тачки B реакција $\vec{R}_B$ може бити само хоризонтална (тачка B стуба се налази, рецимо, у вертикалној цеви), пројекција R_{Bz} биће једнака нули и тада задатак постаје *статички одређен*: вертикални притисак прима само тачка A. На овом примеру видимо да смањење у ограничењу померања тачака тела може претворити задатак из статички неодређеног у статички одређен.



Сл. 14

3. Као трећи пример узмимо чврсто тело остварено у облику равног решеткастог носача претстављеног на слици (сл. 14). Нека на ову решетку дејствује само једна спољашња активна сила са нападном тачком у чвору C, који је на правој AB. Нека је $AC=CB=l$ и штап DE паралелан са AB. Треба одредити реакцију $\vec{R}_A$ у непомичној тачки A и реакцију R_B управну на праву AB, а такође *напоне у штаповима*.

Под напонима разумемо силе које дејствују на штап кад га замишљамо изолованим од остале решетке. Напони могу бити *напони истезања* (сл. 15, *a*) и *напони притиска* (сл. 15, *b*). Приметимо да ако на нека два суседна чвора K и L решетке дејствују силе са смером од једног чвора према другом (сл. 15, *c*), у штапу који веже те чворове биће, према трећем Њутновом закону, напони истезања, у супротном случају (сл. 15, *d*) напони притиска.



Сл. 15

Ако Ax осу узмемо у правцу AB, а Ay осу наперимо нормално на AB у означеном смеру и координате силе $\vec{F}$ означимо са X, Y, за одређивање реакција $\vec{R}_A\,(R_{Ax}, R_{Ay})$, $\vec{R}_B\,(0, R_{By})$ имамо ове три једначине:

$$R_{Ax}+X=0, \tag{9}$$

$$R_{Ay}+Y+R_{By}=0, \tag{10}$$

$$l\,Y+2\,l\,R_{By}=0. \tag{11}$$

Из једначине (9) одређујемо R_{A_x}, из једначине (11) R_{By} и затим из једначине (10) R_{Ay}.

За одређивање напона у штаповима можемо да се послужимо са више метода. На нашем једноставном примеру покажимо основе тих метода.

1. *Кремонина метода.* Према тој методи одређивање напона врши се на основу услова равнотеже сваког појединог чвора решетке. Почнимо од чвора A. Пошто за тај чвор знамо већ реакцију $\vec{R}_A$ и правце AC и AE за две остале силе које дејствују на тај чвор, из услова равнотеже тог чвора, као изоловане материјалне тачке, можемо одредити алгебарске вредности сила датих праваца. То можемо извршити или аналитички или геометриски помоћу конструкције троугла са познатом једном страном и правцима две остале стране. Означимо добивене силе са $\vec{Q}_{AC}$ и $\vec{Q}_{AD}$. Онда имамо

$$\vec{R}_A+\vec{Q}_{AC}+\vec{Q}_{AD}=0.$$

Тиме смо одредили и напоне у штаповима AC и AE, јер на крајеве A и C првог штапа дејствују силе $\vec{Q}_{CA}=-\vec{Q}_{AC}$ и $\vec{Q}_{AC}$, а на крајеве A и D другог силе $\vec{Q}_{DA} = -\vec{Q}_{AD}$ и $\vec{Q}_{AD}$. Како је

$$\vec{R}_A = (-\vec{Q}_{AC}) + (-\vec{Q}_{AD}),$$

видимо да су напони компоненте реакције $\vec{R}_A$ у правцима AC и AD.

Пређимо сад на чвор D. На тај чвор дејствује већ позната сила $\vec{Q}_{DA} = -\vec{Q}_{AD}$ и две силе $\vec{Q}_{DE}$ и $\vec{Q}_{DC}$ чији су правци познати и које можемо одредити из услова равнотеже тачке D. За тај чвор имамо једначину

$$\vec{Q}_{DA} + \vec{Q}_{DE} + \vec{Q}_{DC} = 0.$$

Тиме су у исто време одређени напони у штаповима DE и DC.

За чвор C треба поставити једначину

$$\vec{Q}_{CA} + \vec{Q}_{CD} + \vec{Q}_{CE} + \vec{Q}_{CB} + \vec{F} = 0$$

и из те једначине одредити алгебарске вредности сила $\vec{Q}_{CE}$ и $\vec{Q}_{CB}$.

Поступајући тако редом, можемо узастопце одредити напоне у свим осталим штаповима наше решетке. За олакшање таквих узастопних поступака могу се згодно повезати одговарајући, било рачуни било конструкције, у један систем (*Кремонин план*), који игра важну улогу у практичним применама статике.

Решетка ће бити статички одређена, ако увек постоји могућност одређивања напона у два наредна штапа из услова равнотеже одговарајућег чвора. Нећемо улазити у анализу те могућности за различите решетке.

2. *Кулманова метода.* Према Кулмановој методи, за одређивање напона у штаповима решетке замишља се подела решетке на два или више делова помоћу пресека а затим се сваки тај део сматра као засебно тело. Ако при томе пресек пресече више од три штапа са непознатим напонима, три услова за равнотежу издвојеног дела решетке, на који дејствују још и друге, познате силе, дају могућност да се одреде алгебарске вредности сила у правцима пресечених штапова, а према томе и напони у штаповима. При томе, ако одређујемо те напоне рачунским путем, треба искористити две једначине за главни вектор и једну једначину за главни момент. Геометриску методу одређивања напона наводимо засебно.

Ради примера, покажимо поступак за одређивање напона у штаповима DE, CE, CB (сл. 14) који су пресечени замишљеном кривом α. Узмимо у обзир онај део решетке који се налази, рецимо, лево од пресека α. На тај део дејствују ове спољашње силе: $\vec{R}_A$, која је већ позната, $\vec{Q}_{DE}$, $\vec{Q}_{CE}$ и $\vec{Q}_{CB}$ а и дата сила $\vec{F}$. Ако ортове штапова означимо са $\vec{u}_{DE}$, $\vec{u}_{CE}$, $\vec{u}_{CB}$, као услове за равнотежу можемо написати ове једначине

$$\vec{R}_A + Q_{DE}\,\vec{u}_{DE} + Q_{CE}\,\vec{u}_{CE} + Q_{CB}\,\vec{u}_{CB} + \vec{F} = 0,$$

$$[\overrightarrow{CA}, \vec{R}_A] + Q_{DE}\,[\overrightarrow{CD}, \vec{u}_{DE}] = 0,$$

при чему смо за моментну једначину узели пол у тачки C. Написани систем једначина еквивалентан је само са три скаларне једначине, јер су у другој једначини оба векторска производа колинеарна. Те три скаларне једначине дају могућност одређивања алгебарских вредности Q_{DE}, Q_{CE}, Q_{CB}, а према томе и напона у штаповима.

Приметимо да се Кулманова метода углавном примењује у графичком облику који наводимо у наредном параграфу.

3. *Ритерова метода.* У Ритеровој методи исто тако се служимо пресеком и одвајањем једног дела решетке, али је ова метода карактеристична по томе што се примењују само моментне једначине равнотеже.

Покажимо да у случају равног система сила из три моментне једначине у односу на три неколинеарна пола A, B, C

$$\sum_{i=1}^{n} [\overrightarrow{AM_i}, \vec{F}_i] = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} [\overrightarrow{BM_i}, \vec{F}_i] = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} [\overrightarrow{CM_i}, \vec{F}_i] = 0,$$

где је M_i нападна тачка сваке поједине силе $\vec{F}_i$, следује једначина

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0.$$

Заиста, ако ставимо

$$\overrightarrow{BM_i} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_i}$$

у другу од наведених једначина и узмемо у обзир прву једначину, добићемо

$$[\overrightarrow{BA}, \vec{F}] = 0.$$

Слично се изводе и још две једначине

$$[\overrightarrow{CA}, \vec{F}] = 0 \qquad [\overrightarrow{BC}, \vec{F}] = 0.$$

Како вектор $\vec{F}$ не може бити у исто време колинеаран са три неколинеарна правца, закључујемо да је $\vec{F} = 0$. Ова особина моментних једначина је разлог што Ритерова метода искоришћава само моментне једначине, односно геометриске конструкције засноване на моментима.

Тако у конкретном случају наше решетке можемо за проучавање равнотеже дела решетке лево од пресека α узети ова три пола: тачку C, за коју две непознате силе не дају моменте, затим ван нашег дела тачку E, за коју исто тако две силе не дају моменте, и најзад неку трећу тачку, рецимо тачку A. У нашем специјалном случају је искључена тачка пресека правих DE и CB, јер су оне паралелне. За изабране три тачке можемо написати ове три једначине:

$$[\overrightarrow{CA}, \vec{R}_A] + Q_{DE}[\overrightarrow{CD}, \vec{u}_{DE}] = 0,$$

$$[\overrightarrow{EA}, \vec{R}_A] + [\overrightarrow{EC}, \vec{F}] + Q_{CB}[\overrightarrow{EC}, \vec{u}_{CB}] = 0,$$

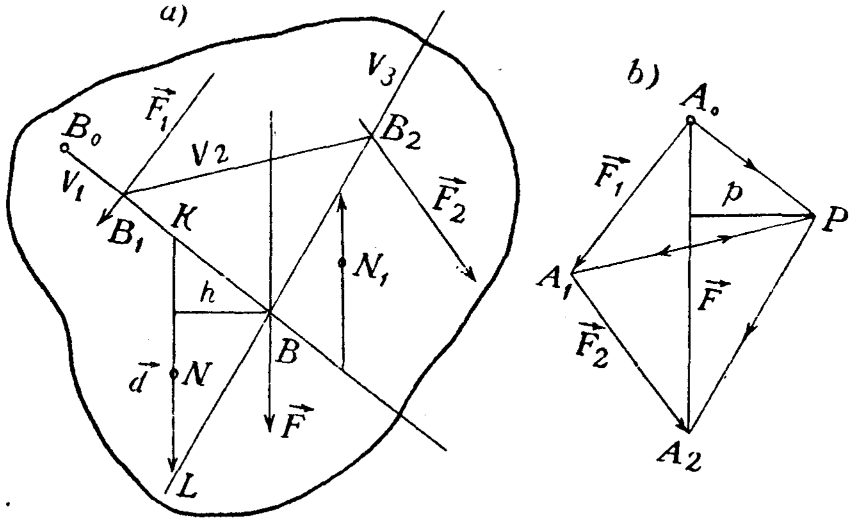
$$Q_{DE}[\overrightarrow{AD}, \vec{u}_{DE}] + Q_{CE}[\overrightarrow{AE}, \vec{u}_{CE}] + [\overrightarrow{AC}, \vec{F}] = 0.$$

Пошто су сви векторски производи колинеарни, нормални на раван решетке, имамо три скаларне једначине за одређивање три непознате величине Q_{DE}, Q_{CB}, Q_{CE}.

§ 7 · 12. Графичка метода у статици

Наведимо пре свега геометриски поступак за сабирање две и више сила, које дејствују на чврсто тело, при чему се зауставимо само на случају сабирања сила у равни. На тај случај може бити сведен и случај сила у простору, ако употребимо две, у најпростијем случају ортогоналне равни, и проучавамо пројекције просторног система на те равни. Као помоћно средство ту може да послужи нацртна геометрија.

Као што је добро познато, за сабирање две силе у равни, чије се основе секу, служи основно векторско правило, *правило паралелограма:* паралелограм у тачки пресека основа и са странама од датих сила има дијагоналу једнаку збиру датих сила. Али две силе можемо сабрати и на други начин. Поступак тог другог сабирања је основа *графостатике,* која се служи цртањем при решавању статичких проблема.



Слика 16.

Нека на чврсто тело T (сл. 16,*a*) дејствују у равни слике две силе $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ сматране као два вектора везана за своје основе. Ако те векторе сматрамо као слободне векторе, њихов збир, тј. главни вектор система, можемо одредити и на страни цртањем одговарајућег *троугла сила.* За то из произвољне тачке A_0 (сл. 16,*b*) цртамо вектор $\overrightarrow{A_0 A_1} = \vec{F}_1$ у произвољној размери и затим на крај A_1 тог вектора надовезујемо вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{F}_2$ у истој размери. Вектор $\overrightarrow{A_0A_2}$, који спаја почетак прве силе са крајем друге одређује у истој размери резултанту $\vec{F}$, главни вектор датих сила, тј. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Али како су силе $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ вектори везани за своје основе, то и резултанта треба да буде вектор везан за праву. Према томе треба одредити за вектор $\vec{F}$ положај његове основе у равни тела. За то се служимо овим поступком. У равни троугла сила узмимо неку тачку P и из те тачке повуцимо дужи PA_0, PA_1, PA_2, које ћемо звати *зраци троугла*, а у општем случају *зраци полигона сила.*

Сваку силу $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ можемо тада раставити у компоненте у правцима зракова са одговарајућим смеровима, наиме

$$\vec{F}_1 = \overrightarrow{A_0P} + \overrightarrow{PA_1}, \quad \vec{F}_2 = \overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{PA_2}.$$

То је разлагање вектора $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ као слободних вектора. За разлагање истих вектора као везаних вектора у равни тела поступамо овако. Узмимо у равни тела произвољну тачку B_0 и из те тачке повуцимо праву V_1 паралелну зраку A_0P на слици троугла сила, па из тачке B_1, пресека праве V_1 и основе вектора $\vec{F}_1$, повуцимо праву V_2 паралелну зраку A_1P на слици троугла сила до пресека у тачки B_2 те праве и основе силе $\vec{F}_2$; најзад из тачке B_2 повуцимо праву V_3 паралелну зраку A_2P. Полигон састављен од правих V_1, V_2, V_3, назива се *верижни полигон* — то је полигон у равни тела. Покажимо сад важну особину верижног полигона: тачка B, пресек крајњих страна верижног полигона, лежи на основи вектора $\vec{F}$ као везаног вектора. Заиста, силу $\vec{F}_1$ на слици тела са нападном тачком B_1 можемо раставити у две компоненте са правцима V_1 и V_2 и са алгебарским величинама које показује троугао сила. Дуж праве V_2 компонента силе $\vec{F}_1$ је вектор $\overrightarrow{PA_1}$ са смером од P ка A_1. Ако сад слично разлагање извршимо са силом $\vec{F}_2$ код тачке B_2, добићемо исто тако једну компоненту у првацу V_2, али са супротним смером од A_1 ка P. Према томе две силе на правој V_2 тела имају исти интензитет, али супротан смер; њихова резултанта је нула. На тело дејствују само остале две силе са правцима правих V_1 и V_3. Тачка B пресека њихових основа је тачка основе вектора $\vec{F}$. Сама основа је паралелна правој $A_0 A_2$.

Није тешко одредити са слике алгебарску вредност момента силе $\vec{F}$ око неке произвољне тачке у равни тела. Алгебарска вредност M момента силе $\vec{F}$, напр., у односу на тачку N једнака је у датом случају позитивној вредности производа интензитета силе F и растојања h силе од тачке N (сл. 16, *a*), тј.

$$M = F \cdot h,$$

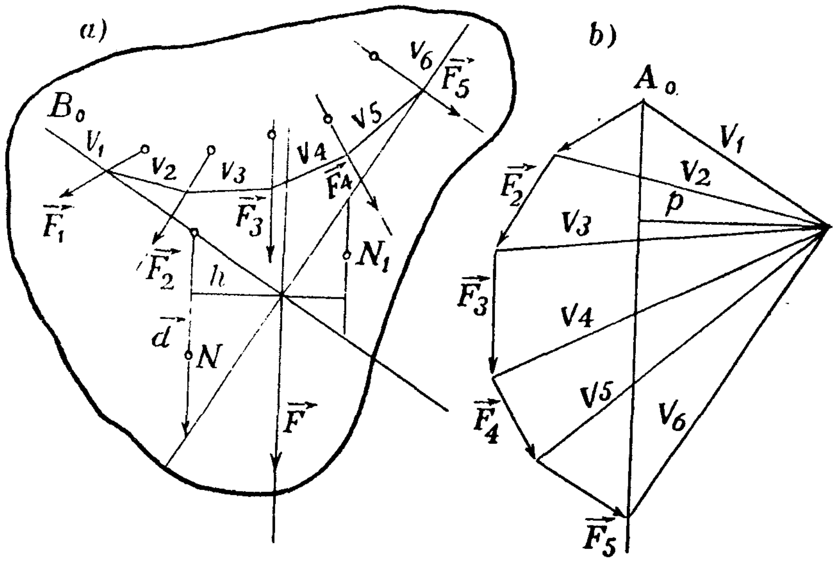
али растојање h је у исто време и висина троугла BKL, где су K и L тачке пресека са V_1 и V_3 праве паралелне са $\vec{F}$ која пролази кроз тачку N. Основицу KL тог троугла означимо са d. Ту основицу можемо сматрати и као вектор са почетком на првој правој V_1 и са крајем на последњој V_3. У датом случају смер вектора $\vec{d}$ поклапа се са смером силе $\vec{F}$. С друге стране, на слици троугла сила имамо троугао A_0PA_2 сличан троуглу BKL, јер су им стране паралелне. Ако отстојање пола P од A_0A_2 означимо са p, из сличности наведених троуглова има:

$$F : p = d : h,$$

одакле изводимо да је

$$pd = Fh = M.$$

Пошто је p стално за све положаје тачке N, можемо тврдити да је момент пропорционалан отсечку праве паралелне са $\vec{F}$ кроз тачку N између крајњих страна верижног полигона. При томе је тај момент позитиван ако вектор $\vec{d}$ има исти смер са силом $\vec{F}$, а негативан ако су та два вектора супротног смера. Тај случај имамо на слици за тачку N_1.



Слика 17

Слична геометриска конструкција врши се и кад има више сила. Слике (сл. 17, a и b) у довољној мери објашњавају поступак конструкције. На слици полигона сила имамо пет сила са резултантом и шест зракова. У равни тела имамо верижни полигон са шест страна, пет сила одређеног полажаја и нападну тачку резултанте.

Полигон сила се назива *зашворен*, ако се крај последње силе поклопи са почетком прве. Главни вектор система сила тада је једнак нули.

Верижни полигон, према Кулману, сматра се као *зашворен*, ако су његова прва и последња страна колинеарне. Приметимо да се могу разликовати два могућа случаја затворености верижног полигона: *зашвореносш прве врсше* са колинеарним странама и једнаким одговарајућим зрацима на слици полигона сила. и *зашвореносш друге врсше* са колинеарним странама, али са различитим дужинама одговарајућих зракова на слици полигона сила. У даљем излагању наводимо примере таквих верижних полигона.

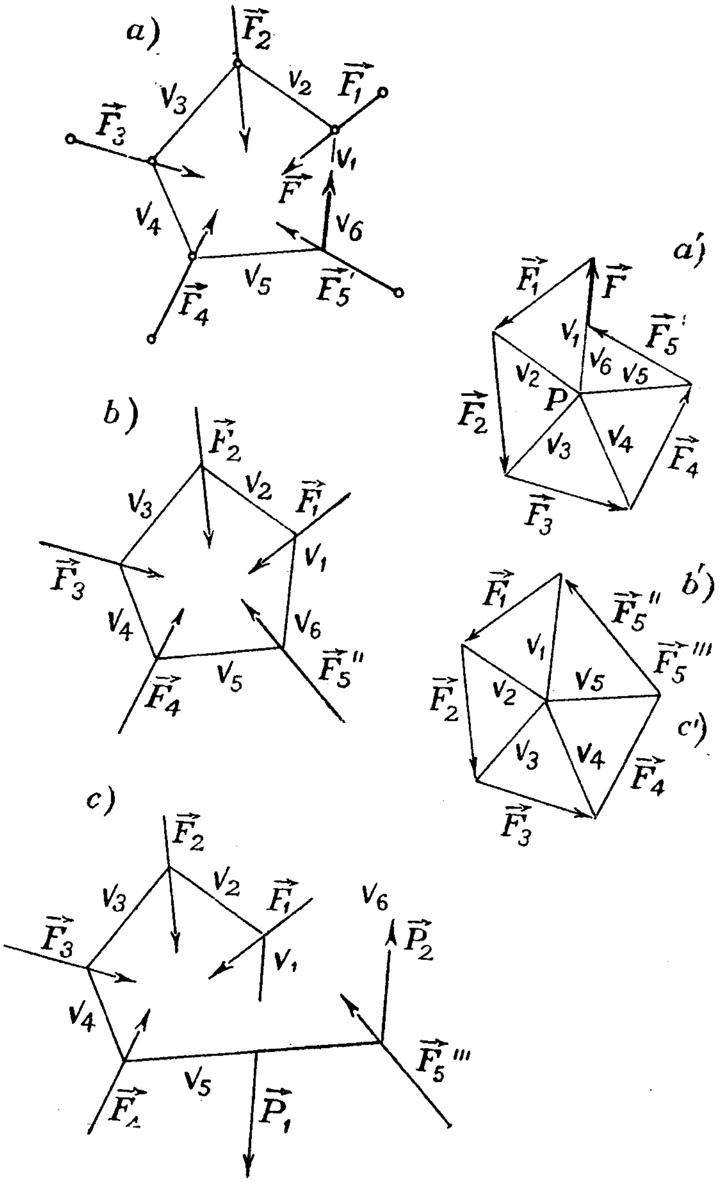
Према свима могућим случајевима можемо навести ову таблицу резултата графичког сабирања сила у равни.

	Полигон сила	Верижни полигон	Систем сила
1.	отворен	отворен	једна сила
2.	отворен	затворен (II врсте)	једна сила
3.	затворен	отворен	спрег
4.	затворен	затворен (I врсте)	нула

У другом случају верижни полигон може бити затворен, али та затвореност може бити само II врсте.

За 1. случај имали смо слике (сл. 16) и (сл. 17). Остале случајеве објашњава слика (сл. 18, *a*, *b*, *c*) са различитим положајем последње силе $\vec{F}_5$: положај $\vec{F}_2{}'$ одговара случају 2., положај $\vec{F}_5{}''$ случају 3. и положај $\vec{F}_5{}'''$ случај 4.

Случај затворености полигона сила и верижног полигона служи као основа графичког проучавања равнотеже чврстог тела. При формулисању основног става графостатике да је за равнотежу чврстог тела неопходно и довољно да полигон сила и верижни полигон буду затворени, треба имати у виду да се овде подразумева затво-



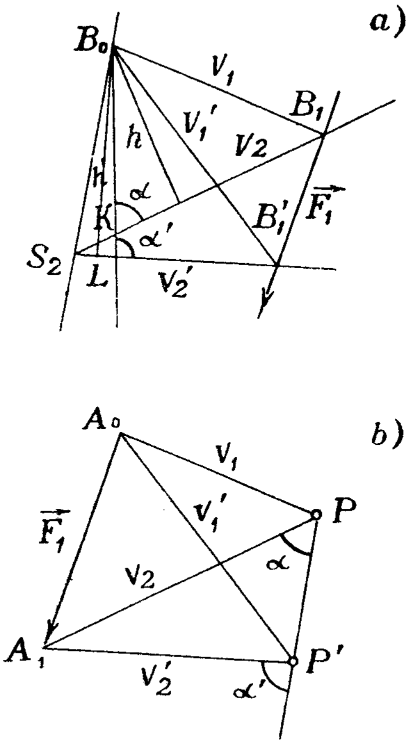
Слика 18

реност прве врсте. Ова примедба губи свој значај кад је унапред утврђено да је полигон сила затворен.

Не улазећи у врло важне и многобројне примене наведених графичких конструкција, које углавном сачињавају Кулманову методу, наведимо још неке и са теориског гледишта важне особине полигона сила и верижног полигона.

§ 7 · 121. Кулманова права

На слици полигона сила узмимо два пола P и P' (сл. 19, *b*) и из сваког пола конструишимо зраке за силу $\vec{F}_1$ тог полигона. У равни тела (сл. 19,*a*) из исте тачке B_0 конструишимо два верижна полигона: један са странама V_1, $V_2, \ldots$ који одговара полу P и други са странама V_1', и $V_2', \ldots$ који одговара полу P'. Стране V_1 и V_1' секу се у тачки B_0, а тачку пресека V_2 и V_2' означимо са S_2. Докажимо сад ову особину изведене конструкције: $B_0 S_2$ је паралелна правој PP', која се назива *права полова.*



Сл. 19

Претпоставимо да права $B_0 S_2$ није паралелна са правом PP' и нека права кроз B_0 која је паралелна са правом PP' сече стране V_2 и V_2' верижног полигона у тачкама K и L. Докажимо сад да се тачке K и L поклапају и према томе се поклапају са тачком S_2.

За доказ можемо искористити особину момента силе $\vec{F}_1$ у односу на тачку B_0. Тај момент треба да има исту вредност без обзира на то на које компоненте је растављена сила $\vec{F}_1$ у равни тела. Како при томе компоненте дуж V_1 и V_1' не дају моменте у односу на тачку B_0, момент компоненте $\overrightarrow{PA_1}$ дуж V_2 треба да буде једнак моменту компоненте $\overrightarrow{P'A_1}$ дуж V_2'. Ако са h и h' означимо дужине нормала спуштених из тачке B_0 на стране верижних полигона V_2 и V_2' једнакост момената се изражава једначином

$$(1) \qquad \overline{PA_1} \times h = \overline{P'A_1} \times h'.$$

међутим је

$$h = \overline{B_0K} \cdot \sin \alpha, \qquad h' = \overline{B_0L} \cdot \sin \alpha',$$

где углови α и α', означени у равни тела, имају вредности једнаке вредностима углова означених на слици полигона сила због паралелности правих B_0L и PP'. Једначину (1) можемо сад написати у облику

$$(2) \qquad \overline{B_0K} \cdot \overline{PA_1} \cdot \sin \alpha = \overline{B_0L} \cdot \overline{P'A_1} \cdot \sin \alpha'.$$

Према синусној теореми је

$$\overline{PA_1} : \sin \alpha' = \overline{P'A_1} : \sin \alpha \quad \text{или} \quad \overline{PA_1} \cdot \sin \alpha = \overline{P'A_1} \cdot \sin \alpha'.$$

те једначина (2) доводи до резултата

$$\overline{B_0K} = \overline{B_0L},$$

који смо желели потврдити.

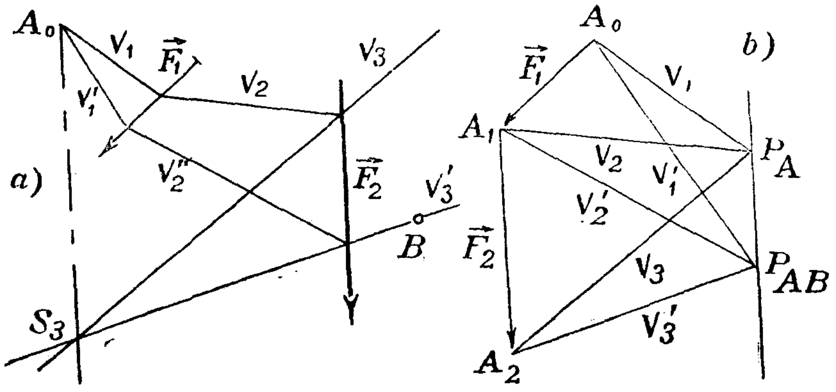
Ако сад, узимајући тачку S_2 за полазну тачку конструкције два верижна полигона, за наредну силу $\vec{F}_2$, поново са половима P и P', конструишемо наредне стране V_3 и V_3' тих полигона, тачка пресека S_3 тих страна поново ће бити на правој која пролази кроз тачку S_2 и паралелна је са правом PP'. Она ће бити према томе и на правој $B_0 S_2$. На тај начин све тачке S_2, $S_3, \ldots$ пресека одговарајућих страна верижних полигона, конструисаних за два различита пола, припадају истој правој паралелној правој полова. Права $B_0 S_2 S_3, \ldots$ назива се *Кулманова права.*

Наведимо још ову особину Кулманове праве и праве полова. Ако за Кулманову праву узмемо праву AB кроз две тачке A и B на неком верижном полигону, сваки верижни полигон конструисан из A за произвољан пол на правој полова паралелној са AB пролазиће кроз тачку B. Заиста, нека један верижни полигон са полом P пролази кроз тачке A и B. Конструишимо тада из тачке A други верижни полигон са полом P'. при чему је права PP' паралелна са правом AB. Тада је Кулманова права за та два верижна полигона права AB и њој припадају све тачке пресека одговарајућих страна. Кроз тачку B, према томе, пролази одговарајућа страна и другог верижног полигона, а то значи и сваког чији је пол на правој паралелној са AB.

Да покажемо значај Кулманове праве за конструкцију верижних полигона решићемо два основна теориска задатка.

Задатак I. — За дати систем сила у равни конструисати верижни полигон који пролази кроз две дате тачке.

Из дате тачке A (A_0) конструишимо за дати систем сила верижни полигон V_1, V_2, V_3,... према полигону сила и P_A (сл. 20, *a* и *b*).



Слика 20

Ако је потребно конструисати други верижни полигон тако да он прође, сем тачке A, још и кроз тачку B на страни V_3' која одговара страни V_3 првог полигона, можемо поступити овако. Повуцимо произвољну праву кроз P_A и њој паралелну Кулманову праву кроз A_0. Узмимо затим тачку S_3 пресека стране V_3 са том правом. Кроз тачку S_3 и тачку B повуцимо праву која ће одредити страну V'_3 потребног другог полигона. Ако из краја A_2 силе $\vec{F_2}$ повучемо зрак паралелан са V'_3, он ће сећи праву полова у тачки P_{AB}. Ако ту тачку узмемо за нови пол, он омогућава конструкцују траженог потпуног верижног полигона који пролази кроз тачке A и B.

Задатак III. Конструисати верижни полигон који пролази кроз три дате тачке A, B, C у равни система сила.

Према претходном задатку можемо конструисати два верижна полигона: један са полом у тачки P_{AB} који пролази кроз тачке A и B, и други са полом P_{AC} који пролази кроз тачке A и C. Ако сад кроз пол P_{AB} повучемо праву p_{AB} паралелну са AB, верижни полигон ће за све полове на тој правој пролазити кроз тачке A и B. С друге стране, ако кроз пол P_{AC} повучемо праву p_{AC} паралелну са AC, за све полове на тој правој верижни полигон ће пролазити кроз тачке A и C. Ако за нов пол узмемо тачку пресека правих p_{AB} и p_{AC}, тачку P_{ABC}, јасно је да ће она бити пол полигона који пролази кроз тачке A, B, C.

§ 7 · 2. Равнотежа паралелних сила

У теорији везаних вектора проучили смо (§ 1.8, III-1) систем паралелних везаних вектора. Та теорија се непосредно примењује и на систем паралелних сила које дејствују на чврсто тело. Нећемо у детаљима развијати ту примену на случај равнотеже, и ако је баш случај паралелних сила најважнији у пракси, где паралелне силе теже играју основну улогу. Али желимо да се зауставимо на неким специјалним случајевима равнотеже чврстог тела под утицајем паралелних сила.

Ако је систем паралелних вектора са одређеним нападним тачкама еквивалентан једном везаном вектору, онда, као што знамо, на основи тог вектора постоји нарочита тачка, центар паралелних вектора, односно центар сила. Тај центар се одређује за силе $\vec{F}_i = F_i \vec{u}$, где је $\vec{u}$ орт сталног правца, а F_i алгебарска вредност силе у односу на тај орт, из једначине

$$\vec{r}_C \sum_i F_i = \sum_i \vec{r}_i F_i ,$$

где је $\vec{r}_i$ вектор положаја нападне тачке силе $\vec{F}_i$ и $\vec{r}_C$ вектор положаја центра сила.

У случају равнотеже таквог система сила обично можемо раздвојити систем на две групе паралелних сила — на активне силе $\vec{F}_i$ и на реакције $\vec{R}_j$. Сваки од тих система нека се своди на један вектор: први систем на вектор $\vec{F}$, а други на $\vec{R}$; тада у случају равнотеже имамо

$$\vec{F} + \vec{R} = 0.$$

Та два вектора треба да имају и исту основу. При томе може бити два случаја: 1. центар активних сила не поклапа се са центром реакција и 2. та два центра се поклапају. У првом случају, ако све силе промене свој правац али остану паралелне, нападне тачке резултаната активних сила и сила реакција биће различите. Те две резултанте образоваће спрег сила и неће се одржати у равнотежи. У другом случају те две силе са истом нападном тачком остају у равнотежи без обзира на промену правца свих сила. Таква врста равнотеже назива се *астатичка равнотежа*. Услови за астатичку равнотежу активних сила и сила реакција изражавају се не само тиме што је испуњен услов за главне векторе, као слободне векторе,

$$\vec{F}+\vec{R}=0,$$

већ и у томе што је испуњен и моментни услов

$$\sum_i [\vec{r}_i, F_i \vec{u}] + \sum_j [\vec{r}_j, R_j \vec{u}] = 0,$$

и то за произвољну вредност вектора $\vec{u}$. Да тај услов буде задовољен, треба да алгебарске вредности активних сила и сила реакција задовољавају овај геометриски услов астатичке равтотеже

$$\sum_i F_i \vec{r}_i + \sum_j R_j \vec{r}_j = 0.$$

§ 7 · 3. Примена принципа могућих померања на чврсто тело. Примери равнотеже неслободног чврстог тела.

Лагранжев принцип могућих померања кратко се изражава (§ 6.3, II) условом

$$(1) \qquad \sum_i (\vec{F}_i, \overrightarrow{\Delta s_i}) \leqq 0,$$

где су $\vec{F}_i$ активне силе и $\overrightarrow{\Delta s_i}$ могућа померања нападних тачака тих сила. За случај само задржавајућих веза имамо знак једнакости.

Елементарно померање сваке тачке чврстог тела можемо претставити изразом

$$(2) \qquad \overrightarrow{\Delta s_i} = \overrightarrow{\Delta s_A} + [\lambda\vec{\omega}, \vec{\rho}_i],$$

где је: $\overrightarrow{\Delta s_A}$ — елементарно померање тачке A изабране за пол, $\vec{\omega}$ одговарајућа угаона брзина и λ — мала величина, тако да вектор $\lambda\vec{\omega}$ претставља мало обртање око једне осе за мали угао, најзад

$\vec{\rho}_i$, као увек, вектор положаја нападне тачке силе $\vec{F}_i$ у односу на тачку A.

Ако написану вредност (2) ставимо у (1), можемо рачунати овако:

$$\sum_i (\vec{F}_i, \overrightarrow{\Delta s_i}) = \sum_i (\vec{F}_i, \overrightarrow{\Delta s_A}) + \sum_i (\vec{F}_i [\vec{\lambda\omega}, \vec{\rho}_i]) = (\vec{F}, \overrightarrow{\Delta s_A}) + (\vec{\lambda\omega}, \vec{M}^{(A)}),$$

где су

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \quad \vec{M}^{(A)} = \sum_i [\vec{\rho}_i, \vec{F}_i].$$

Према томе Лагранжев принцип могућих померања за чврсто тело можемо изразити овако:

$$(\vec{F}, \overrightarrow{\Delta s_A}) + (\vec{M}^{(A)}, \vec{\lambda\omega}) \leqslant 0. \tag{3}$$

1. За слободно тело, то значи за произвољне векторе $\overrightarrow{\Delta s_A}$ и $\vec{\lambda\omega}$, добивамо познате услове равнотеже за активне силе:

$$\vec{F} = 0, \quad \vec{M}^{(A)} = 0.$$

Покажимо сад на примерима како се може искористити услов (3) за неслободно тело, али зауставимо се само на задржавајућим везама.

2. За пример тела са пет степена слободе узмимо случај кад се тело може слободно обртати око тачке A, која је приморана да се налази на једној површини.

Ако са $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ означимо два орта тангената на дату површину у тачки A, свако елементарно померање $\overrightarrow{\Delta s_A}$ можемо раставити

$$\overrightarrow{\Delta s_A} = \lambda_1 \vec{T}_1 + \lambda_2 \vec{T}_2,$$

где су λ_1 и λ_2 две произвољне мале величине. Тада из (3) имамо

$$\lambda_1 (\vec{F}, \vec{T}_1) + \lambda_2 (\vec{F}, \vec{T}_2) + (\vec{M}^{(A)}, \vec{\lambda\omega}) = 0.$$

Према томе, због произвољности скалара λ_1 и λ_2 и вектора $\vec{\lambda\omega}$, изводимо ове услове равнотеже тела:

$$(\vec{F}, \vec{T}_1) = 0, \quad (\vec{F}, \vec{T}_2) = 0, \quad \vec{M}^{(A)} = 0.$$

Ако је, рецимо, тачка A приморана да се налази на површини чија је једначина

$$f(x_A, y_A, z_A) = 0,$$

при чему је оса z вертикална наниже са ортом $\vec{k}$, а тело је тешко масе m, услови

$$(\vec{F}, \vec{T}_1) = mg\,(\vec{k}, \vec{T}_1) = 0,$$

$$(\vec{F}, \vec{T}_2) = mg\,(\vec{k}, \vec{T}_2) = 0$$

захтевају да нормала на површину буде вертикална, тј. за изабрани систем координата

$$\frac{\partial f}{\partial x_A} = \frac{\partial f}{\partial y_A} = 0\,.$$

Али сем тога је неопходно да силе теже не дају момента око тачке A. Како је у овом случају

$$\vec{M}^{(A)} = \sum_i [\vec{\rho}_i, m_i \vec{g}] = \sum_i [m_i \vec{\rho}_i, \vec{g}_i] = [m\vec{\rho}_C, \vec{g}] = [\vec{\rho}_C, m\vec{g}] = 0,$$

вектори $\vec{\rho}_C = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{g}$ треба да буду колинеарни, тј. тежиште треба да се налази на вертикалној нормали на површину у тачки A.

3. Ако је тачка A тела у претходном случају приморана да се налази на једној кривој са ортом $\vec{T}_1$ тангенте у тачки A, имамо за могуће померање те тачке

$$\overrightarrow{\Delta s_A} = \lambda_1 \vec{T}_1\,.$$

Према томе услов (3) даје

$$\lambda_1 (\vec{F}, \vec{T}_1) + (\vec{M}^{(A)}, \lambda\vec{\omega}) = 0,$$

одакле имамо

$$(\vec{F}, \vec{T}_1) = 0, \qquad \vec{M}^{(A)} = 0.$$

За тешко тело први услов захтева да тангента $\vec{T}_1$ треба да буде хоризонтална, а други услов, као и у претходном случају, тражи да вектор $\overrightarrow{AC}$ буде вертикалан.

Како у овом, тако и у претходном случају имамо астатичку равнотежу, ако је тачка, која је приморана да се налази на кривој односно на површини, тежиште тела.

Ако је крива линија у односу на триједар са вертикалном z осом дата параметарским једначинама

$$x = x(u), \qquad y = y(u), \qquad z = z(u),$$

где је u параметар, тај параметар за положаје равнотеже, треба да задовољава услов

$$\frac{dz}{du} = z'(u) = 0.$$

4. За случај тела са три степена слободе узмимо два примера.

a. Равно кретање. Тада је

$$\overrightarrow{\Delta s_A} = \lambda_1 \vec{T}_1 + \lambda_2 \vec{T}_2, \qquad \lambda\vec{\omega} = \lambda\,\omega\,\vec{n},$$

где је $\vec{n}$ сталан орт управан на дату раван, а $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ два орта у тој равни. Из (3) изводимо три скаларна услова

$$(\vec{F}, \vec{T}_1) = 0, \qquad (\vec{F}, \vec{T}_2) = 0, \qquad (\vec{M}^{(A)}, \vec{n}) = 0.$$

Ако силе дејствују управно на раван, јасно је да се тело налази у равнотежи у сваком положају на тој равни.

b. Обртање око непомичне тачке. У овом случају остаје само један векторски услов

$$\vec{M}^{(A)} = 0.$$

У случају тешког тела вектори $\overrightarrow{AC}$ и $\vec{g}$ треба да буду колинеарни.

5. За тело са два степена слободе узмимо оно које се може обртати и клизати у односу на исту осу. Тада са тачком A на оси имамо

$$\overrightarrow{\Delta s_A} = \lambda_1 \vec{T}, \qquad \lambda\vec{\omega} = \lambda_2 \vec{T},$$

где је $\vec{T}$ сталан орт означене осе. Услови равнотеже гласе

$$(\vec{F}, \vec{T}) = 0, \qquad (\vec{M}^{(A)}, \vec{T}) = 0.$$

За тешко тело први услов тражи да оса буде хоризонтална, а други да се тежиште тела налази у вертикалној равни која пролази кроз дату осу.

6. Пример тела са једним степеном слободе је тело које се обрће око једне осе. У том случају имамо само један услов равнотеже

$$(\vec{M}^{(A)}, \vec{T}) = 0.$$

Силе које дејствују на тело не смеју да дају момент око осе обртања.

За тешко тело оса обртања може имати произвољан положај, али тежиште мора да се налази у вертикалној равни која пролази кроз ту осу.

И на овим примерима видимо да је број n услова, које треба да задовољавају активне силе које дејствују на тело, једнак броју степена слободе тела. Остали услови $6-n$, које можемо добити ако напишемо услове равнотеже тела са реакцијама, служе за одређивање реакција.

У проучавање стабилности равнотеже чврстог тела нећемо специјално улазити, јер је у § 8.4,II било речи о стабилности ровнотеже материјалног система уопште, истина у елементарној краткој форми, али та иста елементарна теорија и за случај чврстог тела не уноси ништа нарочито новог сем детаља и конкретизације, који могу бити од интереса и практичне вредности.

ГЛАВА ОСМА

Удар чврстог тела

§ 8 · 1. Закон количине кретања и момента количина кретања при удару чврстог тела

У §§ 10.2 и 10.3, II извели смо законе количине кретања и момента количина кретања у општем случају за материјални систем у случају удара.

Први закон тврди да за целокупно време удара имамо једначину

$$(1)\qquad \Delta\vec{K}=\vec{K}_2-\vec{K}_0=\vec{J}_A+\vec{J}_R=\vec{J},$$

где су: $\vec{K}_0$ и $\vec{K}_2$ количине кретања система пре и после удара, $\vec{J}_A$ главни импулс тренутних активних сила и $\vec{J}_R$ исто за силе реакција; $\vec{J}$ њихов збир. Тај закон се може изразити и овако:

$$(2)\qquad m\Delta\vec{v}_C=m(\vec{v}_{C2}-\vec{v}_{C0})=\vec{J},$$

где су: m маса система, $\vec{v}_{C0}$ и $\vec{v}_{C2}$ брзине центра маса система пре удара и после удара.

Други закон се формулише овако:

$$(3)\qquad \Delta\vec{l}=\vec{l}_2-\vec{l}_0=\vec{S}_A+\vec{S}_R=\vec{S},$$

где су: $\vec{l}_0$ и $\vec{l}_2$ моменти количина кретања система пре и после удара, а $\vec{S}_A$ и $\vec{S}_R$ главни моменти тренутних активних сила и сила реакција и $\vec{S}$ њихова резултанта. Сви моменти су узети у односу на исти пол. При томе, како смо то раније приметили, закон момента важи у истој форми и за непокретни и за покретни пол, јер за време удара покретни пол се не премешта.

У примени на чврсто тело наведена два закона се могу спецификовати. Пошто су за чврсто тело

$$\vec{K}=\mathrm{grad}_{v_A}\,T,\quad \vec{l}=\mathrm{grad}_{\omega}\,T,$$

за удар имамо ове две једначине:

$$(4)\qquad \Delta\,\mathrm{grad}_{v_A}\,T=(\mathrm{grad}_{v_A}\,T)_2-(\mathrm{grad}_{v_A}\,T)_0=\vec{J},$$

$$(5)\qquad \Delta\,\mathrm{grad}_{\omega}\,T=(\mathrm{grad}_{\omega}\,T)_2-(\mathrm{grad}_{\omega}\,T)_0=\vec{S}.$$

Ако узмемо за тачку A центар маса, тачку C, а за осе главне централне осе инерције са триједром $Cxyz$ и уведемо ознаке

$$\vec{v}_{C_2}-\vec{v}_{C_0}=\vec{v}_C\,(v_{Cx},\,v_{Cy},\,v_{Cz}),\quad \vec{\omega}_2-\vec{\omega}_0=\vec{\omega}\,(p,\,q,\,r),$$

претходне једначине доводе до ових скаларних једначина:

$$(4^*)\qquad mv_{Cx}=J_x,\quad mv_{Cy}=J_y,\quad mv_{Cz}=J_z,$$

$$(5^*)\qquad Ap=S_x,\quad Bq=S_y,\quad Cr=S_z,$$

где су A, B, C главни централни моменти инерције тела.

Јасно је да оба наведена закона могу бити формулисани у дивекторском облику. Заиста, ако са

$$\Delta\vartheta_k\,(\vec{K},\vec{l})$$

означимо прираштај кинетичког дивектора за време удара, а са

$$\vartheta_J\,(\vec{J},\vec{S})$$

означимо импулсивни дивектор, оба закона се изражавају овом дивекторском једначином

$$\Delta\vartheta_k\,(\vec{K},\vec{l})=\vartheta_J\,(\vec{J},\vec{S}).$$

§ 8 · 11. Специјални случајеви дејства тренутних сила на чврсто тело

1. Слободно тело

Ако је тело слободно, поново можемо написати

$$m\Delta\vec{v}_C=\vec{J},\quad \Delta\vec{l}=\vec{S}$$

са претпоставком да је $\vec{J}=\vec{J}_A$, $\vec{S}=\vec{S}_A$.

Прва једначина једноставно одређује прираштај брзине центра маса тела, ако је познат вектор $\vec{J}$.

За геометриско тумачење друге једначине конструишимо елипсоид инерције

$$Ax^2+By^2+Cz^2=k^2,$$

где је k^2 константа, и конструишимо тангентну раван на елипсоид са нормалом правца вектор $\vec{S}$. Тада није тешко доказати да је вектор положаја тачке додира паралелан са угаоном брзином $\vec{\omega}$. Пошто смо сличну конструкцију имали у геометриској интерпретацији Ојлеровог случаја обртања чврстог тела око непомичне тачке, нећемо овдe изводити тај доказ. Приметимо да је за константу k^2 са вредношћу

$$k^2=S_x{}^2/A+S_y{}^2/B+S_z{}^2/C$$

наведени вектор положаја тачке додира једнак прираштају $\vec{\omega}$ угаоне брзине.

2. Тело са једном непомичном тачком

Као што је познато (§ 1.4), ако за осе координата узмемо осе триједра $A\xi\eta\zeta$, главне осе инерције за тачку A, жива сила се одређује из једначине

$$2\,T=m\,(v_{A\xi}{}^2+v_{A\eta}{}^2+v_{A\zeta}{}^2)+2\,m\begin{vmatrix} v_{A\xi} & v_{A\eta} & v_{A\zeta} \\ p & q & r \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix}+J_\xi^{(A)}p^2+J_\eta^{(A)}q^2+J_\zeta^{(A)}r^2.$$

Према томе координате делимичних градијената за $\vec{v}_A=0$ имају вредности

$$m\,(q\zeta_C-r\eta_C),\quad m\,(r\xi_C-p\zeta_C),\quad m\,(p\eta_C-q\xi_C)$$
$$J_\xi^{(A)}p,\qquad J_\eta^{(A)}q,\qquad J_\zeta^{(A)}r.$$

Ако искористимо ове координате за једначине (4) и (5) претходног параграфа и узмемо у обзир да су те координате линеарне функције по p, q, r, можемо написати једначине удара овако:

$$(1)\quad m\,(q\zeta_C-r\eta_C)=J_\xi,\quad m\,(r\xi_C-p\zeta_C)=J_\eta,\quad m\,(p\eta_C-q\xi_C)=J_\zeta,$$

$$(2)\quad J_\xi^{(A)}p=S_{A\xi},\qquad J_\eta^{(A)}q=S_{A\eta},\qquad J_\zeta^{(A)}r=S_{A\zeta},$$

где су p, q, r координате прираштаја $\vec{\omega}=\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1$ угаоне брзине за време удара. Импулс $J\ (J_\xi, J_\eta, J_\zeta)$ садржи импулс активних сила $\vec{J}_A$ и импулс реакција $\vec{J}_R$, а вектор $\vec{S}_A$ је момент само активних тренутних сила, јер тренутна реакција дејствује само у тачки A и не даје момент у односу на ту тачку.

Одређивање кинематичког стања чврстог тела после удара и импулсивне реакције врши се на тај начин што, прво, из једначина (2), сходно претходном случају за слободно тело, одређујемо прираштај $\vec{\omega}\ (p,\ q,\ r)$ угаоне брзине, а затим се из једначина (1) одређује импулс силе реакције у тачки A према векторској једначини

$$\vec{J}_R=-\vec{J}_A+m\,[\vec{\omega},\vec{\rho}_C],$$

еквивалентној једначинама (1).

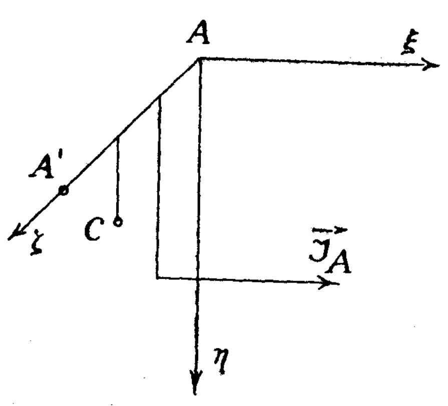
3. Тело са две непомнчне тачке

Нека су A и A' две непомичне тачке чврстог тела. Осу $A\zeta$ триједра $A\xi\eta\zeta$ наперимо по правој AA'. Осу $A\eta$ узмимо у равни тела која пролази кроз осу AA' и центар маса тела, тачку C (сл. 21).

Ако за овај случај искористимо живу силу из једначине

$$2\,T=m\,(v_{A\xi}{}^2+v_{A\eta}{}^2+v_{A\zeta}{}^2)+2\,m\begin{vmatrix} v_{A\xi} & v_{A\eta} & v_{A\zeta} \\ p & q & r \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix}+$$

$$+J_\xi\,p^2+J_\eta\,q^2+J_\zeta\,r^2+2\,\Pi_{\eta\zeta}\,qr+2\,\Pi_{\zeta\xi}\,rp+2\,\Pi_{\xi\eta}\,pq,$$



Слика 21

где су моменти и производи инерције израчунати за тачку A, координате делимичних градијената под условима

$$\vec{v}_A=0,\ p=q=0$$

имају вредности

$$-m\eta_C\,r,\ m\xi_C\,r,\ 0;\ \Pi_{\xi\zeta}r,\ \ \Pi_{\eta\zeta}r,\ J_\zeta r.$$

Тада једначине (4) и (5) претходног параграфа доводе до ових једначина за одређивање прираштаја $\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1=\vec{\omega}\ (p,q,r)$ угаоне брзине тела и одговарајућих тренутних реакција у тачкама A и A':

$$(3) \qquad -m\eta_C r = J_{A\xi} + J_{R\xi} + J_{R\xi}',$$

$$(4) \qquad m\xi_C r = J_{A\eta} + J_{R\eta} + J_{R\eta}',$$

$$(5) \qquad 0 = J_{A\zeta} + J_{R\zeta} + J_{R\zeta}';$$

$$(6) \qquad \Pi_{\xi\zeta} r = S_{A\xi} - l J_{R\eta}',$$

$$(7) \qquad \Pi_{\eta\zeta} r = S_{A\eta} + l J_{R\xi}',$$

$$(8) \qquad J_{\zeta} r = S_{A\zeta},$$

где је $l = AA'$, а остале ознаке су јасне из претходне теорије.

Одређивање непознатих врши се овим редом. Из (8) одређује се r. Из (7) и (6) одређују се $J_{R\xi}'$ и $J_{R\eta}'$, па се потом из (3) и (4) одређују $J_{R\xi}$ и $J_{R\eta}$. Најзад из једначине (5) можемо одредити, али само у облику збира, $J_{R\zeta} + J_{R\zeta}'$. Задатак постаје потпуно одређен, ако, рецимо, тачка A' не даје реакције у правцу праве AA'.

И овде анализирајмо случај кад је оса AA', тако рећи, *слободна оса удара*, тј. ако у тачкама A и A' не дејствују импулсивне реакције тј. $\vec{J}_R = 0$, $\vec{J}_R' = 0$.

Једначине (3) — (8) тада имају облик

$$-m\eta_C r = J_{A\xi}, \qquad \Pi_{\xi\zeta} r = S_{A\xi},$$

$$m\xi_C r = J_{A\eta}, \qquad \Pi_{\eta\zeta} r = S_{A\eta},$$

$$0 = J_{A\zeta}; \qquad J_{\zeta} r = S_{A\zeta}$$

и доводе до услова

$$(9) \qquad \frac{J_{A\xi}}{-m\eta_C} = \frac{J_{A\eta}}{m\xi_C} = \frac{J_{A\zeta}}{0} = \frac{S_{A\xi}}{\Pi_{\xi\zeta}} = \frac{S_{A\eta}}{\Pi_{\eta\zeta}} = \frac{S_{A\zeta}}{J_{\zeta}}.$$

Може се набројати више случајева кад су задовољени ови услови. На пр., ако је оса AA' главна централна оса инерције тела, а на тело дејствује само тренутни спрег са осом AA', реакције у тачкама A и A' биће једнаке нули.

Претпоставимо да на тело дејствује само једна тренутна сила. Проучимо посебице услове кад дејство такве силе не изазива тренутне реакције у тачкама A и A'.

Како смо изабрали осе тако да је $\xi_C = 0$, из (9) имамо:

(I) $$J_{A\eta} = J_{A\zeta} = 0.$$

Према томе импулс силе треба да буде паралелан са ξ осом. Означимо тачку пресека тог импулса са $A\eta\zeta$ равни са Γ и координате те тачке са $(0, \eta_\Gamma, \zeta_\Gamma)$. Тада имамо

$$S_{A\xi} = 0, \quad S_{A\eta} = J_{A\xi}\zeta_\Gamma, \quad S_{A\zeta} = -J_{A\xi}\eta_\Gamma.$$

Ако те вредности ставимо у једначине (9), добићемо вредност

(10) $$\Pi_{\xi\zeta} = -\Sigma m_i \xi_i \zeta_i = 0,$$

а остале услове у облику

(11) $$\frac{1}{-m\eta_C} = \frac{\zeta_\Gamma}{\Pi_{\eta\zeta}} = \frac{-\eta_\Gamma}{J_\zeta}.$$

Како је

$$\Sigma m_i \xi_i = m\xi_C = 0,$$

услов (10) можемо сменити условом

(12) $$-\Sigma m_i \xi_i (\zeta_C - \zeta_\Gamma) = 0.$$

Даље из (11) следује

$$\Pi_{\eta\zeta} = -\Sigma m_i \eta_i \zeta_i = -m\eta_C\zeta_\Gamma.$$

Како је

$$-\Sigma m_i \eta_i \zeta_\Gamma = -m\eta_C\zeta_\Gamma,$$

закључујемо да је и

(13) $$-\Sigma m_i \eta_i (\zeta_i - \zeta_\Gamma) = 0.$$

Из услова (12) и (13) следује да су

(II) $$\Pi^{(\Gamma_0)}_{\xi\zeta} = \Pi^{(\Gamma_0)}_{\eta\zeta} = 0,$$

где је Γ_0 пројекција тачке Γ на осу AA'. То значи да за пол Γ_0 оса AA' треба да буде главна оса инерције.

Најзад из (11) можемо написати

(III) $$\eta_C\eta_\Gamma = \rho^2,$$

где је ρ крак инерције тела за осу AA', тј. $J_\zeta = m\rho^2$. Овај последњи услов је сличан услову који смо поставили за конјуговане осе физичког клатна (§ 3.3).

Ако су испуњена три услова (I), (II) и (III), онда од удара тренутне силе импулса $\vec{J}_A$ $(J_{A\xi}, 0, 0)$, чија права пролази кроз тачку Γ $(0, \eta_\Gamma, \zeta_\Gamma)$, на осу AA' у тачкама A и A' неће дејствовати тренутне реакције.

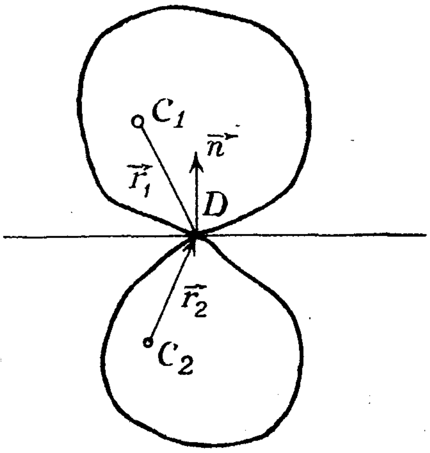
Тачка са Γ координатама

$$\xi_\Gamma = 0, \quad \eta_\Gamma = \frac{J_\zeta}{m\eta_C} = \frac{\rho^2}{\eta_C}, \quad \zeta_\Gamma = -\frac{\Pi_{\eta\zeta}}{m\eta_C}$$

назива се *Центар удара.*

§ 8 · 2. Судар два тела

Судар два или више тела претставља компликовану физичку појаву и проучавање те појаве стварно спада у теорију еластичности, јер при судару физичких тела основну улогу играју еластичне особине тих тела. Међутим при приближном и идеализованом посматрању те појаве може се створити о дејству еластичних сила таква хипотеза која поставља правила на основу којих можемо одредити главни вектор и главни момент оних еластичних сила које дејствују на тело за време удара. Такав идеализован задатак судара тела спада у проучавања рационалне механике. У овом параграфу решавамо тако постављени задатак судара два тела.



Слика 22

Нека се у тачки D (сл. 22) сударају два тела маса m_1 и m_2 са центрима маса C_1 и C_2. Нека у тачки D, постоји, рецимо, за прво тело, одређена тангентна раван, и неко је $\vec{n}$ орт унутрашње нормале површине првог тела у тој тачки.

Са претпоставком да индекс i узима вредност 1 за прво тело и 2 за друго тело уведимо ове ознаке:

$\vec{v}_{i0}$	брзина тачке C_i при почетку судара,
$\vec{v}_i$	прираштај брзине тачке C_i за све време судара,

$\vec{v}_{i2}=\vec{v}_{i0}+\vec{v}_i$	брзина тачке C_i на крају судара
$\vec{\omega}_{i0}$	угаона брзина i' тог тела у почетку судара
$\vec{\omega}_i$	прираштај угаоне брзине за све време судара,
$\vec{\omega}_{i2}=\vec{\omega}_{i0}+\vec{\omega}_i$	угаона брзина на крају судара,
$\vec{l}_{i0}(l_{i01}, l_{i02}, l_{i03})$	момент количина кретања i' тог тела у односу на тачку C_i са координатама у односу на главне осе инерције i' тог тела и то за почетни тренутак судара,
$\vec{l}_i(l_{i1}, l_{i2}, l_{i3})$	одговарајуће величине за прираштај момента
$\vec{l}_{i2}(l_{i21}, l_{i22}, l_{i23})$	одговарајуће величине момента на крају судара,
$\vec{r}_i$	вектор положаја тачке D у односу на тачку C_i,
$\vec{J}_i$	импулс реакције у тачки D која дејствује на i' то тело,
$\vec{S}_i$	момент импулса реакције у тачки D у односу на тачку C_i,
A_i, B_i, C_i	главни централни моменти инерције i' ог тела.

Ако се зауставимо на случају *судара без трења*, импулси реакција треба да буду у правцу нормале $\vec{n}$ и супротног смера једна према другој. Ставимо

$$\vec{J}_1=J\vec{n}, \quad \vec{J}_2=-J\vec{n},$$

Како је

$$\vec{S}_i=[\vec{r}_i, \vec{J}_i],$$

имамо

$$\vec{S}_1=J[\vec{r}_1, \vec{n}] \quad \vec{S}_2=-J[\vec{r}_2, \vec{n}].$$

Помоћу наведених ознака можемо, прво, изразити закон прираштаја количине кретања и закон прираштаја момента количина кретања за свако тело посебице:

$$m_i\vec{v}_i=\vec{J}_i, \quad \vec{l}_i=\vec{S}_i$$

или

$$m_1\vec{v}_1=J\vec{n}, \quad m_2\vec{v}_2=-J\vec{n}, \tag{1}$$

$$\vec{l}_1=J[\vec{r}_1, \vec{n}], \quad \vec{l}_2=-J[\vec{r}_2, \vec{n}]. \tag{2}$$

Помоћу написаних израза можемо потврдити да су прираштаји количине кретања и момента количина кретања за целокупни систем од два тела једнаки нули, при чему главни момент треба израчунати за центар целокупог система.

За прираштај количине кретања непосредно имамо

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = J\vec{n} - J\vec{n} = 0.$$

Ако са C означимо центар маса целокупног система, имамо

$$\overrightarrow{CC_1} = \vec{r}_C - \vec{r}_1, \quad \overrightarrow{CC_2} = \vec{r}_C - \vec{r}_2.$$

Према томе за прираштај момента изводимо

$$\vec{l}_1 + [\vec{r}_C - \vec{r}_1, m_1 \vec{v}_1] + \vec{l}_2 + [\vec{r}_C - \vec{r}_2, m_2 \vec{v}_2] =$$

$$= J[\vec{r}_1, \vec{n}] + J[\vec{r}_C - \vec{r}_1, \vec{n}] - J[\vec{r}_2, \vec{n}] - J[\vec{r}_C - \vec{r}_2, \vec{n}] = 0.$$

На тај начин, за одређивање четири вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ и једног скалара J имамо четири векторске једначине (1) и (2).

За добивање још једне, скаларне једначине, користимо Карноов резултат у облику (§ 10.4, II):

$$(3) \qquad T_2 - T_0 = -(1-\varepsilon^2)\, T_{10},$$

где је T_0 жива сила целокупног система у почетку судара, T_2 — исто после судара, ε коефицијент успостављања (§ 12.3, I), а T_{10} жива сила изгубљених брзина, тј. жива сила кад су брзине тачака смењене разликама брзина у почетку кретања и на крају првог акта судара. Према томе величина T_{10} не може бити негативна.

За израчунавање резлике ставимо

$$T_2 - T_0 = \sum_{i=1}^{2} (T_{i2} - T_{i0}).$$

После примене обрасца (1) § 1.6 израчунавамо

$$T_2 - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} [m_i\, v_{i2}^2 + (\vec{l}_{i2}, \vec{\omega}_{i2}) - m_i\, v_{i0}^2 - (\vec{l}_{i0}, \vec{\omega}_{i0})].$$

Ако извршимо све показане операције и искористимо једначине (1) и (2), добићемо из (3) ову квадратну једначину по J:

$$(4) \qquad a J^2 + 2 b J + c = 0,$$

где су

$$a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{m_i} + \frac{\alpha_i^2}{A_i} + \frac{\beta_i^2}{B_i} + \frac{\gamma_i^2}{C_i} \right),$$

$$2\,b = (\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}, \vec{n}) + l_{101}\,\alpha_1 / A_1 + l_{102}\,\beta_1 / B_1 +$$

$$+ l_{108}\,\gamma_1 / C_1 - l_{201}\,\alpha_2 / A_2 - l_{202}\,\beta_2 / B_2 - l_{203}\,\gamma_2 / C_2,$$

$$c = (1 - \varepsilon^2)\, T_{10},$$

При томе су α_i, β_i γ_i координате вектора $[\vec{r}_i, \vec{n}]$ у односу на главне осе инерције одговарајућег тела.

Једначина (4) има корене

$$J = -\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - a\,c}\,. \tag{5}$$

За потпуно еластични судар је $\varepsilon = 1$, па према томе је $c = 0$, а решење (5) узима облик

$$J = -\frac{b}{a} \pm \frac{b}{a}\,.$$

Како је $J \neq 0$, закључујемо да је потребно задржати само знак минус и према томе дефинитивно имамо

$$J = -\frac{b}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - ac}\,. \tag{6}$$

Корен у претходном изразу треба да буде увек реалан, а то даје

$$b^2 \geqslant ac.$$

Тај услов треба да важи за све могуће сударе, а то значи треба да важи и за највећу вредност десне стране. Како је $a > 0$ и не зависи од b, тј. од природе судара, треба ставити

$$b^2 = a\,c_{max}\,.$$

Пошто је $c = c_{max}$ за $\varepsilon = 0$ и при томе тај максимум има вредност T_{10}, закључујемо да је $c_{max} = b^2/a = T_{10}$. Према томе у општем случају је $c = (1 - \varepsilon^2)\, T_{10} = (1 - \varepsilon^2)\, b^2/a$, тј.

$$ac = (1 - \varepsilon^2)\, b^2\,.$$

На тај начин долазимо из (6) до ове дефинитивне вредности импулса

$$J = -(1+\varepsilon)\frac{b}{a}.$$

Са том вредношћу импулса можемо према (1) и (2) израчунати прираштаје количина кретања и импулса количина кретања, а затим и кинематичко стање оба тела на крају судара.

Зауставимо се на такозваном *централном судару*, кад у почетку судара три тачке C_1, D, C_2 леже на нормали са ортом $\vec{n}$. Тада су

$$a = \frac{1}{2}(1/m_1 + 1/m_2),$$

$$2b = (\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}, \vec{n}),$$

$$c = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}, \vec{n})^2 (1-\varepsilon^2).$$

Импулс J узима вредност

$$J = -(1+\varepsilon)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}, \vec{n}).$$

За потпуно еластичан централни судар имамо исте вредности за a и b, а $c=0$. Једначина (4) има један корен $J=0$, који је беспредметан, а други је

$$J = -2b/a = -2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}, \vec{n}).$$

За проверавање резултата, у сваком конкретном задатку, од користи је и на дефинитивном решењу проверити закон прираштаја количине кретања и закон прираштаја момента количина за целокупни систем од два тела. Понекад примена само тих закона даје решење проблема о судару.

Кратак преглед историје рационалне механике

У свом курсу рационалне механике изнео сам у довољној мери садржај и методу рационалне механике као дедуктивне науке. Дедуктивно стварање савремене рационалне механике вршило се постепено. Дедуктивном формирању је претходио чисто индуктивни период, период скупљања факата из природе. Тај чисто индуктивни период имао је своју врло дугу историју, а продужује се и данас. На исти начин као што паралелно са дедуктивном постоји и индуктивна, па и практична геометрија, тако данас паралелно са дедуктивном механиком постоји и физичка и практична механика, која проучава конкретне физичке појаве механичке природе и служи практичним циљевима. Физичка механика, с једне стране, искоришћује схеме рационалне механике, која је сад добила назив *класичне механике*, с друге стране даје потстрек увођењу нових теориских схема, које имају задатак да објасне и оне физичке појаве које се не могу протумачити непосредном применом схема класичне механике.

Из тога што је дедуктивна механика израсла на тлу факата и развитка индуктивне механике непосредно следује да у историји целокупне механике пре свега треба говорити о индуктивној механици, и то о њеном почетку од најдавнијих времена. Али то је једно специјално питање доисториске културе, о којем немам могућности овде да говорим. Треба поменути само онај период индуктивне механике који је непосредно претходио појави рационалне механике. Разуме се да је немогуће *објективно* тачно одредити моменат када се појавила рационална механика. За тај моменат ћемо условно сматрати 1687 годину, годину изласка из штампе првог издања Њутнових Philosophiae naturalis principia mathematica, кратко Principia, карактерисан овом реченицом у предговору: Mechanicam vero duplicem veteres constituerunt: rationalem, quae per demonstrationes acurate procedit, et practicam. Али разлог за узимање тог момента није у томе што је Њутн назвао своју механику рационалном, већ у томе што је Њутн заиста први у својим Principia формулисао и развио своју механику на бази сличној оној на којој је била развијена геометрија Еуклидових Елемената, који су и тада били сматрани као узор дедуктивног излагања.

Пређимо на кратак списак Њутнових претходника.

Сматра се да је, у својим тумачењима различитих механичких изума, Аристотел (384–322 пре н. е.) први споменуо μηχανικὰ προβλήματα. Према томе од Аристотела можемо у неку руку рачунати почетак индуктивне механике у облику свесног прикупљања механичких факата.

Даље троба навести велико име Архимеда (287–212 пре н. е.) као оснивача индуктивне статике са знатним применама теориских, углавном математичких расуђивања.

Затим треба да прескочимо неколико столећа и наведемо Галилео-Галилеја (1564–1642), оснивача индуктивне динамике. Према томе је формулисање, чак и у индуктивном облику, неких динамичких „закона“ заостало иза статике више од осамнаест столећа. Улога Галилеја била је нарочито значајна у формирању новог научног гледања на свет. Од његових расправа два дела „Dialogo“ и „Discorsi“ била су врло популарна; она су однела победу нових идеја над старим схолистичким. У „Discorsi“ и „Scienza meccanica“ Галилеј је проучавао слободни пад тела, теорију простих машина, начела теорија еластичности и др. Биографија Галилеја је врло поучна како са научног тако и са политичког гледишта.

За утврђивање нових научних позиција велику улогу је одиграо Галилејев савременик, енглески научник Франсис Бекон (1566–1626) нарочито својим делом „Novum Organum scienciarum“. Ради карактерисања његовог погледа на стварање науке, навешћу само једну реченицу која се у највећој мери односи на поделу механике на индуктивну и дедуктивну.

„Наш пут и наша метода... састоји се у овом: ми, као емпиричари, извлачимо не практично из практичног и експеримент из експеримента, већ узроке и аксиоме из практичног и експеримената, а из узрока и аксиома — поново практично и експерименте, као верне тумаче Природе“.

Треба споменути и Декарта (1596–1650), који је својим научним радовима много допринео формирању и механике у тачну математичку дедуктивну науку.

Тако смо дошли до краја седамнаестог века. Исте 1687 године кад су била штампана Њутнова Principia француски математичар Pierre Varignon (1654 - 1722) штампао је „Projet de la nouvelle mécanique“ где је поставио статику готово на савремену научну основу. Према томе, ако Њутна (1642 – 1727) сматрамо као првог оснивача рационалне механике, што се тиче статике део те заслуге треба да припадне Варињону.

За разумевање даљег тока развитка рационалне механике треба навести две специфичне особине Њутнових Principia.

Пре свега треба узети у обзир епоху у којој је живео и радио Њутн у Енглеској. То није била епоха материјалистичког посматрања на бази непоколебљиве логике. Научно проучавање није било још ни тако искристалисано као што је било у време, рецимо, Платона и Еуклида у класичној Грчкој. „Мистичка теорија богослова Јакова Беме, дискусије католичке и англиканске цркве, филолошка вежбања са покушајима да се све сведе на прајезик-јеврејски, којим су, изгледало је, говорили Адам и Ева, — ево, пише С. И. Вавилов, — неких тема из научног стваралаштва Кембрица из доњутновог периода. Утицај ове богословске атмосфере на Њутна до краја његовог живота је несумњив. Најубедљивији доказ таквог свог духовног стања дао је сам Њутн у својим теолошким радовима и специјално у „Тумачењима Апокалипсе“, која је он написао под утицајем књиге научника Медеа „Кључ Апокалипсе“, у којој је била констатована веза између божанског откровења и стварне историје. Према томе као прву особину Њутнових Principia можемо навести ово. Огромна, генијална интуиција у његовој књизи написаној са толико математичке логике ипак је била у некој мери помућена атмосфером оног времена. То се показује на више места. Еуклид ни на једном месту није употребио логичку, суштинску дилему. А код Њутна имамо „axiomata“ — дедуктивне методе, или „leges“ индуктивне. Тек после дугог времена у такозваном неоњутонијанству то је било рашчишћено.

Као другу важну особину Principia треба споменути методу излагања. Њутн је у облику теорије флуксија пронашао невероватно моћан математички апарат баш за проучавање таквих питања као што су питања механике, а баш тај апарат не примењује у својим Prinipia, већ се у већини случајева служи само синтетичком геометријом и алгебром. Оно што је било природно у Еуклидовом излагању основа геометрије, изгледало је гломазно и непотребно при излагању динамике после проналаска инфинитезималног рачуна. Еуклидови елементи, баш у Енглеској, понекад и данас служе као књига одабрана за школе, док Њутнове Prinipia, чак и специјалисти узимају у руке само када се баве историјом механике и математике. Књига није била популарна чак ни у Енглеској. Њутнове идеје су добиле своју праву научну вредност тек када су биле пренесене на континент, и то углавном заслугом Voltaire'a (1694—1778), који је написао специјалну расправу под насловом „Eléments de la philosophie de Newton mis à la portée de tout le monde“ (Amsterdam, 1738) и који је препоручио маркизи ди Шатле (1703—1749) да она преведе Principia на француски језик. Тај превод са примедбама Клероа штампан је 1759 године, десет година после смрти маркизе.

Наведимо још имена оних научника који су својим радовима допринели напретку механике пре Њутна. То су: Архимед (287—212 пре н. е.) Леонардо да Винчи (1452—1519), Коперник (1473—1543), Галилео Галилеји (1564—1642), Тихо Брахе (1564—1601), Кеплер (1571—1630), Торичели 1608—47), Паскал (1623—62), Хајгенс (1629—95).

Са Њунтом је повезана делатност Г. Лајбница (1646—1716), чији је цео живот протекао за време Њутновог живота. Свима је познат спор између Њутна и Лајбница о приоритету проналаска инфинитезималног рачуна. Тај спор се продужио и после смрти проналазача.

Пређимо сад на преглед развитка рационалне механике после смрти Њутна. Пред нама су два и по столећа — осамнаесто, деветнаесто и половина двадесетог. Пошто је изнети, у кратком прегледу, потпуни развитак рационалне механике за тако велики период, и то са тако плодним резултатима, врло тешко, морамо се ограничити само на приказ главних линија како развитка садржаја те научне дисциплине, тако и напредовања у начину излагања, при чему ћу углавном узети у обзир онај део рационалне механике, који се односи на оно што сам предавао на универзитету, не узимајући у обзир ни хидромеханику, ни механику непрекидних средина уопште.

Пре свега треба нагласити да је немогуће говорити о развитку ма и једне специјалне гране културе, а да се при томе не осврнемо и на општу историску платформу тог времена. Ја ћу читаоца потсетити само са неколико речи на главне моменте везане за осамнаести век.

У Француској Луј XIV (1643—1715), па XV (1715—1774), XVI (1774—1792). Почетак револуције 1789. Република 1793. Наполеон први конзул 1799. Културни покрет: Diderot (1713—84), Rousseau (1712—78), Voltaire (1694—1778). Ово све карактерише епоху, која је у историји добро разрађена, а треба имати на уму и оно шта је било у то време у другим земљама.

Сад можемо навести оне научнике који су се бавили механиком, а како је то у тесној вези, и математиком.

Главна личност осамнаестог века је несумњиво Леонард Ојлер (1707—1783), који се родио почетком а умро крајем осамнаестог столећа. Можда није било у историји наука уопште тако значајне научне појаве као што је појава Ојлера. Она се јавља као резултат више компонената. Разуме се да је прва компонента генијалност самог Ојлера. Друга кампонента била би стање науке у то време. Њутн и његови претходници поставили су, с једне стране, главне основе механике, а с друге — Њутн и Лајбниц показали су нови математички апарат, инфинитезимални рачун. Природно је било применити тај апарат на ново формулисане проблеме механике, па уопште и математике и физике. Ове улоге прихватио се са одушевљењем Ојлеров геније. Али постојала је још и трећа компонента — то су услови у којима је Ојлер радио, нарочито у Русији. 1723 године добио је, у Базелу, степен магистра математике, — имао је тада 16 година; у 21 години био је позван у Руску академију наука, где је 1730 године, у 27-ој години живота постао професор и академик. 1741 године позвао га је Фридрих Велики у Берлинску академију наука, где је био директор математичког одељења, али 1766 године он се поново враћа у Петроград и тамо је остао до смрти. Ојлеров положај у Русији био је изванредан; њему је била стављена на расположење група младих способних матаматичара, који су разрађивали Ојлерове идеје, више пута преписивали његове рукописе, обављали разне рачуне и вршили коректуру.

Нема ни једне области ни математике ни механике која не би водила своје порекло од Ојлера, разуме се уколико је та област била актуелна у Ојлерово време. Ојлер има огроман број радова, који још и до данас нису сви штампани. У Index'у његових радова штампаном 1896 године било је наведено 796 радова, од којих су 28 велики и износили су више књига. Од тих великих радова механици припадају ова класична дела: Mechanica sive motus scientia, analytice exposita, две књиге. Petropoli 1736 г. Theoria motus corporum solidorum 1765.

У тесној вези са механиком је и његов рад о варијационом рачуну: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes 1744.

Ојлер је био у осамнаестом веку главни носилац теориске механике и физике, али није једини. Било је и других великана. У те великане пре свега треба убројати Jean Lerond d'Alembert'a (1717—1783) са његовим Traité de dynamique, Paris, 1743; име d'Alembert'a је нарочито везано за његов принцип, који улази данас у сваки и најелементарнији уџбеник рационалне механике. Улога Даламберова у Француској била је огромна. Заједно са Diderot'ом он је руководио издавањем чувене француске енциклопедије од 33 књиге (1751—80), у којој је написао увод, систематски преглед наука по Бекону и математичке чланке, који су и данас очували своју свежину.

Истом столећу припада и научна делатност чланова породице Bernoulli. То је чувена породица која је дала читав низ професора и научника не само у области математике и механике, већ и у областима других наука. Од математичара најславнији су били Jakob (1654—1705), Johann, Jakob'ов брат (1667—1748) и Daniel (1700—1782), Johann'ов син. Сви су се они бавили сем математике и механиком и у великој мери користили тада нову методу инфинитезималног рачуна. Свега знамо седам Bernoulli'a који су били научници: шесторица су били математичари и механичари а један је био археолог. Чланови те породице били су професори математике не само у својој отаџбини Швајцарској, већ и у другим земљама — у Немачкој, Русији, Италији.

У осамнаестом столећу теориска механика није била ни најмање одељена од математике: сви чувени математичари тог времена бавили су се у исто време и тежим проблемима механике. Нарочито су били блиски односи између математике и небеске механике. D'Alembert се бавио теоријом месечева кретања, којим су се бавили у исто време Ојлер и Клеро. D'Alembert је разрадио теорију прецесије (поставио је период од 26 хиљада година) и нутације, појаве која је била уочена 1721 године. Он се бавио и питањем облика Земље.

У оно време Даламберов ривал у проучавању небеске механике био је изванредно талентован математичар Клеро. Alexis Claude Clairaut (1713—1765), син средњошколског професора математике, претставља заиста једну реткост у врсти homo sapiens'a. Beћ у деветој години изучавао је курс више математике l'Hospital'a (1661—1704). У 13-ој години пријавио је Француској академији рад: „О четири врсте кривих линија које имају специјалне особине". У осамнаестој години постао је академик. 1743 г. изашло је његово класично дело: „Théorie de la figure de la terre" а 1752 г. друго дело — „Théorie de la lune". Он је први поставио диференцијалне једначине проблема трију тела. Клеро се нарочито прославио својим истраживањем Halley-ове комете. Halley је установио периодичност ове комете са периодом од око 76 година. Требало је да се појави 1758 године; међутим није се појавила. Клеро је израчунао да, због Јупитера и Сатурна, период мора да буде дужи за једну годину и осам месеци и да се комета мора појавити 4. априла 1759 године. Клеро је погрешио само за 22 дана, тако да се комета појавила раније; њу је пронашао сељак Палич у Саксонији. Ова победа тачне науке имала је огроман утицај на сузбијање различитих облика празноверја и на утврђивање материјалистичког погледа на свет. Тим поводом је Волтер написао чак и стихове.

Клерови прорачуни су у великој мери потврдили Њутнов систем, али ни сам Њутн и Ојлер нису били још потпуно сигурни да се само под утицајем утврђених сила гравитације све дешава у нашој васиони. Мислили су ипак да нека ванприрдна сила мора понекад да утиче да би довела у склад наш систем, јер би без те силе узајамни поремећаји између планета извели наш сунчани систем из стабилности. Решење питања стабилности нашег система у својој првој, елементарној форми дао је чувени француски математичар, механичар и астроном Pierre Simon Laplace (1749—1827). По својим првим радовима Лаплас припада дореволуционом периоду француске науке. Он је радио за време револуције и после револуције са Наполеоном, који је волео математику, поштовао Лапласа, поставио га је чак за министра, али га је брзо уклонио са тог положаја, јер је видео да Лаплас није за тај посао. Лаплас је врло много урадио како у области математике тако и механике. Он је био нарочити мајстор у примени нове гране инфинитезималног рачуна, теорије диференцијалних једначина. У томе је његова велика заслуга.

Са Лапласовим именом је везан принцип таквозваног „механичког детерминизма“. Најбоље можемо окарактерисати тај принцип речима самог Лапласа: „Разумно створење, које би у сваком тренутку знало све силе-покретаче у природи и имало потпуну слику стања, у коме се природа налази, могло би — ако би његов разум био у стању да проучи ове податке, — изразити помоћу једне једине једначине како кретање највећих тела васионе, тако и кретање најмањих атома. Ништа за њега не би остало непознато, и оно би могло обухватити једним погледом како будуће тако и оно што је прошло“. (Из „Essai philosophique sur les probabilités“. Paris. 1814).

У почетку француске револуције (1789), Ојлер је био умро (1783), а Лагранж се вратио из Берлина у Париз и Париз је постао светски центар развитка и манифестација математичке културе. Делатношћу плејаде чувених француских математичара завршава се осамнаести век и почиње деветнаести, Тој плејади припадају: Laplace, Lagrange (1736 - 1813), Arago (1786 - 1853), Monge (1746 - 1818), Poisson (1781 - 1840), Poinsot (1777 - 1859), Poncelet (1788 - 1867), Lacroix (1765 - 1843) и др.

Нарочито важну улогу у механици одиграо је Лагранж својом „Mécanique analytique“ 1788 године. Назависно од нових резултата који су били објављену у овој књизи, она је постала класична по оној методи на основу које је Лагранж развио своју целокупну механику. Он је нарочито нагласио да у том његовом делу нема никаквог геометриског елемента, ниједне слике. То није каприс, већ је то свесно избегавање сваког интуитивног елемента, који је био толико компромитован после критичног прегледа претходних не само механичких већ и математичких извођења, недовољно логички образложених.

Ако фиксирамо само најглавније моменте у историји механике до XIX века могу се истаћи само ови мислиоци: Архимед, Галилеј, Њутн, Ојлер, Лаплас и Лагранж.

У деветнаести век рационална механика је већ ступила са чврстом основом и сјајним резултатима.

Сем разрађивања општих принципа и стварања што јасније опште концепције, рационална механика је поставила себи два основна задатка.

Први задатак је уствари задатак небеске механике, а у фокусу тог задатка се налази проблем трију тела. То је област небеске механике, као дела рационалне механике. Она је ставила себи као задатак што дубљу примену закона гравитације ради објашњења свих небеских кретања. Она је чисто теориским путем пронашла прво 1846 године једну нову планету Нептуна (Urbain Leverrier, 1811 - 1877), а затим, ако се пренесемо тим поводом у наше столеће, 1930 године и другу нову планету — Плутона (Percival Lowell, 1855 - 1916). Без обзира на то што предвиђања једне и друге нове планете нису била довољно тачна и изазивала различита мишљања о заслугама Leverrier'а и Lowell'а, ипак је несумњиво да је рационална, дедуктивна механика доказала своју рационалност и у тој својој примени показала велику сјајну улогу. Теорија такозваних поремећаја сва се заснива на бази рационалне механике.

На проблемима небеске механике се радило цело деветнаесто столеће, па се ради и данас у двадесетом веку. Проблем трију тела не престаје да буде један од главнијих задатака ове механике и подвргава се математичкој анализи са свих могућих гледишта. Још је Лагранж пронашао два специјална случаја кад се решење тог проблема изводи у коначном, затвореном облику — то је случај праволиниског кретања и случај кретања у облику равностраног троугла. Опширни уџбеници рационалне механике (напр. E. T. Whittaker'а) посвећују посебне главе проблему трију тела. Обрађивање тог проблема увек је давало потстрека новим општим проучавањима у области рационалне механике, нарочито у области интегрисања диференцијалних једначина динамике. Интегрисање тих једначина је постало чак посебна грана у математици.

У теорији тих једначина у XIX столећу треба нагласити ову узастопност. Пре свега се само постављање диференцијалних једначина све више и више модификовало. Од прве Њутнове форме можемо навести три главна правца, три главне методе за састављање диференцијалних једначина механичких проблема. Прва метода је метода непосредне трансформације једних једначина у друге. Друга метода је метода такозваних диференцијалних принципа. Ту спада d'Alambert'ов принцип, Lagrange'ев принцип, Gauss'ов принцип (K. F. Gauss — 1777—1855) и др. Трећа метада — тако звани интегрални принципи: Мопертији — Лагранжев, Hamilton'ов, Херцов принцип идр. [Moreau de Maupertuis, 1698—1759; William Rawan Hamilton, 1805—1865; Heinrich Hertz, 1857—94]. Наведимо да је Херц, чувени проналазач електричних таласа, написао књигу о принципима механике, у којој је развио дедуктивну механику на другој основи, различитој од Њутнове; такво излагање је добило и специјалан назив Херцове механике. Херц је умро у 37 години свог живота. У предговору Херцове механике, која је била штампана после ауторове смрти, Hermann v. Helmholtz (1821—1894), написао: „. . . , er sei dem Neide der Götter zum Opfer gefallen“, тј. да је он пао као жртва зависти богова.

Забележимо да формулисање различитих механичких принципа, диференцијалних и интегралних, није ишло тако једноставно како би се о томе могло мислити на основу излагања тих принципа у савременој литератури. Увек су се са тим принципима мешале неке опште идеје о законима природе, па чак и опште философске идеје чисто метафизичког карактера. Оно што ми данас сматрамо за теореме, за закључке, мешало се са принципима. Индуктивни, природни део механике, није се разликовао од логичког, дедуктивног дела. Теореме и принципи механике су без довољно обазривости и критике преношени у друге области, у физику, у хемију, у биолошке науке; ако што није било добро, оптуживана је механика. Читав низ механичких појмова преносио се у друге дисциплине, напр. у политичку економију, где чак не и основни појмови нису добили тачан, строго ограничен садржај. Такав положај механике био је штетан пре свега по саму механику. Механички детерминизам је умесан у чисто механичком проблему, али је опасан кад са таквом схемом зажелимо да решавамо све проблеме органског и неорганског света. Лапласов механички детерминизам класичне механике искључивао би схеме савремене некласичне механике. Метафизички елемент у механици много је сметао нормалном, логичком развитку те дисциплине. Погледајмо шта је било у математици: Еуклид је написао своје Елементе без икакве везе са природним мерењима и као резултат његова геометрија је задржала своју истинитост више од хиљаду година.

Различитим путевима, али у сваком случају у XIX веку, основи механике били су довољно рашчишћени и механичари са математичарима почели су концентрисати своје снаге на много тежем делу механике и математике, на интегрисању диференцијалних једначина динамике. После релативно једноставних задатака, које је готово све решио још Ојлер, приступило се стварању различитих општих теорија интегрисања.

Пре свега сама механика има могућност да помогне математичару при интегрисању помоћу такозваних општих теорема механике и закључака из тих теорема, који под извесним условима доводе до непосредног писања интеграла проблема. Та страна интегрисања у данашње време готово је завршена. Интеграли количине кретања, момента количина кретања и живе силе могу се написати из чисто механичких посматрања. Теорија тих интеграла била је разрађена још код Лапласа у његовом капиталном делу од пет великих књига: Traité de mécanique céleste. Paris. 1843—1846. Ова теорија је била допуњена теоријом специјалних координата, рецимо, цикличних координата, чије увођење или олакшава интегрисање или чак непосредно доводи до одговарајућих интеграла. У том правцу интегрисању су помогли радови енглеских математичара.

Затим се појавио нов задатак: искористити добијене интеграле и помоћу њих снизити ред система диференцијалних једначина, при чему је пожељно да нов систем буде у што једноставнијем и погоднијем облику. Такав погодан облик био је облик каноничних једначина, чију је главну теорију поставио Хамилтон. Довођење новог система једначина на канонични облик, нарочито у проблемима небеске механике и специјално у проблему трију тела, био је једно време врло актуелан задатак, али у току времена се показало, нарочито у небеској механици, да ово свођење не доводи до важних и практички употребљивих резултата.

Тако се развијао такозвани формални период интегрисања једначина динамике. Важно место у том периоду заузимају радови K. G. J. Jacobi'a (1804—1851), који је створио и нарочиту теорију решавања проблема механике помоћу интегрисања парцијалне диференцијалне једначине. Он је развио, у својим предавањима: „Vorlesungen über Dynamik“, која је штампао после Jacobi'ebe смрти математичар R. F. A. Clebsch (1833—1872) 1866 године, ту теорију и решио неке нове механичке и геометриске задатке који до тог времена нису били решени. Jacobi је био професор Берлинског универзитета и члан Берлинске академије наука. Постигао је велике резултате у теорији елиптичких функција, у теорији бројева, у теорији парцијалних диференцијалних једначина, а у вези са тим и у механици.

Формалном теоријом интеграције диференцијалних једначина динамике бавио се још читав низ математичара, али немамо могућности да набрајамо њихове резултате.

У последњој четврти деветнаестог века појављују се и развијају још два нова начина третирања диференцијалних једначина динамике нарочито небеске механике.

Један начин био је интеграција једначина механике помоћу редова. Та метода постојала и раније (Ојлер, Лаплас и др.); но ту њихову методу могли бисмо назвати наивном због тога што се није обраћала довољна пажња на конвергентност одговарајућих редова, а нарочито на област конвергентности. Нарочито важне резултате у тој методи показао је Henri Poincaré (1854—1912) и његова школа. Служећи се том методом, 1912 године фински математичар K. F. Sundman (1873—1949) дао је решење проблема трију тела, под извесним условима, помоћу редова у којима су координате и време били развијени у редове помоћне промењиве.

Изгубивши наду на решење проблема, рецимо, трију тела у коначном облику математичари-астрономи, да би имали могућности да виде неке категорије решења тог проблема, приступили су Сизифовом послу — приближном решавању тог проблема и цртању одговарајућих породица трајекторија.

Друга метода, којом се такође углавном исто тако бавио H. Poincaré, метода је одређивања трајекторија неког нарочитог, типа, напр. периодичних или асимптотичних. Проучавање периодичних решења постало је нарочита грана како небеске механике тако и других грана механике.

У вези са овим питањем је и питање стабилности како трајекторија одређеног типа, тако и уопште кретања односно равнотеже. Теорију стабилности разрађивали су прво енглески математичари W. Thomson, P. G. Tait, E. J. Routh, G. H. Darwin, па затим H. Poincaré и А. М. Ляпунов, који је нарочито дубоко ушао како у општу теорију стабилности система, тако и у стабилности нашег Сунчевог система, а при томе и у стабилност неких облика течних тела, која се обрћу око сталне осе у простору. Све је то врло тешка али врло важна проблематика која спада у рационалну механику и којом се много баве и сад.

У двадесетом веку интерес за, тако рећи, квалитативна решења механичких питања у вези са радовима G. D. Birkhoff'а (1884—1944) прешао је и у Америку и тамо се сада развија.

Тиме би могли да завршимо преглед оног материјала који је у вези са првим основним задатком рационалне механике, задатком о кретању три и више тела.

Други важан задатак рационалне механике је проучавање кретања чврстог тела. Тај проблем се односи пре свега на кретања наше Земље, сматране у првом приближном посматрању као чврсто тело.

Ојлер је први у већ споменутом капиталном делу „Theoria motus corporum solidorum (1765) развио до детаља кинематику и динамику чврстог тела и саставио класичне диференцијалне једначине кретања тог тела. Интересантно је навести да су многа Ојлерова проучавања, нарочито из области кинематике чврстог тела, била заборављена и тек данас, кад је тај одељак рационалне механике привукао на себе посебну пажњу, поново се вратило на Ојлерова проучавања.

У току XIX века механика чврстог тела била је увек она област на којој су механичари непрекидно радили, како у теориском тако и у практичном смислу.

Централно теориско питање које би одговарало проблему трију тела био је проблем обртања *тешког* чврстог тела око непомичне тачке. Била су пронађена три решења тог проблема у коначном облику за специјалне распореде маса чврстог тела, али за произвољне почетне услове. То су случајеви кретања: Ојлера — случај кретања по инерцији кад се центар маса поклапа са непомичном тачком, Лагранжа — симетрични гироскоп и С. В. Ковалевске — са нарочитим обртним елипсоидом инерције и са специјалним положајем центра маса. Као што је теоремом H. Bruns'а завршена једна фаза покушаја да се нађе сем постојећих још један алгебарски интеграл проблема трију тела, јер је H. Bruns доказао да такав интеграл не постоји, тако исто је било доказано да сем наведена три случаја више нема случајева кад би се могао написати још један алгебарски интеграл под условом произвољног почетног кинематичког стања. Према томе и за овај класични проблем механике остају само путеве бесконачних процеса, приближних решења и квалитативних оцењивања.

Механика чврстог тела има огромне примене. Понеке области тих примена постале су самосталне научне дисциплине. Такву улогу игра, напр. балистика. Практична важност ове дисциплине била је разлог што је та област разрађивана до таквих детаља и довела до таквих резултата који нису били уобичајени у другим дисциплинама; при томе су се ти резултати разрађивали до најелемнетарнијих облика (табулирање и др.) да би били приступачни свакоме артиљерцу. Балистика, спољашња и унутрашња, има и у своју посебну историју. Данас се њен задатак проширује све више, јер се гађање врши не само са непокретног места, већ и са брода или аероплана, што изазива нове проблеме, нарочито при великим брзинама.

Решење свих тих проблема захтева добро познавање и механике и и математике.

Као основни елемент механика чврстог тела улази и у савремену геофизику, која проучава и сва отступања у понашању наше планете у поређењу са понашањем чврстог тела. Тај геофизички елемент опширно улази, па пример, у дело F. Klein'а (1849—1925) и A. Sommerfeld'а (1864—1951) Über die Theorie des Kreisels. Прво издање. Leipzig, 1910.

Што се тиче многобројних и практичних примена механике чврстог тела — ни број им се не би могао лако одредити. Обична, железничка и свака кола уопште конструишу се у сагласности са механиком чврстог тела. И за сваки објект — бицикл, аутомобил, аероплан — постоји читав низ и теориских расправа; један део тих расправа припада историји механике, други пак чине савремену нову литературу.

После историског прегледа материјала, садржаја рационалне механике, извршимо и кратак преглед оних метода које је користила и користи рационална механика.

Како смо навели, Њутново излагање је имало углавном геометриски карактер са учешћем алгебре тог времана и са врло незнатним извођењима функционалног карактера, а нарочито елемената инфинитезималног рачуна. Са Ојлером, Лагранжем и др. рационална механика постаје математичко-аналитичка дисциплина. Статика са одваја и иде сасвим другим путем, па издваја и свој нарочити метод — графичку статику. У рационалној механици аналитичка метода се одржава готово цело деветнаесто столеће, и то као потпуни монополиста.

Али средином XIX столећа појављује се, углавном на геометриској основи, нова дисциплина, прво чисто геометриског карактера, — теорија вектора, за чије осниваче треба сматрати, с једне стране, H. Grassmann'а (1809—1877), а са друге W. R. Hamlton'а (1805—1865). Први је дао својој теорији формално-геометриски карактер (Die Wissenschaft extensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre, Leipzig, 1844), други формално-алгебарски карактер у облику такозване теорије кватерниона (Lectures on quaternions, 1853). Прво време теорија вектора било у једном било у другом облику — није била примљена као нов математички апарат. То се да објаснити тиме што су једна и друга теорија имале и сувише формалистички карактер. Тек кад је енглески физичар J. W. Gibbs (1839—1903) отстранио из те теорије све сувишно, дао јој једноставан облик и показао њену вредност у применама на геометрију, механику и физику, тек тада је векторски рачун добио законско право као један погодан математички апарат. У прво време је векторски рачун улазио у механику врло лагано. Чак и они писци који су владали тим рачуном нису се усуђивали да пишу векторски, специјално уџбенике; говорили су: „Неће да читају". Тек после уџбеника самог Gibbs'а, па после радова J. Maxwell'а (1831—1879), O. Heaviside'а (1850—1925), A. Föppl'а и других, па нових уџбеника R. Marcolongo (Meccanica Razionale, 1905), П. О. Сомова (Векторіальный анализ и его приложенія, 1907) и читавог низа већ доста популарних књига посвећених углавном векторском рачуну за физичаре, вектор је ушао као суверени господар у излагање рационалне механике, такô да су се појавиле чак и књиге које су већ у својим насловима наглашавале векторско излагање.

Али у вези са проширењем области примене схема рационалне механике, са другом аксиоматиком, нарочитô у вези са теоријом релативности, појавили су се у тим областима нови математички апарати — тензорски и матрични рачун. Њихове главне примене су ван области класичне рационалне механике; зато о тим рачунима нећу наводити историске податке, који су врло интересантни. Ипак треба навести да се прва, елементарна форма и тензорског и матричног рачуна може применити како је то видео читалац ове и претходних мојих књига, и у области елементарне класичне рационалне механике.

РЕГИСТАР