СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ПОСЕБНА ИЗДАЊА
КЊИГА CLIV

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 1

Ј. КАРАМАТА

ТЕОРИЈА и ПРАКСА STIELTJES-ова ИНТЕГРАЛА

БЕОГРАД
1949

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ПОСЕБНА ИЗДАЊА

КЊИГА CLIV

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

КЊИГА 1

J. КАРАМАТА

ТЕОРИЈА и ПРАКСА STIELTJES-ова ИНТЕГРАЛА

БЕОГРАД

1949

Уредник:
академик ВОЈИСЛАВ В. МИШКОВИЋ

(Приказано на VI скупу Одељења
природно-математичких наука С. А. Н. 12-XII-1948)

Научна Књига

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

Штампарија и књиговезница „НАУЧНА КЊИГА", Народног фронта улица бр. 12 — Тел. 20-732

ПРЕДГОВОР

Последње деценије прошлог века — 1894 год. T. J. Stieltjes {1, стр. 68—75} је увео нов појам одређеног интеграла који је данас познат под именом Stieltjes-ов интеграл. За ово сразмерно кратко време Stieltjes-ов интеграл је нашао многобројне примене и постао скоро неопходан у многим гранама математике, а нарочито у функционалној анализи и теориској статистици. Његова важност је према томе како у примењеној тако и у теориској математици.

Stieltjes-ов интеграл се одликује тиме што се, као и Riemann-ов интеграл, може елементарно дефинисати. Без ближег познавања основних појмова теорије реалних функција, као што су, на пример, појам мере множина, Lebesgue-ов интеграл итд. можемо га потпуно обрадити и његове главне особине ригурозно извести. При томе Stieltjes-ов интеграл у извесном смислу садржи и проширује сам Lebesgue-ов интеграл, као што је то Lebesgue {1} показао, тако да претставља аналитички израз истог домашаја као и Lebesgue-ов интеграл.

Са практичне тачке гледишта Stieltjes-ов интеграл претставља веома јак аналитички апарат који, посматран и са чисто формалне стране, омогућује да се једним јединим аналитичким изразом истовремено обухвате како изрази који се односе на непрекидне скупове (функције), тако и они који се односе на дискретне скупове (низове). Овим се, преко Stieltjes-ова интеграла, на већину ставова из теорије редова може применити метода и формализам инфинитезималног рачуна. Употребом Stieltjes-ова интеграла не добива се само у прегледности, већ та метода омогућује синтезу познатих и добивање нових резултата.

У овој књизи претежно ми је циљ да истакнем предност Stieltjes-ова интеграла као јаког аналитичког сретства и упутим читаоце на руковање њиме.

У одељку А изнећу основне особине монотоних функција и функција ограничене варијације на којима почива појам Stieltjes-ова интеграла.

У одељку В изложићу саму теорију Stieltjes-ова интеграла, проширену у Riemann-ову смислу, тј. Riemann-Stieltjes-ов интеграл. При том ћу се искључиво задржати на интегралу непрекидних функција и функција ограничене варијације; ове функције ћу звати, заједничким именом, S-интеграбилне функције, за разлику од R-S-интеграбилних функција, тј. функција интеграбилних у Riemann-Stieltjes-ову смислу. Ово са разлога што се у примени скоро искључиво јављају S-интеграбилне функције, а све особине које ћемо овде извести за функције ове класе важе, без промене и за R-S-интеграбилне функције. — У овом одељку обратио сам нарочиту пажњу ставовима о средњим вредностима, и појму несвојствена Stieltjes-ова интеграла, јер су они у досадашњој литератури, тако рећи, остали необрађени.

Примене Stieltjes-ова интеграла, које сам обрадио у одељку С, одабирао сам претежно тако да читаоцу пружим могућност да са релативно мало предзнања теориски савлада овај појам и увиди његов значај. Из тих разлога нисам узимао у обзир оне његове примене које претпостављају потпуно познавање теорије реалних и комплексних функција. Ради лакшег савлађивања обрађених појмова, у одељку D су концизно наведени, често без доказа, они основни појмови који су за разумевање неопходни.

По начину обраде и избору примена ова књига треба да послужи, и то као прва етапа, онима који желе да се упуте у научну проблематику математичке анализе, а нарочито је прилагођена нашим потребама.

На пријатељској сарадњи и помоћи при вршењу коректура много сам обавезан М. Томићу, предавачу Техничке велике школе, С. Аљанчићу и М. Маравићу, асистентима и Р. Бојанићу, студенту Прир-мат. факултета.

Земун, октобра 1948 год. *Ј. К.*

САДРЖАЈ

Одељак В

STIELTJES-ОВ ИНТЕГРАЛ

Глава I. *Одређени Stieltjes-ов интеграл*

Глава II. *Особине Stieltjes-ова интеграла*

Глава III. *Ставови о средњим вредностима*

Глава IV. *Неодређени Stieltjes-ов интеграл*

Глава V. *Несвојствени Stieltjes-ов интеграл*

Одељак C

ПРИМЕНЕ

Глава I. *Изрази одређени као функције низа бројева*

Одељак D

НАПОМЕНЕ

Глава I. *Напомене које се односе на низове и редове*

Глава II. *Напомене које се односе на реалне функције*

Глава III. *Опште напомене*

УПУТСТВА И ОЗНАКЕ

Књига садржи четири одељка означена словима A—D. Поједине главе одељка нумерисане су римским бројевима, а тачке су означене Peano-вом нумерацијом, где се први број односи на главу, а други на тачку главе, док су делови појединих глава нумерисани малим римским бројевима. Обрасци и ставови су у свакој глави нумерисани од почетка. Кад се позивамо на неки став или образац стављамо, на пример, B. 5. 6. (ii), што значи да се исти налази у делу (ii), тачке 6, главе V, одељка B.

Број у витичастим заградама, стављен иза имена цитираног аутора, односи се на редни број дела наведеног у попису литературе, а остали подаци, уколико се иза овог броја налазе, односе се на том, односно на стране дотичног дела.

Бројеви у угластим заградама односе се на напомене које се налазе у одељку D. У овима су концизно обрађени или само изложени основни појмови и ставови из теорије низова, редова и теорије реалних и комплексних функција. Како њихова детаљнија обрада није предмет ове књиге, они су стављени за оне читаоце који овим појмовима довољно не владају, да би им се олакшало разумевање. Извођење и детаљнија објашњења појмова овог одељка може читалац наћи у овим уџбеницима: K. Knopp {1, 2}, Н. Н. Лузин {1}, N. Nielsen {1}, В. И. Смирнов {1}.

Примене из последње три главе C. V—VII, претпостављају познавање основних појмова теорије функција комплексне промењљиве и намењени су оним читаоцима који овим појмовима владају. (Види E. T. Copson {1}, а за Dirichlet-ове редове V. Bernstein {1} и M. G. Valiron {1}.)

Ознаке које се у уџбеницима ређе јављају:

$(a+0, b)$, $(a, b-0)$	види напомену	[14]
$\sum\limits_{a_\nu \leqslant x}$	» »	[26]
$\underset{1 \leqslant \nu \leqslant n}{\mathrm{Max}}$, $\underset{1 \leqslant \nu \leqslant n}{\mathrm{Min}}$	» »	[2]
$\underset{a \leqslant x \leqslant b}{\mathrm{Max}}$, $\underset{a \leqslant x \leqslant b}{\mathrm{Min}}$	» »	[16]
$[x]$	» »	[28]
$O(\ )$, $o(\ )$	» »	[25]
$\sim$	» »	[25]

$\int\limits_{a+0}^{b}$, $\int\limits_{a}^{b-0}$ . . . . . . види тачке B. 1.8 и B. 5.1.

$\int\limits_a^\infty$ значи $\lim\limits_{x=\infty} \int\limits_a^x$ ако ова граница постоји, тј. ако интеграл конвергира;

$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}$ значи $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{n}$ ако ова граница постоји, тј. ако ред конвергира.

Са M, M', M''... означене су константе које не зависе од посматраних променљивих, али не претстављају исте вредности у сваком посматраном случају.

Са $M(\ )$, $M'(\ )$, или M_ν, M'_ν означене су величине које зависе само од променљивих које се налазе у заградама, или од индекса.

Са ε, ε', ε''.... означене су позитивне, произвољно мале величине које не зависе од посматраних променљивих.

ОДЕЉАК А.

ФУНКЦИЈЕ ОГРАНИЧЕНЕ ВАРИЈАЦИЈЕ

I. Монотона функција

1. 1. (i) Као што је речено у уводу, Stieltjes-ов интеграл почива на класи функција коју је C. Jordan {1, стр. 54—61} први детаљно обрадио и назвао *функције ограничене варијације*. Ова класа функција стоји у непосредној вези са класом *монотоних функција*, шта више свака функција ограничене варијације може се изразити монотоним функцијама; због тога ћемо овде прво обрадити ову последњу класу функција.

(ii) Нека је функција $f(x)$ дефинисана у размаку (a, b), [14]; ако она у томе размаку или стално опада, или стално расте, кажемо да је она у томе размаку *монотона*. Прецизније:

Функција $f(x)$ *расте* у размаку (a, b) ако је

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b;$$

она *не опада* у томе размаку ако је

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

Исто тако кажемо да функција $f(x)$ *опада* или *не расте* у размаку (a, b), према томе да ли је

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{или} \quad f(x_1) \geqslant f(x_2) \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

У свим овим случајевима кажемо да је функција $f(x)$ монотона у размаку (a, b), а за функцију која монотоно расте или монотоно опада у томе размаку кажемо још да је *стварно монотона* или *монотона у ужем смислу*.

1. 2. (i) Ако под размаком (a, b) подразумевамо затворени размак [14], то из претпоставке да је функција монотона у размаку (a, b) следи да она мора бити ограничена у томе размаку [15]. Заиста, било да функција расте или опада, све њене вредности се морају налазити између $f(a)$ и $f(b)$.

(ii) Ако је, међутим, монотона функција $f(a)$ дефинисана само у једном од отворених размака $(a+0, b)$, или $(a, b-0)$, или $(a+0, b-0)$ [14, 15], она може бити и неограничена и то само у близини [3] крајњих тачака a или b тога размака. — Она не може бити неограничена у близини неке тачке c размака $(a+0, b-0)$, јер би тада у близини те тачке она морала узимати произвољно велике вредности, па би, према томе да ли она монотоно расте или опада, она морала бити, било у размаку $(a, c-0)$, било у размаку $(c+0, b)$ већа од произвољно великог броја, тј. недефинисана.

(iii) Ако је функција неограничена, на пример у близини крајње тачке b размака, тада она стварно дивергира [7] кад $x \to b$; да монотона функција $f(x)$ може заиста бити неограничена у крајњим тачкама размака показује функција

$$f(x) = tg\, x, \quad \text{посматрана у размаку} \quad \left(-\frac{\pi}{2}+0,\ \frac{\pi}{2}-0\right).$$

Обично се узима да је функција дата у затвореном размаку и самим тим претпоставља да је она у томе размаку ограничена. У супротном случају, тј. ако је функција дата у отвореном размаку, ово се нарочито наглашава.

1. 3. (i) Ако је функција $f(x)$ монотона у размаку (a, b), она у томе размаку не мора бити непрекидна; али ако је x_0 њена тачка дисконтинуитета тада и лева гранична вредност $f(x_0-0)$ и десна гранична вредност $f(x_0+0)$ увек постоје, тј.

$$f(x_0+h) \to f(x_0 \mp 0) \quad \text{кад} \quad h \to \mp 0.$$

Другим речима, тачке дисконтинуитета монотоне функције могу бити само п р в е в р с т е [18].

Заиста, нека је h_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, произвољан низ позитивних, монотоно опадајућих бројева, који теже нули, тј.

$$h_{n-1} > h_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

тада је, на основу монотоније функције $f(x)$, низ бројева

$$f(x_0+h_n),\quad n=1,2,3,\ldots,$$

такође монотон и ограничен, према томе он конвергира [8] неком броју A, тј.

$$f(x_0+h_n)\to A,\quad n\to\infty.$$

Како је, у случају да функција $f(x)$ не опада,

$$A\leqslant f(x)\leqslant f(x_0+h_n)\quad \text{за}\quad x_0<x\leqslant x_0+h_n,$$

то значи да и

$$f(x)\to A\quad \text{кад}\quad x\to x_0+0,$$

тј. да $f(x_0+0)$ постоји и да је

$$f(x_0+0)=A.$$

На исти начин видимо да мора постојати и $f(x_0-0)$.

(ii) Величину

$$s(x_0)=f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

тј. осцилацију [17] функције $f(x)$ у тачки x_0, називамо *скоком* монотоне функције $f(x)$ у тачки дисконтинуитета x_0; сама вредност $f(x_0)$ налази се, дакле, између $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ и, уколико није нарочито потребно прецизирати ову вредност, она се узима или на половини скока, тј.

$$f(x_0)=f(x_0-0)+\frac{1}{2}s(x_0)=\frac{1}{2}\{f(x_0-0)+f(x_0+0)\},$$

или тако, да се она поклапа са левом граничном вредношћу $f(x_0-0)$, или са десном $f(x_0+0)$; у овим случајевима функција $f(x)$ остаје непрекидна са *леве* или *десне* стране.

1. 4. (i) У случају да функција није стварно монотона, мора постојати најмање један размак такав да она у целом том размаку остаје константна, тј. узима исту вредност.

Заиста, ако је

$$f(x_1)=f(x_2),$$

за две вредности x_1 и x_2 од x за које је $x_1<x_2$, тада из чињенице да је функција $f(x)$ монотона следи

$$f(x_1)=f(x)=f(x_2)\quad \text{за свако}\quad x_1\leqslant x\leqslant x_2,$$

тј.

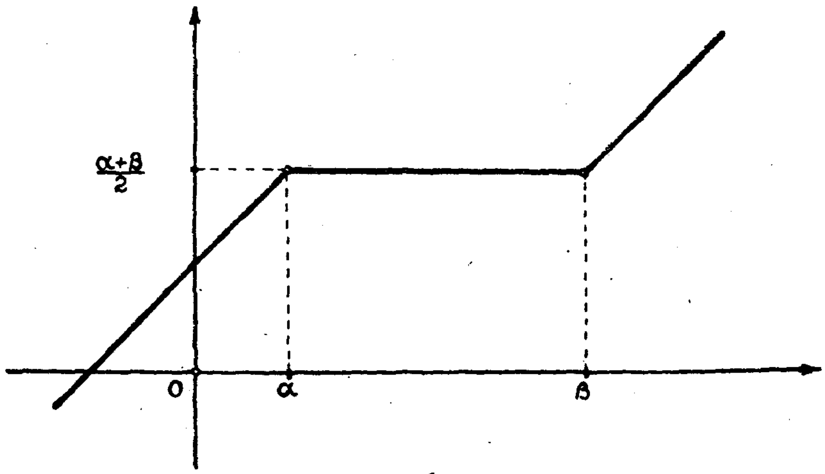
$$f(x)=const.\quad \text{у размаку}\quad (x_1,\ x_2).$$

Такав размак називамо *платформом* функције $f(x)$, зато што је део њена дијаграма, који одговара том размаку, дуж паралелна x-оси.

На пример функција

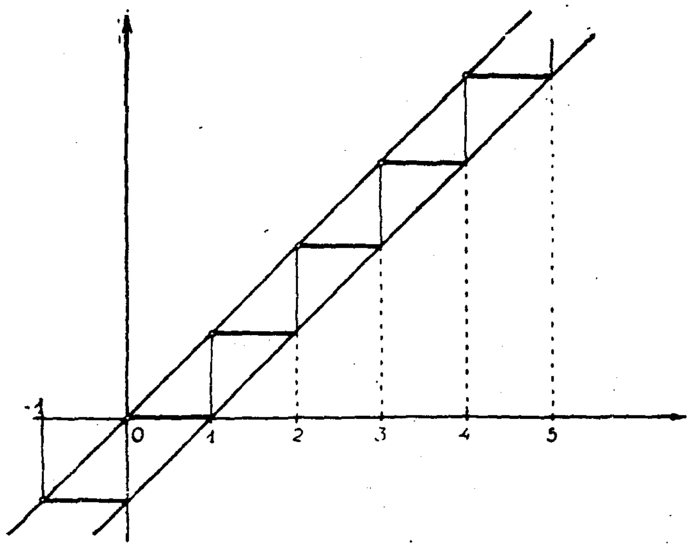
$$f(x)=x+\frac{1}{2}\{|x-\beta|-|x-\alpha|\},$$

где је $\alpha<\beta$, има једну платформу за $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ (в. сл. 1).



Сл. 1.

(ii) Монотона функција може бити састављена и из самих платформи. За такву функцију кажемо да је *степенаста* функција.



Сл. 2.

Степенаста функција не може никада бити стварно монотона.

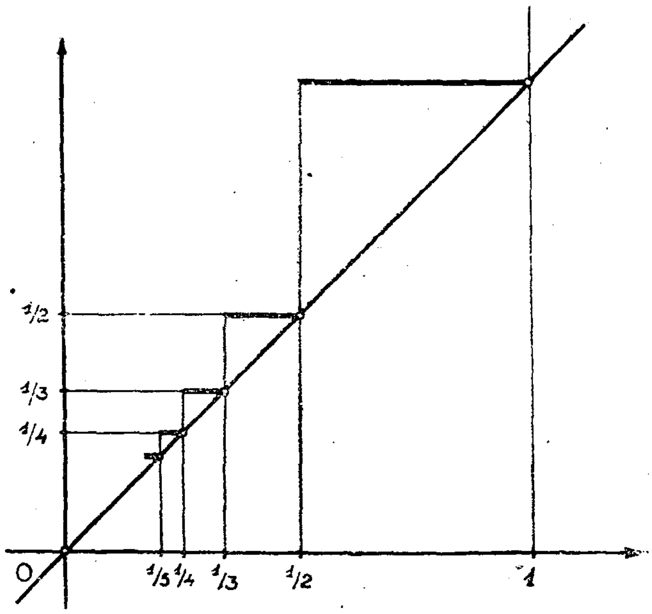
Примера ради навешћемо ове функције

1° $$f(x)=[x],$$

где знак $[a]$ претставља највећи цео број који није већи од a (в. сл. 2).

2° $$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{за} \quad x=0, \\ \dfrac{1}{[1/x]} & \text{за} \quad 0<x\leqslant 1, \end{cases}$$

(в. сл. 3).



Сл. 3.

Прва од ових функција је непрекидна са десне стране, а друга са леве, јер је у свим тачкама дисконтинуитета

$$f(x+0)=f(x), \quad \text{а} \quad g(x-0)=g(x).$$

1. 5. (i) Јасно је да у тачкама дисконтинуитета извод монотоне функције не постоји. Прецизније, ако је x_0 тачка дисконтинуитета функције $f(x)$ и ако је она прекидна, на пример са десне стране у тој тачки, тада десни извод у тој тачки не постоји и

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to \pm\infty \quad \text{кад} \quad h \to +0,$$

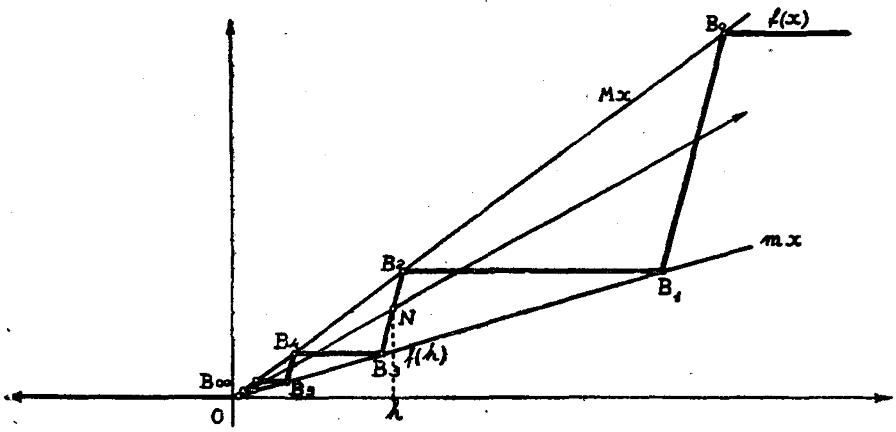
према томе да ли функција $f(x)$ расте или опада.

(*ii*) Међутим, извод монотоне функције не мора постојати ни у појединим тачкама у којима је функција непрекидна, и лако можемо образовати монотоне функције такве да у одређеним тачкама $x=c$ количник

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \tag{1}$$

осцилира између два произвољна, унапред дата позитивна броја ако функција не опада, или негативна ако функција не расте.

Диаграм такве једне функције $f(x)$ дефинисане у целом размаку $(-\infty, \infty)$, а која у тачки $x=0$ нема десни извод, дат је на сл. 4 полигоналном линијом $B_0, B_1, B_2, \dots, B_\infty$, полуправом $B_0, +\infty$ која је паралелна x-оси и негативним



Сл. 4.

делом $-\infty, B_\infty$ осе x. Тачке $B_0, B_2, B_4, \dots$ налазе се на правој $y=Mx$, тачке $B_1, B_3, B_5, \dots$ на правој $y=mx$, тако да су дужи $B_0B_1, B_2B_3, B_4B_5, \dots$ паралелне и имају одређен нагиб већи од M, док су све дужи $B_1B_2, B_3B_4, \dots$ паралелне x-оси. При томе су m и $M>m$ два произвољно изабрана позитивна броја.

Овако образована функција је непрекидна за $x=0$ и $f(0)=0$, али њен десни извод у тој тачки не постоји, јер израз (1), тј.

$$\frac{f(h)}{h} \tag{2}$$

осцилира између m и M кад $h \to +0$. Ово је лако увидети ако приметимо да израз (2) претставља нагиб дужи $B_\infty N$ (где је N тачка диаграма функције $f(x)$ чија је апсциса h) који осцилира између m и M док се тачка N приближава тачки B_∞ по полигоналној линији.

(iii) Помоћу овако дефинисане функције можемо лако образовати монотоне функције које у произвољним тачкама немају извода; шта више, ових тачака може бити бесконачно много и могу бити свугде густо распоређене.

Нека је $f(x)$ функција дефинисана сликом 4, тада $f(x-c)$ нема десни извод у тачки $x=c$. Према томе, функција

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(x-c_\nu)$$

нема десни извод у произвољно бираним тачкама $c_1, c_2, \ldots, c_n$; она је непрекидна и, ако су бројеви a_ν позитивни, она је монотона и не опада.

Најзад, функција

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} f(x-c_\nu)$$

нема извод у бескрајно много тачака $c_1, c_2, \ldots,$ и ако за ове вредности узмемо све рационалне бројеве [10], овако добивена функција је непрекидна, монотона и ни за једну рационалну вредност x-а нема десни извод.

II. Особине монотоних функција

2. 1. (i) Монотона функција може имати бескрајно много тачака дисконтинуитета (в. пример 1. 4. (ii) 2°), шта више она их може имати бескрајно много и у произвољно малом размаку. Ово увиђамо ако пођемо од неке функције $g(x)$ која је прекидна само у тачки $x=0$ и, као у примеру из тачке 1. 5.

(iii), образујемо функцију

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\, g(x-c_\nu)$$

где је c_ν по вољи поређан низ рационалних бројева. Ова је функција монотона, а прекидна је у свакој рационалној тачки. Међутим, множина тачака дисконтинуитета ове монотоне функције је пребројива [10].

(ii) Множина тачака дисконтинуитета монотоне функције ипак не може бити произвољна. Она је највише пребројива као што то казује

Став 1. *Свака у размаку* (a, b) *монотона функција има највише пребројиво много тачака дисконтинуитета.*

Претпоставимо да функција $f(x)$ не опада; исто резоновање важи и кад она не расте. Нека је

$$S = f(b) - f(a)$$

и нека су ζ њене тачке дисконтинуитета. Како је

$$0 < f(\zeta+0) - f(\zeta-0) \leqslant S,$$

то постоји највише једна тачка ζ у којој је скок $\geqslant S$, највише две у којима је скок $\geqslant S/2$ и, уопште, највише n тачка ζ у којима је скок $\geqslant S/n$. Према томе, постепеним груписањем све мањих и мањих скокова, можемо тачке ζ уредити тако да прво узмемо оне у којима је скок $\geqslant S/2$, затим оне у којима је скок $< S/2$ а $\geqslant S/3$, затим $< S/3$ а $\geqslant S/4$, итд.

На тај начин можемо, дакле, скуп свих тачака дисконтинуитета ζ пребројати, чиме је горњи став доказан.

2.2. У примеру наведеном у тачки 1.5. (iii) показали смо да постоје непрекидне монотоне функције које немају извод у бескрајно много тачака и шта више да ове тачке могу бити распоређене свугде густо. Ове тачке, као и тачке дисконтинуитета, сачињавају донекле само извесну изузетну множину тачака која, иако не мора више бити пребројива, ипак се ове тачке могу укључити у пребројиво много размака, чија је дужина произвољно мала.

Ово је један од основних Lebesgue-ових ставова {1, стр. 186—188}, али његов доказ не ћемо овде изнети, јер по својој суштини излази из оквира нашег излагања. — До сада најкраћи доказ овог става дао је F. Riesz {1}.

2. 3. (**i**) Једна од особина монотоних функција која је нарочито важна за примену Stieltjes-ова интеграла је да се монотоне функције увек могу разложити на непрекидне и степенасте функције. Да бисмо ово показали означимо са x_n, $n=1,2,3,\ldots,$ тачке дисконтинуитета монотоне функције $f(x)$, са $s(x_n)$ величину скока у тачки x_n, тј.

$$s(x_n)=f(x_n+0)-f(x_n-0), \quad n=1,2,3,\ldots,$$

и ставимо

$$f_s(x)=\sum_{x_n\leqslant x} s(x_n), \quad [26]. \tag{1}$$

Овај збир треба узети преко свих тачака дисконтинуитета x_n које су $\leqslant x$. Уколико ових нема, збир је празан, па је

$$f_s(x)=0.$$

Уколико таквих тачака има бескрајно много, горњи збир се претвара у бесконачан ред; како су му сви чланови позитивни, а сам збир не може бити већи од $f(b)-f(a)$, то он насигурно конвергира.

Функција $f_s(x)$ има, дакле, смисла за све x размака (a, b) и претставља једну степенасту функцију која не опада и која има исте скокове као и сама функција $f(x)$. Због тога се ова функција зове *функција скока* функције $f(x)$.

(**ii**) Поменуту особину монотоних функција можемо сад прецизно формулисати у облику става:

Став 2. *Свака монотона функција може се написати у облику збира једне непрекидне и једне степенасте функције, тј. њене функције скока.*

Да бисмо доказали овај став довољно је да покажемо да је функција

$$\overline{f}(x)=f(x)-f_s(x)$$

непрекидна.

У ту сврху разделимо збир (1) којим је дефинисана функција $f_s(x)$ у два збира

$$f_s(x)=\Sigma'+\Sigma'',$$

тако да се у првом збиру Σ' јављају само чланови који су $\geqslant \varepsilon$, а у другом преостали чланови, тј. они који су $< \varepsilon$. Сви скокови функције

$$\Sigma'' \text{ као и функције } f(x) - \Sigma'$$

су тада мањи од ε, јер се скокови функције $f(x)$ који су $\geqslant \varepsilon$ потиру са скоковима функције Σ'. Према томе ниједан скок функције

$$\bar{f}(x) = f(x) - f_s(x) = \{f(x) - \Sigma'\} - \Sigma''$$

није већи од 2ε.

Како ε можемо бирати произвољно мало, то су скокови ове последње функције мањи од произвољно малог броја 2ε, што је могуће само ако је та функција $\bar{f}(x)$ непрекидна. — Функцију $\bar{f}(x)$ зваћемо *нейрекидни део* монотоне функције $f(x)$.

2. 4. (i) Са једном или више монотоних функција можемо вршити извесне операције тако да добивена функција остаје монотона. Тако, на пример, збир или производ коначног броја монотоних функција које све монотоно расту, или монотоно опадају претставља монотону функцију која, такође, или монотоно расте или монотоно опада. Ово важи и за бескрајно много функција под условом да бесконачни ред, односно производ конвергира.

Став 3. *Нека је $f_n(x)$ низ у размаку (a, b) дефинисаних функција шакав да ред*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

конвергира за свако x шога размака. Ако све функције $f_n(x)$ не ойадају или не расшу у шоме размаку, шада и функција $f(x)$ не ойада, односно не расше у шоме размаку. — Овај сшав важи и за ошворен размак $(a+0, b-0)$.

Заиста, ако, на пример, функције $f_n(x)$ не опадају и ако означимо са x_1 и $x_2 > x_1$ две произвољне тачке размака (a, b) (односно $(a+0, b-0)$), тада је

$$f_n(x_1) \leqslant f_n(x_2) \quad \text{за свако} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

па је према томе и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_1) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_2).$$

(ii) Ако је у ставу 3 само једна од функција $f_n(x)$ стварно монотона тада мора и функција $f(x)$ бити стварно монотона. Међутим, ако је дат низ функција $g_n(x)$, дефинисаних у размаку (a, b), који тежи одређеној функцији $g(x)$ за свако x тога размака и ако су све функције $g_n(x)$ стварно монотоне, тада гранична функција $g(x)$ не мора бити стварно монотона. Јер, на пример, из

$$g_n(x_1) < g_n(x_2) \quad \text{за свако} \quad n = 1, 2, 3, \ldots..$$

и одређено x_1 и $x_2 > x_1$ следи само да је

$$g(x_1) = \lim_{n=\infty} g_n(x_1) \leqslant \lim_{n=\infty} g_n(x_2) = g(x_2).$$

(iii) Ако је функција $f(x)$ монотона у размаку (a, b) тада и извесне операције извршене са функцијом $f(x)$ могу дати монотоне функције. Тако, на пример, квадрат, квадратни корен или ма који степен монотоне функције је монотона функција. — Ако $f(x)$ не опада и ако је $\lambda > 0$, тада и $f^{\lambda}(x)$ не опада; ако је, међутим, $\lambda < 0$ тада $f^{\lambda}(x)$ не расте.

Уопште, ако функције $g(x)$ и $f(x)$ не опадају, тада и функција $g\{f(x)\}$ не опада, а ако функција $g(x)$ не расте, а функција $f(x)$ не опада, тада $f\{g(x)\}$ не расте.

Ове су особине очигледне и следе непосредно из саме дефиниције монотоне функције.

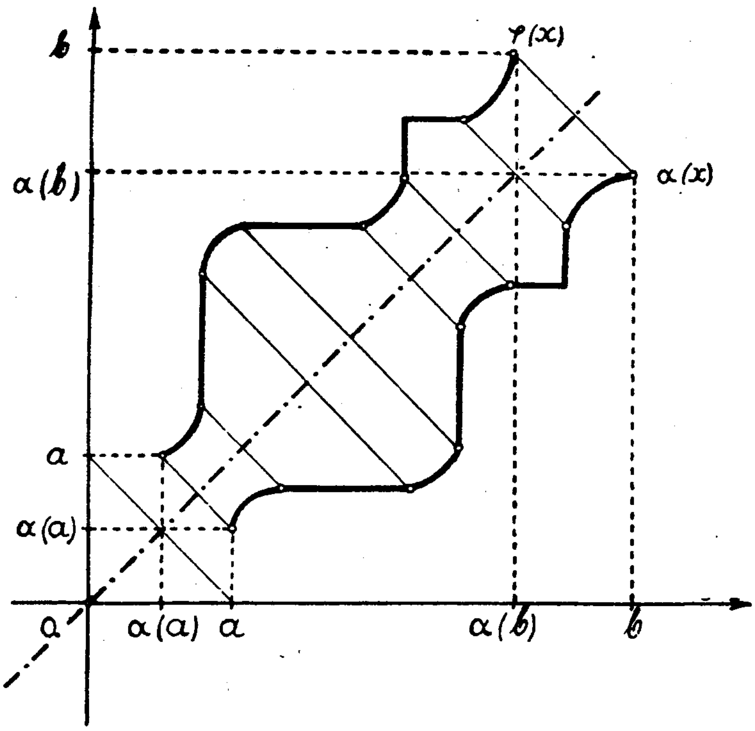
2. 5. (i) За доцније примене потребно је да се прецизно дефинише шта се подразумева под инверзном функцијом монотоне функције и то у случају кад ова последња има скокове или платформе.

Ако је функција $\alpha(x)$ непрекидна и у ужем смислу монотона у размаку (a, b), тј. ако она у томе размаку, на пример, стварно расте, тада је њена инверзна функција $\mathfrak{v}(x)$ једнозначно одређена за све x у размаку $\{\alpha(a), \alpha(b)\}$.

Али ако функција $\alpha(x)$ има скокова или платформи тада треба прво њен диаграм допунити у местима скокова тако што се десна и лева гранична вредност, тј. $\alpha(x+0)$ и $\alpha(x-0)$ споје дужима; овим се за диаграм функције $\alpha(x)$ добива непрекидна крива линија (в. сл. 5).

Инверзна функција $\mathfrak{v}(x)$ функције $\alpha(x)$ је по дефиницији она функција чији се диаграм добива кад се тако проширени диаграм функције $y=\alpha(x)$ симетрично преслика у односу на праву $y=x$.

Овако дефинисана инверзна функција $ɒ(x)$ постаје прекидна у местима у којима функција $\alpha(x)$ има платформе. У овим местима сама вредност инверзне функције се може дефинисати било са захтевом леве или десне непрекидности, било да се њена вредност стави у средину скока.



Сл. 5.

Према томе се платформе функције $\alpha(x)$ претварају у скокове њене инверзне функције $ɒ(x)$, а скокови функције $\alpha(x)$ у платформе функције $ɒ(x)$.

(ii) На основу овакве дефиниције инверзне функције следи:

Инверзна функција стварно монотоне функције, било да је ова прекидна или не, увек је непрекидна.

Инверзна функција степенасте функције је степенаста функција.

На пример, инверзна функција функције (в. сл. 3)

$$\alpha(x)=\begin{cases} 0 & \text{за} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{[1/x]} & \text{за} \quad 0<x\leqslant 1, \end{cases}$$

је

$$\mathfrak{v}(x)=\begin{cases} 0 & \text{за} \quad x=0 \\ \dfrac{1}{[1/x]+1} & \text{за} \quad 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

2. 6. Ради бољег разумевања навешћемо неколико примера и ставова:

(i) Ако функција $\alpha(x)$ не опада и ако је $\mathfrak{v}(x)$ њена инверзна функција, тада су функције

$$[\alpha(x)], \quad \alpha([x]), \quad [\alpha([x])],$$

$$\mathfrak{v}\{[\alpha(x)]\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{v}\{[\alpha([x])]\}$$

степенасте и не опадају.

(ii) Ако функција $f(x)$ монотоно расте за $x\geqslant a>0$, тада не само

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

већ и функција

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_a^x f(t)\,dt$$

монотоно расте.

Заиста, из монотоније функције $f(x)$ следи

$$\int_a^x f(t)\,dt\leqslant(x-a)f(x)<xf(x),$$

а отуда је

$$F'(x)=\frac{1}{x^2}\Big\{xf(x)-\int_a^x f(t)\,dt\Big\}>0.$$

Обратно не важи, јер је, на пример, функција

$$xF(x)=x(1-\cos x)$$

монотона у сваком размаку $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, док функција

$$f(x) = 1 - \cos x + x \sin x,$$

за довољно велико k, није више монотона у тим размацима.

(iii) Означимо са $M\{\alpha, \beta\}$ највећи од бројева α и β; ако функције $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ не опадају у размаку (a, b) тада и функција

$$M\{\alpha(x), \beta(x)\}$$

не опада и претставља најмању монотону функцију која је за свако x већа и од $\alpha(x)$ и од $\beta(x)$.

(iv) Ако функције $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имају непрекидан извод у размаку (a, b), тада функција

$$M(x) = M\{\alpha(a), \beta(a)\} + \int_a^x M\{\alpha'(t), \beta'(t)\}\, dt$$

претставља најмању функцију такву да функције

$$M(x) - \alpha(x) \quad \text{и} \quad M(x) - \beta(x)$$

не опадају.

(v) Ако за $x \geqslant a$, функција $F(x)$ монотоно расте и има непрекидан извод $F'(x)$, а функција $f(x)$ монотоно опада, тада из егзистенције интеграла

$$\int_a^\infty F'(t) f(t)\, dt$$

следи егзистенција границе

$$\lim_{x=\infty} F(x) f(x),$$

док обратно не важи. (Упореди са ставовима 4 и 5, B.5.6—8.)

III Функција ограничене варијације

3. 1. (i) О овој класи функција изложићемо само онолико колико је потребно за дефиницију и боље разумевање Stieltjes-ова интеграла и његових примена.

Дефиниција: Нека је

$$\{x_i\}: \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

једна подела размака (a, b); за функцију $f(x)$ дефинисану у томе размаку [15] кажемо да је *ограничене варијације у размаку* (a, b), ако збир

$$W_n = \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|$$

остаје ограничен за с в а к у п о д е л у $\{x_\nu\}$ тога размака.

(*ii*) Горња граница [2], [16] збира W_n зове се *тотална варијација* функције $f(x)$ у размаку (a, b).

Означимо ову горњу границу са $W_a{}^b(f)$, тј. ставимо

$$W_a{}^b(f) = \textit{горња граница } \{\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|\}, \tag{2}$$

или краће

$$W_a{}^b(f) = \operatorname*{Max}_{a \leqslant x_\nu \leqslant b} \{\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})|\}.$$

Тоталну варијацију $W_a{}^b(f)$ функције $f(x)$, која је ограничене варијације у размаку (a, b) можемо дефинисати и овако:

Ма како мали био позитиван број ε, увек постоји једна подела $\{x_\nu\}$ размака (a, b) таква да је

$$W_a{}^b(f) - \varepsilon < \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \leqslant W_a{}^b(f). \tag{3}$$

3. 2. (*i*) Класа функција ограничене варијације није ни најмање вештачка; поред тога што је она за дефиницију Stieltjes-ова интеграла неопходна, на њу се исто тако природно наилази при одређивању дужине лука кривих у равни или у простору. Исто тако у теорији Fourier-ових редова ова класа функција игра важну улогу. Тако функције ограничене варијације претстављају једину општу, за практичне примене довољну класу функција, чији Fourier-ов ред увек конвергира. (Види E. Picard {1, стр. 282}).

(*ii*) Лук криве у равни дефинише се као гранична вредност збира страна произвољне полигоналне линије уписане у дату криву кад свака од ових страна тежи нули; под уписаном полигоналном линијом у дату криву сматра се она линија чија се сва темена налазе на тој кривој. Ако је једначина криве дата у параметарском облику

$$x=u(t),\quad y=v(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

тако да тачка са координатама x и y опише посматрани лук криве док параметар t варира од 0 до 1, тада су координате темена произвољне полигоналне линије уписане у тој кривој дате са

$$x_\nu=u(t_\nu),\quad y_\nu=t(t_\nu),$$

где је

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=1.$$

Како је дужина једне стране тога полигона

$$\sqrt{(x_\nu-x_{\nu-1})^2+(y_\nu-y_{\nu-1})^2},$$

то је дужина целе полигоналне линије дата збиром

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{(x_\nu-x_{\nu-1})^2+(y_\nu-y_{\nu-1})^2};$$

према томе гранична вредност овог збира кад свака од разлика $t_\nu-t_{\nu-1}$ тежи нули даје, по дефиницији, дужину лука посматране криве.

Да би ова гранична вредност постојала, потребно је и довољно да обе функције $u(t)$ и $v(t)$ буду ограничене варијације у размаку $(0, 1)$. Овај став је први доказао C. Jordan {1, стр. 55}; доказ овога става овде нећемо изводити али он непосредно следи из ставова главе А. 5.

3. 3. (i) Већи део особина функција ограничене варијације добивамо из монотоних функција на основу чињенице да се свака функција ограничене варијације може изразити монотоним функцијама.

Став 1. *Свака функција ограничене варијације може се претставити као разлика двеју монотоних функција које или обе не расту, или обе не опадају.*

Доказ. Нека је функција $f(x)$ ограничене варијације у размаку (a, b), тј. нека је за извесну поделу $\{x_\nu\}$ задовољена неједначина (3) са произвољно малим $\varepsilon>0$. Ма каква била ова подела, увек је

$$f(b)-f(a)=\sum_{\nu=1}^{n}\{f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})\}.$$

Ако овај збир разложимо у два збира

$$f(b)-f(a)=\sum_{\nu=1}^{n}\{f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})\}=\Sigma^+-\Sigma^-, \tag{4}$$

где смо са Σ^+ означили збир свих позитивних, а са Σ^- збир свих апсолутних вредности негативних чланова првобитног збира, тада је

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|=\Sigma^+ +\Sigma^-,$$

Према (3) је дакле

$$W_a{}^b(f)-\varepsilon<\Sigma^+ +\Sigma^-<W_a{}^b(f),$$

тако да, кад овој неједначини додамо и од ње одузмемо једначину (4), добивамо неједначине

$$\begin{aligned} f(b)-f(a)+W_a{}^b(f)-\varepsilon<2\Sigma^+<f(b)-f(a)+W_a{}^b(f)\\ W_a{}^b(f)-f(b)+f(a)-\varepsilon<2\Sigma^-<W_a{}^b(f)-f(b)+f(a). \end{aligned} \tag{5}$$

Означимо за $P_a{}^b(f)$ горњу границу збира позитивних диференција Σ^+, а са $N_a{}^b(f)$ горњу границу збира Σ^-, тј. ставимо

$$P_a{}^b(f)=\mathrm{Max}\{\Sigma^+\}$$

и

$$N_a{}^b(f)=\mathrm{Max}\{\Sigma^-\},$$

тада, на основу неједначина (5), добивамо да је

$$2P_a{}^b(f)=f(b)-f(a)+W_a{}^b(f)$$

и

$$2N_a{}^b(f)=-f(b)+f(a)+W_a{}^b(f).$$

Уочимо место сталног размака (a, b) произвољни размак (a, x) са $a\leqslant x\leqslant b$; ако горње обрасце применимо на овај размак и краткоће ради ставимо

$$P_a{}^x(f)=P(x), \quad N_a{}^x(f)=N(x),$$

тада они постају

$$2P(x)=f(x)-f(a)+W_a{}^x(f)$$

и

$$2N(x)=-f(x)+f(a)+W_a{}^x(f). \tag{6}$$

Одузимањем ових образаца добивамо да је

$$f(x)=f(a)+P(x)-N(x),$$

а како, према самој дефиницији, обе функције $P(x)$ и $N(x)$ не опадају, то је овим став 1 доказан.

(ii) Став, обратан ставу 1, важи такође и гласи:

Став 2. *Свака функција која је дата као разлика двеју монотоних функција је ограничене варијације.*

Заиста, нека је $F(x)=f(x)-g(x)$, где су $f(x)$ и $g(x)$ две, у размаку (a, b), монотоне функције, за које можемо претпоставити да у томе размаку не опадају. Означимо са $\{x_\nu\}$ произвољну поделу размака (a, b) и ставимо, краткоће ради,

$$F(x_\nu)-F(x_{\nu-1})=\Delta F(x_\nu)=\Delta F$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Delta F(x_\nu)=\Sigma\,\Delta F.$$

Како је

$$\begin{aligned}\Sigma\,|\Delta F|&=\Sigma\,|\Delta f-\Delta g|\leqslant\\ &\leqslant\Sigma\,\{|\Delta f|+|\Delta g|\}=\\ &\leqslant\Sigma\,|\Delta f|+\Sigma\,|\Delta g|=\\ &\leqslant\Sigma\,\Delta f+\Sigma\,\Delta g=\\ &\leqslant f(b)-f(a)+g(b)-g(a),\end{aligned}$$

ма каква била подела $\{x_\nu\}$ размака (a, b), то је, дакле, варијација функције $F(x)=f(x)-g(x)$ ограничена у томе размаку и није већа од

$$\{f(b)-f(a)\}+\{g(b)-g(a)\},$$

чиме је став доказан.

(iii) Из горња два става видимо да је став 1 карактеристичан за ову класу функција, тј. да он може послужити и као дефиниција функције ограничене варијације. Другим речима, оба ова става можемо формулисати заједно и овако:

Да би једна функција била ограничене варијације потребно је и довољно да се она може изразити као разлика двеју монотоних функција, или што је исто, као збир из једне функције која не опада и једне функције која не расте.

3. 4. (i) Јасно је да функција која је ограничене варијације у размаку (a, b) не мора бити непрекидна у томе размаку; али ни свака функција која је непрекидна у неком размаку не мора у томе размаку бити ограничене варијације. На пример, функција

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{за } x=0\\ x\cos\pi/x & \text{„ } x>0,\end{cases}$$

је непрекидна у размаку (0,1), али она није ограничене варијације у размаку $(0, a)$, ма какав био $0<a\leqslant 1$.

Да бисмо ово увидели довољно је да за поделу $\{x_\nu\}$ размака (0,1) узмемо низ бројева

$$x_0=0, \quad x_\nu=\frac{1}{n+1-\nu}, \quad \nu=1, 2, 3, \ldots . n.$$

Тада је, наиме

$$f(x_0)=0, \quad f(x_\nu)=\frac{(-1)^{n+1-\nu}}{n+1-\nu},$$

па је

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|=\frac{1}{n}+\sum_{\nu=2}^{n}\left(\frac{1}{n+1-\nu}+\frac{1}{n+2-\nu}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{n+1-\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{n+1-\nu}-1=$$

$$=2\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}-1,$$

који израз очевидно тежи бесконачности кад $n\to\infty$.

Према томе, посматрана функција $f(x)$, иако је непрекидна није ограничене варијације у размаку (0,1).

Јасно је да ово резоновање важи за сваки размак $(0, a)$ ако је $a>0$, јер се максимуми и минимуми функција $f(x)$ нагомилавају у тачки $x=0$, и да функција $f(x)$ остаје ограничене варијације у ма ком размаку (a, b) ако је само $0<a<b$.

(ii) Ако је функција $f(x)$ непрекидна и ограничене варијације у размаку (a, b), тада су у томе размаку и функције $P(x)$ и $N(x)$ које смо дефинисали у тачки 3. 3. (i) такође непрекидне. Ово можемо непосредно увидети из једначина (6) ако претходно покажемо да је и тотална варијација, тј. функција $W_a{}^x(f)$ такође непрекидна у томе размаку.

Чињеницу да је тотална варијација непрекидне функције, посматрана као функција своје горње границе, такође непрекидна, доказаћемо у глави А. V. (став 3, тачка А. 5. 5), где је појам тоталне варијације детаљно обрађен. На основу поменутог става можемо, према томе, основни став 1 допунити још и ставом:

Став 3. *Свака непрекидна функција ограничене варијације може се представити као разлика двеју непрекидних монотоних функција и обратно.*

Из ставова 1—3 следе најважније особине функција ограничене варијације; они казују да готово све особине монотоних функција важе и за ову класу функција.

IV. Особине функција ограничене варијације

4. 1. (i) Нека је функција $f(x)$ ограничене варијације у размаку (a, b). Тада лако увиђамо, било непосредно из дефиниције, било на основу става 1 тачке 3. 3, да она мора остати ограничена у томе размаку. Ово, међутим, не важи ако је функција $f(x)$ ограничене варијације у једном од отворених размака $(a+0, b)$, $(a+0, b-0)$, или $(a, b-0)$, јер, као што смо то видели у тачки 1. 2. (iii), већ и монотона функција у отвореном размаку не мора остати ограничена.

(ii) Напоменимо, да под функцијом ограничене варијације у отвореном размаку, рецимо $(a+0, b)$, подразумевамо такву функцију која је ограничене варијације у сваком од размака $(a+\varepsilon, b)$ ма како мали био $\varepsilon > 0$.

Из примера тачке 3.4. (i) видимо да функција не мора бити ограничене варијације у затвореном размаку, ако је њена варијација ограничена у отвореном размаку. Јасно је да у том случају тотална варијација $W_{a+\varepsilon}^{b}(f)$, која је коначна и одређена за свако $\varepsilon > 0$, тежи бесконачности кад $\varepsilon \to 0$.

4. 2. (i) На основу става 1 претходне тачке можемо сваку функцију $f(x)$ која је ограничене варијације у размаку (a, b) написати у облику

$$f(x) = u(x) + v(x), \tag{1}$$

где функција $u(x)$ не опада, а функција $v(x)$ не расте у томе размаку.

Из (1) видимо тада непосредно *да дисконтинуитети функције ограничене варијације, уколико их она има, могу бити само прве врсте*, тј. да граничне вредности

$$\lim_{h=0} f(x \pm h) = f(x \pm 0)$$

увек постоје и то за свако x размака (a, b). Јер из монотоније функција $u(x)$ и $v(x)$ следи да

$$\lim_{h=0} u(x \pm h) \quad \text{и} \quad \lim_{h=0} v(x \pm h)$$

постоје, па ће према (1) постојати и граничне вредности

$$\begin{aligned} f(x \pm 0) &= \lim_{h=0} f(x \pm h) = \\ &= \lim_{h=0} u(x \pm h) + \lim_{h=0} v(x \pm h) = \\ &= u(x \pm 0) + v(x \pm 0). \end{aligned}$$

Јасно је, да скокови

$$f(x+0) - f(x-0)$$

функције ограничене варијације могу бити позитивни или негативни.

(ii) Како функција $f(x)$ може бити прекидна само у тачкама у којима су функције $u(x)$ и $v(x)$ прекидне, и како ових тачака може бити само пребројиво много, то из обрасца (1) следи *да функција ограничене варијације може имати највише пребројиво много тачака дисконтинуитета.*

(iii) Ако на основу става 2, главе 2. 3. (ii), функције $u(x)$ и $v(x)$ раставимо на њихове непрекидне делове $\bar{u}(x)$ и $\bar{v}(x)$ и функције скокова $u_s(x)$ и $v_s(x)$, и ставимо

$$\bar{f}(x) = \bar{u}(x) + \bar{v}(x), \quad f_s(x) = u_s(x) + v_s(x)$$

тада је, према (1),

$$f(x) = \bar{f}(x) + f_s(x).$$

Како је $\bar{f}(x)$, као збир непрекидних функција непрекидна функција, а $f_s(x)$ степенаста функција, то видимо да и *сваку функцију ограничене варијације можемо раставити на њен непрекидни део и функцију скока.*

4. 3. (i) Ако је функција $f(x)$ ограничене варијације у размаку (a, b) и ако је у томе размаку непрекидна, она не мора у свим тачкама тога размака имати одређен извод. Ово следи непосредно из чињенице (в. тачку 1. 5), да већ и монотона функција не мора имати одређен извод у појединим тачкама.

Међутим, *ако функција* $f(x)$ *има ограничен извод* $f'(x)$ *у размаку* (a, b), *тада је она и ограничене варијације у томе размаку.*

Шта више, егзистенцију и ограниченост извода можемо заменити и нешто општијим условом, и то:

Функција $f(x)$ *биће ограничене варијације у размаку* (a, b) *ако је у свим тачкама тог размака задовољен т. зв. Lipschitz-ов* {1} *услов* (види Hobson {1, т. II. стр. 530}), *тј. ако постоји коначан број* M *такав да буде*

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant M(x' - x''),$$

и то за свако x' *и* $x'' < x'$ *размака* (a, b).

Ово је непосредна последица саме дефиниције функције ограничене варијације дате у тачки 3. 1. (i), јер је, према (2), за произвољну поделу $\{x_\nu\}$ размака (a, b) увек

$$W_n = \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \leqslant M \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) = \\ \leqslant M(b-a).$$

(ii) Функција $f(x)$ може имати коначан и одређен извод у свакој тачки неког размака а да при томе не буде ограничене варијације у томе размаку, али тада овај извод није ограничен.

Да ово заиста може бити случај видимо из примера

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x = 0 \\ x^2 \cos(\pi x^{-2}) & \text{за } x > 0. \end{cases}$$

Очевидно ја да извод ове функције постоји за свако $x \geqslant 0$ и да је

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x = 0, \\ 2x\cos(\pi x^{-2}) + \dfrac{2\pi}{x}\sin(\pi x^{-2}) & \text{за } x > 0. \end{cases}$$

Међутим функција $f(x)$ није ограничене варијације, на пример у размаку $(0,1)$; ово увиђамо, слично као и у примеру тачке 3. 4. (i) ако само за поделу $\{x_\nu\}$ размака $(0,1)$ изаберемо бројеве

$$x_0=0 \quad \text{и} \quad x_\nu=\frac{1}{\sqrt{n+1-\nu}}, \quad \nu=1,2,3,\ldots, n,$$

(в. H. Lebesgue $\{2\}$).

(*iii*) Да функција $f(x)$ која има одређен извод у свакој тачки размака (a, b) не би била ограничене варијације у томе размаку, јасно је да она у томе размаку мора имати бескрајно много максимума и минимума и да, шта више, њен извод не сме остати ограничен. Међутим, ови услови нису довољни као што то видимо из примера (в. H. Lebesgue $\{1$, стр. $58\}$)

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } x=0, \\ x^2 \cos(\pi x^{-4/3}) & \text{за } x>0. \end{cases}$$

Ова функција има бескрајно много максимума и минимума, на пример у размаку $(0,1)$, и одређен извод

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } x=0, \\ 2x\cos(\pi x^{-4/3})+\frac{4\pi}{3}x^{-1/3}\sin(\pi x^{-4/3}) & \text{за } x>0, \end{cases}$$

у свим тачкама, који није ограничен у томе размаку, а она је ипак ограничене варијације у томе размаку

Да бисмо увидели да је ова функција заиста ограничене варијације у размаку $(0, 1)$, приметимо, најпре, (в. сл. 6) да она у сваком од размака $[(2k+1)^{-3/4}, (2k)^{-3/4}]$, $k=1,2,3,\ldots$, има по један минимум у некој тачки x'_k, који је негативан и по апсолутној вредности мањи од $(2k)^{-3/2}$, а у сваком размаку $[(2k)^{-3/4}, (2k-1)^{-3/4}]$, $k=1,2,3,\ldots$, по један максимум у некој тачки x_k'' који је позитиван и мањи од $(2k-1)^{-3/2}$.

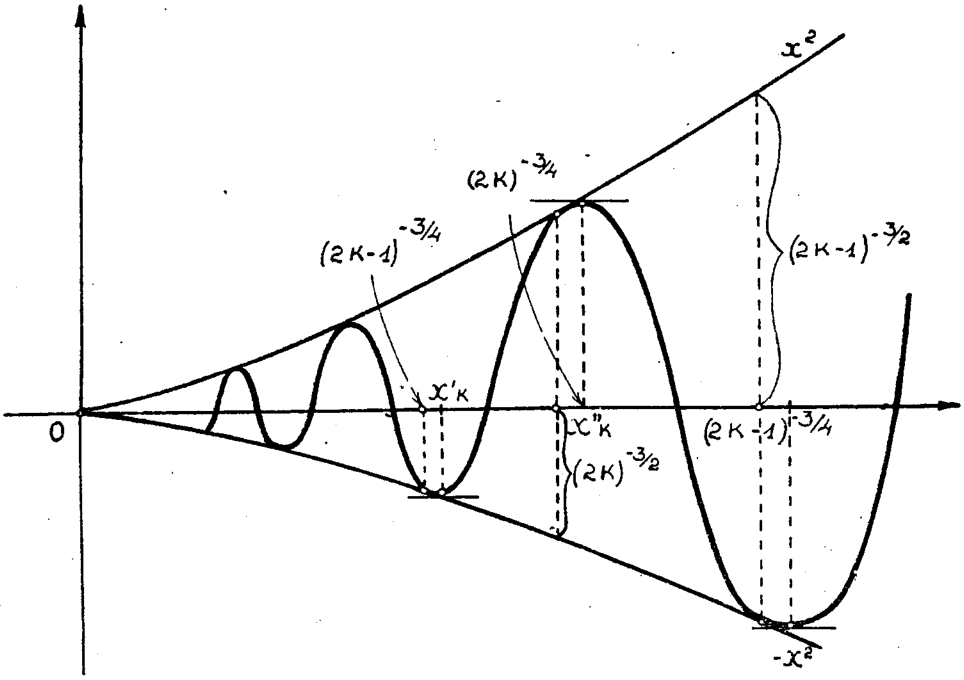
Како је за ма коју поделу $\{x_\nu\}$

$$W_n=\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|<$$

$$<\sum_{k=1}^{\infty}f(x_k'')-f(x_k')<$$

$$<\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{3/2}},$$

то ни тотална варијација функције $f(x)$ у томе размаку не може бити већа од $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-3/2}$, који је ред конвергентан.



Сл. 6.

4. 4. (i) Испитајмо овде које операције можемо извршити са функцијом ограничене варијације тако да резултујућа функција буде такође ограничене варијације.

На пример, ако функцију $f(x)$, која је ограничене варијације у размаку (a, b), подигнемо на други, или на ма који степен $p \geqslant 1$, функција $f^p(x)$ биће такође ограничене варијације у томе размаку.

Заиста, из претпоставке следи да је функција $f(x)$ ограничена, тј. да је

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

а отуда је

$$|f^p(x') - f^p(x'')| \leqslant p\, M^{p-1}\, |f(x') - f(x'')|,$$

кадгод је $p \geqslant 1$.

Из ове неједначине, на основу дефиниције ограничене варијације, тврђење непосредно следи.

(*ii*) Међутим, ако функцију $f(x)$ коренујемо или дигнемо на позитиван степен мањи од јединице, добивена функција више не мора бити ограничене варијације. Да функција $\sqrt{f(x)}$ не мора бити ограничене варијације видимо из примера

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } x=0 \\ x^2\sin^2(1/x) & \text{за } x>0. \end{cases}$$

Да је ова функција ограничене варијације, рецимо у размаку $(0,1)$, можемо показати слично као у примеру из тачке 4. 3. (iii), а да функција

$$\sqrt{f(x)}=x\left|\sin\frac{1}{x}\right|$$

у томе размаку није више ограничене варијације можемо показати слично као у примеру из тачке 3. 4. (i).

Да, уопште, функција $f^p(x)$, кад је $0<p<1$, не мора бити ограничене варијације, ако је $f(x)$ ограничене варијације, видимо ако функцију $f(x)$ конструишемо овако:

Нека је дат низ позитивних бројева c_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, и нека је t_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, произвољан низ међусобно различитих бројева размака $(0,1)$. Ако функцију $f(x)$ дефинишемо у размаку $(0,1)$, тако да буде

$$f(x)=\begin{cases} c_n & \text{за } x=t_n,\ n=1, 2, 3, \ldots, \\ 0 & \text{за } x\neq t_n,\ n=1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

тада је

$$W_0^1(f)=\Sigma c_n,$$

а

$$W_0^1(f^p)=\Sigma c_n^p.$$

Међутим, низ позитивних бројева c_n можемо увек тако изабрати да ред Σc_n конвергира, а ред Σc_n^p дивергира, кадгод је $p<1$.

Према томе ће функција $f(x)$ бити ограничене варијације, док функција $f^p(x)$ то више не мора бити.

(*iii*) Из претходних примера видимо да функција $F\{u(x)\}$ не мора бити ограничене варијације ако је $u(x)$ функција ограничене варијације, и то ни кад је $F(x)$ монотона функција.

У овом општем случају особинама монотоних функција наведеним у тачки 2. 4. (iii), одговара следећа особина:

Нека је функција $u(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b), *а* m *и* M *њена доња и горња граница* [15] *и нека* *је* $F(x)$ *дефинисана у размаку* (m, M). *Функција* $F\{u(x)\}$ *биће ограничене варијације у размаку* (a, b) *ако функција* $F(x)$ *има ограничен извод у размаку* (m, M), *или ойшшије, ако она задовољава Lipschitz-ов услов*

$$|F(x') - F(x'')| \leqslant M(x' - x''), \tag{3}$$

за свако x' *и* $x'' < x'$ *размака* (m, M).

Доказ овог става непосредно следи из саме дефиниције функција ограничене варијације ако у неједначини (3) заменимо x' и x'' са $u(x_\nu)$ и $u(x_{\nu-1})$.

Приметимо, да из услова (3) видимо и разлог зашто квадратни корен функција ограничене варијације не мора бити ограничене варијације; у овом случају, наиме, извод функције $F(x) = \sqrt{x}$ не остаје ограничен у близини тачке $x = 0$.

Међутим, *ако је функција* $f(x)$ *ограничене варијације, а функција* $u(x)$ *монотона, тада је увек функција* $f\{u(x)\}$ *ограничене варијације.*

Ово непосредно увиђамо ако функцију $f(x)$ на основу става 1, тачке 3. 3. (i) раставимо на монотоне функције

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

где функција $g(x)$ не опада, а $h(x)$ не расте; тада је, наиме,

$$f\{u(x)\} = g\{u(x)\} + h\{u(x)\}.$$

Како су функције $g\{u(x)\}$ и $h\{u(x)\}$ монотоне, то је заиста, на основу става 2, тачке 3. 3. (ii), функција $f\{u(x)\}$ ограничене варијације.

(iv) Ако у горњем ставу узмемо за функцију $F(x)$, на пример, функције $F(x) = 1/x$, или $F(x) = |x|$, добивамо неке важније специалне случајеве и то:

1° *Ако је функција* $u(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *и ако је*

$$u(x) \geqslant m > 0 \quad за \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

шада је и функција $1/u(x)$ *ограничене варијације у шоме размаку.*

2° *Ако је функција* $u(x)$ *ограничене варијације, шада је и* $|u(x)|$ *ограничене варијације.*

Међутим, обратно не важи, тј. ако је $|u(x)|$ ограничене варијације сама функција $u(x)$ не мора бити ограничене варијације, као што то видимо из примера

$$u(x)=\begin{cases} +1 & \text{за свако рационално } x. \\ -1 & \text{за свако ирационално } x. \end{cases}$$

4. 5. (i) Нека су дате две или више функција ограничене варијације, тада се непосредно из дефиниције може показати да ће њихов збир, као и њихов производ, бити функција ограничене варијације. Довољно је зато да уочимо две функције, на пример $u(x)$ и $v(x)$.

Да ће збир

$$w(x)=u(x)+v(x)$$

бити ограничене варијације следи непосредно из неједначине

$$|w(x')-w(x'')|\leqslant|u(x')-u(x'')|+|v(x')-v(x'')|.$$

Производ

$$w(x)=u(x)\cdot v(x)$$

је такође ограничене варијације, јер ако означимо са M' и M'' горње границе функција $u(x)$ и $v(x)$ у посматраном размаку, тада је

$$\begin{aligned}|w(x')-w(x'')|&=\\ &=|u(x')v(x')-u(x')v(x'')+u(x')v(x'')-u(x'')v(x'')|\leqslant\\ &\leqslant|u(x')|\,|v(x')-v(x'')|+|v(x'')|\,|u(x')-u(x'')|\leqslant\\ &\leqslant M'|v(x')-v(x'')|+M''|u(x')-u(x'')|.\end{aligned}$$

На исти ће начин и количник $u(x)/v(x)$ бити ограничене варијације ако је

$$v(x)\geqslant m>0 \quad \text{за} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Ово из разлога што овај количник можемо сматрати као производ функција $u(x)$ и $1/v(x)$, а ова последња функција је под горњом претпоставком ограничене варијације, као што смо то видели у тачки 4. 4. (iv). 1^0.

(ii) Ако имамо бескрајно много функција ограничене варијације, тада њихов збир или производ, уколико конвергира, не мора претстављати функцију ограничене варијације чак ни у случају кад је ова конвергенција униформна [23].

Општи став ове врсте, тј. став на основу кога можемо закључити да је гранична функција низа функција ограничене варијације гласи:

Нека је дат низ у размаку (a, b) *дефинисаних функција* $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$. *Ако су све функције овог низа ограничене варијације у томе размаку и ако је низ њихових тоталних варијација* $W_a^b(f_n)$ *ограничен, тј. ако постоји коначан број* M *такав да је*

$$W_a^b(f_n) < M \quad \text{за свако } n, \tag{4}$$

тада ће и гранична функција $f(x)$ *овог низа, уколико она постоји, бити ограничене варијације у размаку* (a, b).

Заиста, на основу дефиниције тоталне варијације је

$$\sum_{\nu=1}^{m} |f_n(x_\nu) - f_n(x_{\nu-1})| \leqslant W_a^b(f_n)$$

ма каква била подела $\{x_\nu\}$; према томе је, на основу претпоставке (4), и

$$\sum_{\nu=1}^{m} |f_n(x_\nu) - f_n(x_{\nu-1})| \leqslant M.$$

Кад у овој неједначини пустимо да $n \to \infty$, у случају да $f_n(x) \to f(x)$ биће и

$$\sum_{\nu=1}^{m} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \leqslant M,$$

одакле следи да и тотална варијација функције $f(x)$ не може бити већа од M.

V. Тотална варијација

5. 1. (i) Испитајмо изближе израз којим је дефинисана тотална варијација $W_a^b(\alpha)$ функције $\alpha(x)$ дефинисане у размаку (a, b). По дефиницији 3. 1. (ii) то је горња граница збира облика

$$W_n = \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})|,$$

за све могуће поделе $\{x_\nu\}$ размака (a, b), тј.

$$\{x_\nu\}: \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Овај збир по својој конструкцији личи на збир којим је дефинисан одређени интеграл [20]; уосталом ако је функција $\alpha(x)$ непрекидна, за њега важи аналоган став и то

Став 1. *Ако је функција* $\alpha(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *и ако је она непрекидна у том размаку, тада збир* W_n *тежи одређеној граничној вредности кад највећи од размака* $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ *тежи нули, тј. кад*

$$\delta_n = \max_{1 \leq \nu \leq n} (x_\nu - x_{\nu-1}) \to 0.$$

Ова гранична вредност је независна од избора поделе $\{x_\nu\}$ *размака* (a, b) *и претставља тоталну варијацију функције* $\alpha(x)$ *у размаку* (a, b).

Овако дефинисану тоталну варијацију писаћемо, по аналогији на одређени интеграл, у облику

$$\lim W_n = W_a{}^b(\alpha) = \int_a^b |d\alpha(x)|. \tag{2}$$

(ii) За непрекидне функције $\alpha(x)$ је ставом 1 израз

$$\int_a^b |d\alpha(x)|$$

једнозначно дефинисан. Чињеницом, што га пишемо у облику интеграла, истакнута је не само формална аналогија тоталне варијације и одређена интеграла, већ је указано и на то да је већина њихових особина заједничка, тј. да основне особине одређена интеграла важе и за израз (2). У ствари, ако функција $\alpha(x)$ има непрекидан извод, израз (2) се и своди на обичан одређени интеграл.

Да бисмо ово доказали приметимо да је, према првом ставу о средњим вредностима

$$\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1}) = \alpha'(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

за једно ξ_ν размака $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, кад год функција $\alpha(x)$ има непрекидан први извод. Заменом ове вредности у образац (1) он постаје

$$W_n = \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha'(\xi_\nu)| (x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Овај израз према дефиницији одређена интеграла [20] тежи изразу

$$\int_a^b |\alpha'(x)|\,dx, \quad \text{кад} \quad \delta_n \to 0;$$

отуда видимо да се у овом случају израз (2) своди заиста на одређени интеграл и да је

$$\int_a^b |d\alpha(x)| = \int_a^b |\alpha'(x)|\,dx.$$

5.2. Доказ става 1. Приметимо, најпре, да се збир W_n не смањује ако подели $\{x_\nu\}$ додамо једну произвољну тачку x'. Јер, ако је, на пример,

$$x_{k-1} \leqslant x' \leqslant x_k,$$

тада је

$$|\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| \leqslant |\alpha(x_k) - \alpha(x')| + |\alpha(x') - \alpha(x_{k-1})|.$$

Према томе, ако уочимо једну поделу $\{x_\mu{}^*\}$ размака (a, b) у m подразмака, такву да свака следећа подела садржи све тачке претходне, тада одговарајући збир $W_m{}^*$ монотоно расте са бројем тачака поделе; како је он, према претпоставци, ограничен, то он мора конвергирати некој одређеној граничној вредности W^*, [8], тј.

$$W_m{}^* \to W^* \quad \text{кад} \quad \delta_m{}^* \to 0,$$

где смо ставили

$$\delta_m{}^* = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \mu \leqslant m} (x_\mu{}^* - x_{\mu-1}{}^*).$$

Нека је сад $\{x_\nu\}$ једна произвољна подела размака (a, b) у n делова; изаберимо $\delta_m{}^*$ тако мало, да буде

$$|\alpha(x_\mu{}^*) - \alpha(x_{\mu-1}{}^*)| < \varepsilon_m{}^* \quad \text{за све} \quad \mu = 1, 2, \ldots\, n,$$

где

$$\varepsilon_m{}^* \to 0 \quad \text{кад} \quad \delta_m{}^* \to 0,$$

а што је, према претпоставци да је функција $\alpha(x)$ непрекидна, увек могуће, [19].

Нека су

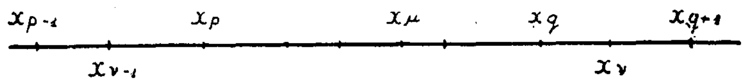
$$x_\mu{}^*, \quad \mu = p, p+1, \ldots\, q,$$

оне тачке поделе $\{x_\mu{}^*\}$ које падају у размак $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, тада је (в. сл. 7)

$$
\begin{aligned}
&|\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})|=\\
&=|\alpha(x_\nu)-\alpha(x_q^*)+\alpha(x_p^*)-\alpha(x_{\nu-1})+\alpha(x_q^*)-\alpha(x_p^*)|\leqslant\\
&\leqslant|\alpha(x_q^*)-\alpha(x_p^*)|+|\alpha(x_\nu)-\alpha(x_q^*)|+|\alpha(x_p^*)-\alpha(x_{\nu-1})|<\\
&<|\alpha(x_q^*)-\alpha(x_p^*)|+2\,\varepsilon_m^*<\\
&<\sum_{\mu=p+1}^{q}|\alpha(x_\mu^*)-\alpha(x_{\mu-1}^*)|+2\,\varepsilon_m^*.
\end{aligned}
$$

Према томе, ако горњу неједначину применимо на све размаке $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, добивамо

$$W_n<W_m^*+2n\varepsilon_m^*.$$



Сл. 7.

Отуда, ако пустимо да δ_m^* тежи нули добивамо да је за сваку поделу $\{x_\nu\}$

$$W_n\leqslant W^*,$$

па је, дакле, и

$$\lim\sup W_n\leqslant W^*, [6].$$

Ако сад изаберемо δ_n тако мало да буде [19]

$$|\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})|<\varepsilon_n, \quad \text{за свако} \quad \nu=1,2,\ldots n,$$

и то тако да и

$$\varepsilon_n\to 0 \quad \text{кад} \quad \delta_n\to 0,$$

тада је, на основу истог расуђивања,

$$W_m^*<W_n+2m\,\varepsilon_n.$$

Ако у овој неједначини пустимо да $\delta_n\to 0$, добивамо неједначину

$$W_m^*\leqslant\lim\inf W_n,$$

која важи за сваку поделу $\{x_\mu^*\}$; према томе је и

$$W^*\leqslant\lim\inf W_n.$$

Дакле, мора бити

$$\lim\inf W_n=\lim\sup W_n=W^*,$$

тј. гранична вредност низа W_n такође постоји и

$$W_n \to W^* \quad \text{кад} \quad \delta_n \to 0.$$

Како ово важи за произвољну поделу $\{x_\nu\}$ размака (a, b), то ни гранична вредност W^* не може зависити од поделе; према томе, ову граничну вредност можемо означити са

$$\int_a^b |d\alpha(x)|,$$

тако да ће заиста

$$W_n = \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})| \to \int_a^b |d\alpha(x)| \text{ кад } \delta_n \to 0,$$

и то за сваку поделу $\{x_\nu\}$ размака (a, b).

5. 3. (i) Из горњег доказа се види да је претпоставка о непрекидности функције $\alpha(x)$ неопходна, да би овако дефинисана гранична вредност

$$\int_a^b |d\alpha(x)|$$

постојала и била независна од поделе.

Међутим, кад је функција $\alpha(x)$ прекидна, егзистенцију граничне вредности низа W_n можемо ипак осигурати и, поред тога што она тада зависи од поделе, можемо је једнозначно дефинисати. За ово је довољно да тачке поделе $\{x_\nu\}$ тако бирамо да се њима постепено прикључе све тачке дисконтинуитета функције $\alpha(x)$, а што је увек могуће јер је скуп ових тачака дисконтинуитета пребројив (в. став 1, тачке А. 2. 1).

При таквом избору тачака поделе $\{x_\nu\}$ низ W_n ће увек тежити одређеној граничној вредности коју можемо и у овом случају означити интегралом, и на тај начин можемо, уопште, тоталну варијацију дефинисати изразом

$$\lim W_n = W_a^b(\alpha) = \int_a^b |d\alpha(x)|. \tag{2}$$

За овако дефинисану тоталну варијацију треба, дакле, изричито нагласити да се израз (1) за збир W_n има образовати тако, што се за тачке поделе $\{x_\nu\}$ морају постепено узети сви дисконтинуитети функције $\alpha(x)$, уколико их ова има.

(ii) Овако дефинисану тоталну варијацију (2) можемо написати и у другом облику и то тако да се тачке дисконтинуитета функције $\alpha(x)$ истакну, тј. експлицитно појаве. Овим добивамо истовремено и доказ горњег тврђења, тј. једнозначне егзистенције граничне вредности (2). Зато је довољно да функцију $\alpha(x)$ раставимо на њен непрекидни део $\bar{\alpha}(x)$ и функцију скока $\alpha_s(x)$. Према ставу 1 тотална варијација функције $\bar{\alpha}(x)$

$$\int_a^b |d\bar{\alpha}(x)|$$

је једнозначно одређена и не зависи од поделе, јер је ова функција непрекидна. Међутим, ако са ξ_ν, $\nu=1, 2, 3, \ldots$ означимо дисконтинуитете функције $\alpha(x)$, тј. њене функције скока $\alpha_s(x)$, и у изразу (1) за W_n извесне тачке поделе $\{x_\nu\}$ бирамо тако да се оне поклопе са неким од тачака ξ_ν, тада се он своди на збир облика

$$W_n = \Sigma\{|\alpha(\xi_\nu+0)-\alpha(\xi_\nu)| + |\alpha(\xi_\nu)-\alpha(\xi_\nu-0)|\},$$

а који треба узети само преко оних тачака ξ_ν које се поклапају са тачкама поделе $\{x_\nu\}$. Ако у овом изразу пустимо да $\delta_n \to 0$, и у тачке поделе постепено укључимо све дисконтинуитете ξ_ν, овај се збир претвара у конвергентан бесконачан ред, узет преко свих тачака дисконтинуитета. Овим је тврђење из тачке (i) доказано и можемо га формулисати у облику става:

Став. 2. *Нека је функција* $\alpha(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b); *ако означимо са* ξ_ν, $\nu=1, 2, 3, \ldots$, *њене тачке дисконтинуитета, а са* $\bar{\alpha}(x)$ *њен непрекидни део, тада је*

$$W_a{}^b(\alpha) = \int_a^b |d\alpha(x)| =$$

$$= \int_a^b |d\bar{\alpha}(x)| + \sum_{\nu=1}^{\infty}\{|\alpha(\xi_\nu+0)-\alpha(\xi_\nu)| + |\alpha(\xi_\nu)-\alpha(\xi_\nu-0)|\}.$$

5. 4. (**i**) Смисао изражавања тоталне варијације у облику (2), тј. знаком интеграла, видимо и из његових особина, од којих ћемо овде навести само две. Оне кавују да се формализам интегралног рачуна може, до извесне мере, применити и на овако изражену тоталну варијацију. Доказ ових особина добивамо непосредно из дефиниције, полазећи од збира (1), ослањајући се при томе на ставове 1 и 2. Како су они непосредна последица чињенице да је апсолутна вредност збира мања од збира апсолутних вредности, то их овде нећемо ни изводити.

(**ii**) *Тотална варијација збира мања је од збира тоталних варијација, тј.*

$$W_a^b(\alpha+\beta) \leqslant W_a^b(\alpha) + W_a^b(\beta).$$

Ова особина изражена у интегралном облику гласи

$$\int_a^b |d\{\alpha(x)+\beta(x)\}| \leqslant \int_a^b |d\alpha(x)| + \int_a^b |d\beta(x)|.$$

(**iii**) Нека су функције $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ ограничене варијације у размаку (a, b). Ако означимо са M' и M'' њихове горње границе у размаку (a, b), тада је

$$W_a^b(\alpha\beta) \leqslant M' W_a^b(\beta) + M'' W_a^b(\alpha).$$

Ову неједначину можемо извести, користећи се формализмом инфинитезималног рачуна и овако

$$\int_a^b |d\{\alpha(x)\beta(x)\}| \leqslant \int_a^b |\alpha(x)|\,|d\beta(x)| + \int_a^b |\beta(x)|\,|d\alpha(x)| \leqslant$$

$$\leqslant M' \int_a^b |d\beta(x)| + M'' \int_a^b |d\alpha(x)|.$$

Да је овако формално извођење заиста ригурозно, моћи ћемо проверити тек пошто прецизно дефинишемо изразе који се јављају на десној страни прве од горњих неједначина, а која је дефиниција дата у тачки В. 1. 9.

5. 5. (**i**) У тачки **3. 3.** били смо принуђени да тоталну варијацију посматрамо као функцију њене горње границе. На основу ставова 1 и 2 можемо сад ову функцију прецизно дефинисати.

Уочимо зато тачку x размака (a, b) и посматрајмо, у тачки **5. 3.** дефинисану, тоталну варијацију $W_a^x(\alpha)$ функције $\alpha(x)$ у размаку (a, x), тј.

$$W_a^x(\alpha) = \int_a^x |d\alpha(t)|.$$

Изразом $\int_a^x |d\alpha(t)$ је тотална варијација $W_a^x(\alpha)$ једнозначно дефинисана за све x размака (a, b) и претставља одређену функцију од x.

(ii) За овако дефинисану тоталну варијацију као функцију своје горње границе докажимо прво став на који смо се већ позвали у тачки **3. 4.** и који гласи:

Став 3. *Нека је $\alpha(x)$ ограничене варијације у размаку (a, b); ако је ова функција непрекидна у томе размаку, тада је и тотална варијација $W_a^x(\alpha)$ непрекидна у размаку (a, b). Прецизније, функција $W_a^x(\alpha)$ биће непрекидна у свим тачкама у којима је и функција $\alpha(x)$ непрекидна.*

Доказ. Нека је

$$a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = x$$

једна подела размака (a, x). Ако, краткоће ради, ставимо

$$A(x) = W_a^x(\alpha) = \int_a^x |d\alpha(t)|,$$

тада ће, на основу става 1,

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})| \to A(x)$$

кад

$$\delta_n = \underset{1 \leq \nu \leq n}{\mathrm{Max}} \{x_\nu - x_{\nu-1}\} \to 0.$$

Ако под

$$\int_a^{x \pm 0} |d\alpha(t)|$$

подразумевамо $A(x\pm 0)$, тада је

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})|=\sum_{\nu=1}^{n-1}|\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})|+|\alpha(x)-\alpha(x_{n-1})|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^{x-0}|d\alpha(t)| + |\alpha(x)-\alpha(x_{n-1})|=$$

$$\leqslant A(x-0)+|\alpha(x)-\alpha(x_{n-1})|.$$

Како, према претпоставци о непрекидности функције $\alpha(x)$,

$$\alpha(x)-\alpha(x_{n-1})\to 0 \quad \text{кад} \quad \delta_n\to 0,$$

то добивамо да је

$$A(x)\leqslant A(x-0).$$

Међутим, тотална варијација $A(x)$ не опада, па мора бити и

$$A(x-0)\leqslant A(x).$$

Према томе је

$$A(x)=A(x-0),$$

чиме је доказано да је функција $A(x)$ непрекидна с леве стране.

Истим поступком можемо доказати да је

$$\int_{x+0}^{b}|d\alpha(t)|=\int_{x}^{b}|d\alpha(t)|,$$

тј. да је функција

$$\int_{x}^{b}|d\alpha(t)|$$

непрекидна са десне стране. Како је, међутим,

$$A(x)=\int_a^x|d\alpha(t)|=\int_a^b|d\alpha(t)|-\int_x^b|d\alpha(t)|,$$

то је и функција $A(x)$ непрекидна с десне стране, тј.

$$A(x+0)=A(x).$$

Према томе је

$$A(x-0)=A(x+0)=A(x),$$

одакле следи да је функција $A(x)$ непрекидна у свим тачкама у којима је и функција $\alpha(x)$ непрекидна, чиме је став 3 доказан.

(iii) Приметимо да смо за доказ десне непрекидности морали узети у обзир да је функција $\alpha(x)$ ограничене варијације у размаку (x, b). Ово је природно, ако приметимо да функција $\alpha(x)$ може бити ограничене варијације до извесне тачке x', а да у размаку $(x', x'+\varepsilon)$ више то не буде, ма како мало било $\varepsilon > 0$. Другим речима, тотална варијација функције $\alpha(x)$ није у овом случају уопште ни дефинисана за $x \geqslant x'$.

(iv) На основу става 3, тачке дисконтинуитета функција $A(x)$ и $\alpha(x)$ се морају поклапати. Међутим, истим посматрањем можемо увидети да им леви и десни скокови по апсолутној вредности морају такође бити једнаки, тј. да је

$$\int_a^x |d\alpha(x)| = \int_a^{x-0} |d\alpha(x)| + |\alpha(x) - \alpha(x-0)|$$

и

$$\int_a^x |d\alpha(x)| = \int_a^{x+0} |d\alpha(x)| - |\alpha(x+0) - \alpha(x)|.$$

Ако у овим једначинама интеграле заменимо функцијом $A(x)$, оне се своде на

$$A(x+0) = A(x) + |\alpha(x+0) - \alpha(x)|$$

и

$$A(x-0) = A(x) - |\alpha(x) - \alpha(x-0)|,$$

из којих једначина видимо да између скокова тоталне варијације $A(x)$ и функције $\alpha(x)$ мора постојати следећа веза

$$A(x+0) - A(x-0) = |\alpha(x+0) - \alpha(x)| + |\alpha(x) - \alpha(x-0)|.$$

ОДЕЉАК В.

STIELTJES-ОВ ИНТЕГРАЛ

I. Одређени Stieltjes-ов интеграл

1. 1. (i) Нека је функција $f(x)$ ограничена у размаку (a, b) и нека је функција $\alpha(x)$ ограничене варијације у томе размаку. Stieltjes-ов интеграл функције $f(x)$, у односу на функцију $\alpha(x)$, дефинише се овако:

Дефиниција. Нека је

$$\{x_\nu\}: \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots . < x_n = b$$

произвољна подела размака (a, b) на n делова и нека је ξ_ν произвољно изабрана тачка у размаку $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots . n$. Означимо са S_n збир

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) \{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\}, \tag{1}$$

а за δ_n дужину највећег од размака $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, тј.

$$\delta_n = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu - x_{\nu-1}\}.$$

Ако збир (1) конвергира одређеној граници S, кад

$$\delta_n \to 0,$$

и то независно од тачака поделе $\{x_\nu\}$ и избора тачака ξ_ν, тада се та гранична вредност назива *Stieltjes-ов интеграл функције* $f(x)$ *у односу на функцију* $\alpha(x)$ и пише

$$S = \int_a^b f(x)\, d\{\alpha(x)\} = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

Из ове дефиниције видимо да се Stieltjes-ов интеграл образује слично као и Riemann-ов {1, стр. 239—244}, [20], а општији је утолико, што се уместо разлике апсциса $(x_\nu - x_{\nu-1})$ узима разлика функција

$$\Delta \alpha (x_\nu) = \alpha (x_\nu) - \alpha (x_{\nu-1}).$$

(*ii*) Претпоставка да функција $\alpha(x)$ мора бити ограничене варијације природно се намеће; ако, наиме, ова претпоставка није испуњена, могу се наћи увек такве, шта више и непрекидне функције $f(x)$, да горња дефиниција Stieltjes-ова интеграла постаје бесмислена. Прецизније, ако функција $\alpha(x)$ није ограничене варијације, постоји увек једна подела $\{x_\nu\}$ размака (a, b) и једна непрекидна функција $f(x)$ тако да збир (1) не остаје ограничен. — Другим речима, да би збир (1) остао ограничен за с в а к у непрекидну функцију $f(x)$, *потребно је и довољно* да функција $\alpha(x)$ буде ограничене варијације. Да је овај услов заиста и довољан показаћемо у тачки 1. 4.

(*iii*) Претпоставимо, дакле, да је функција $\alpha(x)$ ограничене варијације у размаку (a, b). Преостаје да видимо за коју ће класу функција $f(x)$ Stieltjes-ов интеграл постојати, другим речима, за које ће функције $f(x)$ збир (1) имати одређену граничну вредност кад $\delta_n \to 0$, и то независну од поделе $\{x_\nu\}$ и избора тачака ξ_ν.

За ове функције кажемо да су *интеграбилне у смислу Stieltjes*-а у односу на функцију $\alpha(x)$, а доцније ћемо овај појам још прецизирати.

1. 2. (**i**) На основу става 1, тачке A. 3.3. (i) да се свака функција ограничене варијације $\alpha(x)$ може претставити као разлика двеју монотоних функција $\beta(x)$ и $\gamma(x)$, тј. да је

$$\alpha(x) = \beta(x) - \gamma(x),$$

збир (1) можемо раставити на два збира и то

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) \{\beta(x_\nu) - \beta(x_{\nu-1})\} - \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) \{\gamma(x_\nu) - \gamma(x_{\nu-1})\}. \quad (2)$$

Према томе ће збир (1) тежити одређеној граничној вредности, ако сваки од ова два збира засебно тежи одређеној граници. Отуда следи, да ће свака функција која је интеграбилна у односу на монотоне функције, бити интеграбилна и у односу на функције ограничене варијације.

Због тога можемо за сада претпоставити да је функција $\alpha(x)$ монотона и испитати какав услов треба да задовољава функција $f(x)$, поред претпоставке да остаје ограничена, да би она била интеграбилна у односу на функцију $\alpha(x)$.

(*ii*) Претпоставимо да функција $\alpha(x)$ не опада у размаку (a, b) и да је функција $f(x)$ ограничена у томе размаку. Према томе је она ограничена и у сваком од подразмака (x', x'') размака (a, b) и, ако означимо са $G(x', x'')$ горњу, а са $g(x', x'')$ доњу границу функције $f(x)$ у размаку (x', x''), [2], [16], тј. ако ставимо

$$G(x', x'') = \operatorname*{Max}_{x' \leqslant x \leqslant x''} \{f(x)\}$$

и

$$g(x', x'') = \operatorname*{Min}_{x' \leqslant x \leqslant x''} \{f(x)\},$$

биће

$$g(x', x'') \leqslant f(x) \leqslant G(x', x'') \quad \text{за} \quad x' \leqslant x \leqslant x''.$$

Означимо даље осцилацију [17] функције $f(x)$ у размаку (x', x'') са

$$\omega(x', x'') = G(x', x'') - g(x', x'').$$

Нека је најзад

$$\overline{S}_n = \sum_{\nu=1}^{n} G(x_{\nu-1}, x_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\}, \tag{3}$$

$$\underline{S}_n = \sum_{\nu=1}^{n} g(x_{\nu-1}, x_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\}, \tag{4}$$

$$\Omega_n = \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x_{\nu-1}, x_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\}. \tag{5}$$

Ради краћег изражавања $\overline{S}_n$ и $\underline{S}_n$ зовемо *горњи* односно *доњи збир*, а разлику

$$\Omega_n = \overline{S}_n - \underline{S}_n$$

средња осцилација функције $f(x)$ у односу на функцију $\alpha(x)$.

Да би гранична вредност збира (1) постојала и била независна од избора тачака ξ_ν кад $\delta_n \to 0$, јасно је да горњи и доњи збир морају тежити одређеној граничној вредности и да мора

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \Omega_n \to 0 \quad \text{кад} \quad \delta_n \to 0. \tag{6}$$

Јер, тачке ξ_ν можемо увек тако изабрати да се вредности $f(\xi_\nu)$ произвољно мало разликују било од горњих било од доњих граница G, односно g, функције $f(x)$ у одговарајућим размацима.

(**iii**) Покажимо да је услов (6) не само потребан већ и довољан, тј. да кад средња осцилација Ω_n тежи нули, горњи и доњи збир $\overline{S}_n$ и $\underline{S}_n$ теже одређеној заједничкој граничној вредности, која не зависи од поделе $\{x_\nu\}$.

У ту сврху приметимо прво, да је за

$$x' < y < x'',$$

увек

$$\begin{aligned} G(x',x'')\{\alpha(x'')-\alpha(x')\} &\geqslant \\ &\geqslant G(x',y)\{\alpha(y)-\alpha(x')\}+G(y,x'')\{\alpha(x'')-\alpha(y)\}, \\ g(x',x'')\{\alpha(x'')-\alpha(x')\} &\leqslant \\ &\leqslant g(x',y)\{\alpha(y)-\alpha(x')\}+g(y,x'')\{\alpha(x'')-\alpha(y)\}, \\ \omega(x',x'')\{\alpha(x'')-\alpha(x')\} &\geqslant \\ &\geqslant \omega(x',y)\{\alpha(y)-\alpha(x')\}+\omega(y,x'')\{\alpha(x'')-\alpha(y)\}; \end{aligned} \tag{7}$$

јер горња граница, као и осцилација у целом размаку (x', x'') не може бити мања од горњих граница, односно осцилација у оба размака (x', y) и (y, x''), а доња граница не може бити већа, тј.

$$G(x',x'')=\mathrm{Max}\{G(x',y),\ G(y,x'')\},$$
$$g(x',x'')=\mathrm{Min}\{g(x',y),\ g(y,x'')\},$$
$$\omega(x',x'')=\mathrm{Max}\{\omega(x',y),\ \omega(y,x'')\}.$$

Означимо даље са $\{x_\nu^*\}$ такву поделу размака (a, b) у m подразмака, да прелаз од претходних ка следећим поделама настаје не мењајући претходне тачке поделе, већ само додавањем нових тачака између претходно постојећих. Тада, оваквим поделама одговарајући горњи и доњи збир и осцилација

$$\overline{S}_m^*,\quad \underline{S}_m^*,\quad \Omega_m^*,$$

претстављају, на основу неједначина (7), монотоне низове, и то низови

$$\overline{S}_m^*,\quad \Omega_m^*,$$

не расту, а низ

$$\underline{S}_m^*$$

не опада. Како су ови низови ограничени, то ће они тежити одређеним граничним вредностима, тако да можемо ставити

$$\overline{S}^* = \lim_{m=\infty} \overline{S}_m^*, \qquad \underline{S}^* = \lim_{m=\infty} \underline{S}_m^*$$

$$\Omega^* = \lim_{m=\infty} \Omega_m^*.$$

Према томе ће, у овом случају горњи и доњи збирови тежити истој граничној вредности S^*, тј. биће

$$\overline{S}^* = \underline{S}^* = S^*,$$

кадгод средња осцилација тежи нули, тј. кад је

$$\Omega^* = 0.$$

Нека је сада $\{x_\nu\}$ произвољна подела размака (a, b) у n подразмака; означимо са $\overline{S}_n$ и $\underline{S}_n$ њој одговарајуће горње и доње збирове (3) и (4), а са $\overline{S}_{m+n}$ и $\underline{S}_{m+n}$ одговарајуће збирове за поделу, која настаје суперпонирањем подела $\{x_\nu^*\}$ и $\{x_\nu\}$.

На основу неједначина (7) видимо да је тада

$$\overline{S}_n \geqslant \overline{S}_{m+n} \geqslant \underline{S}_{m+n} \geqslant \underline{S}_m^*$$

и

$$\underline{S}_n \leqslant \underline{S}_{m+n} \leqslant \overline{S}_{m+n} \leqslant \overline{S}_m^*,$$

а из ових неједначина следи

$$\underline{S}_n \leqslant \overline{S}_m^* \quad \text{и} \quad \underline{S}_m^* \leqslant \overline{S}_n.$$

Према томе, ако средња осцилација

$$\Omega_m^* \to 0,$$

на основу раније реченог S^* постоји, и за сваку поделу $\{x_\nu\}$ је

$$\underline{S}_n \leqslant S^* \leqslant \overline{S}_n.$$

Из ове двоструке неједначине добивамо

$$0 \leqslant \overline{S}_n - S^* \leqslant \overline{S}_n - \underline{S}_n = \Omega_n$$

и

$$0 \leqslant S^* - \underline{S}_n \leqslant \overline{S}_n - \underline{S}_n = \Omega_n;$$

ове неједначине казују да ће за сваку поделу $\{x_\nu\}$, за коју средња осцилација

$$\Omega_n \to 0,$$

граничне вредности

$$\lim_{n=\infty} \underline{S}_n \quad \text{и} \quad \lim_{n=\infty} \overline{S}_n$$

увек постојати и да је

$$\lim_{n=\infty} \underline{S}_n = \lim_{n=\infty} \overline{S}_n = S^*.$$

Према томе, *ако средња осцилација* Ω_n *тежи нули за сваку поделу* $\{x_\nu\}$, *размака* (a, b), *горњи и доњи збирови* (3) *и* (4) *теже истој граничној вредности* S, *независној од поделе, кад* $\delta_n \to 0$.

(iv) Како је за сваку поделу

$$\underline{S}_n \leqslant S_n \leqslant \overline{S}_n,$$

то из добивених резултата видимо да ће и збир (1), тј. S_n тежити коначној и одређеној граничној вредности независној од поделе ако средња осцилација (5) тежи нули кад $\delta_n \to 0$. Ову граничну вредност можемо, према томе, означити са

$$S = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

тако да она не зависи ни од поделе $\{x_\nu\}$, ни од избора тачака ξ_ν. Овако добивени интеграл називамо *Riemann-Stieltjes-ов интеграл* функције $f(x)$ у односу на функцију $\alpha(x)$. За функције $f(x)$ за које овај интеграл постоји кажемо да су *R-S-интеграбилне* у односу на функцију $\alpha(x)$. Један облик овог услова R-S-интеграбилности дат је, према томе, овим ставом:

Став. 1. *Нека је функција* $f(x)$ *ограничена у размаку* (a, b) *и нека је* $\alpha(x)$ *монотона у томе размаку. Да би функција* $f(x)$ *била R-S-интеграбилна у односу на функцију* $\alpha(x)$ *потребно је и довољно да средња осцилација* (5) *функције* $f(x)$ *у односу на функцију* $\alpha(x)$ *тежи нули, за ма коју поделу* $\{x_\nu\}$ *размака* (a, b) *кад* $\delta_n \to 0$.

1. 3. Из става 1 видимо да је услов за егзистенцију Riemann-Stieltjes-ова интеграла аналоган услову за егзистенцију Riemann-ова интеграла [20], наиме да средња осцилација тежи нули. Међутим, ова аналогија између Riemann-ова и Riemann-Stieltjes-ова интеграла више не важи кад су у питању граничне вредности горњих и доњих збирова (3) и (4).

Као што је Darboux {1} показао, горњи и доњи Riemann-ови збирови [20] ограничене функције теже увек одређеним граничним вредностима, независним од поделе, т. зв. *горњим и доњим Darboux-овим интегралима* и то без обзира да ли средња осцилација тежи или не тежи нули. Међутим, Stieltjes-ови горњи и доњи збирови (3) и (4) не теже увек одређеним граничним вредностима и у општем случају постоји горња и доња граница горњег збира и горња и доња граница доњег збира. Само у случају ако средња осцилација (5) тежи нули, као што је то показано у ставу 1, ове четири границе се морају поклопити и њихова заједничка вредност овим одређује Riemann-Stieltjes-ов интеграл.

Ова разлика између Riemann-ова и Stieltjes-ова интеграла потиче отуда, што у општем случају функција $\alpha(x)$ може бити прекидна. Наиме, ако је функција $\alpha(x)$ дисконтинуирана, граничне вредности горњих и доњих збирова (3) и (4) не постоје и зависе од избора тачака $\{x_\nu\}$. Али ако је функција $\alpha(x)$ непрекидна, ова аналогија остаје. Другим речима, горњи и доњи збирови (3) и (4) тада теже одређеним граничним вредностима, независним од поделе $\{x_\nu\}$ и претстављају аналогоне Darboux-ових горњих и доњих интеграла код Stieltjes-ова интеграла.

Егзистенцију горњих и доњих интеграла можемо осигурати и кад функција $\alpha(x)$ има дисконтинуитете и то поцесним избором тачака поделе $\{x_\nu\}$, као што је то био случај код тоталне варијације (види главу А. 5.).

Докази ових тврђења могу се добити истоветним поступком као и докази ставова о тоталној варијацији; како ови за даље излагање нису потребни, то их овде не ћемо ни изводити.

1. 4. **(i)** Експлицтни облик услова за R-S-интеграбилност функције $f(x)$, тј. да средња осцилација (5) функције $f(x)$, у односу на функцију $\alpha(x)$, тежи нули за сваку поделу размака, за ефективну примену је тешко употребљив. — Много су важнији они ставови на основу којих се може из саме структуре функције $f(x)$ закључити када је она интеграбилна. У ствари, интеграбилност искључиво зависи од множине тачака дисконтинуитета функције $f(x)$, јер је, као што ћемо овде показати, свака непрекидна функција увек интеграбилна.

(ii) Класа непрекидних функција је најважнија и зато ћемо овде доказати

Став 2. *Ако је функција $f(x)$ непрекидна у затвореном размаку (a, b) тада је она R-S-интеграбилна у односу на сваку монотону функцију $\alpha(x)$ тога размака.*

Свака у затвореном размаку (a, b) непрекидна функција је униформно непрекидна у томе размаку [19]. Другим речима, за свако произвољно мало $\varepsilon > 0$ можемо увек наћи једно $\eta > 0$, тако да осцилација функције $f(x)$ буде мања од ε, тј.

$$\operatorname*{Max}_{x' \leqslant x \leqslant y \leqslant x''} |f(x) - f(y)| = w(x', x'') < \varepsilon,$$

и то за сваки подразмак (x', x'') размака (a, b) за који је

$$x'' - x' < \eta.$$

Према томе, ако поделу $\{x_\nu\}$ размака (a, b) изаберемо тако да буде

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} (x_\nu - x_{\nu-1}) = \delta_n < \eta,$$

тада је

$$\Omega_n = \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x_{\nu-1}, x_\nu) \{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} \{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} = \varepsilon \{\alpha(b) - \alpha(a)\}.$$

Дакле, средњу осцилацију сваке непрекидне функције $f(x)$, у односу на монотону функцију $\alpha(x)$, можемо учинити произвољно малом, ако само δ_n изаберемо довољно мало, тј.

$$\Omega_n \to 0 \quad \text{кад} \quad \delta_n \to 0.$$

Одатле следи да Stieltjes-ов интеграл непрекидне функције увек постоји, што је требало доказати.

1. 5. (**i**) Непрекидност није неопходна за егзистенцију Stieltjes-ова интеграла; али ако функција $f(x)$ има прекиде, важно је истаћи *да се дисконтинуитети функције* $f(x)$ *ни у ком случају не смеју поклапати са дисконтинуитетима функције* $\alpha(x)$, да би ова функција уопште могла бити интеграбилна у односу на функцију $\alpha(x)$.

Јер, ако се у размаку (x_{k-1}, x_k) налази једна тачка дисконтинуитета функције $f(x)$, тада је њена осцилација у томе размаку

$$\omega(x_{k-1}, x_k) \geqslant m > 0. \tag{8}$$

Да би Stieltjes-ов интеграл имао смисла мора

$$\omega(x_{k-1}, x_k) \{\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\} \to 0 \quad \text{кад} \quad x_k - x_{k-1} \to 0,$$

што је, према (8) могуће **ј е д и н о** ако је функција $\alpha(x)$ непрекидна на томе месту.

(*ii*) Међутим, средња осцилација Ω_n, према томе и сви њени чланови могу тежити нули и кад функција $f(x)$ има тачака дисконтинуитета; шта више, она их може имати и бескрајно много. Ово је случај са функцијама ограничене варијације, које су увек интеграбилне у односу на функцију $\alpha(x)$, ако им се само дисконтинуитети не поклапају.

Став 3. *Нека је $f(x)$ функција ограничене варијације у размаку (a, b), да би она била интеграбилна у односу на монотону функцију $\alpha(x)$, потребно је и довољно да се њене тачке дисконтинуитета не поклапају са тачкама дисконтинуитета функције $\alpha(x)$.*

Да бисмо овај став доказали раставимо средњу осцилацију Ω_n функције $f(x)$ на два збира

$$\Omega_n = \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x_{\nu-1}, x_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} = \Sigma' + \Sigma'', \tag{9}$$

тако да се у првом збиру Σ' јављају само они чланови код којих је осцилација, тј. скок функције $f(x)$ већи или једнак, унапред датом произвољно малом позитивном броју ε, а у други збир Σ'' ставимо све остале чланове, тј. све оне у којима је осцилација функције $f(x)$ мања од ε.

Како је по претпоставци функција $f(x)$ ограничене варијације, то она може имати највише пребројиво много тачака дисконтинуитета и то прве врсте [18], а само коначан број оних тачака у којима је скок $\geqslant \varepsilon$.

Према томе, први збир Σ' садржи само коначан број чланова и, ако означимо са M горњу границу функције $f(x)$ у размаку (a, b), а краћег писања ради ставимо

$$\omega = \omega(x_{\nu-1}, x_\nu), \quad \Delta\alpha = \alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1}),$$

биће

$$\Sigma' = \Sigma' \omega \Delta\alpha \leqslant M \Sigma' \Delta\alpha.$$

Како се тачке дисконтинуитета функција $f(x)$ и $\alpha(x)$ према претпоставци не поклапају, то можемо сваки члан овог последњег збира учинити произвољно малим, ако само δ_n изаберемо довољно мало. Како је број чланова овога збира коначан, то можемо дакле δ_n изабрати тако мало, да цео збир буде мањи од унапред датог, произвољно малог броја η. Према томе је за довољно мало δ_n

$$\Sigma' \leqslant M\eta. \tag{10}$$

Са друге стране је

$$\Sigma'' = \Sigma'' \omega \Delta\alpha \leqslant \varepsilon \Sigma'' \Delta\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \Sigma \Delta\alpha = \varepsilon \{\alpha(b) - \alpha(a)\} = M'\varepsilon, \tag{11}$$

где је M' коначан број.

Дакле, према (9), (10) и (11), је

$$\Omega_n \leqslant M\eta + M'\varepsilon.$$

Како бројеви ε и η могу бити произвољно мали, ако је само δ_n довољно мало, то средња осцилација Ω_n мора тежити нули са δ_n, чиме је горњи став доказан.

1.6. (*i*) До сада смо посматрали Stieltjes-ов интеграл само у односу на монотону функцију $\alpha(x)$. Међутим, кад функција $f(x)$ припада класи непрекидних функција или класи функција ограничене варијације, можемо без нарочитих тешкоћа Stieltjes-ов интеграл проширити и на случај кад се он односи на произвољну функцију ограничене варијације; другим речима, можемо показати да ставови 2 и 3 остају у важности и у случају кад је функција $\alpha(x)$ ограничене варијације.

(*ii*) Сваку функцију ограничене варијације $\alpha(x)$ можемо претставити у облику разлике двеју монотоних функција $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ и то на бескрајно много начина. Међутим, на основу става 3 тачке А. 3. 4. (ii) да се непрекидна функција ограничене варијације може рашчланити на монотоне и непрекидне функције, *рашчлањивање произвољне функције ограничене варијације* $\alpha(x)$ *можемо извршити тако да се дисконтинуитети обеју функција* $\beta(x)$ *и* $\gamma(x)$ *састоје искључиво из дисконтинуитета функције* $\alpha(x)$. Дакле, ово рашчлањивање можемо извршити тако да обе функције $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ буду непрекидне тамо где је и функција $\alpha(x)$ непрекидна, као што је то на пример случај са функцијама $P(x)$ и $N(x)$ посматраним у тачки А. 3.3. (i).

(*iii*) Нека је

$$\alpha(x) = \beta(x) - \gamma(x),$$

где функције $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ не опадају и немају других дисконтинуитета осим оних функције $\alpha(x)$, тада збир (1) можемо увек написати у облику разлике (2):

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\beta(x_\nu) - \beta(x_{\nu-1})\} - \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\gamma(x_\nu) - \gamma(x_{\nu-1})\}, \tag{12}$$

или краће

$$S_n = \Sigma f\Delta\alpha = \Sigma f\Delta\beta - \Sigma f\Delta\gamma.$$

Збирови

$$\Sigma f\Delta\beta \text{ и } \Sigma f\Delta\gamma$$

теже коначним и одређеним границама

$$\Sigma f\Delta\beta \to \int_a^b f(x)\,d\beta(x)$$

и

$$\Sigma f\Delta\gamma \to \int_a^b f(x)\,d\gamma(x) \text{ кад } \delta_n \to 0,$$

које не зависе ни од поделе $\{x_\nu\}$, ни од избора тачака ξ_ν, и то за све у размаку (a, b) непрекидне функције $f(x)$ и све функције $f(x)$ које су ограничене варијације и чији се дисконтинуитети не поклапају са дисконтинуитетима функција $\beta(x)$ и $\gamma(x)$, тј. са дисконтинуитетима функције $\alpha(x)$. Према (12) ће, дакле, под истим условима и сам збир $\Sigma f\Delta\alpha$ тежити коначној и одређеној граници, а како је по дефиницији

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \lim_{n=\infty} S_n,$$

ако ова последња гранична вредност постоји, то је овим доказана егзистенција Stieltjes-ова интеграла у односу на функције $\alpha(x)$ које су ограничене варијације и то за све функције $f(x)$ поменуте две класе. Ово можемо формулисати у облику:

Став 4. *Нека је функција* $\alpha(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b); *ако је функција* $f(x)$ *или непрекидна или ограничене варијације у томе размаку а при томе се њени дисконтинуитети не поклапају са дисконтинуитетима функције* $\alpha(x)$, *тада је функција* $f(x)$ *интеграбилна у Stieltjes-ову смислу у односу на функцију* $\alpha(x)$.

(iv) На основу горњег излагања и то према једначини (12) добивамо још и следећи резултат:

Ако функцију $\alpha(x)$ рашчланимо на две монотоне функције $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ тако да се дисконтинуитети функција $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ састоје искључиво из дисконтинуитета функције $\alpha(x)$, тада је за све функције $f(x)$ поменуте две класе

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,d\beta(x) - \int_a^b f(x)\,d\gamma(x).$$

1. 7. (i) Овим смо добили две за нас најважније класе R-S-интеграбилних функција; како нам у даљњем излагању општије класе функција неће бити ни потребне, то ћемо под „S-интеграбилним функцијама“ од сада искључиво подразумевати ове две класе функција. Другим речима:

За функцију $f(x)$ казаћемо да је S-интеграбилна, или краће интеграбилна, у односу на функцију $\alpha(x)$, ако је она или непрекидна или ограничене варијације, а при томе се њени дисконтинуитети не поклапају са дисконтинуитетима функције $\alpha(x)$.

Овде нећемо проучавати природу опште R-S-интеграбилне функције, тј. нећемо испитивати потребне и довољне услове које мора задовољавати множина тачака дисконтинуитета функције $f(x)$, да би њена средња осцилација, у односу на функцију $\alpha(x)$ тежила нули. Ово из разлога, што се у ефективној примени Stieltjes-ова интеграла искључиво јавља горе дефинисана класа S-интеграбилних функција, а са друге стране, што све особине и ставови, које ћемо у овом одељку проучити, остају у важности без икакве промене, и за општу класу R-S-интеграбилних функција. Поред тога, сама теорија Riemann-Stieltjes-ова интеграла налази се, међу осталим, опширно обрађена, на пример, код Hobson-a {1, I, стр. 538—559}, или Смирнов-а {1, V, стр. 1—95}.

(ii) Како је Stieltjes-ов интеграл везан за функцију ограничене варијације, у односу на коју се интеграција врши, то ћемо од сада, краћег изражавања ради, ову „интеграциону“ функцију (Belegungsfunktion) звати „језгро“ Stieltjes-ова интеграла и под „језгром“ увек подразумевати да је то функција ограничене варијације. — При томе треба разликовати овај појам језгра од појма језгра код сингуларних интеграла и интегралних једначина, због чега овај назив уводимо као провизоран, да би овим само олакшали изражавање.

1. 8. (i) Код Stieltjes-ова интеграла треба нарочиту пажњу обратити на граничне тачке a и b интеграционог размака (a, b), ако су ово тачке прекида језгра $\alpha(x)$. Ради тога ћемо прво овај случај детаљно испитати.

По дефиницији се код Stieltjes-ова интеграла прва и последња тачка поделе $\{x_\nu\}$ увек морају поклапати са граничним тачкама a и b интеграционог размака, тј. $x_0 = a$ и $x_n = b$.

Уочимо прво доњу интеграциону границу и у збиру S_n одвојимо први члан

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} = \tag{13}$$

$$= f(\xi_1)\{\alpha(x_1) - \alpha(a)\} + \sum_{\nu=2}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\}.$$

Преостали збир је исте природе као и први, с том разликом што се он односи на једну поделу интеграционог размака (a, b), код које се први члан x_1 не поклапа са почетном тачком a размака.

Како

$$x_1 \to a \quad \text{кад} \quad \delta_n \to 0,$$

то ће овај последњи збир тежити истој граничној вредности као и збир S_n, ако је функција $\alpha(x)$ непрекидна у тачки $x = a$, јер у том случају

$$f(\xi_1)\{\alpha(x_1) - \alpha(a)\} \to 0 \quad \text{кад} \quad x_1 \to a.$$

Ако је, међутим, функција $\alpha(x)$ прекидна у тачки $x = a$, тада, да би Stieltjes-ов интеграл постојао, функција $f(x)$ мора бити непрекидна у тој тачки, тако да у овом случају

$$f(\xi_1)\{\alpha(x_1) - \alpha(a)\} \to f(a)\{\alpha(a+0) - \alpha(a)\} \neq 0, \tag{14}$$

пошто

$$\xi_1 \to a \quad \text{и} \quad x_1 \to a \quad \text{кад} \quad \delta_n \to 0.$$

Значи да и у овом случају други збир у обрасцу (13) тежи одређеној граничној вредности кад $\delta_n \to 0$, али се она разликује од граничне вредности првога збира, тј. од

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

за количину (14).

Како и гранична вредност другога збира претставља један одређен интеграл, то га за разлику од првог обележавамо са

$$\int_{a+0}^b f(x)\, d\alpha(x),$$

где $a+0$ значи да се приликом образовања њему одговарајућег збира S_n прва тачка поделе не поклапа са тачком a.

На основу ове дефиниције видимо, дакле, да је

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = f(a)\{\alpha(a+0) - \alpha(a)\} + \int_{a+0}^b f(x)\, d\alpha(x).$$

(*ii*) Слично резоновање можемо применити и на горњу границу b размака (a, b), што даје

$$\int_a^a f(x)\, d\alpha(x) = f(b)\{\alpha(b) - \alpha(b-0)\} + \int_a^{b-0} f(x)\, d\alpha(x).$$

Уопште је

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \tag{15}$$

$$= f(a)\{\alpha(a+0) - \alpha(a)\} + f(b)\{\alpha(b) - \alpha(b-0)\} + \int_{a+0}^{b-0} f(x)\, d\alpha(x).$$

На тај се начин скокови функције $\alpha(x)$ у тачкама a и b отстрањују од интеграла, а тада се у самом интегралу језгро има сматрати као непрекидно са десне и леве стране.

На пример ако је функција $f(x)$ непрекидна у тачки $x=1$, тада је

$$\int_0^1 f(x)\, d\{x+[x]\} = \int_0^{1-0} f(x)\, d\{x+[x]\} + f(1) = \int_0^1 f(x)dx + f(1).$$

Очевидно је да образац (15) важи било да је функција $\alpha(x)$ у тачкама a или b непрекидна, било да није; у првом случају изрази у витичастим заградама ишчезавају и интеграли

$$\int_{a+0}^{b-0} \text{ и } \int_{a}^{b}$$

постају међусобно једнаки.

(*iii*) Напоменимо да је овде уведена ознака $\int\limits_{a+0}^{b-0}$ у потпуној сагласности са истом ознаком за несвојствени интеграл, обрађен у глави V. овог одељка.

1. 9. (*i*) Нека је функција $f(x)$ дефинисана у размаку (a, b), $\{x_\nu\}$ једна подела тог размака и $x_{\nu-1} \leqslant \xi_\nu \leqslant x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Често, нарочито приликом мајорирања Stieltjes-ова интеграла, наилазимо на збир облика

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu) \,|\, \alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1}) \,| \tag{16}$$

и на његову граничну вредност кад $\delta_n = \max\limits_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu - x_{\nu-1}\} \to 0$.

Како се овај збир, тј. његова гранична вредност кад је $f(x) \equiv 1$, своди на тоталну варијацију

$$\int_a^b |\, d\,\alpha(x) \,|,$$

дефинисану у глави A. 5, то ћемо и граничну вредност израза (16), кад она постоји, писати у облику

$$\int_a^b f(x) \,|\, d\alpha(x) \,|, \tag{17}$$

и назвати интегралом функције $f(x)$ у односу на тоталну варијацију функције $\alpha(x)$.

(*ii*) Истим резоновањем као у тачки A. 5. 1. можемо показати да гранична вредност израза (16), кад $\delta_n \to 0$, увек постоји кад је функција $\alpha(x)$ непрекидна и да у том случају не зависи од избора поделе $\{x_\nu\}$. Општије, ако функција $\alpha(x)$ има прекиде, гранична вредност израза (16) ће такође бити једнозначно одређена у смислу дефиниције тачке А. 5. 3, тј. ако у тачке поделе $\{x_\nu\}$ постепено укључимо све дисконтинуитете функције $\alpha(x)$. Ова гранична вредност тада постоји независно од избора осталих тачака поделе и вредности ξ_ν и то кадгод је функција $f(x)$ S-интеграбилна у односу на функцију $\alpha(x)$, тј. ако им се дисконтинуитети не поклапају.

На овај начин је гранична вредност (17) збира (16) једнозначно одређена и ако уочимо у тачки А. 5.5. дефинисану функцију

$$A(x)=\int_a^x |d\alpha(\mathbf{t})|,$$

можемо лако показати да је

$$\int_a^x f(x)|d\alpha(x)|=\int_a^x f(x)\,dA(x),$$

што оправдава назив интеграла функције $f(x)$ у односу на тоталну варијацију.

(**iii**) Из чињенице (в. т. А. 5. 5. (ii)) да функције $\alpha(x)$ и $A(x)$ имају исте дисконтинуитете следи да је свака функција $f(x)$ интеграбилна у односу на функцију $A(x)$, ако је она интеграбилна у односу на функцију $\alpha(x)$.

На исти начин, функција $|f(x)|$ биће интеграбилна у односу на функцију $A(x)$, ако је функција $f(x)$ интеграбилна у односу на функцију $\alpha(x)$.

Ово се може доказати или непосредно на основу испитивања главе А. V, или добити као последица особина Stieltjes-ова интеграла, које ћемо у следећим главама испитати.

(**iv**) Приметимо најзад, да непосредним мајорирањем збира (1), тј. из

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})\}\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}|f(\xi_\nu)|\,|\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})|,$$

и претходне дефиниције израза (17), а на основу горњих особина (**ii**) и (iii), добивамо да је

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,|d\alpha(x)|=\int_a^b |f(x)|\,dA(x). \qquad (18)$$

Ова неједначина претставља аналогон мајорирања обичног интеграла, тј. да је апсолутна вредност интеграла мања од интеграла апсолутне вредности подинтегралне функције.

II. Особине Stieltjes-ова интеграла

2. 1. (*i*) Већина особина Stieltjes-ова интеграла потпуно је аналогна особинама Riemann-ова интеграла; шта више, сам формализам инфинитезималног рачуна може се применити и на Stieltjes-ов интеграл, сматрајући при томе $d\alpha$ као „диференциал". Једино треба обратити нарочиту пажњу на интеграционе границе (види доле наведене особине 2^0 и 4^0) и на чињеницу да се дисконтинуитети подинтегралне функције и језгра не смеју поклапати.

(*ii*) Првих седам особина које ћемо овде навести су непосредна последица дефиниције и добивамо их полазећи од збира

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\},$$

па их овде нећемо ни изводити. При томе претпостављамо, да су све посматране функције $f(x)$ S-интеграбилне у односу на одговарајућа језгра $\alpha(x)$.

$$1^0 \quad \int_a^b f(x)\, d\{\alpha(x)+c\} = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

$$2^0 \quad \int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a), \quad \int_{a+0}^{b-0} d\alpha(x) = \alpha(b-0) - \alpha(a+0).$$

$$3^0 \quad \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = -\int_b^a f(x)\, d\alpha(x).$$

$$4^0 \quad \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\, d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\, d\alpha(x) =$$

$$= \int_a^{c-0} f(x)\, d\alpha(x) + f(c)\{\alpha(c+0) - \alpha(c-0)\} + \int_{c+0}^b f(x)\, d\alpha(x),$$

за $a < c < b$.

5° $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,d\alpha(x) = c\int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$

6° $\displaystyle\int_a^b \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)\,d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\int_a^b f_\nu(x)\,d\alpha(x).$

7° $\displaystyle\int_a^b f(x)\,d\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(x)\right\} = \sum_{\nu=1}^{n}\int_a^b f(x)\,d\alpha_\nu(x).$

У вези са овом особином види и тачку 1. 6 (iv).

(*iii*) Особине наведене у тачкама 2. 2 – 4. могу послужити да се у извесним случајевима Stieltjes-ов интеграл сведе на Riemann-ов. Из особина 2. 6 — 8. види се потпуна аналогија између ова два интеграла, док је особина 2. 5. карактеристична за Stieltjes-ов интеграл; то је она особина која омогућује да се једним аналитичким изразом обухвате како редови, тако и интеграли.

2. 2. (*i*) Ако језгро $\alpha(x)$ има непрекидан извод $\alpha'(x)$, тада је

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx, \tag{1}$$

тако да се Stieltjes-ов интеграл своди на обичан интеграл.

Заиста, на основу става о средњим вредностима је

$$\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1}) = \alpha'(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

за једно η_ν размака $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, тако да можемо ставити

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,\alpha'(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Ако у овом изразу тачке ξ_ν изаберемо тако да буде

$$\xi_\nu = \eta_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots n,$$

видимо да се овај други збир своди на Riemann-ов збир [20] и тежи Riemann-ову интегралу функције $f(x)\alpha'(x)$, тј. десној страни једначине (1).

(*ii*) Напоменимо да у горњем доказу није потребно претпоставити да је извод $\alpha'(x)$ непрекидна функција, јер став о средњим вредностима важи ако само претпоставимо егзистенцију овог извода у свим тачкама размака (a, b) (види, на пример Hardy {5, стр. 242}). Према томе, образац (1) остаје у важности и за све функције $\alpha(x)$ чији извод постоји, ако је само овај извод R-интеграбилан у томе размаку.

2. 3. (*i*) Парциална интеграција код Stieltjes-ова интеграла природно се намеће, јер се већ сам подинтегрални израз јавља у облику производа функције f и „диференциала $d\alpha$". Међутим, да би се ова могла извршити потребно је да израз αdf, тј. да „диференциал df" има смисла; ово се код обичног интеграла своди на претпоставку егзистенције извода $f'(x)$, док је код Stieltjes-ова интеграла довољно претпоставити да функција $f(x)$ буде ограничене варијације. — Према томе ћемо у овој тачки претпоставити да су обе функције $f(x)$ и $\alpha(x)$ ограничене варијације у размаку (a, b) и да је $f(x)$ интеграбилна у односу на функцију $\alpha(x)$. Како се ово своди на претпоставку да се дисконтинуитети функција $f(x)$ и $\alpha(x)$ не поклапају, то је, дакле, и функција $\alpha(x)$ интеграбилна у односу на функцију $f(x)$.

(*ii*) Обрасци за парциалну интеграцију како за Riemann-ов интеграл тако и за Stieltjes-ов интеграл су истоветни, међутим, у овом последњем случају овај образац важи под општијим претпоставкама као што то казује

Став 1. *Ако су обе функције* $f(x)$ *и* $\alpha(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *и ако им се у томе размаку дисконтинуитети не поклапају, тада је*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b-0)\alpha(b) - f(a+0)\alpha(a) - \int_{a+0}^{b-0} \alpha(x)\,df(x) =$$

$$= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\,df(x) = \tag{2}$$

$$= f(x)\alpha(x)\Big|_a^b - \int_a^b \alpha(x)\,df(x).$$

Доказ. Ако у Abel-ову {1. стр. 314} обрасцу за делимично сабирање

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (a_\nu - a_{\nu-1}) = b_n a_n - b_1 a_0 - \sum_{\nu=2}^{n} a_{\nu-1}(b_\nu - b_{\nu-1})$$

ставимо

$$a_\nu = \alpha_\nu = \alpha(x_\nu),\ \nu = 0, 1, 2, \ldots n,\ x_0 = a,\ x_n = b,$$

и

$$b_\nu = f_\nu = f(\xi_\nu),\ x_{\nu-1} \leqslant \xi_\nu \leqslant x_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots. n,$$

он постаје

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}) = f_n \alpha_n - f_1 \alpha_0 - \sum_{\nu=2}^{n} \alpha_{\nu-1}(f_\nu - f_{\nu-1}).$$

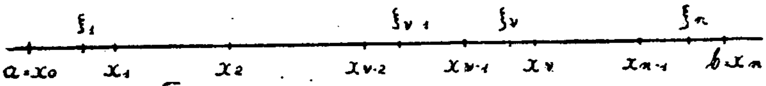
Дакле, збир

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\}$$

можемо написати у облику

$$S_n = f(\xi_n)\alpha(b) - f(\xi_1)\alpha(a) - \sum_{\nu=2}^{n} \alpha(x_{\nu-1})\{f(\xi_\nu) - f(\xi_{\nu-1})\}. \quad (3)$$

Ако у овом последњем збиру тачке ξ_ν сматрамо као нову поделу размака (a, b), (в. сл. 8) то ће



Сл. 8.

$$\sum_{\nu=2}^{n} \alpha(x_{\nu-1})\{f(\xi_\nu) - f(\xi_{\nu-1})\} \to \int_{a-0}^{b-0} \alpha(x)\,df(x) \quad \text{кад} \quad \delta_n \to 0,$$

и то из ових разлога:

1) $\xi_{\nu-1} \leqslant x_{\nu-1} \leqslant \xi_\nu$ за свако $\nu = 2, 3, \ldots n;$

2) $\underset{2 \leqslant \nu \leqslant n}{\mathrm{Max}} \{\xi_\nu - \xi_{\nu-1}\} \to 0$ кад $\delta_n \to 0,$

јер је

$$\xi_\nu - \xi_{\nu-1} \leqslant x_\nu - x_{\nu-2} \leqslant 2\delta_n \quad \text{за свако} \quad \nu = 2, 3, \ldots. n;$$

3) Прва и последња тачка поделе $\{\xi_\nu\}$ се не поклапају са крајњим тачкама a и b размака (a, b);

4) Према претпоставци функције $\alpha(x)$ и $f(x)$ су ограничене варијације, а тачке дисконтинуитета им се не поклапају.

Како у изразу (3) и прва два члана теже одређеним граничним вредностима кад $\delta_n \to 0$, и то

$$f(\xi_n) \to f(b-0), \quad \text{а} \quad f(\xi_1) \to f(a+0),$$

јер

$$\xi_n \to b, \quad \text{а} \quad \xi_1 \to a \quad \text{кад} \quad \delta_n \to 0,$$

то ће и цео овај израз тежити одређеној граничној вредности кад $\delta_n \to 0$, и то десној страни првог од образаца (2). Према томе се образац (3) своди на први од образаца (2) кад $\delta_n \to 0$.

Ако још, на основу обрасца (15) тачке 1.8, интеграл $\int\limits_{a+0}^{b-0}$ заменимо интегралом $\int\limits_{a}^{b}$, тј. ставимо

$$\int\limits_{a+0}^{b-0} \alpha(x)\,df(x) =$$

$$= -\alpha(a)\{f(a+0)-f(a)\} - \alpha(b)\{f(b)-f(b-0)\} + \int\limits_{a}^{b} \alpha(x)\,df(x),$$

добивамо и други од образаца (2), чиме је став 1 потпуно доказан.

(iii) Друга од једначина (2) казује да се делимична интеграција код Stieltjes-ова интеграла може исто тако формално вршити као и код обичног интеграла, сматрајући $d\alpha$ и df као диференциале, без обзира да ли они имају смисла или не.

Поред тога, ако функција $f(x)$ има R-интеграбилан извод, тада из једначина (2) и особине 2.2. (i) – (ii) следи да се Stieltjes-ов интеграл може непосредно свести на обичан интеграл.

2.4. (i) Из претходне тачке видимо да се Stieltjes-ов интеграл може свести на обичан интеграл ако једна функција $f(x)$ или $\alpha(x)$ има R-интеграбилан извод. Међутим, сменом променљивих можемо Stieltjes-ов интеграл увек свести на Riemann-ов, а да бисмо ово показали довољно је да уочимо случај кад је функција $\alpha(x)$ монотона. У том случају можемо наиме увек извршити смену $y=\alpha(x)$ и тиме Stieltjes-ов интеграл свести на Riemann-ов.

(ii) Став према коме можемо извршити поменуту смену гласи:

Став 2. *Нека је функција* $\alpha(x)$ *монотона у размаку* (a, b) *и нека је* $\mathfrak{v}(x)$ *њена инверзна функција у смислу* *дефиниције тачке* А. 2. 5. (i); *ако је функција* $f(x)$ S-*интеграбилна у односу на функцију* $\alpha(x)$, *тада се у интегралу*

$$S=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

може увек извршити смена

$$y=\alpha(x), \quad \text{тј.} \quad x=\mathfrak{v}(y),$$

и тада је

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f\{\mathfrak{v}(y)\}\,dy. \tag{4}$$

Доказ. Пођимо од збира

$$S_n'=\sum_{\nu=1}^{n} f\{\mathfrak{v}(\eta_\nu)\}(y_\nu-y_{\nu-1}),$$

где је $\{y_\nu\}$ једна подела размака $\{\alpha(a),\alpha(b)\}$, тј.

$$\alpha(a)=y_0<y_1<\ldots.<y_{n-1}<y_n=\alpha(b),$$

и где је

$$y_{\nu-1}\leqslant\eta_\nu\leqslant y_\nu, \quad \nu=1,2,3,\ldots n.$$

Ако ставимо

$$x_\nu=\mathfrak{v}(y_\nu), \quad \nu=0,1,2,\ldots.n,$$

и

$$\xi_\nu=\mathfrak{v}(\eta_\nu), \quad \nu=1,2,\ldots\ldots n,$$

тада је

$$y_\nu=\alpha(x_\nu), \quad \nu=0,1,2,\ldots.n,$$

и

$$\eta_\nu=\alpha(\xi_\nu), \quad \nu=1,2,\ldots\ldots.n,$$

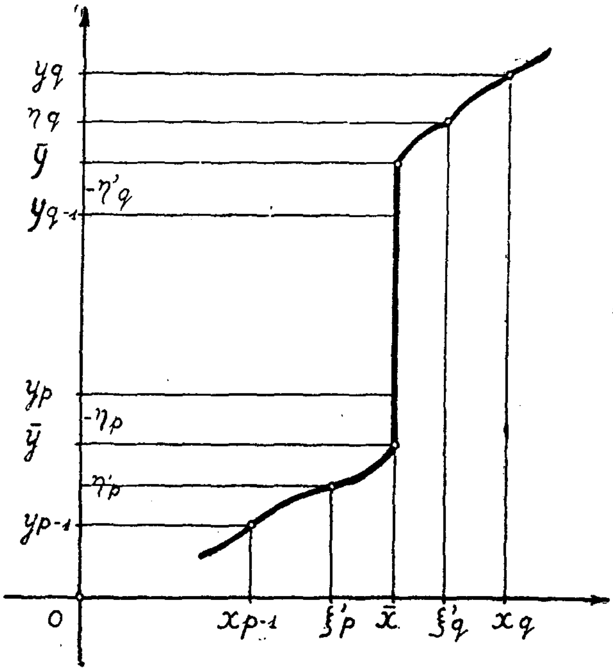
осим за оне тачке y_ν и η_ν које се налазе у размацима $(\overline{y}, \overline{Y})$ платформи функције $\mathfrak{v}(y)$ (в. сл. 9); ово из разлога што су у свим овим тачкама y_ν и η_ν вредности $x_\nu=\mathfrak{v}(y_\nu)$ и $\xi_\nu=\mathfrak{v}(\eta_\nu)$ међусобно једнаке и износе $\overline{x}$, где је $\overline{x}$ тачка дисконтинуитета функције $\alpha(x)$. Према томе су за све те тачке y_ν и η_ν вредности $\alpha(x_\nu)$ и $\alpha(\xi_\nu)$ такође међусобно једнаке и износе $\alpha(\overline{x})$.

Упоредимо збир S_n' са збиром

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})\};$$

они ће се разликовати само по оним члановима код којих тачке y_ν и η_ν падају у размаке $(\overline{y}, \overline{Y})$. Нека је

$$\sum_{\nu=p}^{q} f\{\alpha(\eta_\nu)\}(y_\nu - y_{\nu-1}) \text{ односно } \sum_{\nu=p}^{q} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\}$$



Сл. 9.

таква једна група чланова, тј. група за коју је

$$y_{p-1} < \overline{y} \leqslant y_p \quad \text{и} \quad y_{q-1} \leqslant \overline{Y} < y_q.$$

Претпоставимо: 1° да се и тачке η_p и η_q налазе у размаку $(\overline{y}, \overline{Y})$, тј. у размацима $(\overline{y}, y_p)$ и $(y_{q-1}, \overline{Y})$.

Како је у том случају

$$\mathfrak{x}(y_p) = \mathfrak{x}(y_{p+1}) = \ldots = \mathfrak{x}(y_{q-1}) =$$
$$= \mathfrak{x}(\eta_p) = \mathfrak{x}(\eta_{p+1}) = \ldots = \mathfrak{x}(\eta_q) = \overline{x},$$

тј.

$$x_p = x_{p+1} = \ldots\ldots = x_{q-1} =$$
$$= \xi_p = \xi_{p+1} = \ldots\ldots = \xi_q = x,$$

то је

$$\sum_{\nu=p}^{q} f\{\mathfrak{v}(\eta_\nu)\}(y_\nu - y_{\nu-1}) = f(\bar{x}) \sum_{\nu=p}^{q} (y_\nu - y_{\nu-1}) =$$

$$= f(\bar{x})(y_q - y_{p-1}) =$$

$$= f(\bar{x})\{\alpha(x_q) - \alpha(x_{p-1})\};$$

са друге стране је

$$\sum_{\nu=p}^{q} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} = f(\bar{x}) \sum_{\nu=p}^{q} \{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} =$$

$$= f(\bar{x})\{\alpha(\bar{x}) - \alpha(x_{p-1}) + \alpha(x_q) - \alpha(\bar{x})\} =$$

$$= f(\bar{x})\{\alpha(x_q) - \alpha(x_{p-1})\},$$

јер су, сем првог и последњег, сви остали чланови тога збира једнаки нули.

Дакле, у овом случају и групе чланова, код којих тачке поделе падају у размаке $(\bar{y}, \bar{Y})$ остају међусобно једнаке, па су према томе и цели збирови једнаки, тј.

$$S_n' = S_n.$$

2º Ако се тачке η_p и η_q налазе изван размака $(\bar{y}, \bar{Y})$, и уочимо тачке η_p' и η_q' у размацима $(y_{p-1}, \bar{y})$ и $(\bar{Y}, y_q)$, тада ће се тако образовани збир S_n'' разликовати од збира S_n' за

$$S_n'' - S_n' = \Sigma'[f\{\mathfrak{v}(\eta_q')\} - f\{\mathfrak{v}(\eta_q)\}](y_q - y_{q-1}) +$$

$$+ [f\{\mathfrak{v}(\eta_p')\} - f\{\mathfrak{v}(\eta_p'')\}](y_p - y_{p-1}) =$$

$$= \Sigma'\{f(\xi_q') - f(\bar{x})\}(y_q - y_{q-1}) + \{f(\xi_p') - f(\bar{x})\}(y_p - y_{p-1})$$

где збир Σ' треба узети преко свих оних тачака ξ_p' и ξ_q' у чијим се размацима (ξ_p', ξ_q') налазе тачке дисконтинуитета $\bar{x}$ функције $\alpha(x)$.

Како је, међутим, функција $f(x)$ непрекидна у тачкама $\bar{x}$, јер је она, према претпоставци, непрекидна у тачкама дисконтинуитета функције $\alpha(x)$, то са довољно мало

$$\delta_n' = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} (y_\nu - y_{\nu-1})$$

можемо учинити да буде

$$|f(\xi_\nu') - f(\bar{x})| < \varepsilon \quad \text{за произвољно мало} \quad \varepsilon.$$

Према томе је

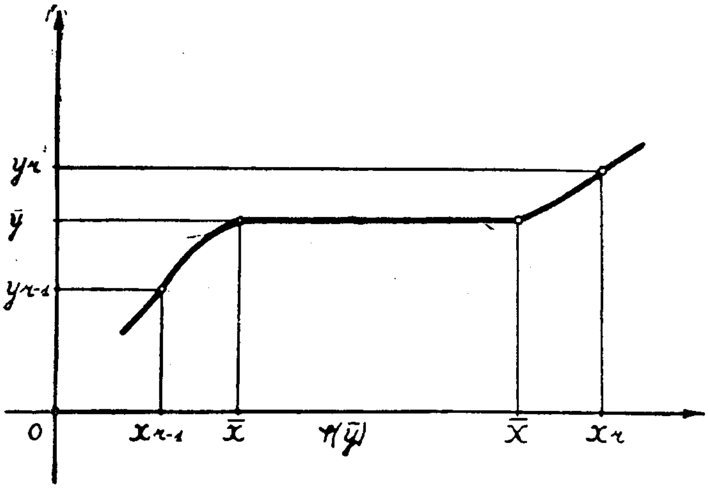
$$|S_n'' - S_n'| < \varepsilon \Sigma' (y_q - y_{q-1}) + (y_p - y_{p-1}) <$$

$$< \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu - y_{\nu-1}) = \varepsilon (y_n - y_0) =$$

$$< \varepsilon \{\alpha(b) - \alpha(a)\}.$$

Дакле, са довољно малим δ_n', збир S_n се произвољно мало разликује од збира S_n' и то ма како бирали тачке η_ν.

Да бисмо сад још показали, да ови збирови теже одређеним, према томе истим, граничним вредностима кад $\delta_n' \to 0$, треба још да покажемо да ће S_n тежити одређеној граничној вредности S.



Сл.10.

За то је потребно да

$$\delta_n = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu - x_{\nu-1}\}$$

тежи нули кад

$$\delta_n' = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{y_\nu - y_{\nu-1}\}$$

тежи нули. Међутим, ако функција $\mathfrak{v}(y)$ има скокове, тј. функција $\alpha(x)$ платформе (в. сл. 10), и ако се, на пример, тачка скока $\bar{y}$ налази у размаку (y_{r-1}, y_r), тада размак (x_{r-1}, x_r) не може никада бити мањи од

$$\mathfrak{v}(\bar{y}+0) - \mathfrak{v}(\bar{y}-0) = \bar{X} - \bar{x}.$$

Али у том случају можемо размак $(\bar{x}, \bar{X})$ попунити произвољно густо тачкама $x_{r,\nu}$ јер је тада

$$f(\xi_{r,\nu})\{\alpha(x_{r,\nu}) - \alpha(x_{r,\nu-1})\} = 0,$$

тако да се збир S_n не мења, ако тачкама поделе $\{x_\nu\}$ додамо произвољан број тачака $x_{r,\nu}$ у размацима $(\bar{x}, \bar{X})$. На тај начин можемо δ_n, тако добивене нове поделе, учинити произвољно малим, ако је δ_n' довољно мало.

Према томе ће

$$S_n \to S = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

а отуда следи:

1) да ће и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = S'$ постојати и то за сваку поделу $\{y_\nu\}$, тј. да је

$$S' = \int_a^b f\{\mathfrak{x}(y)\} dy,$$

2) да су те две граничне вредности једнаке, тј. да је

$$S' = S,$$

чиме је једначина (4) доказана.

(*iii*) Ако претпоставимо да је језгро $\alpha(x)$ непрекидно у размаку (a, b) и стварно монотоно, тј. да расте у ужем смислу, тада доказ става 2, тј. образац (4), можемо извести много лакше овако.

Пођимо зато од интеграла

$$J = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f\{\mathfrak{x}(y)\}\, dy$$

и узмимо произвољну поделу

$$\alpha(a) = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \alpha(b)$$

размака $\{\alpha(a), \alpha(b)\}$. Тада је

$$J = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} f\{\mathfrak{x}(y)\} dy.$$

Према првом ставу о средњим вредностима [21] је

$$\int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} f\{\mathfrak{v}(y)\}\,dy = f\{\mathfrak{v}(\eta_\nu)\}(y_\nu - y_{\nu-1}),$$

где је

$$y_{\nu-1} \leqslant \eta_\nu \leqslant y_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots n.$$

Ако ставимо

$$x_\nu = \mathfrak{v}(y_\nu), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots n,$$

и

$$\xi_\nu = \mathfrak{v}(\eta_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

тада је, према претпоставци да је $\alpha(x)$ непрекидна и стварно монотона,

$$y_\nu = \alpha(x_\nu), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$\eta_\nu = \alpha(\xi_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

и

$$x_{\nu-1} \leqslant \xi_\nu \leqslant x_\nu.$$

Сменом ових вредности горњи израз за интеграл J постаје

$$J = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_{\nu-1}) - \alpha(x_\nu)\}.$$

Како на основу непрекидности функције $\alpha(x)$,

$$\delta_n = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu - x_{\nu-1}\}$$

тежи нули кад

$$\delta_n' = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{y_\nu - y_{\nu-1}\}$$

тежи нули, то овај последњи збир тежи Stieltjes-ову интегралу функције $f(x)$ у односу на функцију $\alpha(x)$, кад δ_n', односно $\delta_n \to 0$, чиме је овај став доказан.

2. 5. (i) Једна од најважнијих особина Stieltjes-ова интеграла, на коју смо указали у уводу, је да су њиме обухваћени како прекидни тако и непрекидни збирови. На основу ове особине, Stieltjes-овим интегралом се могу, поред обичног интеграла, претставити како коначни, тако и бесконачни редови, а што је од нарочите важности за његову примену.

Став 3. *Нека је*

$$\alpha(x) = \bar{\alpha}(x) + \alpha_s(x), \tag{5}$$

где је функција $\alpha(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b), $\alpha_s(x)$ *њена функција скока и* $\bar{\alpha}(x)$ *њен непрекидни део; ако означимо са* x_ν, $\nu=1, 2, \ldots,$ *тачке дисконтинуитета функције* $\alpha(x)$, *односно* $\alpha_s(x)$, *тада је*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,d\bar{\alpha}(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty} f(x_\nu)\{\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)\}, \tag{6}$$

за сваку у односу на функцију $\alpha(x)$ *интеграбилну функцију* $f(x)$.

Овај став следи непосредно из особине A. 4. 2. (iii), према којој се свака функција ограничене варијације може раставити у облику (5) на њен непрекидни део $\bar{\alpha}(x)$ и степенасту функцију, тј. њену функцију скока

$$\alpha_s(x)=\sum_{x_\nu\leqslant x}\{\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)\}. \tag{7}$$

Према (5) је

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,d\bar{\alpha}(x)+\int_a^b f(x)\,d\alpha_s(x), \tag{8}$$

тако да је потребно још да покажемо да је Stieltjes-ов интеграл, узет у односу на једну степенасту функцију, коначан или бесконачан ред, према томе да ли ова функција има коначно или бесконачно много скокова, тј. да је

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha_s(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} f(x_\nu)\,\{\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)\}, \tag{9}$$

кадгод функција $\alpha_s(x)$ има облик (7).

(ii) Да бисмо доказали образац (9) рашчланимо функцију $\alpha_s(x)$ на две функције

$$\alpha_s(x)=\alpha_s'(x)+\alpha_s''(x),$$

од којих прва садржи све дисконтинуитете функције $\alpha_s(x)$ у којима скок по апсолутној вредности није мањи од ε, тј.

$$|\alpha_s'(x_\nu+0)-\alpha_s'(x_\nu-0)|\geqslant\varepsilon,$$

а друга све остале.

Степенаста функција $\alpha_s'(x)$ има само коначан број скокова; према томе, непосредно из дефиниције Stieltjes-ова интеграла, добивамо да је

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha_s'(x) = \Sigma' f(x_\nu)\{\alpha_s'(x_\nu+0)-\alpha_s'(x_\nu-0)\} =$$

$$= \Sigma' f(x_\nu)\{\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)\},$$

где се збир Σ' односи само на оне чланове, тј. на оне тачке x_ν у којима скок функције $\alpha(x)$ по апсолутној вредности није мањи од ε. При томе овај интеграл не зависи од саме вредности $\alpha(x_\nu)$ и то због тога, што је, према претпоставци, функција $f(x)$ непрекидна у тачкама x_ν.

Са друге стране, интеграл

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha_s''(x)$$

можемо са ε учинити произвољно малим; да бисмо ово увидели уочимо произвољан систем поделе $\{y_\nu\}$ и η_ν размака (a, b). Тада имамо

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f(\eta_\nu)\{\alpha_s''(y_\nu)-\alpha_s''(y_{\nu-1})\}\right| \leqslant M\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_s''(y_\nu)-\alpha_s''(y_{\nu-1})| \leqslant$$

$$\leqslant 2M\,\Sigma''|\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)|$$

где се збир Σ'' односи само на оне чланове, тј. скокове, који су мањи од ε. Како је овај последњи ред конвергентан, јер је, према претпоставци, функција $\alpha(x)$ ограничене варијације, то смањивањем броја ε, тј. постепеним вађењем његових највећих чланова, можемо овај збир учинити мањим од произвољно малог броја η. Према томе је

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha_s''(\alpha)\right| < 2M\eta,$$

па је

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha_s(x) - \int_a^b f(x)\,d\alpha_s'(x)\right| =$$

$$= \left|\int_a^b f(x)\,d\alpha_s(x) - \Sigma' f(x_\nu)\{\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)\}\right| < 2M\eta.$$

Међутим,

$$\Sigma' f(x_\nu)\{\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)\}\to\sum_{\nu=1}^{\infty} f(x_\nu)\{\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)\}$$

кад $\varepsilon\to 0$, јер је

$$|f(x)|\leqslant M,$$

а ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\{\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)\}$$

апсолутно конвергира. Према томе разлику

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha_s(x)-\sum_{\nu=1}^{\infty} f(x_\nu)\{\alpha(x_\nu+0)-\alpha(x_\nu-0)\}$$

можемо учинити произвољно малом.

Овим је доказан образац (9), а на основу обрасца (8) и сам став 3.

(iii) Ако функција $\alpha(x)$ нема непрекидног дела, тј. ако је она степенаста функција, тада се десна страна обрасца (6) своди само на ред, тј. преостаје само образац (9) који даје погодан израз да Stieltjes-овим интегралом претставимо коначне или бесконачне редове.

Тако је, на пример,

$$\int_p^q f(x)\,d[x]=\sum_{\nu=p+1}^{q} f(\nu),$$

за све функције $f(x)$ које су непрекидне у тачкама $x=p+1$, $p+2,\ldots q$; или

$$\int_p^q x\,d\alpha(x)=\sum_{\nu=p+1}^{q} a_\nu,$$

ако је $\alpha(x)$ степенаста функција која у тачкама $x=\nu$ има скокове дужине a_ν/ν, $\nu=p+1,\ p+2,\ldots q$.

2. 6. **(i)** Да бисмо показали до које је мере Stieltjes-ов интеграл сличан обичном интегралу и истакли ову аналогију, навешћемо још неколико особина Stieltjes-ова интеграла из којих се види да се на подинтегрални израз $d\alpha$ могу формално применити правила која важе за диференцијале. Доказ ових особина препуштамо читаоцу.

(ii) Ако су функције $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ ограничене варијације у размаку (a, b) и ако им се тачке дисконтинуитета не поклапају, тада је

$$\int_a^b f(x)\,d\{\alpha(x)\beta(x)\} = \int_a^b f(x)\,\alpha(x)\,d\beta(x) + \int_a^b f(x)\,\beta(x)\,d\alpha(x), \quad (10)$$

за сваку функцију $f(x)$ која је интеграбилна у односу на функције $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Напоменимо да лева страна ове једначине има смисла и кад се дисконтинуитети функција $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ поклапају, међутим, у овом случају десна страна губи свој смисао.

(iii) Ако је $\alpha(x)$ непрекидна функција ограничене варијације у размаку (a, b), $g(x)$ функција са непрекидним изводом у размаку $\{\alpha(a), \alpha(b)\}$ и функција $f(x)$ интеграбилна у односу на језгро $\alpha(x)$, тада је

$$\int_a^b f(x)\,dg\{\alpha(x)\} = \int_a^b f(x)\,g'\{\alpha(x)\}\,d\alpha(x). \quad (11)$$

У специалном случају кад се функција $f(x)$ у размаку (a, b) своди на константу добивамо, на пример, да је

$$\int_a^b g'\{\alpha(x)\}\,d\alpha(x) = g\{\alpha(b)\} - g\{\alpha(a)\}. \quad (12)$$

Напоменимо да и у обрасцу (11) лева страна има смисла и кад функција $\alpha(x)$ има тачака прекида, док десна страна нема смисла јер се тада тачке дисконтинуитета функција

$$f(x)\,g'\{\alpha(x)\} \quad \text{и} \quad \alpha(x)$$

поклапају. Да заиста у овом случају образац (11) не важи, увиђамо ако покушамо да га применимо на једну функцију скока. Јер, ако је $\alpha_s(x)$ једна функција скока, са дисконтинуитетима у тачкама x_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, тада је

$$\int_a^b f(x)\,dg\{\alpha_s(x)\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} f(x_\nu)\,\{g[\alpha_s(x_\nu+0)] - g[\alpha_s(x_\nu-0)]\}.$$

Отуда видимо да образац (11) можемо проширити и кад функција $\alpha(x)$ има дисконтинуитета, и да он тада узима облик

$$\int_a^b f(x)\,dg\{\alpha(x)\}= \tag{13}$$
$$=\int_a^b f(x)g'\{\alpha(x)\}\,d\beta(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty} f(x_\nu)\{g[\alpha(x_\nu+0)]-g[\alpha(x_\nu-0)]\},$$

где смо са $\beta(x)$ означили непрекидни део функције $\alpha(x)$, а са x_ν њене дисконтинуитете.

(iv) Нека је у размаку (a, b) функција $f(x)$ S-интеграбилна у односу на функцију $\alpha(x)$, и нека је функција $\varphi(x)$ монотона и непрекидна у размаку (a', b'), при чему је

$$\varphi(a')=a \quad \text{и} \quad \varphi(b')=b.$$

Како је у томе случају функција $\alpha\{\varphi(x)\}$ ограничене варијације у размаку (a', b') (в. А. 4. 4. (iii)), то у Stieltjes-ову интегралу

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

можемо, као и у обичном интегралу, извршити смену

$$x=\varphi(t),$$

и добивамо да је

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_{a'}^{b'} f\{\varphi(t)\}\,d\alpha\{\varphi(t)\}. \tag{14}$$

Напоменимо да функција $\varphi(t)$ не сме бити прекидна, јер би се тада дисконтинуитети функција

$$f\{\varphi(t)\} \quad \text{и} \quad \alpha\{\varphi(t)\}$$

поклапали, тако да у том случају десна страна обрасца (14) не би имала смисла.

III. Ставови о средњим вредностима

3. 1. (i) За Stieltjes-ов интеграл важе ставови о средњим вредностима аналогни ставовима Riemann-ова интеграла [21], [22]. Док се код овог последњег, за формулисање ових ставова, узима подинтегрална функција у облику производа, код Stieltjes-ова интеграла се тај производ природно јавља, због чега и сами ставови, тј. неједначине које произлазе, узимају складнији облик.

(ii) Аналогон првом ставу о средњим вредностима гласи:

Став 1. *Нека је функција* $f(x)$ *интеграбилна у односу на језгро* $\alpha(x)$ *у размаку* (a, b), *тада је*

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,|d\alpha(x)|, \tag{1}$$

а отуда

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \int_a^b |d\alpha(x)| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|\, W_a^b(\alpha). \tag{2}$$

У случају да језгро $\alpha(x)$ *не опада је*

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b} \{f(x)\}\{\alpha(b)-\alpha(a)\} \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} \{f(x)\}\{\alpha(b)-\alpha(a)\}. \tag{3}$$

Неједначину (1) смо већ срели у тачки 1.9. (iv), док неједначине (2) и (3) следе непосредно из дефиниције Stieltjes-ова интеграла и његова проширења у смислу тачке 1.9.

(iii) Ако је функција $f(x)$ непрекидна у размаку (a, b), тада неједначинама (3) можемо дати уобичајени облик ставова о средњим вредностима и то:

У размаку (a, b) *постоји увек једна вредност* c, *таква да је*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(c)\{\alpha(b)-\alpha(a)\},\quad a\leqslant c\leqslant b,$$

ако језгро $\alpha(x)$ *не опада.*

(iv) Као примену става 1 наведимо један став Blaschke-а {1} (види такође S. Sidon и O. Szàsz {1}), који је типичан за класу функција ограничене варијације и који гласи:

За класу функција ограничене варијације, тј. функција чија је тотална варијација мања од S

$$W_a^b(f)=\int_a^b |df(x)| \leqslant S,$$

сваком броју $\varepsilon > 0$ *одговара неки број* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, *такав да ће бити*

$$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \leqslant \varepsilon, \quad \text{ма како мали био } \varepsilon > 0,$$

ако је само

$$\left| \int_x^y f(t)\, dt \right| < \eta \quad \text{за свако } x \text{ и } y \text{ размака } (a,\ b).$$

Да бисмо овај став доказали ставимо

$$A=\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)\, dx$$

и посматрајмо израз

$$B=\frac{1}{b-a}\int_a^b \{f(x)-A\}^2 dx.$$

Како је, с једне стране,

$$B=\frac{1}{b-a}\int_a^b \{f^2(x)-2A\,f(x)+A^2\}\, dx=$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\, dx - A^2,$$

а с друге стране је, пошто интеграл израза B парциално интегришемо,

$$B=\frac{1}{b-a}\int_a^b \left\{ \int_a^x \Big(A-f(t)\Big)\, dt \right\} df(x)=$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b \left\{ (x-a)\,A - \int_a^x f(t) dt \right\} df(x),$$

то упоређивањем ова два обрасца добивамо да је

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx = A^2 + \frac{1}{b-a}\int_a^b \left\{(x-a)A - \int_a^x f(t)\,dt\right\} df(x).$$

Према томе, ако означимо са J горњу границу интеграла функције $f(x)$, тј. ако је

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant J, \quad \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

биће

$$|A| \leqslant \frac{1}{b-a} J,$$

тако да из последње добивене једначине, на основу става 1, добивамо да је

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant A^2 + \frac{1}{b-a}\int_a^b \left\{(x-a)|A| + \left|\int_a^x f(t)\,dt\right|\right\} |df(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(b-a)^2} J^2 + \frac{1}{b-a} 2JW_a^b(f),$$

тј.

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{b-a} J^2 + 2JW_a^b(f).$$

Из ове неједначине добивамо непосредно доказ горњег става и то у прецизнијем облику:

Ако је

$$W_a^b(f) \leqslant S,$$

да би био

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon,$$

довољно је да буде

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant \eta(\varepsilon), \quad \textit{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

ако само η *изаберемо тако да буде*

$$\eta^2 + 2(b-a)S\eta \leqslant (b-a)\varepsilon.$$

Последица: Ако је тотална варијација низа функција $f_n(x)$ униформно ограничена, тј. ако је $W_a{}^b(f_n)\leqslant S$, за свако n, тада из

$$\int_a^x f_n(t)\,dt\to 0, \quad \text{за свако} \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

увек следи

$$\int_a^b \{f_n(t)\}^2 dt\to 0, \quad n\to\infty,$$

Овај став очевидно не важи за класу непрекидних функција, као што то видимо из примера $f_n(x)=\sin(nx)$.

3. 2. (i) Аналогон другог става о средњим вредностима, код кога морамо претпоставити да је функција $f(x)$ монотона, гласи:

Став 2. *Нека је функција* $f(x)$ *интеграбилна у односу на језгро* $\alpha(x)$ *у размаку* (a, b) *и нека је она у томе размаку позитивна и не опада, тада је*

$$f(b-0)\min_{a\leqslant x\leqslant b}\{\alpha(b)-\alpha(x)\}\leqslant\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\leqslant$$
$$\leqslant f(b-0)\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{\alpha(b)-\alpha(x)\}. \tag{4}$$

Ако функција $f(x)$ *не расте у размаку* (a, b), *тада је*

$$f(a+0)\min_{a\leqslant x\leqslant b}\{\alpha(x)-\alpha(a)\}\leqslant\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\leqslant$$
$$\leqslant f(a+0)\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{\alpha(x)-\alpha(a)\}. \tag{5}$$

(ii) Неједначине (4) и (5) извешћемо из одговарајућих неједначина за низове и то:

Нека су дати низови f_ν, $\nu=1,2,\dots n$ *и* α_ν, $\nu=0,1,\dots n$; *ако је низ бројева* f_ν *позитиван и ако он не опада, тада је*

$$f_n\min_{0\leqslant\nu\leqslant n}\{\alpha_n-\alpha_\nu\}\leqslant\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\{\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}\}\leqslant f_n\max_{0\leqslant\nu\leqslant n}\{\alpha_n-\alpha_\nu\}. \tag{6}$$

Ако низ f_ν *не расте, тада је*

$$f_1 \operatorname*{Min}_{0\leqslant\nu\leqslant n}\{\alpha_\nu-\alpha_0\}\leqslant\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\{\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}\}\leqslant f_1 \operatorname*{Max}_{0\leqslant\nu\leqslant n}\{\alpha_\nu-\alpha_0\}. \qquad (7)$$

Ове неједначине добивамо применом Abel-ове трансформације, тј. збир $\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1})$ напишемо у следећа два облика:

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1})=f_1(\alpha_n-\alpha_0)+\sum_{\nu=1}^{n-1}(f_{\nu+1}-f_\nu)(\alpha_n-\alpha_\nu), \qquad (8)$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1})=\sum_{\nu=1}^{n-1}(f_\nu-f_{\nu+1})(\alpha_\nu-\alpha_0)+f_n(\alpha_n-\alpha_0). \qquad (9)$$

Тако, на пример, десну неједначину (6) добивамо из (8), јер је

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\{\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}\}\leqslant\{f_1+\sum_{\nu=1}^{n-1}(f_{\nu+1}-f_\nu)\}\operatorname*{Max}_{0\leqslant\nu\leqslant n}\{\alpha_n-\alpha_\nu\}=$$
$$\leqslant f_n\operatorname*{Max}_{0\leqslant\nu\leqslant n}\{\alpha_n-\alpha_\nu\}.$$

(**iii**) Доказ става (2), тј. неједначине (4) и (5), можемо сад лако извести из одговарајућих неједначина (6) и (7), ако уочимо један систем поделе $\{x_\nu\}$ и ξ_ν, и ставимо

$$\alpha_\nu=\alpha(x_\nu),\ \nu=0,1,\ldots n \quad\text{и}\quad f_\nu=f(\xi_\nu),\ \nu=1,2,\ldots.n, \qquad (10)$$

са

$$x_0=a,\quad x_n=b \quad\text{и}\quad x_{\nu-1}\leqslant\xi_\nu\leqslant x_\nu,\ \nu=1,2,\ldots n.$$

Тако, на пример, да бисмо добили другу од неједначина (4), после извршене горње смене, десна неједначина (6) узима облик

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})\}\leqslant f(\xi_n)\operatorname*{Max}_{0\leqslant\nu\leqslant n}\{\alpha(b)-\alpha(x_\nu)\}.$$

Ако у овој неједначини пустимо да $n\to\infty$, тј. да $\delta_n\to 0$, тада њена лева страна тежи Stieltjes-ову интегралу функције $f(x)$, а њена десна страна десној страни неједначине (4). На исти начин добивамо и остале три неједначине (4) и (5).

(iv) Ако је функција $\alpha(x)$ непрекидна, неједначине (4) и (5) можемо написати у уобичајеном облику ставова о средњим вредностима и то:

Ако је функција $\alpha(x)$ *непрекидна, а функција* $f(x)$ *монотона и не опада у размаку* (a, b), *тада у томе размаку постоји број* c, *тако да је*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b-0)\{\alpha(b)-\alpha(c)\}, \quad a \leqslant c \leqslant b;$$

а ако функција $f(x)$ *не расте, тада је*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(a+0)\{\alpha(c)-\alpha(a)\}, \quad a \leqslant c \leqslant b.$$

3. 3. (i) Став 2 можемо проширити и на случај кад функција $f(x)$ није монотона, и тада он узима следећи облик:

Став 3. *Ако су функције* $f(x)$ *и* $\alpha(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *и ако им се тачке дисконтинуитета не поклапају, тада је*

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant \left\{|f(a+0)| + \int_a^b |df(x)|\right\} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\alpha(b)-\alpha(x)|, \quad (11)$$

или

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant \left\{|f(b-0)| + \int_a^b |df(x)|\right\} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\alpha(x)-\alpha(a)|. \quad (12)$$

До ових неједначина долазимо ако десне стране једначина (8) и (9) мајорирамо овако

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1})\right| \leqslant \left\{|f_1| + \sum_{\nu=1}^{n-1} |f_{\nu+1} - f_\nu|\right\} \max_{0 \leqslant \nu \leqslant n} |\alpha_n - \alpha_\nu|,$$

или

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1})\right| \leqslant \left\{|f_n| + \sum_{\nu=1}^{n-1} |f_\nu - f_{\nu+1}|\right\} \max_{0 \leqslant \nu \leqslant n} |\alpha_\nu - \alpha_0|,$$

затим у тако добивеним неједначинама извршимо смене (10), и пређемо ка граници.

(*ii*) Напоменимо да Abel-овим трансформацијама (8) и (9) можемо дати заједнички облик

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}) = \sum_{\nu=0}^{n}(f_\nu - f_{\nu+1})(\alpha_\nu - \alpha_k),$$

где смо ставили да је

$$f_0 = f_{n+1} = 0.$$

Овај се образац своди на (8) за $k=n$, а на (9) за $k=0$.

Ако овај образац напишемо у облику

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}) = f_1(\alpha_k - \alpha_0) + f_n(\alpha_n - \alpha_k) + \sum_{\nu=1}^{n-1}(f_\nu - f_{\nu+1})(\alpha_\nu - \alpha_k),$$

у тако добивеној једначини извршимо смене (10), стављајући

$$\alpha_k = \alpha(x_k) = \alpha(c) \quad \text{за} \quad a \leqslant c \leqslant b,$$

и њену десну страну мајорирамо, тада, кад пређемо ка граници, добивамо неједначину

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant |f(a+0)\{\alpha(c)-\alpha(a)\} + f(b-0)\{\alpha(b)-\alpha(c)\}| + \\ + \left\{\int_{a+0}^{c-0} |df(x)| + \int_{c+0}^{b-0} |df(x)|\right\} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\alpha(x) - \alpha(c)|. \tag{13}$$

Ова неједначина, за $c=a$, односно $c=b$, садржи обе неједначине (11) и (12).

(*iii*) Напоменимо да се и из става 2 може добити једна неједначина и кад функција $f(x)$ није монотона али ако подлеже извесним ограничењима. Та неједначина је утолико од интереса што се односи на осцилацију функције $\alpha(x)$ у размаку (a, b).

Заиста, ако је функција $F(x)$ ограничене варијације у размаку (a, b) и таква да се може раставити на две позитивне и монотоне функције $h(x)$ и $g(x)$, тј.

$$F(x) = h(x) + g(x),$$

где $h(x)$ не опада, а $g(x)$ не расте и где је

$$h(1-0) = g(1+0) = 1,$$

тада, ако у неједначини (4) ставимо $f(x)=g(x)$, а у неједначини (5) $f_1(x)=h(x)$ и обе неједначине саберемо, биће

$$\alpha(b)-\beta(a)-O_a^b\{\alpha\}\leqslant\int_a^b F(x)\,d\alpha(x)\leqslant\alpha(b)-\alpha(a)+O_a^b\{\alpha\},$$

тj.

$$\left|\int_a^b F(x)\,d\alpha(x)-\{\alpha(b)-\alpha(a)\}\right|\leqslant O_a^b\{\alpha\},$$

где смо са $O_a^b\{\alpha\}$ означили осцилацију функције $\alpha(x)$ у размаку (a,b), тј.

$$O_a^b\{\alpha\}=\underset{a\leqslant x,y\leqslant b}{\mathrm{Max}}|\alpha(y)-\alpha(x)|.$$

3. 4. (i) Ставови о средњим вредностима изведени у претходним тачкама односили су се само на један Stieltjes-ов интеграл и добивени су непосредним мајорирањем подинтегралних функција. Међутим, у примени су од важности ставови који дају неједначине између два или више Stieltjes-ових интеграла од којих ћемо у овој и наредној тачки извести два.

Став 4. *Нека су функције* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *и нека је*

$$\beta(x)-\beta(a)>0;$$

ако је функција $f(x)$ *позитивна и интеграбилна у односу на обе функције* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *и ако она у томе размаку не расте, тада је*

$$\underset{a\leqslant x\leqslant b}{\mathrm{Min}}\left\{\frac{\alpha(x)-\alpha(a)}{\beta(x)-\beta(a)}\right\}\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)}{\int_a^b f(x)\,d\beta(x)}\leqslant\underset{a\leqslant x\leqslant b}{\mathrm{Max}}\left\{\frac{\alpha(x)-\alpha(a)}{\beta(x)-\beta(a)}\right\}, \tag{14}$$

(ii) Доказ овог става нећемо непосредно извести за интеграле, већ ћемо овде извести прво неједначини (14) аналогну неједначину за низове. Подесним избором ових низова и прелазом ка граници добивамо непосредно доказ става 4.

Нека је

α_ν, $\nu=0, 1, 2,\ldots n$, произвољан низ бројева, (15)

а низови β_ν и f_ν такви да је

$$\beta_\nu-\beta_0>0,\quad \nu=1, 2,\ldots n, \tag{16}$$

и

$$f_\nu \geqslant f_{\nu+1} \geqslant 0, \quad \nu=1, 2, \ldots n-1, \tag{17}$$

тада је

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu f_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu-1} f_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu f_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu f_{\nu+1} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_\nu (f_\nu - f_{\nu+1}) + \alpha_n f_n - \alpha_0 f_1 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} (\alpha_\nu - \alpha_0)(f_\nu - f_{\nu+1}) + (\alpha_n - \alpha_0) f_n =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\alpha_\nu - \alpha_0}{\beta_\nu - \beta_0} (\beta_\nu - \beta_0)(f_\nu - f_{\nu+1}) + \frac{\alpha_n - \alpha_0}{\beta_n - \beta_0} (\beta_n - \beta_0) f_n \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} (\beta_\nu - \beta_0)(f_\nu - f_{\nu+1}) + (\beta_n - \beta_0) f_n \right\} \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \left\{ \frac{\alpha_\nu - \alpha_0}{\beta_\nu - \beta_0} \right\} =$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu (\beta_\nu - \beta_{\nu-1}) \right\} \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \left\{ \frac{\alpha_\nu - \alpha_0}{\beta_\nu - \beta_0} \right\}.$$

Дакле, *ако низови* α_ν, β_ν и f_ν *задовољавају услове* (15), (16) и (17) биће

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu (\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}) \leqslant \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu (\beta_\nu - \beta_{\nu-1}) \right\} \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \left\{ \frac{\alpha_\nu - \alpha_0}{\beta_\nu - \beta_0} \right\}. \tag{18}$$

Сличним поступком добивамо и неједначину која одговара левој неједначини (14) и која гласи

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu (\beta_\nu - \beta_{\nu-1}) \right\} \operatorname*{Min}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \left\{ \frac{\alpha_\nu - \alpha_0}{\beta_\nu - \beta_0} \right\} \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu (\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}). \tag{19}$$

Доказ самог става 4 непосредно следи из неједначина (18) и (19); зато је довољно да у овим неједначинама ставимо

$$\alpha_\nu = \alpha(x_\nu), \quad \beta_\nu = \beta(x_\nu)$$

и

$$f_\nu = f(\xi_\nu), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots n, \quad x_{\nu-1} \leqslant \xi_\nu \leqslant x_\nu,$$

где је $\{x_\nu\}$ одређена подела размака (a, b), и да пређемо ка граници.

(iii) Ако су функције $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ још и непрекидне, тада неједначине (14) можемо написати и у облику става о средњим вредностима који гласи:

Ако функције $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $f(x)$ задовољавају услове става 4, и ако су поред тога функције $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ непрекидне у размаку (a, b), тада у томе размаку постоји одређен број с такав да је

$$\frac{\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)}{\int_a^b f(x)\,d\beta(x)} = \frac{\alpha(c)-\alpha(a)}{\beta(c)-\beta(a)}, \quad a \leqslant c \leqslant b.$$

Овај став претставља интегрални аналогон Cauchy-ева {1, стр. 28} проширења става о средњим вредностима, које у диференциалном облику гласи

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{за} \quad a \leqslant c \leqslant b.$$

3. 5. (i) Друга од неједначина поменутих у претходној тачки, исказана у облику става, гласи:

Став 5. *Ако функција $f(x)$ не расте у размаку (a, b), и ако је она у томе размаку позитивна и интеграбилна у односу на функције $\alpha(x)$, $\lambda(x)$ и $\Lambda(x)$, тада из*

$$\lambda(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant \Lambda(x) \quad \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

следи

$$\begin{aligned} -f(a)\{\alpha(a)-\lambda(a)\} + \int_a^b f(x)\,d\lambda(x) &\leqslant J, \\ J \leqslant f(a)\{\Lambda(a)-\alpha(a)\} + \int_a^b f(x)\,d\Lambda(x)&, \end{aligned} \tag{20}$$

где је

$$J=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

Заиста је

$$J=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b \alpha(x)\,df(x)\leqslant$$

$$\leqslant f(b)\Lambda(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b \Lambda(x)\,df(x)=$$

$$\leqslant \int_a^b f(x)\,d\Lambda(x)+f(a)\{\Lambda(a)-\alpha(a)\}.$$

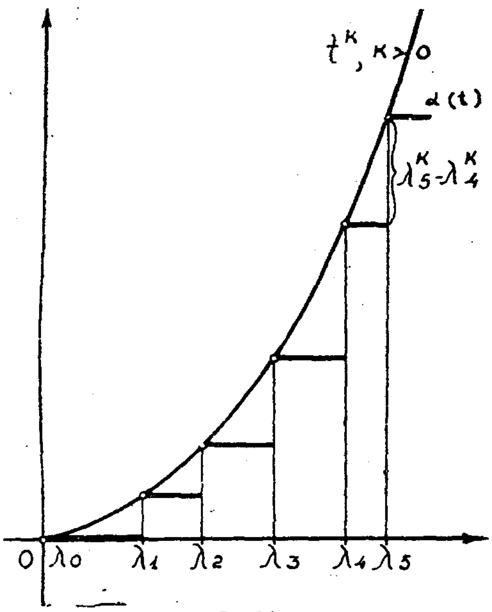
На исти начин се доказује и лева неједначина.

(*ii*) Поред осталих примена овог става (види главу С. II), наведимо, за сада, само ову. Нека је $\sigma>0$,

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_{n-1}<\lambda_n\to\infty,\quad n\to\infty, \tag{21}$$

и, види слику 11,

$$\alpha(t)=\lambda_n^k \quad \text{за} \quad \lambda_n\leqslant t<\lambda_{n+1},\quad n=0,\,1,\,2,\ldots..$$



Сл 11.

Како је тада

$$\alpha(t)\leqslant t^k \quad \text{за} \quad t\geqslant 0,$$

то је, према ставу 5,

$$J=\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,d\alpha(t)\leqslant\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,dt^k=$$

$$\leqslant\Gamma(k+1)/\sigma^k,$$

а како је

$$J=\sum_{\nu=1}^{\infty}(\lambda_\nu{}^k-\lambda_{\nu-1}{}^k)\,e^{-\sigma\lambda_\nu},$$

то је

$$J\leqslant\Gamma(k+1)/\sigma^k.$$

Дәкле, *ма какав био низ* (21), *биће*

$$\sigma^k\sum_{\nu=1}^{\infty}(\lambda_\nu{}^k-\lambda_{\nu-1}{}^k)\,e^{-\sigma\lambda_\nu}\leqslant\Gamma(k+1),\ \textit{за свако}\ k>0\ \textit{и}\ \sigma<0. \quad (22)$$

(iii) Из неједначине (22) можемо извести и извесне ставове који се често, као помоћни ставови, јављају код Hardy-Littlewood-a {1} (в. и Littlewood {2}), и то нарочито у доказима ставова Tauberove природе; на пример,

Нека је

$$f(\sigma)=\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu\,e^{-\sigma\lambda_\nu} \quad (23)$$

и

$$|u_n|\leqslant M\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n},$$

тада је

1° *ред* (23) *конвергентан за* $\sigma>0$, *и*

2° $\qquad \sigma^k|f^{(k)}(\sigma)|\leqslant M\,k!$ *за* $\sigma>0$.

Заиста је

$$\frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu}\leqslant\frac{\lambda_\nu{}^k-\lambda_{\nu-1}{}^k}{\lambda_\nu{}^k}\quad \text{за свако}\quad k\geqslant 1,$$

па је

$$|f^{(k)}(\sigma)|=\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu\lambda_\nu{}^k e^{-\sigma\lambda_\nu}\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|\,\lambda_\nu{}^k a^{-\sigma\lambda_\nu}\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu}\lambda_\nu{}^k e^{-\sigma\lambda_\nu}\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{\nu=1}^{\infty}(\lambda_\nu{}^k-\lambda^k{}_{\nu-1})\,e^{-\sigma\lambda_\nu}\leqslant M\,k!\ \sigma^{-k}.$$

IV. Неодређени Stieltjes-ов интеграл

4. 1. (i) Нека је у размаку (a, b) функција $f(x)$ S-интеграбилна у односу на језгро $\alpha(x)$, и нека се x налази у томе размаку. До појма *неодређеног* Stieltjes-ова интеграла долазимо ако интеграцију функције $f(x)$ извршимо у размаку (a, x).

У том случају

$$\int_a^x f(t)\,d\alpha(t) = \beta(x)$$

претставља једну функцију од x, дефинисану у размаку (a, b), чија ћемо главна својства овде изложити.

(ii) Неодређени интеграл, тј. функција (в. т. 1.9)

$$\beta(x) = \int_a^x f(t)\,d\alpha(t),$$

је ограничене варијације, а њена тотална варијација дата је изразом

$$W_a^b(\beta) = \int_a^b |f(t)|\;|d\alpha(t)|. \tag{1}$$

Према томе је

$$W_a^b(\beta) \leqslant M\, W_a^b(\alpha), \tag{2}$$

где је M горња граница функције $|f(x)|$ у размаку (a, b).

Нека је $\{x_\nu\}$ и ξ_ν један систем поделе размака (a, b), такав да међу тачке x_ν укључимо постепено све дисконтинуитете функције $\alpha(x)$; ставимо

$$W_n(\beta) = \sum_{\nu=1}^{n} |\beta(x_\nu) - \beta(x_{\nu-1})|$$

и

$$W_n(f, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{n} |f(\xi_\nu)|\;|\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})|.$$

Како је

$$W_n(\beta) = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(t)\,d\alpha(t) \right| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left| f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} + \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(t) - f(\xi_\nu)\}\,d\alpha(t) \right|,$$

и како се овај последњи збир налази између

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)|\ |\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})| - \sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\{f(t)-f(\xi_\nu)\}\,d\alpha(t)\right|$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(\xi_\nu)|\ |\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})| + \sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\{f(t)-f(\xi_\nu)\}\,d\alpha(t)\right|,$$

то је

$$|W_n(\beta)-W_n(f,\alpha)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\{f(t)-f(\xi_\nu)\}\,d\alpha(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}|f(t)-f(\xi_\nu)|\ |d\alpha(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\omega(x_{\nu-1},x_\nu)\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}|d\alpha(t)| =$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\omega(x_{\nu-1},x_\nu)\{A(x_\nu)-A(x_{\nu-1})\},$$

где смо ставили

$$A(x)=\int_a^x|d\alpha(t)|$$

и са $\omega(x_{\nu-1},x_\nu)$ означили осцилацију функције $|f(x)|$ у размаку $(x_{\nu-1},x_\nu)$.

Овај последњи израз претставља средњу осцилацију функције $|f(x)|$ у односу на функцију $A(x)$, а како је функција $|f(x)|$ интеграбилна у односу на функцију $A(x)$, јер је то случај са функцијом $f(x)$ у односу на функцију $\alpha(x)$, (в. тачку 1. 9. (iii)), то ће ова средња осцилација тежити нули кад $\delta_n\to 0$. Дакле, изрази

$$W_n(f,\alpha) \quad \text{и} \quad W_n(\beta)$$

теже истој граничној вредности, тј.

$$\int_a^b|f(t)|\,|d\alpha(t)| = \int_a^b|d\beta(t)| = W_a{}^b(\beta).$$

4. 2. (i) Неодређени интеграл

$$\beta(x) = \int_a^x f(t)\, d\alpha(t)$$

је непрекидна функција на сваком непрекидном месту функције $\alpha(x)$.

Према првом ставу о средњим вредностима је

$$|\beta(y) - \beta(x)| = \left| \int_x^y f(t)\, d\alpha(t) \right| \leqslant M \int_x^y |d\alpha(t)|,$$

где је

$$M = \max_{x \leqslant t \leqslant y} |f(t)|.$$

Како из непрекидности функције $\alpha(x)$ следи непрекидност функције $\int_a^x |d\alpha(t)|$ (в. тачку А. 5. 5. (ii)), то ће десна страна ове неједначине тежити нули, кад $y \to x$, из чега следи тврђење.

(ii) У тачкама дисконтинуитета x' функције $\alpha(x)$ неодређени интеграл

$$\beta(x) = \int_a^x f(t)\, d\alpha(t)$$

је прекидан, ако је

$$f(x') \neq 0,$$

јер је тада

$$\beta(x' \pm 0) = \int_a^{x' \pm 0} f(t)\, d\alpha(t),$$

па је, према томе,

$$\beta(x'+0) - \beta(x'-0) = \int_{x'-0}^{x'+0} f(t)\, d\alpha(t) = f(x')\{\alpha(x'+0) - \alpha(x'-0)\}. \quad (3)$$

Ови се обрасци изводе на исти начин као и образац (15) тачке 1. 8.

(iii). Ако је функција $f(x)$ непрекидна са десне стране, а функција $\alpha(x)$ монотона, тада

$$\frac{\beta(x+h)-\beta(x)}{\alpha(x+h)-\alpha(x)} \to f(x+0), \quad h \to +0, \tag{4}$$

за свако x размака (a, b).

Ово следи непосредно из става о средњим вредностима 3. 1. (iii).

4. 3. Из особине коју ћемо овде извести, као и из њених непосредних примена, нарочито јасно произлази, да се са Stieltjes-овим интегралом може формално оперисати као и са обичним интегралом.

Став 1. *Ако су функције* $f(x)$ *и* $F(x)$ *интеграбилне у односу на функцију* $\alpha(x)$, *тада из*

$$\beta(x) = \int_a^x f(t)\, d\alpha(t)$$

следи

$$\int_a^b F(t)\, d\beta(t) = \int_a^b F(t) f(t)\, d\alpha(t). \tag{5}$$

Нека је $\{x_\nu\}$ и ξ_ν један систем поделе размака (a, b) и

$$W_n(F) = \sum_{\nu=1}^{n} F(\xi_\nu)\{\beta(x_\nu) - \beta(x_{\nu-1})\} = \sum_{\nu=1}^{n} F(\xi_\nu) \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(t)\, d\alpha(t).$$

Ако се овом изразу дода и одузме збир

$$\sum_{\nu=1}^{n} F(\xi_\nu) f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\},$$

добива се

$$W_n(F) = \sum_{\nu=1}^{n} F(\xi_\nu) f(\xi_\nu)\{\alpha(x_\nu) - \alpha(x_{\nu-1})\} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} F(\xi_\nu) \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(t) - f(\xi_\nu)\}\, d\alpha(t). \tag{6}$$

Други члан десне стране ове једначине је по апсолутној вредности мањи од

$$\operatorname*{Max}_{a\leqslant x\leqslant b} |F(x)| \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x_{\nu-1}, x_\nu) \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |d\alpha(t)| =$$

$$= \operatorname*{Max}_{a\leqslant x\leqslant b} |F(x)| \sum_{\nu=1}^{n} \omega(x_{\nu-1}, x_\nu) \{A(x_\nu) - A(x_{\nu-1})\},$$

где је $\omega(x_{\nu-1}, x_\nu)$ осцилација функције $f(x)$ у размаку $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ и

$$A(x) = \int_a^x |d\alpha(t)|.$$

Како средња осцилација функције $f(x)$ у односу на функцију $A(x)$ тежи нули, кад $\delta_n \to 0$, то други члан једначине (6) такође тежи нули. Према томе

$$W_n(F) \to \int_a^b F(t) f(t) d\alpha(t) \quad \text{кад} \quad \delta_n \to 0,$$

чиме је једначина (5) доказана.

Из става 1 следи, дакле, да се у интегралу

$$\int_a^b F(x) d\left\{\int_a^x f(t) d\alpha(t)\right\}$$

сме једноставно диференцирати, и да је он једнак интегралу

$$\int_a^b F(x) f(x) d\alpha(x).$$

4. 4. (i) Наведимо овде неколико примена става 1.

Ако је

$$f(x) \neq 0 \quad \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

тада из

$$\beta(x) = \int_a^x f(t) d\alpha(t)$$

следи

$$\alpha(x)-\alpha(a)=\int_a^x \frac{d\beta(t)}{f(t)}.$$

Кад бисмо поступили чисто формално, рачун би изгледао овако:

Из

$$\int f(x)\,d\alpha(x)=\beta(x),$$

$$\therefore \qquad f(x)\,d\alpha(x)=d\beta(x),$$

$$\therefore \qquad d\alpha(x)=\frac{d\beta(x)}{f(x)},$$

$$\therefore \qquad \alpha(x)=\int \frac{d\beta(x)}{f(x)};$$

дакле,

$$\alpha(x)-\alpha(a)=\int_a^x \frac{d\beta(t)}{f(t)}.$$

Да је овако формално добивени резултат доиста тачан, следи из обрасца (5), ако у њему заменимо b са x и ставимо

$$F(t)=\frac{1}{f(t)}.$$

(ii) Нека су у размаку (a, b) функције $f(x)$ и $g(x)$ ограничене варијације; ако је функција $g(x)$ непрекидна, тада из

$$\alpha(x)+\int_a^x \alpha(t)\,dg(t)=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b, \tag{7}$$

следи

$$e^{g(x)}\alpha(x)=e^{g(a)}\alpha(a)+\int_a^x e^{g(t)}\,df(t)=e^{g(a)}f(a)+\int_a^x e^{g(t)}\,df(t). \tag{8}$$

Јер, ако у овом последњем интегралу заменимо функцију $f(x)$ изразом (7), биће

$$\int_a^x e^{g(t)}\,df(t) = \int_a^x e^{g(t)}\,d\left\{\alpha(t) + \int_a^t \alpha(\eta)\,dg(\eta)\right\} =$$

$$= \int_a^x e^{g(t)}\,d\alpha(t) + \int_a^x e^{g(t)}\alpha(t)\,dg(t) =$$

$$= \int_a^x e^{g(t)}\{d\alpha(t) + \alpha(t)\,de^{g(t)}\} =$$

$$= \int_a^x d\{e^{g(t)}\alpha(t)\} = e^{g(x)}\alpha(x) - e^{g(a)}\alpha(a),$$

што даје једначину (8), јер је, према (7), $\alpha(a) = f(a)$.

Горе изведене операције су дозвољене само ако функција $g(x)$ нема скокова. Од интереса је, међутим, напоменути да, на пример једначина

$$\alpha(x) + \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant x} \alpha(\nu) = x \tag{9}$$

коју можемо написати и у облику (7), тј.

$$\alpha(x) + \int_0^x \alpha(t)\,d[t] = x, \tag{9}$$

има решење облика (8), ако само основу e заменимо са 2, тј. из (9) следи

$$2^{[x]}\alpha(x) = \int_0^x 2^{[t]}\,dt.$$

Заиста је

$$2^{[x]}\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^{[x]-1} 2^{\nu} + (x - [x])\,2^{[x]},$$

тј.

$$\alpha(x) = 1 - 2^{-[x]} + x - [x],$$

а лако можемо непосредно проверити да ова функција задовољава једначину (9).

4. 5. Као још једну примену става 1, наведимо став који потиче од Hardy-а {1, 1, стр. 90} и који гласи:

Став 2. *Ако је функција* $f(x)$ *интеграбилна у односу на функцију* $\alpha(x)$, *а* $g(x)$ *у односу на* $\beta(x)$, *и ако функције* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *немају заједничких дисконтинуитета, тада је*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\int_a^b g(x)\,d\beta(x)=$$

$$=\int_a^b f(x)\left\{\int_a^x g(t)\,d\beta(t)\right\}d\alpha(x)+\int_a^b g(x)\left\{\int_a^x f(t)\,d\alpha(t)\right\}d\beta(x).$$

За доказ овога става довољно је да, на пример, први од интеграла десне стране парцијално интегришемо и два пута узастопно применимо образац (5). Заиста је

$$\int_a^b f(x)\left\{\int_a^x g(t)\,d\beta(t)\right\}d\alpha(x)=\int_a^b\left\{\int_a^x g(t)\,d\beta(t)\right\}d\left\{\int_a^x f(t)\,d\alpha(t)\right\}=$$

$$=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\int_a^b g(x)\,d\beta(x)-\int_a^b\left\{\int_a^x f(t)\,d\alpha(t)\right\}d\left\{\int_a^x g(t)\,d\beta(t)\right\}=$$

$$=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\int_a^b g(x)\,d\beta(x)-\int_a^b g(x)\left\{\int_a^x f(t)\,d\alpha(t)\right\}d\beta(x),$$

чиме је горњи став доказан.

Из овог посматрања се јасно види до које се мере може са Stieltjes-овим интегралима исто тако формално оперисати као и са обичним интегралима.

4. 6. Став 1 долази до изражаја и код ставова о средњим вредностима, и то кад се у Stieltjes-ову интегралу јавља производ од две функције, тј. ако је он облика

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,d\alpha(x).$$

Тако, на пример, ако функција $f(x)$ монотоно опада у размаку (a, b), можемо на горњи интеграл применити став 2 тачке 3.2. (i) о средњим вредностима, али тако да га претходно, на основу обрасца (5), напишемо у облику

$$\int_a^b f(x)\,d\beta(x) \quad \text{где је} \quad \beta(x)=\int_a^x g(t)\,d\alpha(t).$$

На тај начин добивамо неједначину

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant f(a+0) \underset{a\leqslant x\leqslant b}{\mathrm{Max}} \left|\int_a^x g(t)\,d\alpha(t)\right|.$$

Сви остали ставови о средњим вредностима могу се извести на сличан начин.

V. Несвојствени Stieltjes-ов интеграл

5. 1. (i) Када смо дефинисали одређени Stieltjes-ов интеграл

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

видели смо да у природи саме ове дефиниције лежи:

1) да интеграциони размак (a, b) буде коначан,

2) да функција $f(x)$ буде ограничена у том размаку и

3) да функција $\alpha(x)$ буде ограничене варијације у томе размаку.

Уколико интеграциони размак не остаје коначан, или наведена својства функција $f(x)$ и $\alpha(x)$ престају да важе у близини једне тачке тога размака, горњу дефиницију Stieltjes-ова интеграла морамо проширити, и као и код Riemann-ова интеграла [22], тада говоримо о *несвојственом интегралу*.

У примени, специално у теорији редова, баш ови интеграли су од нарочитог значаја; због тога ћемо их овде прво прецизно дефинисати, а затим изнети неколико ставова, који, углавном, дају услове за њихову егзистенцију.

(ii) Дефиниција 1. Ако је у сваком коначном размаку (x, b) или (a, x) размака $(-\infty, b)$, или (a, ∞):

1) функција $\alpha(x)$ ограничене варијације и

2) функција $f(x)$ ограничена и интеграбилна у односу на функцију $\alpha(x)$, тада интеграли

$$\int_x^b f(t)\,d\alpha(t), \quad \text{односно} \quad \int_a^x f(t)\,d\alpha(t),$$

постоје за свако коначно x; у случају да ови интеграли теже коначним и одређеним граничним вредностима, кад $|x| \to \infty$, стављамо, по дефиницији,

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,d\alpha(t) = \lim_{x=-\infty} \int_{x}^{b} f(t)\,d\alpha(t),$$

односно

$$\int_{a}^{\infty} f(t)\,d\alpha(t) = \lim_{x=\infty} \int_{a}^{x} f(t)\,d\alpha(t),$$

и кажемо да несвојствени интеграл функције $f(x)$ *постоји* у размаку $(-\infty, b)$, односно (a, ∞), или да је несвојствени интеграл *конвергентан*.

Напоменимо, да функција $f(x)$, као и тотална варијација језгра $\alpha(x)$ не морају остати ограничене кад $|x| \to \infty$ [15].

(*iii*) Дефиниција 2. Нека је c једна тачка размака (a, b), тј. $a < c < b$, а ε и ε' произвољно мали позитивни бројеви. Ако је

1) функција $\alpha(x)$ ограничене варијације у отвореним размацима $(a, c-0)$ и $(c+0, b)$ [15],

2) функција $f(x)$ интеграбилна у односу на функцију $\alpha(x)$ у тим размацима, тада оба интеграла

$$\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,d\alpha(x) \quad \text{и} \quad \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,d\alpha(x)$$

постоје, ма како мали били бројеви ε и ε'.

Ако оба ова интеграла теже одређеним граничним вредностима кад, независно један од другог, $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon' \to 0$, тада по дефиницији стављамо

$$\int_{a}^{c-0} f(x)\,d\alpha(x) = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,d\alpha(x),$$

$$\int_{c+0}^{b} f(x)\,d\alpha(x) = \lim_{\varepsilon'=0} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,d\alpha(x),$$

и

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^{c-0} f(x)\,d\alpha(x) + \int_{c+0}^b f(x)\,d\alpha(x),$$

и кажемо да несвојствени интеграл функције $f(x)$ *постоји* у близини тачке $x=c$, или да је несвојствени интеграл *конвергентан*.

При томе, нити функција $f(x)$, нити тотална варијација функције $\alpha(x)$, не морају остати ограничене у близини тачке c.

У случају да се тачка c поклопи било са тачком a, било са тачком b, дефинисани су самим тим и несвојствени интеграли

$$\int_{a+0}^b f(x)\,d\alpha(x), \quad \text{односно} \quad \int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x).$$

(iv) Ове две дефиниције разликују се само у томе, што је код друге c произвољан коначан број, док је код прве $c=\pm\infty$, тако да прва дефиниција претставља донекле само један специалан случај друге. Уосталом, код свих ставова који се односе на отворене размаке није битно да ли је c коначно или не, тако да ове ставове није потребно ни посебно изводити за случај кад су размаци бесконачни, као што се то може непосредно проверити код доказа наредних ставова, [15, (ii)].

5. 2. **(i)** Код несвојственог интеграла се првенствено поставља питање његове егзистенције, тј. које услове морају задовољавати функције $f(x)$ и $\alpha(x)$ да би овај интеграл уопште имао смисла. Због тога ћемо овде искључиво обрадити ставове ове врсте, и то у ставовима 1 и 2 изнећемо услове за апсолутну и обичну конвергенцију несвојственог интеграла, док ставови 3 и 4 дају услове под којима је парциална интеграција дозвољена, али се у ствари из њих добива један трећи облик услова за егзистенцију несвојственог интеграла, као што је то формулисано у ставу 5.

(ii) Када је једном установљена егзистенција несвојственог интеграла, или ако претпоставимо да он конвергира, потребно је испитати под којим условима особине наведене у глави II важе и за несвојствени интеграл. Како се ово испитивање своди на класичне ставове о граничним вредностима, ослањајући се непосредно на дефиницију несвојственог интеграла, и како све ове особине, сем парциалне интеграције, важе и у овом случају, то их овде нећемо изводити.

(iii) У даљем излагању ћемо посматрати само случај кад интеграл постаје несвојствен у близини горње границе b. Ово не претставља никакво ограничење, јер се сви ови ставови односе на отворен размак $(a, b-0)$, тако да се у њима може узети да је $b=\infty$, не мењајући ниуколико доказ истих. Ове ставове можемо без промене применити и на доњу границу a, било да је она коначна, било $=-\infty$ [15, (ii)].

5. 3. (i) Код обичног интеграла функција $|f(x)|$ је увек интеграбилна ако је функција $f(x)$ интеграбилна у односу на језгро $\alpha(x)$; шта више, постоји не само

$$\int_a^b |f(x)|\, d\alpha(x),$$

већ и

$$\int_a^b |f(x)|\, |d\alpha(x)|,$$

(види т. 1. 9.), док то више не мора бити случај код несвојственог интеграла.

Ако је функција $\alpha(x)$ монотона, на пример не опада, и ако постоји несвојствени интеграл

$$\int_a^{b-0} |f(x)|\, d\alpha(x),$$

кажемо да је функција $f(x)$ *апсолутно интеграбилна* у отвореном размаку $(a, b-0)$, или да је несвојствени интеграл *апсолутно конвергентан.*

Појам апсолутне конвергенције несвојственог интеграла има смисла уводити само у случају монотоније језгра, јер тада:

Из апсолутне конвергенције несвојственог интеграла увек следи егзистенција самог несвојственог интеграла.

Да је ово последње заиста случај видимо непосредно из неједначине (види т. 3. 1.)

$$\left|\int_x^y f(t)\, d\alpha(t)\right| \leqslant \int_x^y |f(x)|\, d\alpha(t),$$

јер ако x и y, независно један од другог, теже ка b, према претпоставци десна страна горње неједначине тежи нули, према томе мора и лева страна тежити нули. Дакле, на основу Cauchy-ева става [9], мора постојати гранична вредност

$$\lim_{x=b}\int_a^x f(x)\,d\alpha(x),$$

тј. и сам несвојствени интеграл.

(ii) Ставом 1 дат је један општи критериум за апсолутну интеграбилност, док се остали ставови односе на обичне несвојствене интеграле.

Став 1. *Нека је функција* $\alpha(x)$ *монотона у размаку* (a, b), *а функција* $f(x)$ *интеграбилна у односу на функцију* $\alpha(x)$ *у отвореном размаку* $(a, b-0)$; *ако је*

$$|f(x)|\leqslant F(x) \quad \text{за} \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

тада из егзистенције несвојственог интеграла

$$\int_a^{b-0} F(x)\,d\alpha(x)$$

следи апсолутна конвергенција несвојственог интеграла

$$\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x).$$

Доказ. Нека је

$$a<x<y<b,$$

тада је

$$\left|\int_x^y f(t)\,d\alpha(t)\right|\leqslant\int_x^y |f(t)|\,d\alpha(t)\leqslant\int_x^y F(t)\,d\alpha(t);$$

како из претпоставке да постоји несвојствени интеграл функције $F(x)$ следи да

$$\int_x^y F(t)\,d\alpha(t)\to 0,$$

кад x и y теже ка b, независно један од другог, то ће, дакле и

$$\int_x^y f(t)\,d\alpha(t)\to 0$$

и то кад x и y теже ка b, независно један од другог.

Према томе ће и

$$\int_a^x f(t)\,d\alpha(t)$$

тежити одређеној граничној вредности, кад $x\to b-0$, из чега следи егзистенција несвојственог интеграла

$$\int_a^{b-0} f(t)\,d\alpha(t).$$

Овај став претставља аналогон познатом критериуму за апсолутну конвергенцију несвојствена Riemann-ова интеграла [22], као и критериуму упоређивања за апсолутну конвергенцију редова.

(iii) Став 1 не важи ако се место монотоније функције $\alpha(x)$ претпостави само да је она ограничене варијације у затвореном размаку (a, b). Покажимо ово на примеру у коме ћемо узети да је горња граница интеграције бесконачна, тј. да је $b=\infty$.

Нека је $\alpha(x)$ степенаста функција, дефинисана у размаку $(0,\infty)$, тако да у тачкама $x=1, 2, 3,\ldots$ она има скокове дужине $(-1)^n/n^2$, тј. да је

$$\alpha(n+0)-\alpha(n-0)=(-1)^n/n^2,\quad n=1, 2, 3,\ldots.$$

Тотална варијација ове функције остаје ограничена у целом размаку $(0, \infty)$, јер је ред $\Sigma(-1)^n/n^2$ апсолутно конвергентан, а

$$W_0^{\infty}(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2.$$

Како је $\alpha(x)$ степенаста функција, то је довољно да функцију $f(x)$ дефинишемо само на местима прекида функције $\alpha(x)$, тј. за $x=n$, $n=1, 2, 3,\ldots$. Изаберимо зато функцију $f(x)$ тако да буде

$$f(n)=(-1)^n n \quad \text{и} \quad F(n)=n,\quad n=1, 2, 3,\ldots,$$

на пример

$$f(x)=x\cos\pi x \quad \text{и} \quad F(x)=x.$$

Тада je
$$|f(x)| \leqslant F(x) \quad \text{за} \quad 0 \leqslant x < \infty,$$
и несвојствени интеграл
$$\int_a^{\infty} F(x)\, d\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$$
постоји. Међутим интеграл
$$\int f(x)\, d\alpha(x) = \Sigma\, 1/n$$
узет у границама од 0 до ∞ не постоји, јер хармониски ред дивергира.

5. 4. (i) За разлику од става 1 који даје критериум за апсолутну конвергенцију несвојственог интеграла, ставовима 2 и 2′, које ћемо овде извести, дати су критериуми за егзистенцију тих интеграла и кад они нису апсолутно конвергентни. Став 2 претставља аналогон оне групе ставова код редова који се добивају Abel-овом {1} трансформацијом, а познати су под именом Du Bois Reymond {1} — Dedekind-ови {1} ставови (види и Lejeune Dirichlet {2, § 101}). Уосталом ови су ставови и садржани у ставу 2.

Став 2. *Нека je функција* $\alpha(x)$ *ограничена у размаку* (a, b) *и нека je она ограничене варијације у отвореном размаку* $(a, b-0)$ *тј.*
$$|\alpha(x)| \leqslant M \quad \textit{за} \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$
и
$$\int_a^{b-\varepsilon} |d\alpha(x)| \leqslant M(\varepsilon) \quad \textit{за} \quad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Нека je, даље, функција $f(x)$ *интеграбилна у односу на функцију* $\alpha(x)$, *за* $a \leqslant x < b$ *и ограничене варијација у размаку* (a, b), *тј.*
$$\int_a^b |d f(x)| \leqslant M. \tag{3}$$

Ако je поред ових претпоставака задовољен још и један од услова, или

a) $f(x) \to 0$ *кад* $x \to b-0$,

или

b) $\alpha(x) \to \alpha(b-0)$ *кад* $x \to b-0$, *тада несвојствени интеграл*

$$\int_a^{b-0} f(t)\,d\alpha(t) = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,d\alpha(t)$$

постоји.

Доказ. Нека је

$$a<x<y<b;$$

према обрасцу (12) става 3 о средњим вредностима (B. 3. 3. (i)) је

$$\left|\int_x^y f(t)\,d\alpha(t)\right| \leqslant \left\{|f(y-0)| + \int_x^y |df(t)|\right\} \operatorname*{Max}_{x\leqslant t\leqslant y} |\alpha(t)-\alpha(x)|. \quad (4)$$

Из претпоставке (3) следи да

$$\int_x^y |df(t)| \to 0,$$

а из претпоставака (1) и (3) да

$$\int_x^y |df(t)|\cdot \operatorname*{Max}_{x\leqslant t\leqslant y} |\alpha(t)-\alpha(x)| \to 0,$$

кад и x и $y\to b-0$. Из неједначине (4) следи према томе, да ће

$$\int_x^y f(t)\,d\alpha(t)\to 0,$$

ма како x и y тежили ка $b-0$, тј. да ће несвојствени интеграл

$$\int_a^{b-0} f(t)\,d\alpha(t)$$

постојати ако још и

$$f(y-0) \operatorname*{Max}_{x\leqslant t\leqslant y} |\alpha(t)-\alpha(x)| \to 0,$$

ма како x и y тежили ка $b-0$.

Ово је, међутим, увек случај ако је задовољен један од услова a) или b). Заиста, ако је услов a) задовољен, први од фактора горњега израза тежи нули, док други, према (1), остаје ограничен; ако је услов b) задовољен, други од фактора овога израза тежи нули, док први, према (3) остаје ограничен, чиме је став 2 доказан.

(ii) У ставу 2 можемо услове (1) и b), који се односе на функцију $\alpha(x)$, заменити општијим условима, ако само претпоставимо да функција $f(x)$ не расте у посматраном размаку. Овим добивамо још један критериум за егзистенцију несвојственог интеграла, који је за примену веома подесан и гласи:

Став 2'. *Нека су функције* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *ограничене варијације у отвореном размаку* $(a, b-0)$, *и нека је*

$$|\alpha(x)| \leqslant \beta(x) \quad \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant b;$$

ако је функција $f(x)$ *интеграбилна у односу на функције* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *за* $a \leqslant x < b$, *и ако она у размаку* (a, b) *не расте и*

$$f(x) \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to b-0,$$

тада из егзистенције несвојственог интеграла

$$\int_a^{b-0} f(x)\, d\beta(x)$$

следи егзистенција несвојственог интеграла

$$\int_a^{b-0} f(x)\, d\alpha(x).$$

Доказ. Нека је $a < x < y < b$; ако у ставу 5, тачке В. 3. 5. (i) ставимо

$$\lambda(x) = -\beta(x) \quad \text{и} \quad \Lambda(x) = \beta(x),$$

добивемо неједначину

$$\left| \int_x^y f(t)\, d\alpha(t) \right| \leqslant 2 f(x) \beta(x) + \left| \int_x^y f(t)\, d\beta(t) \right|.$$

Из претпоставке да несвојствени интеграл $\int f(t)\, d\beta(t)$ постоји следи да ће други члан горње неједначине тежити нули, ма како x и y тежили ка $b-0$.

Треба још показати да ће и први члан тежити нули, тј. да

$$f(x)\beta(x)\to 0 \quad \text{кад} \quad x\to b=0.$$

Ово, међутим, следи из егзистенције несвојственог интеграла $\int f(t)\,d\beta(t)$ и претпоставке да функција $f(x)$ не опада и тежи нули кад $x\to b-0$.

Доказ ове чињенице изнећемо у тачки В. 5. 6 (iii), јер је она садржана у делу а) става 4.

5. 5. У овој и наредној тачки испитаћемо када је и уколико дозвољена парциална интеграција несвојствених интеграла. Ови су ставови и утолико од интереса што се из добивених услова може извести још један критериум за егзистенцију несвојствених интеграла, а који је за примену нарочито подесан.

Став 3. *Нека су функције* $\alpha(x)$ *и* $f(x)$ *ограничене варијације у отвореном размаку* $(a, b-0)$, *и нека је функција* $f(x)$ *интеграбилна у односу на функцију* $\alpha(x)$ *за свако* $x<b$.

а) *Ако несвојствени интеграл*

$$\lim_{x=b}\int_a^x f(t)\,d\alpha(t)=\int_a^{b-0} f(t)\,d\alpha(t) \quad \textit{постоји}, \tag{5}$$

моћи ћемо га парциално интегрисати ако је још задовољен и услов

$$f(x)\alpha(x)\to A \quad \text{кад} \quad x\to b-0. \tag{6}$$

У том случају постоји несвојствени интеграл

$$\int_a^{b-0}\alpha(x)\,df(x),$$

и, као и код обичног интеграла, биће

$$\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x)=A-f(a)\alpha(a)-\int_a^{b-0}\alpha(x)\,df(x). \tag{7}$$

ђ) *У специалном случају кад функције* $f(x)$ и $\alpha(x)$ *задовољавају услове става 2, услови* (5) *и* (6) *биће испуњени, тако да ће образац* (7) *важити и под тим условима.*

Доказ. Како су у размаку (a, x), $x < b$, обе функције $f(t)$ и $\alpha(t)$ ограничене варијације, то се у томе размаку парциална интеграција увек може извршити и тада је

$$\int_a^x f(t)\,d\alpha(t) = f(x)\alpha(x) - f(a)\alpha(a) - \int_a^x \alpha(t)\,df(t).$$

a) Из ове једначине непосредно следи тврђење a) горњег става, јер, ако њена лева страна и први члан $f(x)\alpha(x)$ десне стране теже одређеним граничним вредностима, кад $x \to b - 0$, то мора и последњи члан тежити одређеној граничној вредности, чиме су тврђење a) као и образац (7) за парциалну интеграцију доказани.

b) Да бисмо увидели да су ови услови испуњени, под претпоставкама става 2, приметимо:

1) да из самог става 2, следи егзистенција несвојственог интеграла

$$\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x);$$

2) из претпоставке (1) и a) следи да

$$f(x)\alpha(x) \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to b - 0,$$

јер је

$$\alpha(x) = O(1), \quad x \to b - 0;$$

3) из претпоставке (3) и a) следи да

$$f(x)\alpha(x) \to f(b-0)\alpha(b-0) \quad \text{кад} \quad x \to b - 0,$$

јер је, према (3), функција $f(x)$ ограничене варијације, из чега следи да већ

$$f(x) \to f(b-0) \text{ кад } x \to b - b - 0.$$

Дакле су, под овим условима, обе претпоставке става 3 испуњене, чиме је и део b) доказан.

5. 6. (i) За примену много важнији став добивамо ако је функција $f(x)$ монотона; тада већ и из саме претпоставке да постоји несвојствени интеграл

$$\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x)$$

следи да или

$$f(x)\alpha(x) \quad \text{или} \quad f(x)\{\alpha(b-0) - \alpha(x)\}$$

мора тежити одређеној граничној вредности кад $x \to b-0$, као што то казује овај став.

Став 4. *Нека је* $\alpha(x)$ *функција ограничене варијације у размаку* $(a, b-0)$, *а* $f(x)$ *позитивна и монотона функ- у томе размаку. Из егзистенције несвојственог интеграла*

$$\int_a^{b-0} f(x)\, d\alpha(x)$$

следи да

a) $$f(x)\alpha(x) \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to b-0,$$

ако

$$f(x) \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to b=0.$$

Ако је

$$\lim_{x=b} f(x) > 0,$$

тада

b) $$\lim_{x=b} \alpha(x) = \alpha(b-0)$$

постоји и

c) $$f(x)\{\alpha(b-0)-\alpha(x)\} \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to b-0,$$

и то било да функција $f(x)$ *монотоно опада, било да она монотоно расте и тежи коначној граници или бесконачности.*

(ii) Последица. Ако је функција $f(x)$ монотона и ако несвојствени интеграл

$$\int_a^{b-0} f(x)\, d\alpha(x)$$

постоји, можемо на основу претходног става и става 3, увек извршити парцијалну интеграцију, при чему треба разликовати ове три могућности:

a) Ако

$$f(x) \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to b-0,$$

тада је

$$\int_a^{b-0} f(x)\, d\alpha(x) = -f(a)\alpha(a) - \int_a^{b-0} \alpha(x)\, df(x).$$

b) Ако је

$$\lim_{x=b} f(x) = f(b-0) > 0 \quad \text{и коначно},$$

тада

$$\lim_{x=b} \alpha(x)=\alpha(b-0)$$

постоји и

$$\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x)=f(b-0)\alpha(b-0)-f(a)\alpha(a)-\int_a^{b-0}\alpha(x)\,df(x).$$

c) Ако

$$f(x)\to\infty \quad \textit{кад} \quad x\to b-0,$$

тада

$$\lim_{x=b} \alpha(x)=\alpha(b-0)$$

такође постоји и

$$f(x)\{\alpha(b-0)-\alpha(x)\}\to 0 \quad \text{кад} \quad x\to b-0;$$

како је

$$\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x)=\int_a^{b-0} f(x)\,d\{\alpha(x)-\alpha(b-0)\},$$

то овај последњи интеграл можемо парциално интегрисати и добивамо

$$\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x)=f(a)\{\alpha(b-0)-\alpha(a)\}+\int_a^{-0}\{\alpha(b-0)-\alpha(x)\}\,df(x).$$

(*iii*) Доказ става 4. Приметимо најпре да из позитивитета и монотоније функције $f(x)$ следи, или да мора постојати гранична вредност $f(b-0)$, или да мора

$$f(x)\to\infty \quad \text{кад} \quad x\to b-0.$$

a) Претпоставимо да $f(x)$ монотоно опада и да је

$$f(b-0)=0.$$

Нека је

$$a<x<y<b$$

тада имамо

$$\begin{aligned} f(y)|\alpha(y)| &= f(y)|\alpha(y)-\alpha(x)+\alpha(x)|\leqslant\\ &\leqslant f(y)|\alpha(x)|+f(y)|\alpha(y)-\alpha(x)|=\\ &\leqslant f(y)|\alpha(x)|+f(y)\left|\int_x^y d\alpha(t)\right|=\\ &\leqslant f(y)|\alpha(x)|+f(y)\left|\int_x^y \frac{1}{f(t)}\,f(t)\,d\alpha(t)\right|. \end{aligned}$$

Како је на основу става 2 о средњим вредностима, образац (4) тачке 3. 2. са примедбом у тачки 4.6.,

$$\left|\int_x^y \frac{1}{f(t)} f(t)\, d\alpha(t)\right| \leqslant \frac{1}{f(y)} \operatorname*{Max}_{x \leqslant t \leqslant y} \left|\int_t^y f(t)\, d\alpha(t)\right|,$$

јер је

$$\frac{1}{f(y-0)} \leqslant \frac{1}{f(y)},$$

то добивамо да је

$$f(y)|\alpha(y)| \leqslant f(y)|\alpha(x)| + \operatorname*{Max}_{x \leqslant t \leqslant y} \left|\int_t^y f(t)\, d\alpha(t)\right|.$$

Ако у овој неједначини пустимо, најпре, да $y \to b-0$, задржавајући при томе x стално, она постаје

$$\limsup_{y=b} f(y)|\alpha(y)| \leqslant \operatorname*{Max}_{x \leqslant t \leqslant b} \left|\int_t^{b-0} f(t)\, d\alpha(t)\right|.$$

Међутим, из претпоставке да постоји несвојствени интеграл

$$\int_a^{b-0} f(t)\, d\alpha(t),$$

следи да

$$\operatorname*{Max}_{x \leqslant t \leqslant b} \left|\int_t^{b-0} f(t)\, d\alpha(t)\right| \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to b-0;$$

према томе, из последње неједначине следи, да је

$$\limsup_{x=b} f(y)|\alpha(y)| \leqslant 0,$$

а што је могуће само кад

$$f(x)\,\alpha(x) \to 0, \quad x \to b-0.$$

Ђ′) Претпоставимо да $f(x)$ монотоно опада и да је

$$f(b-0) > 0;$$

тада је, на основу претходно примењеног става о средњим вредностима

$$|\alpha(y)-\alpha(x)|=\left|\int_x^y d\alpha(t)\right|=$$

$$=\left|\int_x^y \frac{1}{f(t)}f(t)\,d\alpha(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{f(y)}\operatorname*{Max}_{x\leqslant t\leqslant y}\left|\int_t^y f(t)\,d\alpha(t)\right|\leqslant \tag{8}$$

$$\leqslant\frac{1}{f(b-0)}\operatorname*{Max}_{x\leqslant t\leqslant y}\left|\int_t^y f(t)\,d\alpha(t)\right|.$$

Како из егзистенције несвојственог интеграла

$$\int_b^{b-0} f(t)\,d\alpha(t)$$

следи да

$$\operatorname*{Max}_{x\leqslant t\leqslant y}\left|\int_t^y f(t)\,d\alpha(t)\right|\to 0,$$

ма како x и y тежили ка $b-0$, то из горње неједначине следи, да ће и

$$\alpha(y)-\alpha(x)\to 0,$$

тј. да гранична вредност $\alpha(b-0)$ постоји.

Ђ″) Претпоставимо да $f(x)$ монотоно расте и да је

$f(b-0)$ коначно;

тада неједначина (8) узима облик

$$|\alpha(y)-\alpha(x)|\leqslant\frac{1}{f(x)}\operatorname*{Max}_{x\leqslant t\leqslant y}\left|\int_x^t f(t)\,d\alpha(t)\right| \tag{9}$$

и на основу истог резоновања као и мало пре, добијамо да

$$\alpha(y)-\alpha(x)\to 0 \quad \text{кад} \quad x \ \text{ и } \ y\to b-0,$$

тј. да $\alpha(b-0)$ постоји.

c) Претпоставимо, најзад, да $f(x)$ монотоно расте и да

$$f(x)\to\infty,\quad \text{кад}\quad x\to b-0.$$

Ако тада у неједначини (9) пустимо да y тежи ка $b-0$, на основу тачке b″), $\alpha(b-0)$ постоји и добивамо да је

$$f(x)\,|\,\alpha(b-0)-\alpha(x)\,|\leqslant \max_{x\leqslant t<b}\left|\int_x^t f(t)\,d\alpha(t)\right|.$$

Ако сад у овој неједначини пустимо да и $x\to b-0$, из егзистенције несвојственог интеграла

$$\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x)$$

следи да

$$\max_{x\leqslant t<b}\left|\int_x^t f(t)\,d\alpha(t)\right|\to 0\quad \text{кад}\quad x\to b-0,$$

дакле ће и

$$f(x)\{\alpha(b-0)-\alpha(x)\}\to 0\quad \text{кад}\quad x\to b-0,$$

чиме је став 4 потпуно доказан.

5. 7. (*i*) Ако у последици става 4 заменимо улогу функција $f(x)$ и $\alpha(x)$, добивамо један став који даје критериум за егзистенцију несвојствених интеграла, а који није садржан у ставовима 1, 2 и 2′. Те ставове можемо, дакле, допунити овим ставом.

Став 5. *Ако је функција* $\alpha(x)$ *монотона и ограничена, а функција* $f(x)$ *ограничене варијације у размаку* $(a, b-0)$ *и интеграбилна у односу на функију* $\alpha(x)$, *тада је за егзистенцију несвојственог интеграла*

$$A=\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x)$$

довољно да постоји несвојствени интеграл

$$B=\int_a^{b-0} \alpha(x)\,df(x).$$

Став 5 важи, било да функција $\alpha(x)$ опађа, било да расте у размаку (a, b), али се у њему монотонија не може заменити условом, да она буде ограничене варијације у томе размаку.

Покажимо ово на једном примеру у коме ћемо за горњу границу интеграције узети да је $b=\infty$.

(*ii*) Нека је $f(x)$ у размаку $(0, \infty)$ степенаста функција, која у тачкама $x=n$, $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$, има скокове дужине

$$f(n+0)-f(n-0)=n, \quad n=1, 2, 3, \ldots\ldots,$$

и нека је

$$f(0)=0.$$

За функцију $\alpha(x)$ узмимо, такође, степенасту функцију чији се скокови налазе ма где у размацима $(n-1, n)$, $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$, и то тако да буде

$$\alpha(0)=0 \quad \text{и} \quad \alpha(n)=(-1)^n/n^2.$$

Тада тотална варијација функције $\alpha(x)$ остаје ограничена у целом размаку $(0, \infty)$, јер је

$$W_0^\infty(\alpha)=\sum_{\nu=1}^{\infty} 1/n^2.$$

Сем тога је

$$\int_0^\infty \alpha(x)\,df(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n,$$

дакле и овај интеграл постоји, али $f(x)\alpha(x)$ ипак не тежи нули, јер је

$$f(n)\,\alpha(n)=(-1)^n n^{-2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu,$$

а који израз осцилира између $-1/2$ и $+1/2$, кад $n\to\infty$; према томе, не може постојати ни интеграл

$$\int f(x)\,d\alpha(x)$$

у границама од 0 до ∞.

Сличан пример бисмо имали, кад бисмо узели да је

$$f(x)=[x^2] \quad \text{а} \quad \alpha(x)=(1+x)^{-2}\cos\pi x.$$

(*iii*) Приметимо, напослетку, да инверсан став става 5 не важи, тј. да под горњим претпоставкама, из егзистенције интеграла

$$A=\int_a^{b-0} f(x)\,d\alpha(x)$$

не следи егзистенција интеграла

$$B=\int_a^{b-0} \alpha(x)\,df(x).$$

Ово можемо показати на примеру, у коме ћемо такође узети да је горња интеграциона граница $b=\infty$.

Функцију $f(x)$ дефинишимо у размаку $(0,\infty)$ као степенасту функцију

$$f(x)=(-1)^n n \quad \text{за} \quad n\leqslant x<n+1, \quad n=0,1,2,\ldots\ldots,$$

а за функцију $\alpha(x)$ узмимо функцију

$$\alpha(0)=0, \ \alpha(x)=1/x \quad \text{за} \quad x>0.$$

У овом случају несвојствени интеграл A постоји, јер је

$$-A=-\int_0^\infty f(x)\,d\alpha(x)=\int_0^\infty f(x)x^{-2}\,dx=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^n n\int_n^{n+1} t^{-1}dt=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^n/(n+1),$$

а овај последњи ред конвергира. Али несвојствени интеграл B не постоји, јер је

$$\int_0^x t^{-1}\,df(t)=\sum_{n\leqslant x}(-1)^n(2n-1)/n,$$

зато што функција $f(x)$ у тачкама $x=n$ има скокове дужине $(-1)^n(2n-1)$, а овај последњи ред дивергира, тј. осцилира између коначних граница кад $x\to\infty$.

Према томе из егзистенције интеграла A не можемо закључити егзистенцију интеграла B.

5.8. (*i*) Пре него што пођемо на примене, показаћемо овде на два примера у коликој мери Stieltjes-ов интеграл, као и напред изведени ставови, садрже најразноврсније ставове анализе. Тако, већ из примера које смо навели у овој глави, можемо закључити да су редови само један специалан случај Stieltjes-ова интеграла. Са друге стране и сви ставови који се односе на обичан одређени интеграл садржани су у ставовима овог одељка, а као пример наведимо само један специалан случај става 4, који гласи:

Ако функција $\varphi(x)$ *има интеграбилан извод у размаку* $(0, \infty)$, *и ако*

$$\Phi(x) = \int_0^x t\varphi'(t)\,dt \to A, \quad x \to \infty, \tag{10}$$

тада:

$$1^0 \qquad \varphi(x) \to \varphi(\infty), \quad x \to \infty, \tag{11}$$

$$2^0 \qquad x\{\varphi(x) - \varphi(\infty)\} \to 0, \quad x \to \infty, \tag{12}$$

и

$$3^0 \qquad \int_0^\infty \{\varphi(t) - \varphi(\infty)\}\,dt = -\int_0^\infty t\varphi'(t)dt = -A. \tag{13}$$

Овај је став садржан као специалан случај у ставу 4 и његовој последици, ако у њему ставимо

$$f(x) = x, \quad \alpha(x) = \varphi(x), \quad a = 0 \quad \text{и} \quad b = \infty.$$

Ради упоређења извешћемо овде у кратким потезима и непосредан доказ овог става. — Делимичном интеграцијом интеграла (10) добивамо

$$x\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt + \int_0^x t\varphi'(t)\,dt,$$

одакле видимо да је (13) непосредна последица асимптотске релације (12).

Како из

$$\varphi'(x) = \frac{\Phi'(x)}{x}$$

следи

$$\varphi(m) - \varphi(x) = \int_x^m \frac{\Phi'(t)}{t}\,dt = \frac{\Phi(m)}{m} - \frac{\Phi(x)}{x} + \int_x^m \frac{\Phi(t)}{t^2}\,dt,$$

то на основу претпоставке (10), тј. да $\Phi(m) \to A$ кад $m \to \infty$, добивамо да је релација (11) испуњена.

Према томе је

$$x\{\varphi(\infty)-\varphi(x)\}=x\left\{-\frac{\Phi(x)}{x}+\int_x^\infty \frac{\Phi(t)}{t^2}dt\right\}=x\int_x^\infty \frac{\Phi(t)-\Phi(x)}{t^2}dt,$$

а отуда

$$x|\varphi(\infty)-\varphi(x)|\leqslant x\int_x^\infty \frac{|\Phi(t)-\Phi(x)|}{t^2}dt\leqslant \varepsilon x\int_x^\infty \frac{dt}{t^2}=\varepsilon$$

за довољно велико x и произвољно мало ε, чиме је и релација (12) доказана.

(*ii*) Да бисмо показали какве све разнолике изразе може у себи садржати један исти Stieltjes-ов итеграл наведимо несвојствени интеграл

$$J(s)=\int_1^\infty t^{-s}\,d\{t-[t]\}=\begin{cases}\dfrac{s}{s-1}-\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^s}=\dfrac{s}{s-1}-\xi(s),\ s>1,\\[2ex] 1-\lim\limits_{n=\infty}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\lg n\right)=1-C,\ s=1,\\[2ex] \dfrac{s}{s-1}+\lim\limits_{n=\infty}\left\{\dfrac{n^{1-s}}{1-s}-\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu^s}\right\},\ 0<s<1.\end{cases}\tag{14}$$

На основу става 2 а), са $b=\infty$, несвојствени интеграл на левој страни конвергира за свако $s>0$, док је ред

$$\xi(s)=\sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

конвергентан само за $s>1$.

Међутим, ако горњи интеграл посматрамо у границама од 1 до x, добивамо, за $s\neq 1$,

$$J_x(s)=\int_1^x t^{-s}\,dt-\int_1^x t^{-s}\,d[t]=\frac{1-x^{1-s}}{s-1}-\sum_{2\leqslant n\leqslant x} n^{-s},$$

а за $s=1$ је

$$J_x(s)=lgx-\sum_{2\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{n}.$$

Ако у овим једначинама пустимо да $x \to \infty$, из прве једначине добивамо први и трећи ред обрасца (14), тј. за $s > 1$ и $0 < s < 1$, а из друге средњи ред, где је C тзв. Euler-ова константа [32].

(*iii*) Изразе обрасца (14) можемо изразити и једним несвојственим интегралом узетим између коначних граница, ако t заменимо са $\frac{1}{t}$ и ставимо

$$\rho(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

јер је тад

$$J(s) = \int_{+0}^{1} t^s \, d\rho(t) \quad \text{за} \quad s > 0.$$

ОДЕЉАК C.

ПРИМЕНЕ

I. Изрази одређени као функције низа бројева

1. 1. (*i*) Изрази које ћемо овде посматрати су неки специјални случајеви израза облика [26]

$$S(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} F(x, \lambda_\nu) \tag{1}$$

где је $F(x, y)$ функција двеју променљивих, дефинисана за $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, а λ_n дат низ позитивних бројева који не опада и тежи бесконачности са n. Да бисмо ове изразе могли лакше испитати, и то нарочито понашање функције $S(x)$ за велике вредности од x, потребно је да претходно уведемо појам т. зв. бројне функције датога низа λ_n.

(*ii*) Нека је

$$\lambda_n, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

бесконачан низ позитивних бројева, за који ћемо претпоставити да не опада тј. да је

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \leqslant \ldots$$

Под *бројном функцијом* $\delta(x)$ низа λ_n подразумевамо степенасту функцију која, за свако $x \geqslant 0$, даје број чланова низа λ_n који нису већи од x; према томе је [26]

$$\delta(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} 1. \tag{2}$$

(iii) Бројна функција $\delta(x)$ не опада, непрекидна је са десне стране и, ако $\lambda_n \to \infty$ са n, она је дефинисана у целом размаку $(0, \infty)$. Међутим, ако

$$\lambda_n \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

тада

$$\delta(x) \to \infty \quad \text{кад} \quad x \to a-0,$$

и функција $\delta(x)$ је дефинисана само у размаку $(0, a-0)$.

У тачки $x=\lambda_n$ бројна функција $\delta(x)$ има скок дужине 1 ако λ_n није једнак члану који му претходи или га следи. Међутим, ако има k чланова низа који су међусобно једнаки тада у тој тачки бројна функција има скок дужине k.

(iv) Као што је низом λ_n његова бројна функција потпуно дефинисана и то обрасцем (2), тако је и обратно, функцијом (2), тј. степенастом функцијом, код које су дужине свих скокова цели бројеви, низ бројева λ_n потпуно одређен. Наиме, ако функција $\delta(x)$ има у тачки $x=a$ скок дужине k, и ако је $\delta(a-0)=n$, тада су $n+1$-ви, $n+2$-ги,..... и $n+k$-ти члан низа λ_ν, који је овом функцијом одређен, сви међусобно једнаки и

$$\lambda_{n+1}=\lambda_{n+2}=\ldots\ldots=\lambda_{n+k}=a.$$

(v) Из дефиниције (2) следи да је, на пример, бројна функција $\delta(x)$ низа природних бројева

$$1, 2, 3, \ldots\ldots n, \ldots$$

највећи цео број садржан у x [28], тј. да је

$$\delta(x)=[x], \quad x \geqslant 0.$$

Међу свим степенастим функцијама, функција $[x]$ је једна од најважнијих и на њу ћемо често наилазити. Уосталом, помоћу ове функције можемо лако изразити и бројну функцију произвољног низа λ_n, уколико је тај низ дат као монотона функција индекса n.

Став 1. *Нека је*

$$\lambda_n=\varphi(n), \quad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

где је $\varphi(x)$ *монотона функција и нека је* $\phi(x)$ *њена инверзна функција. Бројна функција* $\delta(x)$ *низа* λ_n *може се изразити у облику*

$$\delta(x)=[\phi(x)]. \tag{4}$$

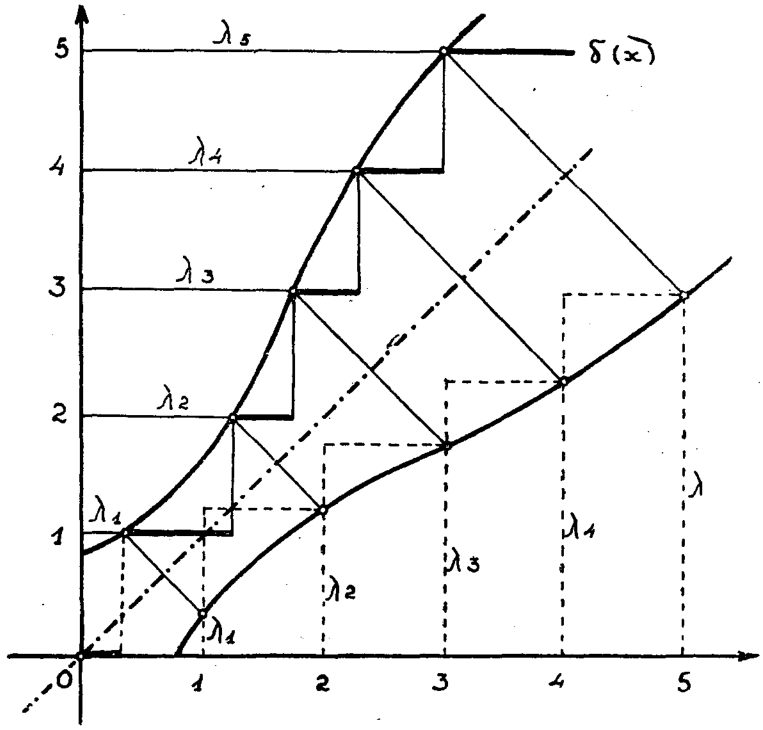
Из (3) и дефиниције инверзне функције (в. сл. 12) је

$$n = \phi(\lambda_n) \quad \text{и} \quad n+1 = \phi(\lambda_{n+1});$$

отуда је

$$n \leqslant \phi(x) < n+1 \quad \text{за} \quad \lambda_n \leqslant x < \lambda_{n+1},$$

јер на основу претпоставке да функција $\varphi(x)$ не опада, неће ни функција $\phi(x)$ опадати.



Сл. 12.

Према томе је

$$[\phi(x)] = n = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} 1 = \delta(x).$$

Тако је, на пример,

$$\delta(x) = [\sqrt{x}]$$

бројна функција нива

$$n^2, \; n = 1, 2, \ldots\ldots,$$

а

$$\delta(x) = \left[\frac{lg\, x}{lg\, q}\right]$$

бројна функција низа

$$q^n, \; q > 1, \; n = 1, 2, \ldots\ldots$$

(vi) Сваки низ λ_n који не опада можемо увек интерполисати непрекидном функцијом $\varphi(x)$ која такође не опада, и то, шта више, на бескрајно много начина. Другим речима, кроз низ изолованих тачака са апсцисама n и ординатама λ_n, $n=1,2,\ldots$, можемо увек повући једну или колико желимо непрекидних линија, које не опадају ако низ λ_n не опада; једначином ма које од ових линија $y=\varphi(x)$ одређена је једна функција $\varphi(x)$ која не опада и интерполише низ λ_n, тј. таква да је

$$\lambda_n=\varphi(n) \quad \text{за свако} \quad n=1,2,3,\ldots .$$

Ако низ

$$\lambda_n\to\infty \quad \text{кад} \quad n\to\infty,$$

тада мора и тако одређена функција

$$\varphi(x)\to\infty \quad \text{кад} \quad n\to\infty,$$

а у том случају мора и њена инверзна функција

$$\phi(x)\to\infty \quad \text{кад} \quad n\to\infty.$$

Према томе, на основу обрасца (4) и чињенице да је

$$[x]\sim x \quad \text{кад} \quad x\to\infty,$$

непосредно увиђамо да из

$$\lambda_n=\varphi(n)\to\infty \quad \text{кад} \quad n\to\infty, \tag{5}$$

увек следи да је

$$\delta(x)\sim\phi(x), \quad \text{кад} \quad x\to\infty. \tag{6}$$

(vii) Из образаца (5) и (6) видимо да из асимптотског понашања функције $\varphi(n)$, односно низа λ_n, кад $n\to\infty$, можемо лако добити асимптотско понашање његове бројне функције $\delta(x)$ кад $x\to\infty$, кадгод смо у стању да из асимптотског понашања функције $\varphi(x)$ одредимо асимптотско понашање њене инверзне функције $\phi(x)$, и обратно.

За функције $\varphi(x)$ које не расту ни сувише брзо ни сувише споро, везу између аисмптотског понашања саме функције и њене инверзне функције можемо лако добити, и један став ове врсте је

Став 2. *Нека су функције* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *монотоне за* $x\geqslant 0$, *а* $\phi(x)$ *и* $\Psi(x)$ *њихове инверзне функције; ако*

$$\psi(x)\to\infty \quad \textit{кад} \quad x\to\infty,$$

тада из

$$\lim_{x=\infty} \inf \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \geqslant 1 \tag{7}$$

следи

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{\phi(x)}{\Psi(x)} \leqslant 1 , \tag{8}$$

а из

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \leqslant 1 \tag{9}$$

следи

$$\lim_{x=\infty} \inf \frac{\phi(x)}{\Psi(x)} \geqslant 1 , \tag{10}$$

ако поред тога функција $\Psi(x)$ *задовољава још ова два услова:*

1^0 *да за једно* $\lambda_0 > 1$

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{\Psi(\lambda_0 x)}{\Psi(x)} = W(\lambda_0) \tag{11}$$

постоји, у ком случају $W(\lambda)$ *постоји за свако* $\lambda \leqslant \lambda_0$ *и не опада, јер функција* $\Psi(x)$ *не опада;*

2^0 *да*

$$W(\lambda) \to 1 \quad \text{\textit{кад}} \quad \lambda \to 1+0. \tag{12}$$

Доказ. Из претпоставке (7) следи да је

$$\varphi(x) \geqslant \frac{1}{\lambda} \psi(x)$$

за довољно велико x, ако је само $\lambda > 1$, ма како се он мало разликовао од јединице. Како су диаграми функције и њене инверзне функције симетрични у односу на праву $y=x$, то из ове неједначине следи да је за довољно велико x

$$\phi(x) \leqslant \Psi(\lambda x).$$

Према томе је

$$\frac{\phi(x)}{\Psi(x)} \leqslant \frac{\Psi(\lambda x)}{\Psi(x)},$$

а отуда је, ако је $\lambda \leqslant \lambda_0$, према претпоставци (11),

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{\phi(x)}{\Psi(x)} \leqslant \lim_{x=\infty} \sup \frac{\Psi(\lambda x)}{\Psi(x)} = W(\lambda).$$

Како λ можемо бирати произвољно близу јединице, то, кад пустимо да $\lambda \to 1+0$, из претпоставке (12) следи тврђење (8).

Аналогно добивамо да из (9) следи (10) ако, за једно $0<\theta<1$,

$$\lim_{x=\infty}\inf\frac{\Psi(\theta x)}{\Psi(x)}=w(\theta) \tag{13}$$

није нула, и ако

$$w(\theta)\to 1 \quad \text{кад} \quad \theta\to 1-0. \tag{14}$$

Међутим, ако у (13) ставимо

$$\frac{1}{\theta}=\lambda>1,$$

и x заменимо са λx овај услов постаје

$$\lim_{x=\infty}\inf\frac{\Psi(\theta x)}{\Psi(x)}=\lim_{x=\infty}\inf\frac{\Psi(x)}{\Psi(\lambda x)}=$$

$$=\lim_{x=\infty}\inf 1/\frac{\Psi(\lambda x)}{\Psi(x)}=$$

$$=1/\lim_{x=\infty}\sup\frac{\Psi(\lambda x)}{\Psi(x)}=$$

$$=\frac{1}{W(\lambda)}.$$

Према томе је, за $\theta=1/\lambda$,

$$w(\theta)=1/W(\lambda),$$

тако да (13) и (14) следе из претпоставака (11) и (12), чиме је горњи став потпуно доказан.

(viii) Ако је функција $\varphi(x)$ асимтотски једнака функцији $\psi(x)$, тј. ако је

$$\varphi(x)\sim\psi(x) \quad \text{кад} \quad x\to\infty. \tag{15}$$

тада су оба услова (7) и (9) става 2 испуњена, па ће на основу овога става следити да је

$$\Phi(x)\sim\Psi(x) \quad \text{кад} \quad x\to\infty, \tag{16}$$

ако инверзна функција функције $\psi(x)$ задовољава услове (11) и (12).

Да би, обратно, из (16) следило (15), јасно је, на основу става 2, да мора сама функција $\psi(x)$ задовољавати услове (11) и (12), тј. да мора бити

$$\lim_{x=\infty}\sup\frac{\psi(\lambda x)}{\psi(x)}=W(\lambda)\to 1 \quad \text{кад} \quad \lambda\to 1+0. \tag{17}$$

Да би функција $\psi(x)$ задовољавала услов оваковог облика она не сме да расте сувише брзо; у ствари, она се мора, за велике вредности од x, отприлике понашати као неки степен x-а.

Заиста, већ експоненциална функција e^x, или, шта више, функција $e^{\sqrt{x}}$ не задовољава услов (17); јер је, на пример,

$$e^{\sqrt{\lambda x}}/e^{\sqrt{x}} = e^{(\sqrt{\lambda}-1)\sqrt{x}} \to \infty \quad \text{кад} \quad x \to \infty,$$

и то за свако $\lambda > 1$.

Међутим, ако је функција $\psi(x)$, на пример, облика

$$x^p \, lg^q(x),$$

ма какав био број $p > 0$ и $q \lesseqgtr 0$, видимо да

$$\frac{(\lambda x)^p \, lg^q(\lambda x)}{x^p \, lg^q x} \to \lambda^p \quad \text{кад} \quad x \to \infty;$$

према томе је услов (17) задовољен, јер је

$$W(\lambda) = \lambda^p \to 1 \quad \text{кад} \quad \lambda \to 1.$$

Обратно, да би услови (11) и (12) били задовољени, функција $\phi(x)$ не сме сувише брзо да расте, тј. функција $\psi(x)$ не сме да расте сувише споро. Тако став 2 више не важи, или из (15) не мора да следи (16), чим се функција $\psi(x)$ понаша као $lg x$. На пример, ако је

$$\varphi(x) = (\sqrt{\lg x} - 1)^2,$$

тада је

$$\varphi(x) \sim \lg x, \quad x \to \infty,$$

и

$$\Phi(x) = e^{x+2\sqrt{x}+1},$$

а

$$\psi(x) = \lg x, \quad \text{тј.} \quad \phi(x) = e^x;$$

међутим,

$$\Phi(x) = e^{x+2\sqrt{x}+1}$$

тежи брже бесконачности од $\phi(x) = e^x$, кад $x \to \infty$.

(ix) На основу става 2 и резултата добивених у тачкама (vi) - (viii), видимо, дакле, да из асимптотског понашања низа λ_n, тј. из

$$\lambda_n = \varphi(n) \sim \psi(n), \quad n \to \infty, \tag{18}$$

можемо добити асимптотско понашање његове бројне функције $\delta(x)$, и то

$$\delta(x) \sim \phi(x), \quad x \to \infty, \tag{19}$$

ако функција $\phi(x)$ задовољава услове (11) и (12).

Обратно, из (19) можемо добити асимптотско понашање самога низа λ_n, тј. (18), ако функција $\psi(x)$ задовољава услов (17).

Тако, на пример:

1° Из

$$\lambda_n \sim n^k, \quad k > 0, \quad n \to \infty,$$

следи да је

$$\delta(x) \sim \sqrt[k]{x}, \quad x \to \infty,$$

јер је

$$\psi(x) = x^k \quad \text{и} \quad \phi(x) = \sqrt[k]{x}.$$

2° Из

$$\lambda_n \sim n^p \, lg^q n, \quad p > 0, \quad n \to \infty,$$

следи

$$\delta(x) \sim p^{q/p} x^{1/p} \, lg^{-q/p}(x), \quad x \to \infty,$$

јер ако ставимо

$$\psi(x) = x^p \, lg^q x = y,$$

биће

$$x = \sqrt[k]{y \, lg^{-q}(x)} = \sqrt[k]{y \, lg^{-q} \{\sqrt{y \, lg^{-q}(x)}\}} =$$

$$= \left(\frac{p^q y}{(lg y - q \, lg \, lg \, x)^q}\right)^{1/p} \sim$$

$$\sim p^{q/p} y^{1/p} \, lg^{-q/p}(y), \quad y \to \infty.$$

3° Нека је p_n n-ти прост број, тј.

$$p_1 = 1, \; p_2 = 2, \; p_3 = 3, \; p_4 = 5, \; p_5 = 7, \; p_6 = 11,$$

$$p_7 = 13, \; p_8 = 17, \; p_9 = 19, \; \ldots..,$$

и $\pi(x)$ његова бројна функција, дакле

$$\pi(x) = \textit{броју простих бројева} \leqslant x.$$

Основни став Hadamard-а {1, 217} и de la Vallée-Poussin-а {1, 251} о распореду простих бројева казује да је

$$\pi(x) \sim x/\lg x, \quad x \to \infty. \tag{20}$$

Према томе се на основу претходног примера ($p = 1$, $q = -1$), n-ти прост број понаша као $n \, lg n$, тј.

$$p_n \sim n \, lg n, \quad n \to \infty. \tag{21}$$

1. 2. (*i*) Применом бројне функције $\delta(x)$ низа λ_n можемо лако изразе облика (1), тј. збир

$$S(x)=\sum_{\lambda_\nu\leqslant x}F(x,\lambda_\nu)$$

изразити Stieltjes-овим интегралом. Овај се интеграл може, кад год постоји $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, парциалном интеграцијом увек свести на обичне интеграле, са којима је често лакше оперисати. Према томе, у таквим случајевима можемо лакше испитати особине оваквих збирова.

Нека је λ_n низ који не опада и тежи бесконачности са n, $\delta(x)$ његова бројна функција и функција $F(x,y)$ непрекидна по y у размаку $(0,\infty)$. Тада је (види тачку В 2. 5)

$$S(x)=\sum_{\lambda_\nu\leqslant x}F(x,\lambda_\nu)=\int_a^x F(x,t)\,d\,\delta(t). \tag{22}$$

Заиста, како је функција $\delta(x)$ степенаста, то је овај интеграл једнак збиру чланова облика

$$F(x,\lambda_\nu)\{\delta(\lambda_\nu+0)-\delta(\lambda_\nu-0)\},$$

који треба узети преко свих тачака дисконтинуитета λ_ν функције $\delta(x)$, који нису већи од x. Међутим, дужина скока функције $\delta(x)$ у овим тачкама износи 1, или онолико јединица колико у низу λ_ν има међусобно једнаких чланова, па ће овај интеграл садржати тачно све оне чланове који се јављају и у збиру $\sum\limits_{\lambda_\nu\leqslant x}$, тј. у збиру (22), чиме је овај образац доказан.

(*ii*) Претпоставимо прво да функција $F(x,y)$ не зависи од x, тј. да је она облика $f(y)$; тада образац (21) постаје

$$\sum_{\lambda_\nu\leqslant x}f(\lambda_\nu)=\int_0^x f(t)\,d\delta(t). \tag{23}$$

Ако функција $f(t)$ има непрекидан, или општије, R-интеграбилан извод, парциалном интеграцијом интеграла (23) добивамо

$$\int_0^x f(t)\,d\delta(t)=f(x)\,\delta(x)-f(0)\,\delta(0)-\int_0^x f'(t)\,\delta(t)\,dt.$$

Како је $\delta(0)=0$, јер је према претпоставци $\lambda_1>0$, то је, дакле, на основу обрасца (22)

$$\sum_{\lambda_\nu \leqslant x} f(\lambda_\nu)=f(x)\,\delta(x)-\int_0^x f'(t)\,\delta(t)\,dt.$$

Ово је т. зв. Franel-ов {1} образац. Како се на основу овог обрасца дискретан збир, тј. ред, може изразити непрекидним збиром, тј. интегралом, то нам он може послужити за испитивање како конвергенције, тако и асимптотског понашања збирова облика $\Sigma f(\lambda_\nu)$, за што ћемо навести неколико примера.

(*iii*) Уочимо прво случај кад је низ λ_n низ природних бројева, тј. кад је

$$\lambda_n=n,\quad n=1,2,3,\ldots;$$

тада је $\delta(x)=[x]$ и Franel-ов образац, тј. образац (24), узима облик

$$\sum_{1\leqslant\nu\leqslant x} f(\nu)=[x]f(x)-\int_0^x f'(t)[t]\,dt.$$

Ако у овом обрасцу ставимо, на пример, да је

$$f(x)=\begin{cases} 1/e & \text{за } 0\leqslant x\leqslant e,\\ 1/x\,lg\,x & \text{„ } e\leqslant x,\end{cases}$$

добивамо да је

$$\frac{2}{e}+\sum_{3\leqslant\nu\leqslant x}\frac{1}{\nu\,lg\,\nu}=\frac{[x]}{x\,lg\,x}+\int_e^x\left\{1+\frac{1}{lg\,t}\right\}\frac{1}{t^2\,lg\,t}\,dt. \tag{25}$$

Из обрасца (25) можемо добити не само

$$L(x)=\sum_{3\leqslant\nu\leqslant x}\frac{1}{\nu\,lg\,\nu}\sim lg\,lg\,x \quad \text{кад} \quad x\to\infty,$$

већ и да је

$$L(x)=\sum_{3\leqslant\nu\leqslant x}\frac{1}{\nu\,lg\,\nu}=lg\,lg\,x+C+O(1/x\,lg\,x),\ x\to\infty,$$

са

$$C=1-\frac{2}{e}-\int_e^\infty\left\{1+\frac{1}{lg\,t}\right\}\frac{t-[t]}{t^2\,lg\,t}\,dt,$$

тј. да $L(x) - \lg \lg x$ тежи одређеној константи и то брзином

$$\frac{1}{x \lg x}.$$

Ово увиђамо ако десну страну обрасца (23) трансформишемо овако

$$L(x) = -\frac{2}{e} + \int_e^x \left\{1 + \frac{1}{\lg t}\right\} \frac{dt}{t \lg t} - \int_e^x \left\{1 + \frac{1}{\lg t}\right\} \frac{t-[t]}{t^2 \lg t} dt + \frac{[x]}{x \lg x} =$$

$$= \lg \lg x + C + \int_x^\infty \left\{1 + \frac{1}{\lg t}\right\} \frac{t-[t]}{t^2 \lg t} dt - \frac{x-[x]}{x \lg x}$$

и приметимо да је

$$0 \leqslant x - [x] < 1, \quad \text{за свако} \quad x,$$

тј. да се последња два члана горњег обрасца понашају као $1/x \lg x$ за велике вредности од x.

(iv) Посматрајмо још случај кад је низ λ_n једнак низу простих бројева p_n; образац (24) тада постаје

$$\sum_{p_\nu \leqslant x} f(p_\nu) = \pi(x) f(x) - \int_{1-\varepsilon}^x f'(t) \pi(t)\, dt, \tag{26}$$

где за доњу интеграциону границу можемо узети $1-\varepsilon$, јер је $\pi(x) = 0$ за $0 \leqslant x < 1$.

Ако у обрасцу (26) ставимо

$$f(x) = 1/x,$$

он постаје

$$\sum_{p_\nu \leqslant x} 1/p_\nu = \frac{\pi(x)}{x^2} + \int_1^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt. \tag{27}$$

Како из асимптотске релације (20), тј. из

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\lg x}, \quad x \to \infty,$$

следи да

$$\frac{\pi(x)}{x} \to 0,$$

и да је

$$\int^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt \sim \int^x \frac{dt}{t \lg t} = \lg \lg x \quad \text{кад} \quad x \to \infty,$$

то из (27) следи да је

$$\sum_{p_\nu \leqslant x} 1/p_\nu \sim lg\, lg\, x, \quad x \to \infty.$$

Ово значи да кад у хармониском реду

$$\Sigma\, 1/\nu$$

задржимо само оне чланове код којих је индекс ν прост број, добивени ред још увек дивергира и то као $lg\, lg\, x$, док је

$$\sum_{\nu \leqslant x} 1/\nu \sim lg\, x, \quad \text{а} \sum_{\nu \leqslant x} 1/\nu\, lg\, \nu \sim lg\, lg\, x, \quad x \to \infty,$$

Ово смо могли увидети и из асимптотске релације (21), из које, такође, непосредно следи да ред

$$\Sigma\, 1/p_\nu\, lg\, p_\nu$$

конвергира.

Да бисмо, међутим, могли показати да разлика

$$\sum_{p_\nu \leqslant x} 1/p_\nu - lg\, lg\, x$$

тежи одређеној граници кад $x \to \infty$, као што је то случај и код реда $\Sigma\, 1/\nu\, lg\, \nu$, морамо користити образац (27). Поред тога, за ово није више довољно познавање само асимптотске релације (20), већ нам је потребно и понашање разлике $\pi(x) - x/lg\, x$ за велико x. За ово нам је довољна асимптотска релација коју је дао de la Vallée Poussin {2} и која казује да постоји један број $\alpha > 0$ такав да је

$$\pi(x) = \frac{x}{lg\, x} + O\left(x e^{-\alpha \sqrt{lg\, x}}\right), \quad x \to \infty. \tag{28}$$

Заиста, из обрасца (27) добивамо

$$\sum_{p_\nu \leqslant x} 1/p_\nu = lg\, lg\, x + \int_e^x \left\{\pi(t) - \frac{t}{lg\, t}\right\} \frac{dt}{t^2} + \int_1^e \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \frac{\pi(x)}{x},$$

а како је, према (28),

$$\left|\pi(x) - \frac{x}{lg\, x}\right| < M x e^{-\alpha \sqrt{lg\, x}} \quad \text{за једно} \quad M > 0,$$

то интеграл

$$\int_e^x \left\{\pi(t) - \frac{t}{lg\, t}\right\} \frac{dt}{t^2}$$

апсолутно конвергира кад $x \to \infty$, јер је, за произвољно $y > x > e$,

$$\left| \int_x^y \left\{ \pi(t) - \frac{t}{lg t} \right\} \frac{dt}{t^2} \right| \leqslant M \int_x^y e^{-\alpha \sqrt{lg t}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\alpha} \left\{ e^{-\alpha \sqrt{lg x}} - e^{-\alpha \sqrt{lg y}} \right\}.$$

Према томе

$$\sum_{p_\nu \leqslant x} 1/p_\nu - lg\, lg x \to \frac{3}{2} - \frac{2}{e} + \int_e^\infty \left\{ \pi(t) - \frac{t}{lg t} \right\} \frac{dt}{t^2}, \quad x \to \infty.$$

(v) Напоменимо, најзад, да Hadamard-De la Vallée Poussin-ов став о распореду простих бројева, тј. асимптотска релација (20), није изведена непосредно за функцију $\pi(x)$, већ посредно преко функције

$$\vartheta(x) = \sum_{p_\nu \leqslant x} lg\, p_\nu.$$

Ови су аутори у ствари доказали *да се функција* $\vartheta(x)$ *асимптотски понаша као* x, *тј. да је*

$$\vartheta(x) \sim x, \quad x \to \infty. \tag{29}$$

Да су релације (20) и (29) заиста еквивалентне, што је доказао још Sylvester $\{1\}$, можемо увидети ако у обрасцу (23) ставимо

$$\lambda_\nu = p_\nu, \quad \delta(x) = \pi(x)$$

и

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ lg x & \text{за} \quad 1 \leqslant x.. \end{cases}$$

Овим добивамо везу између функција $\pi(x)$ и $\vartheta(x)$ која гласи

$$\sum_{p_\nu \leqslant x} lg\, p_\nu = \vartheta(x) = \int_1^x lg t \, d\pi(t). \tag{30}$$

Парциалном интеграцијом добивамо из обрасца (30) да је

$$\vartheta(x) = \pi(x)\, lg x - \int_1^x \pi(t) \frac{dt}{t},$$

а из ове везе лако видимо да асимптотска релација (29) следи из релације (20). Да бисмо обратно показали да из (29) следи (20), изразимо $\pi(x)$ из обрасца (30) помоћу $\vartheta(x)$. Чисто формалним рачуном, као што смо то показали у тачки В. 4. 4., добивамо

$$d\vartheta(x) = lg\,x\,d\,\pi(x),$$

а отуда

$$\pi(x) - \pi(e) = \int_e^x \frac{d\vartheta(t)}{lg\,t},$$

или парциалном интеграцијом

$$\pi(x) - \pi(e) = \frac{\vartheta(x)}{lg\,x} - \vartheta(e) + \int_e^x \frac{\vartheta(t)}{t\,lg\,t}\,dt.$$

Из ових образаца је јасно да из (29) следи (20).

1. 3. (i) Често је лакше, при испитивању граничних вредности збирова, ове изразити Stieltjes-овим интегралом и непосредно испитати његову граничну вредност, примењујући доле наведени став 3.

Нека је

$$\alpha_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

низ функција које су ограничене варијације у размаку (a, b); образујмо у односу на ове функције низ Stieltjes-ових интеграла

$$J_n = \int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x).$$

У случају да су све функције низа $\alpha_n(x)$ монотоне, тада за граничну вредност низа интеграла J_n важи овај једноставан [24]:

Став 3. *Нека је функција* $f(x)$ *нейрекидна у размаку* (a, b); *ако све функције низа*

$$\alpha_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

не оūају у ūоме размаку, ūада из конверīенције низа $\alpha_n(x)$ *следи конверīенција низа инūеграла*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x),$$

ūј. из

$$\alpha_n(x) \to \alpha(x), \quad n \to \infty, \quad \text{за све} \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{31}$$

следи

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)\,d\{\lim_{n=\infty}\alpha_n(x)\} = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x). \quad (32)$$

Доказ. Гранична функција $\alpha(x)$ такође не опада, јер из

$$\alpha_n(x)\leqslant\alpha_n(y) \quad \text{за} \quad a\leqslant x<y\leqslant b,$$

следи, према (31),

$$\lim_{n=\infty}\alpha_n(x)\leqslant\lim_{n=\infty}\alpha_n(y) \quad \text{за} \quad x<y,$$

тј.

$$\alpha(x)\leqslant\alpha(y), \quad \text{за} \quad x<y;$$

према томе интеграл $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ има смисла.

Уочимо сад произвољну поделу $\{x_\nu\}$ размака (a, b) у m подразмака и ставимо

$$g(x, y) = \min_{x\leqslant t\leqslant y}\{f(t)\}, \quad G(x, y) = \max_{x\leqslant t\leqslant y}\{f(t)\};$$

тада је

$$\sum_{\nu=1}^{m} g(x_{\nu-1}, x_\nu)\{\alpha_n(x_\nu)-\alpha_n(x_{\nu-1})\}\leqslant\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{m} G(x_{\nu-1}, x_\nu)\{\alpha_n(x_\nu)-\alpha_n(x_{\nu-1})\}.$$

Ако у овој неједначини пустимо најпре да $n\to\infty$, добивамо, према (31),

$$\sum_{\nu=1}^{m} g(x_{\nu-1}, x_\nu)\{\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})\}\leqslant\liminf_{n=\infty}\int_a^b f(x)\,d\alpha_n(x)\leqslant$$

$$\leqslant\limsup_{n=\infty}\int_a^b f(x)\alpha_n(x)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{m} G(x_{\nu-1}, x_\nu)\{\alpha(x_\nu)-\alpha(x_{\nu-1})\}.$$

Ако затим пустимо да

$$\delta_m = \underset{1 \leqslant \nu \leqslant m}{\mathrm{Max}} (x_\nu - x_{\nu-1}) \to 0,$$

леви и десни члан ове неједначине теже интегралу функције $f(x)$ у односу на функцију $\alpha(x)$; према томе мора бити

$$\liminf_{n=\infty} \int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x) = \limsup_{n=\infty} \int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

тј.

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x) \to \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

чиме је горњи став доказан.

(*ii*) Напоменимо да можемо претпоставку о непрекидности функције $f(x)$ заменити општијом, наиме да $f(x)$ буде интеграбилна у односу на све функције $\alpha_n(x)$ и граничну функцију $\alpha(x)$, као што то лако видимо из горњег доказа.

1. 4. (*i*) Да бисмо дали неке примене горњег става, уочимо низ бројева који не опада

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots\ldots\ldots \leqslant \lambda_n \to \infty, \quad n \to \infty,$$

и образујмо збир

$$S\lambda = \frac{1}{\delta(\lambda)} \sum_{\lambda_\nu \leqslant \lambda} f\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda}\right),$$

где је $\delta(x)$ бројна функција низа λ_ν, а $f(x)$ непрекидна функција у размаку $(0,1)$; јасно је да се сви бројеви

$$\frac{\lambda_\nu}{\lambda}, \quad \text{за} \quad \lambda_\nu \leqslant \lambda$$

налаза у томе размаку.

Кад λ тежи бесконачности, гранична вредност збира S_λ зависи од тога како низ λ_ν тежи бесконачности. На пример, кад је λ_ν низ природних бројева, тј. кад је

$$\lambda_n = n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

збир $S\lambda$ узима облик

$$S\lambda = \frac{1}{[\lambda]} \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant \lambda} f\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right), \quad \text{за} \quad \lambda = n,$$

а у овом случају је јасно, на основу дефиниције одређеног интеграла, да

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Да бисмо одредили граничну вредност збира $S\lambda$ и у општем случају, изразимо овај збир, слично обрасцу (23), у облику Stieltjes-ова интеграла

$$S\lambda = \frac{1}{\delta(\lambda)}\sum_{\lambda_\nu \leqslant \lambda} f\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda}\right) = \frac{1}{\delta(\lambda)}\int_0^\lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) d\,\delta(x),$$

и у овом интегралу извршимо смену

$$x = \lambda t;$$

тада збир $S\lambda$ можемо написати у облику

$$S\lambda = \frac{1}{\delta(\lambda)}\sum_{\lambda_\nu \leqslant \lambda} f\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda}\right) = \int_0^1 f(t)\,d\left(\frac{\delta(\lambda t)}{\delta(\lambda)}\right) = \int_0^1 f(t)\,d\alpha_\lambda(t),$$

где смо ставили

$$\alpha_\lambda(t) = \delta(\lambda t)/\delta(\lambda).$$

Функције α_λ су монотоне за свако $\lambda > 0$, па ће, према томе, на основу става 3, гранична вредност

$$\lim_{\lambda=\infty} S_\lambda$$

постојати кадгод

$$\alpha_\lambda(t) \to \alpha(t), \quad \lambda \to \infty;$$

отуда добивамо овај резултат:

Став 4. *Нека је*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots\ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n \to \infty, \quad n \to \infty,$$

и нека је $\delta(x)$ *бројна функција овог низа; тада из*

$$\frac{\delta(\lambda t)}{\delta(\lambda)} \to \alpha(t) \quad \text{за свако} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \text{кад} \quad \lambda \to \infty,$$

следи

$$\frac{1}{\delta(\lambda)}\sum_{\lambda_\nu \leqslant \lambda} f\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda}\right) \to \int_0^1 f(t)\,d\alpha(t), \quad \lambda \to \infty,$$

за сваку у размаку $(0, 1)$ *непрекидну функцију* $f(x)$.

(ii) На пример, ако је

$$\lambda_n \sim n^p\, lg^q(n), \quad n \to \infty,$$

на основу става 2 тачке 1. 1. (vii) и примера 2° тачке 1. 1. (ix) биће

$$\delta(x) \sim p^{q/p} x^{1/p} lg^{-q/p}(x), \quad x \to \infty;$$

према томе

$$\frac{\delta(\lambda t)}{\delta(\lambda)} \to t^{1/p} \quad \text{за} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \text{кад} \quad \lambda \to \infty,$$

тако да из

$$\lambda_n \sim n^p \, lg^q \, n, \quad n \to \infty,$$

следи

$$\frac{1}{\delta(\lambda)} \sum_{\lambda_\nu \leqslant \lambda} f\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda}\right) \to \int_0^1 f(t) \, dt^{1/p}, \quad \lambda \to \infty.$$

(iii) Међутим, ако је, на пример,

$$\lambda_n = lg \, n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

тада је

$$\delta(x) = [e^x],$$

и

$$\frac{\delta(\lambda t)}{\delta(\lambda)} \to \begin{cases} 0 & \text{за} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{за} \quad t = 1 \end{cases} = [t].$$

Како је

$$\int_0^1 f(t) \, d[t] = f(1),$$

то ће, дакле, у овом случају

$$\frac{1}{\delta(\lambda)} \sum_{\lambda_\nu \leqslant \lambda} f\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda}\right) \to f(1) \quad \text{кад} \quad \lambda \to \infty,$$

односно, ако пустимо да λ тежи бесконачности преко низа бројева $lg \, n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, тј. ако ставимо $\lambda = lg \, n$, добивамо да ће

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{lg \, \nu}{lg \, n}\right) \to f(1) \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

1. 5. (i) Да бисмо показали још неке примене става 3, наведимо овде неке друге специалне случајеве овог става, код којих је структура низа функција $\lambda_n(x)$ потпуно различита од структуре оног низа функција који смо посматрали у претходној тачки.

Нека је $s(x)$ непрекидна функција која у размаку $(0, 1)$ монотоно расте од нуле до јединице, тј.

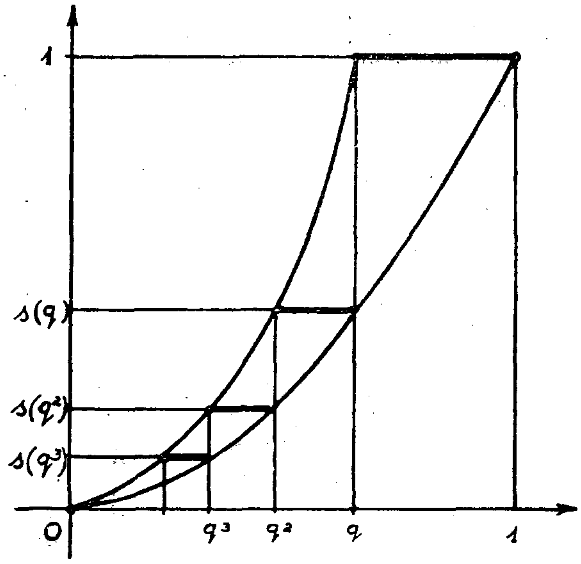
$$s(0) = 0, \quad s(1) = 1,$$

и нека је

$$0<q<1.$$

Означимо са $\alpha_q(x)$ степенасту и монотону функцију дефинисану у размаку $(0,1)$ као што је то претстављено сликом 13, тј. функцију која у тачкама $x=q^\nu$ има скокове дужине

$$\alpha_q(q^\nu+0)-\alpha_q(q^\nu-0)=s(q^{\nu-1})-s(q^\nu),\ \nu=1,2,\ldots.$$



Сл 13.

Тада је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\{s(q^{\nu-1})-s(q^\nu)\}f(q^\nu)=\int_0^1 f(x)\,d\alpha_q(x),$$

за сваку у размаку $(0,1)$ непрекидну функцију $f(x)$.

Како је (в. сл. 13),

$$s(x)\leqslant\alpha_q(x)\leqslant\begin{cases}s(x/q) & \text{за } 0\leqslant x\leqslant q\\ 1 & \text{за } q\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

то

$$\alpha_q(x)\to s(x)\ \text{кад}\ q\to1,\ \text{за свако}\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Према томе, на основу става 3,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\{s(q^{\nu-1})-s(q^\nu)\}f(q^\nu)\to\int_0^1 f(x)\,ds(x)\ \text{кад}\ q\to1. \tag{33}$$

(ii) Уочимо специалан случај кад је

$$s(x)=x.$$

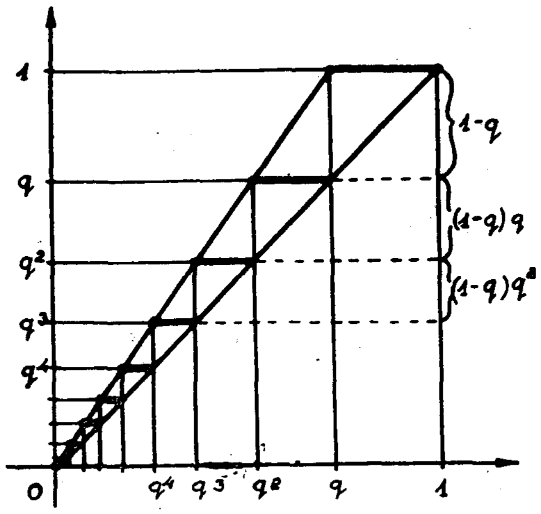
Тада се функција $\alpha_q(x)$ своди на функцију чији је диаграм дат сликом 14, а образац (33) постаје

$$(1-q)\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu-1} f(q^{\nu})=\int_0^1 f(x)\,d\alpha_q(x)\to\int_0^1 f(x)\,dx,\quad q\to 1. \quad (34)$$

Приметимо да се овај образац може добити и из дефиниције одређеног интеграла ако за тачке поделе $\{x_\nu\}$ размака $(0,1)$ узмемо чланове геометриске прогресије q^ν, $\nu=0, 1, 2, \ldots$.

Примера ради ставимо

$$f(x)=x\,lg^k(1/x) \quad \text{и} \quad q^2=r;$$



Сл. 14.

образац (34) тада постаје

$$(1-q)\,lg^k(1/q)\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^k r^\nu\to\int_0^1 x\,lg^k(1/x)\,dx \quad \text{кад} \quad q^2=r\to 1.$$

Обзиром да је [31, (iv)]

$$\int_0^1 x\,lg^k(1/x)\,dx=\int_0^\infty e^{-2t}t^k\,dt=\frac{k!}{2^{k+1}},$$

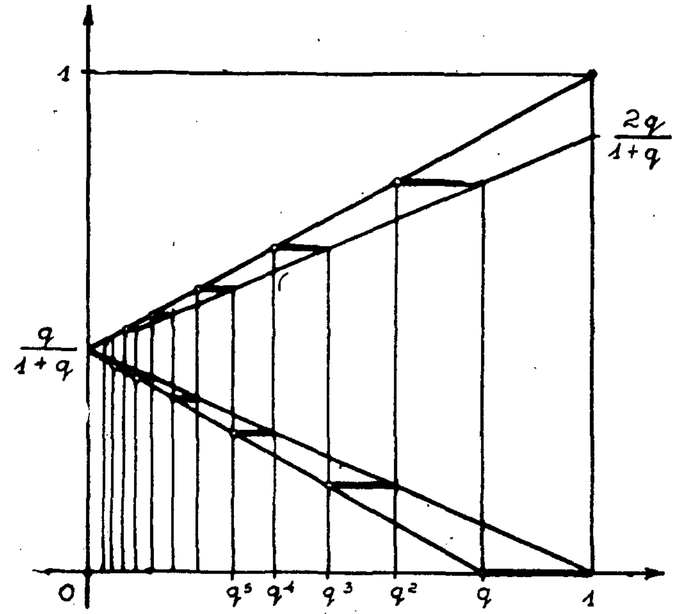
и да се

$$(1-q)\,lg^k\left(\frac{1}{q}\right)\sim\frac{(1-r)^{k+1}}{2^{k+1}}\quad \text{кад}\quad q^2=r\to 1,$$

то се горњи образац своди на

$$(1-r)^{k+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^k r^\nu\to k!\quad \text{кад}\quad r\to 1.$$

(iii) Нека је $0<q<1$, и нека је функција $\beta_q(x)$ степенаста функција чији је диаграм дат сликом 15, тј.



Сл. 15.

$$\beta_q(0)=\frac{q}{1+q},\quad \beta_q(1)=1,$$

и

$$\beta_q(q^\nu+0)-\beta_q(q^\nu-0)=(-1)^\nu q^\nu,$$

за свако $\nu=0,1,2,\ldots\ldots$ Ова функција је ограничене варијације у размаку $(0,1)$ за свако $q<1$, јер је

$$W_0^1\{\beta_q(x)\}=\sum_{\nu=0}^{\infty}q^\nu=\frac{1}{1-q}.$$

Према томе је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu} q^{\nu} f(q^{\nu}) = \int_{0}^{1} f(x)\, d\beta_q(x), \tag{35}$$

за сваку у размаку $(0, 1)$ непрекидну функцију $f(x)$.

Како функција $\beta_q(x)$ није монотона, то на образац (35), кад у њему пустимо да $q \to 1$, не можемо непосредно применити став 3. Међутим, неодређени интеграл функције $\beta_q(x)$ не опада, јер је ова функција позитивна у размаку $(0, 1)$; да бисмо, према томе, могли применити став 3, потребно је да претходно интеграл (35) делимично интегришемо. Зато ћемо претпоставити да функција $f(x)$ има свој први извод у размаку $(0, 1)$, јер се тада, делимичном интеграцијом леве стране обрасца (35), овај своди на

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\nu} q^{\nu} f(q^{\nu}) &= f(1) - \frac{q}{1+q} f(0) - \int_{0}^{1} f'(x)\beta_q(x)\,dx = \\ &= f(1) - \frac{q}{1+q} f(0) - \int_{0}^{1} f'(x)\, d\gamma_q(x),\end{aligned} \tag{36}$$

где смо ставили

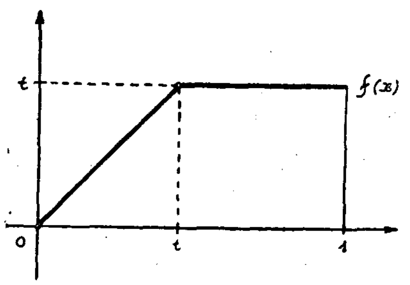
$$\gamma_q(x) = \int_{0}^{x} \beta_q(t)\,dt.$$

Да бисмо одредили $\gamma_q(x)$, ставимо у овом обрасцу (в. сл. 16 и 17)

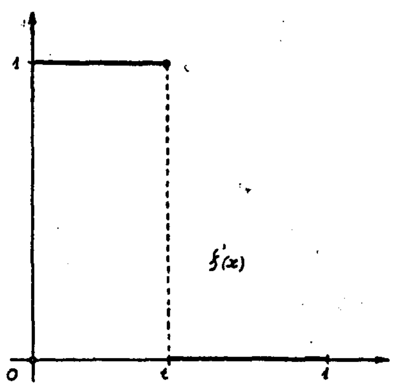
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t & \text{за} \quad t \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

како је тада

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ 0 & \text{за} \quad t < x \leqslant 1, \end{cases}$$



Сл. 16



Сл. 17

то из обрасца (36) добивамо да је

$$\gamma_q(t) = \int_0^t \beta_q(x)\,dx = t - \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu q^\nu f(q^\nu) =$$

$$= t - \sum_{q^\nu < t} (-1)^\nu q^{2\nu} - t \sum_{q^\nu \geqslant t} (-1)^\nu q^\nu =$$

$$= t - \frac{(-1)^n q^{2n}}{1+q^2} - \frac{1-(-1)^n q^n}{1+q} t =$$

$$= \frac{q}{1+q} t - (-1)^n q^n \left\{\frac{q^n}{1+q^2} - \frac{t}{1+q}\right\}, \quad (37)$$

где је цео број n одређен неједначинама

$$q^n < t \leqslant q^{n-1}, \quad \text{тј.} \quad n = \left[\frac{lg\, t}{lg\, q}\right] + 1.$$

Како из ових неједначина следи да је

$$qt \leqslant q^n < t,$$

то је

$$-\frac{(1-q)}{(1+q)(1+q^2)} \leqslant \left\{\frac{q^n}{1+q^2} - \frac{t}{1+q}\right\} < \frac{q(1-q)}{(1+q)(1+q^2)}.$$

Према томе

$$(-1)^n q^n \left\{\frac{q^n}{1+q^2} - \frac{t}{1+q}\right\} \to 0 \quad \text{кад} \quad q \to 1,$$

тако да ће, према (37),

$$\gamma_q(t) \to t/2 \quad \text{кад} \quad q \to 1.$$

Како за свако q између нуле и један, функција $\gamma_q(t)$ не опада, јер је $\beta_q(x) \geqslant 0$, то можемо на интеграл (36) применити став 3, тако да

$$\int_0^1 f'(x)\, d\gamma_q(x) \to \int_0^1 f'(x)\, d\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\{f(1) - f(0)\} \quad \text{кад} \quad q \to 1.$$

Ако, дакле, у обрасцу (36) пустимо да $q \to 1$, то добивамо коначно

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} q^{\nu} f(q^{\nu}) = f(1) - \frac{q}{1+q} f(0) - \int_0^1 f'(t)\, d\gamma_q(t) \to$$

$$\to f(1) - \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)\, dt =$$

$$\to \frac{1}{2} f(1) \quad \text{кад} \quad q \to 1.$$

Како је први члан горњег збира једнак $f(1)$, то добивени резултат можемо написати и у облику

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} q^{\nu-1} f(q^{\nu}) \to \frac{1}{2} f(1) \quad \text{кад} \quad q \to 1-0.$$

Напоменимо да смо овај образац извели под претпоставком да постоји први извод функције $f(x)$ у целом размаку $(0, 1)$, али је у ствари довољно претпоставити егзистенцију овог извода само у тачки $x = 1$.

(iv) Ближе о ставовима обрађеним у овој глави, као и њихове примене у разним гранама анализе може читалац наћи код Pólya-Szegö {1, т. I, стр. 34-46 и 67-77} и Карамата {1, 2}.

II. Примена у теорији редова

2. 1. (i) Из Franel-ова обрасца и његових примена (в. 1. 2.) се види да

$$\text{ред} \sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) \quad \text{и интеграл} \quad \int_0^x f(t)\, dt$$

стоје у уској вези, нарочито ако функција $f(x)$ има правилан ток. Тако су још Maclaurin {1, стр. 289} и Cauchy {2, стр. 221} показали да су ова два израза еквиконвергентна ако функција $f(x)$ не опада, тј. доказали

Став 1. *Ако је функција* $f(x)$ *позитивна и монотоно опада у размаку* $(0,\infty)$, *тада су ред*

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) \quad \text{за} \quad n\to\infty, \tag{1}$$

и интеграл

$$\int_{1}^{x} f(t)\,dt \quad \text{за} \quad x\to\infty, \tag{2}$$

еквиконвергентни, тј. они су истовремено конвергентни или дивергентни, или из конвергенција реда следи конвергенција интеграла и обратно.

Овај став се доказује веома лако непосредним посматрањем диаграма функције $f(x)$ и упоређивањем површина

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu)\cdot 1 \quad \text{и} \quad \int_{0}^{x} f(t)\,dt.$$

Како је, међутим, на основу Franel-ова обрасца

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \int_{0}^{x} f(t)\,d[t],$$

то став 1 можемо извести и из става 5 тачке B. 3. 5. (i), који ћемо овде формулисати у облику леме, јер ће нам он и у целом доцнијем излагању у овој глави бити потребан.

Лема. *Ако је функција* $f(x)$ *позитивна и не расте у размаку* (a, b), *и ако је она интеграбилна у односу на функције* $\alpha(x)$, $\lambda(x)$ *и* $\Lambda(x)$, *тада из*

$$\lambda(x)\leqslant\alpha(x)\leqslant\Lambda(x) \quad \text{за} \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

следи

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(x)\,d\lambda(x) - f(a)\{\alpha(a)-\lambda(a)\}\leqslant\int_{a}^{b} f(x)\,d\alpha(x)\leqslant\\ \leqslant\int_{a}^{b} f(x)\,d\Lambda(x)+f(a)\{\Lambda(a)-\alpha(a)\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Ако у неједначинама (3) ставимо

$$a=0,\ b=x,\ \alpha(x)=[x],$$

$$\lambda(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1\leqslant x,\end{cases}$$

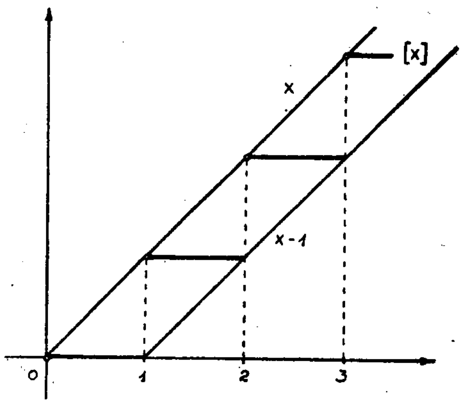
и

$$\Lambda(x)=x,$$

тада (в. сл. 18), из

$$x-1<[x]\leqslant x,\ \text{ за }\ x\geqslant 1,$$

следи, на основу горње леме, да је



Сл. 18

$$\int_1^x f(t)\,dt\leqslant\int_0^x f(t)\,d[t]\leqslant\int_0^x f(t)\,dt,$$

тј.

$$\int_1^x f(t)dt\leqslant\sum_{1\leqslant\nu\leqslant x} f(\nu)\leqslant\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt.$$

Како за функцију $f(x)$ можемо, без ограничења, узети да је

$$f(x)=f(1)\ \text{ кад је }\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

то је, дакле,

$$\sum_{1\leqslant\nu\leqslant x} f(\nu)=\theta f(1)+\int_1^x f(t)\,dt\quad \text{за}\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Из ове везе следи непосредно Cauchy-ев, тј. став 1, јер и ред и интеграл монотоно расту са n, односно са x.

(*ii*) Истим поступком можемо извести и један други Cauchy-ев {3, стр. 135} став, као и његово проширење које је дао Bugaieff {1}, а који гласе:

Став 2. *Ако низ* u_ν *монотоно опада, тада су редови*

$$\Sigma u_\nu \quad и \quad \Sigma 2^\nu u_{2^\nu}$$

еквиконвергентни.

Став 3. *Ако чланови оба реда*

$$\Sigma u_\nu \quad и \quad \Sigma \varphi'(\nu)\, u_{\varphi(\nu)}$$

монотоно опадају, ови ће редови бити еквиконвергентни, ако при томе функција $\varphi(x)$ *не опада, тежи бесконачности са* x *и узима целе вредности за целе вредности аргумента* x.

За $\varphi(x)=2^x$ овај последњи став се своди на Cauchy-ев став 2; према томе је довољно да докажемо само став 3.

У ту сврху ставимо

$$u_n = u(n),$$

и у интегралу

$$\int_0^x u(t)\, d[t] = \sum_{1\leqslant\nu\leqslant x} u(\nu)$$

извршимо смену

$$t=\varphi(\tau) \quad \text{и} \quad x=\varphi(y),$$

што даје

$$\sum_{1\leqslant\nu\leqslant x} u(\nu) = \int_1^x u(t)\, d[t] = \int_0^y u\{\varphi(\tau)\}\, d[\varphi(\tau)].$$

Ако приметимо да је

$$\varphi(\tau)-1<[\varphi(\tau)]\leqslant\varphi(\tau),$$

и ставимо, без ограничења,

$$\varphi(0)=0 \quad \text{и} \quad \varphi(1)=1,$$

тада је, на основу напред наведене леме,

$$\int_1^y u\{\varphi(\tau)\}\,\varphi'(\tau)\,d\tau\leqslant\int_0^y u\{\varphi(\tau)\, d[\varphi(\tau)]\leqslant\int_0^y u\{\varphi(\tau)\}\,\varphi'(\tau)\,d\tau.$$

Према томе су

$$\text{ред } \Sigma u(\nu) \quad \text{и интеграл} \quad \int u\{\varphi(\tau)\}\,\varphi'(\tau)\,d\tau$$

еквиконвергентни, а како су према Cauchy-евом ставу 1

$$\text{интеграл} \quad \int u\{\varphi(\tau)\}\,\varphi'(\tau)\,d\tau \quad \text{и ред} \quad \Sigma u\{\varphi(\nu)\}\,\varphi'(\nu)$$

такође еквиконвергентни, то ће, дакле, и редови

$$\Sigma u(\nu) \quad \text{и} \quad \Sigma\varphi'(\nu)\, u\{\varphi(\nu)\}$$

бити еквиконвергентни.

(iii) Ставове ове врсте, који у неку руку кондензују чланове датога реда, дали су још и многи други аутори; тако је, на пример, Schlömilch {2} доказао став, сличан ставу 3, који гласи:

Ако низ целих бројева q_n *задовољава услове*

$$q_n < q_{n+1} \to \infty \quad \textit{кад} \quad n \to \infty,$$

$$q_{n+1} - q_n = O(q_n - q_{n+1}), \; n \to \infty,$$

и ако низ u_n *монотоно опада, тада су редови*

$$\Sigma(q_{n+1} - q_n) u_{q_n} \quad \textit{и} \quad \Sigma u_n$$

еквиконвергентни.

Исто тако је и Ermakoff {1} дао један став ове врсте, и то:

Нека је

$$u_n = u(n), \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где је функција $u(x)$ *дефинисана за све* $x \geqslant 0$ *и монотоно опада у размаку* $(0, \infty)$; *ред* Σu_n *ће бити конвергентан ако је*

$$e^x u(e^x) < \theta u(x) \quad \textit{са} \quad \theta < 1,$$

а дивергентан, ако је

$$e^x u(e^x) > \lambda u(x) \quad \textit{са} \quad \lambda > 1.$$

Сви се ови ставови могу доказати сличним поступком као и ставови 1—3.

2\. 2. (i) Због своје једноставности и могућности лаке примене Cauchy-ев став 1 дао је повода многим проширењима. Овде ћемо навести неколико од ових ставова и показаћемо да је код свих тих ставова битан Stieltjes-ов интеграл.

Прво такво проширење Cauchy-ева критериума дао је Bromwich {1}; да би претпоставку о монотонији функције $f(x)$ заменио општијим условима Bromwich је посматрао функцију облика

$$f(x) = g(x) e^{i\theta(x)} \tag{4}$$

и показао *да су*

$$\textit{ред } \Sigma g(\nu) e^{i\theta(\nu)} \quad \textit{и интеграл} \quad \int g(x) e^{i\theta(x)} dx$$

еквиконвергентни ако функције $g(x)$ *и* $\theta(x)$ *задовољавају још и ове услове:*

1° $g(x)$ *монотоно опада и* $\to 0$ *кад* $x \to \infty$,

2° $\theta(x)$ *монотоно расте и* $\to \infty$ *кад* $x \to \infty$, 3° $\theta'(x)$ *монотоно опада и* $\to 0$ *кад* $x \to \infty$,

4° *интеграл*

$$\int^{\infty} g(x)\theta'(x)\,dx \text{ постоји.}$$

(ii) Како Cauchy-ев, тако и Bromwich-ев став проширио је и допунио Hardy {2}:

Став 4. *Ако је извод функције* $f(x)$ *апсолутно интеграбилан у размаку* $(0, \infty)$, тј. ако

$$\int_0^x |f'(t)|\,dt \quad \text{остаје ограничен кад} \quad x \to \infty,$$

и ако

$$f(x) \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to \infty,$$

тада су не само

$$\text{ред} \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant x} f(\nu) \quad \text{и интеграл} \quad \int_0^x f(t)\,dt,$$

еквиконвергентни, већ и њихова разлика тежи одређеној граници, тј.

$$\int_0^x f(t)\,dt - \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant x} f(\nu) \to -\int_0^{\infty} (t-[t])f'(t)\,dt, \quad x \to \infty.$$

Сам облик овог става казује да се он добива као непосредна последица делимичне интеграције Stieltjes-ова интеграла, јер је

$$\int_0^x f(t)\,dt - \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant x} f(\nu) = \int_0^x f(t)\,d(t-[t]) =$$

$$= (x-[x])f(x) - \int_0^x (t-[t])\,df(t).$$

Из овог обрасца видимо да Hardy-ев став важи, шта више, и под нешто општијим претпоставкама. Довољно је, наиме, да функција $f(x)$ буде ограничене варијације у целом размаку $(0, \infty)$, тј. да буде

$$\int_0^x |df(t)| \leqslant M \quad \text{за свако} \quad x \geqslant 0, \tag{5}$$

а да се при томе, наравно, њени дисконтинуитети не поклапају са дисконтинуитетима функције $x-[x]$. Што се тиче услова да

$$f(x)\to 0 \quad \text{кад} \quad x\to\infty, \tag{6}$$

он је потребан само кад x непрекидно тежи бесконачности; ако, међутим, x тежи бесконачности само преко целих бројева, тада се услова (6) можемо ослободити, јер је

$$(x-[x])f(x)=0 \quad \text{за} \quad x=1,2,3,\ldots\ldots$$

(*iii*) Да бисмо увидели да је Bromwich-ев став само специалан случај Hardy-ева става, довољно је да покажемо да функција (4) задовољава услов (5) ако су испуњени услови 1^0-4^0.

Заиста из

$$d\{g(t)e^{i\theta(t)}\}=e^{i\theta(t)}dg(t)+ie^{i\theta(t)}g(t)\,d\theta(t),$$

и претпоставака 1^0-4^0 следи

$$\int_0^x |d\{g(t)e^{i\theta(t)}\}|\leqslant\int_0^x |e^{i\theta(t)}||dg(t)|+\int_0^x |ie^{i\theta(t)}g(t)||d\theta(t)| =$$

$$\leqslant\int_0^x |dg(t)|+\int_0^x |g(t)||d\theta(t)|=$$

$$\leqslant -\int_0^x dg(t)+\int_0^x g(t)\,\theta'(t)\,dt=$$

$$\leqslant g(0)-g(x)+\int_0^x g(t)\theta'(t)\,dt.$$

Што се тиче овог извођења, ваља напоменути да све ове операције (које важе за Stieltjes-ов интеграл ако су посматране функције реалне), важе и за комплексне функције реалне променљиве, јер их у том случају треба само применити на реалне и имагинарне делове ових функција.

2. 3. (*i*) Док се Bromwich-Hardy-ево уопштење Cauchy-ева става састоји у томе да се овај став прошири на што веће поље функција $f(x)$, дотле проширења, која ћемо навести у овој и наредној тачки, имају за циљ да у Cauchy-евом ставу низ природних бројева замене што општијим низом бројева. Такво једно проширење које је дао Littlewood {1} гласи:

Став 5. *Ако низ бројева* d_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, *задовољава услове*

$$0 \leqslant d_n \leqslant M, \quad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

$$D_0=0, \quad D_n=\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

и ако је функција $f(x)$ *позитивна и монотоно опада за* $x \geqslant 0$, *тада су*

$$\text{ред} \sum_{D_\nu \leqslant x} d_\nu f(D_\nu) \quad \text{и интеграл} \quad \int_0^x f(t)\,dt \tag{9}$$

еквиконвергентни.

Јасно је, да овај став садржи Cauchy-ев став 1 као специалан случај и то кад је

$$d_n=1, \quad \text{за свако} \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

тј. кад је

$$D_n=n \quad \text{за} \quad n=1,2,3,\ldots\ldots$$

(*ii*) Став 5 се, међутим, може непосредно проширити и у правцу Hardy-ева става не мењајући при томе ниуколико његов доказ. Довољно је зато да разлику између реда и интеграла (9) изразимо Stieltjes-овим интегралом, увођењем степенасте функције

$$d(x)=\sum_{D_\nu \leqslant x} d_\nu, \tag{10}$$

(в. сл. 19), тј. функције која је једнака D_n кад је

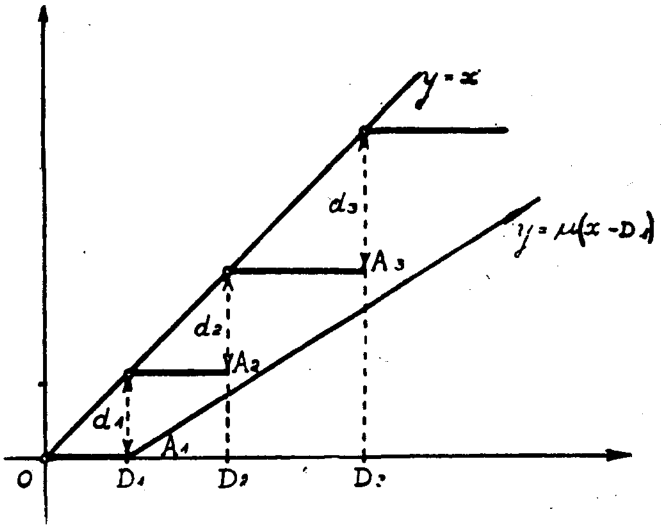
$$D_n \leqslant x < D_{n+1}.$$

Ову функцију можемо још изразити и у облику

$$d(x)=\varphi([\phi(x)])=D_{\delta(x)},$$

где смо са $\delta(x)$ означили непрекидну и монотону функцију која интерполише низ D_n, тј. ону за коју је $\varphi(n)=D_n$, $n=1,2,3,\ldots$, са $\phi(x)$ њену инверзну функцију, а са $\delta(x)$ бројну функцију низа D_n, тј. функцију

$$\delta(x)=[\phi(x)].$$



Сл. 19.

Како је за ову функцију

$$\sum_{D_\nu \leqslant x} d_\nu f(D_\nu) = \int_0^x f(t)\, d\{d(t)\},$$

то се разлика реда и интеграла (9) може написати у облику

$$\int_0^x f(t)\,dt - \sum_{D_\nu \leqslant x} d_\nu f(D_\nu) = \int_0^x f(t)\, d\{t - d(t)\},$$

а отуда парциалном интеграцијом добивамо за ову разлику

$$\int_0^x f(t)\,dt - \sum_{D_\nu \leqslant x} d_\nu f(D_\nu) = \{x - d(x)\} f(x) - \int_0^x \{t - d(t)\}\, df(t). \quad (11)$$

Како је, према (7) и (10),

$$0 \leqslant x - d(x) < d_n \leqslant M \quad \text{за} \quad D_{n-1} \leqslant x < D_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

то видимо да Littlewood-ов став важи под истим претпоставкама (5) и (6) за функцију $f(x)$, као и Hardy-ев став 4. Шта више, како први члан десне стране једначине (11) ишчезава кад је $x = D_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то и претпоставка (6) отпада ако пустимо да x тежи бесконачности преко ових вредности.

Овим добивамо став који обухвата све до сад наведене ставове ове врсте и који гласи

Став 6. *Ако низ бројева* d_n, $n=1,2,3,\ldots$, *задовољава услове*

$$0\leqslant d_n\leqslant M,\ n=1,2,3,\ldots,$$

$$D_0=0,\ D_n=\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu\to\infty,\ n\to\infty,$$

и ако варијација функције $f(x)$ *остаје ограничена у размаку* $(0,\infty)$, *тј. ако је*

$$\int_0^x |df(t)|=O(1),\ x\to\infty,$$

тада су

$$\text{ред}\ \sum_{D_\nu\leqslant x} d_\nu\, f(D_\nu)\quad \text{и интеграл}\ \int_0^x f(t)\,dt$$

еквиконвергентни; шта више,

$$\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu\, f(D_\nu)-\int_0^{D_n} f(t)\,dt\to\int_0^\infty \{t-d(t)\}\,df(t)\quad \text{кад}\quad n\to\infty.$$

Ако поред тога

$$f(x)\to 0\quad \text{кад}\quad x\to\infty,$$

тада и

$$\sum_{D_\nu\leqslant x} d_\nu\, f(D_\nu)-\int_0^x f(t)\,dt\to\int_0^\infty \{t-d(t)\}\,df(t)\quad \text{кад}\quad x\to\infty.$$

2. 4. (i) Denjoy {1} је проширио Littlewood-ов став 5 не претпостављајући више ограниченост низа d_n, тј. ослобађајући се услова (7). Овим је он добио став, нешто различитог облика, који гласи

Став 7. *Ако је*

$$d_n\geqslant 0,\ D_n=\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu\to\infty,\ n\to\infty,$$

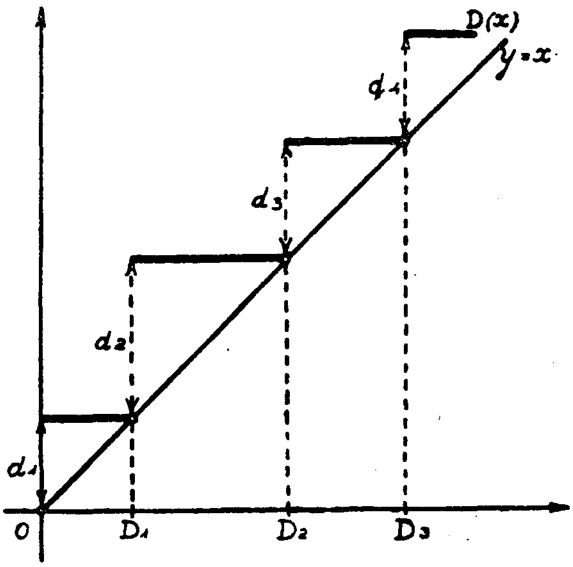
и ако функција $f(x)$ *монотоно опада, тада из конвергенције интеграла* $\int f(t)\,dt$ *следи конвергенција реда* $\Sigma\, d_\nu f(D_\nu)$, *а* *из дивергенције тога интеграла следи дивергенција реда* $\Sigma d_\nu f(D_{\nu-1})$.

Овај став је непосредна последица леме наведене у тачки 2. 1. (i). Ако, наиме, поред функције (10), тј. $d(x)$, уведемо и функцију

$$D(x) = \sum_{D_\nu \leqslant x} d_{\nu+1}$$

(в. сл. 20), тада је

$$d(x) \leqslant x \leqslant D(x).$$



Сл. 20

Према томе, ако у поменутој леми ставимо

$$\lambda(x) = d(x), \quad \Lambda(x) = D(x)$$

и

$$\alpha(x) = x,$$

тада се неједначина (3) своди на

$$\int_0^x f(t)\, d\{d(t)\} \leqslant \int_0^x f(t)\, dt \leqslant \int_0^x f(t)\, d\{D(t)\},$$

јер је

$$d(x)=D(x)=x=0 \quad \text{за} \quad x=0.$$

Како је

$$\int_0^x f(t)\, d\{d(t)\} = \sum_{D_\nu \leqslant x} d_\nu f(D_\nu)$$

и

$$\int_0^x f(t)\, d\{D(t)\} = \sum_{D_\nu \leqslant x} d_\nu f(D_{\nu-1}), \quad D_0=0,$$

то из ове неједначине и монотоније збирова и интеграла непосредно следи Denjoy-ов став 7.

(*ii*) Напоменимо да Littlewood-ов став 5 заиста не мора важити ако низ d_n не остаје ограничен, тј. да је у Denjoy-ову критериуму за дивергенцију битно да се D_ν замени са $D_{\nu-1}$. Јер, ако, на пример, ставимо

$$f(x)=\frac{1}{x\, lg x} \quad \text{за} \quad x \geqslant 2$$

и

$$D_n = e^{n^\alpha} \quad \text{за} \quad \alpha > 1,$$

тада интеграл

$$\int_2^x \frac{dt}{t\, lg\, t}$$

дивергира, док је

$$\sum_{\nu=2}^{n} d_\nu f(D_\nu) = \sum_{\nu=2}^{n} \frac{e^{\nu^\alpha} - e^{(\nu-1)^\alpha}}{e^{\nu^\alpha}\ \nu^\alpha} < \sum_{\nu=2}^{n} 1/\nu^\alpha,$$

а овај ред конвергира за $\alpha > 1$; међутим је ред

$$\sum_{\nu=2}^{n} d_\nu f(D_{\nu-1}) = \sum_{\nu=2}^{n} \frac{e^{\nu^\alpha} - e^{(\nu-1)^\alpha}}{e^{(\nu-1)^\alpha}\ (\nu-1)^\alpha} = \sum_{\nu=2}^{n} \frac{e^{\nu^\alpha-(\nu-1)^\alpha}-1}{(\nu-1)^\alpha} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{e^{(\nu+1)^\alpha - \nu^\alpha} - 1}{\nu^\alpha}$$

заиста дивергентан.

(iii) Из горњег примера се може наслутити да се у Denjoy-ову ставу за дивергенцију, ред $\Sigma d_\nu f(D_{\nu-1})$ не може заменити редом $\Sigma d_\nu f(D_\nu)$ само у случајевима кад низ D_n сувише брзо дивергира. Ово ограничење рашћења низа D_n постигнуто је претпоставком (7) Littlewood-ова става 5, тј. претпоставком да низ d_n буде ограничен, јер отуда следи да мора бити

$$D_n = O(n), \quad n \to \infty.$$

Овим је, међутим, рашћење низа D_n сувише ограничено, и заиста можемо показати да став 5 важи и у много општијем случају, и то кадгод количник D_{n+1}/D_n остаје ограничен, тј. за сваки низ D_n за који је

$$D_{n+1} = O(D_n), \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Да бисмо ово увидели приметимо да ће под претпоставком (12) увек постојати једно $\mu > 0$ такво да је

$$0 < \mu \leqslant D_{\nu-1}/D_\nu \quad \text{за свако} \quad \nu = 2, 3, 4, \ldots,$$

тако да ће се све тачке A_ν (в. сл. 19) налазити изнад праве

$$y = \mu(x - D_1).$$

Према томе је

$$d(x) \geqslant (x - D_1) \quad \text{за свако} \quad x > 0.$$

У овом случају можемо, дакле, у леми тачке 2.1.(i) ставити

$$\alpha(x) = d(x) \quad \text{и} \quad \lambda(x) = \mu(x - D_1),$$

тако да из првог дела неједначине (3) добивамо

$$\sum_{D_\nu \leqslant x} d_\nu f(D_\nu) = \int_0^x f(t)\, d\{d(t)\} \geqslant \mu \int_0^x f(t)\, dt - \mu D_1 f(0).$$

Из ове неједначине видимо да ће под претпоставком (12) из дивергенције интеграла

$$\int_0^x f(t)\, dt$$

следити и дивергенција реда

$$\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu f(D_\nu),$$

тако да се Denjoy-Littlewood-ов став може још допунити и ставом:

Став 8. *Ако низ бројева* d_n *задовољава услове*

$$d_n \geqslant 0, \; D_n = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu \to \infty, \; n \to \infty,$$

и ако је

$$D_{n+1} = O(D_n), \; n \to \infty,$$

шада су

$$\text{ред} \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu f(D_\nu) \quad \text{и интеграл} \quad \int_0^x f(t)\,dt$$

еквиконвергентни за сваку функцију $f(x)$ *која је позитивна и не опада у размаку* $(0, \infty)$.

2. 5. (i) На групу ставова 5—7 непосредно се надовезују још неки ставови Littlewood-а {1} и Denjoy-а {1} који се односе на конвергентне редове, а од којих ћемо навести само овај:

Став 9. *Нека је*

$$c_\nu \geqslant 0, \; \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

и нека је ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu = c$$

конвергентан. Ставимо

$$r_n = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и означимо са $g(x)$ *функцију која монотоно опада за* $0 < x \leqslant c$. *Ако*

$$g(x) \to \infty \quad \text{кад} \quad x \to +0,$$

шада из конвергенције интеграла

$$\int_x^c g(t)\,dt \quad \text{кад} \quad x \to +0,$$

следи конвергенција реда

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \; g(r_{\nu-1}),$$

а из дивергенције горњег интеграла следи дивергенција реда

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu g(r_\nu).$$

Применом Stieltjes-ова интеграла овај став се може допунити и проширити слично као и ставови 5—8. Међутим, сам доказ овог става добива се непосредно из очевидне неједначине

$$c_n g(r_{n-1}) \leqslant \int_{r_n}^{r_{n-1}} g(t)\, dt \leqslant c_n g(r_n).$$

(*ii*) Ставови 8 и 9 су још и утолико важни што спадају у ону групу Abel-ових {2, 3} ставова, т. зв. Abel-Dini-еви {1} ставови, из којих следи да *нема реда са позитивним члановима који најспорије конвергира, нити реда који најспорије дивергира.*

Овај став, као и став да *нема најбржег дивергентног нити најбржег конвергентног реда*, можемо непосредно показати ако код дивергентног реда Σd_ν, $d_n > 0$, посматрамо низ његових делимичних збирова $D_n = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu$, а код конвергентног реда Σc_ν, $c_n > 0$, посматрамо низ његових остатака $r_n = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu$.

Заиста, ма како брзо дивергирао ред Σd_ν, ред $\Sigma d'_\nu$ чији су делимични збирови низ бројева

$$(D_n)^2 = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu'$$

ће брже дивергирати, а ма како споро дивергирао ред Σd_ν, ред $\Sigma d_\nu''$ чији су делимични збирови низ бројева

$$\sqrt{D_n} = \sum_{\nu=n+1}^{n} d_\nu''$$

ће спорије дивергирати.

Исто тако, ма како брзо конвергирао ред Σc_ν, ред $\Sigma c_\nu'$, чији су остатци дати низом

$$(r_n)^2 = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu'$$

ће брже конвергирати, а ма како споро конвергирао ред Σc_ν, ред $\Sigma c_\nu''$ чији су остатци дати низом бројева

$$\sqrt{r_n} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu''$$

ће спорије конвергирати.

(iii) Ставови 8 и 9 дају само нешто једноставнију конструкцију општег члана реда који спорије дивергира, односно конвергира, од произвољно датог реда. Тако, на пример, ако ред Σd_ν споро дивергира, тј. ако

$$\sum_{\nu=1}^{n} d_\nu = D_n \to \infty \quad \text{и} \quad d_n \to 0, \ n \to \infty,$$

и ако у ставовима 5 или 8 ставимо

$$f(x) = 1/x, \ x \geqslant 1,$$

на основу дивергенције интеграла

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = lg x,$$

добивамо да ће и ред

$$\Sigma d_\nu / D_\nu$$

дивергирати, и то у сваком случају спорије од реда Σd_ν, јер

$$D_n \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

На сличан начин, ако у Denjoy-Littlewood-ову ставу 9 ставимо

$$g(x) = 1/x^s, \ 0 < x \leqslant 1,$$

како за $0 < s < 1$ интеграл

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^s}$$

конвергира кад $x \to 0$, то из конвергенције реда Σc_ν следи и конвергенција реда

$$\Sigma c_\nu / r^s{}_{\nu-1},$$

а овај последњи ред у сваком случају спорије конвергира од првог, јер

$$1/r^s{}_n \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

2. 6. (i) Покажимо, најзад, да ставови главе В. 5. који дају услове конвергенције несвојственог Stieltjes-ова интеграла садрже као специалне случајеве и многе ставове из теорије редова, и то нарочито оне који се добивају из Abel-ова обрасца за делимично сабирање. Тако је, на пример, група ставова Abel {1,2}-Dedekind {1}-Dirichlet {2,§101}-Du Bois-Reymond {1, стр. 10} само специалан случај става 2 тачке В. 5. 4. (i).

Поменуте ставове можемо формулисати у облику једног става и то:

Став 10. *Нека је*

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = O(1), \ n \to \infty, \tag{13}$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu - b_{\nu+1}| = O(1), \ n \to \infty; \tag{14}$$

тада ред

$$\Sigma a_\nu b_\nu \tag{15}$$

конвергира ако је још задовољен један од услова:

1° *Dedekind-ов став, ако низ*

$$A_n \quad \textit{конвергира кад} \quad n \to \infty;$$

2° *Du Bois-Reymond-ов став, ако*

$$b_n \to 0 \quad \textit{кад} \quad n \to \infty.$$

Abel-ов став је специалан случај Dedekind-ова става, а Dirichlet-ов став Du Bois-Reymond-ова става, ако се у њима услов (14) замени ужим условом, наиме да низ b_n буде монотон.

Да се овај став добива непосредно из поменутог става 2 видимо ако овај став применимо на случај $b=\infty$, и у њему ставимо

$$\alpha(x)=\sum_{\nu\leqslant x} a_\nu$$

и

$$f(x)=b_n \quad \text{кад је} \quad n-1+\theta\leqslant x<n+\theta,$$

где је θ произвољно и $0<\theta<1$.

У томе се случају Stieltjes-ов интеграл $\int f(t)\,d\alpha(t)$ своди на ред (15), тј.

$$\sum_{\nu\leqslant x} a_\nu b_\nu=\int_0^x f(t)\,d\alpha(t),$$

а услови (1) и (3) става 2 се своде на услов (13), односно (14), тако да се део б) става 2 своди на Dedekind-ов став 1°, а део а) на став Du Bois-Reymond-а 2°.

(ii) На исти начин можемо видети да поменути став 2 тачке В. 5. 4. (i) непосредно садржи и Jensen-ово {1, стр. 69} проширење става 8, наиме:

Из претпоставака става 10 следи не само конвергенција реда (15) *већ и конвергенција реда*

$$\Sigma a_\nu b_\nu^s \quad \textit{за свако} \quad s\geqslant 1.$$

Да бисмо ово увидели довољно је да став 2 применимо на функцију $\{f(x)\}^s$, место на горе дефинисану функцију $f(x)$, и да приметимо (в. тачку А. 4. 4. (iii)) да је функција $\{f(x)\}^s$ ограничене варијације за свако $s\geqslant 1$ ако је функција $f(x)$ ограничене варијације.

(iii) Став 2 садржи, међутим, још и многе друге ставове ове врсте. Илустрације ради, посматрајмо још случај у коме је функција $\alpha(x)$ облика

$$\alpha(x)=\varphi(x)\;A(x)$$

где је $A(x)$ степенаста функција

$$A(x)=\sum_{\nu\leqslant x} a_\nu,\; a_0=0,\; A(0)=0, \tag{16}$$

а $\varphi(x)$ позитивна функција и ограничене варијације за свако $x \geqslant 0$, иначе, за сад, још произвољна.

Ако још претпоставимо да је функција $f(x)$ ограничене варијације и S-интеграбилна у односу на ову функцију $\alpha(x)$ за свако $x \geqslant 0$, и да је $f(0)=0$, тада, пошто два пута парциално интегришемо, интеграл $\int f(t)\,d\alpha(t)$ постаје

$$J(x)=\int_0^x f(t)\,d\{\varphi(t)A(t)\}=$$

$$=f(x)\varphi(x)A(x)-\int_0^x \varphi(t)A(t)\,df(t)=$$

$$=f(x)\varphi(x)A(x)-A(x)\int_0^x \varphi(t)\,df(t)+\int_0^x\left\{\int_0^t \varphi(u)\,df(u)\right\}dA(t)=$$

$$=A(x)\left\{f(x)\varphi(x)-\int_0^x \varphi(t)\,df(t)\right\}+\sum_{\nu\leqslant x} a_\nu \int_0^\nu \varphi(t)\,df(t).$$

Ако у овом изразу ставимо

$$\int_0^x \varphi(t)\,df(t)=b(x),$$

и из ове везе одредимо функцију $f(x)$, тј.

$$\varphi(t)\,df(t)=db(t), \quad df(t)=d\,b(t)/\varphi(t),$$

дакле,

$$f(x)=\int_0^x \frac{d\,b(t)}{\varphi(t)}+C, \text{ где је } C \text{ произвољна константа,} \tag{17}$$

тада се $J(x)$ своди на

$$J(x)=\sum_{\nu\leqslant x} a_\nu b(\nu)-b(x)\sum_{\nu\leqslant x} a_\nu+\varphi(x)A(x)f(x), \tag{18}$$

где су функције $A(x)$ и $f(x)$ дате обрасцима (16) и (17).

Применом става 2 тачке B. 5. 4. (i), са $b=\infty$, на интеграл $\int f(t)\,d\alpha(t)$, тј. на израз (18), видимо да ће овај израз тежити одређеној граници кад $x\to\infty$, ако су при томе још задовољени услови

$$\alpha(x) = \varphi(x) A(x) = O(1), \quad x \to \infty, \tag{19}$$

$$\int_0^x |df(t)| = \int_0^x \left| \frac{d\,b(t)}{\varphi(t)} \right| = O(1), \quad x \to \infty, \tag{20}$$

и

$$f(x) \to 0, \quad x \to \infty. \tag{21}$$

Међутим, из услова (20) следи да интеграл (17) конвергира кад $x \to \infty$, јер је он, према (20), апсолутно конвергентан, а тада у (17) константу C можемо увек тако изабрати да буде

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{db(t)}{\varphi(t)}.$$

У том случају је услов (21) увек испуњен, а поред тога, према (19), последњи члан у (18), тј. израз $\varphi(x)\, A(x)\, f(x)$ тежи нули кад $x \to \infty$. Према томе се у овом случају, ако још функцију $\varphi(x)$ заменемо функцијом $1/\varphi(x)$, став 2 своди на

Став 11. *Нека је* $b(x)$ *ограничене варијације у сваком коначном размаку* $(0, x)$, $\varphi(x)$ *непрекидна и позитивна функција за свако* $x \geqslant 0$, *и нека је* a_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *дат низ бројева; ако су задовољени услови*

$$\sum_{\nu \leqslant x} a_\nu = O\{\varphi(x)\}, \quad x \to \infty,$$

и

$$\int_0^x \varphi(x) |db(t)| = O(1), \quad x \to \infty,$$

тада израз

$$K(x) = \sum_{\nu \leqslant x} a_\nu b(\nu) - b(x) \sum_{\nu \leqslant x} a_\nu$$

тежи коначној и одређеној граници кад $x \to \infty$.

Један специалан случај овога става, који допуњује Hardy-ев став 4, добивамо ако у њему ставимо

$$a_\nu = e^{\lambda \nu}, \quad e^{\lambda x} b(x) = g(x), \quad \varphi(x) = e^{\lambda x}, \quad \text{са} \quad \lambda > 0.$$

У том случају од израза $K(x)$ преостаје само први члан, и став 9 казује да ће ред $\Sigma g(\nu)$ бити конвергентан, кадгод је

$$\int_0^x e^{\lambda t} |d\{e^{-\lambda t} g(t)\}| = \int_0^x |g'(t) - \lambda g(t)| dt = O(1), \quad x \to \infty .$$

(iv) Ако у ставу 11 за функцију $b(x)$ узмемо степенасту функцију

$$b(x) = b_n \quad \text{за} \quad n \leqslant x < n+1, \; n = 1,2,3,\dots,$$

и у њему ставимо

$$\varphi(n) = C_n > 0 \quad \text{и} \quad x = n = 1,2,3,\dots,$$

тада добивамо овај резултат:

Израз

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu - b_n \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

ће тежити коначној и одређеној граници кад $n \to \infty$, *ако постоји такав низ бројева* $C_n > 0$, *да услови*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = O(C_n), \quad n \to \infty,$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu |b_\nu - b_{\nu-1}| = O(1), \quad n \to \infty,$$

буду истовремено испуњени.

Резултат сличан овоме добивамо и из става 2′ тачке В. 5. 4. (ii), ако узмемо да је $b = \infty$, и у њему ставимо

$$\alpha(x) = \sum_{\nu \leqslant x} a_\nu ,$$

а функције $\beta(x)$ и $f(x)$ изаберемо тако да интерполишу низове C_n, односно b_n, тј. ставимо

$$\beta(n) = C_n > 0 \quad \text{и} \quad f(n) = b_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Како је у овом случају

$$\int_0^x f(t) d\beta(t) = \sum_{\nu \leqslant x} b_\nu (C_\nu - C_{\nu-1}) \quad \text{и} \quad \int_0^x f(t) d\alpha(t) = \sum_{\nu \leqslant x} a_\nu b_\nu ,$$

то се поменути став 2′ своди на

Став 12. *Нека низ бројева b_n монотоно опада и тежи нули са $1/n$, тј.*

$$b_{n-1} \geqslant b_n \to 0, \quad n \to \infty;$$

ред

$$\Sigma\, a_\nu b_\nu$$

ће бити конвергентан ако постоји такав низ бројева $C_n > 0$, да услови

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = O(C_n), \quad n \to \infty,$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (C_\nu - C_{\nu-1}) \to C, \quad n \to \infty,$$

буду истовремено испуњени.

Овај став садржи и проширује Dirichlet-ов случај става 10, 2° и то за случај кад низ $\Sigma\, a_\nu$ не остаје ограничен.

III. Општи збирни обрасци

3. 1. (i) Особина Stieltjes-ова интеграла да он поред интеграла садржи и дискретне збирове (в. т. В. 2. 5), може послужити да прецизније испитамо разлику збира и интеграла

$$\sum_{\nu \leqslant x} f(\nu) - \int_0^x f(t)\, dt,$$

која се јавља у Cauchy-еву ставу и његовим проширењима изведеним у претходној глави. Ако, наиме, ову разлику напишемо у облику Stieltjes-ова интеграла, а затим овај узастопно парцијално интегришемо произвољан број пута, видимо да се ова разлика може развити у ред где фигуришу узастопни изводи функције $f(x)$. Тако добивени резултат се у ствари своди на збирне обрасце Euler-а {1, стр. 68—97}, односно Maclaurin-а {1, стр. 263—5}, као што ћемо то и показати у глави IV.

Овај поступак, међутим, можемо применити и на општи образац (б), тачке В. 2. 5. (i). При томе наилазимо на узастопне интеграле језгра $\alpha(x)$, због чега ћемо овде прво те интеграле изближе испитати и навести изразе за лакше руковање истима.

(*ii*) Нека је $\alpha(x)$ језгро Stieltjes-ова интеграла $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$; кад овај интеграл парциално интегришемо више пута појављују се узастопни интеграли функције $\alpha(x)$, у којима се после сваке интеграције уводи по једна интеграциона константа. Како ову константу можемо увести већ код само функције $\alpha(x)$, јер је

$$d\{\alpha(x)+c_0\} = d\alpha(x),$$

то низ узастопних интеграла функције $\alpha(x)$ можемо написати овако:

$$\alpha_0(x) = \alpha(x)+c_0,$$

$$\alpha_1(x) = \int \alpha(x)\,dx + c_0 x + c_1,$$

$$\alpha_2(x) = \int\int \alpha(x)\,(dx)^2 + \frac{c_0}{2!}x^2 + \frac{c_1}{1!}x + c_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

или уопште

$$\alpha_k(x) = \underbrace{\int \ldots\ldots \int}_{k} \alpha(x)\,(dx)^k + P_k(x), \tag{1}$$

где смо ставили

$$P_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{c_{k-\nu}}{\nu!}x^\nu, \quad k=0, 1, 2, \ldots\ldots \tag{2}$$

Овај низ полинома се обично зове Appell-ов {1} низ (види и Nielsen {2, стр. 34—39}). У овом низу полинома интеграционе константе $c_0, c_1, \ldots c_k$ фигуришу као коефициенти и то са индексима који опадају док експоненти од x расту. Према томе је овај низ полинома окарактерисан везама

$$P_n'(x) = P_{n-1}(x) \quad \text{за све} \quad n=1, 2, \ldots. \tag{3}$$

(*iii*) Образац (1) можемо и једноставније написати ако приметимо да се k-тоструки интеграл функције $\alpha(x)$ може изразити следећим једноструким интегралом

$$\frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k\,d\alpha(t), \quad k=0, 1, \ldots,$$

или интегралом

$$\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_x^b (t-x)^k d\alpha(t), \quad k=0, 1, \ldots.$$

Ово можемо лако проверити ако горње интеграле прво парциално интегришемо, а затим постепено диференцирамо.

На тај начин општем k-тоструком интегралу $\alpha_k(x)$ функције $\alpha(x)$ можемо дати и један од ова два облика

$$\alpha_k(x) = \frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k d\alpha(t) + P_k(x), \tag{4}$$

или

$$\alpha_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_x^b (t-x)^k d\alpha(t) + P_k(x), \tag{5}$$

где је $P_k(x)$ произвољан Appell-ов полином k-тог степена облика (2), тј. низ полинома окарактерисаних условима (3).

(iv) Произвољне интеграционе константе c_ν, које се јављају у низу узастопних интеграла функције $\alpha(x)$, можемо одредити подесним избором почетних услова. За примену два најважнија случаја су да се сви интеграли анулирају за доњу a, односно горњу b интеграциону границу, или да њихове вредности у тим тачкама буду једнаке.

У првом случају, тј. кад је

$$\alpha_\nu(a)=0 \quad \text{или} \quad \alpha_\nu(b)=0 \quad \text{за свако} \quad \nu=0, 1, 2, \ldots,$$

Appell-ов полином у обрасцу (4), односно онај у обрасцу (5), идентички ишчезава. У овом случају, дакле, узастопни интеграли функције $\alpha(x)$ узимају једноставан облик и своде се само на један од интеграла (4), односно (5).

Много је теже наћи општи облик узастопних интеграла да они задовољавају други од горњих граничних услова, тј. да буде

$$\alpha_\nu(a) = \alpha_\nu(b) \quad \text{за свако} \quad \nu=1, 2, 3, \ldots. \tag{6}$$

Ово захтева детаљније испитивање, што је предмет наредне тачке.

3. 2. (i) Низ узастопних интеграла $\alpha_\nu(x)$ функције $\alpha(x)$, који задовољавају услове (6), назваћемо *хармониски низ интеграла* функције $\alpha(x)$, узетих преко размака (a, b).

Ово из разлога, што ови узастопни интеграли периодичног продужења функције $\alpha(x)$, изван размака (a, b), остају такође периодичне функције и претстављају изван овог размака периодично продужење хармониских интеграла функције $\alpha(x)$.

(ii) Да би услови (6) били испуњени, почев од $\nu = 1$, морамо већ код прве функције $\alpha_0(x)$ константу c_0 тако бирати, да буде

$$\alpha_1(b) = \alpha_1(a).$$

Дакле, функцију

$$\alpha_0(x) = \alpha(x) + c_0,$$

односно константу c_0, одређујемо из услова

$$\alpha_1(b) - \alpha_1(a) = \int_a^b \alpha_0(t)\,dt = \int_a^b \alpha(t)\,dt + (b-a)\,c_0 = 0,$$

што даје

$$c_0 = -\frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha(t)\,dt,$$

а затим функцију

$$\alpha_1(x) = \int_a^x \alpha_0(t)\,dt + c_1$$

тако одређујемо да буде

$$\alpha_2(b) - \alpha_2(a) = \int_a^b \alpha_1(t)\,dt = 0.$$

Уопште је функција

$$\alpha_\nu(x) = \int_a^x \alpha_{\nu-1}(t)\,dt + c_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

тако одређена да буде

$$\alpha_{\nu+1}(b) - \alpha_{\nu+1}(a) = \int_a^b \alpha_\nu(x)\,dx = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

Према томе је низ узастопних интеграла $\alpha_\nu(x)$ функције $\alpha(x)$ окарактерисан тиме што је

$$\int_a^b \alpha_\nu(t)\,dt = 0 \quad \text{за свако} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

Другим речима он мора задовољавати следеће услове:

$$\alpha_0(x)=\alpha(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha(t)\,dt, \tag{7}$$

$$\alpha'_{\nu+1}(x)=\alpha_\nu(x), \tag{8}$$

$$\alpha_{\nu+1}(b)-\alpha_{\nu+1}(a)=\int_a^b \alpha_\nu(t)\,dt=0 \quad \text{за свако} \quad \nu=0,\,1,\,2\ldots \tag{9}$$

(iii) Означимо за $w(x)$ периодично продужење функције $\alpha(x)$ изван размака (a, b), тј. дефинишимо функцију $w(x)$ за све вредности x-а тако да она буде периодична са дужином периоде

$$w=b-a,$$

и да је

$$w(x)=\alpha(x) \quad \text{за} \quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{10}$$

Ово је могуће ако вредности функције $\alpha(x)$ у тачкама $x=a$, или $x=b$, тако одредимо да буде

$$\alpha(a)=\alpha(b).$$

За овако дефинисана периодична продужења функције $\alpha(x)$ важи став:

Сви узастопни хармониски интеграли

$$w_0(x),\ w_1(x),\ldots,\ w_k(x),\ldots$$

функције $w(x)$, *узети преко ма ког размака дужине* $w=b-a$, *су периодичне функције са периодом* $w=b-a$; *поред тога, из* (10) *следи да је*

$$w_\nu(x)=\alpha_\nu(x) \quad \textit{за свако} \quad a\leqslant x\leqslant b \quad \textit{и свако} \quad \nu=1,2,\ldots,$$

где је $\alpha_\nu(x)$ *низ узастопних хармониских интеграла функције* $\alpha(x)$, *тј. низ функција дефинисаних једначинама* (7), (8) *и* (9).

Јасно је, да је извод једне периодичне функције увек периодична функција; међутим, да би интеграл једне периодичне функције био периодичан, потребно је и довољно да интеграл узет преко једне њене периоде буде једнак нули. Како је, према (9), овај услов испуњен, то је, на основу обрасца (10), горњи став доказан.

На пример, узастопни хармониски интеграли функција

$$\sin x \quad \text{и} \quad \cos x,$$

узети преко размака дужине 2π су $\pm\sin x$ или $\pm\cos x$; прецизније, k-ти хармониски интеграл функције

$$\cos x + i \sin x$$

је

$$(-i)^k \{\cos x + i \sin x\}, \quad \text{где је} \quad i = \sqrt{-1}.$$

(iv) Без ограничења можемо увек, место размака (a, b) преко кога се интеграција врши, посматрати размак $(0, 1)$. Јер, ако је функција $\alpha(x)$ дефинисана у размаку (a, b), и ако ставимо да је

$$\beta(t) = \alpha\{a + t(b-a)\},$$

тада је функција $\beta(t)$ дефинисана у размаку $(0, 1)$.

Означимо са $\beta_\nu(t)$ узастопне хармониске интеграле функције $\beta(t)$ узете преко размака $(0, 1)$, тј.

$$\beta_0(t) = \beta(t) - \int_0^1 \beta(\eta)\, d\eta, \tag{11}$$

$$\beta'_{\nu+1}(t) = \beta_\nu(t), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

и

$$\int_0^1 \beta_\nu(t)\, dt = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Тада је

$$\alpha(x) = \beta\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \quad \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

а функције

$$\alpha_\nu(x) = (b-a)^\nu \beta_\nu\left(\frac{x-a}{b-a}\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

представљају узастопне хармониске интеграле функције $\alpha(x)$, *узете преко размака* (a, b).

Заиста: 1° *кад се у интегралу* (11) *изврши смена*

$$\xi = \frac{t-a}{b-a},$$

биће

$$\alpha_0(x)=\beta_0\left(\frac{x-a}{b-a}\right)=\beta\left(\frac{x-a}{b-a}\right)-\int_0^1\beta(\xi)\,d\xi=$$

$$=\alpha(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b\beta\left(\frac{t-a}{b-a}\right)dt=$$

$$=\alpha(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b\alpha(t)\,dt;$$

2^0 према (12) је

$$\alpha'_{\nu+1}(x)=(b-a)^{\nu+1}\beta'_{\nu+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\frac{1}{b-a}=$$

$$=(b-a)^{\nu}\beta_{\nu}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)=\alpha_{\nu}(x),\quad \nu=0,1,2,\ldots;$$

3^0 према (13) је

$$\int_a^b\alpha_{\nu}(t)\,dt=\int_a^b(b-a)^{\nu}\beta_{\nu}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)dt=$$

$$=(b-a)^{\nu+1}\int_0^1\beta_{\nu}(\eta)\,d\eta=0,\quad \nu=0,1,2,\ldots..$$

Према томе су услови (7), (8) и (9) задовољени, што казује да су функције $\alpha_{\nu}(x)$ заиста узастопни хармониски интеграли функције $\alpha(x)$, узети преко размака (a, b).

(v) Да бисмо нашли општи облик k-тог хармониског интеграла функције $\beta(x)$, потребно је да претходно одредимо низ хармониских интеграла функције x у односу на размак $(0, 1)$, као и њеног периодичног продужења, тј. функције $x-[x]$.

Јасно је, да је $(k-1)$-ви хармониски интеграл функције x полином k-тог степена. То је, у ствари, k-ти Bernoulli-ев {1, стр. 97} полином $B_k(x)$ подељен са $k!$, тј. ако овај интеграл означимо са $b_k(x)$, тада је

$$b_k(x)=\frac{1}{k!}B_k(x),\quad k=1,2,\ldots. \tag{14}$$

Bernoulli-еви полиноми, као и њихове најважније особине детаљно су обрађени у напоменама [29] и [30], тако да ћемо у даљем излагању, оно што је изложеном у овим напоменама, претпоставити као познато.

Обично се ови полиноми дефинишу својом функцијом генератрисом

$$\frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} B_\nu(x) t^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(x) t^\nu, \tag{15}$$

на основу које је лако проверити [29, (ii)], да они задовољавају услове (11), (12) и (13). Заиста је

$$b_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

која функција одговара полазној функцији $\beta_0(x)$ обрасца (11); диференцирањем обрасца (15) добивамо

$$b'_{\nu+1}(x) = b_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \ldots\ldots, \tag{16}$$

што казује да је образац (12) задовољен, а интегрисањем обрасца (15) видимо да је

$$b_{\nu+1}(1) - b_{\nu+1}(0) = \int_0^1 b_\nu(x)\, dx = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots.,$$

тј. да је задовољен и услов (13). Према томе је, заиста, коефициент $b_\nu(x)$ реда (15), $(\nu-1)$-ви узастопни хармониски интеграл функције x, узет преко размака (0, 1).

Периодична продужења полинома $b_\nu(x)$, изван размака (0, 1), назваћемо Bernoulli-еве функције и означићемо их са $\overline{b}_\nu(x)$. Лако је увидети [29, (iv)] да је

$$\overline{b}_1(x) = b_1(x - [x]) = x - [x] - \frac{1}{2},$$

и да је уопште

$$\overline{b}_\nu(x) = b_\nu(x - [x]) \quad \text{за} \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

(vi) Нека је $\beta(x)$ произвољна у размаку (0, 1) интеграбилна функција; применом Bernoulli-евих полинома, односно функција, можемо низ њених узастопних хармониских интеграла, узетих преко размака (0, 1), претставити коначним аналитичким изразом.

Према (11) је

$$\beta_0(x) = \beta(x) - \int_0^1 \beta(t)\,dt.$$

Затим је, за $0 \leqslant x \leqslant 1$, према (12) и (13),

$$\beta_1(x) = \int_0^x \beta_0(t)\,dt - \int_0^1 dx \int_0^x \beta_0(t)\,dt =$$

$$= \int_0^x \beta_0(t)\,dt - \int_0^1 \beta_0(t)\,dt + \int_0^1 t\beta_0(t)\,dt.$$

Како је

$$\int_0^1 \beta_0(t)\,dt = 0$$

и

$$1 + [x-t] = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad 0 \leqslant t < x, \\ 0 & \text{за} \quad x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

то је

$$\beta_1(x) = \int_0^1 (1 + [x-t])\beta_0(t)\,dt + \int_0^1 t\beta_0(t)\,dt =$$

$$= -\int_0^1 \left\{ (x-t) - [x-t] - \frac{1}{2} \right\} \beta_0(t)\,dt,$$

па је

$$\beta_1(x) = -\int_0^1 \overline{b}_1(x-t)\beta_0(t)\,dt \quad \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Ако сад обе стране овог обрасца постепено интегришемо, узастопни хармониски интеграли функције $\beta_1(x)$ се своде на узастопне хармониске интеграле подинтегралне функције $\overline{b}_1(x-t)$, јер ред интеграције смемо изменити. Како је, међутим, према (16), функција $\overline{b}_n(x-t)$ хармониски интеграл $(n-1)$-вог реда функције $\overline{b}_1(x-t)$, то је n-ти хармониски интеграл функције $\beta(x)$ дат једноставним изразом (види Аљанчић {1}),

$$\beta_n(x) = -\int_0^x \overline{b}_n(x-t)\beta_0(t)\,dt \quad \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{и} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Добивени образац можемо изразити и помоћу Bernoulli-евих полинома $b_n(x)$, ако приметимо да је, према (17), за $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\beta_n(x) = -\int_0^1 \overline{b}_n(x-t)\beta_0(t)\,dt =$$

$$= -\int_0^x b_n(x-t)\beta_0(t)\,dt - \int_x^1 b_n(1+x-t)\beta_0(t)\,dt;$$

како је [29, (ii)]

$$b_n(1+x) = b_n(x) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

то се овај последњи израз своди на

$$-\int_0^x b_n(x-t)\beta_0(t)\,dt - \int_x^1 \left\{ b_n(x-t) + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \beta_0(t)\,dt,$$

па је коначно

$$\beta_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_x^1 (t-x)^{n-1}\beta_0(t)\,dt - \int_0^1 b_n(x-t)\beta_0(t)\,dt.$$

Како је последњи члан овог обрасца полином, и то један специалан Appell-ов полином, то нам овај образац казује какав облик треба да дамо Appell-ову полиному $P_k(x)$ општег обрасца (5), да би овај образац претстављао k-ти хармониски интеграл.

(vii) Израз на десној страни обрасца (18), кад у њему промењивој x дамо произвољне вредности, претставља периодичну функцију са периодом 1. Према томе, овај интеграл претставља у ствари периодично продужење $\overline{\beta}_n(x)$ функције $\beta_n(x)$ изван размака (0, 1) тј.

$$\overline{\beta}_n(x) = -\int_0^1 \overline{b}_n(x-t)\beta_0(t)\,dt \quad \text{за свако} \quad x \quad \text{и} \quad n \geqslant 2.$$

У овом обрасцу можемо функцију $\overline{b}_n(x)$ развити у Fourier-ов ред [29, (v)], тј. ставити

$$\overline{b}_{2k}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu^{2k}},$$

$$\overline{b}_{2k+1}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu^{2k+1}}.$$

Како су ови редови униформно конвергентни можемо их интегрисати члан по члан. После лаког рачуна добивамо за периодично продужење, ван размака (0, 1), n-тог хармониског интеграла функције $\beta_0(x)$, израз

$$\overline{\beta}_n(x) = \frac{2(-1)^k}{(2\pi)^n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{c_\nu}{\nu^n} \cos 2\nu\pi x + \frac{d_\nu}{\nu^n} \sin 2\nu\pi x \right\}, \tag{19}$$

где je

$$k = \left[\frac{n}{2}\right]$$

и

$$c_\nu = \begin{cases} \int_0^1 \beta_0(t) \cos 2\nu\pi t\, dt & \text{за} \quad \nu = 2m, \\ \int_0^1 \beta_0(t) \sin 2\nu\pi t\, dt & \text{за} \quad \nu = 2m+1, \end{cases}$$

$$d_\nu = \begin{cases} \int_0^1 \beta_0(t) \sin 2\nu\pi t\, dt & \text{за} \quad \nu = 2m, \\ \int_0^1 \beta_0(t) \cos 2\nu\pi t\, dt & \text{за} \quad \nu = 2m+1. \end{cases}$$

Из ових образаца можемо извести и асимптотско понашање n-тог хармониског интеграла функције $\beta(x)$ за велике вредности од n. Заиста, у збиру (19), кад je n велико, први члан превлађује над осталима, тако да je

$$\overline{\beta}_n(x) \sim \frac{2(-1)^k}{(2\pi)^n} \left\{ c_1 \cos 2\pi x + d_1 \sin 2\pi x \right\}, \quad n \to \infty, \tag{20}$$

са $k = \left[\frac{n}{2}\right]$, и то ако je или

$$c_1 = \int_0^1 \beta_0(t) \sin 2\pi t\, dt \neq 0,$$

или

$$d_1 = \int_0^1 \beta_0(t) \cos 2\pi t\, dt \neq 0.$$

Ако је, међутим, $c_1 = d_1 = 0$ тада $\overline{\beta}_n(x)$ тежи брже нули, и то утолико брже уколико има више Fourier-ових коефицијената

$$\int_0^1 \beta_0(t) \sin 2\nu\pi t\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^1 \beta_0(t) \cos 2\nu\pi t\,dt,$$

који су једнаки нули.

3. 3. (**i**) Нека је $\alpha(x)$ функција ограничене варијације у размаку (a, b), а $\overline{\alpha}(x)$ њен непрекидни део; тада је, према обрасцу (6) тачке B. 2. 5. (i),

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \alpha(x_\nu+0) - \alpha(x_\nu-0) \right\} f(x_\nu) + \int_a^b f(x)\,d\overline{\alpha}(x) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x), \tag{21}$$

где је горњи збир узет преко свих тачака дисконтинуитета x_ν функције $\alpha(x)$.

Покажимо овде, као што смо на почетку главе напоменули, како се на основу овог општег обрасца може, под извесним претпоставкама о функцијама $f(x)$ и $\alpha(x)$, збир

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{\alpha(x_\nu+0) - \alpha(x_\nu-0)\} f(x_\nu) \tag{22}$$

трансформисати и изразити интегралима и збиром другог облика.

(**ii**) Претпоставимо да постоје сви изводи функције $f(x)$ до k-тог реда; постепеном парциалном интеграцијом десне стране обрасца (21) добивамо

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \\
&= \int_a^b f(x)\,d\alpha_0(x) = \{\alpha_0(b) f(b) - \alpha_0(a) f(a)\} - \int_a^b f'(x)\,d\alpha_1(x) = \\
&= \{\alpha_0(b) f(b) - \alpha_0(a) f(a)\} - \{\alpha_1(b) f'(b) - \alpha_1(a) f'(a)\} + \\
&+ \int_a^b f''(x)\,d\alpha_2(x),
\end{aligned} \tag{23}$$

или уопште

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\{\alpha_\nu(b)f^{(\nu)}(b) - \alpha_\nu(a)f^{(\nu)}(a)\} + \\ +(-1)^k\int_a^b f^{(k)}(x)d\alpha_k(x), \tag{24}$$

где је

$$f^{(o)}(x)=f(x),$$

и где смо са

$$\alpha_\nu(x), \ \nu=0, 1, 2, \ldots . k,$$

означили произвољни низ (1) узастопних интеграла функције $\alpha(x)$.

Ако десну страну обрасца (21) заменимо изразом (24) добивамо следећи општи збирни образац

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\{\alpha(x_\nu+0) - \alpha(x_\nu-0)\}f(x_\nu) = \\ = -\int_a^b f(x)d\bar{\alpha}(x) + \sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^\nu\{\alpha_\nu(b)f^{(\nu)}(b) - \alpha_\nu(a)f^{(\nu)}(a)\} + R_k, \tag{25}$$

где је

$$R_k = (-1)^k\int_a^b f^{(k)}(x)d\alpha_k(x). \tag{26}$$

Овај образац садржи, поред функција $f(x)$ и $\alpha(x)$, још и $(k+1)$ произвољних интеграционих констаната c_0, $c_1, \ldots c_k$, које се појављују у узастопним интегралима (1), односно (4), или (5), функције $\alpha(x)$.

Већ самим избором ових интеграционих констаната можемо обрасцу (25) дати два из основе различита облика, која ћемо овде изнети у општем случају, а у следећој глави дати два типична специална случаја.

(iii) Ако у обрасцима (24) или (25) интеграционе константе c_ν изаберемо тако да буде или

$$\alpha_\nu(a)=0, \quad \text{или} \quad \alpha_\nu(b)=0 \quad \text{за свако} \quad \nu=0, 1, 2, \ldots,$$

образац (24) узима облик

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\alpha_\nu(b)f^{(\nu)}(b) + (-1)^k\int_a^b f^{(k)}(x)d\alpha_k(x, \tag{27}$$

или овоме сличан, у коме се место b јавља a.

У овом случају су узастопни интеграли функције $\alpha(x)$ дати једноставним изразима (4), односно (5), у којима Appell-ови полиноми $P_k(x)$ ишчезавају. Према томе су, на пример у обрасцу (27), коефициенти $\alpha_\nu(b)$ дати изразима

$$\alpha_\nu(b) = \frac{1}{\nu!}\int_a^b (b-t)^\nu \, d\alpha_0(t), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots.. \tag{28}$$

Специалним избором функције $\alpha(x)$ овај се образац своди на Taylor-ов, као што ћемо то показати у наредној глави.

(iv) Други нарочито важан случај избора интеграционих констаната добивамо ако за узастопне интеграле $\alpha_\nu(x)$ функције $\alpha(x)$ изаберемо низ њених хармониских интеграла, дакле, ако интеграционе константе бирамо тако да буде

$$\alpha_\nu(b) = \alpha_\nu(a) \quad \text{за свако} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots... \tag{29}$$

У овом случају образац (24) узима следећи облик

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \tag{30}$$
$$= \alpha_0(b) f(b) - \alpha_0(a) f(a) + \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^\nu \alpha_\nu(a)\{f^{(\nu)}(b) - f^{(\nu)}(a)\} + R_k,$$

где је

$$R_k = (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(x)\,d\alpha_k(x),$$

тако да се и у овом изразу, као и у збиру (27), јавља само један низ коефицијената и то

$$(-1)^\nu \alpha_\nu(a), \quad \nu = 1, 2, \ldots, k-1.$$

На основу излагања претходних тачака можемо и у овом случају из обрасца (18) извести експлицитан израз за низ узастопних хармониских интеграла $\alpha_\nu(x)$ функције $\alpha(x)$. Како се овај образац односи на размак $(0, 1)$, то га лако можемо на основу смена изложених у тачки 2. 2. (iv) свести на произвољан размак (a, b), тако да у овом случају n-ти хармониски интеграл функције $\alpha(x)$, у односу на размак (a, b), има облик

$$\alpha_n(x) = -(b-a)^{n-1}\int_a^b \bar{b}_n\left(\frac{x-t}{b-a}\right)\alpha_0(t)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где је

$$\alpha_0(x) = \alpha(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha(t)\,dt.$$

На тај начин коефицијенти реда (30) узимају овај облик

$$\alpha_n(a) = \alpha_n(b) = -(b-a)^{n-1}\int_a^b b_n\left(\frac{b-t}{b-a}\right)\alpha_0(t)\,dt,\ n=1,2,3,\ldots.. \tag{31}$$

Из овог последњег израза, на основу асимптотског понашања Bernoulli-евих функција, датог обрасцем (20), можемо закључити још и следећу важну чињеницу. Док коефицијенти реда (27) по апсолутној вредности теже нули као

$$M\frac{(b-a)^n}{n!} \quad \text{кад} \quad n\to\infty,$$

што непосредно видимо из обрасца (28) (где је M нека константа), дотле коефицијенти реда (30) у општем случају теже нули само као

$$M'\frac{(b-a)^n}{(2\pi)^n} \quad \text{кад} \quad n\to\infty,$$

где је M' нека константа. Ово лако увиђамо ако асимптотско понашање Bernoulli-евих функција, дато обрасцем (20), уврстимо у израз (31).

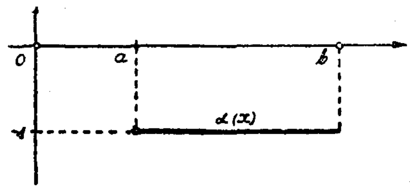
Отуда закључујемо да ови последњи редови много спорије конвергирају од Taylor-ових редова и да, шта више, у најчешћим случајевима они дивергирају и доводе до асимптотских редова [33]. Уосталом, образац (29), у вези са обрасцем (25), садржи као специјалан случај Euler-Maclaurin-ов збирни образац, као што ћемо то у наредној глави и показати, а за који је још Legendre {1} приметио да он, у најчешћим случајевима, доводи до асимптотских редова.

IV. Специјални збирни обрасци

4. 1. (i) У претходним тачкама смо напоменули да се из образаца (23) до (26) тачке 3. 3. (ii) према избору функције $\alpha(x)$ као и њених узастопних интеграла може извести низ класичних образаца који се односе како на претварање редова у друге облике, тако и на развијање функција у ред.

Овде ћемо, примера ради, извести три таква обрасца и то Taylor-ов образац, Euler-Maclaurin-ов и један образац за алтернативне збирове.

(ii) Taylor-ов образац (в. т. 3. 3. (iii)) добивамо непосредно из обрасца 3. 3. (27), ако у њему ставимо (в. сл. 21)



Сл. 21.

$$\alpha(x)=\begin{cases} -1 & \text{за} \quad a\leqslant x<b, \\ 0 & \text{за} \quad x=b, \end{cases}$$

а k-тоструки интеграл ове функције напишемо у облику 3. 1. (6) са $P_k\equiv 0$. Тада је, наиме,

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=f(b)$$

и

$$\alpha_k(x)=\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_x^b (t-x)^k\,d\alpha(t)=\frac{(-1)^{k+1}}{k!}(b-x)^k,$$

па је, према 3. 3. (27) и (28),

$$f(b)=\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(b-a)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(a)+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^b f^{(k)}(t)(b-t)^{k-1}dt.$$

Овим смо добили Taylor-ов образац са остатком R_k у интегралном облику

$$R_k=\frac{1}{(k-1)!}\int_a^b f^{(k)}(t)(b-t)^{k-1}dt,$$

који је сличним поступком извео Darboux {2} (види и Schlömilch {1, т. I., стр. 436—38}). Применом ставова о средњим вредностима на овај интеграл могу се из њега извести остали познати облици за остатак R_k.

4. 2. (i) Euler {1, стр. 68—97}—Maclaurin-ов {1, стр. 263—5} збирни образац добивамо ако пођемо од функције

$$\alpha(x)=x-[x],$$

узмемо њене узастопне хармониске интеграле преко размака (0, 1) и у обрасцима 3. 1. (25), (26) и (30) ставимо

$$a=0,\ b=n,\quad \text{где је}\quad n\quad \text{цео броој},$$

$$\alpha(x)=\alpha_0(x)=\bar{b}_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$$

и

$$\alpha_\nu(x)=\bar{b}_{\nu+1}(x),\ \nu=1,2,3,\ldots\ldots.$$

Како је тада

$$\int_0^n f(x)d\alpha(x)=\int_0^n f(x)dx-\sum_{\nu=1}^n f(\nu)$$

и

$$\bar{b}_\nu(n)=\bar{b}_\nu(0),\ \nu=1,2,\ldots\ldots,$$

то образац 3. 1. (30) постаје

$$\sum_{\nu=1}^n f(\nu)-\int_0^n f(x)\,dx=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{\nu+1}\bar{b}_{\nu+1}(0)\{f^{(\nu)}(n)-f^{(\nu)}(0)\}+ \tag{1}$$

$$+(-1)^{k+1}\int_0^n f^{(k)}(x)\,d\bar{b}_{k+1}(x).$$

Потребно је још да у овом обрасцу ближе одредимо низ периодичних функција $\bar{b}_k(x)$ као и вредности низа коефициената $\bar{b}_\nu(0),\ \nu=1,2,\ldots$ У тачки 3. 2. (v) и напоменама [29] и [30] смо видели да су ово Bernoulli-еве функције и да се горњи низ коефициената може изразити Bernoulli-евим бројевима. Међутим, како коефициенти $\bar{b}_\nu(0)$ у обрасцу (1) не зависе од функције $f(x)$, то ћемо овде показати, да их можемо одредити и из самог овог обрасца. Довољно је зато да функцију $f(x)$ подесно изаберемо и то тако, да се сви изрази који се јављају у обрасцу (1) могу лако израчунати.

Таква једна функција је

$$f(x)=e^{-tx}\quad \text{са}\quad t>0,$$

тако да у обрасцу (1) можемо пустити и да $n \to \infty$, јер су тада, како је $t > 0$, сви изрази који се у њему јављају конвергентни. Заиста је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-t\nu} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1} \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t},$$

а како је

$$f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu} t^{\nu} e^{-tx}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots,$$

то добивамо

$$\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} = \sum_{\nu=0}^{k-1} \overline{b}_{\nu+1}(0) t^{\nu} - t^k \int_0^{\infty} e^{-tx}\,d\overline{b}_{k+1}(x). \tag{2}$$

На основу овог обрасца можемо сад показати да су коефициенти $\overline{b}_{\nu}(0)$ Taylor-ови коефициенти функције

$$\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{b}_{\nu+1}(0) t^{\nu}. \tag{3}$$

тј. функције

$$\frac{t}{e^t - 1} - \frac{1}{t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{b}_{\nu}(0) t^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_{\nu}}{\nu!} t^{\nu}, \tag{4}$$

а овим последњим редом [30] је дефинисан Bernoulli-ев низ бројева b_{ν}.

Да бисмо ово ригурозно извели, тј. показали да се у редовима (2) и (3) јављају исти коефициенти $b_{\nu}(0)$, треба још да покажемо да је

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} d\,\overline{b}_{k+1}(x) = O(1), \quad t \to 0, \quad [25],$$

тј. да је

$$\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} = \sum_{\nu=0}^{k-1} \overline{b}_{\nu+1}(0) t^{\nu} + O(t^k), \quad t \to 0, \quad [33], \tag{5}$$

а што се своди на образац (3), јер је овај ред конвергентан за $|t| < 2\pi$ (види образац (21) напомене [30]).

Међутим, из чињенице да су све функције $\overline{b}_{\nu}(x)$ периодичне и да је

$$\int_0^1 \overline{b}_{\nu}(x)\,dx = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots,$$

следи, шта више, да

$$\int_0^\infty e^{-tx}\, d\{\overline{b}_{k+1}(x)\} \to - \int_0^1 x\, d\{b_{k+1}(x)\} \quad \text{кад} \quad t \to 0. \qquad (6)$$

Заиста је

$$\int_0^\infty e^{-tx}\, d\overline{b}_{k+1}(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\, \overline{b}_k(x)\, dx =$$

$$= \sum_{\nu=0}^\infty \int_\nu^{\nu+1} e^{-tx}\, \overline{b}_k(x)\, dx = \qquad , \quad x = \nu + \eta,$$

$$= \sum_{\nu=0}^\infty \int_0^1 e^{-t(\nu+\eta)}\, \overline{b}_k(\nu+\eta)\, d\eta =$$

$$= \sum_{\nu=0}^\infty \int_0^1 e^{-t\nu}\, e^{-t\eta}\, \overline{b}_k(\eta)\, d\eta =$$

$$= \sum_{\nu=0}^\infty e^{-t\nu} \int_0^1 e^{-t\eta}\, \overline{b}_k(\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_0^1 e^{-t\eta}\, \overline{b}_k(\eta)\, d\eta \sum_{\nu=0}^\infty e^{-t\nu} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-t}} \int_0^1 e^{-t\eta}\, \overline{b}_k(\eta)\, d\eta.$$

Како је даље

$$\int_0^1 \overline{b}_k(\eta)\, d\eta = 0,$$

то ако овај интеграл одузмемо од горњег, он се не ће променити и добивамо

$$\int_0^\infty e^{-tx}\, d\overline{b}_{k+1}(x) = \frac{-1}{1-e^{-t}} \int_0^1 (1 - e^{-t\eta})\, \overline{b}_k(\eta)\, d\eta \cdot$$

$$= \frac{-t}{1-e^{-t}} \int_0^1 \frac{1-e^{-t\eta}}{t}\, \overline{b}_k(\eta)\, d\eta.$$

Ако сад у овом изразу пустимо да $t \to 0$, то из

$$\lim_{t=0} \frac{+t}{1-e^{-t}} = 1, \quad 0 < \frac{1-e^{-t\eta}}{t} < \eta$$

и

$$\lim_{t=0} \frac{1-e^{-t\eta}}{t} = \eta$$

следи тврђење (6).

(ii) Дакле, према (4) и (5), је

$$b_\nu(0) = \frac{b_\nu}{\nu!}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots,$$

и ако ове вредности уврстимо у образац (1) добивамо

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) = \int_0^n f(x)\,dx + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu+1} \frac{b_{\nu+1}}{(\nu+1)!} \{f^{(\nu)}(n) - f^{(\nu)}(0)\} + R_k,$$

где је

$$R_k = (-1)^{k+1} \int_0^n f^{(k)}(x)\,d\,\overline{b}_{k+1}(x) = (-1)^{k+1} \int_0^n f^{(k)}(x)\overline{b}_k(x)\,dx.$$

Како су, осим броја b_1, остали Bernoulli-еви бројеви са непарним индексом једнаки нули [30, (ii)], то је

$$(-1)^{\nu+1} b_{\nu+1} = b_{\nu+1} \quad \text{за} \quad \nu = 1, 3, 5, \ldots, \quad \text{а} \quad (-1)^1 b_1 = \frac{1}{2},$$

тако да горњи образац можемо написати и у облику

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\nu) =$$

$$= \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\{f(n) - f(0)\} + \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{b_{\nu+1}}{(\nu+1)!}\{f^{(\nu)}(n) - f^{(\nu)}(0)\} + R_k$$

где је

$$R_k = (-1)^{k+1} \int_0^n f^{(k)}(x)\overline{b}_k(x)\,dx,$$

а што претставља Euler-Maclaurin-ов збирни образац.

Овај образац можемо и складније написати, ако прво од леве и десне стране одузмемо $f(n) - f(0)$, затим заменимо k са $k-1$, и ставимо

$$f(x)=F'(x) \quad \text{тј.} \quad F(x)=\int f(x)\,dx \text{ и } F(n)-F(0)=\int_0^n f(x)\,dx,$$

тако да коначно добивамо

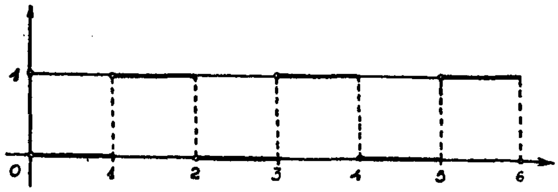
$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F'(\nu)=\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{b_\nu}{\nu!}\{F^{(\nu)}(n)-F^{(\nu)}(0)\}+(-1)^k\int_0^n F^{(k)}(x)\,db_k(x).$$

4. 3. Сличним поступком можемо добити и збир алтернативног реда облика

$$\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^{\nu+1}f(\nu).$$

У ту сврху треба за функцију $\alpha(x)$ ставити (в. сл. 22)

$$\alpha(x)=[x]-2[x/2]$$



Сл. 22

и узети њене узастопне хармониске интеграле преко размака дужине 2. Тада је

$$\int_0^{2n} f(x)\,d\alpha(x)=\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^{\nu+1}f(\nu),$$

а како је функција $\alpha(x)$ периодична са дужином периоде 2, то ће и њени узастопни хармониски интеграли бити периодичне функције, од којих су прве четири:

$$w_0(x)=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]-\frac{1}{2},$$

$$w_1(x)=\bar{b}(x)\,w_0(x), \quad \text{где је } \bar{b}(x)=x-[x]-\frac{1}{2},$$

$$w_2(x)=\left\{\frac{1}{2!}\bar{b}^2(x)-\frac{1}{8}\right\}w_0(x),$$

$$w_3(x)=\left\{\frac{1}{3!}\bar{b}^3(x)-\frac{1}{8}\bar{b}(x)\right\}w_0(x),\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Уосталом, општи облик ових функција $w_n(x)$ изражен Bernoulli-евим функцијама је

$$w_n(x) = 2^{k+1}\overline{b}_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) - \overline{b}_{k+1}(x), \quad k=0,1,2,\ldots\ldots,$$

што се из доле наведених резултата може лако проверити.

Како је

$$w_\nu(2n) = w_\nu(0),$$

то се на основу образаца 3. 1. (25), (26) и (30) добива

$$\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^{\nu+1}f(\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu w_\nu(0)\{f^{(\nu)}(2n) - f^{(\nu)}(0)\} + (-1)^k \int_0^{2n} f^{(k)}(x)\,dw_k(x).$$

Да бисмо још одредили коефициенте $w_\nu(0)$, $\nu=0,1,2,\ldots$, ставићемо у овом обрасцу

$$f(x) = e^{-tx} \quad \text{са} \quad t>0,$$

и пустићемо да $n\to\infty$. Како је тада

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}e^{-t\nu} = e^{-t}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-e^{-t})^\nu = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = \frac{1}{e^t+1}$$

и

$$f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu t^\nu e^{-tx},$$

то мора бити

$$\frac{1}{e^t+1} = -\sum_{\nu=0}^{k-1} w_\nu(0)\,t^\nu + t^k\int_0^\infty e^{-tx}\,dw_k(x).$$

Како из истих разлога као и у претходној тачки

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,dw_k(x) \to -\int_0^2 x\,dw_k(x), \quad \text{кад} \quad t\to 0,$$

то су бројеви $-w_\nu(0)$ коефициенти Taylor-ова реда функције $1/(e^t+1)$.

Међутим је

$$\frac{1}{e^t+1}=\frac{1}{e^t-1}-\frac{2}{e^{2t}-1}=-\frac{1}{t}\left\{\frac{2t}{e^{2t}-1}-\frac{t}{e^t-1}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{t}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^\nu b_\nu}{\nu!}t^\nu-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_\nu}{\nu!}t^\nu\right\}=$$

$$=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{\nu+1}-1}{(\nu+1)!}b_{\nu+1}t^\nu.$$

Према томе, за коефициенте $w_\nu(0)$ добивамо вредности

$$w_\nu(0)=\frac{2^{\nu+1}-1}{(\nu+1)!}b_{\nu+1},\quad \nu=0,1,2,\ldots,$$

тако да тражени образац гласи

$$\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^{\nu+1}f(\nu)=\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\frac{2^{\nu+1}-1}{(\nu+1)!}b_{\nu+1}\{f^{(\nu)}(2n)-f^{(\nu)}(0)\}+R_k$$

са

$$R_k=(-1)^k\int_0^{2n}f^{(k)}(x)\,dw_k(x).$$

С обзиром да је

$$(-1)^0 b_1=-\frac{1}{2},\ b_{2m+1}=0 \text{ и } (-1)^{2m-1}b_{2m}=-b_{2m},\quad m=1,2,\ldots,$$

то кад горњи образац помножимо са -1, добивамо коначно да је

$$\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu f(\nu)=$$

$$=\frac{1}{2}\{f(2n)-f(0)\}+\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{2^{\nu+1}-1}{(\nu+1)!}b_{\nu+1}\{f^{(\nu)}(2n)-f^{(\nu)}(0)\}-R_k.$$

Напоменимо да се овај образац може извести и из Euler-ова обрасца ако приметимо да је

$$\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^{\nu+1}f(\nu)=\sum_{\nu=1}^{2n}f(\nu)-2\sum_{\nu=1}^{n}f(2\nu),$$

и на ова два последња збира применимо Euler-ов образац. — Отуда и веза између низа узастопних хармониских интеграла $w_n(x)$ и Bernoulli-евих функција $\overline{b}_n(x)$.

V. Област и апсциса конвергенције Dirichlet-ових редова

5. 1. (i) Нека је λ_n низ бројева који расту и теже бесконачности са n, тј.

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n\to\infty \quad \text{кад} \quad n\to\infty.$$

Редови облика

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \quad \text{или} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu l_\nu^{-s},$$

где је

$$l_\nu=e^{\lambda_\nu}, \quad \nu=1,2,\ldots,$$

зову се *општи Dirichlet-ови редови* {1}; бројеви a_ν су коефициенти реда, а s реална или комплексна промењива.

У специалном случају, када је

$$\lambda_\nu=lg\,\nu, \quad \text{тј.} \quad l_\nu=\nu, \quad \nu=1,2,\ldots,$$

добивамо специалне Dirichlet-ове редове облика

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \nu^{-s}.$$

Кад је, међутим,

$$\lambda_\nu=\nu \quad \text{и кад ставимо} \quad e^{-s}=z,$$

Dirichlet-ов ред се претвара у Taylor-ов, тј.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\nu s}=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu.$$

(ii) Због општег облика низа експонената λ_ν, у многим случајевима ћемо Dirichlet-ове редове, као и њима дефинисане функције, моћи лакше и прегледније испитати, ако их изразимо Stieltjes-овим интегралом, јер се ови редови тада своде на Laplace-ове {1} интеграле.

Заиста, ако са $a(x)$ означимо степенасту функцију

$$a(x)=\sum_{\lambda_\nu\leqslant x} a_\nu=\sum_{\nu=1}^{\delta(x)} a_\nu, \tag{1}$$

где је $\delta(x)$ бројна функција низа λ_ν (в. тачку C. 1. 1. (ii), тј. ону функцију која у тачкама $x=\lambda_\nu$ има скокове дужине

a_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, тада je

$$\sum_{\lambda_\nu \leqslant x} a_\nu e^{-\lambda_\nu s} = \int_0^x e^{-st} \, da(t).$$

Ако овде пустимо да $x \to \infty$, интеграл ће конвергирати кадгод je Dirichlet-ов ред конвергентан, тако да je

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s} = \int_0^\infty e^{-st} \, da(t). \tag{2}$$

(iii) Овај несвојствени Stieltjes-Laplace-ов интеграл можемо, међутим, парцијалном интеграцијом свести на обичан Laplace-ов интеграл, и на тај начин општи Dirichlet-ов ред изразити оваквим интегралом.

Заиста, ако je s реално, и ако прво претпоставимо да je $s > 0$, тада, како je $a(0) = 0$, парцијалном интеграцијом добивамо

$$\int_0^x e^{-st} da(t) = e^{-sx} a(x) + s \int_0^x e^{-st} a(t) \, dt.$$

Како за $s > 0$ функција e^{-st} монотоно опада, то ће, на основу става 4 a) тачке В. 5. 6. (i) (са $b = \infty$), из егзистенције несвојственог интеграла (2) следити да

$$e^{-sx} a(x) \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to \infty;$$

према томе, несвојствени интеграл

$$\int_0^\infty e^{-st} a(t) \, dt$$

постоји, па je

$$\int_0^\infty e^{-st} da(t) = s \int_0^\infty e^{-st} a(t) \, dt, \quad s > 0. \tag{3}$$

Ако je, међутим, $s < 0$, тада

$$e^{-sx} \text{ монотоно расте и } \to \infty \text{ са } x,$$

па ће, према томе, на основу става 4 b) и c) тачке В. 5. 6. (i), постојати гранична вредност

$$\lim_{x=\infty} a(x) = a$$

и

$$e^{-sx} \{a(x) - a\} \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to \infty.$$

Како је даље

$$\int_0^x e^{-st}\,da(t)=\int_0^x e^{-st}\,d\{a(t)-a\}=$$

$$=e^{-sx}\{a(x)-a\}+a+s\int_0^x e^{-st}\{a(t)-a\}\,dt,$$

то ће и овај последњи несвојствени интеграл конвергирати кад $x\to\infty$, и биће

$$\int_0^\infty e^{-st}\,da(t)=a+s\int_0^\infty e^{-st}\{a(t)-a\}\,dt,\quad s<0. \tag{4}$$

Дакле, сваки конвергентан Dirichlet-ов ред можемо написати и у једном од ова два облика

$$\sum_{\nu=1}^\infty a_\nu e^{-\lambda_\nu s}=s\int_0^\infty e^{-st}a(t)\,dt,\quad \text{или}\quad =a+s\int_0^\infty e^{-st}\{a(t)-a\}\,dt,$$

према томе да ли је $s>$ или <0, а при чему је $a=\sum\limits_{\nu=1}^\infty a_\nu$.

(iv) Из образаца (3) и (4) видимо да све оне особине које важе за Laplace-ове интеграле можемо пренети и на Dirichlet-ове редове, узимајући за подинтегралну функцију функцију $a(x)$ облика (1), или функцију $a(x)-a$.

На тај начин многе ставове који се односе на Dirichlet-ове редове можемо лакше и прегледније извести; овде ћемо, примера ради, изнети само неке од њих, и то оне где се улога Stieltjes-ова интеграла нарочито истиче.

5. 2. **(i)** Ако је s комплексна променљива, тада је област конвергенције Dirichlet-ова реда полураван која се налази десно од извесне праве паралелне имагинарној оси, тј. Dirichlet-ов ред конвергира за све s за које је

$$R\{s\}>\sigma_0.$$

Права $R\{s\}=\sigma_0$ зове се *права конвергенције* Dirichlet-ова реда, а σ_0 његова *апсциса конвергенције.*

(ii) Егзистенција праве конвергенције је непосредна последица особине Dirichlet-ових редова, изражене овим ставом:

Став 1. *Ако Dirichlet-ов ред*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s},$$

конвергира за $s=s'$, *тада је он конвергентан за свако* s, *за које је*

$$R\{s\} > R\{s'\}.$$

Доказ. Ставимо

$$A(x) = \int_0^x e^{-s't}\, da(t),$$

тада је

$$\int_x^y e^{-st}\, da(t) = \int_x^y e^{-(s-s')t} e^{-s't}\, da(t) =$$

$$= \int_x^y e^{-(s-s')t}\, dA(t).$$

Према ставу 3 о средњим вредностима тачке B. 3. 3 (i) је

$$\left| \int_x^y e^{-(s-s')t}\, dA(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ |e^{-(s-s')x}| + \int_x^y |de^{-(s-s')t}| \right\} \times \operatorname*{Max}_{x \leqslant t \leqslant y} |A(t) - A(x)|,$$

а како је, за $R\{s-s'\} > 0$,

$$|e^{-(s-s')x}| + \int_x^y |de^{-(s-s')t}| = e^{-R\{s-s'\}x} + |s-s'| \int_x^y e^{-R\{s-s'\}t}\, dt =$$

$$= e^{-R\{s-s'\}x} + \frac{|s-s'|}{R\{s-s'\}} \{e^{-R\{s-s'\}x} - e^{-R\{s-s'\}y}\} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{|s-s'|}{R\{s-s'\}},$$

то је, дакле,

$$\left| \int_x^y e^{-st}\, da(t) \right| \leqslant \left\{ 1 + \frac{|s-s'|}{R\{s-s'\}} \right\} \operatorname*{Max}_{x \leqslant t \leqslant y} |A(t) - A(x)| =$$

$$\leqslant \mu \operatorname*{Max}_{x \leqslant t \leqslant y} |A(t) - A(x)|, \tag{5}$$

кад год је

$$0 < \frac{|s-s'|}{R\{s-s'\}} \leqslant \mu - 1 = M. \tag{6}$$

На основу претпоставке да је Dirichlet-ов ред конвергентан за $s = s'$, тј. да

$$\lim_{x=\infty} A(x)$$

постоји, следи да

$$A(y) - A(x) \to 0 \quad \text{ма како} \quad x \quad \text{и} \quad y \to \infty;$$

према томе, из неједначине (5) добивамо да ће и

$$\int_x^y e^{-st} \, da(t) \to 0 \quad \text{ма како} \quad x \quad \text{и} \quad y \to \infty,$$

тј. да несвојствени интеграл

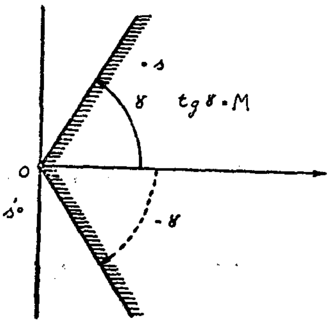
$$\int_0^\infty e^{-st} \, da(t)$$

постоји, и то за свако s које задовољава услов (6).

(iii) Овим смо добили не само Cahen-ов {1} став, тј. да је Dirichlet-ов ред конвергентан за

$$R\{s\} > R\{s'\},$$

већ и Perron-ово {1} уопштење, и то



Сл. 23

Став 1'. *Dirichlet-ов ред је униформно конвергентан у углу који је одређен неједначином* (6) (в. сл. 23.).

Cahen-ов резултат можемо, дакле, и овако формулисати:

Став 2. *Dirichlet-ов ред или конвергира за свако s, или дивергира за свако s, или постоји права конвергенције*

$$R\{s\} = C,$$

(са апсцисом конвергенције C) тако да Dirichlet-ов ред дивергира за $R\{s\} < C$, а конвергира за $R\{s\} > C$.

5. 3. (i) Експлицитан израз за апсцису конвергенције C дао је Cahen {1} за случај кад је она $\geqslant 0$; овај израз је допунио Pincherle {1} и за случај када је она $\leqslant 0$, тако да општи резултат гласи:

Став 3. *Нека је* $a(t)$ *функција дефинисана обрасцем* (1); *ставимо*

$$L^{+}=\lim_{t=\infty}\sup\frac{1}{t}\lg|a(t)| \tag{7}$$

ако $a(t)$ *дивергира, а*

$$L^{-}=\lim_{t=\infty}\sup\frac{1}{t}\lg|a(t)-a|, \tag{8}$$

ако

$$a(t)\to a \quad \textit{кад} \quad t\to\infty.$$

Јасно је да је

$$L^{+}\geqslant 0, \quad a \quad L^{-}\leqslant 0.$$

Апсциса конвергенције C *Dirichlet-ова реда је*

$$C=\begin{cases} L^{+} & \textit{ако} \quad a(t) \ \textit{дивергира}, \\ L^{-} & \textit{ако} \quad a(t)\to a \ \textit{кад} \ t\to\infty. \end{cases} \tag{9}$$

(ii) Ако функцију $a(t)$ изравимо у облику (1), тада обрасци (7) и (8) постају

$$L^{+}=\lim_{n=\infty}\sup\frac{1}{\lambda_n}\lg\left|\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\right|$$

и

$$L^{-}=\lim_{n=\infty}\sup\frac{1}{\lambda_n}\lg\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu\right|,$$

према томе да ли ред Σa_ν дивергира или конвергира.

(iii) Ови резултати се могу лако добити поступком који је сличан поступку из тачке (ii).

Како је

$$\int_0^\infty e^{-st}d\{a(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}d\{a(t)-a\},$$

ма какав био број a, то можемо посматрати овај десни интеграл и претпоставити да је

$$a=0 \quad \text{ако} \quad a(t) \quad \text{дивергира кад} \quad t\to\infty,$$

а да је

$$a = \lim_{t=\infty} a(t) \quad \text{ако ова гранична вредност постоји.}$$

Тада из образаца (7), (8) и (9) следи да је за довољно велико t

$$\frac{1}{t} lg |a(t) - a| < \sigma' \quad \text{за} \quad \sigma' = C + \varepsilon,$$

ма како мали био број $\varepsilon > 0$. Према томе је

$$|a(t) - a| < e^{\sigma' t} \quad \text{за} \quad \sigma' = C + \varepsilon > C. \tag{10}$$

Са друге стране парциалном интеграцијом добивамо

$$\int_x^y e^{-\sigma t} da(t) = \int_x^y e^{-\sigma t} d\{a(t) - a\} =$$

$$= e^{-\sigma y}\{a(y) - a\} - e^{-\sigma x}\{a(x) - a\} + \sigma \int_x^y e^{-\sigma t}\{a(t) - a\} dt. \tag{11}$$

Како је, према (10),

$|e^{-\sigma t}\{a(t) - a\}| \leqslant e^{-(\sigma - \sigma')t}$ за довољно велико $x < t < y$,

то ће за $\sigma < \sigma'$

$$e^{-\sigma y}\{a(y) - a\} \to 0, \quad e^{-\sigma x}\{a(x) - a\} \to 0$$

и

$$\int_x^y e^{-\sigma t}\{a(t) - a\} dt \to 0 \quad \text{ма како} \quad x \quad \text{и} \quad y \to \infty.$$

Дакле, према (11), интеграл

$$\int_0^\infty e^{-st} d\{a(t)\},$$

тј. Dirichlet-ов ред, конвергира за свако

$$s = \sigma > \sigma' > C,$$

према томе и за свако s за које је

$$R\{s\} > C.$$

(iv) Да бисмо још доказали да Dirichlet-ов ред дивергира кад је

$$R\{s\} = \sigma < C,$$

довољно је да покажемо да је за свако σ за које Dirichlet-ов ред конвергира

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{1}{x} lg|a(x)-a| \leqslant \sigma. \tag{12}$$

Према (12), овај lim sup би морао бити мањи од C кад би он конвергирао за неко $\sigma < C$, што се противи претпоставци (9), тј. да је C једнако том limes superioru.

Да бисмо доказали тврђење (12) приметимо, као што смо то у тачки 5.1. показали, да из конвергенције Dirichlet-ова реда за $s=\sigma$ следи да

$$e^{-\sigma x} a(x) \to 0 \quad \text{или} \quad e^{-\sigma x}\{a(x)-a\} \to 0 \quad \text{кад} \quad x \to \infty,$$

према томе да ли је $\sigma >$ или < 0; дакле, за довољно велико x је

$$e^{-\sigma x}|a(x)-a| < \varepsilon < 1,$$

где је $a=0$, или $a=\lim\limits_{t=\infty} a(t)$, према томе да ли овај limes постоји или не.

Отуда следи

$$-\sigma x + lg|a(x)-a| < lg\varepsilon < 0,$$

или

$$\frac{1}{x} lg|a(x)-a| < \sigma;$$

из ове неједначине, кад пустимо да $x \to \infty$, добивамо тврђење (12).

5. 4. (i) Ако Dirichlet-ов ред конвергира ма у једној тачки равни s, он мора конвергирати у једној области облика

$$R\{s\} > C,$$

где C може бити једнако и $-\infty$, у ком случају Dirichlet-ов ред конвергира у целој равни. Међутим, Dirichlet-ов ред у својој области конвергенције не мора бити апсолутно конвергентан. Тако је, на пример, Dirichlet-ов ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s} \tag{13}$$

конвергентан за $R\{s\} > 0$, али је он апсолутно конвергентан само у области $R\{s\} > 1$.

Према томе, сваком Dirichlet-ову реду одговара и једна област *апсолутне конвергенције*, која је садржана у области обичне конвергенције, али се са њоме не мора поклапати.

Како је, међутим,

$$|a_\nu e^{-\lambda_\nu s}| = |a_\nu| e^{-\lambda_\nu \sigma}, \tag{14}$$

то је јасно да је област апсолутне конвергенције такође једна полураван облика

$$R\{s\} > A, \tag{15}$$

где је A *апсциса апсолутне конвергенције,* а при чему је увек

$$C \leqslant A.$$

(*ii*) Према (14) и резултатима претходне тачке, лако је увидети да се апсциса апсолутне конвергенције A добива аналогним обрасцима као и апсциса обичне конвергенције, ако само у њима функцију $a(t)$, дефинисану обрасцем (1), заменимо функцијом

$$a^+(t) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant t} |a_\nu|. \tag{16}$$

Другим речима, апсциса A је дата обрасцима

$$A = \begin{cases} \limsup\limits_{t=\infty} \dfrac{1}{t}\, lg\, a^+(t) & \text{ако } a^+(t) \text{ дивергира,} \\ \limsup\limits_{t=\infty} \dfrac{1}{t}\, lg\{a^+ - a^+(t)\} & \text{ако } a^+(t) \to a^+ \text{ кад } t \to \infty, \end{cases}$$

или ако у њима заменимо функцију $a^+(t)$ са (16) они узимају облик

$$A = \begin{cases} \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{\lambda_n}\, lg \sum\limits_{\nu=1}^{n} |a_\nu| & \text{ако ред } \Sigma|a_\nu| \text{ дивергира,} \\ \limsup\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{\lambda_n}\, lg \sum\limits_{\nu=n}^{\infty} |a_\nu| & \text{ако ред } \Sigma|a_\nu| \text{ конвергира.} \end{cases}$$

(*iii*) Упоређивањем ових образаца са обрасцима (7), (8) и (9) такође је јасно да између апсциса A и C мора постојати неједначина (15). Али се овде могу појавити и оба гранична случаја, наиме да буде или

$$A = \infty \quad \text{са коначним} \quad C,$$

или да буде

$$A = C.$$

Тако је, на пример, Dirichlet-ов ред

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(lg n)^{-s}$$

конвергентан за $R\{s\}>0$, али апсолутно дивергира за свако s, тј. овде је

$$C=0, \quad \text{а} \quad A=\infty.$$

Са друге стране, сви Dirichlet-ови редови код којих је

$$\lambda_n=n, \quad n=1,2,3,\ldots\ldots,$$

тј. Taylor-ови редови по

$$e^{-s}=z,$$

имају исту област обичне и апсолутне конвергенције. Дакле, за све ове редове је увек

$$A=C.$$

(iv) Ако низ експонената λ_n не расте сувише споро, прецизније ако

$$D=\lim_{n=\infty}\sup\frac{1}{\lambda_n}lg n \tag{17}$$

није једнак нули, тада може постојати само једна пруга највеће ширине D, у којој Dirichlet-ов ред може конвергирати у обичном смислу, али не апсолутно, тј. неједначину (15) можемо допунити са (Cahen {1})

$$C\leqslant A\leqslant C+D.$$

Доказ. Нека је D коначно и $\varepsilon''>0$, тада је, према (17), за довољно велико n

$$lg\, n/\lambda_n<D+\varepsilon'',$$

тј.

$$e^{-(D+\varepsilon'')\lambda_n}<\frac{1}{n},$$

па је за свако $\varepsilon'>0$

$$e^{-(1+\varepsilon')(D+\varepsilon'')\lambda_n}<1/n^{1+\varepsilon'},$$

или

$$e^{-(D+\varepsilon)\lambda_n}<1/n^{1+\varepsilon'}, \quad \text{где је} \quad \varepsilon=D\varepsilon'+\varepsilon''+\varepsilon'\varepsilon''.$$

Према томе је

$$\begin{aligned}|a_n e^{-(s+D+\varepsilon)\lambda_n}|=|a_n e^{-s\lambda_n}|\,e^{-(D+\varepsilon)\lambda_n}\leqslant\\ \leqslant|a_n e^{-s\lambda_n}|\,n^{-(1+\varepsilon')}.\end{aligned} \tag{18}$$

Како је ред

$$\Sigma\, 1/n^{1+\varepsilon'}$$

апсолутно конвергентан, то ће и ред

$$\Sigma\, | a_n e^{-s\lambda_n} | n^{-(1+\varepsilon')}$$

бити апсолутно конвергентан, кад год је ред

$$\Sigma\, a_n e^{-s\lambda_n}$$

конвергентан, јер у том случају

$$a_n e^{-s\lambda_n} \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Дакле, према (18), ред

$$\Sigma\, a_n e^{-(s+D+\varepsilon)\lambda_n}$$

је апсолутно конвергентан кад год је ред

$$\Sigma\, a_n e^{-s\lambda_n}$$

конвергентан. Отуда непосредно следи да мора бити

$$A \leqslant C + D.$$

Да заиста постоје Dirichlet-ови редови код којих је у овој неједначини постигнут знак једнакости, показује напред наведени пример (13).

VI. Понашање Dirichlet-ова реда на рубу области конвергенције

6. 1. (i) Претпоставимо да је апсциса конвергенције C Dirichlet-ова реда коначна, тј. да је ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}$$

конвергентан за $R\{s\} > C$, а дивергентан за $R\{s\} < C$. У том случају можемо без ограничења претпоставити да је $C = 0$; јер ако је $C \neq 0$, кад ставимо

$$a_\nu' = a_\nu e^{C\lambda_\nu} \quad \text{и} \quad s' = s - C,$$

биће

$$a_\nu e^{-s\lambda_\nu} = a_\nu e^{C\lambda_\nu} e^{-(s-C)\lambda_\nu} = a_\nu' e^{-s'\lambda_\nu},$$

тако да је ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu' e^{-s'\lambda_\nu}$$

конвергентан за $R\{s'\}>0$, а дивергентан за $R\{s'\}<0$.

Према томе можемо од сада без ограничења претпоставити да Dirichlet-ов ред

$$f(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}$$

конвергира за $R\{s\}>0$, тако да је овим редом дефинисана аналитичка функција $f(z)$ која је регуларна у целој полуравни $R\{z\}>0$.

На рубу ове области, тј. на самој правој $R\{s\}=0$, о природи ове функције, као и о конвергенцији самог Dirichlet-ова реда, не можемо у општем случају ништа закључити.

Јасно је, да од понашања реда

$$\Sigma a_\nu, \text{ односно реда } \Sigma a_\nu e^{-it\lambda_\nu},$$

зависи природа и понашање функције $f(s)$ у близини тачке руба $s=0$, односно тачке руба $s=it$. Довољно је да при томе посматрамо само тачку $s=0$, јер за све остале тачке руба, $s=it$, треба, место реда Σa_ν, посматрати ред $\Sigma a_\nu'$, са $a_\nu'=a_\nu e^{-it}$. Овим се добивени ставови ниуколико не ограничавају, ако се о природи коефицијената a_ν, односно a_ν' ништа не претпоставља; међутим, они ставови који важе само за реалне или позитивне коефицијенте и који се односе на тачку руба $s=0$, не могу се непосредно применити и на тачке руба $s=it$.

(ii) Овде ћемо изнети неколико ставова који се односе на ова испитивања, и то претежно на она, код којих примена Stieltjes-ова интеграла долази до изражаја, тј. ставове који се непосредно добивају из чињенице да се Dirichlet-ов ред може изразити Laplace-Stieltjes-овим интегралом

$$f(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}=\int_0^{\infty} e^{-sx}\,da(x)=s\int_0^{\infty} e^{-sx}a(x)\,dx, \qquad (1)$$

$$R\{s\}>0.$$

Тако, за Dirichlet-ов ред као и за Laplace-ов интеграл, важи без икакве промене аналогон Abel-ова {1} става о непрекидности функције дефинисане Taylor-овим редом, и то са Stoltz-овим {1} проширењем, који гласи:

Став 1. *Ако Dirichlet-ов ред*

$$f(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}$$

конвергира у тачки $s=0$, *тј. ако је ред*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$$

конвергентан, тада је функција $f(s)$ *непрекидна не само за реално и позитивно* s *(Abel-ов став) већ и у целом углу*

$$|arc(s)| \leqslant \theta_0 < \pi/2, \tag{2}$$

(Stoltz-ов став) тј.

$$f(s) \to \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \tag{3}$$

кад $s \to 0$ *остајући у поменутом углу.*

Доказ овог става следи из доказа Cahen-ова става тачке 5. 2. (ii); његов непосредан доказ је овај.

Нека је, према претпоставци и ознакама тачке 5. 1.,

$$a=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \lim_{x=\infty} a(x);$$

тада је, према 5. 1. (4),

$$f(s)-a=s\int_0^{\infty} e^{-sx}\{a(x)-a\}\,dx.$$

Ако са ε означимо један, унапред дати, произвољно мали позитиван број, тада, према претпоставци, можемо увек изабрати тако велик број X да буде

$$|a(x)-a| < \varepsilon \quad \text{за свако} \quad x \geqslant X;$$

а како је

$$|a(x)-a| \leqslant M \quad \text{за свако} \quad x \geqslant 0,$$

где je M један коначан број, то je за $R\{s\}>0$,

$$|f(s)-a| = \left| s\int_0^X e^{-sx}\{a(x)-a\}\,dx + s\int_X^\infty e^{-sx}\{a(x)-a\}\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |s|\int_0^X e^{-xR\{s\}}|a(x)-a|\,dx + |s|\int_X^\infty e^{-xR\{s\}}|a(x)-a|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant M|s|\int_0^X e^{-xR\{s\}}\,dx + \varepsilon|s|\int_X^\infty e^{-xR\{s\}}\,dx =$$

$$\leqslant M\frac{|s|}{R\{s\}}(1-e^{-XR\{s\}}) + \varepsilon\frac{|s|}{R\{s\}}e^{-XR\{s\}}.$$

Како се s налази у углу (2), тј. како je

$$|\theta| \leqslant \theta_0 < \pi/2, \quad \text{где je} \quad \theta = arc(s),$$

то je

$$\frac{|s|}{R\{s\}} = \frac{1}{\cos\theta} \leqslant \frac{1}{\cos\theta_0},$$

тако да je

$$|f(s)-a| \leqslant \frac{M}{\cos\theta_0}\left(1-e^{-XR\{s\}}\right) + \frac{\varepsilon}{\cos\theta_0}e^{-XR\{s\}}.$$

Ако сад пустимо да $s\to 0$ остајући стално у поменутом углу, добивамо да je

$$\limsup_{s=0} |f(s)-a| \leqslant \frac{\varepsilon}{\cos\theta_0},$$

јер

$$1-e^{-XR\{s\}} \to 0 \quad \text{кад} \quad s\to 0.$$

Како je, међутим, $\theta_0<\pi/2$, тј. $1/\cos\theta_0$ je коначан број, и како ε можемо бирати произвољно мало, то горњи lim sup мора бити мањи од произвољно малог броја, а како je он увек позитиван, то он може бити једнак само нули, дакле

$$f(s)-a\to 0 \quad \text{кад} \quad s\to 0 \quad \text{остајући у углу (2)},$$

чиме je тврђење (3) доказано.

6. 2. (i) Обратан став, међутим, не важи, тј. из непрекидности функције $f(s)$ у углу (2) не следи у општем случају конвергенција Dirichlet-ова реда у тачки $s=0$. Ово последње можемо закључити само ако се коефициенти a_n не понашају сувише неправилно за велике вредности индекса n, тј. ако их ограничимо извесним условима који ту неправилност спречавају, а који имају облик услова (6), (7), (15) или (16).

Ставове ове врсте за Taylor-ове редове дао је Tauber {1}, и ови се ставови подесном транскрипцијом могу применити на Dirichlet-ове редове (в. Landau {1}).

(*ii*) Ради бољег разумевања наведимо прво ставове ове врсте.

Нека је

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu, \quad \text{тј.} \quad a_n = s_n - s_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad s_0 = 0;$$

тада је

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \nu (s_\nu - s_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu s_\nu - \sum_{\nu=2}^{n} \nu s_{\nu-1} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \nu s_\nu - \sum_{\nu=1}^{n-1} (\nu+1) s_\nu = n s_n - \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu,$$

одакле следи

$$s_n - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Ако је ред Σa_ν конвергентан, тј. ако

$$s_n \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

тада ће и [11]

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty, \tag{5}$$

одакле, на основу једначине (4), добивамо тзв. Kronecker-ов {1} потребан услов за конвергенцију реда Σa_ν, наиме: *да би ред* Σa_ν *био конвергентан потребно је не само да* $a_n \to 0$, *већ и да*

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu \to 0 \quad \textit{кад} \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Обратно, овај услов сам по себи није довољан за конвергенцију реда Σa_ν, али ако је поред тога задовољен и услов (5), тада, према (4), следи да $s_n \to a$, тj. да ред мора конвергирати.

Другим речима, *из* (5) *можемо закључити конвергенцију реда* Σa_ν *ако је још задовољен и Kronecker-ов услов* (6).

Како је (6) увек задовољен када [11]

$$n a_n \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty, \tag{7}$$

то у горњем ставу Kronecker-ов услов можемо заменити и ужим условом (7).

(iii) Tauber је показао да се (5) може заменити претпоставком да функција $F(x)$, дефинисана Taylor-овим редом

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu, \tag{8}$$

буде непрекидна у тачки $x=1$ са леве стране. Прецизније:

Ако је Taylor-ов ред (8) *конвергентан у кругу* $|x|<1$, *и ако*

$$F(x) \to a \quad \textit{кад} \quad x \to 1-0, \tag{9}$$

тада ће ред Σa_ν *бити конвергентан и*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = F(1-0) = a,$$

ако је поред тога задовољен и услов (6) *или специјалнији услов* (7).

Овде није потребно да изводимо доказ овога става јер је он садржан у одговарајућем ставу за Dirichlet-ове редове, чији доказ износимо у наредној тачки.

Да је услов (9) заиста општији од услова (5) следи из Frobenius-ова {1} проширења Abel-ова става, које казује да већ из (5) следи (9). За доказ овога става види, на пример, Knopp {2, стр. 508}.

Напоменимо, напослетку, да овај Tauber-ов став спада у групу т.зв. елементарних Tauber-ових ставова, за разлику од тешких Tauber-ових ставова који потичу од Hardy-а и Littlewood-а [11, (iii)] (види Hardy {3, 4, 7}, Hardy-Littlewood {1}, Littlewood {2} и Knopp {2, стр. 519—524}).

(iv) Ако привремено означимо са $a(x)$ степенасту функцију

$$\sum_{\nu \leqslant x} a_\nu,$$

тада видимо да Kronecker-ов услов (6) можемо изразити и Stieltjes-овим интегралом у облику

$$\delta(x)=\frac{1}{x}\int_0^x t da(t)\to 0 \quad \text{кад} \quad x\to\infty. \tag{10}$$

Отуда, по аналогији, могли бисмо закључити да ће из десне непрекидности функције

$$f(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu} \tag{11}$$

у тачки $s=0$, следити конвергенција Dirichlet-ова реда за $s=0$, ако је задовољен услов (10), али с тиме, да се у њему за функцију $a(t)$ узме раније уведена степенаста функција

$$a(t)=\sum_{\lambda_\nu\leqslant t} a_\nu. \tag{12}$$

Заиста, овим добивамо проширење Tauber-ова става на Dirichlet-ове редове које гласи:

Став 2. *Ако је Dirichlet-ов ред* (11) *конвергентан за* $R\{s\}>0$, *и ако*

$$f(s)\to a \quad \textit{кад} \quad s\to +0, \tag{13}$$

тада из (10) *са* (12) *следи конвергенција реда* (11) *за* $s=0$, *тј.*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = f(+0)=a. \tag{14}$$

Како је, према (10) и (12),

$$\delta(x)=\frac{1}{x}\sum_{\lambda_\nu\leqslant x}\lambda_\nu a_\nu=\frac{\lambda_n}{x}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu,$$

кад је

$$\lambda_n\leqslant x<\lambda_{n+1},$$

то ће услов (10), са функцијом (12), бити испуњен кадгод

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu\to 0 \quad \text{кад} \quad n\to\infty. \tag{15}$$

Овом услову можемо дати још и једноставнији, али специалнији облик, ако приметимо да је

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu a_\nu=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n}(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}a_\nu,$$

јер из претпоставке да је

$$\lambda_0=0 \quad \text{и} \quad \lambda_{n-1}<\lambda_n\to\infty \quad \text{са} \quad n,$$

следи [13] да ће (15) бити испуњен кадгод

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}a_n\to 0 \quad \text{кад} \quad n\to\infty,\\ \text{тј. кад је}\qquad &a_n=o\left(\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right),\quad n\to\infty. \end{aligned}\right\}\tag{16}$$

(v) На тај начин, услову (6) одговара за Dirichlet-ove редове услов (15), а услову (7) услов (16), тако да проширење Tauber-ова става на Dirichlet-ове редове, које потиче од Landau-a {1} и M. Riesz-a {1} гласи:

Став 2'. *Из* (13) *следи* (14) *ако је задовољен услов* (15) *или услов* (16).

Доказ. Из

$$\int_0^x t\,da(t)=x\delta(x)$$

следи

$$x\,da(x)=d\{x\delta(x)\}=x\,d\delta(x)+\delta(x)\,dx,$$

или

$$da(x)=d\delta(x)+\frac{\delta(x)}{x}\,dx,\tag{17}$$

тако да је

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,da(t)=\int_0^\infty e^{-st}\,d\delta(t)+\int_0^\infty e^{-st}\frac{\delta(t)}{t}\,dt.$$

Да су ове формално извршене операције за Stieltjes-ов интеграл заиста дозвољене следи из особине Stieltjes-ова интеграла наведене у тачки В. 4.4. (i).

Како се услов (10) своди на

$$\delta(x)=o(1),\quad x\to\infty,$$

то је, према Abel-ову ставу 1,

$$\int_a^\infty e^{-st}\,d\delta(t)=o(1), \quad s\to+0,$$

а према (17) је

$$a(x)=\int_0^x \frac{\delta(t)}{t}\,dt+\delta(x)=\int_0^x \frac{\delta(t)}{t}\,dt+o(1), \quad x\to\infty.$$

Отуда, ако за сад сматрамо да $s\to 0$ и $x\to\infty$, независно један од другог, биће

$$f(s)-a(x)=\int_0^\infty e^{-st}\frac{\delta(t)}{t}\,dt-\int_0^x \frac{\delta(t)}{t}\,dt+\int_0^\infty e^{-st}\,d\delta(t)-\delta(x)=$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}\frac{\delta(t)}{t}\,dt-\int_0^x \frac{\delta(t)}{t}\,dt+o(1)=$$

$$=-\int_0^x (1-e^{-st})\frac{\delta(t)}{t}\,dt+\int_x^\infty e^{-st}\frac{\delta(t)}{t}\,dt+o(1),$$

$$s\to+0, \quad x\to\infty.$$

Означимо сад са $\Delta(x)$ функцију [16]

$$\Delta(x)=\operatorname*{Max}_{t\geqslant x}|\delta(t)|;$$

она, према (10), постоји за свако $x\geqslant 0$ и

$$\Delta(x)\to 0 \quad \text{кад} \quad x\to\infty.$$

Како је даље

$$|\delta(t)|\leqslant M \quad \text{за свако} \quad x\geqslant 0,$$

где је M један коначан број, то добивамо

$$|f(s)-a(x)|\leqslant M\int_0^x \frac{1-e^{-st}}{t}\,dt+\Delta(x)\int_x^\infty e^{-st}\frac{dt}{t}+o(1), s\to+0, x\to\infty.$$

Ако сада пустимо да s и $1/x$ тако теже нули да буде стално

$$xs=\varepsilon, \quad \text{где је} \quad \varepsilon>0, \quad \text{иначе произвољно},$$

и у овим последњим интегралима извршимо смену $st=u$, биће

$$|f(s)-a(x)|\leqslant M\int_0^{\varepsilon}\frac{1-e^{-u}}{u}\,du+\Delta(x)\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{-u}\frac{du}{u}+o(1)$$

$$\leqslant M\int_0^{\varepsilon}\frac{1-e^{-u}}{u}\,du+o(1),\quad s=\varepsilon/x,\ x\to\infty,$$

јер је

$$\Delta(x)=o(1),\ x\to\infty.$$

Дакле,

$$\limsup_{x=\infty}|f(\varepsilon/x)-a(x)|\leqslant M\int_0^{\varepsilon}\frac{1-e^{-u}}{u}\,du,$$

а како, према претпоставци,

$$f(\varepsilon/x)\to a,\quad x\to\infty,$$

то је и

$$\limsup_{x=\infty}|a(x)-a|\leqslant M\int_0^{\varepsilon}\frac{1-e^{-u}}{u}\,du.$$

Отуда следи, јер је ε произвољно и можемо га бирати коликогод желимо мало, да

$$|a(x)-a|\to 0\quad \text{кад}\quad x\to\infty,$$

тј. да је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu=a.$$

6. 3. (i) Из претходног излагања следи да функција $f(s)$ може тежити одређеној граничној вредности кад $a\to+0$ и кад њен Dirichlet-ов ред дивергира за $s=0$. То је, на пример, случај са функцијом [32]

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n^s=(1-2^{1-s})\zeta(s),$$

где ред

$$\Sigma(-1)^n$$

дивергира, док

$$f(s)\to 1/2\quad \text{кад}\quad s\to+0.$$

Међутим, како у овом примеру тако и уопште, ако је испуњен услов (13) а Dirichlet-ов ред дивергира за $s=0$, тада он мора осцилирати; другим речима, ако ред Σa_ν „стварно дивергира" [7] тада не може постојати ни гранична вредност $\lim\limits_{s=+0} f(s)$.

Под стварном дивергенцијом реда Σa_ν, односно низа

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

подразумевамо у реалном случај кад

$$s_n \to +\infty \quad \text{или} \quad -\infty, \quad \text{са} \quad n \to \infty;$$

у комплексном можемо рећи да низ s_n „стварно дивергира", ако се он, удаљујући се у бесконачност, асимптотски придржава одређеног правца, тј. стављајући

$$s_n = r_n e^{i\alpha_n},$$

ако

$$r_n \to \infty \quad \text{и} \quad \alpha_n \to \alpha \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Са овако прецизираним појмом, горње тврђење се своди на чињеницу да

$$|f(s)| \to \infty \quad \text{кад} \quad s \to +0, \tag{18}$$

ако, за $s=0$, Dirichlet-ов ред

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}$$

„стварно дивергира".

Међутим, (18) остаје у важности и под нешто општијим претпоставкама, наиме, ако место стварне дивергенције реда $s_n = \Sigma a_\nu$ претпоставимо само да се s_n удаљује у бесконачност остајући стално у неком углу чији је отвор мањи од π, или, још општије, ако било његов реални, било имагинарни део, стварно дивергира (в. Knopp {3} и {4}).

Овде ћемо доказати само овај став.

Став 3. *Нека је Dirichlet-ов ред*

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}$$

конвергентан за $R\{s\}>0$ *и ставимо*

$$s_n=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu;$$

ако је тада за извесно α *и свако* $n=1, 2, 3,\ldots..$

$$|arc\, s_n-\alpha|\leqslant\theta_0<\pi/2, \tag{19}$$

из

$$|s_n|\to\infty \quad \text{кад} \quad n\to\infty, \tag{20}$$

следи (18).

Из претпоставке (19) следи да се тачке s_n морају налазити у углу отвора $2\theta_0$ са теменом у почетку; међутим, обичном транслацијом, тј. сменом $s_n'=s_n-a$, можемо претпоставку (19) лако проширити на

$$|arc\,(s_n-a)-\alpha|\leqslant\theta_0<\pi/2,$$

тј. да се тачке s_n налазе у углу са произвољним теменом у тачки a.

Доказ горњег става добивамо ако приметимо да и функција

$$a(x)=\sum_{\lambda_\nu\leqslant x} a_\nu$$

задовољава услов (19), тј. да је

$$|arc\{a(x)\}-\alpha|\leqslant\theta_0<\pi/2 \quad \text{за свако} \quad x\geqslant 0,$$

тако да за реално s можемо на интеграл (1) применити неједначину [27]

$$|f(s)|=s\left|\int_0^\infty e^{-st}a(t)\,dt\right|\geqslant s\cos\theta_0\int_0^\infty e^{-st}|a(t)|\,dt;$$

отуда следи да је за свако $x>0$

$$|f(s)|\geqslant s\cos\theta_0\int_0^x e^{-st}|a(t)|\,dt\geqslant$$

$$\geqslant s\cos\theta_0\, e^{-sx}\int_0^x |a(t)|\,dt,$$

или, ако ставимо $s=1/x$,

$$|f(s)|\geqslant\frac{\cos\theta_0}{e}\frac{1}{x}\int_0^x |a(t)|\,dt, \quad \text{са} \quad s=1/x.$$

Како, према (20),

$$|a(t)| \to \infty \quad \text{са} \quad t,$$

то ће и [12]

$$\frac{1}{x}\int_0^x |a(t)|\,dt \to \infty \quad \text{кад} \quad x \to \infty,$$

тако да се тврђење (18) добива из горње неједначине ако у њој пустимо да $x \to \infty$.

Напоменимо да се горњи став може донекле прецизирати тј. допунити са овим:

Ако s_n стварно дивергира у смислу горње дефиниције, тада и $f(s)$ стварно дивергира кад $s \to +0$.

Ако s_n дивергира остајући у неком углу са отвором мањим од π, тада и $f(s)$, кад $s \to +0$, дивергира, остајући у углу са отвором мањим од π.

6. 4. (i) Уколико за низ s_n, сем стварне дивергенције, ништа не претпостављамо, ставови претходне тачке важе само кад се s приближава нули дуж реалне осе, тако да се они у општем случају не могу проширити ни на Stolz-ов угао. Другим речима, у општем случају из (19) и (20), кад $s \to 0$ дуж неке путање различите од реалне осе, (1б) не мора важити. Ово зависи првенствено од брзине којом ред $|\Sigma a_\nu|$, тј. низ $|s_n|$, дивергира. Ако

$$|s_n| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right|$$

не тежи бесконачности сувише брзо, Stolz-ово проширење Abel-ова става остаје непромењено. Међутим, ако $|s_n|$ тежи бесконачности већ експоненциалном брзином, ово више не важи за Stolz-ов угао, а област у којој се сме налазити путања дуж које s тежи нули бива утолико мања уколико $|s_n|$ брже тежи бесконачности.

(ii) Да бисмо истакли везу између брзине асимптотског понашања низа s_n и понашање функције $f(s)$ кад s не тежи нули дуж реалне осе, навешћемо овде само два специална, али типична случаја.

Став 4. *Ако је*

$$a(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} a_\nu \sim A x^k, \quad x \to \infty, \quad k \geqslant 0, \tag{21}$$

тада је Dirichlet-ов ред

$$f(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}$$

конвергентан за $R\{s\}>0$ *и*

$$f(s)\sim A\,\frac{\Gamma(k+1)}{s^k}, \tag{22}$$

кад $s\to 0$, *остајући у углу* (2).

Ако је

$$\lambda_{n+1}\sim\lambda_n, \quad \text{тј. ако} \quad \lambda_{n+1}/\lambda_n\to 1 \quad \text{кад} \quad n\to\infty,$$

тада се услов (21) своди на

$$s_n=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\sim A\lambda_n{}^k, \quad n\to\infty,$$

што казује да низ s_n стварно дивергира, и то у правцу који је дат аргументом броја A.

Довољно је да став 4 докажемо под претпоставком $A=0$, тј. да докажемо да *из*

$$b(x)=\sum_{\lambda_\nu\leqslant x} b_\nu=o(x^k), \; x\to\infty, \tag{23}$$

следи

$$g(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\, e^{-s\lambda_\nu}=o(1/s^k), \tag{24}$$

кад $s\to 0$ *у углу* (2).

Јер, ако ставимо

$$b(x)=a(x)-Ax^k,$$

тада се претпоставка (21) своди на претпоставку (23), а тврђење (24) на [32]

$$g(s)=s\int_0^{\infty} e^{-sx}\,b(x)\,dx=s\int_0^{\infty} e^{-sx}\,a(x)\,dx-As\int_0^{\infty} e^{-sx}\,x^k\,dx=$$

$$=f(s)-A\,\frac{\Gamma(k+1)}{s^k}=o(1/s^k), \; s\to 0,$$

што претставља тврђење (22).

Да бисмо доказали да из (23) следи (24), ставимо $s=\sigma+it$, и у интегралу

$$g(s)=s\int_0^\infty e^{-sy}\,b(y)\,dy=s\int_0^\infty e^{-\sigma y}y^k e^{-ity}\frac{b(y)}{y^k}\,dy,$$

стављајући $x=1/\sigma$, извршимо смену

$$y=u/\sigma=xu;$$

тада добивамо

$$g(s)=\frac{s}{\sigma^{k-1}}\int_0^\infty e^{-u}u^k e^{-ixtu}\frac{b(xu)}{(xu)^k}du.$$

Како је, према (23),

$$\frac{|b(xu)|}{(xu)^k}=\frac{|b(t)|}{t^k}\leqslant M \quad \text{за свако } x \text{ и } u,$$

јер је

$$b(t)=0 \quad \text{за} \quad 0\leqslant t<\lambda_1,$$

и

$$\frac{|b(xu)|}{(xu)^k}<\varepsilon'$$

за довољно велико x и $u\geqslant u'$, то је

$$\sigma^{k-1}\left|\frac{g(s)}{s}\right|\leqslant\left|\int_0^{u'}+\int_{u'}^\infty e^{-u}u^k e^{-ixtu}\frac{b(xu)}{(xu)^k}du\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^{u'}e^{-u}u^k\,du+\varepsilon'\int_{u'}^\infty e^{-u}u^k\,du.$$

Дакле, за произвољно мало ε и довољно мало u' и σ, тј. довољно велико x, је

$$\sigma^{k-1}\left|\frac{g(s)}{s}\right|<\varepsilon.$$

Како се s налази у углу (2), тј.

$$\left|\frac{s}{\sigma}\right|\leqslant\frac{1}{\cos\theta_0},$$

то је

$$|s^k g(s)|\leqslant\varepsilon\left|\frac{s}{\sigma}\right|^{k-1}\leqslant\frac{\varepsilon}{\cos^{k-1}\theta_0}=\varepsilon M',$$

где је M' коначан број, па ће, дакле,

$$s^k g(s)\to 0 \quad \text{кадгод} \quad s\to 0 \quad \text{у углу (2)}.$$

Овим је тврђење (24), према томе и став 4, доказано.

6. 5. (I) Уочимо, напослетку, случај кад низ $|s_n|$, тј. функција $|a(x)|$ брзо расте, и то експоненциално. Јасно је да $|a(x)|$ не може тежити бесконачности сувише брзо, наиме не сме тежити брже или као e^x, јер у том случају Dirichlet-ов ред не може конвергирати за свако $s > 0$. Уочимо зато најједноставнији случај, наиме кад се $a(x)$ понаша као $e^{\sqrt{x}}$; тада важи овај став:

Став 5. *Ако је*

$$a(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} a_\nu \sim A x^p e^{2\sqrt{x}}, \quad x \to \infty, \tag{25}$$

тада је Dirichlet-ов ред

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-s\lambda_\nu}$$

конвергентан за $R\{s\} > 0$ *и*

$$f(s) \sim 2A\sqrt{\pi}\, s^{-(2p+\frac{1}{2})} e^{1/s}, \tag{26}$$

и то кад $s = \sigma + it \to 0$, *тако да буде стално*

$$|t| \leqslant M\sigma^{\frac{3}{2}}, \tag{27}$$

где је M *неки коначан и позитиван број.*

Ако низ експонената λ_n не тежи бесконачности сувише брзо, и то не само тако да буде $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$, већ и да

$$\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

а што се своди на

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = o(\sqrt{\lambda_n}), \quad n \to \infty,$$

тада се претпоставка (25) своди на

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sim A\lambda_n^p e^{2\sqrt{\lambda_n}}, \ n \to \infty.$$

С друге стране, из услова (27) следи да у овом случају, тачка s тежећи нули, не само да не сме изаћи из Stolz-ова угла, већ се мора налазити у некој области чија гранична крива мора додиривати реалну осу у тачки $s = 0$ (в. сл. 24).

Најзад, приметимо да на основу претпоставке (25) Dirichlet-ов ред мора заиста конвергирати за $R\{s\}>0$, као што то следи из Cahen-ова става тачке 5.3 (i), јер у овом случају

$$\frac{1}{x}\lg|a(x)|\sim\frac{2\sqrt{x}}{x}\to 0 \quad \text{кад} \quad x\to\infty.$$

(ii) Да би смо показали да из (25) следи (26) ставимо, као и у претходном доказу,

$$b(x)=a(x)-Ax^{p}e^{2\sqrt{x}}$$

и

$$g(s)=s\int_{0}^{\infty}e^{-sx}b(x)\,dx.$$

Тада је

$$f(s)=s\int_{0}^{\infty}e^{-sx}a(x)\,dx=As\int_{0}^{\infty}e^{-sx+2\sqrt{x}}x^{p}\,dx+g(s). \tag{28}$$

Посматрајмо прво функцију

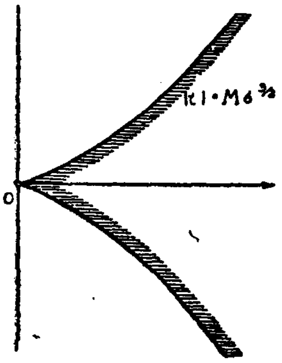
$$\Phi(s)=As\int_{0}^{\infty}e^{-sx+2\sqrt{x}}x^{p}\,dx; \tag{29}$$

ако за тренутак претпоставимо да је s реално и позитивно, и у овом интегралу извршимо смену

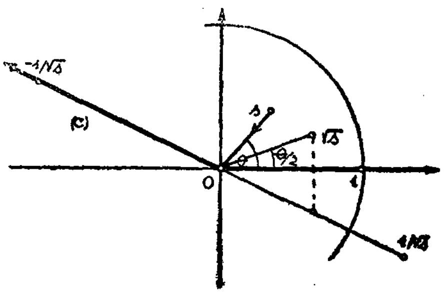
$$x=s^{-2}(1+u\sqrt{s})^{2},\quad dx=\frac{2}{s\sqrt{s}}(1+u\sqrt{s})\,du,$$

добивамо

$$\Phi(s)=2As^{-(2p+1/2)}e^{1/s}\int_{-1/\sqrt{s}}^{\infty}e^{-u^{2}}(1+u\sqrt{s})^{2p+1}\,du. \tag{30}$$



Сл. 24.



Сл. 25.

Оба израза (29) и (30) претстављају извесну аналитичку функцију, и то први за $R\{s\}>0$, а други у целој равни комплексне променљиве s, и како су они једнаки функцији $\Phi(s)$ за реално и позитивно s, то на основу аналитичког продужења, једначина (30) важи и кад је s имагинарно, и претставља аналитичко продужење функције $\Phi(s)$ у целој равни. Како је функција $\Phi(s)$ мултиформна, са критичним сингуларитетом у тачки $s=0$, то ће израз (29) претстављати ону грану те функције која је реална за реално s, ако је $|arc(s)|<\pi$, тј. ако комплексну раван пресечемо дуж негативног дела реалне осе; при томе се интеграл (30) има сматрати као криволиниски узет, на пример, дуж путање C, која има облик криве из слике 25.

Ако пустимо да $s\to 0$ у правцу θ, тј. ако ставимо

$$s=x^{-2}e^{i\theta} \quad \text{и пустимо да} \quad x\to\infty,$$

а у делу интеграла (30), узетог праволиниски од $-1/\sqrt{s}$ до 0, извршимо смену

$$u=ve^{-i\theta/2},\ du=e^{-i\theta/2}\,dv,$$

биће

$$\int_{-1/\sqrt{s}}^{\infty} e^{-u^2}(1+u\sqrt{s})^{2p+1}\,du=\int_{-1/\sqrt{s}}^{0}+\int_{0}^{\infty}=$$

$$=e^{-i\theta/2}\int_{-x}^{0} e^{-v^2(\cos\theta-i\sin\theta)}(1+v/x)^{2p+1}\,dv+\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}(1+u\sqrt{s})^{2p+1}\,du.$$

Према томе, овај интеграл ће тежити одређеној граничној вредности [24], и то

$$e^{-i\theta/2}\int_{-\infty}^{0} e^{-v^2(\cos\theta-i\sin\theta)}\,dv+\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\,du,$$

кад $x\to\infty$, тј. кад $s\to 0$, тако да буде

$$\cos\theta>0 \quad \text{или} \quad |\theta|<\pi/2.$$

Ова ће гранична вредност износити [31, (iv)]

$$\int_{-}^{0} e^{-v^2}dv+\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}du=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

једино кад $s\to 0$, приближујући се реалној оси, тј. кад и $\theta\to 0$.

Према (30) је, дакле,

$$\Phi(s) \sim 2A\sqrt{\pi}\, s^{-(2p+1/2)} e^{1/s} \quad \text{кад} \quad s \to 0 \quad \text{и} \quad arc(s) \to 0. \tag{31}$$

(iii) Да бисмо сад показали да из (25) следи (26) са (27), треба на основу једначина (28) и (29) и релације (31) да покажемо да је

$$g(s) = s\int_0^\infty e^{-sx} b(x)\, dx = o\left(s^{-(2p+1/2)} e^{1/s}\right), \tag{32}$$

кад $s \to 0$, тако да (27) буде задовољено, и то кадгод је

$$b(x) = a(x) - Ax^p e^{2\sqrt{x}} = o(x^p e^{2\sqrt{x}}), \quad x \to \infty; \tag{33}$$

ова последња релација је непосредна последица претпоставке (25).

Ако зато ставимо $s = \sigma + it$, тада можемо, сличним резоновањем као у претходним тачкама, показати да из (33) следи

$$|sg(s)| \leqslant \varepsilon \sigma^{1-(2p+1/2)} e^{1/\sigma},$$

где је ε произвољан мали број, ако је само σ довољно мало.

Одавде следи да ће

$$|s^{2p+1/2} e^{-1/s} g(s)| \leqslant \varepsilon M',$$

тј. да ће (32) бити задовољено само ако је

$$\left|\frac{s}{\sigma}\right|^{2p-1/2} e^{1/\sigma - R\{1/s\}} \leqslant M',$$

за једно коначно M'.

Овај се услов, међутим, своди на

$$\frac{1}{\sigma} - R\{1/s\} \leqslant M,$$

где је M неки коначан број, и еквивалентан је услову (27).

Овим је показано да је (32), а према томе и (26), испуњено кад $s \to 0$ остајући у области (27), чиме је став 5 доказан.

Што се тиче ставова код којих је брзина дивергенције већа види Авакумовић {1}, као и Авакумовић-Карамата {1}.

(iv) Насупрот наведеним ставовима (у односу на Abel-ов став), код којих се претпоставља да Dirichlet-ов ред дивергира мање или више брзо у тачки $s = 0$, стоје ставови код којих Dirichlet-ов ред конвергира за $s=0$, и то мање или више брзо. Док је код прве групе ставова област у којој можемо закључити асимптотско понашање функције дефинисане Dirichlet-овим редом утолико мања, уколико ред брже дивергира, дотле је код ових других ставова ова област утолико већа уколико ред брже конвергира.

Један став ове врсте дао је за Taylor-ове редове Knopp {5, стр. 32. зад. 6}, који гласи:

Ако Taylor-ов ред

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

конвергира у тачки $z=1$ *граничној вредности* a, *и то тако брзо да је*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = a + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty,$$

тада и

$$F(z) \to a$$

кад $z \to 1$, *налазећи се у ма ком кругу који се цео налази у кругу конвергенције* $|z|=1$, *и овај круг додирује у тачки* 1.

Из овог става видимо да се, због тога што ред Σa_ν конвергира брзином $\frac{1}{\sqrt{n}}$, Stolz-ов угао може проширити на већу област.

Ако ставимо

$$z=e^{-s}$$

Taylor-ов ред узима облик Dirichlet-ова реда, са $\lambda_\nu=\nu$, унутрашњост круга конвергенције $|z|=1$ пресликава се на полураван $R\{s\}>0$, а област у којој се сме налазити тачка z при граничном прелазу $z\to 1$, пресликава се на ма коју област чија гранична крива има са правом конвергенције Dirichlet-ова реда, $R\{s\}=0$, додир првог реда у тачки $s=0$.

Овај став можемо лако проширити и на опште Dirichlet-ове редове, шта више, и под нешто општијом претпоставком, из које се јасно види како се област у којој $f(s)\to a$ кад $s\to 0$ повећава са брзином конвергенције Dirichlet-ова реда у тачки $s=0$.

Став 6. *Нека је* $0 \leqslant \mu < 1$ *и*

$$a(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} a_\nu = a + o(x^{-\mu}), \quad x \to \infty. \tag{34}$$

Тада је Dirichlet-ов ред

$$f(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\lambda_\nu s}$$

конвергентан за $R\{s\} > 0$, *и*

$$f(s) \to a \quad \text{кад} \quad s \to 0,$$

тако да буде стално

$$|s| < M\sigma^{1-\mu}, \quad \text{где је} \quad \sigma = R\{s\}.$$

Доказ. Ако Dirichlet-ов ред изразимо у облику Laplace-Stieltjes-ова интеграла

$$f(s) = s\int_0^\infty e^{-st} a(t)\, dt, \quad R\{s\} > 0,$$

и ако у овом интегралу ставимо

$$a(t) = a + \varepsilon(t)\, t^{-\mu},$$

где, према (34),

$$\varepsilon(t) \to 0 \quad \text{кад} \quad t \to \infty,$$

добивамо

$$f(s) = a + s\int_0^\infty e^{-st} \varepsilon(t)\, dt.$$

Према томе је

$$|f(s) - a| \leqslant |s| \int_0^\infty e^{-\sigma t} |\varepsilon(t)| t^{-\mu} dt \leqslant$$

$$\leqslant M|s| \int_0^x e^{-\sigma t} t^{-\mu} dt + \varepsilon|s| \int_x^\infty e^{-\sigma t} t^{-\mu} dt =$$

$$\leqslant \varepsilon|s| \int_x^\infty e^{-\sigma t} t^{-\mu} dt + o(1) < \qquad , \ |s| \to 0,$$

$$< \varepsilon|s| \int_0^\infty e^{-\sigma t} t^{-\mu} dt + o(1) =$$

$$< \varepsilon\Gamma(1-\mu)|s|\sigma^{\mu-1} + o(1).$$

Ако се, дакле, s приближава нули тако да буде стално $|s|<M\sigma^{1-\mu}$, тада десну страну последње неједначине можемо учинити произвољно малом, чиме је став 6 доказан, а који се за $\mu=\frac{1}{2}$ своди на Knopp-ов став.

Приметимо да кад ставимо

$$s=x+iy, \quad \text{тј.} \quad \sigma=x,$$

да је тада област $|s|<M\sigma^{1-\mu}$ ограничена кривом чија је једначина

$$x^2+y^2=M^2x^{2(1-\mu)}, \quad \text{односно} \quad y=Mx^{1-\mu}\sqrt{1-M^{-2}x^{2\mu}}.$$

Како је за мало $|s|$

$$y \sim Mx^{1-\mu} \quad \text{кад} \quad x \to 0,$$

то видимо да ова крива има утолико већи додир са Y-осом уколико је μ веће $(0 \leqslant \mu < 1)$, и да се за $\mu=0$, област којом је ова крива ограничена своди на Stolz-ов угао.

VII. Понашање функције дефинисане Dirichlet-овим редом лево од праве конвергенције

7. 1. (i) На основу ставова изведених у главама V и VI можемо донети овај општи закључак. Ако о коефициентима a_ν, односно о функцији $a(x)=\Sigma a_\nu$ Dirichlet-ова реда знамо асимптотско понашање само њеног логаритма, тј. $lg|a(x)|$, тада једино можемо добити његову апсцису конвергенције. Међутим, ако знамо и асимптотско понашање коефицијената, тј. функције $a(x)$, тада можемо закључити и нешто о понашању функције $f(s)$, дефинисане овим Dirichlet-овим редом, и то на рубу области конвергенције. Према томе, уколико више знамо о понашању функције $a(x)$ за велико x, утолико можемо добити подробније податке о понашању саме функције $f(s)$ и то како на рубу, тако евентуално и о њеној природи на или чак и лево од праве конвергенције.

Овде ћемо изнети само једну врсту оваквих ставова и то специално Landau-ово {2} проширење у (iii) наведена Phragmén-ова {1} става. Ово већ и из разлога да бисмо још једном истакли предност употребе Stieltjes-ова интеграла, јер се применом истог овај став може извести без икаквих тешкоћа. Ако се ово извођење упореди са Landau-овим јасно произлази колико се овим добива у прегледности, због чега је могуће, и то без принципиелних промена, непосредно проширити овај став у више праваца, као што ћемо то у тачки 7. 3. и показати.

(ii) Ради лакшег упоређења посматрајмо Dirichlet-ове редове облика

$$f(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu l_\nu^{-s}, \tag{1}$$

где је

$$l_n=e^{\lambda_n}, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

и означимо са $A(x)$ функцију

$$A(x)=\sum_{l_\nu \leqslant x} a_\nu. \tag{2}$$

Како из

$$e^{\lambda_\nu}=l_\nu \leqslant x$$

следи

$$\lambda_\nu \leqslant lgx,$$

то је јасно да је функција $A(x)$ везана са функцијом

$$a(x)=\sum_{\lambda_\nu \leqslant x} a_\nu$$

релацијом

$$A(x)=a(lgx). \tag{3}$$

(iii) Означимо за $c(x)$ неку функцију дефинисану за $x>0$ која остаје ограничена кад $x\to\infty$, тј.

$$c(x)=O(1), \quad x\to\infty,$$

и са γ један број између 0 и 1, тј. $0<\gamma<1$. Ако се $A(x)$ може написати у облику

$$A(x)=cx+x^\gamma c(x), \tag{4}$$

где је c извесна константа, тј. ако је

$$A(x)=cx+O(x^\gamma), \quad x\to\infty, \tag{5}$$

тада је Dirichlet-ов ред (1) конвергентан за $s>1$ и

$$(s-1)f(s)\to c \quad \text{кад} \quad s\to 1+0.$$

Овај став, који је доказао још сам Dirichlet {1}, је непосредна последица става 3 тачке 5. 3. (i) и става 4 тачке 6. 4. (ii). Шта више, из става 4 тачке 6. 4. (ii) видимо да он важи и кад се претпоставка (5) замени слабијом, наиме кад је

$$A(x) \sim cx, \quad x \to \infty.$$

Phragmén {1} је, међутим, показао да из претпоставке (5) можемо о понашању функције $f(s)$ у близини тачке $s=1$ закључити много више, и то да се функција

$$f(s) - \frac{c}{s-1}$$

може развити у Taylor-ов ред који је насигурно конвергентан у кругу

$$|s-1| < \frac{1}{2}(1-\gamma),$$

дакле, да се функција $f(s)$ у близини тачке $s=1$ може аналитички продужити и лево од праве конвергенције $R\{s\}=1$ и да је тачка $s=1$ пол првога реда функције $f(s)$ са резидуумом c.

7. 2. (i) Најопштији облик Dirichlet-Phragmén-ова става дао је Landau {2}:

Став 1. *Ако коефицијенти Dirichlet-ова реда* (1) *задовољавају услов* (5) *тада је функција*

$$f(s) - \frac{c}{s-1}$$

регуларна у целој области $R\{s\} > \gamma$, $0 < \gamma < 1$.

Поред тога је он показао да се ова област у општем случају не може више повећати, у смислу да се апсциса регуларности $R\{s\} = \gamma$ не може смањити.

Ово последње је Landau показао једноставним при мером узевши

$$l_n = n \quad и \quad a_n = 1 + n^{\gamma-1}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

јер је тада

$$A(x) = \sum_{\nu \leqslant x} (1 + \nu^{\gamma-1}) = x + O(x^{\gamma}), \quad x \to \infty,$$

и

$$f(s) = \zeta(s) + \zeta(s+1-\gamma), \ [32].$$

(*ii*) Сам доказ става 1 је веома једноставан. Dirichlet-ов ред (1) се, према (2), може написати у облику несвојствена Stieltjes-ова интеграла

$$f(s)=\int_1^\infty x^{-s}dA(x) \quad \text{за} \quad R\{s\}>1.$$

Ако овде функцију $A(x)$ заменимо обликом (4), добивамо

$$f(s)=\int_1^\infty x^{-s}d\{cx+x^\gamma c(x)\}=$$

$$=c\int_1^\infty x^{-s}\,dx+\int_1^\infty x^{-s}d\,\{x^\gamma c(x)\}=$$

$$=\frac{c}{s-1}+\int_1^\infty x^{-s}d\{x^\gamma c(x)\},$$

где су извршене операције за $R\{s\}>1$ дозвољене. Парциалном интеграцијом овог последњег интеграла добивамо даље да је

$$\int_1^X x^{-s}d\{x^\gamma c(x)\}=X^{-s+\gamma}c(X)-c(1)+s\int_1^X x^{-s+\gamma-1}c(x)\,dx\to$$

$$\to -c(1)+s\int_1^\infty x^{-s+\gamma-1}c(x)\,dx, \quad X\to\infty,$$

јер је према претпоставци

$$c(x)=O(1) \quad \text{и} \quad R\{s\}>1.$$

Према томе је

$$f(s)-\frac{c}{s-1}=-c(1)+s\int_1^\infty x^{-s+\gamma-1}c(x)\,dx.$$

Како је $c(x)=O(1)$, то овај последњи интеграл конвергира за $R\{s\}>\gamma$, и претставља једну аналитичку функцију која је регуларна у овој области. Према томе, он даје аналитичко продужење функције $f(s)$ у целој области $R\{s\}>\gamma$, чиме је став 1 доказан.

(iii) Из овог доказа се види да у ставу 1 није било потребно претпоставити да γ буде >0, тако да он важи за свако $\gamma<1$, шта више он важи и за свако комплексно γ за које је $R\{\gamma\}<1$.

Поред тога видимо да и претпоставку $c(x)=O(1)$ можемо заменити општијом; довољно је да буде

$$lg|c(x)|=o(lg x),$$

тј. да је

$$c(x)=O(x^{\varepsilon}) \quad \text{за свако} \quad \varepsilon>0, \quad \text{кад} \quad x\to\infty.$$

Приметимо најзад да ако о функцији $c(x)$ ништа више не претпоставимо осим да буде $=O(1)$, тада о конвергенцији интеграла

$$\int_1^{\infty} x^{-s+\gamma-1}c(x)\,dx$$

лево од праве $R\{s\}=\gamma$ не можемо у општем случају ништа закључити.

7. 3. (i) Из доказа става 1 се види да овом ставу, не мењајући доказ, можемо дати много општији облик који гласи (в. Schnee {1}):

Став 2. *Нека су* γ, γ_{ν} *и* c_{ν}, $\nu=1,2,\dots k$, *произвољни комплексни бројеви, али тако да је*

$$R\{\gamma_1\}>R\{\gamma_2\}>\dots>R\{\gamma_k\}>R\{\gamma\},$$

и означимо са $c(x)$ *функцију за коју је*

$$c(x)=O(x^{\varepsilon}), \quad \text{за свако} \quad \varepsilon>0,\ x\to\infty.$$

Ако су тада коефицијенти Dirichlet-ова реда такви да функцију $A(x)$ *можемо написати у облику*

$$A(x)=c_1x^{\gamma_1}+c_2x^{\gamma_2}+\dots+c_kx^{\gamma_k}+x^{\gamma}c(x), \tag{6}$$

Dirichlet-ов ред (1) *конвергира за* $R\{s\}>R\{\gamma_1\}$, *а функција* $f(s)$ *дефинисана овим редом је регуларна у области* $R\{s\}>\gamma$, *осим у тачкама*

$$s=\gamma_{\nu},\quad \nu=1,2,\dots k,$$

које су полови првога реда са резидуумима $c_{\nu}\gamma_{\nu}$, $\nu=1,2,\dots k$.

Доказ. Ако функцију $f(s)$ изразимо интегралом

$$f(s)=\int_1^{\infty} x^{-s}\,dA(x)$$

који је, према (6), конвергентан за $R\{s\}>R\{\gamma_1\}$, и ако у њему напишемо функцију $A(x)$ у облику (6), биће

$$f(s)=\int_1^\infty x^{-s}\,d\left\{\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu x^{\gamma_\nu}+x^\gamma c(x)\right\}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu\int_1^\infty x^{-s}\,dx^{\gamma_\nu}+\int_1^\infty x^{-s}\,d\{x^\gamma c(x)\}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{k} c_\nu\gamma_\nu\int_1^\infty x^{-s+\gamma_\nu-1}\,dx+\int_1^\infty x^{-s}\,d\{x^\gamma c(x)\}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{k}\frac{c_\nu\gamma_\nu}{s-\gamma_\nu}+\int_1^\infty x^{-s}\,d\{x^\gamma c(x)\}\quad\text{за}\quad R\{s\}>R\{\gamma_1\}.$$

Парциалном интеграцијом овог последњег интеграла, тј. истим поступком као у претходној тачки, добивамо да је

$$f(s)-\sum_{\nu=1}^{k}\frac{c_\nu\gamma_\nu}{s-\gamma_\nu}=-c(1)+s\int_1^\infty x^{-s-1+\gamma}c(x)\,dx.$$

Како овај последњи интеграл претставља аналитичку функцију која је регуларна за $R\{s\}>R\{\gamma\}$, то из ове једначине непосредно следи доказ самога става.

(*ii*) Илустрације ради уочимо Landau-ов пример наведен у тачки 7. 2. (i); тј.

$$l_n=n \quad\text{и}\quad a_n=1+n^{\gamma-1},\quad 0<\gamma<1.$$

Како је овде

$$A(x)=\sum_{\nu\leqslant x}(1+\nu^{\gamma-1})=[x]+\sum_{\nu\leqslant x}\nu^{\gamma-1}=$$

$$=[x]+\int_0^x t^{\gamma-1}\,d[t]=[x]+\int_0^x t^{\gamma-1}\,dt-\int_0^x t^{\gamma-1}\,d\{t-[t]\}=$$

$$=[x]+\frac{1}{\gamma}x^\gamma-\int_0^x t^{\gamma-1}\,d\{t-[t]\},$$

то, кад овај интеграл парциално интегришемо, добивамо даље

$$A_1'(x) = [x] + \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} - x^{\gamma-1}(x-[x]) - (1-\gamma)\int_0^x t^{2-\gamma}(t-[t])\,dt =$$

$$= x + \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} - (x-[x])\,(1-x^{\gamma-1}) - (1-\gamma)\int_0^x t^{2-\gamma}(t-[t])\,dt =$$

$$= x + \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} + O(1), \quad x \to \infty,$$

јер је

$$x - [x] = O(1), \quad x \to \infty.$$

Према томе је, на основу става 2, функција

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (1+n^{\gamma-1})\, n^{-s}$$

регуларна у области $R\{s\} > 0$, осим у тачкама $s=1$ и $s=\gamma$, где има полове првога реда са резидуумима 1 и $\frac{1}{\gamma}\gamma = 1$, а што се поклапа са чињеницом да је

$$f(s) = \zeta(s) + \zeta(s+1-\gamma).$$

(iii) Као што из горњег извођења видимо, да бисмо функцију $f(s)$, дефинисану Dirichlet-овим редом (1), могли аналитички продужити лево од праве конвергенције, није битно да се функција $A(x)$ може рашчланити на специалне изразе облика $c_\nu x^{\gamma_\nu}$. У суштини је довољно да се ова функција може уопште рашчланити на две функције

$$A(x) = w(x) + c(x), \tag{7}$$

тако да функција $c(x)$ тежи спорије бесконачности или брже нули од функције $w(x)$, а да нам је при томе још позната и аналитичка природа функције

$$W(s) = \int_1^{\infty} x^{-s}\, dw(x).$$

Прецизније: ако се функција $A(x)$ може рашчланити на облик (7), тако да је

$$\limsup_{x=\infty} \frac{lg|w(x)|}{lg\, x} = \Gamma,$$

и

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{lg|c(x)|}{lg\, x} = \gamma \quad \text{са} \quad \Gamma > \gamma,$$

тада су Dirichlet-ов ред

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu l_\nu^{-s} = \int_1^\infty x^{-s}\, dA(x)$$

и интеграл

$$w(s) = \int_1^\infty x^{-s}\, dw(x)$$

конвергентни за $R\{s\} > \Gamma$ (в. став 3 т. 5. 3 (i)), док интеграл

$$C(s) = \int_1^\infty x^{-s}\, dc(x)$$

конвергира већ за $R(s) > \gamma$.

Како је, међутим, према (7),

$$f(s) = W(s) + C(s), \tag{8}$$

то ако функцију $W(s)$ можемо аналитички продужити у област $R(s) > \gamma\,(< \Gamma)$, тада функције $f(s)$ и $W(s)$ морају у тој области имати исте сингуларитете, јер је, према (8), разлика

$$f(s) - W(s)$$

регуларна у тој области.

(*ii*) Примера ради узмимо да функција $A(x)$ има облик

$$A(x) = c x^{\gamma_1} lg^{\lambda-1} x + c(x), \tag{9}$$

са

$$c(x) = O(x^{\gamma+\varepsilon}), \quad \text{за свако} \quad \varepsilon > 0,\ x \to \infty, \tag{10}$$

и да је

$$\gamma_1 > \gamma > 0.$$

Како је у том случају, за $R(s) > \gamma_1$,

$$\int_1^\infty x^{-s} d\{x^{\gamma_1} lg^{\lambda-1} x\} = s \int_1^\infty x^{-s+\gamma_1-1} lg^{\lambda-1} x\, dx =$$

$$= s \int_0^\infty e^{-(s-\gamma_1)u} u^{\lambda-1}\, du = s\, \frac{\Gamma(\lambda)}{(s-\gamma_1)^\lambda}, \quad [31]$$

где смо извршили смену $x=e^u$, то је, према (10) и извођењу у претходним тачкама,

$$f(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu l_\nu^{-s}=c\,\Gamma(\lambda)\frac{s}{(s-\gamma_1)^\lambda}-c(1)+s\int_1^\infty x^{-1-s}c(x)\,dx.$$

Овај последњи интеграл претставља аналитичку функцију која је, према (10), регуларна у области $R\{s\}>\gamma$; овим смо добили овај резултат:

Ако коефициенти Dirichlet-ова реда (1) функције $f(s)$ задовољавају услов (9) са (10), тада ће функција $f(s)$ бити регуларна у области $R\{s\}>\gamma$, осим у тачки $s=\gamma_1>\gamma$, која је пол или критични сингуларитет облика $(s-\gamma_1)^{-\lambda}$, према томе да ли је λ цео број или не.

7. 4. (i) Напослетку, наведимо још један став, који не стоји у непосредној вези са претходним ставовима, али се ослања на исти принцип. Прегледности ради овај став ћемо извести за специалне Dirichlet-ове редове облика

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

код којих је, дакле,

$$l_n=n \quad \text{или} \quad \lambda_n=lg\,n.$$

(ii) Нека је a_n, $n=1, 2, \ldots$, са $a_0=0$, низ реалних бројева; посматрајмо функцију

$$g(x)=a_n(x-n) \quad \text{за} \quad n\leqslant x<n+1,\ n=0, 1, 2, \ldots.$$

Како она има у тачки $x=n$ скок дужине $-a_{n-1}$, то ако са $-k(x)$ означимо њену функцију скока (в. сл. 26 и 27), биће

$$g(x)=h(x)-k(x),$$

где је диаграм функције $h(x)$ полигонална линија (на слици извучена цртичасто) која у размаку $(n, n+1)$ има нагиб a_n.

Претпоставимо да је

$$a_n=O(n^\alpha),\quad \alpha\geqslant 0,\quad x\to\infty,$$

тада је и

$$g(x)=O(x^\alpha),\quad x\to\infty,$$

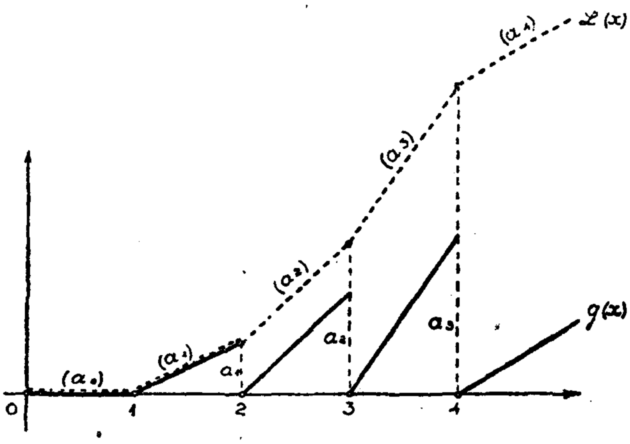
и ако посматрамо интеграл

$$G(s)=s\int_0^\infty x^{-s-1}dg(x),$$

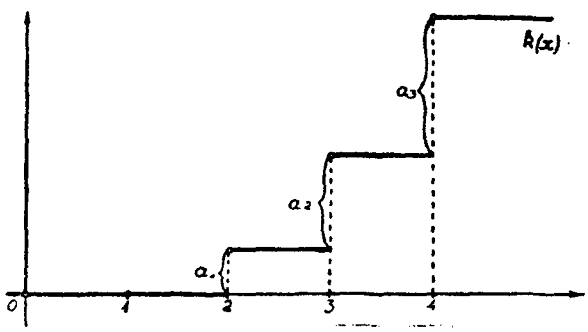
тада је он, према (3) и ставу 3 тачке 5. 3. (i), конвергентан за $R\{s\} > \alpha - 1$.

Како је, међутим,

$$h(x) = O(x^{\alpha+1}) \quad \text{и} \quad k(x) = O(x^{\alpha+1}),\ x \to \infty,$$



Сл. 26.



Сл. 27.

то ако у горњем интегралу заменимо функцију $g(x)$ са $h(x) - k(x)$, добивена два интеграла ће конвергирати само за $R\{s\} > \alpha$, тако да је за ове вредности од s

$$G(s) = s\int_0^\infty x^{-s-1}\,dg(x) = s\int_0^\infty x^{-s-1}\,dh(x) - s\int_0^\infty x^{-s-1}\,dk(x) =$$

$$= s\int_0^\infty x^{-1-s}\,h'(x)\,dx - s\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\,n^{-s-1}.$$

Ако овај интеграл парциално интегришемо и водимо рачуна о томе да је $a_0 = 0$, $a'(x) = O(x^\alpha)$, $R\{s\} > \alpha$ и да је $h'(x)$ степенаста функција са скоковима дужине $a_n - a_{n-1}$ у тачкама $x = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, тада је

$$G(s) = \int_0^\infty x^{-s}\,dh'(x) - s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n^{s+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{n^s} - s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n^{s+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{n^s} + s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{n^{s+1}} - s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\frac{1}{n^s}.$$

Према томе, ако ставимо

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})n^{-s} \quad \text{и} \quad \Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}n^{-s},$$

и приметимо да су ови редови, због $a_n = O(n^\alpha)$, конвергентни за $R\{s\} > \alpha$, биће

$$\varphi(s) - s\Phi(s) = G(s) - s\varphi(s+1) \quad \text{за} \quad R\{s\} > \alpha.$$

Како је функција на десној страни регуларна за $R\{s\} > \alpha - 1$, то значи да кад једну од функција $\varphi(s)$ или $\Phi(s)$ можемо аналитички продужити лево од праве $R\{s\} = \alpha$, да тада можемо продужити и другу, и да обе ове функције имају исте сингуларитете у прузи $\alpha - 1 < R\{s\} < \alpha$.

Ако овде заменимо $a_n - a_{n-1}$ са a_n, према томе $\frac{a_n}{n}$ са

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu,$$

тада добивени резултат можемо и овако формулисати:

Ако се једна од функција

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \quad \text{и} \quad \Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^{-s},$$

где је A_n аритметичка средина коефицијената a_n, може аналитички продужити лево од праве конвергенције, тада се може и друга, и обе функције имају исте сингуларитете у прузи ширине 1 лево од праве конвергенције.

(*ii*) Приметимо да аналоган став за опште Dirichlet-ове редове може важити само ако низ експонената λ_n не расте сувише брзо; јер, већ кад је $\lambda_n = n$, дакле у случају Taylor-ових редова, за $e^{-s} = z$, имамо

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{и} \quad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n, \quad |z| < 1,$$

тако да је

$$f(z) = z(1-z)F'(z).$$

Према томе, функција $f(z)$ може бити регуларна у тачки $z=1$, што не мора више бити случај са функцијом $F(z)$.

ОДЕЉАК D.

НАПОМЕНЕ

I. Напомене које се односе на низове и редове

1. (i) Низ бројева

$$x_\nu, \quad \nu=1, 2, 3, \ldots,$$

је *ограничен* ако постоји позитиван број M такав да је

$$|x_\nu| < M \quad \text{за свако} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1}$$

Ма који од бројева M који је већи од апсолутне вредности свих чланова низа x_ν је једно *ограничење* низа x_ν.

(ii) Ако је низ x_ν реалан, неједначине (1) се могу написати и овако

$$-M < x_\nu < M, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots;$$

у овом случају кажемо да је $-M$ једно *доње*, односно *лево ограничење*, а M једно *горње*, односно *десно ограничење* низа x_ν.

Низ x_ν може бити ограничен било једнострано и то кад је или

$$x_\nu > M' \quad \text{за свако} \quad \nu=1, 2, 3, \ldots,$$

или

$$x_\nu < M \quad \text{за свако} \quad \nu=1, 2, 3, \ldots,$$

било ограничен са обе стране, тј. кад је

$$M' < x_\nu < M, \ \text{за свако} \quad \nu=1, 2, 3, \ldots.$$

На пример, низ

$$x_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}, \quad \nu=1, 2, 3, \ldots$$

је ограничен са обе стране. Његово горње ограничење је с в а к и број $\geqslant 1/2$, а доње с в а к и број $\leqslant -1$. Његово апсолутно ограничење је сваки број $\geqslant 1$. — Низ

$$x_\nu = \sqrt{\nu^2 + 2\nu} - (-1)^\nu \nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

је ограничен само са доње стране, и његово доње ограничење је сваки број $\leqslant \sqrt{3} - 1$.

2. (i) *Горња граница* низа који је ограничен са десне стране је његово најмање горње ограничење. То је онај број G који није мањи ни од једног члана низа x_ν, тј. такав да је

$$x_\nu \leqslant G \quad \text{за свако} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

а за који постоји најмање један члан x_n низа x_ν такав да је

$$x_n > G - \varepsilon, \quad \text{за свако, ма како мало} \quad \varepsilon > 0.$$

Слично се дефинише и *доња граница* g низа x_ν, тј. то је онај број g који није већи ни од једног члана низа x_ν, а постоји најмање један члан x_m који је мањи од $g + \varepsilon$, за свако $\varepsilon > 0$.

Ако је низ ограничен његова горња и доња граница увек постоје. Ако низ није ограничен узима се као његова горња граница $+\infty$, а као доња граница $-\infty$, тј. ставља се да је

$$G = +\infty, \quad \text{односно} \quad g = -\infty.$$

Горња или доња граница могу али не морају припадати датом низу. Тако, на пример, горња граница $G = 1$, низа $x_\nu = 1/\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, припада низу, док то није случај са његовом доњом границом $g = 0$.

(ii) Како је горња граница кад она припада датом низу једнака његовом највећем — максималном члану то, проширујући појам за симбол Max, уводимо за горњу границу G ову ознаку

$$G = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\}.$$

Ако се ради само о коначном низу бројева

$$x_\nu, \quad \nu = p, p+1, \ldots, q-1, q,$$

тј. о низу са коначним бројем $q - p + 1$ чланова, тада је са

$$\operatorname*{Max}_{p \leqslant \nu \leqslant q} \{x_\nu\}$$

дат његов највећи члан.

На исти начин

$$\underset{p\leqslant\nu\leqslant q}{\operatorname{Min}}\ \{x_\nu\}$$

претставља најмањи од бројева x_ν, $\nu=p, p+1, \ldots, q-1, q$, док

$$g=\underset{1\leqslant\nu<\infty}{\operatorname{Min}}\ \{x_\nu\}$$

претставља најмањи члан низа, односно, ако овог нема, његову доњу границу.

Уколико је нарочито потребно разликовати доњу и горњу границу од најмањег, односно највећег члана, или истаћи да доња, односно горња граница не мора припадати самоме низу, употребљавају се и ознаке *Bn.* или *Bd.* (borne, boundary), на пример,

$$G=\underset{1\leqslant\nu<\infty}{\overline{Bd}}\ \{x_\nu\},\quad \text{односно}\quad g=\underset{1\leqslant\nu<\infty}{\underline{Bd}}\ \{x_\nu\}.$$

3. (i) *Близина* или *околина* тачке a је егзактан математички појам; то је сваки, произвољно мали размак који садржи тачку a. — Кад кажемо да се извесне тачке налазе у близини тачке a, или да је извесна особина задовољена у близини тачке a, то значи да се ове тачке налазе, или да је ова особина задовољена за сваки размак $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ма како мали био $\varepsilon>0$.

(ii) *Тачка нагомилавања* низа x_ν је она тачка a у чијој се близини налази бесконачно много чланова низа x_ν, или их има бесконачно много који су сви $=a$. Другим речима, a је тачка нагомилавања низа x_ν ако је за бескрајно много индекса n

$$|x_n-a|<\varepsilon,\quad \text{ма како мали био}\ \ \varepsilon>0.$$

Бесконачан низ бројева може имати једну, коначно или бесконачно много тачака нагомилавања, али може бити и без тачака нагомилавања. На пример, низ природних бројева нема тачака нагомилавања; низ $x_\nu=1/\nu$ или низ (2) имају по једну тачку нагомилавања и то код првог низа је $a=0$, а код другог $a=1$; низ $x_\nu=(-1)^\nu$ има две тачке нагомилавања и то $a_1=-1$ и $a_2=+1$, док су сви реални бројеви тачке нагомилавања низа рационалних бројева.

Тачке нагомилавања, ако их има, могу али не морају припадати датоме низу. На пример, тачка нагомилавања $a_1 = 1$ низа

$$x_\nu = \frac{(-1)^\nu \nu + 1}{\nu + 1}$$

припада низу, док му тачка нагомилавања $a_2 = -1$ не припада.

(iii) Ако било доња, било горња граница не припада низу, тада је она увек једна тачка нагомилавања тога низа. Међутим, ако једна од ових вредности припада низу, ове вредности више не морају бити тачке нагомилавања. Тако је, на пример, код низа (2)

$$g = \sqrt{3} - 1 = x_1,$$

а g није тачка нагомилавања тога низа.

4. (i) Bolzano-Weierstrass-ов став. — *Сваки бесконачан и ограничен низ бројева има најмање једну тачку нагомилавања.*

Како је низ ограничен, то постоји коначан размак J_0 у коме се налазе сви чланови тога низа. Кад овај размак преполовимо мора се најмање у једној од ових половина налазити бесконачно много чланова низа; означимо тај део са J_1. Примењујући исти поступак на J_1 добивамо размак J_2 дужине $2^{-2} J_0$, а после n таквих поступака размак J_n дужине $2^{-n} J_0$, у коме се налази још увек бесконачно много чланова датог низа. Овим (Euklid-овим) поступком одређен је, у диадном систему, реални број w у чијој се близини, на основу самог начина образовања размака J_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, мора налазити бескрајно много чланова низа x_ν. Дакле, w је тачка нагомилавања посматраног низа.

(ii) Bolzano-Weierstrass-овим ставом, тј. ставом о егзистенцији тачке нагомилавања, служи се Bolzano {1} у доказу да функција која је неограничена у размаку (a, b) мора бити у томе размаку прекидна. — При томе се Bolzano позива на свој рад „Lehre von der Messbarkeit der Zahlen" који је остао у рукопису. Међутим, у списима које је прикупио Rychlik, који је средио Bolzano-ва дела, нема ни тога става, ни његова доказа.

Назив „Bolzano-Weierstrass-ов став“ потиче, вероватно, из Schönfliess-ова чланка о „Теорији скупова“ у Енциклопедији. Не зна се на основу чега је он овом ставу дао тај назив, уколико тај назив потиче од њега; у Stolz-ову {3} приказу Bolzano-ва математичког рада, који се оснива на Bolzano-вим штампаним списима, тај се став не спомиње.

Први који је прецизно формулисао тај став и систематски се њиме служио у својим предавањима био је Weierstrass (види Kossak {1} и Pincherle {2}).

5. (i) Низ x_ν *конвергира* и *тежи граничној вредности* a (или краће, *граници* a) ако сваком произвољно малом броју $\varepsilon > 0$ одговара такав цео број $n = n(\varepsilon)$, да буде

$$|x_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{за с в а к о} \quad \nu \geqslant n.$$

Ово краће пишемо

$$\lim_{\nu=\infty} x_\nu = a \quad \text{или} \quad x_\nu \to a \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty.$$

Сваки конвергентан низ је ограничен.

Гранична вредност (граница) низа x_ν је увек једна (и једина) тачка нагомилавања тога низа. Обратно, тачка нагомилавања не мора бити увек гранична вредност низа. Међутим, ако је низ ограничен и има с а м о ј е д н у тачку нагомилавања, тада он конвергира, а ова тачка нагомилавања је његова гранична вредност.

(ii) Сваку тачку нагомилавања можемо добити као граничну вредност повољно изабраног делимичног низа x_{n_ν} посматраног низа x_ν. Другим речима, ако је w тачка нагомилавања низа x_ν, тада постоји увек такав делимична низ x_{n_ν} низа x_ν да

$$x_{n_\nu} \to w \quad \text{кад} \quad n_\nu \to \infty.$$

Ако је низ x_ν ограничен, делимични низови

$$x_n' = \min_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu\} \quad \text{и} \quad x_n'' = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

су конвергентни и теже доњој граници g, односно горњој граници G тога низа.

Ако је низ x_ν конвергентан, тада један од бројева

$$g = \min_{1 \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\} \quad \text{или} \quad G = \max_{1 \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\},$$

или оба, припадају самоме низу. Ако један од ових бројева не припада низу тада је он истовремено и његова гранична вредност. У том случају, на пример ако G не припада низу, можемо увек изабрати такав делимичан низ x_{n_ν} да буде

$$x_{n_\nu} \leqslant x_\mu \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant n_\nu,$$

и да

$$x_{n_\nu} \to G \quad \text{кад} \quad n_\nu \to \infty;$$

такав један делимичан низ је, на пример, низ

$$\operatorname*{Min}_{n \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\}.$$

6. (*i*) Најмања тачка нагомилавања, или прецизније, доња граница множине тачака нагомилавања низа x_ν зове се *доњи limes* или *limes inferior* и обележава се са

$$\lim_{\nu=\infty} \inf x_\nu \quad \text{или} \quad \varliminf_{\nu=\infty} x_\nu.$$

Највећа тачка нагомилавања зове се *горњи limes* или *limes superior* и означава се са

$$\lim_{\nu=\infty} \sup x_\nu \quad \text{или са} \quad \varlimsup_{\nu=\infty} x_\nu.$$

Ако је низ ограничен ови бројеви увек постоје; кад је низ неограничен са горње, односно са доње стране, ставља се

$$\lim_{\nu=\infty} \sup x_\nu = +\infty, \quad \text{односно} \quad \lim_{\nu=\infty} \inf x_\nu = -\infty.$$

Низ x_ν је конвергентан с а м о ако је

$$\lim_{\nu=\infty} \inf x_\nu = \lim_{\nu=\infty} \sup x_\nu \neq \pm\infty.$$

(*ii*) Између доње границе g, горње границе G, limes inferiora l и limes superiora L постоје увек неједначине

$$g \leqslant l \leqslant L \leqslant G.$$

Ако је низ x_ν ограничен, l и L су тачке нагомилавања низа, тако да можемо увек изабрати два његова делимична низа таква да један конвергира доњем limesu l, а други горњем limesu L; међу осталим, низ

$$\operatorname*{Min}_{n \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\} \to l \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

а низ

$$\operatorname*{Max}_{n \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\} \to L \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

У општем случају је $g < l$ и $G > L$; међутим, ако је, рецимо, $g = l$, тада постоји увек делимичан низ x_{n_ν} низа x_ν, такав да је

$$x_{n_\nu} \leqslant x_\mu \quad \text{за свако} \quad \mu \leqslant n_\nu,$$

и да

$$x_{n_\nu} \to g = l \quad \text{кад} \quad n_\nu \to \infty.$$

Такав један делимичан низ је, на пример, низ

$$\operatorname*{Min}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu\}.$$

Ако

$$x_{\nu+1} - x_\nu \to 0 \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty,$$

или општије, ако је

$$\liminf_{\nu=\infty} (x_{\nu+1} - x_\nu) = 0,$$

тада су све тачке размака (l, L) тачке нагомилавања тога низа.

7. (i) За низ кажемо да је *дивергентан* ако не конвергира; постоје два битно различита случаја дивергенције.

Ако је

$$\liminf_{\nu=\infty} x_\nu = \limsup_{\nu=\infty} x_\nu = \pm\infty$$

кажемо да је низ x_ν *стварно дивергентан* или да *тежи* $\pm\infty$, и пишемо

$$x_\nu \to +\infty, \quad \text{односно} \quad x_\nu \to -\infty \quad \text{кад} \quad x \to \infty.$$

Ако је

$$l = \liminf_{\nu=\infty} x_\nu \neq \limsup_{\nu=\infty} x_\nu = L$$

кажемо да низ x_ν *осцилира*, и то између коначних или бесконачних граница према томе да ли је он ограничен или неограничен. Под *размаком осцилације* подразумевамо размак (l, L).

Док стварно дивергентни низови имају извесне аналогије са конвергентним низовима (горњи и доњи лимеси су једнаки), дотле се низови који осцилирају битно разликују, и у ствари то су они низови који у суштини не конвергирају.

(ii) Низ x_ν је стварно дивергентан и $\to +\infty$ ако ма како велик био број M, можемо одредити довољно велик индекс $n = n(M)$ такав да буде

$$x_\nu < M, \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n(M).$$

Отуда следи да стварно дивергентан низ нема ниједну тачку нагомилавања у коначности, тј. ни у једном, ма како великом размаку, и да у извесном смислу можемо сматрати да се она једина тачка нагомилавања која би му одговарала налази у бесконачности.

Ако је низ x_ν стварно дивергентан и, на пример, $\to +\infty$, тада његова доња граница увек постоји и припада самоме низу. У том случају можемо увек наћи такав делимичан низ x_{n_ν} низа x_ν да буде

$$x_\mu \geqslant x_{n_\nu} \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant n_\nu,$$

и да

$$x_{n_\nu} \to \infty \quad \text{кад} \quad n_\nu \to \infty.$$

Такав низ је, на пример, низ

$$\operatorname*{Min}_{n \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\}.$$

(iii) Ако низ x_ν осцилира, тада он мора имати најмање две тачке нагомилавања укључујући при томе $-\infty$ и $+\infty$; међутим, он може осцилирати а да у коначности нема ниједне тачке нагомилавања, у ком случају он мора бити неограничен са обе стране, као, на пример, низ

$$x_\nu = (-1)^\nu \nu.$$

Ако је низ x_ν неограничен, рецимо са горње стране, било да он стварно дивергира или не, увек постоји делимичан низ x_{n_ν} такав да је

$$x_\nu \leqslant x_{n_\nu} \quad \text{за свако} \quad \nu \leqslant n_\nu,$$

као што је то случај код делимичног низа

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqslant n \leqslant \nu} \{x_\nu\}.$$

8. (i) За низ x_ν кажемо да је *монотон*, и то да *монотоно расте*, ако је

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_\nu \leqslant x_{\nu+1} \leqslant \ldots, \tag{3}$$

а да *монотоно опада* ако је

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_\nu \geqslant x_{\nu+1} \geqslant \ldots$$

Монотони низови не могу осцилирати; прецизније:

Сваки монотон и ограничен низ је конвергентан.

Заиста, према Bolzano-Weierstrass-ову ставу он мора имати најмање једну тачку нагомилавања w; треба да покажемо да је то и једина тачка нагомилавања. Претпоставимо зато да низ x_ν монотоно расте. Тада се десно од w не може налазити ни један члан низа, јер кад би x_m био $\geqslant w$, тада би се, према (3), лево од x_m налазило највише $m-1$ (према томе коначно много) чланова низа x_ν, тако да w не би могла бити тачка нагомилавања. Према томе је

$$x_\nu < w \quad \text{за свако} \quad \nu = 1, 2, 3\ldots\ldots \tag{4}$$

Лево од $w-\varepsilon$, ма како мали био $\varepsilon>0$, налази се такође само коначан број чланова низа x_ν; ако се, на пример, x_n налази у размаку $(w-\varepsilon, w)$ (а у том размаку мора бити бескрајно много чланова), то има највише $n-1$ чланова који су $\leqslant w-\varepsilon$. Према томе је

$$x_\nu > w-\varepsilon \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следи да је

$$0 < w - x_\nu < \varepsilon \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n,$$

тј. да

$$x_\nu \to w \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty.$$

(ii) Задржавајући главна својства монотоних низова, појам монотоније се може веома лако проширити као што је то показао Hardy {6} (в. и Wendelin {1}) уводећи „скоро монотоне" низове.

Низ x_ν је *скоро монотон* ако се испред (иза) ма ког члана x_n низа налази само коначан број његових чланова, тј. ако је неједначина

$$x_\nu \leqslant x_n$$

задовољена само за коначно много чланова x_ν, ма какав био n.

Истим расуђивањем као за монотоне низове добивамо да је *сваки скоро монотон и ограничен низ конвергентан.*

Конвергентан низ бројева је скоро монотон ако се његова гранична вредност поклапа са горњом границом.

Сваки стварно дивергентан низ је скоро монотон.

Ове две чињенице можемо укратко формулисати и овако: Ако је низ скоро монотон, тада је

$$l = G, \quad (\text{или} \quad g = L),$$

узимајући у обзир и случајеве кад је један од ових бројева бесконачан.

Скоро монотони низови су утолико важни што на њих уствари наилазимо при дефиницији тоталне варијације и одређеног интеграла. Ако уочимо одређен низ подела неког размака (a, b) и у односу на ове поделе образујемо било низ збирова тоталних варијација (в. А. 5. 1. (i)), било низ горњих и доњих Darboux-ових збирова или средњих осцилација [20, (ii)], било горње и доње збирове Stieltjes-ова интеграла у односу на монотону функцију (в. В. 1. 2. (ii)), тада су сви тако добивени низови скоро монотони (в. Wendelin {1}).

9. (i) Cauchy-ев {3, стр. 125} општи критеријум конвергенције. *Да би низ x_ν био конвергентан потребно је и довољно да сваком произвољно малом броју $\varepsilon > 0$ одговара цео број $n = n(\varepsilon)$ такав да буде*

$$|x_{\nu+\mu} - x_\nu| < \varepsilon \tag{6}$$

за свако $\nu \geqslant n$ и сваки цео број $\mu \geqslant 0$.

Услов је потребан. Из конвергенције низа x_ν граничној вредности a следи да постоји број $n(\varepsilon)$ такав да буде

$$|x_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n.$$

Према томе је и

$$|x_{\nu+\mu} - a| < \varepsilon \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \nu \geqslant n,$$

па је

$$x_{\nu+\mu} - x_\nu| \leqslant |x_{\nu+\mu} - a| + |x_\nu - a| < 2\varepsilon \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant 0 \text{ и } \nu \geqslant n$$

Услов је довољан. Из (6), са $\nu = 1$, следи да је

$$|x_{\mu+1} - x_1| < \varepsilon' \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant 0,$$

према томе је

$$|x_\nu| < |x_1| + \varepsilon' \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant 1,$$

што значи да је низ x_ν ограничен. Према Bolzano-Weierstrass-ову ставу он, дакле, мора имати најмање једну тачку нагомилавања. Нека је a та тачка нагомилавања и нека је x_n један члан низа који се налази у близини те тачке, тј. такав да буде

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

са унапред датим произвољно малим $\varepsilon > 0$ и $n = n(\varepsilon)$. Према услову (6), за $\nu = n$, је тада

$$|x_{n+\mu} - a| = |x_{n+\mu} - x_n + x_n - a| \leqslant$$
$$\leqslant |x_{n+\mu} - x_n| + |x_n - a| < 2\varepsilon \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant 0,$$

тј.
$$|x_\nu - a| < 2\varepsilon \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n(\varepsilon),$$
дакле,
$$x_\nu \to a \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty.$$

Још пре Cauchy-а је овај критериум употребљавао Bolzano {2}.

(ii) Cauchy-ев услов можемо написати још у нешто различитом облику који се у суштини не разликује од оног који је дао Abel {1}. Овај облик је којипут за примену подеснији и гласи: Низ x_ν је конвергентан ако
$$x_{n_\nu} - x_\nu \to 0 \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty \quad \text{и} \quad n_\nu \to \infty, \tag{7}$$
и то за с в а к и низ целих бројева n_ν који тежи бесконачности са ν.

Овај услов можемо заменити и сличним условом који привидно мање изискује и то ако не захтевамо да услов (7) буде испуњен за све низове n_ν већ само за с в е оне низове који расту брже од једног унапред датог низа p_ν, ма како брзо тежио бесконачности низ p_ν. — Један облик Cauchy-ева критериума у коме се претпоставља да је услов (6) испуњен дао је Wendelin {1}.

10. **(i)** За скуп A бројева, или тачака a, кажемо, по Cantor-у {1}, да је *пребројив* ако се може написати у облику низа
$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_\nu, \ldots,$$
тј. ако између елемената a скупа и природног низа бројева 1, 2, 3, ... можемо успоставити биунивоку кореспонденцију тако да сваком елементу a_n одговара тачно један природан број n и обратно, да сваком природном броју m одговара одређен елемент a_m. Другим речима, скуп A је пребројив ако се његови елементи могу нумерисати индексима тако да ниједан од његових елемената не претекне.

Поред природног низа, пребројив је и скуп свих рационалних бројева као и скуп свих алгебарских бројева.

Два или више пребројивих скупова чине пребројив скуп. Уопште, пребројиво много пребројивих скупова чине пребројив скуп. Јер, ако њихове елементе напишемо по квадратној шеми можемо их дијагонално све пребројати.

(ii) *Скуп свих реалних бројева није пребројив.*

Да скуп свих реалних бројева ξ, на пример размака (0,1), није пребројив доказао је Cantor {2} овако: Претпоставимо да смо, ма на који начин, нанизали реалне бројеве размака (0,1), и нека је ξ_ν ν-ти од ових бројева. Напишимо затим ове бројеве у облику децималног разломка, тј. ставимо

$$\xi_\nu = 0,\ d_{\nu,1}\, d_{\nu,2}\, d_{\nu,3} \ldots, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots .$$

Са $d_{\nu,\mu}$ означене су поједине децимале бројева ξ_ν, а кад је овај број рационалан, да бисмо га једнозначно написали, усвојићемо да се децимални разломак тада завршава самим деветицама. — Ма на који начин успоставили ову кореспонденцију увек ће претећи реалан број

$$\xi = 0,\ d_{1,1}\, d_{2,2}\, d_{3,3} \ldots$$

размака (0,1), јер је он различит од ξ_ν и то за свако ν; он није садржан ни у једном од оваквих низова, дакле, овај скуп не можемо пребројати.

Ово је резоновање познато под именом Cantor-ов {2} *дијагонални поступак.*

11. (i) Cauchy-ев став {3, стр. 54} о аритметичкој средини. *Ако низ x_ν конвергира тада и низ његових аритметичких средина конвергира истој граничној вредности, тј. из*

$$x_\nu \to a \quad кад \quad \nu \to \infty, \tag{8}$$

следи да и

$$X_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \to a \quad кад \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Према претпоставци је

$$|x_\nu - a| < \varepsilon \quad за свако \quad \nu \geqslant m = m(\varepsilon) \quad и \quad \varepsilon > 0,$$

па је

$$|X_n - a| = \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - a) + \frac{1}{n} \sum_{\nu=m+1}^{n} (x_\nu - a) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{m} |x_\nu - a| + \frac{1}{n} \sum_{\nu=m+1}^{n} |x_\nu - a| <$$

$$< \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{m} |x_\nu - a| + \frac{n-m}{n} \varepsilon.$$

Како за свако коначно m

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m}|x_\nu - a| \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{n-m}{n} \to 1 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

то је

$$\limsup_{n=\infty} |X_n - a| \leqslant \varepsilon,$$

а како ε можемо бирати произвољно мало, то мора, дакле,

$$X_n \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

(ii) Обратан став не важи, као што то видимо из примера

$$x_\nu = \sin^2 \alpha\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \text{где је} \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Размак осцилације овог низа је $(0, 1)$ ако је α/π ирационално, или ако је $\alpha/\pi = p/q$ и q парно, а $\left(0, \sin^2\left(\frac{k}{2k+1}\pi\right)\right)$ ако је $q = 2k+1$; међутим,

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \sin^2 \alpha\nu =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos(n+1)\alpha}{2n} \frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha} \to$$

$$\to \frac{1}{2} \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Уосталом, баш због ове особине, низ аритметичких средина је као поступак збирљивости осцилаторних низова од нарочите важности. – Тако, на пример, производ (у Cauchy-еву смислу) два конвергентна реда

$$s' = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \quad \text{и} \quad s'' = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu,$$

тј. ред

$$\Sigma c_\nu \quad \text{где је} \quad c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n$$

не мора бити конвергентан (ако ниједан од датих редова није апсолутно конвергентан), међутим, низ аритметичких средина

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \quad \text{где је} \quad C_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu$$

конвергира и тежи производу $s's''$ збирова горњих редова (Cesàro-ов {1} став).

(*iii*) Да би се из конвергенције низа аритметичких средина (9) могла закључити конвергенција самога низа (8) потребно је, као што је показано и у тачки С. 7. 3, да сам низ задовољава још један суплементаран услов, тзв. услов конвергенције. Два таква елементарна услова су услови (6) и (7) тачке С. 6. 2. Међутим, много дубље лежи Hardy-ев {3} став који казује да се услов (6), тј. претпоставка да

$$n(x_n - x_{n-1}) = nu_n \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

може заменити претпоставком да овај низ остаје само ограничен, наиме да буде

$$nu_n = O(1), \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Ово ћемо најбоље видети из самог доказа овог става који гласи:

Нека је

$$u_n = x_n - x_{n+1},$$

тада из (9) *и* (10) *следи* (8).

Краткоће ради, када се у индексу, на пример X_α, налази број који није цео тада подразумевамо да је

$$X_\alpha = X_n \quad \text{где је} \quad n = [\alpha],$$

а исто тако под

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} \quad \text{подразумевамо} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \quad \text{где је} \quad n = [\alpha].$$

Нека је $\lambda > 1$; доказ се састоји у томе да се покаже прво да из (9) следи

$$Y_n = \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{\nu=n+1}^{\lambda n} x_\nu \to a, \; n \to \infty,$$

а затим, на основу услова (10), да

$$\limsup_{n=\infty} |Y_n - x_n|$$

можемо учинити произвољно малим ако $\lambda - 1$ изаберемо довољно мало. Сам доказ се изводи овако:

Из
$$([\lambda n]-n)\,Y_n=[\lambda n]\,X_{\lambda n}-n\,X_n,$$
$$[\lambda n]\sim\lambda n,\quad n\to\infty,$$
следи, према (9),
$$Y_n=\frac{[\lambda n]}{[\lambda n]-n}X_{\lambda n}-\frac{n}{[\lambda n]-n}X_n\to$$
$$\to\frac{\lambda}{\lambda-1}a-\frac{1}{\lambda-1}a=$$
$$\to a\quad\text{кад}\quad n\to\infty.$$
Даље je
$$Y_n-x_n=\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{\nu=n+1}^{\lambda n}x_\nu-x_n=$$
$$=\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{\nu=n+1}^{\lambda n}(x_\nu-x_n);$$
како je, према (10),
$$|u_\nu|<M\frac{1}{\nu}<M\lg\frac{\nu}{\nu-1},\quad \nu=2,3,\ldots$$
то je
$$|x_\nu-x_n|=\left|\sum_{\mu=n+1}^{\nu}u_\mu\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\mu=n+1}^{\nu}|u_\mu|<$$
$$<M\sum_{\mu=n+1}^{\nu}\lg\frac{\mu}{\mu-1}=$$
$$=M\lg\frac{\nu}{n},$$
па je
$$|Y_n-x_n|\leqslant\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{\nu=n+1}^{\lambda n}|x_\nu-x_n|\leqslant$$
$$\leqslant\max_{n<\nu<\lambda n}\{|x_\nu-x_n|\}<$$
$$<\max_{n<\nu<\lambda n}\left\{M\lg\frac{\nu}{n}\right\}\leqslant$$
$$<M\lg\lambda,$$

одакле коначно добивамо да је

$$\limsup_{n=\infty} |Y_n - x_n| \leqslant M\, lg\lambda.$$

Због тога што

$$lg\lambda \to 0 \quad \text{кад} \quad \lambda \to 1,$$

и што

$$Y_n \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

то мора, према овој последњој неједначини, и x_n да тежи a кад $n \to \infty$, чиме је Hardy-ев став доказан.

Поред овог доказа дао је Hardy {7, стр. 122} још један доказ који се оснива на чињеници да X_n не може конвергирати ако nu_n не тежи нули, а остаје ограничено.

12. (i) Ако низ x_n стварно дивергира и низ његових аритметичких средина x_n мора стварно дивергирати:

Из

$$x_n \to \infty \quad \textit{кад} \quad n \to \infty, \tag{11}$$

следи

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \to \infty \quad \textit{кад} \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Ако са M означимо произвољно велик број, према претпоставци (11), постоји увек такав цео број m да буде

$$x_n > M \quad \text{за свако} \quad n \geqslant m.$$

Како је

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=m+1}^{n} x_\nu + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=m+1}^{n} x_\nu - \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu\right| >$$

$$> \frac{n-m}{n}M - \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu\right|,$$

и како за свако коначно m

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

то је

$$\liminf_{n=\infty} X_n \geqslant M.$$

Како M можемо изабрати произвољно велико, то је $\liminf\limits_{n=\infty} X_n = \infty$, тј. и

$$X_n \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

(ii) Обрнуто не важи ни за овај став, тј. из (12) не мора следити (11). На пример, низ

$$x_\nu = (1+(-1)^\nu)\,\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

није стварно дивергентан јер осцилира у размаку $(0, \infty)$, док је

$$X_n = \begin{cases} k+1, & \text{за} \quad n = 2k, \\ \dfrac{2k}{2k+1}(k+1), & \text{за} \quad n = 2k+1, \end{cases}$$

тј.

$$X_n \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Међутим, ако низ X_n стварно дивергира, или општије: *Ако низ аритметичких средина X_n не остаје ограничен, тада ни низ x_n не може остати ограничен, јер из*

$$x_n = O(1), \quad n \to \infty,$$

следи

$$X_n = O(1), \quad n \to \infty.$$

Ово последње тврђење је непосредна последица очевидне неједначине

$$\underset{1 \leqslant \nu \leqslant n}{\mathrm{Min}} \{x_\nu\} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \leqslant \underset{1 \leqslant \nu \leqslant n}{\mathrm{Max}} \{x_\nu\}.$$

13. (i) Jensen-ов став {1, 2} који даје једно проширење Cauchy-ева става гласи:

Нека је

$$p_\nu \geqslant 0 \quad \text{за свако} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

и

$$P_n = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n \to \infty, \quad n \to \infty;$$

из

$$x_n \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty$$

следи

$$X_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu x_\nu \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Овај став се, за $p_n = 1$ за свако n, своди на Cauchy-ев.

Доказ овог става добива се слично као и доказ Cauchy-ева става о аритметичкој средини, изведен у [11, (i)] тј. цепањем збира (14) на два збира и двоструким прелазом ка граници.

(ii) Напоменимо да овај став важи и под нешто општијом претпоставком, наиме кад се место услова (13), тј. монотоније низа P_n, претпостави само да

$$P_n \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

и да је (15)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |p_\nu| = O(P_n), \quad n \to \infty.$$

Ово проширење је утолико од интереса, што за овако формулисан Jensen-ов став, тј. са условом (15), важи у извесном смислу обрнути став, наиме:

Да би (14) *било задовољено за* ***сваки*** *низ* x_n *који тежи* a, *потребно је и довољно да важе услови* (15).

На ову битну допуну Jensen-ова става указао је Toeplitz {1}, и то не само за збирове облика (14), већ и за општије збирове облика

$$X_n = \sum_{\nu=1}^{n} p_{\nu,n}\, x_\nu. \quad \text{(в. и Knopp \{2, стр. 75\}).}$$

(iii) Ако у горњем ставу израз $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu x_\nu$ заменимо са Q_n, добивамо транскрипцију Jensen-ова става, наиме онај облик у коме је Cauchy свој став и формулисао, а који гласи:

Нека је Q_n *произвољан низ бројева, и нека низ* P_n *задовољава услове*

$$P_n \to \infty \quad \textit{кад} \quad n \to \infty,$$

и

$$|P_2 - P_1| + |P_3 - P_2| + \ldots + |P_n - P_{n-1}| = O(P_n), \quad n \to \infty,$$

тада из

$$\frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} \to a, \quad n \to \infty, \tag{16}$$

следи

$$\frac{Q_n}{P_n} \to a, \quad n \to \infty. \tag{17}$$

На исти начин

$$\operatorname*{Min}_{p\leqslant\nu\leqslant q}\{x_\nu\}$$

претставља најмањи од бројева x_ν, $\nu=p, p+1, \ldots, q-1, q$, док

$$g=\operatorname*{Min}_{1\leqslant\nu<\infty}\{x_\nu\}$$

претставља најмањи члан низа, односно, ако овог нема, његову доњу границу.

Уколико је нарочито потребно разликовати доњу и горњу границу од најмањег, односно највећег члана, или истаћи да доња, односно горња граница не мора припадати самоме низу, употребљавају се и ознаке *Bn.* или *Bd.* (borne, boundary), на пример,

$$G=\overline{Bd}_{1\leqslant\nu<\infty}\{x_\nu\},\quad \text{односно}\quad g=\underline{Bd}_{1\leqslant\nu<\infty}\{x_\nu\}.$$

3. (i) *Близина* или *околина* тачке a је егзактан математички појам; то је сваки, произвољно мали размак који садржи тачку a. — Кад кажемо да се извесне тачке налазе у близини тачке a, или да је извесна особина задовољена у близини тачке a, то значи да се ове тачке налазе, или да је ова особина задовољена за сваки размак $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ма како мали био $\varepsilon>0$.

(ii) *Тачка нагомилавања* низа x_ν је она тачка a у чијој се близини налази бесконачно много чланова низа x_ν, или их има бесконачно много који су сви $=a$. Другим речима, a је тачка нагомилавања низа x_ν ако је за бескрајно много индекса n

$$|x_n-a|<\varepsilon,\quad \text{ма како мали био } \varepsilon>0.$$

Бесконачан низ бројева може имати једну, коначно или бесконачно много тачака нагомилавања, али може бити и без тачака нагомилавања. На пример, низ природних бројева нема тачака нагомилавања; низ $x_\nu=1/\nu$ или низ (2) имају по једну тачку нагомилавања и то код првог низа је $a=0$, а код другог $a=1$; низ $x_\nu=(-1)^\nu$ има две тачке нагомилавања и то $a_1=-1$ и $a_2=+1$, док су сви реални бројеви тачке нагомилавања низа рационалних бројева.

Тачке нагомилавања, ако их има, могу али не морају припадати датоме низу. На пример, тачка нагомилавања $a_1 = 1$ низа

$$x_\nu = \frac{(-1)^\nu \nu + 1}{\nu + 1}$$

припада низу, док му тачка нагомилавања $a_2 = -1$ не припада.

(iii) Ако било доња, било горња граница не припада низу, тада је она увек једна тачка нагомилавања тога низа. Међутим, ако једна од ових вредности припада низу, ове вредности више не морају бити тачке нагомилавања. Тако је, на пример, код низа (2)

$$g = \sqrt{3} - 1 = x_1,$$

а g није тачка нагомилавања тога низа.

4. (i) Bolzano-Weierstrass-ов став. — *Сваки бесконачан и ограничен низ бројева има најмање једну тачку нагомилавања.*

Како је низ ограничен, то постоји коначан размак J_0 у коме се налазе сви чланови тога низа. Кад овај размак преполовимо мора се најмање у једној од ових половина налазити бесконачно много чланова низа; означимо тај део са J_1. Примењујући исти поступак на J_1 добивамо размак J_2 дужине $2^{-2} J_0$, а после n таквих поступака размак J_n дужине $2^{-n} J_0$, у коме се налази још увек бесконачно много чланова датог низа. Овим (Euklid-овим) поступком одређен је, у диадном систему, реални број w у чијој се близини, на основу самог начина образовања размака J_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, мора налазити бескрајно много чланова низа x_ν. Дакле, w је тачка нагомилавања посматраног низа.

(ii) Bolzano-Weierstrass-овим ставом, тј. ставом о егзистенцији тачке нагомилавања, служи се Bolzano {1} у доказу да функција која је неограничена у размаку (a, b) мора бити у томе размаку прекидна. — При томе се Bolzano позива на свој рад „Lehre von der Messbarkeit der Zahlen“ који је остао у рукопису. Међутим, у списима које је прикупио Rychlik, који је средио Bolzano-ва дела, нема ни тога става, ни његова доказа.

Назив „Bolzano-Weierstrass-ов став“ потиче, вероватно, из Schönfliess-ова чланка о „Теорији скупова“ у Енциклопедији. Не зна се на основу чега је он овом ставу дао тај назив, уколико тај назив потиче од њега; у Stolz-ову {3} приказу Bolzano-ва математичког рада, који се оснива на Bolzano-вим штампаним списима, тај се став не спомиње.

Први који је прецизно формулисао тај став и систематски се њиме служио у својим предавањима био је Weierstrass (види Kossak {1} и Pincherle {2}).

5. (i) Низ x_ν *конвергира* и *тежи граничној вредности а* (или краће, *граници а*) ако сваком произвољно малом броју $\varepsilon > 0$ одговара такав цео број $n = n(\varepsilon)$, да буде

$$|x_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{за с в а к о} \quad \nu \geqslant n.$$

Ово краће пишемо

$$\lim_{\nu=\infty} x_\nu = a \quad \text{или} \quad x_\nu \to a \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty.$$

Сваки конвергентан низ је ограничен.

Гранична вредност (граница) низа x_ν је увек једна (и једина) тачка нагомилавања тога низа. Обратно, тачка нагомилавања не мора бити увек гранична вредност низа. Међутим, ако је низ ограничен и има с а м о ј е д н у тачку нагомилавања, тада он конвергира, а ова тачка нагомилавања је његова гранична вредност.

(ii) Сваку тачку нагомилавања можемо добити као граничну вредност повољно изабраног делимичног низа x_{n_ν} посматраног низа x_ν. Другим речима, ако је w тачка нагомилавања низа x_ν, тада постоји увек такав делимична низ x_{n_ν} низа x_ν да

$$x_{n_\nu} \to w \quad \text{кад} \quad n_\nu \to \infty.$$

Ако је низ x_ν ограничен, делимични низови

$$x_n' = \operatorname*{Min}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu\} \quad \text{и} \quad x_n'' = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

су конвергентни и теже доњој граници g, односно горњој граници G тога низа.

Ако је низ x_ν конвергентан, тада један од бројева

$$g = \operatorname*{Min}_{1 \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\} \quad \text{или} \quad G = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\},$$

или оба, припадају самоме низу. Ако један од ових бројева не припада низу тада је он истовремено и његова гранична вредност. У том случају, на пример ако G не припада низу, можемо увек изабрати такав делимичан низ x_{n_ν} да буде

$$x_{n_\nu} \leqslant x_\mu \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant n_\nu,$$

и да

$$x_{n_\nu} \to G \quad \text{кад} \quad n_\nu \to \infty;$$

такав један делимичан низ је, на пример, низ

$$\operatorname*{Min}_{n \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\}.$$

6. (i) Најмања тачка нагомилавања, или прецизније, доња граница множине тачака нагомилавања низа x_ν зове се *доњи limes* или *limes inferior* и обележава се са

$$\lim_{\nu=\infty} \inf x_\nu \quad \text{или} \quad \underline{\lim}_{\nu=\infty} x_\nu.$$

Највећа тачка нагомилавања зове се *горњи limes* или *limes superior* и означава се са

$$\lim_{\nu=\infty} \sup x_\nu \quad \text{или са} \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty} x_\nu.$$

Ако је низ ограничен ови бројеви увек постоје; кад је низ неограничен са горње, односно са доње стране, ставља се

$$\lim_{\nu=\infty} \sup x_\nu = +\infty, \quad \text{односно} \quad \lim_{\nu=\infty} \inf x_\nu = -\infty.$$

Низ x_ν је конвергентан с а м о ако је

$$\lim_{\nu=\infty} \inf x_\nu = \lim_{\nu=\infty} \sup x_\nu \neq \pm\infty.$$

(ii) Између доње границе g, горње границе G, limes inferiora l и limes superiora L постоје увек неједначине

$$g \leqslant l \leqslant L \leqslant G.$$

Ако је низ x_ν ограничен, l и L су тачке нагомилавања низа, тако да можемо увек изабрати два његова делимична низа таква да један конвергира доњем limesu l, а други горњем limesu L; међу осталим, низ

$$\operatorname*{Min}_{n \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\} \to l \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

а низ

$$\operatorname*{Max}_{n \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\} \to L \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

У општем случају је $g < l$ и $G > L$; међутим, ако је, рецимо, $g = l$, тада постоји увек делимичан низ x_{n_ν} низа x_ν, такав да је

$$x_{n_\nu} \leqslant x_\mu \quad \text{за свако} \quad \mu \leqslant n_\nu,$$

и да

$$x_{n_\nu} \to g = l \quad \text{кад} \quad n_\nu \to \infty.$$

Такав један делимичан низ је, на пример, низ

$$\operatorname*{Min}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu\}.$$

Ако

$$x_{\nu+1} - x_\nu \to 0 \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty,$$

или општије, ако је

$$\liminf_{\nu = \infty} (x_{\nu+1} - x_\nu) = 0,$$

тада су све тачке размака (l, L) тачке нагомилавања тога низа.

7. (i) За низ кажемо да је *дивергентан* ако не конвергира; постоје два битно различита случаја дивергенције.

Ако је

$$\liminf_{\nu = \infty} x_\nu = \limsup_{\nu = \infty} x_\nu = \pm \infty$$

кажемо да је низ x_ν *стварно дивергентан* или да *тежи* $\pm\infty$, и пишемо

$$x_\nu \to +\infty, \quad \text{односно} \quad x_\nu \to -\infty \quad \text{кад} \quad x \to \infty.$$

Ако је

$$l = \liminf_{\nu = \infty} x_\nu \neq \limsup_{\nu = \infty} x_\nu = L$$

кажемо да низ x_ν *осцилира*, и то између коначних или бесконачних граница према томе да ли је он ограничен или неограничен. Под *размаком осцилације* подразумевамо размак (l, L).

Док стварно дивергентни низови имају извесне аналогије са конвергентним низовима (горњи и доњи лимеси су једнаки), дотле се низови који осцилирају битно разликују, и у ствари то су они низови који у суштини не конвергирају.

(ii) Низ x_ν је стварно дивергентан и $\to +\infty$ ако ма како велик био број M, можемо одредити довољно велик индекс $n = n(M)$ такав да буде

$$x_\nu < M, \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n(M).$$

Отуда следи да стварно дивергентан низ нема ниједну тачку нагомилавања у коначности, тј. ни у једном, ма како великом размаку, и да у извесном смислу можемо сматрати да се она једина тачка нагомилавања која би му одговарала налази у бесконачности.

Ако је низ x_ν стварно дивергентан и, на пример, $\to +\infty$, тада његова доња граница увек постоји и припада самоме низу. У том случају можемо увек наћи такав делимичан низ x_{n_ν} низа x_ν да буде

$$x_\mu \geqslant x_{n_\nu} \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant n_\nu,$$

и да

$$x_{n_\nu} \to \infty \quad \text{кад} \quad n_\nu \to \infty.$$

Такав низ је, на пример, низ

$$\operatorname*{Min}_{n \leqslant \nu < \infty} \{x_\nu\}.$$

(iii) Ако низ x_ν осцилира, тада он мора имати најмање две тачке нагомилавања укључујући при томе $-\infty$ и $+\infty$; међутим, он може осцилирати а да у коначности нема ниједне тачке нагомилавања, у ком случају он мора бити неограничен са обе стране, као, на пример, низ

$$x_\nu = (-1)^\nu \nu.$$

Ако је низ x_ν неограничен, рецимо са горње стране, било да он стварно дивергира или не, увек постоји делимичан низ x_{n_ν} такав да је

$$x_\nu \leqslant x_{n_\nu} \quad \text{за свако} \quad \nu \leqslant n_\nu,$$

као што је то случај код делимичног низа

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqslant n \leqslant \nu} \{x_\nu\}.$$

8. (i) За низ x_ν кажемо да је *монотон*, и то да *монотоно расте*, ако је

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_\nu \leqslant x_{\nu+1} \leqslant \ldots, \tag{3}$$

а да *монотоно опада* ако је

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_\nu \geqslant x_{\nu+1} \geqslant \ldots$$

Монотони низови не могу осцилирати; прецизније:

Сваки монотон и ограничен низ је конвергентан.

Заиста, према Bolzano-Weierstrass-ову ставу он мора имати најмање једну тачку нагомилавања w; треба да покажемо да је то и једина тачка нагомилавања. Претпоставимо зато да низ x_ν монотоно расте. Тада се десно од w не може налазити ни један члан низа, јер кад би x_m био $\geqslant w$, тада би се, према (3), лево од x_m налазило највише $m-1$ (према томе коначно много) чланова низа x_ν, тако да w не би могла бити тачка нагомилавања. Према томе је

$$x_\nu < w \quad \text{за свако} \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots\ldots \tag{4}$$

Лево од $w-\varepsilon$, ма како мали био $\varepsilon > 0$, налази се такође само коначан број чланова низа x_ν; ако се, на пример, x_n налази у размаку $(w-\varepsilon, w)$ (а у том размаку мора бити бескрајно много чланова), то има највише $n-1$ чланова који су $\leqslant w-\varepsilon$. Према томе је

$$x_\nu > w-\varepsilon \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следи да је

$$0 < w - x_\nu < \varepsilon \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n,$$

тј. да

$$x_\nu \to w \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty.$$

(ii) Задржавајући главна својства монотоних низова, појам монотоније се може веома лако проширити као што је то показао Hardy {6} (в. и Wendelin {1}) уводећи „скоро монотоне“ низове.

Низ x_ν је *скоро монотон* ако се испред (иза) ма ког члана x_n низа налази само коначан број његових чланова, тј. ако је неједначина

$$x_\nu \leqslant x_n$$

задовољена само за коначно много чланова x_ν, ма какав био n.

Истим расуђивањем као за монотоне низове добивамо да је *сваки скоро монотон и ограничен низ конвергентан.*

Конвергентан низ бројева је скоро монотон ако се његова гранична вредност поклапа са горњом границом.

Сваки стварно дивергентан низ је скоро монотон.

Ове две чињенице можемо укратко формулисати и овако: Ако је низ скоро монотон, тада је

$$l = G, \quad (\text{или} \quad g = L),$$

узимајући у обзир и случајеве кад је један од ових бројева бесконачан.

Скоро монотони низови су утолико важни што на њих уствари наилазимо при дефиницији тоталне варијације и одређеног интеграла. Ако уочимо одређен низ подела неког размака (a, b) и у односу на ове поделе образујемо било низ збирова тоталних варијација (в. А. 5. 1. (i)), било низ горњих и доњих Darboux-ових збирова или средњих осцилација [20, (ii)], било горње и доње збирове Stieltjes-ова интеграла у односу на монотону функцију (в. B. 1. 2. (ii)), тада су сви тако добивени низови скоро монотони (в. Wendelin {1}).

9. (i) Cauchy-ев {3, стр. 125} општи критериум конвергенције. *Да би низ x_ν био конвергентан потребно је и довољно да сваком произвољно малом броју $\varepsilon > 0$ одговара цео број $n = n(\varepsilon)$ такав да буде*

$$|x_{\nu+\mu} - x_\nu| < \varepsilon \tag{6}$$

за свако $\nu \geqslant n$ и сваки цео број $\mu \geqslant 0$.

Услов је потребан. Из конвергенције низа x_ν граничној вредности a следи да постоји број $n(\varepsilon)$ такав да буде

$$|x_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n.$$

Према томе је и

$$|x_{\nu+\mu} - a| < \varepsilon \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \nu \geqslant n,$$

па је

$$x_{\nu+\mu} - x_\nu| \leqslant |x_{\nu+\mu} - a| + |x_\nu - a| < 2\varepsilon \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant 0 \text{ и } \nu \geqslant n$$

Услов је довољан. Из (6), са $\nu = 1$, следи да је

$$|x_{\mu+1} - x_1| < \varepsilon' \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant 0,$$

према томе је

$$|x_\nu| < |x_1| + \varepsilon' \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant 1,$$

што значи да је низ x_ν ограничен. Према Bolzano-Weierstrass-ову ставу он, дакле, мора имати најмање једну тачку нагомилавања. Нека је a та тачка нагомилавања и нека је x_n један члан низа који се налази у близини те тачке, тј. такав да буде

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

са унапред датим произвољно малим $\varepsilon > 0$ и $n = n(\varepsilon)$. Према услову (6), за $\nu = n$, је тада

$$|x_{n+\mu} - a| = |x_{n+\mu} - x_n + x_n - a| \leqslant$$
$$\leqslant |x_{n+\mu} - x_n| + |x_n - a| < 2\varepsilon \quad \text{за свако} \quad \mu \geqslant 0,$$

тј.

$$|x_\nu - a| < 2\varepsilon \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant n(\varepsilon),$$

дакле,

$$x_\nu \to a \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty.$$

Још пре Cauchy-а је овај критериум употребљавао Bolzano {2}.

(ii) Cauchy-ев услов можемо написати још у нешто различитом облику који се у суштини не разликује од оног који је дао Abel {1}. Овај облик је којипут за примену подеснији и гласи: Низ x_ν је конвергентан ако

$$x_{n_\nu} - x_\nu \to 0 \quad \text{кад} \quad \nu \to \infty \quad \text{и} \quad n_\nu \to \infty, \tag{7}$$

и то за **с в а к и** низ целих бројева n_ν који тежи бесконачности са ν.

Овај услов можемо заменити и сличним условом који привидно мање изискује и то ако не захтевамо да услов (7) буде испуњен за све низове n_ν већ само за **с в е** оне низове који расту брже од једног унапред датог низа p_ν, ма како брзо тежио бесконачности низ p_ν. — Један облик Cauchy-ева критериума у коме се претпоставља да је услов (6) испуњен дао је Wendelin {1}.

10. (i) За скуп A бројева, или тачака a, кажемо, по Cantor-у {1}, да је *пребројив* ако се може написати у облику низа

$$a_1, a_2, \ldots .. a_\nu, \ldots,$$

тј. ако између елемената a скупа и природног низа бројева 1, 2, 3,.... можемо успоставити биунивоку кореспонденцију тако да сваком елементу a_n одговара тачно један природан број n и обратно, да сваком природном броју m одговара одређен елемент a_m. Другим речима, скуп A је пребројив ако се његови елементи могу нумерисати индексима тако да ниједан од његових елемената не претекне.

Поред природног низа, пребројив је и скуп свих рационалних бројева као и скуп свих алгебарских бројева.

Два или више пребројивих скупова чине пребројив скуп. Уопште, пребројиво много пребројивих скупова чине пребројив скуп. Јер, ако њихове елементе напишемо по квадратној шеми можемо их дијагонално све пребројати.

(ii) *Скуп свих реалних бројева није пребројив.*

Да скуп свих реалних бројева ξ, на пример размака (0,1), није пребројив доказао је Cantor {2} овако: Претпоставимо да смо, ма на који начин, нанизали реалне бројеве размака $(0,1)$, и нека је ξ_ν ν-ти од ових бројева. Напишимо затим ове бројеве у облику децималног разломка, тј. ставимо

$$\xi_\nu = 0,\, d_{\nu,1}\, d_{\nu,2}\, d_{\nu,3} \ldots, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Са $d_{\nu,\mu}$ означене су поједине децимале бројева ξ_ν, а кад је овај број рационалан, да бисмо га једнозначно написали, усвојићемо да се децимални разломак тада завршава самим деветицама. — Ма на који начин успоставили ову кореспонденцију увек ће претећи реалан број

$$\xi = 0, d_{1,1}\, d_{2,2}\, d_{3,3} \ldots$$

размака $(0,1)$, јер је он различит од ξ_ν и то за свако ν; он није садржан ни у једном од оваквих низова, дакле, овај скуп не можемо пребројати.

Ово је резоновање познато под именом Cantor-ов {2} *дијагонални поступак.*

11. (i) Cauchy-ев став {3, стр. 54} о аритметичкој средини. *Ако низ x_ν конвергира тада и низ његових аритметичких средина конвергира истој граничној вредности, тј. из*

$$x_\nu \to a \quad \textit{кад} \quad \nu \to \infty, \tag{8}$$

следи да и

$$X_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \to a \quad \textit{кад} \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Према претпоставци је

$$|x_\nu - a| < \varepsilon \quad \text{за свако} \quad \nu \geqslant m = m(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \varepsilon > 0,$$

па је

$$|X_n - a| = \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - a) + \frac{1}{n} \sum_{\nu=m+1}^{n} (x_\nu - a) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{m} |x_\nu - a| + \frac{1}{n} \sum_{\nu=m+1}^{n} |x_\nu - a| <$$

$$< \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{m} |x_\nu - a| + \frac{n-m}{n} \varepsilon.$$

Како за свако коначно m

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m}|x_\nu - a| \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{n-m}{n} \to 1 \quad \text{кад} \quad n\to\infty,$$

то је

$$\limsup_{n=\infty} |X_n - a| \leqslant \varepsilon,$$

а како ε можемо бирати произвољно мало, то мора, дакле,

$$X_n \to a \quad \text{кад} \quad n\to\infty.$$

(ii) Обратан став не важи, као што то видимо из примера

$$x_\nu = \sin^2 \alpha\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad \text{где је} \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Размак осцилације овог низа је, $(0, 1)$ ако је α/π ирационално, или ако је $\alpha/\pi = p/q$ и q парно, а $\left(0, \sin^2\left(\frac{k}{2k+1}\pi\right)\right)$ ако је $q = 2k+1$; међутим,

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\sin^2\alpha\nu = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\cos(n+1)\alpha}{2n}\,\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} \to \\ &\to \frac{1}{2} \quad \text{кад} \quad n\to\infty. \end{aligned}$$

Уосталом, баш због ове особине, низ аритметичких средина је као поступак збирљивости осцилаторних низова од нарочите важности. – Тако, на пример, производ (у Cauchy-еву смислу) два конвергентна реда

$$s' = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \quad \text{и} \quad s'' = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu,$$

тј. ред

$$\Sigma c_\nu \quad \text{где је} \quad c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n$$

не мора бити конвергентан (ако ниједан од датих редова није апсолутно конвергентан), међутим, низ аритметичких средина

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \quad \text{где је} \quad C_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu$$

конвергира и тежи производу $s's''$ збирова горњих редова (Cesàro-ов {1} став).

(iii) Да би се из конвергенције низа аритметичких средина (9) могла закључити конвергенција самога низа (8) потребно је, као што је показано и у тачки С. 7. 3, да сам низ задовољава још један суплементаран услов, тзв. услов конвергенције. Два таква елементарна услова су услови (6) и (7) тачке С. 6. 2. Међутим, много дубље лежи Hardy-ев {3} став који казује да се услов (6), тј. претпоставка да

$$n(x_n - x_{n-1}) = nu_n \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

може заменити претпоставком да овај низ остаје само ограничен, наиме да буде

$$nu_n = O(1), \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Ово ћемо најбоље видети из самог доказа овог става који гласи:

Нека је

$$u_n = x_n - x_{n+1},$$

тада из (9) *и* (10) *следи* (8).

Краткоће ради, када се у индексу, на пример X_α, налази број који није цео тада подразумевамо да је

$$X_\alpha = X_n \quad \text{где је} \quad n = [\alpha],$$

а исто тако под

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} \quad \text{подразумевамо} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \quad \text{где је} \quad n = [\alpha].$$

Нека је $\lambda > 1$; доказ се састоји у томе да се покаже прво да из (9) следи

$$Y_n = \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{\nu=n+1}^{\lambda n} x_\nu \to a, \quad n \to \infty,$$

а затим, на основу услова (10), да

$$\limsup_{n=\infty} |Y_n - x_n|$$

можемо учинити произвољно малим ако $\lambda - 1$ изаберемо довољно мало. Сам доказ се изводи овако:

Из
$$([\lambda n]-n)\,Y_n=[\lambda n]X_{\lambda n}-nX_n,$$
$$[\lambda n]\sim\lambda n,\quad n\to\infty,$$
следи, према (9),
$$Y_n=\frac{[\lambda n]}{[\lambda n]-n}X_{\lambda n}-\frac{n}{[\lambda n]-n}X_n\to$$
$$\to\frac{\lambda}{\lambda-1}a-\frac{1}{\lambda-1}a=$$
$$\to a\quad\text{кад}\quad n\to\infty.$$
Даље је
$$Y_n-x_n=\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{\nu=n+1}^{\lambda n}x_\nu-x_n=$$
$$=\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{\nu=n+1}^{\lambda n}(x_\nu-x_n);$$
како је, према (10),
$$|u_\nu|<M\frac{1}{\nu}<M\lg\frac{\nu}{\nu-1},\quad \nu=2,3,\ldots$$
то је
$$|x_\nu-x_n|=\left|\sum_{\mu=n+1}^{\nu}u_\mu\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\mu=n+1}^{\nu}|u_\mu|<$$
$$<M\sum_{\mu=n+1}^{\nu}\lg\frac{\mu}{\mu-1}=$$
$$=M\lg\frac{\nu}{n},$$
па је
$$|Y_n-x_n|\leqslant\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{\nu=n+1}^{\lambda n}|x_\nu-x_n|\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname*{Max}_{n<\nu<\lambda n}\{|x_\nu-x_n|\}<$$
$$<\operatorname*{Max}_{n<\nu<\lambda n}\left\{M\lg\frac{\nu}{n}\right\}\leqslant$$
$$<M\lg\lambda,$$

одакле коначно добивамо да је

$$\limsup_{n=\infty} |Y_n - x_n| \leqslant M\, lg\lambda.$$

Због тога што

$$lg\lambda \to 0 \quad \text{кад} \quad \lambda \to 1,$$

и што

$$Y_n \to a \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

то мора, према овој последњој неједначини, и x_n да тежи a кад $n \to \infty$, чиме је Hardy-ев став доказан.

Поред овог доказа дао је Hardy {7, стр. 122} још један доказ који се оснива на чињеници да X_n не може конвергирати ако nu_n не тежи нули, а остаје ограничено.

12. (i) Ако низ x_n стварно дивергира и низ његових аритметичких средина x_n мора стварно дивергирати:

Из

$$x_n \to \infty \quad \textit{кад} \quad n \to \infty, \tag{11}$$

следи

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \to \infty \quad \textit{кад} \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Ако са M означимо произвољно велик број, према претпоставци (11), постоји увек такав цео број m да буде

$$x_n > M \quad \text{за свако} \quad n \geqslant m.$$

Како је

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{n}\sum_{\nu=m+1}^{n} x_\nu + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=m+1}^{n} x_\nu - \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu\right| > \\ &> \frac{n-m}{n} M - \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu\right|, \end{aligned}$$

и како за свако коначно m

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

то је

$$\liminf_{n=\infty} X_n \geqslant M.$$

Како M можемо изабрати произвољно велико, то је $\liminf_{n=\infty} X_n = \infty$, тј. и

$$X_n \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

(ii) Обрнуто не важи ни за овај став, тј. из (12) не мора следити (11). На пример, низ

$$x_\nu = (1+(-1)^\nu)\,\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

није стварно дивергентан јер осцилира у размаку $(0, \infty)$, док је

$$X_n = \begin{cases} k+1, & \text{за} \quad n = 2k, \\ \dfrac{2k}{2k+1}(k+1), & \text{за} \quad n = 2k+1, \end{cases}$$

тј.

$$X_n \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Међутим, ако низ X_n стварно дивергира, или општије:

Ако низ аритметичких средина X_n не остаје ограничен, тада ни низ x_n не може остати ограничен, јер из

$$x_n = O(1), \quad n \to \infty,$$

следи

$$X_n = O(1), \quad n \to \infty.$$

Ово последње тврђење је непосредна последица очевидне неједначине

$$\operatorname*{Min}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu\} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \leqslant \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{x_\nu\}.$$

13. (i) Jensen-ов став {1, 2} који даје једно проширење Cauchy-ева става гласи:

Нека је

$$p_\nu \geqslant 0 \quad \textit{за свако} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

и

$$P_n = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n \to \infty, \quad n \to \infty;$$

из

$$x_n \to a \quad \textit{кад} \quad n \to \infty$$

следи

$$X_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu x_\nu \to a \quad \textit{кад} \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Овај став се, за $p_n = 1$ за свако n, своди на Cauchy-ев.

Доказ овог става добива се слично као и доказ Cauchy-ева става о аритметичкој средини, изведен у [11, (i)] тј. цепањем збира (14) на два збира и двоструким прелазом ка граници.

(ii) Напоменимо да овај став важи и под нешто општијом претпоставком, наиме кад се место услова (13), тј. монотоније низа P_n, претпостави само да

$$P_n \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

и да је (15)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |p_\nu| = O(P_n), \quad n \to \infty.$$

Ово проширење је утолико од интереса, што за овако формулисан Jensen-ов став, тј. са условом (15), важи у извесном смислу обрнути став, наиме:

Да би (14) *било задовољено за* ***сваки*** *низ* x_n *који тежи* a, *потребно је и довољно да важе услови* (15).

На ову битну допуну Jensen-ова става указао је Toeplitz {1}, и то не само за збирове облика (14), већ и за општије збирове облика

$$X_n = \sum_{\nu=1}^{n} p_{\nu, n}\, x_\nu. \quad \text{(в. и Knopp \{2, стр. 75\}).}$$

(iii) Ако у горњем ставу израз $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu x_\nu$ заменимо са Q_n, добивамо транскрипцију Jensen-ова става, наиме онај облик у коме је Cauchy свој став и формулисао, а који гласи:

Нека је Q_n *произвољан низ бројева, и нека низ* P_n *задовољава услове*

$$P_n \to \infty \quad \textit{кад} \quad n \to \infty,$$

и

$$|P_2 - P_1| + |P_3 - P_2| + \ldots + |P_n - P_{n-1}| = O(P_n), \quad n \to \infty,$$

тада из

$$\frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} \to a, \quad n \to \infty, \tag{16}$$

следи

$$\frac{Q_n}{P_n} \to a, \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Обратно, (16) не мора следити из (17).

Овако формулисан, овај став претставља аналогон de l' Hospital-ова {1} става за низове; количнику извода de l' Hospital-ова става одговара у овом ставу количник диференција (16).

II. Напомене које се односе на реалне функције

14. (i) Под (a, b) подразумевамо увек *затворен* размак, тј. све вредности од x које се налазе између a и b укључиво границе размака a и b, тј.

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Под *отвореним* размаком подразумевамо све вредности од x између a и b не укључујући једну или обе од граница a и b размака, тј. кад је

$$\text{било } a < x \leqslant b, \quad \text{било } a \leqslant x < b, \quad \text{било } a < x < b;$$

то су дакле размаци

$$(a+\varepsilon, b), \quad \text{или} \quad (a, b-\varepsilon), \quad \text{или} \quad (a+\varepsilon, b-\varepsilon),$$

и то за свако произвољно мало $\varepsilon > 0$.

Да бисмо ове размаке краће писали, а при томе истакли да се ради о отвореним размацима, обележаваћемо их увек овако

$$(a+0, b), \quad \text{односно} \quad (a, b-0), \quad \text{односно} \quad (a+0, b-0).$$

(ii) Бесконачни размаци које симболички обележавамо са

$$(-\infty, a), \quad \text{или} \quad (a, \infty), \quad \text{или} \quad (-\infty, +\infty)$$

су заправо размаци

$$(-M, a), \quad \text{или} \quad (a, M), \quad \text{или} \quad (-M, M),$$

и то за свако произвољно велико $M > 0$.

Ови размаци су уствари отворени размаци и у суштини се готово и не разликују од коначних отворених размака. Наиме, скоро сви ставови који важе за коначне отворене размаке, шта више и сами докази, остају скоро увек непромењени. У суштини разлика постоји само између затворених и отворених размака и расуђивања која важе за затворене размаке не можемо без даљег применити на отворене размаке било да су ови коначни, било бесконачни (в. [15]).

15. (i) За функцију $f(x)$ кажемо да је *дефинисана* у (затвореном) размаку (a, b) ако она узима коначне и одређене вредности за свако x између a и b, укључујући и границе, тј. за $a \leqslant x \leqslant b$. Функција $f(x)$ је дефинисана у отвореном размаку, на пример у $(a, b-0)$, ако је она дефинисана у сваком од затворених размака $(a, b-\varepsilon)$ ма како мали био $\varepsilon > 0$.

(ii) Функција $f(x)$ је *ограничена* у размаку (a, b) ако постоји коначан број M такав да је

$$|f(x)| < M \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Ако такав број не постоји кажемо да је функција $f(x)$ *неограничена* у том размаку.

Функција $f(x)$ може бити дефинисана, тј. може узимати само коначне вредности за свако x размака (a, b), а да при томе не остаје ограничена у томе размаку. На пример, функција

$$f(x) = \begin{cases} tg\, x & \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \; x \neq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{за} \quad x = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

је дефинисана за све вредности размака $(0, \pi)$, и у њему узима само коначне и одређене вредности, а не остаје ограничена у томе размаку.

(iii) За функцију $f(x)$ која је дефинисана у отвореном размаку, рецимо $(a, b-0)$, кажемо да у томе размаку има извесне особине, или да задовољава извесне услове, ако она има те особине или задовољава те услове у сваком од затворених размака $(a, b-\varepsilon)$, за сваки произвољно мали број $\varepsilon > 0$. На пример, ако кажемо да је функција $f(x)$ ограничена у размаку $(a, b-0)$, или да остаје ограничене варијације у томе размаку, то значи да је она ограничена, или да остаје ограничене варијације у сваком од затворених размака $(a, b-\varepsilon)$, ма како мали био број $\varepsilon > 0$, тј. да постоји [16]

$$M(\varepsilon) = \max_{a \leqslant x \leqslant b-\varepsilon} |f(x)|,$$

односно

$$W(\varepsilon) = W_a^{b-\varepsilon}\{f(x)\} \quad \text{за свако} \quad \varepsilon > 0.$$

При томе обично $M(\varepsilon)$, односно $W(\varepsilon)$, тежи бесконачности кад $\varepsilon \to 0$; јер кад би било

$$M(\varepsilon) = O(1), \quad \text{или} \quad W(\varepsilon) = O(1), \quad \varepsilon \to 0,$$

ово би се тада свело на чињеницу да је функција $f(x)$ ограничена, односно ограничене варијације и у затвореном размаку (a, b), претпостављајући да је функција $f(x)$ дефинисана, тј. одређена и коначна за $x = b$.

Тако је, на пример, функција

$$f(x) = tg\frac{\pi x}{2} \quad \text{ограничена у размаку} \quad (0, 1-0),$$

али (ако узмемо да је, рецимо, $f(1) = 0$) она није ограничена у затвореном размаку $(0, 1)$, јер је

$$\underset{0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon}{\text{Max}} \{f(x)\} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= cotg\, \varepsilon\frac{\pi}{2} \to \infty \quad \text{кад} \quad \varepsilon \to 0.$$

Функција

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad x = 0, \\ x^a \sin x^{-b} & \text{за} \quad x > 0, \quad \text{са} \quad a > 0 \quad \text{и} \quad b > 0, \end{cases}$$

је ограничене варијације у отвореном размаку $(+0, 1)$, али кад је $a < b$ она није ограничене варијације у затвореном размаку $(0, 1)$. Заиста је (в. тачку А. 5. 1. (ii),

$$W_\varepsilon^1\{f\} = \int_\varepsilon^1 |f'(x)|\, dx =$$

$$= \int_\varepsilon^1 x^{a-1} |bx^{-b} \cos x^{-b} - a \sin x^{-b}|\, dx,$$

или, ако извршимо смену

$$t = x^{-b} \quad \text{и ставимо} \quad c = a/b, \quad \mu = \varepsilon^{-b},$$

добивамо да је

$$W_\varepsilon^1\{f\} = \int_1^\mu t^{-c} \left|\cos t - c\frac{\sin t}{t}\right| dt.$$

Према томе је

$$J_1 - cJ_2 \leqslant W_\varepsilon^1\{f\} \leqslant J_1 + cJ_2,$$

где је

$$J_1 = \int_1^\mu t^{-c} |\cos t| \, dt,$$

и

$$J_2 = \int_1^\mu t^{-c-1} |\sin t| \, dt;$$

при томе, кад $\varepsilon \to 0$ тада $\mu \to \infty$, а интеграл J_2 конвергира кадгод је $c > 0$, док је интеграл J_1 конвергентан само кад је $c > 1$, тј. $a > b$.

(iv) Кад кажемо да је функција $f(x)$ ограничена у размаку (a, b) обично подразумевамо да је она ограничена по апсолутној вредности, тј. да је

$$|f(x)| < M \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Међутим, функција $f(x)$ је ограничена у размаку (a, b) и кад је

$$M' < f(x) < M'' \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

а тада је она ограничена и по апсолутној вредности, и за број M можемо узети већи од бројева $|M'|$ и $|M''|$.

Број M претставља једно *ограничење* (апсолутно) функције $f(x)$, док је M' једно од *доњих ограничења*, а M'' једно од *горњих ограничења*.

Ако је само

$$M' < f(x) \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

кажемо да је функција $f(x)$ ограничена са доње стране, а ако је

$$f(x) < M'' \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

кажемо да је она ограничена са горње стране у размаку (a, b).

16. (i) Ако је функција $f(x)$ ограничена са доње стране у размаку (a, b), тада је највеће доње ограничење g њена *доња граница* у размаку (a, b). Прецизније, доња граница g је дефинисана тако да је

$$g \leqslant f(x) \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

и $g + \varepsilon > f(x')$ најмање за једно x' размака (a, b) и свако $\varepsilon > 0$. *Горња граница* функције, ограничене са горње стране у размаку (a, b), је онај број G који је $\leqslant$ од свих њених горњих ограничења у томе размаку, тј. G је онај број за који је

$$f(x) \leqslant G \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

а најмање за једно x'' тога размака је

$$f(x'') > G - \varepsilon \quad \text{за свако} \quad \varepsilon > 0.$$

У општем случају ограничене функције не „достижу" ни своју доњу ни своју горњу границу. Другим речима, не мора увек постојати такав број x_1 размака (a, b) да буде

$$f(x_1) = g,$$

нити такав број x_2 тога размака, да буде

$$f(x_2) = G.$$

На пример, горња граница функције

$$f(x) = x - [x],$$

ма у ком размаку дужине веће од 1 је $G = 1$, међутим је

$$x - [x] < 1 \quad \text{за свако} \quad x.$$

(ii) Ближу везу између горње и доње границе функције $f(x)$ добивамо из наредних ставова који у главном потичу из Weierstrass-ових предавања, а који гласе:

Ако је функција $f(x)$ ограничена, рецимо са горње стране, тада постоји најмање једна тачка x_0 у чијој се близини функција произвољно мало разликује од њене горње границе G, или је $f(x_0) = G$.

Ако функција $f(x)$ није ограничена, рецимо са горње стране, тада постоји најмање једна тачка x_0 таква да у близини те тачке, тј. у размаку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ма како мали био $\varepsilon > 0$, функција не остаје ограничена с горње стране.

Оба ова става доказују се као и Bolzano-Weierstrass-ов став [4], постепеним половљењем размака (a, b) и одабирањем оне половине размака у којој се, код првог става, налази оно x за које је $f(x) > G - \varepsilon$, а код другог става, одабирањем оне половине размака у којој функција не остаје ограничена с горње стране.

(iii) *Свака у размаку (a, b) непрекидна функција је ограничена (са обе стране) у томе размаку.*

Из претпоставке да је функција $f(x)$ непрекидна у размаку (a, b) следи да за свако x_0 тога размака можемо сваком произвољно малом $\delta > 0$ одредити такво $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, да буде

$$|f(x_0) - f(x)| < \delta \quad \text{за свако} \quad x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon.$$

Како је, према претпоставци, $f(x_0)$ коначно, то из непрекидности следи да постоји увек коначан размак $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ такав да функција $f(x)$ остаје ограничена у томе размаку. Према другом ставу из (ii), кад функција $f(x)$ не би била ограничена у размаку (a, b), морало би постојати најмање једно такво x_0 да у размаку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ функција не буде ограничена, а што се, према претходном, противи претпоставци да је она непрекидна за свако x_0 размака (a, b).

На основу горњег добива се Weierstrass-ов став, који је он изнео у својим предавањима, и који гласи:

Ако је функција $f(x)$ непрекидна у размаку (a, b) она у томе размаку „достиже" своју доњу и горњу границу.

То значи да у размаку (a, b) постоји најмање једно x' и једно x'' такво да је

$$f(x') = g \quad \text{и} \quad f(x'') = G.$$

Према претходном ставу, доња граница g и горња граница G морају постојати, а према првом ставу из (ii), ако га применимо, рецимо на доњу границу g, мора постојати такво једно x' размака (a, b) да буде

$$f(x') < g + \delta \quad \text{кад је} \quad x' - \varepsilon \leqslant x \leqslant x' + \varepsilon,$$

и то за свако $\delta > 0$ и њему одговарајуће $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$. Међутим, из претпоставке да је функција $f(x)$ непрекидна у тачки x' следи да је

$$|f(x') - f(x)| < \delta \quad \text{за свако} \quad x' - \varepsilon' \leqslant x \leqslant x' + \varepsilon'$$

и свако $\delta > 0$ и њему одговарајуће $\varepsilon' = \varepsilon'(\delta)$.

Из ове две неједначине следи да мора бити

$$f(x') = g,$$

а исто тако се доказује и тврђење за горњу границу.

(iv) Кад функција $f(x)$ достиже своју доњу, односно горњу границу, као што је то, према претходном, увек случај код непрекидних функција, ове вредности тада називамо *минимум* и *максимум* и обележавамо их са Min и Max.

Уколико нема потребе да нарочито разликујемо, рецимо, максимум од горње границе, тј. уколико то не би довело до несугласности, употребићемо ознаке Min и Max како за стваран минимум, односно максимум, тако и за доњу, односно горњу границу и стављаћемо, укратко, да је

$$g = \operatorname*{Min}_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\}, \quad \text{односно} \quad G = \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\}.$$

У колико је потребно да се разликује минимум или максимум од горње или доње границе употребљава се знак Bd (в. [2, (ii)]).

17. (i) Нека је функција $f(x)$ ограничена у размаку (a, b) и нека је размак $(x-h, x+h)$, $h > 0$, цео садржан у размаку (a, b). Означимо са $g(x, h)$ доњу границу, а са $G(x, h)$ горњу границу функције $f(x)$ у размаку $(x-h, x+h)$, тј. ставимо [16, (iv)]

$$g(x, h) = \operatorname*{Min}_{x-h \leqslant t \leqslant x+h} \{f(t)\}, \quad \text{односно} \quad G(x, h) = \operatorname*{Max}_{x-h \leqslant t \leqslant x+h} \{f(t)\}.$$

Из саме ове дефиниције видимо да $g(x, h)$ не опада, а $G(x, h)$ не расте кад h опада. Према томе, кад $h \to 0$ ови изрази теже одређеним граничним вредностима $g(x)$, односно $G(x)$, тј.

$$g(x, h) \to g(x), \quad \text{односно} \quad G(x, h) \to G(x) \quad \text{кад} \quad h \to 0.$$

Како је за свако x размака (a, b) и свако $h > 0$,

$$g(x, h) \leqslant f(x), \quad \text{а} \quad G(x, h) \geqslant f(x),$$

то је

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant G(x) \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Вредности $g(x)$, односно $G(x)$, које су одређене за свако x размака (a, b), су доња, односно горња вредност функције $f(x)$ „у тачки x".

На пример, нека је функција $f(x)$ дефинисана у размаку $(0,1)$ овако

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{кад је } x \text{ рационално облика } p/q \\ 0 & \text{за свако остало } x; \end{cases}$$

тада је

$$g(p/q) = 0, \quad \text{а} \quad G(p/q) = 1/q,$$

док је за све остале вредности x

$$g(x) = G(x) = 0.$$

(ii) Разлику

$$w(x,h)=G(x,h)-g(x,h)$$

називамо *осцилација* функције $f(x)$ *у размаку* $(x-h,x+h)$, док се разлика

$$w(x)=G(x)-g(x)$$

зове *осцилација* функције $f(x)$ *у тачки* x. Осцилација у тачки је или позитивна, или једнака нули, а може бити једнака нули, тј. $w(x)=0$, само кад је функција непрекидна у тачки x. Тако је, на пример, за функцију $f(x)$, наведену у примеру претходне тачке (i),

$$w(p/q)=1/q,$$

док је за свако ирационално x

$$w(x)=0.$$

Према тома је ова функција прекидна за свако рационално, а непрекидна за свако ирационално x.

(iii) Да би се могло окарактерисати понашање функције $f(x)$ само лево, или само десно од тачке x, потребно је да се поред њене доње вредности $g(x)$, или горње вредности $G(x)$, или осцилације $w(x)$ у тачки x уведе лева, односно десна доња вредност, $g^-(x)$ и $g^+(x)$, или лева, односно десна горња вредност $G^-(x)$ и $G^+(x)$, или лева, односно десна осцилација $w^-(x)$ и $w^+(x)$. Тако је

$$g^-(x)=\lim_{h=0} g^-(x,h)=\lim_{h=0}\ \underset{x-h<t<x}{\mathrm{Min}}\ \{f(t)\},$$

$$G^-(x)=\lim_{h=0} G^-(x,h)=\lim_{h=0}\ \underset{x-h<t<x}{\mathrm{Max}}\ \{f(t)\},$$

$$w^-(x)=G^-(x)-g^-(x).$$

Слично се дефинишу и десне вредности ако се функција $f(x)$, место у размаку $(x-h,x-0)$ посматра у раз- $(x+0,x+h)$, $h>0$.

У овом случају је доња вредност $g(x)$ једнака најмањем од бројева

$$g^-(x),\quad f(x)\quad \text{и}\quad g^+(x),$$

а горња вредност $G(x)$ је једнака највећем од бројева

$$G^-(x),\quad f(x)\quad \text{и}\quad G^+(x).$$

Лева и десна осцилација су увек $\geqslant 0$. Да би функција $f(x)$ била непрекидна са леве стране у тачки $x=c$, потребно је и довољно да $w^{-}(c)$ буде једнако нули, тј. да

$$f(x)\rightarrow f(c-0) \quad \text{кад} \quad x\rightarrow c-0, \quad \text{и да је} \quad f(c-0)=f(c);$$

исто тако је функција $f(x)$ непрекидна са десне стране у тачки c, ако је $w^{+}(c)=0$, тј. ако

$$f(x)\rightarrow f(c+0) \quad \text{кад} \quad x\rightarrow c+0, \quad \text{и ако је} \quad f(c+0)=f(c).$$

Функција $f(x)$ је непрекидна у тачки c ако је она непрекидна са обе стране, тј. ако је

$$f(c-0)=f(c+0)=f(c),$$

односно ако је

$$w(c)=0.$$

Ознака $f(c\pm 0)$ потиче од Dirichlet-а {3}.

18. (i) Ако је осцилација функције $f(x)$ у тачки $x=c$ различита од нуле, тј. ако је $w(c)>0$, кажемо да је тачка $x=c$ *дисконтинуитет* или *тачка прекида* функције $f(x)$. — Разликујемо две врсте дисконтинуитета.

(ii) Тачка $x=c$ је дисконтинуитет или тачка прекида *прве врсте*, ако је функција $f(x)$ непрекидна и са леве и са десне стране тачке c, тј. ако постоје граничне вредности $f(c-0)$ и $f(c+0)$, али тако да је при томе или

$$f(c-0)\neq f(c+0),$$

или

$$f(c-0)=f(c+0)\neq f(c).$$

У овом другом случају, кад променимо вредност функције $f(x)$ у тачки c, и заменимо је са заједничком левом и десном граничном вреднoшћу, можемо учинити да функција постане непрекидна у тој тачки.

У првом случају, међутим, ма како одредили функцију $f(x)$ у тачки c, тј. вредност $f(c)$, ова тачка остаје увек прекидна. Обично се узима да се $f(c)$ налази између $f(c-0)$ и $f(c+0)$, а најчешће да је

$$f(c)=\frac{1}{2}\{f(c-0)+f(c+0)\}.$$

Ако је, међутим,

$$f(c) = f(c-0),$$

функција $f(x)$ је у тачки c непрекидна са леве стране, а ако је

$$f(c) = f(c+0),$$

она је непрекидна са десне стране.

У свим овим случајевима је

$$w(c) = |f(c+0) - f(c-0)|,$$

и зове се скок функције $f(x)$ у тачки c.

(iii) Тачка $x=c$ је дисконтинуитет *друге врсте* функције $f(x)$, ако је било њена лева осцилација, било њена десна осцилација у тачки c различита од нуле, тј. ако је

$$\text{било} \quad w^{+}(c) > 0, \quad \text{било} \quad w^{-}(c) > 0.$$

У том случају не постоји гранична вредност функције $f(x)$, кад x тежи било са леве, било са десне стране вредности c, већ тада $f(x)$ осцилира између

$$g^{-}(c) \quad \text{и} \quad G^{-}(c), \quad \text{односно} \quad g^{+}(c) \quad \text{и} \quad G^{+}(c).$$

Тако је, на пример, тачка $x=0$ тачка прекида прве врсте функције

$$f(x) = tgh\frac{1}{x} = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}},$$

јер граничне вредности $f(-0) = -1$ и $f(+0) = +1$ постоје.

Међутим, тачка $x=0$ је дисконтинуитет друге врсте функције

$$g(x) = [x] \sin\frac{1}{x},$$

јер је

$$g^{-}(0) = -1, \quad \text{а} \quad G^{-}(0) = +1,$$

док је

$$g^{+}(0) = G^{+}(0) = 0.$$

(iv) Скуп тачака дисконтинуитета прве врсте једне у размаку (a, b) дефинисане функције, може бити највише пребројив. Међутим, скуп тачака дисконтинуитета друге врсте може бити и непребројив. На пример, све тачке размака $(0, 1)$ су дисконтинуитети друге врсте функције која је једнака јединици за све рационалне вредности размака $(0, 1)$, а нули за све ирационалне вредности тога размака.

19. (i) Доказ егзистенције, како Riemann-ова [20] тако и Stieltjes-ова интеграла непрекидне функције почива на особини непрекидности, коју често изражавамо тако што кажемо да је непрекидна функција *униформно* непрекидна у затвореном размаку. Ова особина, прецизно формулисана, гласи:

Нека је функција $f(x)$ *непрекидна у размаку* (a, b) *и нека је* δ *дат, произвољно мали број. Увек можемо наћи такав број* $\eta = \eta(\delta)$ *да, ма како разделили размак* (a, b) *у коначан број подразмака дужине мање од* η, *осцилација функције* $f(x)$ *у сваком од ових подразмака не буде већа од* δ.

Ово значи да је

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \delta$$

за свако x' и x'' размака (a, b) за које је

$$|x' - x''| \leqslant \eta(\delta).$$

Важност овога става увидео је још Dirichlet {3}, и ако се он обично приписује Heine-у {1}, али, према једној изјави Cantora, изгледа да је Cantor овај став, заједно са доказом, усмено саопштио Heine-у.

(ii) Доказ овога става може се извести из Borel-ова {1, стр. 43; 2, стр. 42} става који се односи на прекривање размака коначним бројем подразмака (Überdeckungssatz), а који је од нарочите важности у теорији скупова. Овај став се често назива Heine-Borel-ов став због сличности његова доказа са доказом горе наведеног Dirichlet-Heine-ова става.

Borel-ов став. *Нека је размак* (a, b) *прекривен скупом размака* J *који има ове особине:* 1° *Свака тачка размака* (a, b), *осим тачака* a *и* b, *налази се у унутрашњости (тј. не на крајевима) најмање једног размака* J. 2° *Тачка* a *је лева, а тачка* b *десна крајња тачка најмање једног размака* J. *Тада постоји коначан број размака* J *који прекривају цео размак* (a, b).

Ако претпоставимо да се размак (a, b) не може прекрити коначним бројем размака J, и размак (a, b) преполовимо, тада се бар једна од ових половина (ако не обе) не би могла прекрити коначни бројем размака J. Уочимо ту половину размака (a, b), или ма коју од ових половина, ако се обе не могу прекрити коначним бројем размака J, и продужимо овај поступак. Овим добивамо низ размака од којих дужина n-тог износи $(b-a)/2^n$, који су, за довољно велико n, према Bolzano-Weierstrass-ову ставу, сви садржани у извесном размаку $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$, (или $(a, a+\varepsilon)$ ако је $\xi=a$, доносно $(b-\varepsilon, b)$ ако је $\xi=b$), а ниједан од ових размака не би се могао прекрити коначним бројем размака J. Ово се противи претпоставци става (и то претпоставци 1^0 ако се ξ налази унутрашњости размака (a, b), а претпоставци 2^0, ако је или $\xi=a$, или $\xi=b$), јер ε можемо изабрати тако мало, тј. n тако велико, да размак $(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ (односно један од размака $(a, a+\varepsilon)$, или $(b-\varepsilon, b)$) цео падне у један од оних, према претпоставци постојећих, размака J који садржи тачку ξ. Према томе, почев од таквог n-а, сви размаци добивени деобом могу се прекрити једним јединим размаком скупа J.

(iii) Доказ униформне непрекидности непрекидне функције $f(x)$ у затвореном размаку (a, b) је непосредна последица Heine-Borel-ова става. Ако уочимо све размаке J размака (a, b), у којима је осцилација функције $f(x)$ мања од $\delta/2$, тада ови размаци задовољавају претпоставке Heine-Borel-ова става, према томе их има коначан број, са којима можемо прекрити цео размак (a, b). Ако са J' означимо овај коначан број размака, а са η дужину најмањег од њих, и цео размак (a, b) прекријемо размацима дужине η, тада ма који од ових размака не може садржати обе крајње тачке ма ког од размака J', тако да осцилација функције $f(x)$ у сваком од размака дужине η не може бити већа од $2\frac{\delta}{2}=\delta$.

(iv) Назив „униформан" који се због извесне аналогије са „униформном конвергенцијом граничних процеса" [23] употребљава код непрекидности, а често и код ограничености функције или њене варијације, донекле је неоправдан, уколико се он односи на затворене размаке. Чињеница да је функција „униформно непрекидна" изражава, уствари, само једну особину непрекидних функција у затвореном размаку, формулисану ставом тачке (i), док би „униформна ограниченост" функције $f(x)$ или њене варијације у размаку (a, b), значила да постоји коначан број M, који не зависи од x, такав да је

$$|f(x)|<M, \quad \text{односно} \quad W_a^x\{f\}<M \tag{1}$$

за свако $a \leqslant x \leqslant b$. Као што видимо униформна ограниченост је, уствари, истоветна са чињеницом да је функција, односно њена варијација ограничена у размаку (a, b).

Међутим, реч униформан се може, донекле, употребити када се ради о отвореним размацима, јер (в. [15, (iii)]) функција, или њена варијација, могу бити ограничене у отвореном размаку, рецимо $(a, b-0)$, а да при томе не постоји коначан број M такав да неједначине (1) буду задовољене за свако $a \leqslant x < b$.

Исто тако, функција

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

је непрекидна у отвореном размаку $(+0,1)$, али она није „униформно" непрекидна у томе размаку, јер, ма како мали био број η, увек постоје довољно мале вредности x' и x'' такве да буде

$$|x' - x''| < \eta \quad \text{и} \quad |f(x') - f(x'')| = 2.$$

Ако је функција $f(x)$ или њена варијација униформно ограничена у отвореном размаку $(a, b-0)$, тада су граничне вредности

$$\lim_{x=b} \operatorname*{Max}_{a \leqslant t \leqslant x} \{|f(t)|\} \quad \text{и} \quad \lim_{x=b} W_a^x\{f\}$$

коначне, оне постоје, јер посматрани изрази не опадају кад x расте, шта више, из $W_a^x\{f\} = O(1)$ следи егзистенција граничне вредности $\lim\limits_{x=b} f(x)$.

Према томе, кад вредност функције $f(x)$ у тачки $x = b$ по вољи одредимо, тако добивена функција, односно њена варијација остају ограничене и у затвореном размаку (a, b).

Слично, ако је функција $f(x)$ униформно непрекидна у отвореном размаку $(a, b-0)$, тј. ако је за произвољно мало δ

$$|f(x') - f(x'')| < \delta,$$

и то за свако $x' < b$ и $x'' < b$, ако је само

$$|x' - x''| < \eta(\delta),$$

значи да гранична вредност

$$A = \lim_{x=b} f(x)$$

постоји. Према томе, ако вредност функције $f(x)$ у тачки b одредимо тако да буде

$$f(b) = A,$$

тада је овако добивена функција непрекидна у затвореном размаку (a, b), или, ако хоћемо, униформно непрекидна у томе размаку.

Значи, да појам униформне ограничености или непрекидности има донекле смисла уводити само кад се ради о отвореним размацима, и то кад функција $f(x)$ није или не може бити дефинисана у крајњим тачкама тога размака.

20. (i) Дефиниција одређеног интеграла функције $f(x)$ дефинисане у размаку (a, b) коју је дао Riemann {1, стр. 239—244}, по самој својој структури имплицира претпоставку да функција $f(x)$ буде ограничена у посматраном размаку, и гласи:

Нека је $\{P\}$ произвољна подела размака (a, b),

$$\{P\}: \qquad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots . < x_{n-1} < x_n = b,$$

и

$$\delta(P) = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant \nu \leqslant n} (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

и нека су

$$t_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots . n,$$

произвољне тачке сваког од подразмака $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, тј.

$$x_{\nu-1} \leqslant t_\nu \leqslant x_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots . n.$$

Ставимо

$$g_\nu = \operatorname*{Min}_{x_{\nu-1} \leqslant t \leqslant x_\nu} \{f(t)\} \quad \text{и} \quad G_\nu = \operatorname*{Max}_{x_{\nu-1} \leqslant t \leqslant x_\nu} \{f(t)\},$$

и означимо са $\underline{S}\{P\}$, односно $\overline{S}\{P\}$, *доњи*, односно *горњи збир* функције $f(x)$ у односу на поделу $\{P\}$, тј.

$$\underline{S}\{P\} = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) \quad \text{и} \quad \overline{S}\{P\} = \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

а са $W\{P\}$ *средњу осцилацију* функције $f(x)$ у размаку (a, b), тј.

$$W\{P\} = \sum_{\nu=1}^{n} (G_\nu - g_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = \overline{S}\{P\} - \underline{S}\{P\}. \tag{2}$$

Нека је, најзад,

$$S\{P, t\} = \sum_{\nu=1}^{n} f(t_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

тако да је

$$\underline{S}\{P\} \leqslant S\{P, t\} \leqslant \overline{S}\{P\}. \tag{3}$$

За функцију $f(x)$ кажемо да је *R-интеграбилна* у размаку (a, b), тј. *интеграбилна у смислу Riemann-a*, ако $S\{P, t\}$ тежи коначној и одређеној граничној вредности кад $\delta\{P\}\to 0$, и то ма какав био низ подела $\{P\}$ и избор тачака t_ν. Ова гранична вредност, која не зависи ни од подела $\{P\}$ ни од избора тачака t_ν, обележава се са

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim S\{P, t\}$$

и зове се одређени Riemann-ов интеграл функције $f(x)$ у размаку (a, b).

(ii) Darboux {1, стр. 79} је показао:

Кад највећи од подразмака $\delta\{P\}\to 0$, *тада и доњи збир* $\underline{S}\{P\}$ *и горњи збир* $\overline{S}\{P\}$ *теже сваки својој увек истој граничној вредности ма какве биле поделе* $\{P\}$.

Ове граничне вредности зову се доњи и горњи Darboux-ов интеграл и обележавају се са

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim \underline{S}\{P\} \quad \text{и} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim \overline{S}\{P\}.$$

Darboux-ов став је један од ретких ставова који сем ограничености ништа не претпоставља о понашању функције $f(x)$ у размаку (a, b), тј. који важи за произвољне ограничене функције. Његов доказ можемо лако добити ако приметимо да су низови $\underline{S}\{P_\nu\}$ и $\overline{S}\{P_\nu\}$, добивени одређеним низом подела $\{P_\nu\}$, увек „скоро монотони" (в. [3, (ii)]) ако $\delta\{P_\nu\}\to 0$.

Да бисмо ово увидели уочимо одређен низ подела $\{P_\nu\}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, такав да $\delta\{P_\nu\}\to 0$, и нека су $\{P_n\}$ и $\{P_m\}$, $n < m$, две поделе тога низа за које можемо, због лакше прегледности, претпоставити да је $\delta\{P_m\}$ мање од најмањег подразмака поделе $\{P_n\}$, тако да се највише једна тачка поделе $\{P_n\}$ може налазити у једном подразмаку поделе $\{P_m\}$.

Како се доња граница повећава кад се размак смањује тј.

$$\min_{x\leqslant t\leqslant y}\{f(t)\} \leqslant \min_{x'\leqslant t\leqslant y'}\{f(t)\} \quad \text{кад је} \quad x\leqslant x' < y' \leqslant y,$$

то кад у збиру $\underline{S}\{P_m\}$ заменимо све оне његове чланове, чији подразмаци садрже тачке поделе $\{P_n\}$, са

$$G\delta\{P_m\}, \quad \text{где је} \quad G = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\},$$

то овако добивени збир не може бити мањи од $\underline{S}\{P_n\}$. Како оваквих чланова у подели $\{P_m\}$ има највише $(n-1)$, то је утолико пре и

$$\underline{S}\{P_n\} \leqslant \underline{S}\{P_m\} + (n-1)\, G\delta\{P_m\}. \tag{4}$$

Кад у овој неједначини пустимо да $m \to \infty$, задржавајући n стално, добивамо да је

$$\underline{S}\{P_n\} \leqslant \lim_{\nu=\infty} \inf \underline{S}\{P_\nu\}.$$

Отуда следи да само коначан број чланова низа $\underline{S}\{P_\nu\}$ може претходити ма коме члану $\underline{S}\{P_n\}$ тога низа (уколико сви чланови нису међусобно једнаки), тј. да је овај низ „скоро монотон", а како је он ограничен, то он мора конвергирати.

Истим расуђивањем добивамо да је ова гранична вредност независна од низа подела $\{P_\nu\}$, јер ако уочимо два низа подела $\{P_\nu\}$ и $\{P_\nu'\}$ тада, из неједначине која је аналогна неједначини (4) добивамо да је

$$\underline{S}\{P_n\} \leqslant \lim_{\nu=\infty} \underline{S}\{P_\nu'\} \quad \text{за свако} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а исто тако и да је

$$\underline{S}\{P_n'\} \leqslant \lim_{\nu=\infty} \underline{S}\{P_\nu\} \quad \text{за свако} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Према томе мора бити

$$\lim_{\nu=\infty} \underline{S}\{P_\nu\} = \lim_{\nu=\infty} \underline{S}\{P_\nu'\}.$$

Аналогно се добива доказ Darboux-ова става и за горњи збир.

(iii) Из Darboux-ова става добивамо непосредно услов за егзистенцију Riemann-ова интеграла. Како тачке t_ν можемо бирати тако да се $S\{P, t\}$ произвољно мало разликује било од доњег збира $\underline{S}\{P\}$, било од горњег збира $\overline{S}\{P\}$, и како гранична вредност збира $S\{P, t\}$ (кад $\delta\{P\} \to 0$) не сме да зависи од избора тачака t_ν, то је, према (3), за егзистенцију граничне вредности овог збира потребно и довољно да доњи и горњи збир теже истој граничној вредности. Отуда, према (2), добивамо Riemann-ов услов интеграбилности, који гласи:

Да би у размаку (a, b) ограничена функција $f(x)$ била R-иншеграбилна, пошребно је и довољно да њена средња осцилација $W\{P\}$ у шоме размаку шежи нули за једну одређену поделу $\{P\}$ размака (a, b), за коју $\delta\{P\} \to 0$.

На основу особине непрекидних функција, да су оне униформно непрекидне у затвореном размаку (в. [19, (i)]), из овог услова непосредно видимо:

Свака у зашвореном размаку непрекидна функција је R-иншеграбилна у шоме размаку.

Ако функција $f(x)$ има тачака дисконтинуитета, тада је (осим кад их има коначан број) горњи експлицитни облик услова R-интеграбилности од мањег значаја, а важнији су они услови који се односе на структуру множине њених тачака дисконтинуитета.

Прве услове ове врсте, општег облика, дао је Du Bois-Reymond {2} увођењем појма *иншеграбилне груйе.* По Du Bois-Reymond-у интеграбилна група је таква множина тачака размака (a, b), која се може укључити у к о н а ч а н б р о ј подразмака размака (a, b), тако да се целокупна дужина ових подразмака може учинити произвољно малом.

Како се средња осцилација (2), тј. збир

$$W(P) = \sum_{\nu=1}^{n} w_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

где је $w_\nu = G_\nu - g_\nu$ осцилација функције $f(x)$ у размаку $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, може укључити између граница

$$\varepsilon \Sigma' (x_\nu - x_{\nu-1}) \leqslant W\{P\} \leqslant G \Sigma' (x_\nu - x_{\nu-1}) + \varepsilon (b - a),$$

где Σ' значи да тај збир треба узети само преко оних размака $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ у којима је осцилација функције $f(x)$ већа од унапред датог произвољно малог броја $\varepsilon > 0$, а G горња граница функције $f(x)$ у размаку (a, b), то из ове двоструке неједначине следи:

Да би функција $f(x)$ била R-интеграбилна потребно је и довољно да збир

$$\sum_{w_\nu \leqslant \varepsilon} (x_\nu - x_{\nu-1}) \to 0 \text{ кад } \delta\{P_\nu\} \to 0 \text{ ма како мало било } \varepsilon > 0. \tag{4'}$$

Тако формулисан услов R-интеграбилности Du Bois-Reymond је преко свог појма интеграбилне групе изразио овако:

Да би у размаку (a, b) *ограничена функција* $f(x)$ *била R-иншеграбилна, йошребно је и довољно да за свако* $\delta > 0$, *множина оних шачака дисконшинуишеша, у којима је осцилациіа већа од* δ, *сачињава иншеграбилну груйу.*

Међутим, тек је Lebesgue {1, стр, 23—30; 3}, потпуно истакао структуру множине тачака дисконтинуитета R-интеграбилне функције, увођењем појма *множине нулше мере*, подразумевајући под множином нулте мере такву множину тачака размака (a, b) која се може укључити у коначно или пребројиво много подразмака, чију тоталну дужину можемо учинити произвољно малом. Тек се овим појмом нулте мере може јасно формулисати услов R-интеграбилности, који је Lebesgue изразио овако:

Да би у размаку (a, b) *ограничена функција била R-иншеграбилна, йошребно је и довољно да множина шачака њених дисконшинуишеша буде нулше мере.*

Тако је, на пример, функција наведена у [17, (ii)] R-интеграбилна јер има пребројиво много тачака дисконтинуитета (све рационалне вредности од x), док функција која је једнака јединици за x рационално, а нули за x ирационално, није R-интеграбилна, јер је она прекидна за све вредности од x, тј. има непребројиво много тачака дисконтинуитета.

(iv) Наведимо овде један став о Riemann-ову интегралу који, поред тога што ће нам бити потребан за доказ Arzelà-ова става који се односи на интегрисање редова члан по члан [24, (iv—v)], има и утолико значај што на његовој основној идеји, уствари, почива конструкција Lebesgue-ова интеграла. Ево у чему се овај став састоји:

Нека је функција $f(x)$ дефинисана и R-интеграбилна у размаку (a, b), и нека су g и G њена доња и горња граница у томе размаку. Ако уочимо ма који број t који се налази између g и G, тј. такав да је

$$g \leqslant t \leqslant G,$$

тада функцији $f(x)$ можемо асоцирати функцију $\varphi(t, x)$ тако да она буде једнака 0 или 1, према томе да ли је

$f(x) <$ или $\geqslant t$, тј.

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{за свако } x \text{ за које је } f(x) < t, \\ 1 & \text{за свако } x \text{ за које је } f(x) \geqslant t, \end{cases}$$

при чему је $a \leqslant x \leqslant b$ и $g \leqslant t \leqslant G$.

Јасно је да $\varphi(t, x)$, посматрана као функција од t, не расте кад t расте од g до G, тј. да је

$$\varphi(t_0, x) \geqslant \varphi(t_1, x) \quad \text{за} \quad t_0 \leqslant t_1 \quad \text{и} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

и да има само један скок дужине 1 и то кад је $t = f(x)$.

Међутим, $\varphi(t, x)$ посматрана као функција од x може бити веома разнолике природе; она, штавише, за извесне вредности од t не мора бити ни R-интеграбилна, као што видимо из овог примера.

Нека је c_ν, конвергентан низ чији су сви чланови мањи од његове граничне вредности c, и означимо са a_ν произвољно уређен низ рационалних бројева, рецимо, размака $(0, 1)$. Ако тада уочимо функцију $f(x)$ дефинисану у размаку $(0, 1)$, тако да је

$$f(x) = \begin{cases} c_\nu & \text{кад је } x = a_\nu,\ \nu = 1, 2, 3, \ldots, \\ c & \text{за остале вредности од } x, \end{cases}$$

видимо да је ова функција R-интеграбилна, јер има само пребројиво много тачака дисконтинуитета. Међутим, функција $\varphi(t, x)$ која јој одговара није R-интеграбилна кад је $t = c$ (то је функција која је $= 0$ за свако рационално, а $= 1$ за свако ирационално x), док за остале вредности од t функција $\varphi(t, x)$ може имати само коначан број тачака дисконтинуитета.

Овај пример није тешко тако уопштити да се добије произвољно много таквих изузетних вредности од t. Довољно је зато уочити произвољну степенасту функцију (в. тачку А. 1. 4), и на свакој од њених платформи образовати функцију горе описаног облика. На тај начин можемо образовати такву функцију $f(x)$ да функција $\varphi(t, x)$ која јој одговара не буде R-интеграбилна за бескрајно, али пребројиво много вредности од t. Таква функција би била донекле и најопштија функција ове врсте, као што то видимо из напред поменутог става који гласи:

Ако је функција $f(x)$ R-интеграбилна у размаку (a, b), тада је и њој асоцирана функција $\varphi(t, x)$ такође R-инте-

грабилна по x у томе размаку за све вредности од t размака (g, G), изузев највише за пребројиво много ових вредности.

Према Darboux-ову ставу из (ii) доњи и горњи Darboux-ови интеграли функције $\varphi(t, x)$ увек постоје, ма какво било t. Означимо ове интеграле са

$$\underline{\Phi}(t) = \underline{\int_a^b} \varphi(t, x)\,dx \quad \text{и} \quad \overline{\Phi}(t) = \overline{\int_a^b} \varphi(t, x)\,dx.$$

Уочимо даље две вредности размака (g, G) и, у односу на произвољну поделу $\{P\}$ размака (a, b), образујмо горњи збир функције $\varphi(t'', x)$ и доњи збир функције $\varphi(t', x)$, тј. ставимо

$$\overline{S}\{P; t''\} = \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu(t'')(x_\nu - x_{\nu-1})$$

и

$$\underline{S}\{P; t'\} = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(t')(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

где је

$G_\nu(t'')$ горња граница функције $\varphi(t'', x)$ за $x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu$,

а

$g_\nu(t')$ доња граница функције $\varphi(t', x)$ за $x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu$.

Како је

$$G_\nu(t'') = \begin{cases} 0 \text{ ако је } f(x) < t'' & \text{за свако } x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu, \\ 1 \text{ ако је } f(x) \geqslant t'' & \text{бар за једно } x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu, \end{cases}$$

а

$$g_\nu(t') = \begin{cases} 0 \text{ ако је } f(x) < t' & \text{бар за једно } x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu, \\ 1 \text{ ако је } f(x) \geqslant t' & \text{за свако } x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu, \end{cases}$$

то одавде видимо да се при прелазу са збира $\overline{S}\{P; t''\}$ на збир $\underline{S}\{P; t'\}$ они чланови збира $\overline{S}\{P; t''\}$ који су једнаки нули могу само повећати (тј. појавити у збиру $\underline{S}\{P; t'\}$), док се они чланови збира $\overline{S}\{P; t''\}$ у којима је $G_\nu(t'') = 1$ (тј. они за које постоји најмање једно x размака $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ такво да је $f(x) \geqslant t''$) могу смањити, тј. ишчезнути у збиру

$\underline{S}\{P;t'\}$, али само тако ако у томе размаку постоји најмање једно x такво да је $f(x)<t'$. Према томе, ако збиру $\underline{S}\{P;t'\}$ додамо збир свих размака $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ у којима је осцилација w_ν функције $f(x)$ већа од $t''-t'$, тада овај збир не може бити мањи од $\overline{S}\{P;t''\}$, тј.

$$\overline{S}\{P;t''\}\leqslant\underline{S}\{P;t'\}+\sum_{w_\nu\leqslant t''-t'}(x_\nu-x_{\nu-1}).$$

Како, међутим, према услову (4') тачке (iii) за R-интеграбилност функције $f(x)$ збир размака у којима је осцилација функције $f(x)$ већа од произвољно малог позитивног броја тежи увек нули кад $\delta\{P\}\to 0$, и како $\overline{S}\{P;t''\}$ тежи горњем, а $\underline{S}\{P;t'\}$ доњем Darboux-ову интегралу, тј. ка $\overline{\Phi}(t'')$ односно $\underline{\Phi}(t')$, то из ове неједначине, кад пустимо да $\delta\{P\}\to 0$, добивамо да је

$$\overline{\Phi}(t'')\leqslant\underline{\Phi}(t') \quad \text{за свако} \quad t'<t''.$$

Како је

$$\underline{\Phi}(t)\leqslant\overline{\Phi}(t) \quad \text{за свако} \quad t,$$

то је, према томе,

$$\underline{\Phi}(t'')\leqslant\overline{\Phi}(t'')\leqslant\underline{\Phi}(t')\leqslant\overline{\Phi}(t').$$

Како $\overline{\Phi}(t)$ и $\underline{\Phi}(t)$ не расту кад t расте, јер $\varphi(t,x)$ не расте кад t расте, то кад уочимо једно t између t' и t'' и пустимо да $t'\to t+0$, а $t''\to t-0$, горње неједначине се своде на

$$\underline{\Phi}(t+0)\leqslant\overline{\Phi}(t+0)\leqslant\underline{\Phi}(t-0)\leqslant\overline{\Phi}(t-0).$$

Према томе, ако су функције $\underline{\Phi}(t)$ и $\overline{\Phi}(t)$ непрекидне у тачки t, тада је

$$\underline{\Phi}(t-0)=\underline{\Phi}(t+0)=\underline{\Phi}(t) \quad \text{и} \quad \overline{\Phi}(t-0)=\overline{\Phi}(t+0)=\overline{\Phi}(t),$$

тако да је

$$\underline{\Phi}(t)=\overline{\Phi}(t),$$

за сваку ону вредност од t, за коју су ове функције непрекидне. Како монотона функција може имати највише пребројиво много тачака дисконтинуитета (в. тачку А. 2. 1. (ii), став 1), то се, дакле, доњи и горњи Darboux-ови интеграли функције $\varphi(t,x)$ могу разликовати највише за пребројиво много вредности од t, тј. интеграл

$$\Phi(t) = \int_a^b \varphi(t, x)\, dx$$

постоји за свако t размака (g, G), изузев највише за пребројиво много вредности овог размака, чиме је став доказан.

21. (i) Многи ставови математичке анализе казују да између посматраних израза постоје извесне неједначине, и то било једноструке, било двоструке, укључујући тада посматране изразе између две границе. У овом последњем случају често се ове двоструке неједначине могу изразити једном једнакошћу, ослањајући се при томе на непрекидност, тј. на основну особину непрекидних функција (Bolzano {2}) која казује, да непрекидна функција узима најмање једанпут сваку вредност која се налази између њеног минимума и максимума. Ови ставови се тада зову ставови о средњим вредностима.

Разлог што се ови ставови чешће формулишу у облику ставова о средњим вредностима лежи у томе што су они овим једноставније изражени (јер они имплицирају појам непрекидности), али и у томе што се у време њихове прве формулације, пре Cauchy-a и Abel-a, нерадо, или никако, није оперисало са неједначинама.

Било да су ови ставови формулисани у облику неједначина, било у облику ставова о средњим вредностима, они су од нарочите важности, јер не само основни ставови, већ и докази, тј. извођење готово свих ставова математичке анализе, почивају на њима.

Напоменимо да при прелазу са неједначина на ставове о средњим вредностима у суштини није битна непрекидност функције $f(x)$, већ само особина да она у ма коме подразмаку (a', b') размака (a, b) узима све вредности између $f(a')$ и $f(b')$. Поред класе непрекидних функција постоје и друге класе функција које имају ову особину, међу осталим, као што је истакао Darboux {1}, изводи непрекидних функција, било да су ови непрекидни или не.

Ово се изражава већ код првог става о средњим вредностима који гласи:

Ако је функција $f(x)$ *нейрекидна у зашвореном размаку* (a, b) *и има одређен извод у свакој шачки ошворена размака*

$(a+0, b-0)$, *тада постоји најмање једна вредност* ξ, *између* a *и* b, *таква да је*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi).$$

Овај став (поред тога што не претпоставља егзистенцију извода у крајњим тачкама a и b) важи и кад извод није непрекидан, из разлога што изводи имају горе поменуту особину.

(ii) Први, заправо проширени, став о средњим вредностима за Riemann-ов интеграл гласи:

Нека су функције $f(x)$ *и* $g(x)$ *R-интеграбилне у размаку* (a, b) *и нека је*

$$g(x) \geqslant 0 \quad за \quad a \leqslant x \leqslant b;$$

тада је

$$\operatorname*{Min}_{a \leqslant x \leqslant b}\{f(x)\}\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b}\{f(x)\}\int_a^b g(x)\,dx.$$

Према томе, ако је функција $f(x)$ непрекидна у размаку (a, b), тада постоји најмање једно t тога размака такво да је

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(t)\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{за} \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{5}$$

У овом обрасцу број t се може, заиста, за подесно изабране функције $f(x)$ и $g(x)$ налазити ма где у размаку (a, b). Штавише, и кад уочимо одређену функцију $f(x)$, можемо увек позитивну функцију $g(x)$ тако изабрати да број t буде у ма ком подразмаку (a', b') размака (a, b); тако је, на пример, довољно да буде

$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant a' \quad \text{и} \quad b' \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{за} \quad a' < x < b'. \end{cases}$$

Међутим, ако само утврдимо горњу и доњу границу G и $g > 0$ функције $g(x)$ и уочимо ма коју функцију $g(x)$ за коју је

$$0 < g \leqslant g(x) \leqslant G, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

тада се број t не може налазити изван једног подразмака (α, β) размака (a, b), који је увек мањи, тј. такав да је $a < \alpha$ и $b > \beta$. Овај подразмак зависи само од количника $\lambda = G/g$ и функције $f(x)$. Тако, на пример, кад функција $f(x)$ расте (у ком случају постоји само једна вредност t за коју важи образац (5)), тада се t мора налазити у размаку (α, β) где је

$$\alpha = x(1/\lambda) \quad \text{и} \quad \beta = x(\lambda),$$

а где је $x = x(\lambda)$, једини корен једначине (в. Карамата {3})

$$\int_a^x f(t)\,dt + \lambda \int_x^b f(t)\,dt - \{(x-a) + \lambda(x-b)\}\, f(x) = 0.$$

(*iii*) Други став о средњим вредностима, који је дао још Bonnet {1} (види и Du Bois-Reymond {3}), гласи:

Ако је функција $f(x)$ *R-интеграбилна у размаку* (a, b), *и ако је функција* $g(x)$ *монотона и позитивна у томе размаку, тада је*

1° *кад функција* $g(x)$ *не расте*

$$g(a+0) \min_{a \leqslant x \leqslant b} \left\{ \int_a^x f(t)\,dt \right\} \leqslant \int_a^b f(x) g(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant g(a+0) \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left\{ \int_a^x f(t)\,dt \right\},$$

2° *кад функција* $g(x)$ *не опада*

$$g(b-0) \min_{a \leqslant x \leqslant b} \left\{ \int_a^b f(t)\,dt \right\} \leqslant \int_a^b f(x) g(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant g(b-0) \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left\{ \int_x^b f(t)\,dt \right\}.$$

Како је неодређени интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$ R-интеграбилне функције $f(t)$, непрекидна функција своје горње границе x у размаку (a, b), то ове неједначине можемо написати још у облику става о средњим вредностима:

1° кад функција $g(x)$ не расте

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = g\ a+0) \int_a^t f(x)\,dx \quad \text{са} \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

2° кад функција $g(x)$ не опада

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b-0)\int_t^b f(x)\,dx \quad \text{са} \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Само под претпоставком монотоније функције $g(x)$, било да она мења, било да она не мења свој предзнак у размаку (a, b), други став о средњим вредностима можемо изразити и овако

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^t f(x)\,dx + g(b-0)\int_t^b f(x)\,dx \quad \text{са} \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

22. (i) У природи саме дефиниције Riemann-ова интеграла лежи:

1° да подинтегрална функција остаје ограничена,

2° да размак интеграције буде коначан.

Појам интеграла можемо, међутим, проширити и кад један од ових услова није задовољен и то у случају услова 1° само кад функција има коначан број тачака у чијој близини она не остаје ограничена (види [16, (ii)]), или евентуално, ако ове тачке можемо укључити у коначан број размака произвољно мале дужине. Тај проширени појам интеграла, који се битно разликује од појма обичног интеграла, зваћемо *несвојствени интеграл*.

1° Нека је функција $f(x)$ дефинисана у размаку (a, b). Претпоставимо да она не остаје ограничена само у близини десне крајње тачке b тога размака, и да је она R-интеграбилна у размаку $(a, b-0)$, тј. да постоји интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{за свако} \quad x < b \quad \text{и} \quad x \geqslant a. \qquad (6)$$

Ако овај интеграл (тј. $F(x)$) тежи одређеној граничној вредности, рецимо A кад $x \to b-0$, тј. ако

$$\int_a^x f(t)\,dt \to A, \quad x \to b-0, \quad (A = F(b-0)),$$

кажемо да несвојствени интеграл функције $f(x)$ постоји, или да је несвојствени интеграл конвергентан кад $x \to b-0$, и да бисмо га разликовали од обичног интеграла обележавамо га овако

$$\int_a^{b-0} f(t)\,dt.$$

Вредност овог несвојственог интеграла је по дефиницији A, тј.

$$\int_a^{b-0} f(t)\,dt = A.$$

Истоветно се дефинише несвојствени интеграл кад функција не остаје ограничена у близини леве крајње тачке a размака (a, b), и обележава се са

$$\int_{a+0}^{b} f(t)\,dt.$$

Ако пак функција не остаје ограничена у близини једне или више тачака c_ν, $\nu = 1, 2, \ldots n$, размака (a, b), тада се горња дефиниција примењује посебно на сваки од подразмака $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_{n-1}, c_n)$ и (c_n, b).

2° Нека је функција $f(x)$ дефинисана у размаку (a, ∞), и нека је она R-интеграбилна у томе размаку, тј.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{постоји за свако} \quad x \geqslant a. \tag{7}$$

Ако овај интеграл (тј. $F(x)$) тежи одређеној граничној вредности A кад $x \to \infty$, тј. ако

$$\int_a^x f(t)\,dt \to A \quad \text{кад} \quad x \to \infty,$$

кажемо да несвојствени интеграл

$$\int_a^\infty f(t)\,dt$$

постоји, или да је он конвергентан, и да је, по дефиницији, он једнак граничној вредности A, тј.

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = A.$$

Истоветно се дефинише и несвојствени интеграл

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt.$$

Ако интеграл (6) или (7), тј. $F(x)$ не конвергира кад $x \to b-0$ или $\to \infty$, тада $F(x)$ или стварно дивергира, тј. $\to \pm\infty$, или осцилира између коначних или бесконачних граница. У томе случају кажемо и за сам несвојствени интеграл да он или стварно дивергира, или осцилира између коначних и бесконачних граница.

Већ сам обичан интеграл (6) или (7) дефинисан је као гранична вредност, и то као гранична вредност извесног збира [20], дакле, једним прелазом ка граници. Несвојствени интеграл је, према томе, гранична вредност граничне вредности, тј. он је дефинисан двоструким прелазом ка граници. Због тога је појам несвојственог интеграла сложенији од појма обичног интеграла, иако је из овог изведен.

(*ii*) На основу општег Cauchy-ева става о конвергенцији [9] можемо аналогно формулисати и општи услов за конвергенцију несвојственог интеграла:

Несвојствени интеграл (6) *или* (7) *биће конвергентан кад*

1° $x \to b+0$, 2° $x \to \infty$,

ако, ма како мали био $\varepsilon > 0$, *можемо одредити такво* $x(\varepsilon)$, *да буде*

$$\left| \int_{x}^{y} f(t)\,dt \right| < \varepsilon,$$

и то

1° *за свако* x и y *између* $x(\varepsilon)$ *и* b, тј.

$$x(\varepsilon) \leqslant x < y < b,$$

2° *за свако* x *и* y *који су већи од* $x(\varepsilon)$, тј.

$$y > x \geqslant x(\varepsilon).$$

Овај услов можемо формулисати и нешто краће, слично оном облику Cauchy-ева става који је наведен у [9, (ii)], и то:

Да би несвојствени интеграл (6) или (7) био конвергентан, потребно је и довољно да

$$\int_x^y f(t)\,dt \to 0,$$

кад x и $y > x$, независно један од другог теже: 1° вредности b, 2° бесконачности.

Већ из ових услова се види да нема битне разлике између несвојственог интеграла дефинисаног у коначном отвореном размаку $(a, b-0)$, или у бесконачном размаку (a, ∞); док је у првом случају b коначан број, у другом случају можемо чисто формално ставити да је $b = \infty$ (види [14, (ii)]).

Уосталом, једноставном сменом независне промењиве можемо увек бесконачни размак несвојственог интеграла свести на коначан, и обратно. Тако, на пример, ако ставимо

$$g(x) = x^{-2} f(1/x),$$

тада се несвојствени интеграл

$$\int_1^\infty f(x)\,dx,$$

сменом $x = 1/t$, своди на несвојствени интеграл

$$\int_{+0}^1 g(t)\,dt,$$

и конвергенција једног од ових интеграла повлачи за собом конвергенцију другог.

(iii) Код обичног интеграла је функција $|f(x)|$ увек R-интеграбилна ако је то случај са функцијом $f(x)$, јер функција $|f(x)|$ може имати највише толико тачака дисконтинуитета колико их има и сама функција $f(x)$. (Напоменимо да обратно не мора бити случај, јер ако је, на пример $f(x) = \pm 1$, према томе да ли је x рационално или није, функција $|f(x)|$ је R-интеграбилна, док то није случај са самом функцијом $f(x)$). Ово, међутим, није случај код несвојственог интеграла. Ако несвојствени интеграл, рецимо,

$$\int_a^{b-0} |f(x)|\,dx$$

конвергира, тада је и несвојствени интеграл

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

конвергентан, јер је за свако x и $y > x$

$$\left|\int_x^y f(x)\,dx\right| \leqslant \int_x^y |f(x)|\,dx,$$

тако да

$$\int_x^y f(x)\,dx \to 0$$

кад x и y, независно један од другог, теже $b-0$, ако је то случај са интегралом

$$\int_x^y |f(x)|\,dx.$$

Кад несвојствени интеграл функције $|f(x)|$ конвергира кажемо да је несвојствени интеграл функције $f(x)$ *айсолуйно конвергенйан.*

(iv) У случају апсолутне конвергенције несвојственог интеграла можемо овај појам још нешто проширити, не претпостављајући, као што је то био случај у (i), да има само коначан број тачака у чијој близини функција $f(x)$ није ограничена. Претпоставимо зато да је множина тачака дисконтинуитета функције $f(x)$ нулте мере (в. [20, (iii)] у размаку (a, b), било да је она у томе размаку ограничена или не, и ставимо

$$f(\lambda, x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{ако је } |f(x)| \leqslant \lambda, \\ \lambda & \text{ако је } |f(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Јасно је да је функција $f(\lambda, x)$ R-интеграбилна за свако λ, јер је она ограничена и не може имати више тачака дисконтинуитета од функције $f(x)$. Према томе, интеграл

$$J_\lambda = \int_a^b f(\lambda, x)\,dx \quad \text{постоји за свако } \lambda > 0.$$

Ако овај интеграл тежи одређеној граничној вредности кад $\lambda \to \infty$, кажемо да је функција $f(x)$ *айсолуйно инйеграбилна* у размаку (a, b) у смислу de la Vallé-Poussin-a {3; 4. T. I. стр. 260, T. II. стр. 108-9}, и по дефиницији стављамо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda=\infty} J_\lambda .$$

Кад функција $f(x)$ има само коначан број тачака у близини којих она не остаје ограничена, тада се овако дефинисана апсолутна интеграбилност поклапа са апсолутном конвергенцијом несвојственог интеграла.

Заиста, ако претпоставимо да функција $f(x)$ није ограничена у близини само једне тачке, рецимо тачке b размака (a, b), и ако претпоставимо да је несвојствени интеграл

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx$$

апсолутно конвергентан, тада, ма како мали био $\varepsilon > 0$, увек можемо наћи λ тако велико да буде

$$\int_a^{b-\varepsilon} |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(\lambda, x)\,dx \leqslant \int_a^{b-0} |f(x)|\,dx .$$

Према томе мора постојати гранична вредност $\lim\limits_{\lambda=\infty} J_\lambda$. Исто тако можемо показати да из егзистенције $\lim\limits_{\lambda=\infty} J_\lambda$ следи апсолутна конвергенција несвојственог интеграла $\int_a^{b-0}$.

23. (*i*) Нека је дат низ функција

$$f_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

које су све дефинисане у размаку (a, b). Ако за одређено ξ тога размака низ бројева $f_n(\xi)$ конвергира кад $n \to \infty$, кажемо да је низ функција $f_n(x)$ конвергентан у тачки ξ размака (a, b). — Ако је низ конвергентан за сваку тачку x размака (a, b) кажемо да низ функција конвергира у томе размаку. — Ако је у овом случају за вредности $\xi, \eta, \ldots$ итд., размака (a, b), рецимо

$$\lim_{n=\infty} f_n(\xi) = A, \quad \lim_{n=\infty} f_n(\eta) = B, \ldots \text{ итд.}$$

и ако са $f(x)$ означимо функцију која је једнака A за $x=\xi$, једнака B за $x=\eta,\ldots$ итд., тада ову функцију називамо *граничном функцијом низа функција* $f_n(x)$, и стављамо

$$\lim_{n=\infty} f_n(x)=f(x) \quad \text{за} \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

или

$$f_n(x)\to f(x), \quad n\to\infty, \quad \text{за} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Ако за извесне вредности ξ', или $\eta',\ldots$, итд., размака (a, b) низ бројева $f_n(\xi')$, или $f_n(\eta'),\ldots$ итд., не конвергира, тада гранична функција $f_n(x)$ није дефинисана у овим тачкама размака (a, b). Тако, на пример, низ у размаку $(0, \infty)$ дефинисаних функција

$$f_n(x)=\frac{1}{2-(x^2-1)^n}, \quad n=1, 2,\ldots,$$

је конвергентан у томе размаку осим у тачки $x=0$, и његова гранична функција

$$f(x)=\begin{cases} \textit{није дефинисана} & \text{за} \quad x=0,\\ 1/2 & \text{за} \quad 0<x<\sqrt{2},\\ 1 & \text{за} \quad x=\sqrt{2},\\ 0 & \text{за} \quad x>\sqrt{2}.\end{cases}$$

(ii) Ако је свака функција низа $f_n(x)$ ограничена у размаку (a, b), тј. ако је

$$\operatorname*{Max}_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f_n(x)|\}=G_n \quad \text{коначно за свако} \quad n=1, 2,\ldots,$$

и ако је низ G_n ограничен, тј. ако постоји коначан број M такав да је

$$G_n\leqslant M \quad \text{за свако} \quad n=1, 2,\ldots,$$

тада кажемо да је низ функција $f_n(x)$ *униформно ограничен* у размаку (a, b). Према томе, ако је низ функција $f_n(x)$ униформно ограничен у размаку (a, b) мора постојати једно M, независно и од x и од n, такво да је

$$|f_n(x)|\leqslant M \quad \text{за свако} \quad a\leqslant x\leqslant b \quad \text{и свако} \quad n=1, 2,\ldots.$$

Тако је, на пример, низ у размаку $(0,1)$ дефинисаних функција

$$f_n(x)=n(1-x)\,x^{n-1}, \quad n=1, 2,\ldots.$$

(који у томе размаку конвергира граничној функцији $f(x)=0$ за свако $0 \leqslant x \leqslant 1$) униформно ограничен у томе размаку, јер је

$$\operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant 1} \{f_n(x)\} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \leqslant 1/2, \quad n=2, 3, \ldots,$$

Међутим, низ ограничених функција

$$f_n(x) = n^2 (1-x) x^{n-1}, \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

који такође конвергира нули за свако x размака $(0,1)$, није униформно ограничен у томе размаку, јер је

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} \{f_n(x)\} = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1},$$

а овај низ тежи бесконачности са n.

(iii) Ако је низ функција $f_n(x)$ конвергентан у размаку (a, b), и ако он у томе размаку тежи граничној функцији $f(x)$ тако да је, ма како мали био $\varepsilon > 0$,

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{за свако} \quad x \quad \text{размака} \quad (a, b)$$

и свако $n > N(\varepsilon)$, при чему је $N(\varepsilon)$ независно од x, тада кажемо да низ функција $f_n(x)$ *униформно* конвергира граничној функцији $f(x)$.

Другим речима, ако ставимо

$$\operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} \{|f_n(x) - f(x)|\} = \mu_n, \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

да би низ функција $f_n(x)$ био униформно конвергентан у размаку (a, b), потребно је и довољно да

$$\mu_n \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Тако је, на пример, низ функција $n(1-x)x^{n-1}$, $n=1, 2, \ldots$, конвергентан и

$$f_n(x) = n(1-x)x^{n-1} \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

међутим, овај низ није униформно конвергентан, јер је

$$\mu_n = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} \{|f_n(x) - f(x)|\} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1},$$

тако да

$$\mu_n \to 1/e > 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Из ових дефиниција видимо да униформно конвергентан низ функција мора бити и униформно ограничен у посматраном размаку, међутим, обрнуто не мора бити случај, као што то видимо из претходног примера, јер је овај низ функција униформно ограничен у размаку (0,1), али није и униформно конвергентан у томе размаку.

(iv) Ако је низ функција $f_n(x)$ дат у облику збира, тј. ако место низа функција посматрамо ред, тада кажемо да је ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu(x)$$

униформно конвергентан у размаку (a, b), ако је низ функција

$$f_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(x)$$

униформно конвергентан у томе размаку.

Нарочито подесан критериум за униформну конвергенцију редова који се обично приписује Weierstrass-у гласи:

Нека је $u_n(x)$ *низ у размаку* (a, b) *ограничених функција, и нека је*

$$r_n = \max_{a\leqslant x\leqslant b} \{|u_n(x)|\}, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Ако је ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu \quad \textit{конвергентан},$$

тада је ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x) \quad \textit{униформно конвергентан у размаку} \quad (a, b).$$

Већ из овога става следи да је сваки Taylor-ов ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

чији је размак конвергенције, рецимо $(-a, +a)$ униформно конвергентан у отвореном размаку, $(-a+0, a-0)$, Ово из разлога што је, у овом случају,

$$\max_{|x|\leqslant a-\varepsilon} \{|u_n(x)|\} = \max_{|x|\leqslant a-\varepsilon} \{|a_n|\,|x|^n\} = |a_n|\,(a-\varepsilon)^n,$$

и што је Taylor-ов ред апсолутно конвергентан за $|x| \leqslant a-\varepsilon$, тако да је ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|\, |a-\varepsilon|^\nu \quad \text{конвергентан за свако} \quad \varepsilon > 0.$$

Из истих разлога видимо да ће Taylor-ов ред бити униформно конвергентан и у полузатвореним размацима $(-a, a-0)$, или $(-a+0, a)$, ако је он апсолутно конвергентан за $x=-a$, или $x=a$.

Међутим, дубље лежи Abel-ов став (в. тачку С. 6. 1.(ii)), који казује да већ из обичне конвергенције Taylor-ова реда, на пример у тачки $x=a$, следи униформна конвергенција тога реда у размаку $(0, a)$.

Како је

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant a} \{|a_n x^n|\} = |a_n| a^n,$$

и како из претпоставке следи да ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu a^\nu$$

мора бити апсолутно конвергентан, то видимо да се Abel-ов став не може непосредно извести из Weierstrass-ова критериума. Шта више, и кад Taylor-ов ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

претходно трансформишемо, тј. кад га напишемо у облику

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu (1-x) x^\nu,$$

где је

$$s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu,$$

и где смо, прегледности ради, претпоставили да је $a=1$, тј. да је ред $\Sigma a_\nu x^\nu$ конвергентан у размаку $(0, 1)$, тада ни на овако трансформисани ред не можемо непосредно применити Weierstrass-ов критериум. У овом случају је, наиме,

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \{|u_\nu(x)|\} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \{|s_\nu|(1-x)x^\nu\} = \frac{|s_\nu|}{\nu+1}\left(1 - \frac{1}{\nu+1}\right)^\nu,$$

а очевидно је да само из претпоставке конвергенције реда Σa_ν, тј. из чињенице да $s_n \to s$ кад $n \to \infty$, не следи конвергенција реда

$$\sum \frac{|s_\nu|}{\nu+1}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)^\nu .$$

Овај ред не мора конвергирати ни кад $s_n \to 0$, тј. кад је $s=0$. Ово усталом можемо, без ограничења, увек претпоставити, ако само, место низа s_n, посматрамо низ $s_n - s$ који тежи нули.

Јасно је, да се Weierstrass-ов став не може применити за доказ Abel-ова става ни кад горњу трансформацију више пута узастопно применимо. Уосталом, Abel-ов став се доказује ефективним двоструким прелазом ка граници. Његов доказ, проширен на Dirichlet-ове редове, изведен је у тачки С. б. 1.

Слично као и код Abel-ова става, тако се Weierstrass-овим критериумом не може утврдити униформна конвергенција ни Fourier-ових, односно тригонометриских редова, и то баш у најважнијим случајевима, као на пример, код редова облика

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin(\nu x),$$

где низ коефицијената a_ν монотоно опада и тежи нули.

Међутим, Weierstrass-ов критериум долази до пуног изражаја у теорији аналитичких функција где је он готово увек употребљив, уколико није у питању униформна конвергенција на рубу области конвергенције, као што је то баш случај са Abel-овим ставом.

(v) Појам униформне конвергенције, тј. равномерног прелаза граничној вредности, увели су, тек педесетих година прошлог столећа, Stokes {1} и Seidel {1}. Потстакнути Fourier-овим редовима, који могу претстављати прекидне функције иако су им сви чланови непрекидни, они су дошли до појма униформне конвергенције, како би овим могли формулисати услов по коме се из непрекидности чланова реда може закључити непрекидност њихова збира. Овај услов, који је, уосталом, само довољан, а није и потребан, гласи:

Нека је $f_n(x)$ низ у размаку (a, b) непрекидних функција који у томе размаку конвергира граничној функцији $f(x)$. Да би функција $f(x)$ била непрекидна довољно је да низ $f_n(x)$ буде униформно конвергентан у томе размаку.

Јасно је да услов униформне конвергенције није потребан да би гранична функција била непрекидна. Ово увиђамо из примера тачке (iii), јер је гранична функција $f(x)=0$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$ низа $f_n(x)=n(1-x)x^n$, непрекидна функција у размаку $(0, 1)$, иако овај низ, као што је то показано, не конвергира униформно у томе размаку.

До које је мере појам униформне конвергенције, нарочито за оно време био тешко приступачан, видимо и отуда што је још и сам Cauchy {3, стр. 131, глава 6, § 1} мислио да гранична функција непрекидних функција мора бити непрекидна функција, иако је веома лако образовати низове непрекидних функција чије су граничне функције прекидне, као што је то случај са низом функција

$$f_n(x)=x^n \quad \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

чија је гранична функција

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{за} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{за} \quad x=1, \end{cases}$$

или низом

$$g_n(x)=\frac{1}{1+nx} \quad \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

чија је гранична функција

$$g(x)=\begin{cases} 1, & \text{за} \quad x=0, \\ 0, & \text{за} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Разлог што ово није примећено не лежи само у томе, што појам граничне функције није био довољно прецизно формулисан, већ по свој прилици у томе, што се у оно време оперисало скоро искључиво са редовима. Међутим, и најједноставнији низови кад се изразе у облику бесконачног реда дају сложеније аналитичке изразе, из којих се поменута особина не може овако непосредно приметити, нарочито ако се има у виду да су бесконачни редови сматрани као целина, тј. као један збир $\sum\limits_{0}^{\infty}$. Ово јасно увиђамо из горе наведена два примера, од којих се први низ, кад га изразимо у облику реда, своди на

$$f(x)=1-\sum_{\nu=0}^{\infty}(1-x)x^{\nu}, \quad \text{за} \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

а други низ на

$$g(x)=1-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x}{(1+\nu x)(1+x+\nu x)}, \quad \text{за} \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Уосталом, још је Abel {1, Werke, стр. 224} 1826 приметио нетачност Cauchy-ева тврђења, док је Cauchy {4} објавио исправку тек 1853 године. Фундаментални значај појма равномерног прелаза ка граници истакао је тек Weierstrass у својим предавањима.

(vi) Суштина униформне конвергенције лежи у томе што она садржи двоструки прелаз ка граници, или прецизније, што она претставља један, и то најједноставнији облик услова под којим се код двоструког прелаза ка граници сме изменити ред граничних процеса, тј. услов да би $\lim\limits_{(n)} \lim\limits_{(x)}$ био једнак $\lim\limits_{(x)} \lim\limits_{(n)}$.

Ово се нарочито јасно увиђа кад се поред појма униформне конвергенције у размаку (a, b) уочи појам пунктуалне униформне конвергенције, тј. униформне конвергенције „у близини тачке c", или „у тачки c". Појам пунктуалне униформне конвергенције дефинисао је Du Bois-Reymond {4 и 5} овако:

Ред, или низ функција $f_n(x)$ је униформно конвергентан у тачки $x=c$, ако за свако произвољно мало $\delta>0$ можемо одредити такву околину $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$, $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$, тачке c и такав индекс $N=N_c(\delta)$, да буде

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\delta \quad \text{за свако} \quad c-\varepsilon\leqslant x\leqslant c+\varepsilon, \tag{8}$$

и свако $n\geqslant N$.

Јасно је да у овој дефиницији, тј. у (8), $\varepsilon(\delta)$ може да ишчезне са δ. Кад то није случај, тј. кад $\varepsilon(\delta)$ остаје веће од неког $\varepsilon'>0$, тада је низ $f_n(x)$ већ униформно конвергентан у целом размаку $(c-\varepsilon',\ c+\varepsilon')$.

Појмом пунктуалне униформне конвергенције обухваћен је појам униформне конвергенције у размаку, јер *ако је низ функција $f_n(x)$ униформно конвергентан у свакој тачки* *размака* (a, b), *тада је он униформно конвергентан и у целом размаку* (a, b).

Заиста, ако за дато $\delta > 0$ уочимо скуп J свих размака $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, одређених условом (8), овај скуп размака задовољава услове Borel-ова става [19, (ii)], тако да цео размак (a, b) можемо прекрити коначним бројем размака $(c_\nu - \varepsilon_\nu, c_\nu + \varepsilon_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, скупа J. Ако означимо са $N(\delta)$ највећи од индекса $N_{c_\nu}(\delta)$, тада је, према (8),

$$|f(x) - f_n(x)| < \delta \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

и свако $n \geqslant N(\delta)$, тј. низ $f_n(x)$ је униформно конвергентан у размаку (a, b).

(vii) Код пунктуалне униформне конвергенције јасно долази до изражаја чињеница да је у униформној конвергенцији, уствари, садржан двоструки прелаз ка граници. Ово постаје очигледно кад за пунктуалну униформну конвергенцију формулишемо аналогон става тачке (v) и то:

Ако је низ непрекидних функција $f_n(x)$ *униформно конвергентан у тачки* $x = c$, *тада је и гранична функција* $f(x)$ *непрекидна у тачки* c, *а што можемо исказати и овако:*

$$\lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} f_n(c_m) = \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} f_n(c_m), \tag{9}$$

за сваки низ c_m *који тежи граничној вредности* c *кад* $m \to \infty$, *или, што је исто,*

$$\lim_{n=\infty} \lim_{x=c} f_n(x) = \lim_{x=c} \lim_{n=\infty} f_n(x) = f(c), \tag{10}$$

ма како x *тежио ка* c.

Тако, на пример, Abel-ов став поменут у тачки (iv) казује, уствари, да је Taylor-ов ред униформно конвергентан у близини крајње тачке размака конвергенције, рецимо $x = 1$, ако је он конвергентан у тој тачки. Како је, међутим, према Weierstrass-ову критериуму (iv), Taylor-ов ред униформно конвергентан у размаку $(0, 1-0)$, то је, дакле, на основу става тачке (vi), он униформно конвергентан у целом размаку $(0, 1)$.

Међутим, из првог или другог примера тачке (ii) видимо да ни пунктуална униформна конвергенција није потребна, да би релација (9) или (10) важила. Шта више, као што то видимо из другог од ових примера, није чак ни потребно да низ функција $f_n(x)$ буде ограничен у близини тачке $x = 1$.

(viii) Из чињенице да је низ функција $f_n(x)$ униформно конвергентан у тачки $x=c$, следи, не само релација (9), већ и да је за сваки низ c_n, низ $f_n(c_n)$ конвергентан кад $c_n \to c$, тј. да

$$f_n(c_n) \to f(c) \quad \text{кад} \quad n \to \infty, \tag{11}$$

ма какав био низ бројева c_n који $\to c$.

Заиста, ако је c_n произвољан низ који $\to c$, тада можемо наћи такав број N' да буде

$$c-\varepsilon \leqslant c_n \leqslant c+\varepsilon \quad \text{за свако} \quad n \geqslant N',$$

где је ε оно $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ које је одређено условом (8). Према томе, ако у услову (8) ставимо $x=c_n$, и са N'' означимо већи од бројева N' и $N=N_c(\delta)$, биће, према овом услову,

$$|f(c_n)-f_n(c_n)| < \delta \quad \text{за свако} \quad n \geqslant N''.$$

Како из (8) следи да је функција $f(x)$ непрекидна у тачки $x=c$, то добивамо отуда да је

$$\begin{aligned} |f(c)-f_n(c_n)| &= |f(c)-f(c_n)+f(c_n)-f_n(c_n)| \leqslant \\ &\leqslant |f(c)-f(c_n)| + |f(c_n)-f_n(c_n)| \leqslant \\ &\leqslant |f(c)-f(c_n)| + \delta < \\ &< \varepsilon' + \delta \quad \text{за} \quad n \geqslant N''. \end{aligned}$$

Због тога што ε' и δ можемо изабрати произвољно мало, видимо, дакле, да из (8) следи (11) ма какав био низ $c_n \to c$.

Тек условом облика (11) можемо изразити услов који би био аналоган услову (9), а који је потребан и довољан за пунктуалну униформну конвергенцију. Зато морамо претпоставити да је услов (11) испуњен за с в а к и низ бројева c_n који $\to c$. То је уствари само једна транскрипција услова (8), и она гласи:

Да би низ нейрекидних функција $f_n(x)$ био униформно конверīенйан у йачки $x=c$, йошребно је и довољно да услов (11) буде исйуњен за с в а к и низ c_n који $\to c$ кад $n \to \infty$.

Да бисмо још показали да је услов (11) заиста и довољан ако је он испуњен за сваки низ $c_n \to c$, претпоставимо, per absurdum, да низ $f_n(x)$ конвергира, али да он није униформно конвергентан у тачки $x=c$. Ово значи да, ма како мали био $\varepsilon > 0$, увек постоји такав број $A > 0$, да је

$$\limsup_{n=\infty} \max_{c-\varepsilon \leqslant x \leqslant c+\varepsilon} \{|f(x) - f_n(x)|\} \geqslant A,$$

јер кад такав број $A > 0$ не би постојао, услов (8) би био задовољен.

Нека је $0 < \varepsilon' < A$ и $\varepsilon_1 > 0$; означимо са $\xi_{n,1}$ ма који од бројева за који је

$$|f(\xi_{n,1}) - f_n(\xi_{n,1})| \geqslant \max_{c-\varepsilon_1 \leqslant x \leqslant c+\varepsilon_1} \{|f(x) - f_n(x)\} - \varepsilon',$$

ако низ $\xi_{n,1}$ не тежи ка c кад $n \to \infty$, и ако је

$$|\xi_{n,1} - c| \geqslant \varepsilon_2 \quad \text{почев од неког } n;$$

означимо са $\xi_{n,2}$ ма који од бројева за који је

$$|f(\xi_{n,2}) - f_n(\xi_{n,2})| \geqslant \max_{c-\varepsilon_2 \leqslant x \leqslant c+\varepsilon_2} \{|f(x - f_n(x)|\} - \varepsilon',$$

итд. Како $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots,$ можемо бирати тако да овај низ тежи нули, то ће низ $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \xi_{n,3}, \ldots$ тежити ка c за свако довољно велико n.

Према томе је

$$\limsup_{n=\infty} |f(\xi_{n,k}) - f_n(\xi_{n,k})| \geqslant A - \varepsilon',$$

за свако $k = 1, 2, 3, \ldots,$ што значи да постоји такав делимичан низ n_ν низа n, да је

$$|f(\xi_{n_\nu,\nu}) - f_{n_\nu}(\xi_{n_\nu,\nu})| \geqslant A - \varepsilon' > 0, \quad \text{за} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

а што се противи претпоставци да је услов (11) испуњен за сваки низ $c_n \to c$.

(ix) Да бисмо увидели смисао овако израженог услова за пунктуалну униформну конвергенцију, покажимо да низови монотоних функција чине једну општу класу низова, за коју је униформна конвергенција п о т р е б н а и довољна, да би гранична функција била непрекидна. Да је за ову класу низова униформна конвергенција заиста потребна видимо из овог става:

Нека је $\alpha_n(x)$ низ у размаку (a, b) монотоних и непрекидних функција. Ако је његова гранична функција $\alpha(x)$ непрекидна, низ функција $\alpha_n(x)$ је униформно конвергентан у томе размаку.

Уствари, став који се односи на пунктуалну униформну конвергенцију, а који, на основу става тачке (vi), обухвата горњи став, гласи:

Нека је $\alpha_n(x)$ низ у размаку (a, b) монотоних функција који у томе размаку конвергира граничној функцији $\alpha(x)$. Ако је функција $\alpha(x)$ непрекидна са десне (или са леве) стране у тачки $x=c$, тада је низ $\alpha_n(x)$ униформно конвергентан у тачки $x=c$ са десне (или са леве) стране.

Претпоставимо да функције $\alpha_n(x)$ не расту и да је гранична функција $\alpha(x)$ у тачки c непрекидна са десне стране. Ако је низ c_n произвољан низ такав да је

$$c < c_n \to c, \quad n \to \infty,$$

тада је за произвољно $\varepsilon > 0$

$$c < c_n < c+\varepsilon \quad \text{за свако} \quad n \geqslant N(\varepsilon),$$

тако да је, на основу монотоније функција $\alpha_n(x)$,

$$\alpha_n(c) \leqslant \alpha_n(c_n) \leqslant \alpha_n(c+\varepsilon) \quad \text{за свако} \quad n \geqslant N(\varepsilon).$$

Ако у овој неједначини пустимо да $n \to \infty$ видимо да је

$$\alpha(c) \leqslant \lim_{n=\infty} \inf \alpha_n(c_n) \leqslant \lim_{n=\infty} \sup \alpha_n(c_n) \leqslant \alpha(c+\varepsilon).$$

Међутим, из претпоставке да је функција $\alpha(x)$ непрекидна са десне стране у тачки c, следи да

$$\alpha(c+\varepsilon) \to \alpha(c+0) = \alpha(c) \quad \text{кад} \quad \varepsilon \to 0,$$

тако да, после овог другог прелаза ка граници, добивамо да је

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n(c_n) = \alpha(c), \tag{12}$$

и то за с в а к и низ c_n који тежи ка c са десне стране.

Према томе, из услова (11) следи да је низ $\alpha_n(x)$ униформно конвергентан у тачки c са десне стране.

(x) Као што видимо, доказ горњег става, као и доказ Abel-ова става наведеног у тачки (iv), изводе се, заправо, двоструким прелазом ка граници; ово је, уосталом, случај и код свих ставова који се односе на пунктуалну униформну конвергенцију. Тек применом става тачке (vi) ови ставови се преносе на цео размак (a, b). Уствари, код ставова за које је могуће непосредно показати да се гранични процес врши униформно у целом размаку, код тих ставова је овако изражена униформна конвергенцаја само један сразмерно једноставан облик услова по коме се код двоструког прелаза ка граници сме изменити ред граничних процеса.

Ставови који се не могу извести непосредним доказом униформне конвергенције, већ се при њиховом доказу мора прибећи двоструком прелазу ка граници (као што је то случај код горе наведених ставова) спадају у групу тежих ставова. Међутим, на много веће потешкоће наилазимо код оних ставова код којих треба показати да се ред код двоструког граничног прелаза може изменити, али где ови гранични прелази нису једнолики. Примера ради наведимо тзв. Gibbs-ов {1} феномен који казује да Fourier-ов ред функције $f(x)$ није униформно конвергентан ни у једној тачки прекида прве врсте функције $f(x)$, иако функција $f(x)$ може бити непрекидна са леве или десне стране у овим тачкама. Другим речима, ако ставимо

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x),$$

где су a_ν и b_ν Fourier-ови коефициенти функције $f(x)$, и ако је $x = c$ једна тачка дисконтинуитета прве врсте ове функције, тада

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) \longrightarrow f(c \pm 0) \quad \text{кад} \quad x \to c \pm 0;$$

међутим, низ $f_n(x)$ не конвергира униформно у тачки $x = c$, чим је $f(c-0) \neq f(c+0)$.

Најзад, међу најтеже ставове који се односе на исту проблематику спадају они који су у извесном смислу инверзни горњим ставовима. То су они ставови код којих је позната природа конвергенције низа функција $f_n(x)$ у бливини неке тачке $x = c$, на пример, униформна конвергенција у свакој тачки c' која се налази у близини тачке c, као и чињеница да је гранична функција $f(x)$ непрекидна у тачки c. Поставља се питање конвергенције низа функција у самој тачки $x = c$, тј. низа бројева $f_n(c)$, што заправо значи да се пита каква треба да је структура низа функција $f_n(x)$, или који су допунски услови које овај низ мора још задовољавати да би ово био случај. Ови ставови се, уствари, могу формулисати само за низове $f_n(x)$ специалне структуре, као што је то, на пример, случај код Tauber-ова става који се односи на Taylor-ове редове, или Landau-ова проширења овог става на Dirichlet-ове редове, који су изведени у тачки *C*. 6. 2, а који спадају међу најлакше ставове ове врсте.

(**xi**) Да бисмо код услова (11) или (12) показали до које мере, односно колико много је обухваћено претпоставком да ови треба да важе „за сваки низ $c_n \to c$", наведимо овде још један став ове врсте, из кога се јасно види да из услова (12) следи много више него што то тврди други став тачке (viii), и то под слабијим претпоставкама. Напоменимо да при томе можемо, без ограничења, претпоставити да су како c, тако и гранична вредност у (12) једнаке нули, и према томе овај став формулисати овако:

Нека је $f_n(x)$ *низ у размаку* (0,1) *дефинисаних функција које у томе размаку не опадају. Ако*

$$f_n(x_n) \to 0 \quad \textit{кад} \quad n \to \infty \tag{13}$$

за сваки низ x_n *који* $\to 0$, *тада је*

1° *почев од једне вредности* $x = x'$ *низ функција* $f_n(x)$ *ограничен, тј.*

$$\limsup_{n=\infty} f_n(x) = F(x) \quad \textit{постоји за свако} \quad 0 < x < x', \tag{14}$$

$$2° \qquad F(x) \to 0 \quad \textit{кад} \quad x \to 0. \tag{15}$$

Ако 2° није испуњено (тј. ако низ функција $f_n(x)$ не остаје ограничен у размаку $(0, \varepsilon)$, ма како мали био ε), или ако (15) није испуњено, тада мора постојати један број $A > 0$, и низ све мањих и мањих вредности ξ_n, такав да је

$$\limsup_{n=\infty} f_n(\xi_k) \geqslant A \quad \text{за свако} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

Јер, или је (за једно утврђено k)

$$f_n(\xi_k) = O(1),$$

а тада је због монотоније функција $f_n(x)$

$$f_n(x) = O(1) \quad \text{за свако} \quad 0 < x \leqslant \xi_k,$$

или је за то k испуњена неједначина (16).

Према томе, можемо постепено одредити низ вредности ξ_k, које теже нули са k, таквих да неједначина (16) буде задовољена, а ова неједначина, уствари, казује да постоји такав делимичан низ $f_{n_{k,\nu}}(\xi_k)$ низа $f_n(\xi_k)$, $n=1,2,3,\ldots$, да је за довољно мало $\varepsilon < A$,

$$f_{n_{k,\nu}}(\xi_k) \geqslant A-\varepsilon > 0 \quad \text{за свако} \quad k=1,2,\ldots..$$

и довољно велико ν, односно $n_{k,\nu}$. Отуда видимо да је за дијагонални низ $f_{n_{k,k}}(\xi_k)$, $k=1,2,3,\ldots$, увек

$$\lim_{n=\infty} \inf f_{n_{k,k}}(\xi_k) \geqslant A,$$

а што се противи претпоставци (14).

24. (*i*) Равномерни прелаз ка граници долази, међу осталим, до изражаја када се чланови реда или низа функција диференцирају или интегришу. Због тога што су ове операције већ дефинисане једним граничним процесом, то се, уствари, и овде ради о измени реда граничних прелаза, тако да је и овде битно да се ови гранични прелази одигравају мање или више равномерно.

Као прво, поставља се питање када се ред, односно низ чији су чланови функције од x сме интегрисати члан по члан. Прецизније, ако је дат у размаку (a, b) конвергентан низ R-интеграбилних функција $f_n(x)$, и ако је гранична функција $f(x)$ R-интеграбилна, када је

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n=\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{17}$$

Према томе се овим захтева:

1^0 да гранична функција $f(x)$ низа, у размаку (a, b) R-интеграбилних функција $f_n(x)$ буде такође R-интеграбилна, тј. да

$$J = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{постоји},$$

2^0 да низ интеграла

$$J_n = \int_a^b f_n(x)\,dx \quad \text{конвергира кад} \quad n \to \infty,$$

3^0 ако су 1^0 и 2^0 испуњени да буде

$$\lim J_n = J.$$

(ii) Што се тиче захтева 1°, још је Arzelà {1. стр. 321—6; 2; 3} дао потребан и довољан услов да он буде испуњен, тј. да би гранична функција низа R-интеграбилних функција била R-интеграбилна. Сама формулација овог услова је доста сложена, тако да је он само од теориског значаја и лакше је непосредно увидети, према томе и при формулацији ставова претпоставити, да је гранична функција R-интеграбилна. Поред тога, код питања које имамо у виду, тј. код питања када се ред операција lim и $\int$ може изменити, овај услов је и утолико од мањег значаја, што је он често већ садржан у условима који су потребни да би захтев 2° био испуњен. Поред најједноставнијег случаја када је по среди униформна конвергенција (в. тачку (iii)), ово последње важи нарочито када имамо у виду интеграле у смислу Lebesgue-а {1}.

Приметимо, најзад, да гранична функција низа R-интеграбилних функција може бити R-интеграбилна, а да низ интеграла J_n уопште не конвергира. Тако, на пример, гранична функција $f(x)$ низа

$$f_n(x)=n^3(1-x)x^{n-1}, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

као и гранична функција $g(x)$ низа

$$g_n(x)=n^2(x^{n-1}-x^{n-1+(-1)^n}), \quad n=2, 3, \dots,$$

су исте, тј.

$$f(x)=g(x)=0 \quad \text{за} \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

па су, према томе, граничне функције оба ова низа R-интеграбилне у размаку (0,1). Међутим, је

$$J_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{n^2}{n+1},$$

тако да у овом примеру низ интеграла J_n стварно дивергира кад $n\to\infty$, док низ интеграла

$$J_n=\int_0^1 g_n(x)\,dx=\frac{n(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

осцилира између -1 и $+1$.

(iii) Што се тиче услова 3° приметимо прво, да низ R-интеграбилних функција може бити такав да услови 1° и 2° буду испуњени, а да при томе ова гранична вредност

$\lim\limits_{n=\infty} J_n$ не буде једнака интегралу J граничне функције. Тако, на пример, низ функција

$$f_n(x) = n^2(1-x)x^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

конвергира граничној функцији $f(x) = 0$ за свако $0 \leqslant x \leqslant 1$, па је, према томе

$$J = \int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

док је

$$J_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)},$$

тако да низ интеграла J_n конвергира граничној вредности $\lim\limits_{n=\infty} J_n = 1$, која је различита од $J = 0$. — Овај низ функција је у суштини истоветан са низом функција (Darboux {1, стр. 84})

$$f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

који претставља један од првих примера ове врсте.

Међутим, већина услова (бар оних од практичног значаја) који дају довољне критериуме да би 1° или 2° било испуњено, повлачи већ и саму чињеницу 3°. Такав један критериум је, на пример, да низ функција униформно конвергира; тај критериум, који је ушао у већину уџбеника, а вероватно потиче од Weierstrass-a (в. Heine {2}), гласи:

Нека је $f_n(x)$ низ у размаку (a, b) R-интеграбилних функција. Ако је овај низ униформно конвергентан у томе размаку, тада је 1° његова гранична функција R-интеграбилна, 2° низ интеграла је конвергентан и 3°

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n=\infty} f_n(x)\,dx.$$

Да и у овоме ставу униформна конвергенција не претставља потребан, већ само довољан услов видимо из примера

$$f_n(x) = n(1-x)x^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Гранична функција овог низа функција је $f(x)=0$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$, тако да је

$$J=\int_0^1 f(x)\,dx=0;$$

с друге стране је

$$J_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{1}{n+1},$$

тако да $J_n \to 0$ кад $n \to \infty$, тј.

$$\lim_{n=\infty} J_n = J.$$

Међутим, овај низ није униформно конвергентан, као што смо то видели у тачки [23, (iii)].

Приметимо још да су сви горе наведени примери мање-више истога кова, и да се могу извести из низа функција облика

$$f_n(x)=n^p\,h(nx),$$

где је $h(x)$ дефинисано у размаку $(0, \infty)$.

Тако, на пример, ако је

$$p=1, \quad h(0)=0 \quad \text{и} \quad h(x)=o(x), \quad x \to \infty,$$

и ако несвојствени интеграл

$$\int_0^\infty h(t)\,dt$$

постоји, тада

$$f_n(x) \to f(x)=0 \quad \text{за} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

док

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^\infty h(t)\,dt, \quad n \to \infty,$$

а овај последњи интеграл не мора бити једнак нули. При томе је овај низ функција униформно конвергентан за свако $x>0$, осим у тачки $x=0$.

Кад бисмо, међутим, горњи низ функција помножили са $(nx)^i$, где је $i=\sqrt{-1}$, тј. кад бисмо посматрали низ функција

$$g_n(x)=n\,(nx)^i\,h(nx),$$

где функција $h(x)$ задовољава горе наведене услове, имали бисмо низ функција који, осим у тачки $x=0$, униформно конвергира граничној функцији која је једнака нули за $x \geqslant 0$, а чији низ интеграла осцилира између коначних граница. Уколико бисмо желели да имамо такав низ реалних функција довољно је да посматрамо реални или имагинарни део горњег низа, рецимо низ функција

$$n \sin (lg\, nx)\, h(nx).$$

(iv) Један од најважнијих ставова на основу којих се ред граничних процеса може изменити у смислу обрасца (17) дао је Arzelà {1, стр. 537 и lemma на стр. 262-7, као и стр. 322; 2, стр. 723—5}. Овај став се углавном састоји у томе што се униформна конвергенција низа функција $f_n(x)$ замењује његовом униформном ограниченошћу; за функције интеграбилне у смислу Riemann-а он гласи:

Нека је $f_n(x)$ низ у размаку (a, b) R-интеграбилних функција. Ако је гранична функција R-интеграбилна, и ако је низ функција униформно ограничен у томе размаку, тј.

$$|f_n(x)| \leqslant M \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{и} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

тада је limes интеграла једнак интегралу limesa

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim f_n(x)\, dx.$$

Тај став се често назива и Arzelà-Lebesgue-ов став, због тога што у првим Arzelà-овим радовима докази нису били потпуни, док је Lebesgue {1. стр. 125; 3. стр. 29—30}, проширујући овај став на свој појам интеграла, исти доказао и то у његовом најопштијем облику, а који непосредно садржи Arzelà-ов став. Уствари, овај став долази до пуног изражаја са појмом Lebesgue-ова интеграла, зато што тада отпада услов да гранична функција буде интеграбилна, јер је овај услов садржан у услову униформне ограничености. — Независно од Arzelà овај став је нешто доцније извео и Osgood {1} и то у специјалном случају низа непрекидних функција. Један од досад најкраћих доказа овог става дао је Landau {4}.

Што се тиче услова Arzelà-ова става, јасно је да у самој његовој природи лежи претпоставка да гранична функција буде R-интеграбилна. Међутим, и у овоме ставу услов да низ функција буде униформно ограничен је само довољан, а није и потребан.

Да бисмо ово увидели, довољно је да уочимо низ функција

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{за} \quad 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1, \\ a_n & \text{за} \quad \dfrac{1}{n+1}<x<\dfrac{1}{n}. \end{cases} \qquad n=1,2,\ldots,$$

Овај низ функција конвергира за свако x размака (0,1), и његова гранична функција је

$$f(x)=0 \quad \text{за} \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

и то ма какав био низ бројева a_n. Ако овај низ изаберемо тако да

$$a_n\to\infty \quad \text{кад} \quad n\to\infty,$$

тада овај низ функција не остаје униформно ограничен у размаку (0,1). Како је, међутим,

$$J_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{a_n}{n(n+1)},$$

то кад за низ a_n претпоставимо још да не тежи бесконачности сувише брзо, и да је

$$a_n=o(n^2), \quad n\to\infty,$$

тада је

$$\lim_{n=\infty} J_n=J=0.$$

Тако, на пример, ако ставимо да је

$$a_n=n, \quad \text{за} \quad n=1,2,3,\ldots,$$

добивамо низ функција који није униформно ограничен, чије су функције шта више позитивне, па ипак је limes интеграла једнак интегралу limesa.

Иако су функције овог низа прекидне, није тешко, са мањим изменама, учинити да све ове функције буду непрекидне и да задрже све особине горњег низа. Тако је, на пример, довољно на платформи сваке од функција $f_n(x)$ да уочимо тачку која се налази на средини ове платформе, тј. тачку $x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$, $y=a_n$, и да праволиниски спојимо ту тачку са тачкама $x=1/n$ и $x=1/(n+1)$ на X-оси. Добивена полигонална линија претставља диаграм непрекидне функције са жељеним особинама.

(v) Помоћу става из тачке [20. (iv)] можемо Arzelà-ов став доказати овако. Нека је $f_n(x)$ нив у размаку (a, b) R-интеграбилних и униформно ограничених функција, и нека је његова гранична функција $f(x)$ такође R-интеграбилна. Ставимо

$$g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|,$$

тада је и овај низ функција R-интеграбилан и униформно ограничен у размаку (a, b), а његова гранична функција је

$$g(x) = 0 \quad \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Како је даље

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx =$$

$$\leqslant \int_a^b g_n(x)\,dx,$$

то ако покажемо да је

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = 0,$$

тада ће отуда следити и да је

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Како је, међутим,

$$g_n(x) \geqslant 0 \quad \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

то је, дакле, за доказ Arzelà-ова става довољно да докажемо:

Ако је $g_n(x)$ низ у размаку (a, b) позитивних, R-интеграбилних и униформно ограничених функција, и ако овај низ тежи нули за свако x тога размака, тада и низ интеграла

$$\int_a^b g_n(x)\,dx \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Према томе, ако означимо са M горњу границу низа функција $g_n(x)$ биће

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant M \quad \text{за свако} \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{и} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Означимо даље са t ма који број размака $(0, M)$ и са $\varphi_n(t, x)$ асоцирану функцију функције $g_n(x)$, тј.

$$\varphi_n(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{за свако } x \text{ за које је } g_n(x) < t, \\ 1 & \text{за свако } x \text{ за које је } g_n(x) \geqslant t, \end{cases} \tag{18}$$

тада је, за свако $0 < \varepsilon < M$,

$$g_n(x) \leqslant M\varphi_n(\varepsilon, x) + \varepsilon\{1 - \varphi_n(\varepsilon, x)\}.$$

Ако сад ε изаберемо тако да функција $\varphi_n(\varepsilon, x)$ буде интеграбилна (а што је према ставу из тачке [20. (iv)] увек могуће), тада је

$$\int_a^b g_n(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi_n(\varepsilon, x)\,dx + \varepsilon\int_a^b \{1 - \varphi_n(\varepsilon, x)\} \leqslant$$

$$\leqslant M\int_a^b \varphi_n(\varepsilon, x)\,dx + \varepsilon(b - a),$$

јер је

$$1 - \varphi_n(\varepsilon, x) \leqslant 1 \quad \text{за} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Из ове неједначине видимо да се Arzelà-ов став своди на овај:

Нека је $g_n(x)$ *низ у размаку* (a, b) *R-интеграбилних, позитивних и униформно ограничених функција. Да би низ њихових интеграла*

$$\int_a^b g_n(x)\,dx \to 0 \quad \textit{кад} \quad n \to \infty,$$

довољно је (а и потребно) да за свако $\varepsilon > 0$ *(за које овај интеграл постоји)*

$$\int_a^b \varphi_n(\varepsilon, x)\,dx \to 0 \quad \textit{кад} \quad n \to \infty.$$

Да бисмо видели смисао овог услова приметимо да, према ставу из тачке [20. (iv)], интеграл

$$\int_a^b \varphi_n(\varepsilon, x)\,dx$$

можемо добити као граничну вредност, (кад $\delta\{P\}\to 0$) доњег Darboux-ова збира

$$\underline{S}\{P\} = \sum_{\nu=1}^{m} g_\nu(\varepsilon, n)(x_\nu - x_{\nu-1}). \tag{19}$$

При томе смо са $g_\nu(\varepsilon, n)$ означили доњу границу функције $\varphi_n(\varepsilon, x)$ у размаку $(x_{\nu-1}, x_\nu)$. Међутим, према дефиницији (18) функције $\varphi_n(t, x)$, доња граница $g_\nu(\varepsilon, n)$ је једнака нули за све размаке $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, осим за оне у којима је $g_n(x) \geqslant \varepsilon$ за с в а к о $x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu$, а у ком случају је ова доња граница једнака 1. Због тога се доњи Darboux-ов збир (19) своди, у ствари, на збир размака

$$\delta(g_n, \varepsilon) = \Sigma'(x_\nu - x_{\nu-1})$$

који је узет само преко оних размака у којима је $g_n(x) \geqslant \varepsilon$ за свако $x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu$. Можемо, дакле, ставити да је

$$\int_a^b \varphi_n(\varepsilon, x)\, dx = \delta(g_n, \varepsilon) + \varepsilon', \tag{20}$$

где је $\varepsilon' > 0$ и произвољно мало, ако је само подела $\{P\}$ довољно густа, тј. $\delta\{P\}$ довољно мало.

Покажимо сад, да низ функција $g_n(x)$ не може тежити нули за свако x размака (a, b), ако низ њихових интеграла не тежи нули. Заиста, ако низ интеграла не тежи нули, тада постоји једно такво $\eta > 0$, да је

$$\int_a^b g_n(x)\, dx > \eta > 0,$$

за бескрајно много вредности од n, али можемо, без ограничења, претпоставити да то важи за свако n, ако само под $g_n(x)$ подразумевамо сам тај делимични низ за који горња неједначина важи.

На основу горњег става и обрасца (20) видимо да у том случају можемо увек наћи тако густу поделу $\{P\}$, да за произвољно $\varepsilon' < \eta$ целокупна дужина $\delta(g_n, \varepsilon)$ свих оних размака $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ поделе $\{P\}$, у којима је $g_n(x) \geqslant \varepsilon$, буде већа од $\eta - \varepsilon' = \eta' > 0$, тј. да буде

$$\delta(g_n, \varepsilon) > \eta' > 0,$$

и то ма како велик био број n.

Како је η' утврђена (тј. коначна, не произвољно мала) дужина, то у размаку (a, b) мора постојати најмање једна тачка ξ, која се налази у унутрашњости неограничено много размака $(x_{\nu-1}, x_\nu)$. У тим размацима је, међутим, $g_n(x) \geqslant \varepsilon$; то значи да постоји делимичан низ низа $g_n(\xi)$, чији су сви чланови $\geqslant \varepsilon$, према томе низ функција $g_n(x)$ не може тежити нули у тачки ξ, што је требало доказати. Овим је и Arzelà-ов став доказан.

Напоменимо, да смо се при том закључку користили овом чињеницом:

Нека је дат коначан размак (a, b) и нека је J коначан скуп подразмака тога размака који немају заједничких тачака, а чија је целокупна дужина δ. Ако уочимо низ J_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, таквих скупова размака, и ако је $\delta_\nu > \eta > 0$ за свако $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, где смо са δ_ν означили целокупну дужину свих подразмака скупа J_ν, тада мора постојати неограничено много скупова J_{n_ν} и најмање једно ξ размака (a, b) такво да сваки скуп J_{n_ν} садржи један подразмак у чијој се унутрашњости налази тачка ξ.

Заиста, нека је N такав цео број да је

$$N\eta > k(b-a) \quad \text{ма какав био дати број } k;$$

ако уочимо N, или више ма којих од скупова J_ν, тада мора постојати најмање једна тачка ξ размака (a, b) таква да се она налази у по једном од подразмака од најмање $k+1$ ових скупова J_ν.

Због тога што се поједини подразмаци j_μ ма ког скупа J_ν не преклапају, то је горње тврђење истоветно са овим:

Нека је $j_\mu, \mu = 1, 2, 3, \ldots$, низ подразмака размака (a, b) и нека је d_μ дужина размака j_μ. Ако је

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n > k(b-a),$$

тада постоји најмање једна тачка ξ размака (a, b) која се налази у унутрашњости од најмање $(k+1)$ од n размака $j_\mu, \mu = 1, 2, \ldots n$.

Ово тврђење се, у ствари, своди на то да се покаже да најмање $(k+1)$ од размака j_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, n$, морају имати заједничких тачака, а што је јасно, јер у најгорем случају, ако ове размаке поређамо један до другог, они ће прекрити размак дужине $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$, који је већи од k размака дужине $(b-a)$, и претећи ће још један размак који не може бити краћи од

$$d_1+d_2+\ldots+d_n-k(b-a)=d>0.$$

Према томе, мора постојати најмање $(k+1)$ размака j_μ који ће сви имати заједничких тачака, а које се све тачке налазе још и у једном или више размака чија је тотална дужина најмање d. — Како N, тј. збир дужина $d_1+d_2+\ldots+d_n$, можемо учинити произвољно велик, то низ скупова размака J_ν, или низ подразмака j_μ, има ову особину: Ма како велик био број n, постоји увек цео број $N(n)$ такав да у низу размака $j_\mu, \mu=1, 2,\ldots N(n)$ буде n размака који имају најмање једну унутрашњу тачку ξ. За низ скупова J_ν размака j_μ можемо сад показати да мора постојати најмање једна тачка која се налази у унутрашњости од бескрајно много размака j_μ. Кад оваква тачка не би постојала то би значило да се ма која тачка ξ извесних размака размака (a, b), тоталне дужине $\geqslant\delta$, налази у унутрашњости од највише коначно много размака j_μ. — Означимо са j_ζ најмањи заједнички размак коначног броја N_ζ размака j_μ који садржи тачку ξ. Овим добивамо скуп размака којим према Borel-ову ставу [19. (ii)] можемо извесне размаке тоталне дужине $\geqslant\delta$ прекрити коначним бројем размака j_ζ. Ако означимо са N највећи од бројева N_ζ ових размака, тада би се ма која тачка размака (a, b) могла налазити у највише N размака j_ζ, а ово се противи претпоставци да постоје тачке ξ које се налазе у унутрашњости од произвољно великог броја ових размака.

(vi) Из Arzelà-ова става можемо сад извести и много општији став, ако место униформне ограничености низа функција $f_n(x)$ претпоставимо да све ове функције нису по апсолутној вредности веће од једне сталне интеграбилне функције $F(x)$, тј. да је

$$|f_n(x)|\leqslant F(x) \quad \text{за свако} \quad n=1,2,\ldots \quad \text{и} \quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{21}$$

Овај став, кога је Lebesgue {4} (види и Vitali {1}) доказао за свој појам интеграла, своди се за R-интеграбилне функције, уствари, на Arzelà-ов став, јер је тада већ сама функција $F(x)$ ограничена, тако да се (21) своди на униформну ограниченост низа функција $f_n(x)$. Међутим, овим се може Arzelà-ов став проширити на несвојствене интеграле, и то било на коначан размак $(a, b-0)$ било на бесконачан размак (види Pólya-Szegö {1, T. I. стр. 61, зад. 115}) као и на функције које су апсолутно R-интеграбилне у смислу de la Vallée-Poussin-а [22. (iv)]. (види Pidoll {1}). — Шта више, овај Lebesgue-ов став можемо формулисати и у веома општем облику, тако да он, у извесном смислу, даје потребне и довољне услове да би limes низа несвојствених интеграла био једнак интегралу limesa, и то било да су ови интеграли узети у обичном, било у de la Vallée—Poussin-овом (или Lebesgue-овом) смислу. Овај став, формулисан за несвојствене интеграле у обичном смислу, рецимо за размак $(a, b-0)$, гласи:

Нека је $f_n(x)$ низ у размаку $(a, b-0)$ R-иншеграбилних функција који у шоме размаку конвергира R-иншеграбилној функцији $f(x)$. Ако је

$$F_n'(x) \leqslant f_n(x) \leqslant F_n''(x), \text{ за свако } n=1,2,\dots \text{ и } a \leqslant x < b, \tag{22}$$

и ако су функције $F_n'(x)$ и $F_n''(x)$, као и њихове граничне функције $F'(x)$ и $F''(x)$ R-иншеграбилне у размаку $(a, b-0)$, и ако је још

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{b-0} F_n'(x)\,dx = \int_a^{b-0} F'(x)\,dx$$

и (23)

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{b-0} F_n''(x)\,dx = \int_a^{b-0} F''(x)\,dx,$$

шада је и

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{b-0} f_n(x)\,dx = \int_a^{b-0} f(x)\,dx, \tag{24}$$

йри чему смо йреййосшавили да сви ови несвојсшвени иншеграли йосшоје.

Ако ставимо

$$g_n(x) = f_n(x) - F_n'(x), \quad G_n(x) = F_n''(x) - F_n'(x),$$

и граничне функције ових низова обележимо са

$$g(x) = f(x) - F'(x) \quad \text{и} \quad G(x) = F''(x) - F'(x),$$

тада је, према (22),

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant G_n(x) \quad \text{за} \quad n=1,2,\dots, \quad \text{и} \quad a \leqslant x < b, \tag{25}$$

а, према (23),

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{b-0} G_n(x)\,dx = \int_a^{b-0} G(x)\,dx, \tag{26}$$

док се тврђење (24) своди на

$$\lim_{n=\infty}\int_a^{b-0} g_n(x)\,dx = \int_a^{b-0} g(x)\,dx. \tag{27}$$

Нека је λ произвољан позитиван број; ставимо

$$g_n(\lambda, x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{кад је} \quad g_n(x) \leqslant \lambda, \\ \lambda & \text{„ „} \quad g_n(x) > \lambda, \end{cases}$$

$$g(\lambda, x) = \begin{cases} g(x) & \text{„ „} \quad g(x) \leqslant \lambda, \\ \lambda & \text{„ „} \quad g(x) > \lambda, \end{cases}$$

$$G_n(\lambda, x) = \begin{cases} G_n(x) & \text{„ „} \quad G_n(x) \leqslant \lambda, \\ \lambda & \text{„ „} \quad G_n(x) > \lambda, \end{cases}$$

$$G(\lambda, x) = \begin{cases} G(x) & \text{„ „} \quad G(x) \leqslant \lambda, \\ \lambda & \text{„ „} \quad G(x) > \lambda; \end{cases}$$

и разлике ових и датих функција означимо са

$$r_n(x) = g_n(x) - g_n(\lambda, x), \qquad r(x) = g(x) - g(\lambda, x),$$
$$R_n(x) = G_n(x) - G_n(\lambda, x), \qquad R(x) = G(x) - G(\lambda, x).$$

Из дефиниције ових функција је јасно да је

$$0 \leqslant r_n(x) \leqslant R_n(x) \quad \text{за свако} \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \text{и} \quad a \leqslant x < b,$$

и

$$0 \leqslant r(x) \leqslant R(x) \quad \text{за} \quad a \leqslant x < b,$$

као и да

$$g_n(\lambda, x) \to g(\lambda, x) \quad \text{и} \quad G_n(\lambda, x) \to G(\lambda, x) \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

при чему су ова два низа функција униформно ограничена а саме функције позитивне.

Отуда добивамо:

$$\left|\int_a^{b-0} g_n(x)\,dx - \int_a^{b-0} g(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^{b} g_n(\lambda, x)\,dx - \int_a^{b} g(\lambda, x)\,dx + \int_a^{b-0} r_n(x)\,dx - \int_a^{b-0} r(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_a^{b} g_n(\lambda, x)\,dx - \int_a^{b} g(\lambda, x)\,dx\right| + \int_a^{b-0} r_n(x)\,dx + \int_a^{b-0} r(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_a^{b} g_n(\lambda, x)\,dx - \int_a^{b} g(\lambda, x)\,dx\right| + \int_a^{b-0} R_n(x)\,dx + \int_a^{b-0} R(x)\,dx.$$

Како је низ функција $g_n(\lambda, x)$ униформно ограничен, то на основу Arzelà-ова става, израз у модулу тежи нули кад $n \to \infty$, док из претпоставке следи да

$$\int_a^{b-0} R_n(x)\,dx \to \int_a^{b-0} R(x)\,dx,$$

па је, према томе,

$$\limsup_{n=\infty} \left| \int_a^{b-0} g_n(x)\,dx - \int_a^{b-0} g(x)\,dx \right| \leqslant 2 \int_a^{b-0} R(x)\,dx.$$

Како из претпоставке да несвојствени интеграл функције $G(x)$ постоји [22. (iv)], следи да

$$\int_a^{b-0} R(x)\,dx$$

можемо учинити произвољно малим, ако је само λ довољно велико, то из горње неједначине добивамо да мора

$$\int_a^{b-0} g_n(x)\,dx - \int_a^{b-0} g(x)\,dx \to 0, \quad n \to \infty,$$

чиме је горњи став доказан.

Овај став важи било да је b коначно, било да је $b = \infty$. У овом последњем случају треба само горњи доказ извести за размак (a, m), а затим пустити да $m \to \infty$.

III. Опште напомене

25. (i) Симболе o и O увели су Bachmann {1, стр. 401} и Landau {3. T. I. стр. 31, 59—62, T. II. стр. 883} ради прегледнијег означавања граничних процеса.

Нека су $f(n)$ и $\varphi(n)$ две функције дефинисане за свако довољно велико n, на пример, за $n > n_0$, где n можемо сматрати или као непрекидну променљиву — дакле сваки број размака (n_0, ∞), или као цео број, и то сваки цео број већи од n_0. Нека је функција $\varphi(n)$ стално позитивна, тј. $\varphi(n) > 0$, за коју обично претпостављамо да тежи или нули, или одређеној граници, или бесконачности, на пример, $1/n$, или 1, или n.

1° Ако постоји константа M таква да је

$$|f(n)| < M\varphi(n) \quad \text{за свако} \quad n > n_0,$$

то краће пишемо

$$f(n) = O\{\varphi(n)\}, \quad n \to \infty.$$

2° Ако

$$f(n)/\varphi(n) \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

то стављамо краће

$$f(n) = o\{\varphi(n)\}, \quad n \to \infty.$$

3° Ако

$$f(n)/\varphi(n) \to 1 \quad \text{кад} \quad n \to \infty,$$

пишемо

$$f(n) \sim \varphi(n), \quad n \to \infty.$$

Ову асимптотску релацију можемо, дакле, написати и овако

$$f(n) = \varphi(n) + o\{\varphi(n)\}, \quad n \to \infty.$$

Специално:

1° $$f(n) = O(1), \quad n \to \infty,$$

значи да $f(n)$ остаје ограничено кад $n \to \infty$, тј. или тежи одређеној граници, или осцилира између коначних граница;

2° $$f(n) = o(1), \quad n \to \infty,$$

значи да

$$f(n) \to 0 \quad \text{кад} \quad n \to \infty.$$

Примери:

$$n = O(n^2) \quad \text{или} \quad n = o(n^2), \quad n \to \infty;$$

$$100\,n^2 = O(n^2), \quad \text{или} \quad 100\,n^2 = o(n^3);$$

$$n + 1 \sim n \quad \text{или} \quad n + 100\sqrt{n} \sim n;$$

$$\sinh n \sim \cosh n \sim \frac{1}{2}e^n;$$

$$\sin an = o(n), \quad \text{или} \quad \sin an = o(\sqrt{n}), \quad \text{или} \quad \sin an = O(n);$$

$$\frac{3n-4}{n+2} = O(1), \quad \text{или} \quad \frac{3n-4}{n+2} \to 3, \quad \text{или} \quad \frac{3n-4}{n+2} = 3 + o(1/n).$$

Ако је

$$f(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \ldots\ldots$$

тада је

$$f(n) = O(n^k),$$

или прецизније

$$f(n) \sim a_0 n^k,$$

или

$$f(n) = a_0 n^k + O(n^{k-1}),$$

или

$$f(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + O(n^{k-2}), \text{ итд.}$$

Ако је

$$g(n) = a_0 + a_1 n^{-1} + a_2 n^{-2} + \ldots\ldots,$$

тада је

$$g(n) = O(1),$$

или прецизније

$$g(n) \to a_0,$$

или

$$g(n) = a_0 + O(1/n),$$

или

$$g(n) = a_0 + a_1 n^{-1} + O(1/n^2) \text{ итд.}$$

(ii) За овако уведене ознаке O и o важе, међу осталим, следећа правила:

1° $O(1) + O(1) = O(1) = o(n)$;

2° $\sum_{1}^{n} O(1) = O(n), \quad \sum_{1}^{n} o(1) = o(n)$;

3° $O(\varphi) + O(\psi) = O(\varphi + \psi)$;

4° $O(\varphi) \cdot O(\psi) = O(\varphi\psi)$;

5° $O(\varphi) \cdot o(\psi) = o(\varphi\psi)$;

6° Ако је $f = O(\varphi)$ тада је $f + \varphi = O(\varphi)$;

7° Ако је $f \sim \varphi$ тада је $f + o(\varphi) = \varphi$.

(iii) Симболе o и O можемо увести и за једнострано ограничење функције $f(n)$ и то овако:

$$f(n) > O\{\varphi(n)\}, \text{ односно } f(n) > o\{\varphi(n)\}, \ n \to \infty,$$

значи да постоји једна позитивна константа M, односно да је за свако произвољно мало, позитивно $\varepsilon > 0$,

$$f(n) > -M\varphi(n), \text{ односно } f(n) > -\varepsilon\varphi(n) \text{ за свако } n > n_0.$$

Аналоган смисао имају и асимптотске неједначине

$$f(n) < O\{\varphi(n)\}, \text{ односно } f(n) < o\{\varphi(n)\}, \ n \to \infty,$$

које претстављају скраћен начин писања за

$$f(n) < M\varphi(n), \text{ односно } f(n) < \varepsilon\varphi(n) \text{ за свако } n > n_0.$$

Напоменимо да су симболи „O_L“ и „O_R“ које је увео Doetsch {1}, идентични са горе дефинисаним симболима „$O>$“ и „$O<$“.

26. Ознака $\sum\limits_{a_n \leqslant x}$ или $\sum\limits_{\lambda_\nu \leqslant x}$ значи да количине које се налазе иза знака Σ треба сабрати преко свих оних индекса n односно ν, за које бројеви a_n односно λ_ν нису већи од x. Према томе горњи изрази су одређене функције од x, за свако x одговарајућег размака.

Ако низ a_n, односно λ_ν монотоно расте и тежи бесконачности са n, односно ν, тада је број чланова које треба сабрати коначан; горњи збирови су коначни и претстављају степенасте функције. На пример,

$$\sum_{n \leqslant x} 1 = [x], \quad \sum_{\nu^2 \leqslant x} \nu = \frac{1}{2}[\sqrt{x}]([\sqrt{x}] + 1).$$

Ако низ a_n, односно λ_ν није монотон или не тежи бесконачности, тада број чланова које треба сабрати може бити и бесконачан, тако да горњи изрази претстављају бесконачне редове. На пример,

$$\sum_{\frac{-(-1)^n}{n} \leqslant x} \frac{1}{n^2} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{k} 1/(2n)^2 & \text{за} \quad 2k \leqslant -1/x \quad \text{и} \quad x < 0, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/(2n)^2 & \text{за} \quad x = 0, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/(2n)^2 + \sum\limits_{n=k}^{\infty} 1/(2n+1)^2 & \text{за} \quad 2k+1 \geqslant 1/x \text{ и } x > 0. \end{cases}$$

27. (i) Ако се комплексни бројеви a_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, односно тачке комплексне равни налазе с в е у углу отвора $2\theta_0 < \pi$, тада важи неједначина

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \right| \geqslant \cos\theta_0 \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|. \tag{1}$$

(Види Петровић {1, стр. 52}).

Доказ. Ставимо

$$a_\nu = r_\nu n^{i\alpha_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

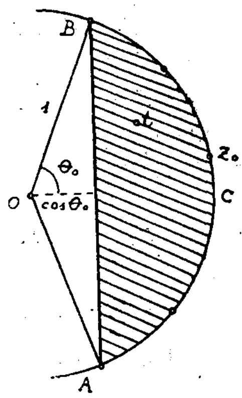
и сматрајмо да се у тачкама

$$z_\nu = e^{i\alpha_\nu}$$

налазе масе величине r_ν. Како се тачке z_ν налазе на луку круга $|z| = 1$, који је $\leqslant 2\theta < \pi$ (в. сл. 28), то ће се, према Gauss-ову {1. стр. 112; 2. стр. 32} ставу, тежиште

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu e^{i\alpha_\nu}}{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu} = t$$

овога система налазити у најмањем конвексном полигону око тачке z_ν, према томе се оно мора налазити у кружном отсечку ACB. Како је отстојање од почетка ма које тачке тог отсечка веће од $\cos\theta_0$, то је $|t| \geqslant \cos\theta_0$, што се своди на неједначину (1).



Сл. 28

(ii) Ако у неједначини (1) ставимо

$$a_\nu = f\left\{a + \frac{\nu}{n}(b-a)\right\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

где је $f(x)$ у размаку (a, b) R-интеграбилна функција, тако добивену неједначину поделимо са n и пустимо да $n \to \infty$, добивамо

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \geqslant \cos\theta_0 \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Ово из разлога што

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left\{a + \frac{\nu}{n}(b-a)\right\} \to \int_0^1 f\{a + t(b-a)\}\,dt =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \quad n \to \infty.$$

28. Бројна функција природног низа 1, 2, 3, ..., тј. функција $[x]$, игра доста важну улогу у теорији бројева због својих интересантних особина, од којих, примера ради, наводимо ове:

1° $[2x]+[2y] \geqslant [x]+[x+y]+[y]$;

2° $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots.+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$;

3° $\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x]$;

4° Нека је $\tau(n)$ Euler-ова функција, тј. $\tau(n)=$ броју дељитеља броја n (на пример $\tau(p)=2$, ако је p прост број), тада је

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots.+\tau(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots.+\left[\frac{n}{n}\right];$$

5° Нека је $k=[\sqrt{n}]$, тада је

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\ldots.+\left[\frac{n}{n}\right]=$$
$$=2\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots.+2\left[\frac{n}{k}\right]-k^2;$$

6° За велико n је, према 5°,

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{n}{\nu}\right]=2\sum_{\nu=1}^{k}\left[\frac{n}{\nu}\right]-k^2=2\sum_{\nu=1}^{k}\frac{n}{\nu}-k^2-2\sum_{\nu=1}^{k}\left\{\frac{n}{\nu}-\left[\frac{n}{\nu}\right]\right\}=$$
$$=2n\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu}-k^2+O(k)=2n(lg\,k+C)-n+O(k)=$$
$$=n(lg\,n+2C-1)+O(\sqrt{n}),\quad n\to\infty;$$

7° $$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left[nx-\nu\frac{n}{m}\right]-\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[mx-\nu\frac{m}{n}\right]=m-n.$$

Види Pólya-Szegö {1, T. I, стр. 42—44, T. II, стр. 118, 131}.

29. (i) Уочимо $(k-1)$-ви хармониски интеграл $\alpha_{k-1}(x)$ функције $\alpha(x)=x$, узет преко размака (0,1); то је полином k-тог степена кога ћемо означити са $b_k(x)$. Овај се полином своди на k-ти, тзв. Bernoulli-ев полином $B_k(x)$, и то

$$b_k(x) = \frac{1}{k!} B_k(x).$$

Ако ставимо да je

$$b_0(x) = B_0(x) = 1,$$

првих осам полинома $B_k(x)$ су

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = x + B_1(0),$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} = x(x-1) + B_2(0),$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1),$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} = x^2(x-1)^2 + B_4(0),$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x = x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x^2 - x - \frac{1}{3}\right),$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42} =$$

$$= x^2(x-1)^2\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right) + B_6(0),$$

$$B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x =$$

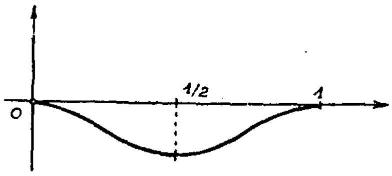
$$= x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x^4 - 2x^3 + x + \frac{1}{3}\right),$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30} =$$

$$= x^2(x-1)^2\left(x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right) + B_8(0).$$

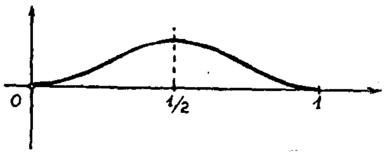
Општи облик ових полинома извешћемо у напомени [30, (i)].

Диаграми полинома $B_\nu(x) - B_\nu(0)$ у размаку (0,1) могу имати један од следећа четири облика (в. сл. 29—32);



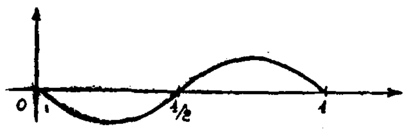
за $\nu = 2, 6, 10, 14, \ldots, 4p-2, \ldots$

Сл. 29.



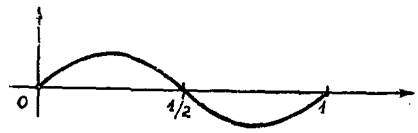
за $\nu = 4, 8, 12, 16, \ldots\ldots, 4p, \ldots$

Сл. 30.



за $\nu = 3, 7, 11, 15, \ldots, 4p-1, \ldots$

Сл. 31.



за $\nu = 5, 9, 13, 17, \ldots, 4p+1, \ldots$

Сл. 32.

(ii) Поред горње дефиниције Bernoulli-евих полинома, тј. да су полиноми $b_\nu(x)$ узастопни хармониски интеграли функције x, дакле, одређени условима:

$$b_1(x) = x - \frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$b_{\nu+1}{}'(x) = b_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \ldots\ldots, \tag{2}$$

$$b_{\nu+1}(1) - b_{\nu+1}(0) = \int_0^1 b_\nu(t)\,dt = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots\ldots, \tag{3}$$

они се могу дефинисати и као полиноми који имају ту особину да им је **коначна** диференција једнака неком степену од x, тј. да је

$$B_\nu(x+1)-B_\nu(x)=\nu x^{\nu-1},\quad \nu=1,2,\ldots\ldots, \tag{4}$$

док је

$$(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}.$$

Односно, за полиноме $b_\nu(x)$ је

$$b_\nu(x+1)-b_\nu(x)=\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!},\quad \nu=1,2,\ldots\ldots, \tag{5}$$

као аналогон за

$$\left(\frac{x^\nu}{\nu!}\right)'=\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Види Nörlund {1. стр. 2—7; 2}.

Најчешће се Bernoulli-еви полиноми дефинишу помоћу функције генератрисе, наиме као коефициенти од x^ν функције

$$\frac{t}{e^t-1}e^{xt}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}B_\nu(x)t^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu(x)t^\nu, \tag{6}$$

јер се из ове дефиниције најлакше добивају све њихове особине. Види Schlömilch {1. T. II. стр. 207—217} и Nielsen {2; 1. стр. 461—468}.

(iii) Ако пођемо од ове последње дефиниције можемо лако показати да су коефициенти $b_\nu(x)$ Taylor-ова реда (6) заиста узастопни хармониски интеграли функције x, тј. да су задовољени услови (1), (2) и (3).

Да је $x-\frac{1}{2}$ коефициент од t^1, тј. да је задовољен услов (1) видимо непосредно.

Да је задовољен услов (2) видимо ако леву и десну страну једначине (6) диференцирамо по x. Тада је

$$\frac{t}{e^t-1}te^{xt}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n'(x)t^n,$$

тј.

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}b'_n(x)t^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}b'_{n+1}(x)t^n,$$

што даје једначине (2) кад коефициенте горњег реда упоредимо са (6).

Напослетку, једначине (3) добивамо ако у (6) ставимо $x=0$ и $x=1$, ово напишемо у облику

$$\frac{t}{e^t-1}-1+\frac{1}{2}t=\sum_{n=2}^{\infty}b_n(0)t^n,$$

$$\frac{te^t}{e^t-1}-1-\frac{1}{2}t=\sum_{n=2}^{\infty}b_n(1)t^n,$$

и приметимо да леве стране претстављају једну те исту функцију.

На исти начин можемо из (6) лако извести и једначине (4) или (5).

Заиста је, према (6),

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\{b_\nu(x+1)-b_\nu(x)\}t^\nu=\frac{t}{e^t-1}(e^{(x+1)t}-e^{xt})=te^{xt}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}t^\nu,$$

што упоређивањем коефицијената првог и последњег реда даје једначину (5).

Напоменимо најзад, да се на исти начин из (6) може извести и ова особина Bernouli-евих полинома

$$b_\nu(1-x)=(-1)^\nu b_\nu(x),\quad \nu=1,2,\ldots.., \tag{7}$$

из које следе симетрични облици диаграма ових полинома у размаку $(0,1)$, приказани на сликама 29—32.

(iv) Уочимо Bernoulli-еве полиноме $b_n(x)$ у размаку $(0,1)$ и продужимо их периодички за све вредности од x. Тада добивамо, т.зв. Bernoulli-еве функције $\bar{b}_n(x)$, које су периодичне са периодом 1, а у размаку $(0,1)$, тј. прве периоде, су одређене једначинама

$$\bar{b}_n(x)=b_n(x) \quad \text{за} \quad 0<x<1,\quad n=1,2,3,\ldots..,$$

па их, према томе, можемо дефинисати и једначинама

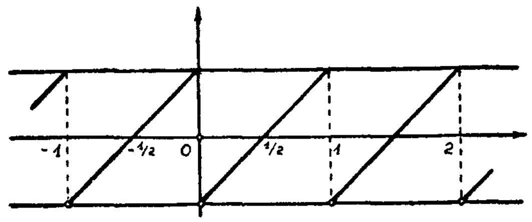
$$\bar{b}_n(x)=b_n(x-[x]),\quad n=1,2,3,\ldots, \tag{8}$$

и то за све вредности од x.

Сем прве функције $\overline{b}_1(x)$, све остале функције $\overline{b}_n(x)$, $n \geqslant 2$, су непрекидне, што следи из особина (3) (в. сл. 29—32), док прва функција

$$\overline{b}_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2} \tag{9}$$

има у тачкама $x = \pm k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, скокове дужине 1 (в. сл. 33). Ако ову функцију дефинишемо обрасцем (9) она је непрекидна са десне стране.



Сл. 33.

Остале функције $\overline{b}_n(x)$ можемо такође експлицитно изразити степенима узастопним функције $\overline{b}_1(x)$, и ако, краткоће ради, ставимо

$$b(x) = \overline{b}_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2},$$

добивамо постепено

$$\overline{b}_1(x) = b(x),$$

$$\overline{b}_2(x) = \frac{1}{2} b^2(x) = \frac{1}{24},$$

$$\overline{b}_3(x) = \frac{1}{6} b^3(x) - \frac{1}{24} b(x),$$

$$\overline{b}_4(x) = \frac{1}{24} b^4(x) - \frac{1}{48} b^2(x) + \frac{7}{5760},$$

. . . .

Општи облик извешћемо у напомени [30].

(v) На основу периодицитета функција $\overline{b}_n(x)$ можемо ове изразити једним другим аналитичким изразом, наиме, у облику тригонометриског (Fourier-ова) реда. У ту сврху пођимо од обрасца

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin t/2},$$

тј. од

$$\frac{1}{2}=-\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu t+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin t/2},$$

и интегришимо обе стране од π до $2\pi x$; после деобе са π добивамо

$$x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu}+J_n(x), \tag{10}$$

где смо ставили

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2}\,dt=\int_{1/2}^{x}\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin\pi t}\,dt.$$

Лако је увидети да

$$J_n(x)\to 0 \quad \text{кад} \quad n\to\infty \quad \text{и то за} \quad 0<x<1,$$

јер после парциалне интеграције добивамо

$$-J_n(x)=\frac{1}{(2n+1)\pi}\left\{\frac{\cos(2n+1)\pi x}{\sin\pi x}-(-1)^n\right\}+$$

$$+\frac{1}{2n+1}\int_{1/2}^{x}\frac{\cos(2n+1)\pi t\cos\pi t}{\sin^2\pi t}\,dt, \tag{11}$$

а ови последњи изрази имају смисла само кад је $x>0$ и $x<1$.

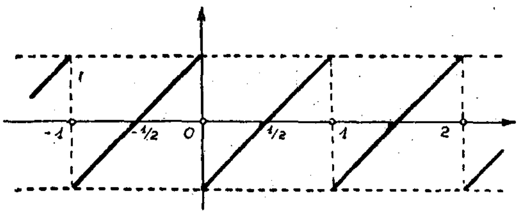
Ако, дакле, у (10) пустимо да $n\to\infty$, добивамо коначно да је

$$x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu} \quad \text{за} \quad 0<x<1.$$

Како овај ред претставља периодичку функцију са периодом 1, то је за све вредности од x

$$\bar{b}_1(x)=x-[x]-\frac{1}{2}=-\frac{2}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu}, \tag{12}$$

осим за $x = \pm k$, $k = 1, 2, \ldots$ јер је за ове вредности од x, вредност бесконачног реда на десној страни једнака нули, тако да се ова функција разликује од функције (10) само у овим тачкама (в. сл. 34).



Сл. 34,

Ако сад образац (12) узастопно интегришемо, изостављајући на левој страни интеграционе константе, добивени интеграли претстављаће низ узастопних хармониских интеграла, јер су све овако добивене функције периодичне и такве, да је интеграл узет дуж једне периоде једнак нули. Према томе ће ови редови претстављати функције $\overline{b}_n(x)$ и на тај начин добивамо за ове функције изразе

$$\overline{b}_{2k}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu^{2k}}, \tag{13}$$

$$\overline{b}_{2k+1}(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu^{2k+1}}, \tag{14}$$

који обрасци важе за све вредности од x и претстављају периодичне и непрекидне функције.

Да редове (13) и (14) за $k \geqslant 1$, смемо интегрисати члан по члан је очевидно јер су ови редови апсолутно и униформно конвергентни [23], пошто су им чланови (за $k \geqslant 1$), по апсолутној вредности мањи од $1/\nu^2$, а ред $\Sigma\, 1/\nu^2$ конвергира. Међутим, да и ред (12), и ако он није униформно конвергентан у затвореном размаку $(0,1)$, смемо интегрисати члан по члан, можемо лако увидети и то или непосредно, ако пођемо од обрасца (10), или ако приметимо, на основу обрасца (11), да тај ред остаје униформно ограничен [24], за свако коначно x.

(vi) Из образаца (13) и (14) добивамо још и асимптотско понашање Bernoulli-евих функција $\overline{b}_n(x)$, за велике вредности индекса n. Заиста се тада у овим редовима, према првом члану могу занемарити остали чланови, тако да ове функције теже нули као $1/(2\pi)^n$, тј. [25]

$$\bar{b}_n(x) = O(1/(2\pi)^n),\quad n\to\infty, \tag{15}$$

и то униформно по x.

30. (**i**) За Bernoulli-еве полиноме, од којих смо првих осам навели у напомени [29. (i)], можемо лако наћи и општи аналитички израз ако пођемо од обрасца (6). Јер, ако оба фактора леве стране ове једначине развијемо у ред по степенима од t, тј. ставимо

$$e^{xt} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} t^\nu$$

и

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu}{\nu!} t^\nu, \tag{16}$$

затим ова два реда измножимо и коефициенте упоредимо са првим редом (16), добивамо да је

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} b_\nu x^{n-\nu},\quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \tag{17}$$

где су, дакле, коефициенти Bernoulli-евих полинома дати низом Taylor-ових коефициената функције (16).

(**ii**) Овај низ бројева

$$b_n = n!\, b_n(0) = B_n(0),\quad n = 1, 2, \ldots\ldots, \tag{18}$$

назваћемо *Bernoulli-евим низом*.

Уобичајено је да се под Bernoulli-евим бројевима подразумева низ позитивних рационалних бројева, прилично неправилна тока, који се обележавају словима B_{2n}, $n = 1, 2, \ldots$, и од којих су ово првих петнаест:

$$B_2 = \frac{1}{6},\quad B_{10} = \frac{5}{66},\quad B_{18} = \frac{43\,867}{798},\quad B_{26} = \frac{8\,553\,103}{6}$$

$$B_4 = \frac{1}{30},\quad B_{12} = \frac{691}{2\,730},\quad B_{20} = \frac{174\,611}{330},\quad B_{28} = \frac{23\,749\,461\,029}{870}$$

$$B_6 = \frac{1}{42},\quad B_{14} = \frac{7}{6},\quad B_{22} = \frac{854\,513}{138},\quad B_{30} = \frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322}$$

$$B_8 = \frac{1}{30},\quad B_{16} = \frac{3\,617}{510},\quad B_{24} = \frac{236\,364\,091}{2\,730},\quad \ldots\ldots\ldots$$

Bernoulli-ев низ b_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, је везан за Bernoulli-еве бројеве на следећи начин

$$b_0=1, \quad b_1=-1/2,$$
$$b_{2\nu}=(-1)^{\nu+1}B_{2\nu}, \quad b_{2\nu+1}=0, \qquad \nu=1,2,\ldots. \tag{19}$$

Дакле су, осим првог, сви остали бројеви низа b_n са непарним индексима једнаки нули, а они са парним индексима алтернативно мењају знак.

Ово је лако увидети, јер ако прва два члана реда (16) пребацимо на леву страну, овај образац постаје

$$\frac{t}{e^t-1}-1+\frac{t}{2}=\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{b_\nu}{\nu!}t^\nu,$$

и непосредно можемо проверити да је функција на левој страни парна, тј. да коефициенти уз непарне степене ишчезавају, што даје другу од једначина (19).

Са друге стране, да заиста преостали коефициенти са парним индексима алтернативно мењају знак, видимо кад образац (18) упоредимо са обрасцем (14), стављајући у овом последњем $x=0$. Тада добивамо, наиме, да је

$$\frac{-b_{2k}}{(2k)!}=b_{2k}(0)=\bar{b}_{2k}(0)=\frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2k}};$$

дакле су, према (19), Bernoulli-еви бројеви B_{2k} заиста позитивни, и можемо их изразити овако

$$B_{2k}=2\frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2k}}, \quad k=1,2,\ldots. \tag{20}$$

Да су при томе Bernoulli-еви бројеви заиста рационални бројеви, видимо из самог њиховог начина образовања, на пример из (16), јер су сви изводи функције $t/(e^t-1)$, за $t=0$, рационални бројеви.

Из обрасца (20) добива се још и асимптотско понашање Bernoulli-евих бројева B_{2n}, за велике вредности индекса n, и то

$$B_{2n}\sim 2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}, \quad n\to\infty. \tag{21}$$

(iii) Bernoulli-еви бројеви су прво привукли пажњу математичара при израчунавању збира степена природног низа, тј. збира

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k = \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

(в. Jacob Bernoulli {1, стр. 97} који је израчунао првих десет Bernoulli-евих полинома).

Ове збирове можемо сад лако изразити Bernoulli-овим бројевима, тј. полиномима, ако пођемо од обрасца (4), у њему ставимо $\nu = k+1$, а затим узастопце $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и све тако добивене обрасце саберемо. Тада добивамо да је

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\{B_{k+1}(n) - B_{k+1}(0)\},$$

или, према обрасцу (17),

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \binom{n}{\nu} n^{n-\nu}.$$

(iv) Помоћу Bernoulli-евих бројева можемо наћи и општи облик Bernoulli-евих функција $\overline{b}_n(x)$ и изразити их узастопним степенима функције

$$b(x) = x - [x] - \frac{1}{2}.$$

Заиста је по Taylor-ову обрасцу

$$b_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} b_n^{(\nu)}\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^\nu,$$

а како је, према (14),

$$b_n^{(\nu)}(x) = b_{n-\nu}(x), \quad \text{тј.} \quad b_n^{(\nu)}\left(\frac{1}{2}\right) = b_{n-\nu}\left(\frac{1}{2}\right),$$

то је

$$b_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} b_{n-\nu}\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}.$$

Како је, према (8),

$$\overline{b}_n(x) = b_n(x - [x]),$$

то је, дакле,

$$\bar{b}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\bar{b}^{n-\nu}(x)}{(n-\nu)!}.$$

Коефициенте $b_\nu\left(\frac{1}{2}\right)$ добивамо из (6) стављајући $x = 1/2$; јер из

$$\frac{te^{t/2}}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\left(\frac{1}{2}\right)t^\nu,$$

ако приметимо да је

$$\frac{te^{t/2}}{e^t - 1} = 2\frac{t/2}{e^{t/2} - 1} - \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{1-\nu} - 1}{\nu!} b_\nu t^\nu,$$

упоређујући коефициенте ова последња два реда, добивамо

$$b_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{1-n} - 1}{n!} b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots . \tag{22}$$

Дакле,

$$\bar{b}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{2^{1-\nu} - 1}{\nu!} b_\nu \frac{b^{n-\nu}(x)}{(n-\nu)!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}(2^{1-\nu} - 1)\binom{n}{\nu} b_\nu b^{n-\nu}(x) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[2^{1-n} B_n\{2\,b(x)\} - B_n\{b(x)\}\right]. \tag{23}$$

31. (i) Gamma-функција дефинисана је несвојственим интегралом

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt, \tag{1}$$

који је конвергентан за $R\{s\} > 0$.

За

$$s = n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots,$$

је, према томе,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad 0! = 1.$$

Дакле, $\Gamma(s)$, за позитивно s, је једна непрекидна функција која интерполише низ факторијела $n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

(*ii*) Интеграл (1) којим је дефинисана Gamma-функција можемо за $R\{s\}>0$ написати у облику

$$\Gamma(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(s+n)}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{s-1}\,dt. \tag{2}$$

Како ови последњи изрази имају смисла за свако $s\neq 0, -1, -2, \ldots\ldots$, и претстављају аналитичне функције, то је овим Gamma-функција аналитички продужена у целој равни комплексне промењиве s. Из њега видимо да $\Gamma(s)$ има у тачкама $s=-n$, $n=0, 1, 2, \ldots$ полове првог реда са резидуумом $(-1)^n/n!$.

(*iii*) Од многобројних особина Gamma-функције наведимо само следеће:

1° Основна функционална једначина Gamma-функције је

$$\Gamma(s-1)=s\Gamma(s); \tag{3}$$

она може послужити и за дефиницију Gamma-функције, јер је, за реално s, Gamma-функција једина конвексна функција која задовољава ову функционалну једначину. Види Artin {1}.

2° Gamma-функција је са тригонометриским функцијама везана једначином

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi\operatorname{cosec}\pi s. \tag{4}$$

3° За велике позитивне вредности од s, према Stirling-ову {1} обрасцу, Gamma-функција се понаша као

$$\Gamma(s)\sim\frac{s^s}{e^s}\sqrt{\frac{2\pi}{s}},\quad s\to\infty. \tag{5}$$

Прецизније, за велико s имамо овај асимптотски развитак [33]

$$\Gamma(s)\sim e^{-s}s^s\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\left(1+\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}+\ldots\ldots\right). \tag{6}$$

Види Watson {1}.

(*iv*) Gamma-функцијом се могу изразити многобројни одређени интеграли, од којих ћемо навести следеће:

1° Ако у интегралу (1) извршимо смену $t^s=\tau$ и ставимо $1/s=x$, добивамо

$$\int_0^\infty e^{-t^x}dt=\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right), \tag{7}$$

из које једначине, према обрасцима (3) и (4), добивамо

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \tag{8}$$

2° Ако у интегралу (1) извршимо смену $xt=\tau$, добивамо

$$\int_0^\infty e^{-xt}t^{s-1}dt=\frac{\Gamma(s)}{x^s}, \tag{9}$$

одакле, за $x=i\alpha$, добивамо, на пример, да је

$$\int_0^\infty \sin(\alpha t)\,t^{s-1}\,dt=\frac{\Gamma(s)\sin\frac{1}{2}\pi s}{\alpha^s}, \quad \text{за} \quad -1<R\{s\}<1, \tag{10}$$

Опште о Gamma-функцији види Nielsen{1; 3}, Whittacker-Watson {1}, Copson {1}.

32. (i) Dirichlet-ови редом

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

дефинисана је за $R\{s\}>1$ т. зв. Riemann-ова Zeta-функција. Она се може аналитички продужити у целој равни криволиниским интегралом

$$\zeta(s)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0)}\frac{(-z)^{s-1}e^{-z}}{1-e^{-z}}\,dz,$$

где је $\Gamma(s)$ Gamma-функција, а где се интеграција узима дуж путање која долази из $-\infty$, обилази почетак у позитивном смислу и поново одлази у $-\infty$.

(ii) Zeta-функцију можемо постепено аналитички продужавати у областима $R\{s\}>0$, $R\{s\}>-1, \ldots$ и реалним интегралима, а ово аналитичко продужење можемо добити и у целој равни и из Riemann-ове {2} функционалне једначине.

Тако из обрасца (3) тачке B. 5. 8. добивамо

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-\int_1^\infty t^{-s}\,d\{t-[t]\} \quad \text{за} \quad R\{s\}>0,$$

а одавде, ако ставимо

$$\bar{b}(t)=\frac{1}{2}+[t]-t,$$

добивамо

$$\zeta(s)=s\int_0^\infty \bar{b}(t)\,t^{-s-1}\,dt \quad \text{за} \quad -1<R\{s\}<0.$$

Како је (види [29, (12)])

$$\bar{b}(t)=2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(2\nu\pi t)}{2\nu\pi},$$

то је

$$\zeta(s)=2s\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(2\nu\pi t)}{2\nu\pi}=$$

$$=2s\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu\pi}\int_0^\infty \sin(2\nu\pi t)\frac{dt}{t^{1+s}}.$$

Према [31, (10)] је

$$\int_0^\infty \sin(\alpha t)\,t^{x-1}\,dt=\frac{\Gamma(x)\sin\frac{1}{2}\pi x}{\alpha^x}, \quad \text{за} \quad -1<R\{x\}<1,$$

па је за

$$x=-s \quad \text{и} \quad \alpha=2\nu\pi \quad \text{и} \quad -1<R\{s\}<0,$$

$$\zeta(s)=2s\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu\pi}\,\frac{\Gamma(-s)\sin(-\frac{1}{2}\pi s)}{(2\nu\pi)^{-s}}=$$

$$=2(-s)\Gamma(-s)\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu\pi)^{1-s}}=$$

$$=2\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi}{2}(1-s)\,\zeta(1-s)\frac{1}{(2\pi)^{1-s}} \quad \text{за} \quad R\{s\}<0,$$

Отуда, ако s заменимо са $1-s$ добивамо функционалну једначину Riemann-ове Zeta-функције

$$\zeta(1-s) = \frac{2\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s}{(2\pi)^s}\zeta(s).$$

Овом функционалном једначином можемо функцију $\zeta(s)$ аналитички продужити у левој полуравни $R\{s\} \leqslant \frac{1}{2}$, знајући њене вредности у десној полуравни $R\{s\} \geqslant \frac{1}{2}$.

(iii) Сличне функционалне једначине за функције

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^s}$$

и

$$\psi(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \ldots, \quad R\{s\} > 0,$$

дао је Schlömilch {3} и то

$$\varphi(1-s) = \frac{2^s - 1}{2^{1-s} - 1} \, \frac{2\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}}{(2\pi)^s}\varphi(s)$$

и

$$\psi(1-s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\psi(s),$$

које се, уосталом, могу извести и из функционалне једначине за ζ-функцију, ако претходно функције $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ изразимо функцијом $\zeta(s)$.

(iv) Zeta-функција има у коначности само један пол првог реда и то у тачки $s=1$, са резидуумом 1.

Поред т. зв. „обичних нула" Zeta-функције које су $s=-2, -4, \ldots$, она има још бескрајно много нула у прузи $0 < R\{s\} < 1$, за које је Riemann {2} наслућивао да се све налазе на правој $R\{s\} = 1/2$, што још до данас није доказано. (Чувени Riemann-ов „Vermuthung").

(v) За $s=0$ и $s=-(2n-1)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, Zeta-функција узима ове вредности

$$\zeta(0)=-1/2, \quad \zeta(1-2n)=\frac{(-1)^n}{2n}B_{2n}, \; n=1, 2, 3, \ldots,$$

где су B_{2n} Bernoulli-еви бројеви [30].

Општије о Zeta-функцији види Whittacker-Watson {1} и Titchmarsh {1}.

33. Нека је $F(z)$ аналитична функција дефинисана за велике вредности од $|z|$, које се налазе у неком одређеном углу комплексне равни. Ако

$$\begin{aligned}
&F(z)\to a_0,\\
&z\{F(z)-a_0\}\to a_1,\\
&z^2\{F(z)-a_0-a_1z^{-1}\}\to a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z^n\{F(z)-a_0-a_1z^{-1}-\ldots-a_{n-1}z^{-n+1}\}\to a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

кад z стварно дивергира (види С. б. 3. (i)) у поменутом углу и то за свако $n=0, 1, 2, \ldots$, и ако ред

$$a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+\ldots\ldots$$

дивергира за макако велико $|z|$, тада овај ред, по Poincaré-у {1}, називамо *асимйтойски развитак* функције $F(z)$ у близини тачке $z=\infty$ и пишемо, укратко,

$$F(z)\sim a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots\ldots.$$

Употребом ознака O или o данас ово можемо прецизно и овако написати

$$F(z)=a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}+o(z^{-n}),$$

или

$$F(z)=a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}+O(z^{-n-1}).$$

Општије види Stieltjes {2}, Nielsen {1, стр. 487—493}, Whittacker-Watson {1}.

ПОПИС ЛИТЕРАТУРЕ И РЕГИСТАР ИМЕНА

(Бројеви у { } загради односе се на главе и тачке у којима је дело цитирано)

Abel, N. H. — 1. Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$ *Crelle*, I, стр. 311 (1829). — Oeuvres complètes, I, стр. 222. {B. 2. 3. (ii); B. 3. 2. (ii); B. 3. 3. (ii); B. 5. 4. (i); C. 2. 6. (i); C. 6. 1. (ii); C. 6. 2. (iii), (v); C. 6. 4. (i); C. 6. 5. (iv); D. 1. [9. (ii)]; D. 2. [23. (iv), (v), (vii), (x)]}.

2. Remarque sur une Note de M. Olivier. *Crelle*, **3**, стр. 85 (1828). — Oeuvres complètes. II. изд. Leipzig (1881), стр. 197. {C. 2. 5. (ii); C. 2. 6. (i)}.

3. У папирима и публиковано у Oeuvres complètes, стр. 200. {C. 2. 5. (ii)}.

Аљанчић, С. — **1.** Sur une formule sommatoire généralisée. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. serbe des sciences*, **2**, стр. 263—269 (1948). {C. 3. 2. (vi)}.

Appell, P. — **1.** *Ann. de l'Ec. Normale*, (2), **X**, стр. 119—145 (1880). {C. 3. 1. (ii)—(iii); C. 3. 2. (vi); C. 3. 3. (iii)}.

Artin, E. — **1.** Einführung in die Theorie der Gammafunktion. *Hamb. math. Einzelschriften*, Heft 11 (1931). {D. 3. [31. (iii)]}.

Arzelà, C. — **1.** *Rendic. Acc. Lincei Roma*, (4), **1**, стр. 262—6, стр. 321—6, стр. 532—40 (1885). {D. 2. [20. (iv)]; D. 2. [24. (ii), (iv), (v), (vi)]}.

2. Sulle serie di funzioni. Par. II. *Memorie delle R. Accad. d. Sci. di Bologna*, (5), **VIII**, стр. 706—12, стр. 723—5 (1899). {D. 2. [20. (iv)]; D. 2. [24. (ii), (iv), (v), (vi)]}.

3. *R. C. Ist. Bologna* (20), **10**, стр. 32—40 (1905/6). {D. 2. [20. (iv)]; D. 2. [24. (ii), (v), (vi)]}.

Авакумовић, В. — **1.** О Laplace-овим интегралима који се понашају као итерирана експоненцијална функција. I. *„Глас" Срп. акад. наука*, CLXXIII, *први разред 85*, стр. 183—196 (1936). {C. 6. 5. (iii)}.

Авакумовић, В. — Карамата, J. — **1.** Über einige Taubersche Sätze, derer Asymptotik von Exponentialcharakter ist. I. *Math. Zeit.* **41.** стр. 345–356 (1936). {C. 6. 5. (iii)}.

Bachmann, P. — **1.** Analytische Zahlentheorie. **II.** Leipzig 1894. {D. 3. [25. (i)]}.

Bernoulli Jacob. — **1.** Ars Conjectandi. Basel 1713. {C. 3. 2. (v) – (vi); C. 3. 3. (iv); C. 4. 2. (i) – (ii), C. 4. 3; D. 3. [29 (i)–(vi)]; D. 3. [30. (i)–(iv)]}.

Bernstein, V. — **1.** Leçons sur le progrès de la théorie des séries de Dirichlet. Paris 1932. {Стр. 1}.

Blaschke, W. — **1.** Aufgabe 506. *Archiv der Math. und Phys.* (3), **24** стр. 281 (1915). {B. 3. 1. (iv)}.

Bolzano, B. — **1.** Funktionenlehre. Erster Abschnitt, § 20, Prag 1930 (Издао K. Rychlík). {D. 1. [4. (i)–(ii)]; D. 1. [8. (i)]; D. 1. [9. (i)]}.

2. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Rezultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag 1817. — Види и Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, № 153. W. Engelmann, Leipzig 1905. {D. 1. [9 (i)]; D. 2. [21. (i)]}.

Bonnet, O. — **1.** *Mémoire couronné et Mémoire des savants étrangers de l' Acad. de Belgique.* **23,** стр. 8 (1885). {D. 2. [21. (iii)]}.

Borel, E. — **1.** Thése, Paris 1894, или *Ann. de l' Ec. nor.* (3), **12.** стр. 51 (1895). {D. 2. [19. (ii)–(iii)]; D. 2. [23. (vi)]; D. [24. (v)]}.

2. Leçons sur la Théorie des fonctions, II изд. Paris 1914. {D. 2. [19. (ii)–(iii)]; D. 2. [23. (vi)]; D. 2. [24. (v)]}.

Bromwich, T. J. IÁ. — **1.** *Proceedings Lond. Math. Soc.* (1), **6** {C. 2. 2. (i)–(iii); C. 2. 3. (i)}.

Bugaieff, N. W. — **1.** *Moskau Math. Sammel.* **XIV** (1889). {C. 2. 1. (ii)}.

Cahen, E. — **1.** Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur les fonctions analogues. *Dissertation. Ann. de l' Ec. Normale,* (3), **11,** стр. 75–164 (1894). {C. 5. 2. (iii); C. 5. 3. (i): C. 5. 4. (iv); C. 6. 1. (ii); C. 6. 5. (i)}.

Cantor, C. — 1. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller allgemeinen reellen Zahlen. *Crelle*, 77, (1874). {D. 1.[10. (i)]}.

2. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. — Gesammelte Abhandlungen, стр. 278 - 281, Berlin. {D. 1. [10 (ii)]}.

Cauchy, A. L. — 1. Resumé des leçons données á l'Ec. Polyt. sur le calcul infinitésimal. Paris 1827. {B. 3. 4. (iii)}.

2. Exercises d'analyse. T. **II.** Paris 1827. {C. 2. 1. (i) - (ii); C. 2. 2. (i) - (ii); C. 2. 3. (i); C. 3. 1. (i)}.

3. Cours d'analyse de l'Ec. royale polytechnique. I—irèe partie. Analyse algébrique. Paris 1821. (Остали делови нису изашли). {B. 5. 3. (i); C. 2. 1. (ii); D. 1. [9. (i) — (ii)]; D. 1. [11. (i) - (ii)]; D. 1. [13. (i), (iii)]; D. 2. [22. (ii)]; D. 2. [23. (v)]}.

4. *C. R. de l' Acad. de Paris*, **36**, стр. 454-459 (1353). {D. 2. [23. (v)]}.

Cesàro, E. - 1. *Bull. des sciences math.* (2), **14**, стр. 114 (1890). {D. 1. [11. (ii)]}.

Copson, E. T. - 1. Theory of Functions of a Complexe Variable. Oxford 1946. {Стр. 1; D. 3. [31. (iv)]}.

Darboux, G. - 1. Mémoire sur les fonctions discontinues. *Ann. de l' Ec. Normale*, (2), **IV**, стр. 57-112 (1875) i **VIII**, стр. 195-220 (1879). {B. 1. 3; D. 1. [8. (ii]; D. 2. [20. (ii)-iv)]}; D. 2. [21. (i)]; D. 2. [24. (iii), (v)]}.

2. *Journ. de Math.* (3), **II**, стр. 271 (1876). {C. 4. 1. (ii)}.

Dedekind, R. - 1. Ставови о неапсолутној конвергенцији редова. Види Lejeune Dirichlet {2, § 101}. {B. 5. 4. (i); C. 2. 6. (i)}.

De la Vallée-Poussin. Ch. J. — 1. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. *Ann. de la Soc. scientifique de Bruxelles*, **XX**, deo II, стр. 183 - 256 и 281-397 (1896). {C. 1. 1. (ix); C. 1. 2. (v)}.

2. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres inférieurs à une limite donnée. *Mémoire couronné et autres Mémoires publiés par l' Acad. Royale de Belgique*. **LIX**, стр. 1 - 74 (1899). {C. 1. 2. (iv)}.

3. *Journ. de Math.* (4), **8**, стр. 427-31 (1892). {D. 2. [22. (iv)]; D. 2. [24. (vi)]}.

4. Cours d'analyse infinitésimale. **I**, 3. изд. Louvain-Paris 1914, **II**, 2. изд. Paris-Louvain 1912. {D. 2. [22. (iv)]; D. 2. [24. (vi)]}.

Denjoy, A. — 1. Sur quelques propriétés des séries à termes positifs. *Bull. Soc. Math. France*, **40**, стр. 223—228 (1912). {C. 2. 4. (i)—(iii); C. 2. 5. (i), (iii)}.

Dini, U. — 1. Sulle serie a termini positive. *Ann. Univ. Tosc.* **9**. стр. 6 (1867). {C. 2. 5. (ii)}.

Dirichlet→Lejeune Dirichlet.

Doetsch, G. — 1. Theorie und Anwendung der Laplace Transformation. Berlin 1937. {D. 3. [25. (iii)]}.

Du Bois—Reymond, P. — 1. Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen. *Antrittsprogramm zur Übernahme der ord. Professur a. d. Univ. Freiburg in Baden*, 1870. Види и *Mat. Ann.* **35**, стр. 464 (1871). — Ostwald's Klassiker, № 185. {B. 5. 4. (i); C. 2. 6. (i)}.

2. Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen u. s. w. Стр. 21, и Über eine veränderte Form der Bedingung für die Integrierbarkeit der Funktionen. Стр. 259.—Оба рада у *Crelle J. (Borhardts J.)*, **79** (1874). {D. 2. [20. (iii)]}.

3. *Crelle*, **69**, стр. 78 (1868). {D. 2. [21. (iii,]}.

4. *Ac. Wiss. Berlin*, стр. 359—60 (1886). {D. 2. [23. (vi)]}.

5. *Crelle*, **100**, стр. 334—337 (1887). {D. 2. [23. (vi)]}.

Ermakoff. — 1. *Bull. Scienc. Mathém.* (1), **2**, стр. 250 (1871). {C. 2. 1. (iii)}.

Euler, L. — 1. *Commentarii Academiae Petropolitanae*, **6** (1738). {C. 3. 1. (i); C. 4. 2. (i); C. 4. 3}.

2. De numero memorabili.... *Acta Petropol.* **5** (1781) и *Novi commentarii Academiae Petr.* **14**, стр. 157 (1769). {B. 5. 8. (ii)}.

Fourier, M. — 1. Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822. — Oeuvres de Fourier, I, Paris 1888. {A. 3. 2. (i); D. 3. [29. (v)]}.

Franel, J. — 1. Sur la théorie des séries — *Math. Ann.* **52**, стр. 529—549 (1899). {C. 1. 2. (ii); C. 2. 1. (i)}.

Frobenius, G. — 1. *Crelle*, **89**, стр. 262—264 (1880). {C. 6. 2. (iii)}.

Gauss, F. — 1. Werke, **III**, *Göttingen Ges. Wiss.* (1886). {D. 3. [27. (i)]}.

2. Werke, **VIII**, *Göttingen Ges. Wiss.* (1900). {D. 3. [27. (i)]}.

Gibbs, J. W. — 1. *Nature*, **59.** стр. 606, London (1898/99). {D. 2. [23. (x)]}.

Hadamard, J. — **1.** Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. de la Soc. Math. de France*, **XXIV**, стр. 199—220 (1896). {C. 1. 1. (ix); C. 1. 2. (v)}.

Hardy, G. H. — **1.** *Messenger of Mat.* **48,** стр. 90 (1918). {B. 4. 5}.

2. Theorems connected with Maclaurin's test of convergence series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (1), **9**, стр. 126—144 (1911). {C. 2. 2. (ii)—(iii); C. 2. 3. (i)—(ii); C. 2. 6. (iii)}.

3. Theorems relating to the convergence and summability of slowly oscillating series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2, **8**, стр. 301–321 (1909). {C. 6. 2. (iii); D. 1. [11. (iii)]}.

4. A theorem concerning summable series. *Proceedings Cambridge Philos. Soc.* **20**, стр. 304—307 (1921). {C. 6. 2. (iii)}.

5. A course of pure mathematics. VII изд. Cambridge 1938. {B. 2. 2. (ii)}.

6. The ordinal relations of the terms of a convergent sequence. *Lond. Math. Soc. Proc.* (2), **8**, стр. 295 (1909). {D. 1. [8. (ii)]}.

7. Divergent series. Oxford 1949. {C. 6. 2. (iii); C. 7. 3; D. 1. [11. (iii)]}.

Hardy, G. H. and Littlewood, J. E. — **1.** A further Note on the Converse of Abel's Theorem. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **30**, стр. 23—37 (1929). {B. 3. 5. (iii); C. 6. 2. (iii)}.

Hausdorff — **1.** *Math. Zeit.* **26** (1927). {D. 2. [24. (iv)]}.

Heine, H. E. — **1.** *Crelle*, **74**, стр. 188 (1872). {D. 2. [19. (i)—(iii)]}.

2. *Crelle*, **71**, стр. 353 (1870). {D. 2. [24. (iii)]}.

Hobson, E. W. — **1.** The Theory of Functions of a real variable and the Theory of Fourier series. **I—II**, Cambridge 1927, III. изд. {A. 4. 3. (i); B. 1. 7. (i)}.

2. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **I**, стр. 382 (1904). {D. 2. [24. (ii)]}.

Hospital, G. E. A. marquis de l'. — **1.** Analyse de l'infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Paris 1696. {D. 1. [13. (iii)]}.

J e n s e n, J. L. W. V. — 1. Om en Sätning af Cauchy. *Tidsskrift for Mathematik.* (5), 2, стр. 81—84 (1884). {C. 2. 6. (ii); D. 1. [13. (i)—(iii)]}.

2. *C. R. de l'Acad. de Paris.* **106**, стр. 833-836 (1888). {D. 1. [13. (i)–(iii)]}.

J o r d a n, C. — 1. Cours d' analyse. I, III. изд. Paris 1909 {A. 1. 1. (i); A. 3. 2. (ii)}.

К а р а м а т а, Ј. – 1. О једној врсти граница сличних одређеним интегралима. *Докторска теза,* Београд 1926. {C. 1. 5. (iv)}.

2. Sur certaines limites rattachées aux intégrales de Stieltjes. *C. R. de l'Acad. de Paris,* **182**, стр. 833—836. (1926) {C. 1. 5. (iv)}.

3. О првом ставу средњих вредности одређених интеграла. *„Глас" Срп. акад. наука,* **CLIV** (77), стр. 119-144 (1933). {D. 2. [21. (ii)]}.

4. Види Авакумовић, В. 2. {C. 6. 5. (iii)}.

K n o p p, K. – 1. Funktionentheorie, I (1937), II (1931), Sammlung Göschen № 668 i 703. {Стр. 1}.

2. Theorie und Praxis der unendlichen Reihen. III. изд. Berlin 1932. {Стр. 1; C. 6. 2. (iii); D. 1. [13. (ii)]}.

3. Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. *Inaugural-Dissertation,* Berlin 1907. {C. 6. 3. (i)}.

4. Divergenzcharaktere gewisser Dirichletscher Reihen. *Acta mat.* **34**, стр. 165-204 (1909). {C. 6. 3. (i)}.

5. Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. II. део. Sammlung Göschen, № 878, Berlin-Leipzig 1928. {C. 6. 5. (iv)}.

K o s s a k. – 1. *Programmabhandlung des Weberschen Gymnasiums.* Berlin 1872. {D. 1. [4. (ii)]}.

K r o n e c k e r, L. – 1. Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. *C. R. de l'Acad. de Paris.* **103**, стр. 980-987 (1886). {C. 6. 2. (ii) – (iii)}.

L a n d a u, E. – 1. Über die Konvergenz einer Klasse von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. *Monatshefte für Math. und Phys.* **43**, стр. 8 – 28 (1907). {C. 6. 2. (i), (v)}.

2. Über einen Satz von Herrn Phragmén. *Acta mat.* **30**, стр. 195 – 201 (1905). {C. 7. 1. (i); C. 7. 2. (i); C. 7. 3. (ii)}.

3. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. **I-II.** Leipzig 1909. {D. 3. [25. (i)]}.

4. Ein Satz über Riemannsche Integrale. *Math. Zeit.* **2,** стр. 350—51 (1918). {D. 2. [24. (iv)]}.

Laplace, P. S. — **1.** Théorie analytique des probabilités. II. изд. Paris 1814. — Oeuvres complètes. **VII,** Paris 1886. {C. 5. 1. (ii)}.

Lebesgue, H. — **1.** Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. II. изд. Paris 1928. {Увод стр. III; A. 2. 2; A. 4. 3. (iii); D. 2. [20. (iii)]; D. 2. [24. (ii), (iv)]}.

2. *Ann. di Mat.* (3—A), **7.** стр. 27 (1902). {A. 4. 3. (ii)}.

3. Intégrales, Longueurs, Aieres. *Thèse.* (Faculté des Sciences de Paris), Milan 1902. {D. 2. [20. (iii)]; D. 2. [24. (iv)]}.

4. *Bull. Soc. Math. de France,* **36,** стр. 12 (1908). {D. 2. [24. (vi)]}.

Legendre, A. M. — **1.** Exercises de calcul intégral. **I,** Paris 1811. {C. 3. 3. (iv)}.

Lejeune Dirichlet, P. G. — **1.** Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres. *Crelle,* **19,** стр. 326—28 (1839). — Werke, **I,** стр. 415—17 (1889). — Oeuvres complètes, **I** и **II.** {C. 5. 1. (i); C. 7. 1. (iii); C. 7. 2. (i)]}.

2. Vorlesungen über Zahlentheorie III. изд. 1879. {B. 5. 4. (i); C. 2. 6. (i), (iv)}.

3. *Crelle,* **4,** стр. 157 (1829). — Werke **I,** стр. 128. — Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Издао G. Arendt 1904, Braunschweig. {D. 2. [17. (iii)]; D. 2. [19. (i)—(ii)]}.

Lipschitz, R. — **1.** *Crelle,* **63,** стр. 308 (1864). {A. 4. 3. (i); A. 4. 4. (iii)}.

Littlewood, J. E. — **1.** Note on the convergence of series with positive terms. *Mess. of Math.* (2), **39.** {C. 2. 3. (i)—(ii); C. 2. 4. (i)—(iii); C. 2. 5. (i), (iii)}.

2. The converse of Abel's theorem on power series. *Proceedings Lond. Mat. Soc.* (2), **9,** стр. 434—48 (1911). {B. 3. 5. (iii); C, 6. 2. (iii)}.

Лузин, Н. Н. — **1.** Теория функций действительного переменного. Москва 1948 {Стр. 1}.

Maclaurin. — **1.** Treatise on fluxions. Edinbourgh 1742. {C. 2. 1. (i); C. 3. 1. (i); C. 4. 2. (i)}.

Nielsen, N. — **1.** Funktionentheorie. Leipzig—Berlin 1911. {Стр. 1; D. 3. [29. (ii)]; D. 3. [31. (iv)]; D. 3. [33]}.

2. Traité élementaire des nombres de Bernoulli. Paris 1923. {C. 3. 1. (ii); D. 3. [29. (ii)]}.

3. Handbuch der Theorie der Gamma-Funktion. Leipzig 1906. {D. 3. [31. (iv)]}.

Nörlund, N. E. — 1. Sur la „somme“ d'une fonction. *Mémorial*, 24, Paris 1927. {D. 3. [29. (ii)]}.

2. Differenzenrechnung. Berlin 1924. {D. 3. [29. (ii)]}.

Osgood, W. F. — 1. On the nonuniform convergence. *Amer. Journ. of Math.* **XIX**, стр. 155—190 (1897). {D. 2. [24. (iv)]}.

Perron, O. — 1. Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. *Crelle*, **134**, (1908). {C. 5. 2. (iii)]}.

Петровић, М. — 1. Théorème sur les intégrales curvilignes. *Publ. Math. de l'Univ. Beograd.* **II**, стр. 45—59 (1933). {D. 3. [27. (i)]}.

Phragmén, E. — 1. Sur un théorème de Dirichlet. *Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandligar*, Stockholm, 49, стр. 199—206 (1892). {C. 7. 1. (i), (iii); C 7. 2. (i)}.

Picard, E. — 1. Traité d'analyse. 1, III. изд. Paris 1922. {A. 3. 2. (i)}.

Pidoll, M. von. — 1. Bemerkung über Vertauschung von Limes und Integral. *Math. Zeit.* 8, стр. 299—302. {D. 2. [24. (vi)]}.

Pincherle, S. — 1. Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti. *Atti del* IV *Congr. dei Mat. Roma*, 2, (1908). {C. 5. 3. (i)}.

2. Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. Weierstrass. *Giorn. di Mat.* 18. стр. 178—254, 317—357 (1880). {D. 1. [4. (ii)]}.

Poincaré, H. — 1. Sur les intégrales irrégulières des equations lineaires. *Acta Mat.* 8, стр. 295—344 (1886). {D. 3. [33]}.

Pólya — Szegö — 1. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I-II, Berlin 1925. {C. 1. 5. (iv); D. 2. [24. (vi)]; D. 3. [28]}.

Riemann, B. — 1. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. *Abhandlungen der Kön. Ges. Wiss.* **XIII** (1854). — Gesammelte Werke, Leipzig 1892, II. изд. № XII, стр. 227—265. {B. 1. 1. (i); D. 2. [20. (i)]}.

2. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. — *Monatsberichte Berl. Akad.* November 1859. — Gesammelte Werke, № VII, стр. 145—153. {D. 3. [32. (ii), (iv)]}.

Riesz, F. — **1.** Sur l'existence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent. — *Acta acad. sci. Szeged,* **V**, стр. 208—221 (1932). {A. 2. 2.}.

Riesz, M. — **1.** Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen. *Acta mat.* **40.** стр. 349—361 (1916). {C. 6. 2. (v)}.

Rogosinski, W. — **1.** Fouriersche Reihen Sammlung Göschen № 1022. Berlin—Leipzig 1930. {D. 2. [24. (iv)]}.

Schlömilch, O. — **1.** Compedium der höheren Analysis. **I—II,** Braunschweig 1874. {C. 4. 1. (ii); D. 3. [29. (ii)]}.

2. *Zeitschrift für Math. und Phys.* **18,** стр. 425 (1873). {C. 2. 1. (iii)}.

3. *Zeitschrift für Math. und Phys.* **23,** стр. 135 (1887). {D. 3. [32. (iii)]; D. 3. [32. (iii)]}.

Schnee, W. — **1.** Über Dirichletsche Reihen. *Rend. di Palermo,* **27,** (1909). {C. 7. 3. (i)}.

Seidel, Ph. L. — **1.** *Abhandlungen der Münchener Akademie* 15_2, стр. 379—93 (1848). — Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. № 116, стр. 35—45 (1900). {D. 2. [23. (v)]}.

Sidon, S. — Szász, O. — **1.** Lösung zur Aufgabe 506. *Archiv der Math. und. Phys.* (3), **26,** стр. 67—68 (1917) и (3), **27,** стр. 86 (1918). {B. 3. 1. (iv)}.

Смирнов В. — **1.** Курс высшей математике. v. Москва 1947. {Стр. 1; B. 1. 7. (i)}.

Stieltjes, T. J. — **1.** Recherhes sur les fractions continues. *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse,* **VIII,** стр. J. 1—122 (1894). {Увод стр. III}.

2. *Ann. de l' Ec. Normale,* (3), **3,** стр. 201—258 (1886). {D. 3. [33]}.

Stirling, J. — **1.** Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitatum. London 1730. {D. 3. [31. (iii)]}.

Stokes, G. G. — **1.** *Transactions of the Cambridge phil. Society,* 8_5, стр. 533—83 (1848). {D. 2. [23. (v)]}.

Stolz, O. — **1.** *Zeitschrift für Math. und Phys.* **20,** стр. 369 (1875). {C. 6. 1. (ii); C. 6. 4. (i); C. 6. 5. (i), (iv)}.

2. *Zeitschrift für Math. und. Phys.* **29**, стр. 127 (1884). {C. 6. 1. (ii); C. 6. 4. (i); C. 6. 5. (i), (iv)}.

3. *Math. Ann.* **18**, {D. 1. [4. (ii)]}.

Sylvester, J. J. — **1.** On arithmetical series. *Messenger of math.* (2), **21**, стр. 9 (1891). {C. 1. 2. (v)}.

Szász, O. — Види Sidon, S. {B. 3. 1. (iv)}.

Tauber, A. — **1.** Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. *Monatshefte für Math. und Phys.* **8**, стр. 273—277 (1897). {B. 3. 5. (iii); C. 6. 2. (i), (iii), (v); D. 2. [23. (x)]}.

Taylor Brok. — **1.** Methodus incrementorum directa et inversa. London 1715. {C. 3. 3. (iv); C. 4. 1. (i)—(ii)}.

Titchmarsh, E. C. — **1.** The Zeta-function of Riemann. *Cambridge Tracts in mathematics and mathem. physics.* № 26, Cambridge 1930. {D. 3. [32. (v)]}.

2. The Theory of Functions. Oxford University Press. 1947. {D. 3. [32. (v)]}.

Toeplitz, O. — **1.** Über lineare Mittelbildungen. *Prace mat. fiz.* **22**, стр. 113—119 (1911). {D. 1. [13. (ii)]}.

Valiron, M. G. — **1.** Théorie générale des séries de Dirichlet. *Mémorial*, **XVII**, Paris 1926. {Стр. 1}.

Vitali, G. — **1.** *Rrend. del Circolo Matematico di Palermo*, **23**, стр. 137—155 (1907). {D. 2. [24. (vi)]}.

Watson, G. N. — **1.** *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **29**, стр. 293—308 (1929). {D. 3. [31. (iii)]}.

Weierstrass, K. — Види Kossak {1}, Pincherle {2}. {D. 1. [4. (i)—(ii)]; D. 1. [8. (i)]; D. 1. [9. (i)]; D. 2. [16. (ii)—(iii)]; D. 2. [19. (ii)]; D. 2. [23. (iv), (v), (vii)]; D. 2. [24. (iii)]}.

Wendelin, H. — **1.** Zwei Konvergenzkriterien für reelle Zahlenfolgen. *Publ. math. de l'Univ. Beograd*, **II**, стр. 23—31 (1933). {D. 1. [8. (ii)]; D. 1. [9. (ii)]}.

Whittacker — Watson. — **1.** A course of Modern Analysis. Cambridge 1927. {D. 3. [31. (iv)]; D. 3. [32. (v)]; D. 3. [33]}.

Cantor, C. — **1.** Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller allgemeinen reellen Zahlen. *Crelle*, 77, (1874). {D. 1.[10. (i)]}.

2. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. — Gesammelte Abhandlungen, стр. 278-281, Berlin. {D. 1. [10 (ii)]}.

Cauchy, A. L. — **1.** Resumé des leçons données á l'Ec. Polyt. sur le calcul infinitésimal. Paris 1827. {B. 3. 4. (iii)}.

2. Exercises d'analyse. T. **II.** Paris 1827. {C. 2. 1. (i) - (ii); C. 2. 2. (i) - (ii); C. 2. 3. (i); C. 3. 1. (i)}.

3. Cours d'analyse de l'Ec. royale polytechnique. I-irèe partie. Analyse algébrique. Paris 1821. (Остали делови нису изашли). {B. 5. 3. (i); C. 2. 1. (ii); D. 1. [9. (i)-(ii)]; D. 1. [11. (i) - (ii)]; D. 1. [13. (i), (iii)]; D. 2. [22. (ii)]; D. 2. [23. (v)]}.

4. *C. R. de l'Acad. de Paris*, **36**, стр. 454-459 (1353). {D. 2. [23. (v)]}.

Cesàro, E. - **1.** *Bull. des sciences math.* (2), **14**, стр. 114 (1890). {D. 1. [11. (ii)]}.

Copson, E. T. - **1.** Theory of Functions of a Complexe Variable. Oxford 1946. {Стр. 1; D. 3. [31. (iv)]}.

Darboux, G. - **1.** Mémoire sur les fonctions discontinues. *Ann. de l'Ec. Normale*, (2), **IV**, стр. 57-112 (1875) i **VIII**, стр. 195-220 (1879). {B. 1. 3; D. 1. [8. (ii]; D. 2. [20. (ii)-iv)]}; D. 2. [21. (i)]; D. 2. [24. (iii), (v)]}.

2. *Journ. de Math.* (3), **II**, стр. 271 (1876). {C. 4. 1. (ii)}.

Dedekind, R. - **1.** Ставови о неапсолутној конвергенцији редова. Види Lejeune Dirichlet {2, § 101}. {B. 5. 4. (i); C. 2. 6. (i)}.

De la Vallée-Poussin. Ch. J. — **1.** Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. *Ann. de la Soc. scientifique de Bruxelles*, **XX**, deo II, стр. 183 - 256 и 281-397 (1896). {C. 1. 1. (ix); C. 1. 2. (v)}.

2. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres inférieurs à une limite donnée. *Mémoire couronné et autres Mémoires publiés par l'Acad. Royale de Belgique.* **LIX**, стр. 1 - 74 (1899). {C. 1. 2. (iv)}.

3. *Journ. de Math.* (4), **8**, стр. 427-31 (1892). {D. 2. [22. (iv)]; D. 2. [24. (vi)]}.

4. Cours d'analyse infinitésimale. **I**, 3. изд. Louvain-Paris 1914, **II**, 2. изд. Paris-Louvain 1912. {D. 2. [22. (iv)]; D. 2. [24.(vi)]}.

D e n j o y, A. — 1. Sur quelques propriétés des séries à termes positifs. *Bull. Soc. Math. France*, **40**, стр. 223—228 (1912). {C. 2. 4. (i)—(iii); C. 2. 5. (i), (iii)}.

D i n i, U. — **1.** Sulle serie a termini positive. *Ann. Univ. Tosc.* **9.** стр. 6 (1867). {C. 2. 5. (ii)}.

D i r i c h l e t→L e j e u n e D i r i c h l e t.

D o e t s c h, G. — **1.** Theorie und Anwendung der Laplace Transformation. Berlin 1937. {D. 3. [25. (iii)]}.

D u B o i s — R e y m o n d, P. — **1.** Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen. *Antrittsprogramm zur Übernahme der ord. Professur a. d. Univ. Freiburg in Baden,* 1870. Види и *Mat. Ann.* **35,** стр. 464 (1871). — Ostwald's Klassiker, № 185. {B. 5. 4. (i); C. 2. 6. (i)}.

2. Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen u. s. w. Стр. 21, и Über eine veränderte Form der Bedingung für die Integrierbarkeit der Funktionen. Стр. 259. — Оба рада у *Crelle J. (Borhardts J.)*, **79** (1874). {D. 2. [20. (iii)]}.

3. *Crelle*, **69,** стр. 78 (1868). {D. 2. [21. (iii)]}.

4. *Ac. Wiss. Berlin*, стр. 359—60 (1886). {D. 2. [23. (vi)]}.

5. *Crelle*, **100,** стр. 334—337 (1881). {D. 2. [23. (vi)]}.

E r m a k o f f. — **1.** *Bull. Scienc. Mathém.* (1), **2,** стр. 250 (1871). {C. 2. 1. (iii)}.

E u l e r, L. — **1.** *Commentarii Academiae Petropolitanae*, **6** (1738). {C. 3. 1. (i); C. 4. 2. (i): C. 4. 3}.

2. De numero memorabili... *Acta Petropol.* **5** (1781) и *Novi commentarii Academiae Petr.* **14,** стр. 157 (1769). {B. 5. 8. (ii)}.

F o u r i e r, M. — **1.** Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822. — Oeuvres de Fourier, **I**, Paris 1888. {A. 3. 2. (i); D. 3. [29. (v)]}.

F r a n e l, J. — **1.** Sur la théorie des séries — *Math. Ann.* **52,** стр. 529—549 (1899). {C. 1. 2. (ii); C. 2. 1. (i)}.

F r o b e n i u s, G. — **1.** *Crelle*, **89,** стр. 262—264 (1880). {C. 6. 2. (iii)}.

G a u s s, F. — **1.** Werke, **III,** *Göttingen Ges. Wiss.* (1886). {D. 3. [27. (i)]}.

2. Werke, **VIII,** *Göttingen Ges. Wiss.* (1900). {D. 3. [27. (i)]}.

G i b b s, J. W. — **1.** *Nature,* **59.** стр. 606, London (1898/99). {D. 2. [23. (x)]}.

H a d a m a r d, J. — **1.** Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. de la Soc. Math. de France,* **XXIV**, стр. 199—220 (1896). {C. 1. 1. (ix); C. 1. 2. (v)}.

H a r d y, G. H. — **1.** *Messenger of Mat.* **48,** стр. 90 (1918). {B. 4. 5}.

2. Theorems connected with Maclaurin's test of convergence series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (1), 9, стр. 126—144 (1911). {C. 2. 2. (ii)—(iii); C. 2. 3. (i)—(ii); C. 2. 6. (iii)}.

3. Theorems relating to the convergence and summability of slowly oscillating series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), 8, стр. 301—321 (1909). {C. 6. 2. (iii); D. 1. [11. (iii)]}.

4. A theorem concerning summable series. *Proceedings Cambridge Philos. Soc.* **20**, стр. 304—307 (1921). {C. 6. 2. (iii)}.

5. A course of pure mathematics. VII изд. Cambridge 1938. {B. 2. 2. (ii)}.

6. The ordinal relations of the terms of a convergent sequence. *Lond. Math. Soc. Proc.* (2), **8**, стр. 295 (1909). {D. 1. [8. (ii)]}.

7. Divergent series. Oxford 1949. {C. 6. 2. (iii); C. 7. 3; D. 1. [11. (iii)]}.

H a r d y, G. H. and L i t t l e w o o d, J. E. — **1.** A further Note on the Converse of Abel's Theorem. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **30**, стр. 23—37 (1929). {B. 3. 5. (iii); C. 6. 2. (iii)}.

H a u s d o r f f — **1.** *Math. Zeit.* **26** (1927). {D. 2. [24. (iv)]}.

H e i n e, H. E. — **1.** *Crelle*, **74**, стр. 188 (1872). {D. 2. [19. (i)—(iii)]}.

2. *Crelle*, **71**, стр. 353 (1870). {D. 2. [21. (iii)]}.

H o b s o n, E. W. — **1.** The Theory of Functions of a real variable and the Theory of Fourier series. **I—II**, Cambridge 1927, III. изд. {A. 4. 3. (i); B. 1. 7. (i)}.

2. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **I**, стр. 382 (1904). {D. 2. [24. (ii)]}.

H o s p i t a l, G. E. A. marquis de l'. — **1.** Analyse de l'infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Paris 1696. {D. 1. [13. (iii)]}.

Jensen, J. L. W. V. — **1.** Om en Sätning af Cauchy. *Tidsskrift for Mathematik.* (5), **2**, стр. 81—84 (1884). {C. 2. 6. (ii); D. 1. [13. (i)—(iii)]}.

2. *C. R. de l'Acad. de Paris.* **106,** стр. 833-836 (1888). {D. 1. [13. (i)—(iii)]}.

Jordan, C. — **1.** Cours d' analyse. **I,** III. изд. Paris 1909 {A. 1. 1. (i); A. 3. 2. (ii)}.

Карамата, J. – **1.** О jедноj врсти граница сличних одређеним интегралима. *Докторска теза,* Београд 1926. {C. 1. 5. (iv)}.

2. Sur certaines limites rattachées aux intégrales de Stieltjes. *C. R. de l'Acad. de Paris,* **182,** стр. 833—836. (1926) {C. 1. 5. (iv)}.

3. О првом ставу средњих вредности одређених интеграла. *„Глас" Срп. акад. наука,* **CLIV** (77), стр. 119-144 (1933). {D. 2. [21. (ii)]}.

4. Види Авакумовић, В. **2.** {C. 6. 5. (iii)}.

Knopp, K. – **1.** Funktionentheorie, **I** (1937), **II** (1931), Sammlung Göschen № 668 i 703. {Стр. 1}.

2. Theorie und Praxis der unendlichen Reihen. III. изд. Berlin 1932. {Стр. 1; C. 6. 2. (iii); D. 1. [13. (ii)]}.

3. Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. *Inaugural-Dissertation,* Berlin 1907. {C. 6. 3. (i)}.

4. Divergenzcharaktere gewisser Dirichletscher Reihen. *Acta mat.* **34,** стр. 165-204 (1909). {C. 6. 3. (i)}.

5. Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. II. део. Sammlung Göschen, № 878, Berlin-Leipzig 1928. {C. 6. 5. (iv)}.

Kossak. – **1.** *Programmabhandlung des Weberschen Gymnasiums.* Berlin 1872. {D. 1. [4. (ii)]}.

Kronecker, L. – **1.** Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. *C. R. de l'Acad. de Paris.* **103,** стр. 980-987 (1886). {C. 6. 2. (ii) – (iii)}.

Landau, E. – **1.** Über die Konvergenz einer Klasse von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. *Monatshefte für Math. und Phys.* **43,** стр. 8 – 28 (1907). {C. 6. 2. (i), (v)}.

2. Über einen Satz von Herrn Phragmén. *Acta mat.* **30,** стр. 195—201 (1905). {C. 7. 1. (i); C. 7. 2. (i); C. 7. 3. (ii)}.

3. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. **I-II.** Leipzig 1909. {D. 3. [25. (i)]}.

4. Ein Satz über Riemannsche Integrale. *Math. Zeit.* **2**, стр. 350—51 (1918). {D. 2. [24. (iv)]}.

Laplace, P. S. — **1.** Théorie analytique des probabilités. II. изд. Paris 1814. — Oeuvres complètes. **VII**, Paris 1886. {C. 5. 1. (ii)}.

Lebesgue, H. — **1.** Leçons sur l' intégration et la recherche des fonctions primitives. II. изд. Paris 1928. {Увод стр. III; A. 2. 2; A. 4. 3. (iii); D. 2. [20. (iii)]; D. 2. [24. (ii), (iv)]}.

2. *Ann. di Mat.* (3—A), **7.** стр. 27 (1902). {A. 4. 3. (ii)}.

3. Intégrales, Longueurs, Aieres. *Thèse.* (Faculté des Sciences de Paris), Milan 1902. {D. 2. [20. (iii)]; D. 2. [24. (iv)]}.

4. *Bull. Soc. Math. de France*, **36**, стр. 12 (1908). {D. 2. [24. (vi)]}.

Legendre, A. M. — **1.** Exercises de calcul intégral. **I**, Paris 1811. {C. 3. 3. (iv)}.

Lejeune Dirichlet, P. G. — **1.** Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres. *Crelle*, **19**, стр. 326—28 (1839). — Werke, **I**, стр. 415—17 (1889). — Oeuvres complètes, **I** и **II**. {C. 5. 1. (i); C. 7. 1. (iii); C. 7. 2. (i)]}.

2. Vorlesungen über Zahlentheorie III. изд. 1879. {B. 5. 4. (i); C. 2. 6. (i), (iv)}.

3. *Crelle*, **4**, стр. 157 (1829). — Werke **I**, стр. 128. — Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Издао G. Arendt 1904, Braunschweig. {D. 2. [17. (iii)]; D. 2. [19. (i)—(ii)]}.

Lipschitz, R. — **1.** *Crelle*, **63**, стр. 308 (1864). {A. 4. 3. (i); A. 4. 4. (iii)}.

Littlewood, J. E. — **1.** Note on the convergence of series with positive terms. *Mess. of Math.* (2), **39**. {C. 2. 3. (i)—(ii); C. 2. 4. (i)—(iii); C. 2. 5. (i), (iii)}.

2. The converse of Abel's theorem on power series. *Proceedings Lond. Mat. Soc.* (2), **9**, стр. 434—48 (1911). {B. 3. 5. (iii); C, 6. 2. (iii)}.

Лузин, Н. Н. — **1.** Теория функций действительного переменного. Москва 1948 {Стр. 1}.

Maclaurin. — **1.** Treatise on fluxions. Edinbourgh 1742. {C. 2. 1. (i); C. 3. 1. (i); C. 4. 2. (i)}.

Nielsen, N. — **1.** Funktionentheorie. Leipzig—Berlin 1911. {Стр. 1; D. 3. [29. (ii)]; D. 3. [31. (iv)]; D. 3. [33]}.

2. Traité élementaire des nombres de Bernoulli. Paris 1923. {C. 3. 1. (ii); D. 3. [29. (ii)]}.

3. Handbuch der Theorie der Gamma-Funktion. Leipzig 1906. {D. 3. [31. (iv)]}.

Nörlund, N. E. — 1. Sur la „somme" d'une fonction. *Mémorial*, 24, Paris 1927. {D. 3. [29. (ii)]}.

2. Differenzenrechnung. Berlin 1924. {D. 3. [29. (ii)]}.

Osgood, W. F. — 1. On the nonuniform convergence. *Amer. Journ. of Math.* **XIX**, стр. 155—190 (1897). {D. 2. [24. (iv)]}.

Perron, O. — 1. Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. *Crelle*, **134**, (1908). {C. 5. 2. (iii)]}.

Петровић, M. — 1. Théorème sur les intégrales curvilignes. *Publ. Math. de l'Univ. Beograd.* **II**, стр. 45—59 (1933). {D. 3. [27. (i)]}.

Phragmén, E. — 1. Sur un théorème de Dirichlet. *Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandligar*, Stockholm, **49**, стр. 199—206 (1892). {C. 7. 1. (i), (iii); C 7. 2. (i)}.

Picard, E. — 1. Traité d'analyse. 1, III. изд. Paris 1922. {A. 3. 2. (i)}.

Pidoll, M. von. — 1. Bemerkung über Vertauschung von Limes und Integral. *Math. Zeit.* 8, стр. 299—302. {D. 2. [24. (vi)]}.

Pincherle, S. — 1. Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti. *Atti del* IV *Congr. dei Mat. Roma*, **2**, (1908). {C. 5. 3. (i)}.

2. Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. Weierstrass. *Giorn. di Mat.* **18.** стр. 178—254, 317—357 (1880). {D. 1. [4. (ii)]}.

Poincaré, H. — 1. Sur les intégrales irrégulières des equations lineaires. *Acta Mat.* 8, стр. 295—344 (1886). {D. 3. [33]}.

Pólya — Szegö — 1. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I-II, Berlin 1925. {C. 1. 5. (iv); D. 2. [24. (vi)]; D. 3. [28]}.

Riemann, B. — 1. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. *Abhandlungen der Kön. Ges. Wiss.* **XIII** (1854). — Gesammelte Werke, Leipzig 1892, II. изд. № XII, стр. 227—265. {B. 1. 1. (i); D. 2. [20. (i)]}.

2. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. — *Monatsberichte Berl. Akad.* November 1859. — Gesammelte Werke, № VII, стр. 145—153. {D. 3. [32. (ii), (iv)]}.

R i e s z, F. — **1.** Sur l'existence de la dérivée des fonctions monotones et sur quelques problèmes qui s'y rattachent. — *Acta acad. sci. Szeged,* **V**, стр. 208—221 (1932). {A. 2. 2.}.

R i e s z, M. — **1.** Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen. *Acta mat.* **40.** стр. 349—361 (1916). {C. 6. 2. (v)}.

R o g o s i n s k i, W. — **1.** Fouriersche Reihen Sammlung Göschen № 1022. Berlin—Leipzig 1930. {D. 2. [24. (iv)]}.

S c h l ö m i l c h, O. — **1.** Compedium der höheren Analysis. **I—II,** Braunschweig 1874. {C. 4. 1. (ii); D. 3. [29. (ii)]}.

2. *Zeitschrift für Math. und Phys.* **18,** стр. 425 (1873). {C. 2. 1. (iii)}.

3. *Zeitschrift für Math. und Phys.* **23,** стр. 135 (1887). {D. 3. [32. (iii)]; D. 3. [32. (iii)]}.

S c h n e e, W. — **1.** Über Dirichletsche Reihen. *Rend. di Palermo,* **27,** (1909). {C. 7. 3. (i)}.

S e i d e l, Ph. L. — **1.** *Abhandlungen der Münchener Akademie* 15_2, стр. 379—93 (1848). — Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. № 116, стр. 35—45 (1900). {D. 2. [23. (v)]}.

S i d o n, S. — S z á s z, O. — **1.** Lösung zur Aufgabe 506. *Archiv der Math. und. Phys.* (3), **26,** стр. 67—68 (1917) и (3), **27,** стр. 86 (1918). {B. 3. 1. (iv)}.

С м и р н о в В. — **1.** Курс высшей математике. v. Москва 1947. {Стр. 1; B. 1. 7. (i)}.

S t i e l t j e s, T. J. — **1.** Recherhes sur les fractions continues. *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse,* **VIII,** стр. J. 1—122 (1894). {Увод стр. III}.

2. *Ann. de l' Ec. Normale,* (3), **3,** стр. 201—258 (1886). {D. 3. [33]}.

S t i r l i n g, J. — **1.** Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitatum. London 1730. {D. 3. [31. (iii)]}.

S t o k e s, G. G. — **1.** *Transactions of the Cambridge phil. Society,* 8_5, стр. 533—83 (1848). {D. 2. [23. (v)]}.

S t o l z, O. — **1.** *Zeitschrift für Math. und Phys.* **20,** стр. 369 (1875). {C. 6. 1. (ii); C. 6. 4. (i); C. 6. 5. (i), (iv)}.

2. *Zeitschrift für Math. und. Phys.* **29**, стр. 127 (1884). {C. 6. 1. (ii); C. 6. 4. (i); C. 6. 5. (i), (iv)}.

3. *Math. Ann.* **18**, {D. 1. [4. (ii)]}.

Sylvester, J. J. — **1.** On arithmetical series. *Messenger of math.* (2), **21**, стр. 9 (1891). {C. 1. 2. (v)}.

Szász, O. — Види Sidon, S. {B. 3. 1. (iv)}.

Tauber, A. — **1.** Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. *Monatshefte für Math. und Phys.* **8**, стр. 273—277 (1897). {B. 3. 5. (iii); C. 6. 2. (i), (iii), (v); D. 2. [23. (x)]}.

Taylor Brok. — **1.** Methodus incrementorum directa et inversa. London 1715. {C. 3. 3. (iv); C. 4. 1. (i)–(ii)}.

Titchmarsh, E. C. — **1.** The Zeta-function of Riemann. *Cambridge Tracts in mathematics and mathem. physics.* № 26, Cambridge 1930. {D. 3. [32. (v)]}.

2. The Theory of Functions. Oxford University Press. 1947. {D. 3. [32. (v)]}.

Toeplitz, O. — **1.** Über lineare Mittelbildungen. *Prace mat. fiz.* **22**, стр. 113—119 (1911). {D. 1. [13. (ii)]}.

Valiron, M. G. — **1.** Théorie générale des séries de Dirichlet. *Mémorial*, **XVII**, Paris 1926. {Стр. 1}.

Vitali, G. — **1.** *Rrend. del Circolo Matematico di Palermo*, **23**, стр. 137—155 (1907). {D. 2. [24. (vi)]}.

Watson, G. N. — **1.** *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **29**, стр. 293–308 (1929). {D. 3. [31. (iii)]}.

Weierstrass, K. — Види Kossak {1}, Pincherle {2}. {D. 1. [4. (i)—(ii)]; D. 1. [8. (i)]; D. 1. [9. (i)]; D. 2. [16. (ii)—(iii)]; D. 2. [19. (ii)]; D. 2. [23. (iv), (v), (vii)]; D. 2. [24. (iii)]}.

Wendelin, H. — **1.** Zwei Konvergenzkriterien für reelle Zahlenfolgen. *Publ. math. de l'Univ. Beograd*, **II**, стр. 23—31 (1933). {D. 1. [8. (ii)]; D. 1. [9. (ii)]}.

Whittacker — Watson. — **1.** A course of Modern Analysis. Cambridge 1927. {D. 3. [31. (iv)]; D. 3. [32. (v)]; D. 3. [33]}.