ALEKSANDAR KRON

ELEMENTARNA TEORIJA SKUPOVA

MATEMATIČKI INSTITUT
BEOGRAD
1992

Recenzenti:
Dr Milan Božić
Dr Žarko Mijajlović

Primljeno za štampu na sednici Naučnog veća Matematičkog instituta 27. 5. 1992 godine.

Tehnički urednik: Dr Dragan Blagojević

Obrada teksta na računaru: autor

Štampa: Studio PLUS

Štampanje završeno jula 1992. godine

Klasifikacija američkog matematičkog društva
AMS Mathematics Subject Classification 03E

Univerzalna decimalna klasifikacija 510.22

CIP – Katalogizacija u publikaciji

Narodna biblioteka Srbije, Beograd

510.22

KRON, Aleksandar

Elementarna teorija skupova / Aleksandar Kron. – Beograd : Matematički institut, 1992 (Beograd, Studio PLUS). – 147 str. ; 24 cm

Tiraž 1000. Bibliografija: str. 144. – Registar.

ISBN 86-80593-11-7

a) Teorija skupova

6515468

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Opšte je mesto da je teorija skupova osnovna matematička teorija zato što se u njoj sve druge matematičke teorije mogu izložiti; ona ima pojmovni aparat pomoću kojeg se ostali matematički i logički pojmovi mogu definisati. Iako se o ovom stavu uopšte uzev može raspravljati, istina je da se danas u izlaganju ostalih matematičkih teorija upotreba pojmova teorije skupova teško može izbeći.

U ovoj knjizi izložio sam elementarnu teoriju skupova - onoliko koliko se to može učiniti bez korišćenja rezultata matematičke logike. Teoreme bez dokaza služe kao zadaci.

Rukopis ove knjige čitali su moje kolege Prof. Milan Božić i Prof. Dušan Adamović.

Milan Božić je imao nekoliko sugestija o redosledu izlaganja materijala, o tome šta bi trebalo uneti a šta izbaciti. Osim toga, ukazao mi je na neke terminološke propuste, pa mu ovom prilikom toplo zahvaljujem.

Posebnu zahvalnost dugujem Dušanu Adamoviću. On je rukopis čitao red po red i reč po reč. Često je imao sugestije o tome kako da se neki dokaz skrati, neki drugi opet učini podrobnijim da bi bio jasniji i bolji. Greške koje se u ovoj knjizi eventualno mogu naći treba pripisati isključivo meni; njih ili Dušan Adamović nije otkrio ili sam ih naknadno napravio.

U Beogradu, 30. 11. 1991. Pisac

Rukopis ove knjige je, u svojstvu recenzenta, čitao i Prof. Žarko Mijajlović. Njemu sam zahvalan za nekoliko sugestija o izlaganju matematičke logike. Osim toga, on mi je ukazao i na neke manje nepreciznosti.

28.3.1992.

U svojstvu urednika Matematičkog instituta rukopis ove knjige je čitao i Dr Dragan Blagojević. Njemu zahvaljujem što mi je ukazao na teoremu da svaka knjiga sadrži beskonačno mnogo grešaka, jer se u svakom čitanju otkriva bar jedna nova.

26.6.1992

1. PARADOKSI

Temelje teorije skupova su u XIX veku postavili matematičari koji su se bavili zasnivanjem matematičke analize. Tome su najviše doprineli Bernard Bolcano (Bernard Bolzano 1781-1848), Pol David Gistav Dibua-Rejmon (Paul David Gustave Du Bois-Reymond 1831-1889) i Rihard Dedekind (Richard Dedekind 1831-1916). Oni su proučavali "konkretne" skupove matematičkih objekata, kao što su skupovi brojeva ili skupovi funkcija. Tek je Georg Kantor (Georg Cantor 1845-1918) počeo da proučava skupove sa proizvoljnim elementima. On je 1871 - 1883 u nizu članaka izgradio teoriju kardinalnih i ordinalnih brojeva, kao i teoriju dobro uređenih skupova, i zato se smatra osnivačem teorije skupova.

U početku izgrađivanja svoje teorije Kantor nije imao eksplicitno iskazane aksiome. Ispitivanje njegovih dokaza pokazuje da se sve njegove teoreme mogu dokazati samo pomoću tri aksiome: aksiome ekstenzionalnosti za skupove, aksiome izdvajanja (Aussonderungsaxiom, prema *aussondern* - odvojiti, izdvojiti) i aksiome izbora.

Prema aksiomi ekstenzionalnosti, dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente.

Prema aksiomi izdvajanja, za svako svojstvo postoji skup koji čine tačno oni objekti koje to svojstvo imaju.

Aksiomu izbora nećemo ovde navoditi, jer se ona ne koristi u izvođenju paradoksa Kantorove teorije skupova.

Interesovanje za teoriju skupova poraslo je među matematičarima krajem XIX i početkom XX veka kada su otkriveni paradoksi u Kantorovoj teoriji. Izvor svih ovih paradoksa je bila Kantorova aksioma izdvajanja. Prvu eksplicitnu formulaciju ove aksiome dao je Gotlob Frege 1893 (Gottlob Frege 1848 - 1925).

RASLOV PARADOKS. Kantor je pod skupom podrazumevao kolekciju objekata koji imaju neku zajedničku osobinu. Ta osobina može biti određena proizvoljno. Na primer, zajednička osobina neke kolekcije objekata može biti to što ti objekti pripadaju baš toj kolekciji.

Prema aksiomi izdvajanja, postoji skup svih skupova. Zaista, posmatrajmo osobinu "biti skup"; na osnovu Kantorove pretpostavke, postoji skup svih objekata koji tu osobinu imaju, koji su, dakle, skupovi.

Elementi nekog skupa i sami mogu biti skupovi. Tako skup svih skupova prirodnih brojeva ima elemente koji su skupovi. Skupovi najčešće ne pripadaju samima sebi. Na primer, skup svih prirodnih brojeva nije prirodan broj, pa prema tome, nije ni svoj sopstveni element. Međutim, uz Kantorovu pretpostavku (aksiomu izdvajanja) ima skupova koji pripadaju samima sebi. Na primer, skup svih skupova je skup, pa je u samome sebi sadržan kao element. Podelimo skup svih skupova na dva skupa: na skup x onih skupova koji pripadaju sebi samima i na skup y onih skupova koji ne pripadaju sebi samima. Jasno je da nijedan skup ne može pripadati i skupu x i skupu y. Podela skupa svih skupova na skupove x i y je iscrpna: svaki skup pripada ili skupu x ili skupu y. Zapitajmo se kojem od skupova x i y pripada y. Ako y pripada skupu y, onda na osnovu definicije skupa x, skup y pripada skupu x. Ako y ne pripada skupu y, onda na osnovu definicije skupa y, skup y pripada skupu y. Dakle, skup y i pripada i ne pripada skupu y.

Ovaj paradoks otkrio je 1901. Bertran Rasl (Bertrand Russell 1872-1970), pa se po njemu tako i zove.

Čitalac koji ne zna šta su kardinalni i ordinalni brojevi može da preskoči opis sledećih dvaju paradoksa. Kardinalni i ordinalni brojevi objašnjeni su kasnije.

KANTOROV PARADOKS IZ 1899. Za ovaj paradoks su neki matematičari znali i ranije. Frege i Rasl su kardinalni broj $\mathrm{card}(y)$ skupa y definisali ovako:

$$\mathrm{card}(y) = \{x \mid x \sim y\}.$$

To znači da je $\mathrm{card}(y)$ definisan kao skup svih skupova koji su ekvipotentni sa skupom y. Kantor je dokazao da za partitivni skup $\mathcal{P}(y)$ skupa y ($\mathcal{P}(y)$ je skup svih podskupova skupa y) važi $\mathrm{card}(y) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(y))$. Pogledajmo sada skup s svih skupova. Budući da je $\mathcal{P}(s)$ podskup skupa s, važi $\mathrm{card}(\mathcal{P}(s)) \leq \mathrm{card}(s)$, što protivreči Kantorovoj teoremi.

BURALI-FORTIJEV PARADOKS. Za svaki skup ordinala postoji ordinal koji je veći od svakog ordinala iz tog skupa. To važi i za skup svih ordinala koji postoji prema Kantorovoj teoriji. Dakle, postoji najveći ordinal. Međutim, za svaki ordinal postoji ordinal koji je od njega veći, pa nema najvećeg ordinala.

Ovaj paradoks otkrio je Burali-Forti (Burali-Forti) 1897.

Pored paradoksa Kantorove teorije skupova (koji se zovu još i *logički*) poznati su i tzv. *semantički* paradoksi koji nisu u neposrednoj vezi sa teorijom skupova, ali su u logici imali i još uvek imaju značajnu ulogu kao predmet istraživanja. Navešćemo neke od njih.

PARADOKS LAŽLJIVCA. Ovaj paradoks je bio poznat još u antičkom dobu. Posmatrajmo rečenicu "Ja lažem". Ako je ona istinita, onda ja lažem, pa je ta rečenica lažna. Ako je ona lažna, onda ja ne lažem, pa je ona istinita. Dakle, ova rečenica je i istinita i lažna.

RIŠAROV PARADOKS. Neki izrazi našeg jezika opisuju neke realne brojeve. Na primer, izraz "Odnos između dijagonale i stranice kvadrata" je izraz koji određuje jedan realan broj - kvadratni koren iz 2. Svi izrazi našeg jezika mogu da se poređaju u jedan niz, po svojoj dužini. Sada iz tako dobijenog niza izbacimo sve izraze koji ne određuju nijedan realan broj. Na taj način smo poređali u niz sve izraze našeg jezika koji određuju neki realan broj. Neka se realan broj čiji se izraz u tom poretku nalazi na n-tom mestu zove n-ti *Rišarov broj*. Pogledajmo sada sledeći izraz: "Realan broj čija je n-ta decimala jednaka 1 ukoliko n-ti Rišarov broj ima n-tu decimalu različitu od 1, i čija je n-ta decimala jednaka 2 ukoliko n-ti Rišarov broj ima n-tu decimalu jednaku 1". Ovaj izraz pod znacima navoda određuje neki Rišarov broj, recimo m, budući da smo poređali u niz *sve* izraze našeg jezika koji određuju neki realan broj. Pa ipak, taj broj mora da se razlikuje od m-tog Rišarovog broja u m-toj decimali.

Ovaj paradoks konstruisao je Rišar (J. Richard) 1905.

BERIJEV PARADOKS. U našem jeziku postoji najviše konačno mnogo slogova. Prema tome, postoji samo konačan broj izraza koji sadrže najviše pedeset slogova. Zato se pomoću tih izraza može opisati najviše konačno mnogo prirodnih brojeva. Pogledajmo sada izraz "Najmanji prirodan broj koji se ne može opisati nijednim izrazom našeg jezika koji sadrži najviše pedeset slogova"; on određuje neki prirodan broj i sadrži manje od pedeset slogova.

Ovaj paradoks je konstruisao Beri (G. G. Berry) 1906.

GRELING-NELZONOV PARADOKS. Pridev koji ima svojstvo koje on sam označava zove se *autološki*; pridev koji nema svojstvo koje on sam označava zove se *heterološki*. Pogledajmo sada pridev "heterološki". Ako je on autološki, onda je on heterološki; ako je on heterološki, onda je on autološki. Dakle, pridev "heterološki" je i autološki i heterološki.

Ovaj paradoks konstruisali su Greling i Nelzon (K. Grelling i L. Nelson) 1908. Greling je verovao da je to samo varijanta Raslovog paradoksa.

Logički i semantički paradoksi naveli su matematičare i logičare da temeljno ispitaju zaključivanje, dokazivanje i definisanje u matematici. Kao rezultat tih ispitivanja nastale su današnje teorije skupova u kojima se ne pojavljuje nijedan poznati paradoks.

2. JEZIK TEORIJE SKUPOVA

U izlaganju teorije skupova koristićemo logički jezik poznat kao *jezik prvoga reda*. Kada se ovaj jezik prilagodi potrebama izlaganja teorije skupova, onda se on zove *jezik (prvoga reda) teorije skupova.* Mnoga tvrđenja koja ćemo dokazivati izložićemo u obliku formula tog jezika. Time se postižu preciznost i preglednost.

OSNOVNI SIMBOLI. Jezik teorije skupova ima *osnovne simbole*. To su:

(1) *promenljive* $u, v, w, \ldots, u_1, v_1, w_1, \ldots$;
(2) simboli $\in$ i $=$;
(3) (*iskazni*) *veznici*: $\Rightarrow$ (*implikacija*), $\wedge$ (*konjunkcija*), $\vee$ (*disjunkcija*) i $\neg$ (*negacija*), i
(4) *kvantifikatori*: $\forall$ (*univerzalni*) i $\exists$ (*egzistencijalni*).

U jeziku teorije skupova nema drugih osnovnih simbola. Svi ostali simboli ovog jezika, koje ćemo koristiti, mogu se definisati pomoću navedenih. Štaviše, i neki od navedenih simbola mogu se definisati pomoću ostalih navedenih simbola.

TERMI I FORMULE. Od osnovnih simbola grade se *termi (izrazi)* i *formule* jezika teorije skupova.

Promenljive jezika teorije skupova su termi; za sada su to jedini termi. Kasnije ćemo uvesti terme koji nisu promenljive. Svi termi su neki konačni nizovi simbola.

Proizvoljne terme obeležavaćemo simbolima

$$r, s, t, \ldots, r_1, s_1, t_1, \ldots.$$

Formule su takođe konačni nizovi simbola.

Osnovne ili *elementarne* formule jezika teorije skupova imaju jedan od ovih oblika: $r = s$ ili $r \in s$.

Proizvoljne formule ćemo obeležavati slovima

$$A, B, C, \ldots,$$

a ako bude potrebno, ova slova ćemo upotrebljavati sa indeksima.

Od proizvoljnih formula A i B jezika teorije skupova grade se nove formule $(A \Rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ i $\neg A$ koje se takođe zovu implikacija, konjunkcija, disjunkcija i negacija (formula A i B). U formuli $(A \Rightarrow B)$ formula A se zove *antecedens*, a formula B *konsekvens*. U formulama $(A \wedge B)$ i $(A \vee B)$ formule A i B se zovu *konjunkti* odnosno *disjunkti*.

Formule $r = s$ i $r \in s$ čitamo, redom, kao "r je jednak s" i "r je element skupa s".

Formule $(A \Rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ i $\neg A$ čitamo, redom, "ako A, onda B", "A i B", "A ili B" i "ne A".

Pomoću veznika $\Rightarrow$ i $\wedge$ definišemo novi veznik $\Leftrightarrow$:

$$(A \Leftrightarrow B) \text{ je } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Veznik $\Leftrightarrow$ se zove *ekvivalencija*, a tako se zove i formula $(A \Leftrightarrow B)$. Formulu $(A \Leftrightarrow B)$ čitamo kao "A ako i samo ako B".

Od proizvoljne formule A i promenljive u grade se formule $\forall u A$ i $\exists u A$.

Formule $\forall u A$ i $\exists u A$ čitaju se, redom, "za svaki u važi A" i "postoji bar jedan u za koji važi A".

Formule su definisane korak po korak. Od promenljivih i simbola $\in$ i $=$ konstruišu se sve elementarne formule, zatim se od već konstruisanih formula konstruišu formule koje sadrže veznike, pa se onda ove koriste u konstrukciji novih formula.

U jeziku teorije skupova svaki simbol je term ili formula samo ako se može napraviti na jedan od opisanih načina.

Potformula je deo formule koji je i sam formula. Formula A je potformula formule A. Ako je jedna od formula $(B \Rightarrow C)$, $(B \wedge C)$ ili $(B \vee C)$ potformula formule A, onda su B i C potformule formule A. Ako je jedna od formula $\neg B$, $\forall u B$ ili $\exists u B$ potformula formule A, onda je B potformula formule A.

SLOBODNA I VEZANA JAVLJANJA PROMENLJIVIH. Svako javljanje jedne promenljive u termu t ili u formuli A je *slobodno* ili *vezano*. Kada je jedno javljanje promenljive u termu t ili u formuli A slobodno a kada vezano može se precizno definisati. To ćemo učiniti korak po korak i istovremeno za slobodna i vezana javljanja promenljivih.

1. Javljanje promenljive u u termu u je slobodno;

2. javljanja promenljive u su slobodna ili vezana u formulama $r = s$ i $r \in s$, već prema tome da li su slobodna ili vezana (tim redom) u termima r ili s;

3. javljanje promenljive u je slobodno u formulama $\neg A$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \wedge B)$ i $(A \vee B)$ ako je to javljanje slobodno u formulama A ili B; javljanje promenljive u je vezano u navedenim formulama ako je vezano u formulama A i B.

4. Sva javljanja promenljive u vezana su u formulama $\forall uA$ i $\exists uA$; javljanja ostalih promenljivih su slobodna ili vezana već prema tome da li su slobodna ili vezana (tim redom) u formuli A.

Za promenljivu u se kaže da je *slobodna* u formuli A ako u ima bar jedno slobodno javljanje u A; ako se u javlja u A i sva njena javljanja u A su vezana, onda se kaže da je u *vezana* u A. Promenljiva u nije slobodna u A ako je vezana u A ili se u A uopšte ne javlja.

Formula koja nema slobodne promenljive zove se *zatvorena formula* ili *rečenica*.

Pretpostavimo da se sve slobodne promenljive iz formule A nalaze u spisku $u_1, \ldots, u_n$; tada ćemo umesto A pisati i $A(u_1, \ldots, u_n)$.

Kaže se da je promenljiva u u formuli A *zamenljiva* termom t ukoliko je ispunjen sledeći uslov: nijedno slobodno javljanje promenljive u u A nije u nekoj potformuli formule A oblika $\forall vB$ ili $\exists vB$, gde je v promenljiva slobodna u termu t.

Ako je u zamenljiva termom t u A, onda $A(^u_t)$ označava formulu koja se dobija iz A kada se sva slobodna javljanja promenljive u zamene javljanjima terma t.

U daljem izlaganju kadgod koristimo oznaku $A(^u_t)$ pretpostavljaćemo da je u zamenljiva termom t, ukoliko ništa drugo o tome nije rečeno.

Formule jezika teorije skupova, pod određenim uslovima, shvatamo kao *iskaze* o skupovima. Iskazi su rečenice koje su ili istinite ili neistinite. Veliki deo našeg izlaganja sastojaće se u dokazivanju da su neki takvi iskazi istiniti.

Da bi značenja formula jezika teorije skupova bila tačno određena, potrebno je odrediti šta označavaju promenljive.

Svaka promenljiva označava neki skup.

SKRAĆENICE. U pisanju formula izostavljaćemo neke zagrade. Pre svega, izostavljaćemo spoljašnje zagrade u formuli $(A \circ B)$, gde je $\circ$ neki od veznika $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ ili $\Leftrightarrow$. Da bismo mogli izostavljati još neke zagrade, pretpostavićemo da formule treba da imaju oblik $A \Leftrightarrow B$ ili $A \Rightarrow B$, a ne $A \vee B$ ili $A \wedge B$, kadgod možemo da biramo. To znači da $A \Rightarrow B \vee C$ treba čitati kao $A \Rightarrow (B \vee C)$, a $A \wedge B \Rightarrow C$ kao $(A \wedge B) \Rightarrow C$. Slično tome, formule treba da imaju oblik $A \Leftrightarrow B$, a ne $A \Rightarrow B$, kadgod možemo da biramo. To znači da $A \Rightarrow B \Leftrightarrow C$ treba čitati kao $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C$, a ne kao $A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$. Ako formula nije oblika $\Rightarrow$ ili $\Leftrightarrow$, onda ona treba da ima oblik $A \vee B$, a ne $A \wedge B$, ako možemo da biramo. To znači da $A \wedge B \vee C$ treba čitati kao $(A \wedge B) \vee C$, a ne kao $A \wedge (B \vee C)$. Umesto $(A \vee B) \vee C$ pisaćemo $A \vee B \vee C$, umesto $(A \wedge B) \wedge C$ pisaćemo $A \wedge B \wedge C$, a umesto $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ pisaćemo $A \Rightarrow B \Rightarrow C$. Osim toga, umesto $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ pisaćemo $A \Rightarrow .B \Rightarrow C$. Napominjemo da zagrade nećemo izostavljati po svaku cenu; štaviše, radi bolje čitljivosti pisaćemo ponekad i suvišne zagrade.

Osim navedenih skraćenica u pisanju formula uvešćemo još i ove.

Umesto $\neg u = v$ i $\neg u \in v$ pisaćemo, redom, $u \neq v$ i $u \notin v$.

Umesto $\forall u_1 \ldots \forall u_n A$ i $\exists u_1 \ldots \exists u_n A$ pisaćemo, redom,

$$\forall u_1 \ldots u_n A \quad \text{i} \quad \exists u_1 \ldots u_n A.$$

Umesto $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)$ pisaćemo $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$, a $s = r = t$ umesto $s = r \wedge r = t$.

Umesto $s_1 \in r \wedge \ldots \wedge s_n \in r$ pisaćemo $s_1, \ldots, s_n \in r$.

Umesto $\forall u(u \in v \Rightarrow A)$ i $\exists u(u \in v \wedge A)$ pisaćemo, redom, $(\forall u \in v)A$ i $(\exists u \in v)A$.

Umesto $\exists u A \wedge \forall v w(A(^u_v) \wedge A(^u_w) \Rightarrow v = w)$ pisaćemo $\exists_1 u A$.

Formula $\exists_1 u A$ se čita kao "postoji tačno jedan u takav da važi A". Ona se sastoji iz dve formule: prvim konjunktom se tvrdi da postoji bar jedan skup za koji važi A, a drugim se tvrdi da postoji najviše jedan takav skup (jer ako ih ima najmanje dva, oni su jednaki).

Formulu $A(u_1, \ldots, u_n)$, kada stoji sama, shvataćemo kao

$$\forall u_1 \ldots u_n A(u_1, \ldots, u_n).$$

U skladu sa matematičkom praksom, ako promenljiva u označava neki skup x, umesto $A(u)$ pisaćemo $A(x)$.

Promenljive mogu označavati i skupove koji ispunjavaju neke unapred date uslove. To, na primer, mogu biti skupovi koji se zovu *ordinali*, skupovi koji se zovu *kardinali* ili skupovi koji se zovu *filteri*.

Ordinale ćemo obeležavati slovima grčkog alfabeta, kardinale malim slovima gotice, a filtere nekim velikim slovima gotice. Neka u označava ordinal α; u skladu sa prethodnim dogovorom, umesto $A(u)$ pisaćemo $A(\alpha)$, a ako u označava kardinal $\mathfrak{a}$, umesto $A(u)$ pisaćemo $A(\mathfrak{a})$. Slične konvencije važe i u pisanju formula koje se odnose na filtere.

Za formulu $B(u_1, \ldots, u_n)$ kažemo da se u teoriji skupova može *dedukovati* (*izvesti*) iz formule $A(u_1, \ldots, u_n)$ (kaže se da formula $B(u_1, \ldots, u_n)$ *sledi* iz $A(u_1, \ldots, u_n)$) ako i samo ako se iz aksioma teorije skupova i $A(u_1, \ldots, u_n)$ može izvesti $B(u_1, \ldots, u_n)$. Da B sledi iz A dokazivaćemo tako što ćemo pretpostaviti da $A(u_1, \ldots, u_n)$ važi za proizvoljan niz vrednosti $x_1, \ldots, x_n$ promenljivih $u_1, \ldots u_n$, tj. da važi $A(x_1, \ldots, x_n)$, pa ćemo iz te pretpostavke i aksioma teorije skupova izvoditi $B(x_1, \ldots, x_n)$.

Takav odnos može postojati i između niza formula $A_1, \ldots, A_n$ i formule B. Neka su $u_1, \ldots, u_m$ promenljive među kojima su sve promenljive iz formula $A_1, \ldots, A_n, B$; formula B sledi iz formula $A_1, \ldots, A_n$ ako i samo ako za proizvoljne vrednosti $x_1, \ldots, x_m$ promenljivih $u_1, \ldots, u_m$ iz pretpostavki

$$A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_m)$$

sledi $B(x_1, \ldots, x_m)$.

Ako iz formule A sledi formula B, onda formula $A \Rightarrow B$ sledi iz aksioma teorije skupova.

Ako se u teoriji skupova formula B može dedukovati iz formule A, a formula A iz formule B, onda se kaže da su u teoriji skupova formule A i B *ekvivalentne*. Prema definiciji ekvivalencije, A i B su ekvivalentne formule ako i samo ako se formula $A \Leftrightarrow B$ može izvesti iz aksioma teorije skupova. Tada se za A (za B) kaže da je *ekvivalent* formule B (formule A).

TERM $\{\ |\ \}$. U razvijanju teorije skupova upotrebljava se term $\{u \mid A\}$ koji ćemo sada definisati.

Za svaku promenljivu u i svaku formulu A u kojoj je u slobodna promenljiva simbol $\{u \mid A\}$ je term.

Proširićemo definiciju slobodnih i vezanih jaljanja promenljivih na terme i formule koji sadrže term $\{\ \mid\ \}$.

5. U termu $\{u \mid A\}$ sva javljanja promenljive u su vezana; javljanja ostalih promenljivih su slobodna ili vezana već prema tome da li su slobodna ili vezana (tim redom) u formuli A.

Term $\{u \mid A\}$ čita se kao "skup svih u za koje važi A".

Term $\{u \mid A\}$ se mora upotrebljavati sa oprezom, moramo biti sigurni da postoji skup na koji se ovaj term odnosi. Kada takav skup postoji, kaže se da je term $\{u \mid A\}$ *ispravan*.

Precizna definicija ispravnosti terma $\{\ \mid\ \}$ glasi ovako:

(10) Ako postoji skup x takav da za svaki skup y važi:
$A(y)$ ako i samo ako je y element skupa x,
onda je term $\{u \mid A\}$ ispravan i on označava skup x.

Drukčije rečeno, ako se iz aksioma teorije skupova može dokazati valjanost formule

$$\exists v \forall u (u \in v \Leftrightarrow A(u)),$$

gde se v ne javlja u A, onda je dokazano da je term $\{u \mid A(u)\}$ ispravan ili, jednostavno, da skup koji on označava postoji na osnovu tih aksioma. Mnoge aksiome teorije skupova imaju baš takav oblik.

Upotreba terma $\{\ \mid\ \}$ može se opisati i na sledeći način. Neka se potformula C javlja u formuli B; svako takvo javljanje potformule C može se zameniti javljanjem terma $\{v \mid A\}$, pod sledećim uslovima:

ako je C formula $\exists w(\forall v(v \in w \Leftrightarrow A) \wedge w = t)$, onda se C može zameniti sa $\{v \mid A\} = t$;

ako je C formula $\exists w(\forall v(v \in w \Leftrightarrow A) \wedge t = w)$, onda se C može zameniti sa $t = \{v \mid A\}$;

ako je C formula $\exists w(\forall v(v \in w \Leftrightarrow A) \wedge w \in t)$, onda se C može zameniti sa $\{v \mid A\} \in t$;

ako je C formula $\exists w(\forall v(v \in w \Leftrightarrow A) \wedge t \in w)$, onda se C može zameniti sa $t \in \{v \mid A\}$.

U svim ovim zamenama w mora biti promenljiva koja se ne javlja u B. Neka je B^* rezultat ovih zamena; na osnovu definicije ispravnosti terma $\{v \mid A\}$, može se pokazati da formula $B \Leftrightarrow B^*$

sledi iz aksioma teorije skupova. U stvari, dovoljno je pretpostaviti da iz tih aksioma sledi formula

$$\exists v \forall u(u \in v \Leftrightarrow A(u)) \Rightarrow (w \in \{u \mid A(u)\} \Leftrightarrow A(w))$$

(moguće je pokazati da je to zaista tako), pa da sve formule $B \Leftrightarrow B^*$ budu dokazive (v se ne sme javljati u A).

Najzad, u pisanju formula koje sadrže term $\{\ \mid\ \}$ koristićemo i neke skraćenice.

Za formulu $A(u)$, u kojoj je u slobodna promenljiva koja označava skup x, pisaćemo $A(x)$ da naglasimo da nas formula zanima kada je x vrednost promenljive u.

Umesto $\{u \mid u \in v \Rightarrow A\}$ pisaćemo $\{u \in v \mid A\}$.

Ako v označava skup y, umesto $v = \{u \mid A\}$ pisaćemo $y = \{x \mid A\}$, tj. $y = \{x \mid A\}$.

DEFINISANJE. Najzad, nekoliko reči o *definisanju* u ovoj knjizi. Pod *definicijom* podrazumevamo određivanje značenja jednog simbola pomoću značenja drugih simbola. Simbol koji se definiše zove se *definiendum*, a simbol kojim se definiše - *definiens.*

U ovoj knjizi najčešće korišćene definicije su skraćenice ili *eksplicitne* definicije, kao što je definicija veznika $\Leftrightarrow$. U njima je definiendum skraćenica za definiens; definiendum i definiens se mogu uzajamno zamenjivati bez promene značenja rečenice u kojoj se zamena vrši.

Definijendum sadrži novi simbol koji se definiše i koji se ne sme javljati u definiensu.

Eksplicitna definicija ima jedan od dva oblika: $A \Leftrightarrow B$ ili $r = s$, gde su A i r definiendumi, a B i s definiensi.

Upotreba $\Leftrightarrow$ i $=$ u eksplicitnim definicijama razlikuje se od drugih upotreba ovih simbola time što je jasno naznačeno da je reč o definicijama.

Neka je $A \Leftrightarrow B$ ili $r = s$ definicija; ako se proširi jezik teorije skupova tako što se definisan simbol doda osnovnim simbolima, onda se formule $A \Leftrightarrow B$ i $r = s$, u tako proširenom jeziku, smatraju aksiomama teorije skupova.

Uvođenje definienduma pomoću definicije posebno se ističe kada je za definiendum vezan neki važan pojam.

3. EKSTENZIONALNOST I KONSTRUKTIVNE AKSIOME

U teorijama skupova koje su nastale posle Kantorove, skupovi su, neformalno gledano, samo neke, posebno određene kolekcije objekata. Ponekad se pretpostavlja da su ovi objekti "izgrađeni" jednim postupkom koji je poznat kao *kumulativna hijerarhija*. Taj postupak ćemo opisati u ovom poglavlju. Ostatak izlaganja posvetićemo osnovnim principima teorije skupova, za koje se može pokazati da važe u kumulativnoj hijerarhiji.

KUMULATIVNA HIJERARHIJA

Kako su definisani skupovi? O tome ne postoji opšte slaganje, ali će većina matematičara kao skupove prihvatiti kolekcije nekih matematičkih objekata, na primer, brojeva. Štaviše, mnogi će kao skupove prihvatiti i skupove skupova brojeva, pa zatim skupove skupova skupova brojeva itd. Ovakav stav je poznat kao *prosta teorija tipova* i sastoji se u izgrađivanju kolekcije skupova u *stupnjevima*, *nivoima* ili *tipovima*.

0. Nulti stupanj. Pretpostavlja se da postoje neki objekti, koji se zovu *individue*, o kojima se ništa ne tvrdi.

1. Prvi stupanj. Formiraju se sve kolekcije čiji su članovi individue.

2. Drugi stupanj. Formiraju se sve kolekcije čiji su članovi kolekcije prvog stupnja, itd.

U prostoj teoriji tipova samo kolekcije koje su na ovaj način izgrađene smatraju se skupovima.

U ovakvom "izgrađivanju" kolekcije skupova postavljaju se bar dva pitanja: (1) zašto se kolekcije čiji su članovi kolekcije sa različitih stupnjeva ne smatraju skupovima i (2) prazan skup će se pojavljivati na svakom stupnju posle prvog; da li su ti prazni skupovi međusobno jednaki?

Iako je Rasl na osnovu proste teorije tipova uspeo da izgradi jednu teoriju skupova, danas se smatra da je prosta teorija tipova preuska za tu svrhu, pa se koristi *kumulativna teorija tipova*.

0. Nulti stupanj. Pretpostavlja se da postoje individue.

1. Prvi stupanj. Formiraju se sve kolekcije čiji su članovi individue.

2. Drugi stupanj. Formiraju se sve kolekcije čiji su članovi kolekcije nultog ili prvog stupnja, a na svakom sledećem stupnju formiraju se kolekcije čiji se svaki član nalazi na nekom ranijem stupnju.

Samo kolekcije koje su ovako izgrađene smatraju se skupovima.

Sve kolekcije koje su skupovi u prostoj teoriji tipova predstavljaju skupove i u kumulativnoj teoriji.

Svaki skup (osim, možda, skupova individua) u kumulativnoj teoriji javlja se na svakom stupnju posle onoga na kojem je formiran i smatra se da su ta javljanja međusobno identična.

Šta u kumulativnoj teoriji treba uzeti za individue?

Rečeno je da elementi skupova i sami mogu biti skupovi. U matematici se skupovi čiji su svi elementi opet skupovi najviše proučavaju. Pokazalo se da su oni u većini matematičkih teorija sasvim dovoljni i da nikakve druge individue nisu potrebne. To znači da je dovoljno uzeti prazan skup kao jedinu individuu. Svi ostali skupovi mogu se izgraditi polazeći od praznog skupa.

Ekvivalentnan stav je da nisu potrebne *nikakve* individue; tada je prazan skup jedina kolekcija na prvom stupnju.

U ovoj knjizi se pretpostavlja da su elementi skupova i sami skupovi; skupovi koji mogu imati i druge elemente ovde se ne proučavaju. Kada se dopušta da skupovi kao elemente imaju i druge individue koje nisu skupovi, takvi se elementi (prema nemačkom terminu) zovu *urelementi* ili *praelementi*.

Koliko u izgrađivanju skupova treba da bude stupnjeva, kada u uvođenju novih stupnjeva treba prestati?

Hijerarhija stupnjeva je beskonačna. Ne možemo zamisliti poslednji stupanj, jer bismo tada mogli formirati kolekcije koje sadrže skupove sa svih već izgrađenih stupnjeva, a ove ne bi bile sadržane u hijerarhiji.

Pa ipak, pitanja ove vrste se ne iscrpljuju. Zamislimo da su formirani skupovi u beskonačnom nizu stupnjeva $S_1, \ldots S_n, \ldots$; da li postoji stupanj koji dolazi posle svih ovih navedenih stupnjeva?

Odgovor je potvrdan; mi želimo što više kolekcija koje ćemo smatrati skupovima, a da se ne pojave neki od poznatih paradoksa.

Na primer, uočimo da se u ovakvoj kumulativnoj hijerarhiji Raslov paradoks ne može pojaviti, jer se nijedan skup koji je formiran na nekom stupnju hijerarhije ne nalazi na prethodnim stupnjevima, pa ne može biti svoj sopstveni element. Dakle, u kumulativnoj hijerarhiji ne postoji skup svih skupova.

Posle niza stupnjeva na kojima su formirani skupovi postoji novi stupanj kadgod je to moguće - kadgod to može da se zamisli.

Na primer, pretpostavimo da imamo skup y i da smo svakom elementu x skupa y pridružili stupanj S_x na kojem je formiran skup x. Budući da y zamišljamo kao jedinstven objekat, i kolekciju svih stupnjeva S_x možemo zamisliti kao jedinstven objekat. Dakle, možemo zamisliti da su svi stupnjevi S_x realizovani. Prema tome, postoji stupanj koji dolazi posle svakog stupnja S_x. Ovaj rezultat se zove *princip kofinalnosti.*

Neka je **M** kolekcija svih skupova koji se mogu izgraditi u kumulativnoj hijerarhiji; u daljem izlaganju pretpostavljaćemo da se promenljive jezika teorije skupova odnose na članove kolekcije **M**, da su članovi kolekcije **M** vrednosti promenljivih jezika teorije skupova.

Kolekcija **M** zove se i *univerzum*. Sve druge kolekcije skupova koje ćemo razmatrati su delovi univerzuma **M**, a njihovi elementi su skupovi.

Umesto termina "kolekcija" koristi se i termin "klasa". Za razliku od termina "kolekcija", termin "klasa" je tehnički; postoje teorije klasa, ali ne postoje teorije kolekcija. O nekim teorijama klasa biće reči na kraju izlaganja o skupovima.

Svaki skup je klasa, ali ima klasa koje nisu skupovi; takve klase zovu se *prave klase*. U teoriji skupova koja se ovde izlaže ukazuje se potreba da se govori o nekoliko različitih klasa skupova, na primer, o klasi **ON** svih ordinala ili o klasi svih kardinala. O kakvim je klasama reč biće uvek jasno naznačeno.

Drugi osnovni pojam teorije skupova je *pripadanje*. Objekat x koji pripada skupu y, za koji važi $x \in y$, zove se *element* skupa y. Ako je $x \in y$, reći ćemo i da je x *u* y kao i da y *sadrži* x (kao svoj element).

EKSTENZIONALNOST

Svi osnovni principi teorije skupova mogu se podeliti na aksiomu ekstenzionalnosti i konstruktivne aksiome. Osnovni odnos između relacija jednakosti i pripadanja iskazan je *aksiomom ekstenzionalnosti.*

AKSIOMA EKSTENZIONALNOSTI. *Dva skupa su jednaka ako i samo ako imaju iste elemente tj.*

$$x = y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y).$$

Ova aksioma je sastavljena od dva tvrđenja. Prvim od njih se kaže da ako su dva skupa jednaka, onda oni imaju iste elemente (to je trivijalna osobina jednakosti):

$$x = y \Rightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y).$$

Drugim se kaže da ako dva skupa imaju iste elemente, onda su oni jednaki, tj.

$$\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y.$$

Ovo tvrđenje nije trivijalno i predstavlja suštinu aksiome.

Na osnovu aksiome ekstenzionalnosti zaključujemo da se jednakost skupova može definisati pomoću $\in$.

DEFINICIJA 1. $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$.

Ako važi $x \subseteq y$, onda se kaže da je x *podskup* skupa y i da je y *nadskup* skupa x.

Umesto $x \subseteq y$ piše se i $y \supseteq x$.

Relacija $\subseteq$ zove se relacija *podskupa* (*nadskupa*) ili *inkluzija*. Ako je $x \subseteq y$ kaže se i da je x *sadržan* u y.

TEOREMA 1. (1) $\quad x \subseteq x$;

(2) $\quad x \subseteq y \land y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$;

(3) $\quad x \subseteq y \land y \subseteq x \Rightarrow x = y$.

DOKAZ. (1) i (2) slede iz definicije 1. (3) Ako je $x \subseteq y$ i $y \subseteq x$, onda, prema definiciji 1, x i y imaju iste elemente pa su, prema aksiomi ekstenzionalnosti, jednaki.

Aksioma ekstenzionalnosti se može iskazati i drukčije: dovoljan i nužan uslov da skupovi x i y budu jednaki je da važi $x \subseteq y \land y \subseteq x$. Zbog toga je dokazivanje jednakosti skupova x i y svodljivo na dokazivanje dva tvrđenja: $x \subseteq y$ i $y \subseteq x$.

DEFINICIJA 2. $x \subset y \Leftrightarrow x \subseteq y \land x \neq y$.

Ako je $x \subset y$, kaže se da je x *pravi podskup skupa* y i da je y *pravi nadskup skupa* x.

Umesto $x \subset y$ piše se i $y \supset x$. Ako je $x \subseteq y \land y \subseteq z$, piše se $x \subseteq y \subseteq z$. Slično tome, piše se i $x \subseteq y \subset z$, $x \subset y \subseteq z$ i $x \subset y \subset z$ umesto $x \subseteq y \land y \subset z$, $x \subset y \land y \subseteq z$ i $x \subset y \land y \subset z$, redom. Umesto $\forall xy(x \subseteq y \Rightarrow A)$ pisaćemo i $(\forall xy\ x \subseteq y)A$, a umesto $\exists xy(x \subseteq y \land A)$ - $(\exists xy\ x \subseteq y)A$. Slične skraćenice koristićemo za $\subset$.

KONSTRUKTIVNE AKSIOME

Svi osnovni principi teorije skupova, osim aksiome ekstenzionalnosti, omogućuju da se od datih skupova konstruišu novi. Većinu tih principa izložićemo u ovom poglavlju. Jednim od njih, *aksiomom podskupa*, kaže se da ukoliko je već dat neki skup a, svaka formula $A(u)$, u kojoj je u slobodna promenljiva, određuje jedan podskup y skupa a - podskup svih elemenata tog skupa za koje je tvrđenje $A(u)$ istinito. Ova aksioma zove se i *aksioma izdvajanja*, *aksioma specifikacije* ili *aksioma komprehenzije*. Umesto "formula A" kaže se i "uslov A".

AKSIOMA PODSKUPA. *Za svaki skup a i svaku formulu $A(u)$ sa slobodnom promenljivom u postoji skup y koji sadrži sve elemente skupa a koji zadovoljavaju uslov $A(u)$, tj.*

$$\forall a \exists y \forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in a \land A(x)).$$

Uočimo da aksioma podskupa *nije* zapisana formulom prvoga reda, jer se kvantifikator "za svaku formulu A" ne odnosi na skupove, već na formule. Ova aksioma, kako je ovde zapisana, predstavlja u stvari *shemu aksioma*; to je iskaz koji se odnosi na beskonačno mnogo formula; svaka od tih formula je aksioma podskupa za po jednu određenu formulu A.

Prema aksiomi ekstenzionalnosti, aksioma podskupa određuje skup y jednoznačno, a term

$$\{x \in a \mid A(x)\}$$

je ispravan.

Da je skup y, koji postoji prema aksiomi podskupa, određen jednoznačno dokazuje se ovako.

Na osnovu aksiome podskupa postoji bar jedan skup y za koji važi $\forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in a \land A(x))$.

Pretpostavimo da postoje dva takva skupa, recimo y_1 i y_2; tada imamo

$$\forall x(x \in y_1 \Leftrightarrow x \in a \land A(x))$$

i

$$\forall x(x \in y_2 \Leftrightarrow x \in a \land A(x)).$$

Odavde ćemo lako zaključiti da je

$$\forall x(x \in y_1 \Leftrightarrow x \in y_2),$$

pa je, na osnovu aksiome ekstenzionalnosti, $y_1 = y_2$.

Dakle, aksiome ekstenzionalnosti i podskupa zajedno daju

$$\exists_1 y(\forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in a \land A(x))).$$

Ispravnost terma $\{x \in a \mid A(x)\}$ istaći ćemo posebnom teoremom.

TEOREMA 2. *Za svaki skup a i svaki uslov $A(x)$ postoji tačno jedan skup y za koji je $y = \{x \in a \mid A(x)\}$.*

TEOREMA 3. *Ne postoji skup svih skupova, tj.*

$$\neg\exists z \forall x\ x \in z.$$

DOKAZ. Primenimo aksiomu podskupa sa uslovom $x \notin x$. Ma šta bio skup z, ako je $y = \{x \in z \mid x \notin x\}$, onda je

$$\forall x(x \in y \Leftrightarrow (x \in z \land x \notin x)). \tag{1}$$

Da li je moguće da je $y \in z$? Pokazaćemo da to nije moguće. Neka je $y \in z$. Svakako, ili je $y \in y$ ili je $y \notin y$. Ako je $y \in y$, onda je, na osnovu (1), $y \notin y$. Ako je $y \notin y$, onda je, opet na osnovu (1), $y \in y$. Očigledno, nije moguće da je $y \in z$. Na osnovu toga zaključujemo da ne postoji skup z svih skupova. Kada bi takav skup z postojao, onda za skup y, koji je definisan kao u ovom argumentu, ne bi važilo $y \in z$, pa z ne bi bio skup svih skupova.

Lako je uočiti da se dokaz ove teoreme sastoji u primeni aksiome podskupa sa uslovom Raslovog paradoksa.

Kao što prethodna argumentacija pokazuje, M nije skup.

Oznaku $\{x \mid A(x)\}$ primenjivaćemo i na klase. Kada $\{x \mid A(x)\}$ označava klasu, biće to jasno istaknuto. U tom slučaju to je klasa svih skupova koji zadovoljavaju uslov A.

Razlika između Kantorove pretpostavke da svaki uslov $A(x)$ određuje skup y svih x za koje važi A i aksiome podskupa je u tome što se u ovoj drugoj zahteva da pre nego što pomoću uslova A izdvojimo skup y već bude dat skup a iz kojeg ćemo izdvojiti y.

Pretpostavimo da postoji bar jedan skup a. Budući da ćemo kasnije prihvatiti jače pretpostavke o postojanju nekih skupova, ova pretpostavka je privremena. Primenimo sada aksiomu podskupa sa uslovom $x \neq x$. Prema aksiomi, postoji skup y,

$$y = \{x \in a \mid x \neq x\}.$$

Budući da $x \neq x$ ne važi ni za jedan element x skupa a, zaključujemo da postoji (tačno jedan) skup y koji nema nijedan element. On se zove *prazan skup* i obeležava se sa $\emptyset$. Za svaki skup x važi $\emptyset \subseteq x$. U to se uveravamo ako pokušamo da nađemo kontraprimer za ovo tvrđenje. Kontraprimer bi bio element skupa $\emptyset$ koji nije element skupa x. Budući da $\emptyset$ nema elemenata, nema ni kontraprimera, pa je tvrđenje $\emptyset \subseteq x$ istinito.

Ovo razmatranje rezimiraćemo sledećom teoremom.

TEOREMA 4. (1) $\exists_1 y \forall x \; x \notin y$ (2) $\emptyset \subseteq x$.

Drugi princip teorije skupova pomoću kojeg se grade novi skupovi od već postojećih je *aksioma neuređenog para*. Tom aksiomom se tvrdi da su svaka dva skupa elementi bar jednog istog skupa, pa samim tim i da je svaki skup element nekog skupa.

AKSIOMA NEUREĐENOG PARA. *Za svaka dva skupa a i b postoji skup y za koji važi $a \in y$ i $b \in y$, tj.*

$$\exists y(a \in y \wedge b \in y).$$

Skup y, koji postoji prema aksiomi neuređenog para, može imati i elemente koji su različiti od a i od b. Primenimo aksiomu podskupa na y sa uslovom $x = a \vee x = b$. Prema toj aksiomi, za skup y kojem pripadaju dati skupovi a i b, postoji skup z koji sadrži samo elemente a i b, tj.

$$\exists z \forall x(x \in z \Leftrightarrow x \in y \wedge (x = a \vee x = b)). \tag{1}$$

Kada bi se unapred znalo da postoji skup y koji sadrži a i b, onda bi postojanje skupa z koji sadrži samo a i b sledilo na osnovu aksiome podskupa. Budući da se to ne zna, potrebna je aksioma neuređenog para kojom se tvrdi postojanje skupa y.

TEOREMA 5. $\exists z \forall x(x \in z \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$.

DOKAZ. Videli smo da postoji (tačno jedan) skup z za koji je $\forall x(x \in z \Leftrightarrow x \in y \wedge (x = a \vee x = b))$. Odavde sledi

$$x \in z \Rightarrow x = a \vee x = b.$$

S druge strane, prema aksiomi neuređenog para, za svaka dva skupa a i b postoji skup y za koji je $a, b \in y$. Dakle, $x = a \Rightarrow x \in y$ i $x = b \Rightarrow x \in y$, pa je $x = a \vee x = b \Rightarrow x \in y$. Odavde je $(x = a \vee x = b) \wedge x \in y \Leftrightarrow x = a \vee x = b$, pa teorema sledi na osnovu dokazanog tvrđenja (1).

Na osnovu teoreme 5, term $\{x \mid x = a \vee x = b\}$ je ispravan.

DEFINICIJA 3. $\{a, b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\}$.

Skup $\{a, b\}$ zove se *(neuređen) par elemenata a i b*.

Kada postoje aksiome ekstenzionalnosti i podskupa, ekvivalentna formulacija aksiome neuređenog para je teorema 5.

DEFINICIJA 4. $\{x\} = \{x, x\}$.

Skup $\{x\}$ zove se *singlton* ili *jednoelementan (jednočlan) skup sa elementom* x.

Može se pokazati da su skupovi x i $\{x\}$ različiti (to je jasno već na osnovu kumulativne hijerarhije); na primer, $\emptyset$ nema elemente dok $\{\emptyset\}$ ima jedan element.

Na osnovu aksiome neuređenog para može se utvrditi postojanje mnogih skupova. To su, na primer,

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\{\emptyset\}\}, \quad \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

ili

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \quad \{\emptyset\}\}, \ldots.$$

Pre nego što uvedemo i ostale principe teorije skupova, pogledajmo još jednom upotrebu terma $\{x \mid A(x)\}$. Prirodno je sa $\{x \mid x = a \vee x = b\}$ označiti skup y koji postoji prema teoremi 5. U tom slučaju je

$$\{a, b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\}.$$

Oznaka

$$\{x \mid A(x)\}$$

uvek označava klasu svih elemenata x za koje važi $A(x)$. Kada je ta klasa skup? Samo kada se to može dokazati na osnovu principa teorije skupova. Drugim rečima, $y \in \{x \mid A(x)\}$ je istinito tvrđenje ako i samo ako (1) postoji skup z čiji je element y i (2) y zadovoljava uslov A, tj. važi $A(y)$.

Treći princip pomoću kojeg gradimo nove skupove od već postojećih je *aksioma unije*.

AKSIOMA UNIJE. *Za svaki skup a postoji skup y koji sadrži sve elemente svih elemenata skupa a*, tj.

$$\exists y \forall x (\exists z (z \in a \wedge x \in z) \Rightarrow x \in y).$$

Skup y, za koji se aksiomom unije tvrdi da postoji, može imati i elemente koji ne pripadaju nijednom elementu z skupa a. Primenimo aksiomu podskupa na y, sa uslovom $\exists z (z \in a \wedge x \in z)$, a zatim aksiomu ekstenzionalnosti; dobićemo tvrđenje

$$\exists_1 y(y = \{x \mid \exists z(z \in a \land x \in z)\}.$$

Skup y, koji postoji na osnovu ovog tvrđenja, sadrži sve one elemente koji pripadaju bar jednom članu z skupa a, i samo njih. Dakle, ispravan je term $\{x \mid \exists z(z \in a \land x \in z)\}$.

DEFINICIJA 5. $\bigcup a = \{x \mid \exists z(z \in a \land x \in z)\}$.

Skup $\bigcup a$ se zove *unija* elemenata skupa a i označava se i sa

$$\bigcup\{x \mid x \in a\}$$

ili sa

$$\bigcup_{x \in a} x.$$

TEOREMA 6. (1) $\bigcup\{x \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$ (ili $\bigcup\emptyset = \emptyset$),
(2) $\{x \mid x \in y\} = y$ (ili $\bigcup y = y$).

Ako se skup a sastoji samo od elemenata x i y, $a = \{x, y\}$, onda se unija skupa a obeležava sa $x \cup y$.

DEFINICIJA 6. $x \cup y = \bigcup\{z \mid z \in \{x, y\}\}$.

Na osnovu definicije unije, $z \in x \cup y \Leftrightarrow z \in x \lor z \in y$. Drugim rečima, važi

TEOREMA 7. $x \cup y = \{z \mid z \in x \lor z \in y\}$.

TEOREMA 8. *Sledeća tvrđenja važe za unije parova.*

$$x \cup \emptyset = x$$

$$x \cup y = y \cup x \quad \text{(komutativnost)}$$

$$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z \quad \text{(asocijativnost)}$$

$$x \cup x = x \quad \text{(idempotentnost)}$$

$$x \subseteq y \Leftrightarrow x \cup y = y$$

$$\{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}.$$

Poslednja jednakost pokazuje kako se mogu definisati *neuređene trojke*, *neuređene četvorke* i, uopšte, *neuređene n-torke* (skupovi sa najviše n elemenata):

DEFINICIJA 7. (1) $\{x, y, z\} = \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ (2) $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\}$.

Jasno je da važi

TEOREMA 9. $\{a, b, c\} = \{x \mid x = a \vee x = b \vee x = c\}$ i $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{x \mid x = x_1 \vee \ldots \vee x = x_n\}$.

DEFINICIJA 8. $x \cap y = \{z \mid z \in x \wedge z \in y\}$.

Skup $x \cap y$ zove se *presek skupova* x i y.

Lako se dokazuje da za svaka dva skupa x i y postoji tačno jedan skup koji je presek skupova x i y, kao i sledeće dve teoreme.

TEOREMA 10. *Sledeća tvrđenja važe za preseke.*

$$z \in x \cap y \Leftrightarrow z \in x \wedge z \in y$$
$$x \cap \emptyset = \emptyset$$
$$x \cap y = y \cap x$$
$$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$$
$$x \cap x = x$$
$$x \subseteq y \Leftrightarrow x \cap y = x.$$

DEFINICIJA 9. Ako je $x \cap y = \emptyset$, za skupove x i y se kaže da su *disjunktni*. Za skup x se kaže da je skup *disjunktnih elemenata* ako i samo ako su svaka dva različita elementa skupa x disjunktna.

TEOREMA 11. *Odnos između unije i preseka dat je sledećim jednakostima* (one se zovu *distributivni zakoni*):

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$
$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z).$$

TEOREMA 12. *Neka je a neprazan skup ($a \neq \emptyset$); postoji tačno jedan skup koji sadrži tačno one elemente koji pripadaju svakom elementu skupa a, tj.*

$$\exists_1 y \forall x (x \in y \Leftrightarrow \forall z (z \in a \Rightarrow x \in z)).$$

DOKAZ. Neka je z' bilo koji element skupa a (na osnovu pretpostavke da je $a \neq \emptyset$, znamo da postoji takav z') i primenimo na z' aksiomu podskupa; dobićemo

$$\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \in z' \land \forall z (z \in a \Rightarrow x \in z)).$$

Iz $z' \in a$ i $\forall z (z \in a \Rightarrow x \in z)$ sledi $x \in z'$, pa se prethodna ekvivalencija svodi na $\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow \forall z (z \in a \Rightarrow x \in z))$.

Prema aksiomi ekstenzionalnosti, skup y je jedinstven.

DEFINICIJA 10. Za $a \neq \emptyset$, $\bigcap a = \{x \mid \forall z (z \in a \Rightarrow x \in z\}$.

Skup $\bigcap a$ zove se *presek elemenata skupa* a i obeležava se i sa

$$\bigcap \{z \mid z \in a\}$$

ili sa

$$\bigcap_{z \in a} z.$$

Primetimo da $\bigcap \emptyset$ ne označava skup. Zašto? Pogledajmo uslov u definiciji $\bigcap a$ i zapitajmo se koji element x taj uslov ne bi mogao da zadovolji, ako je $a = \emptyset$. Lako se uveravamo da svaki x zadovoljava taj uslov, jer ne postoji $z \in \emptyset$ (budući da $\emptyset$ nema elemente) za koji bi bilo $x \notin z$. Dakle, ako je $a = \emptyset$, onda svaki skup x zadovoljava uslov iz definicije preseka $\bigcap a$, pa bi skup svih onih skupova koji zadovoljavaju uslov definicije bio skup svih skupova. Videli smo da u teoriji skupova koju izlažemo ne postoji skup svih skupova, pa presek elemenata praznog skupa ne može biti skup (inače bi bio skup svih skupova) i mora ostati nedefinisan.

Ponekad se presek $\bigcap a$ definiše kao

$$\{x \mid (\exists z \in a) \land (\forall z \in a)\ x \in z\};$$

tada je $\bigcap a = \emptyset$, ako je $a = \emptyset$.

Ako su x i y skupovi, onda je *razlika između x i y* (*relativni komplement skupa y u odnosu na x*) definisana kao skup koji sadži sve elemente skupa x koji nisu elementi skupa y. Na osnovu aksiome podskupa, taj skup postoji, a na osnovu aksiome ekstenzionalnosti on je jedinstven. Dakle, možemo usvojiti i zvaničnu definiciju.

DEFINICIJA 11. $x \setminus y = \{z \in x \mid z \notin y\}$.

Često se razmatraju skupovi od kojih je svaki podskup nekog datog skupa e. Tada se relativni komplement $e \setminus x$ podskupa x od e u odnosu na e zove samo *komplement* i umesto $e \setminus x$ piše se x'. Sledeća teorema izražava osnovne osobine *komplementacije* $'$:

TEOREMA 13.
$$(x')' = x$$
$$\emptyset' = e \quad i \quad e' = \emptyset$$
$$x \cap x' = \emptyset \quad i \quad x \cup x' = e$$
$$x \subseteq y \Leftrightarrow y' \subseteq x'$$
$$(x \cup y)' = x' \cap y'$$
$$(x \cap y)' = x' \cup y'.$$

Poslednje dve jednakosti zovu se *De Morganovi zakoni.*

Navedene osobine komplementacije pokazuju da se teoreme teorije skupova obično javljaju u parovima. Ako važi neka jednakost ili inkluzija u kojoj se javljaju unije, preseci i komplementi u odnosu na e, dovoljno je zameniti skupove njihovim komplementima, unije presecima, preseke unijama i obrnuti smer inkluzije pa da se dobije nova jednakost ili inkluzija koja takođe važi. Ova činjenica se zove *princip dualnosti* za skupove.

TEOREMA 14.
$$x \setminus y = x \cap y'$$
$$x \subseteq y \Leftrightarrow x \setminus y = \emptyset$$
$$x \setminus (x \setminus y) = x \cap y$$
$$x \cap (y \setminus z) = (x \cap y) \setminus (x \cap z)$$
$$x \cap y \subseteq (x \cap z) \cup (y \cap z')$$
$$(x \cup z) \cap (y \cup z') \subseteq x \cup y.$$

Kada se posmatraju samo podskupovi nekog datog skupa e, onda je definisan presek elemenata svakog skupa podskupova skupa e. Neka je a jedan takav skup podskupova; tada presek elemenata skupa a možemo definisati kao
$$\{z \in e \mid \forall x(x \in a \Rightarrow z \in x\}.$$
Ako je $a \neq \emptyset$, ova se definicija poklapa sa starom definicijom preseka elemenata skupa a. Ako je $a = \emptyset$, lako proveravamo da je

$$\bigcap_{x\in\emptyset} x = e.$$

Može se proveriti i da je presek elemenata skupa a prema novoj definiciji jednak preseku elemenata skupa $x \cup \{e\}$ (koji je neprazan) na osnovu stare definicije.

DEFINICIJA 12. $x + y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$.

Skup $x + y$ zove se *simetrična razlika* skupova x i y.

TEOREMA 15. *Važe sledeće jednakosti:*

$$x + y = y + x$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x + \emptyset = x$$
$$x + x = \emptyset.$$

Sledeći princip teorije skupova koji koristimo u konstruisanju novih skupova od već postojećih je *aksioma stepena*.

AKSIOMA STEPENA. *Za svaki skup a postoji skup y koji sadrži sve podskupove skupa a, tj.*

$$\exists y \forall x (\forall z (z \in x \Rightarrow z \in a) \Rightarrow x \in y).$$

Skup y, za koji se ovom aksiomom tvrdi da postoji, može imati i elemente koji nisu podskupovi skupa a. Takve elemente možemo odstraniti primenjujući aksiomu podskupa na y. Primenjujući zatim aksiomu ekstenzionalnosti, zaključujemo da za svaki skup a postoji tačno jedan skup y koji sadrži sve podskupove skupa a i nijedan drugi skup. Taj skup y zove se *partitivni skup* skupa a ili *stepen skupa* a i obeležava se sa $\mathcal{P}(a)$.

DEFINICIJA 13. $\mathcal{P}(a) = \{x \mid x \subseteq a\}$.

Pogledajmo neke partitivne skupove.

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\};$$
$$\mathcal{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\};$$
$$\mathcal{P}(\{x, y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}.$$

Partitivni skup neuređene trojke ima osam elemenata. Može se dokazati da partitivni skup skupa od n elemenata ima 2^n elemenata.

Neka je a skup podskupova nekog fiksiranog skupa e (dakle, $a \subseteq \mathcal{P}(e)$); tada definišemo

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{P}(e) \mid z' \in a\}.$$

Da uslov u definiciji skupa $\mathcal{D}$ zaista definiše skup vidi se kada ga napišemo u punom obliku:

$$\exists y(y \in a \wedge \forall x(x \in z \Leftrightarrow x \in e \wedge x \notin y)).$$

Unija i presek skupa $\mathcal{D}$ označavaju se, redom, sa

$$\bigcup_{z \in x} z' \text{ i } \bigcap_{z \in x} z'.$$

Tada se De Morganovi zakoni mogu uopštiti, ovako:

$$(\bigcup_{z \in x} z)' = \bigcap_{z \in x} z'$$

i

$$(\bigcap_{z \in x} z)' = \bigcup_{z \in x} z'.$$

Dokazi ovih jednakosti dobijaju se na osnovu definicija.

TEOREMA 16.
$$\mathcal{P}(x) \cap \mathcal{P}(y) = \mathcal{P}(x \cap y)$$
$$\mathcal{P}(x) \cup \mathcal{P}(y) \subseteq \mathcal{P}(x \cup y).$$
$$\bigcap_{z \in x} \mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(\bigcap_{z \in x} z),$$
$$\bigcup_{z \in x} \mathcal{P}(z) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup_{z \in x} z).$$
$$\bigcap_{z \in \mathcal{P}(e)} z = \emptyset$$
$$x \subseteq y \Rightarrow \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(y),$$
$$e = \bigcup \mathcal{P}(e) \text{ i } e \subset \mathcal{P}(\bigcup e).$$

4. RELACIJE

Odnosi ili *relacije* čine važnu vrstu pojmova. Njihov sadržaj može se neformalno najbolje objasniti pokazivanjem kako se reč "relacija" upotrebljava. Primeri matematičkih relacija su $=$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ i "biti deljiv sa".

Relacija ρ je ono što može važiti za *individue*; kaže se da su indivdue u relaciji ρ. Na primer, $a = b$ znači da su individue a i b jednake, da su u *relaciji jednakosti*. Obrnuto, individue su sve *ono što može biti u nekoj relaciji*. Na primer, brojevi a i b mogu biti u relaciji jednakosti, pa su, prema tome, individue.

Relacije imaju *dužinu* ili *arnost*: dužina relacije ρ je najmanji broj (različitih) indivdua za koje ima smisla pitati da li su u relaciji ρ. Na primer, jednakost ima dužinu 2, jer za dve individue ima smisla pitati da li su jednake.

Postoje relacije dužine 3, na primer, "biti između".

Osobine, svojstva ili karakteristike takođe ćemo smatrati relacijama - relacijama dužine 1. Na primer, jedno od mogućih svojstava prirodnog broja je da je *paran*.

Relacije dužine 1 zovu se *unarne*, one dužine 2 - *binarne*, dužine 3 - *ternarne* itd. (otuda *arnost* relacije).

U ovom odeljku razmotićemo samo binarne relacije.

Jedna relacija može biti definisana samo za neke vrste individua; za individue druge vrste to ne mora biti slučaj. Na primer, ima smisla pitati da li su neka dva cela broja uzajamno prosta, ali ta relacija nema smisla za neka dva iracionalna broja. Dakle, ova relacija je definisana za cele brojeve, ali nije i za sve realne brojeve.

RELACIJE I NJIHOVI GRAFOVI

Između relacija i skupova postoji neposredna veza. Posmatrajmo skup prirodnih brojeva $a = \{1,2,3\}$. Za ove brojeve definisana je relacija $<$. Posmatrajmo sada skup *uređenih parova*: $R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$. (Uređeni par je skup od dva elementa u kojem su elementi dati nekim redom; u takvom skupu znaju se *prvi* i *drugi* član uređenog para). Očigledno, za $x, y \in a$ važi $x < y \Leftrightarrow (x,y) \in R$.

Neka je ρ binarna relacija definisana za individue skupa a; za $x, y \in a$, pisaćemo $x \rho y$ ako su x i y u relaciji ρ. Neka je b kolekcija svih uređenih parova elemenata skupa a, tj. $b = \{(x, y) \mid x, y \in a\}$. (Ubrzo ćemo videti da je b skup). Posmatrajmo podskup R, $R \subseteq b$, onih parova za koje važi

$$x \rho y \Leftrightarrow (x, y) \in R.$$

Skup R se zove *graf* relacije ρ u skupu a.

Definicija grafa može se uopštiti za relacije bilo koje dužine. Graf unarne relacije je podskup skupa na kojem je ta unarna relacija definisana: to je podskup onih individua koje imaju dotičnu osobinu. Pod *uređenim trojkama*, *uređenim četvorkama* i, uopšte, *uređenim n-torkama* podrazumevamo skupove u kojima se znaju prvi, drugi, treći, ... n-ti element. Graf ternarne relacije je podskup skupa svih uređenih trojki, dok je graf n-arne relacije podskup skupa svih uređenih n-torki elemenata onog skupa u kojem je relacija definisana.

Dve relacije ρ i σ koje su definisane na istom skupu mogu imati isti graf. Na primer, u skupu $\{1, 3, 6, 7, 12\}$ definisane su relacije "biti paran (prirodan) broj" (ρ) i "biti deljiv sa 6" (σ). Obe relacije imaju graf $\{6, 12\}$. Pa ipak, to nisu iste relacije; postoje skupovi na kojima su obe definisane, ali na kojima se njihovi grafovi razlikuju.

U teoriji skupova relacije se izjednačavaju sa svojim grafovima. Tada se relacije mogu proučavati kao skupovi, jer se i uređeni parovi mogu definisati kao skupovi.

UREĐENI PAROVI

Uređeni par skupova x i y obeležava se sa

$$(x, y) \text{ ili sa } \langle x, y \rangle;$$

x se zove *prva* a y *druga koordinata* (*projekcija, komponenta*) uređenog para (x, y). Ako je z uređen par, onda sa $\pi_1(z)$ i $\pi_2(z)$ obeležavamo prvu i drugu koordinatu uređenog para z.

Uređen par se može definisati kao skup.

DEFINICIJA 1. Za skupove x i y uređen par (x, y) definisan je sledećom jednakošću:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Dva uređena para su jednaka ako i samo ako su im jednake odgovarajuće koordinate. To je najvažnija osobina uređenih parova.

Pokazaćemo da uređeni parovi definisani kao skupovi imaju pomenutu osobinu.

TEOREMA 1. *Uređeni parovi* (a,b) *i* (x,y) *su jednaki ako i samo ako su im jednake odgovarajuće koordinate, tj.*

$$(a,b)=(x,y) \Leftrightarrow a=x \wedge b=y.$$

DOKAZ. Ako su odgovarajuće koordinate uređenih parova jednake, onda su i oni jednaki; to sledi iz pojma jednakosti.

Ako je $a=b$, onda je $(a,b)=\{\{a\}\}$. Obrnuto, ako je (a,b) jednočlan skup, onda je $\{a\}=\{a,b\}$, pa je $b\in\{a\}$ i $a=b$. Dakle, $a=b$ ako i samo ako je (a,b) jednočlan skup.

Pretpostavimo da je $(a,b)=(x,y)$. Ako je $a=b$, onda su (a,b) i (x,y) jednočlani skupovi, pa je $x=y$. Kako je $\{a\}\in(x,y)$ i $\{x\}\in(a,b)$, lako se vidi da je $a=b=x=y$. Ako je $a\neq b$, onda i (a,b) i (x,y) sadrže tačno po jedan jednočlan skup, naime $\{a\}$ i $\{x\}$, redom, pa je $a=x$. Ali (a,b) i (x,y) sadrže još i po jedan neuređen par, $\{a,b\}$ i $\{x,y\}$, redom, pa proizlazi da je $\{a,b\}=\{x,y\}$. Očigledno je $y\in\{a,b\}$. Ako je $y=a$, onda je $x=y$, pa je $a=b$, suprotno pretpostavci. Dakle, $y=b$.

TEOREMA 2. *Za svaka dva skupa* a *i* b *postoji skup svih uređenih parova* (x_1,y_1), *gde je* $x_1\in a$ *i* $y_1\in b$, *tj.*

$$\exists_1 y\forall z(z\in y \Leftrightarrow z=(x_1,y_1)\wedge x_1\in a\wedge y_1\in b).$$

DOKAZ. Ako je $x_1\in a$ i $y_1\in b$, onda je $\{x_1\}\subseteq a$ i $\{y_1\}\subseteq b$, pa je $\{x_1,y_1\}\subseteq a\cup b$. Kako je i $\{x_1\}\subseteq a\cup b$, proizlazi da su $\{x_1\}$ i $\{x_1,y_1\}$ elementi skupa $\mathcal{P}(a\cup b)$. To povlači

$$\{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\}\subseteq\mathcal{P}(a\cup b),$$

pa je otuda $\{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(a\cup b))$. Tako je pokazano da ako je $x_1\in a$ i $y_1\in b$, onda je $(x_1,y_1)\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(a\cup b))$. Sada je vrlo lako primeniti aksiomu podskupa i aksiomu ekstenzionalnosti da bismo zaključili kako postoji jedinstven skup čiji su elementi baš uređeni parovi (x_1,y_1), gde je $x_1\in a$ i $y_1\in b$.

DEFINICIJA 2. Skup svih uređenih parova (x, y), gde je $x \in a$ i $y \in b$, zove se *Dekartov proizvod skupova a i b* i obeležava se sa $a \times b$. Dakle,

$$a \times b = \{z \mid (\exists x \in a)\ (\exists y \in b)\ z = (x, y)\}.$$

Dekartov proizvod dva skupa je skup uređenih parova; to isto važi i za svaki podskup Dekartovog proizvoda. Pokazaćemo i da je svaki skup uređenih parova podskup Dekartovog proizvoda neka dva skupa.

TEOREMA 3. *Ako je R skup uređenih parova, onda postoje skupovi a i b za koje je $R \subseteq a \times b$.*

DOKAZ. Neka je $(x, y) \in R$ za neke x i y. Budući da su elementi skupa R skupovi, možemo posmatrati

$$\bigcup R.$$

Kako je $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, sledi da je $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq R$ i $\{x, y\} \in \bigcup R$. Kako su elementi skupa $\bigcup R$ opet skupovi, proizlazi da je

$$x, y \in \bigcup \bigcup R.$$

Neka je

$$z = \bigcup \bigcup R;$$

tada je $R \subseteq z \times z$. Primenimo aksiomu podskupa; dobićemo

$$a = \{x \mid \exists y\ (x, y) \in R\}$$

i

$$b = \{y \mid \exists x\ (x, y) \in R\}.$$

Očigledno je $R = a \times b$.

Skupovi a i b zovu se *projekcije skupa R* na prvu i drugu koordinatu, redom.

TEOREMA 4.

$$(x \cup y) \times z = (x \times z) \cup (y \times z)$$

$$(x \times y) \cap (x_1 \times y_1) = (x \cap x_1) \times (y \cap y_1)$$

$$(x \setminus y) \times z = (x \times z) \setminus (y \times z)$$

$$x \times y = \emptyset \Leftrightarrow x = \emptyset \vee y = \emptyset$$

$$x \subseteq a \wedge y \subseteq b \Rightarrow x \times y \subseteq a \times b$$

(*obrnuto važi ako je $x \times y \neq \emptyset$*).

RELACIJE

U teoriji skupova se relacije izjednačavaju sa svojim grafovima. U ovom poglavlju definisaćemo binarne relacije. Umesto o grafovima govorićemo samo o skupovima uređenih parova.

DEFINICIJA 3. Pod *(binarnom) relacijom* se podrazumeva skup uređenih parova. Tada se za skupove x i y (tim redom!) kaže da su *u relaciji R* ako i samo ako je $(x, y) \in R$ i piše se

$$xRy \text{ ili } Rxy.$$

Prazan skup $\emptyset$ je relacija; ova se relacija zove *prazna relacija*. Dekartov proizvod bilo koja dva neprazna skupa x i y je relacija; ta se relacija zove *puna relacija*. Neka je a skup i neka je R skup svih uređenih parova $(x, y) \in a \times a$ za koje je $x = y$. Relacija R je u ovom primeru relacija jednakosti između elemenata skupa a, jer ovde xRy znači isto što i $x = y$. Neka je a bilo koji skup i neka je R skup svih uređenih parova (x, y) iz $a \times \mathcal{P}(a)$ za koje važi $x \in y$; u ovom slučaju R je relacija pripadanja između elemenata skupa a i podskupova skupa a. Ako je $y \in a$ i $z \in \mathcal{P}(a)$, onda je yRz ako i samo ako je $y \in z$.

Za svaki skup uređenih parova R postoje skupovi projekcija skupa R na prvu i na drugu koordinatu. U teoriji relacija ovi skupovi se zovu, redom, *domen relacije R* i *kodomen relacije R*.

DEFINICIJA 4. (a) $\operatorname{dom}(R) = \{x \mid \exists y\ xRy\}$;
(b) $\operatorname{ran}(R) = \{y \mid \exists x\ xRy\}$;
(c) *polje relacije R* je $\operatorname{dom}(R) \cup \operatorname{ran}(R)$.

Važi $\operatorname{dom}(\emptyset) = \operatorname{ran}(\emptyset) = \emptyset$. Ako je $R = x \times y$, onda je $\operatorname{dom}(R) = x$ i $\operatorname{ran}(R) = y$. Ako je R jednakost elemenata skupa x, onda je $\operatorname{dom}(R) = \operatorname{ran}(R) = x$. Ako je R pripadanje, između elemenata skupa x i elemenata skupa $\mathcal{P}(x)$, onda je $\operatorname{dom}(R) = x$ i $\operatorname{ran}(R) = \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$.

Ako je $R \subseteq x \times x$, za R se kaže da je *relacija u skupu x*, *relacija skupa x* ili *relacija na (skupu) x*. Neka je $R \subseteq x \times y$; tada je $R \subseteq (x \cup y) \times (x \cup y)$, pa je svaka relacija R relacija nekog skupa.

RELACIJE EKVIVALENCIJE

Važnu vrstu relacija čine relacije ekvivalencije.

DEFINICIJA 5. Relacija R skupa a je *refleksivna* ako i samo ako važi $(\forall x \in a)\ xRx$. Relacija R je *simetrična* ako i samo ako važi $(\forall x, y \in a)\ (xRy \Rightarrow yRx)$. Relacija R je *tranzitivna* ako i samo ako važi $(\forall x, y, z \in a)\ (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$. Relacija R je *relacija ekvivalencije skupa* a ako i samo ako je R refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Najveća relacija ekvivalencije u skupu a je $a \times a$; to znači da za svaku drugu relaciju ekvivalencije R u skupu a važi $R \subseteq a \times a$. Najmanja relacija ekvivalencije u skupu a je jednakost, tj. skup $\{(x, x) \mid x \in a\}$.

DEFINICIJA 6. Pod *particijom* (*razbijanjem*) skupa a podrazumeva se disjunktna kolekcija b nepraznih podskupova skupa a čija je unija a.

DEFINICIJA 7. Neka je R relacija ekvivalencije u skupu a i neka je $x \in a$; tada je $[x]_R = \{y \in a \mid xRy\}$.

Skup $[x]_R$ zove se *klasa ekvivalencije u odnosu na* R *definisana elementom* x. Umesto $[x]_R$ pišemo i $x/_R$.

Ako je R jednakost u a, onda je $[x]_R$ jednočlan skup $\{x\}$.

TEOREMA 5. *Za svaku relaciju ekvivalencije R u nepraznom skupu a i za svaka dva $x, y \in a$ važe*

(1) $xRy \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$ *i* (2) $[x]_R \neq [y]_R \Leftrightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

DOKAZ. (1) Neka je $x, y \in a$; pretpostavimo da je xRy. Neka je i $z \in [x]_R$; tada je zRx, pa je na osnovu tranzitivnosti zRy i $z \in [y]_R$. Koristeći još i simetričnost, na sličan način zaključujemo da je $[y]_R \subseteq [x]_R$. Dakle, $[x]_R = [y]_R$.

Neka je $[x]_R = [y]_R$; na osnovu refleksivnosti, $x \in [x]_R$, pa je $x \in [y]_R$ i xRy.

Dakle, $xRy \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$.

(2) Za $x, y \in a$ pretpostavimo da je $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$. Tada postoji $z \in a$ za koji je $z \in [x]_R$ i $z \in [y]_R$. Očigledno, zRx i zRy, pa je na osnovu (1) $[x]_R = [y]_R$.

Neka je $[x]_R = [y]_R$; tada je $[x]_R \cap [y]_R = [x]_R$. Zbog refleksivnosti relacije R, $[x]_R \neq \emptyset$.

Dakle, za $a \neq \emptyset$, $[x]_R \neq [y]_R \Leftrightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

TEOREMA 6. *Za svaku relaciju ekvivalencije R skupa x skup svih njenih klasa ekvivalencije je jedna particija skupa x.*

DOKAZ. Neka je x/R skup svih klasa ekvivalencije elemenata skupa x u odnosu na R (x/R se čita kao "x modulo R" ili "x mod R"). Na osnovu prethodnog, x/R je disjunktna kolekcija. Lako se vidi da je

$$x = \bigcup x/R.$$

DEFINICIJA 8. Za particiju x/R se kaže da je *indukovana relacijom ekvivalencije* R ili da *odgovara* relaciji ekvivalencije R.

TEOREMA 7. *Za svaku particiju skupa a postoji tačno jedna relacija ekvivalencije kojom je ta particija indukovana.*

DOKAZ. Neka je b particija skupa a. Definišimo relaciju, koju ćemo obeležiti sa (a/b), ovako: za sve $x, y \in a$

$$x(a/b)y$$

ako i samo ako x i y pripadaju istom elementu skupa b. Budući da svaki element x skupa a pripada bar jednom elementu skupa b, relacija (a/b) je refleksivna. Simetričnost te relacije je očigledna. Neka x i y pripadaju elementu c skupa b i neka y i z pripadaju elementu d skupa b. Ali c i d mogu biti ili jednaki ili disjunktni. Očigledno, oni su jednaki, pa tako postoji element skupa b koji sadrži x i z. Dakle, (a/b) je relacija ekvivalencije skupa a. Sasvim je lako ustanoviti da je b skup svih njenih klasa ekvivalencije, tj. da je relacijom (a/b) indukovana particija b, kao i da je (a/b) jedina takva relacija.

Kaže se da particija y skupa x *indukuje relaciju ekvivalencije* (x/y) *skupa* x ili da relacija ekvivalencije (x/y) *odgovara* particiji y.

INVERZNA RELACIJA I KOMPOZICIJA RELACIJA

Definisaćemo još dva važna pojma: *inverznu relaciju* i *kompoziciju relacija*.

DEFINICIJA 9. Za svaku relaciju $R \subseteq a \times b$ *inverzna* (*konverzna* ili *obrnuta*) relacija $R^{-1} \subseteq b \times a$ je relacija za koju je $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$.

Dakle, $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$ i $\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$.

DEFINICIJA 10. Neka je $R \subseteq a \times b$ i $S \subseteq b \times c$; tada je *kompozicija relacija* R i S relacija $T \subseteq a \times c$ za koju važi xTz ako i samo ako postoji element $y \in b$ za koji je xRy i ySz, tj.

$$xTz \Leftrightarrow (\exists y \in b)\ (xRy \wedge ySz).$$

Kompozicija relacija R i S obeležava se sa RS i zove se i (*relativni*) *proizvod relacija R i S*.

TEOREMA 8. (1) $(RS)T = R(ST)$ (*kompozicija relacija je asocijativna*.

(2) $(SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$.

(3) *Ako je I relacija jednakosti skupa x, onda je $IR = RI = R$ za svaku relaciju R skupa x.*

(4) *R je refleksivna ako i samo ako je $I \subseteq R$.*

(5) *R je simetrična ako i samo ako je $R \subseteq R^{-1}$.*

(6) *R je tranzitivna ako i samo ako je $RR \subseteq R$.*

RESTRIKCIJE I EKSTENZIJE RELACIJA

Važni pojmovi su i *restrikcija* ili *ograničenje* i *ekstenzija* ili *proširenje* relacija. Svaka relacija je definisana u nekom skupu. Ograničenja i proširenja jednę relacije se dobijaju kada se posmatraju podskupovi i nadskupovi skupa na kojem je relacija definisana.

DEFINICIJA 11. Neka je R relacija u skupu X i neka je $Y \subseteq X$; relacija S u skupu Y je *restrikcija* relacije R (na skup Y), a relacija R je *ekstenzija* relacije S (na skup X) ako i samo ako važi

$$(\forall x, y \in Y)\ (xSy \Leftrightarrow xRy).$$

Tada se piše $S = R|Y$.

Primer restrikcije i ekstenzije pruža relacija $<$ koja je definisana u skupu $\mathbf{Z}$ celih brojeva; jedna restrikcija te relacije na skup nenegativnih celih brojeva ω je "ista" relacija $<$ definisana u skupu ω.

U ovom poglavlju razmotrili smo binarne relacije; relacije dužine n, gde je $n \neq 2$ razmotrićemo kasnije.

5. FUNKCIJE

Na funkcije se može gledati kao na vrstu relacija; tada funkcije imaju graf. U teoriji skupova, kao i u mnogim drugim oblastima matematike, funkcija se izjednačava sa svojim grafom.

Definicija 1. Pod *funkcijom* se podrazumeva relacija f takva da za svaki $x \in \mathrm{dom}(f)$ postoji tačno jedan $y \in \mathrm{ran}(f)$ za koji je $(x, y) \in f$, tj.

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(f))\ (\exists_1 y \in \mathrm{ran}(f))\ (x, y) \in f.$$

Ako je $\mathrm{dom}(f) = a$ i $\mathrm{ran}(f) \subseteq b$, kaže se da je funkcija f od (*sa* ili *iz*) a u b.

Ako je $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{ran}(f) = a$, umesto *funkcija* f *od* a *u* a kaže se *operacija skupa* a.

Za svaki $x \in \mathrm{dom}(f)$, onaj jedinstveni $y \in \mathrm{ran}(f)$ za koji je $(x, y) \in f$ označava se sa

$$f(x) \text{ ili sa } fx \text{ ili sa } xf.$$

Umesto $(x, y) \in f$ piše se, prema tome,

$$f(x) = y.$$

Element y zove se *vrednost funkcije* f koju ona uzima za *argument* x. Funkcija se najčešće definiše tako što se opiše njena vrednost $f(x)$ za argument x. Kaže se i da f, gde je f funkcija od a u b, *šalje*, *transformiše* ili *preslikava* a u b. Umesto *funkcija* kaže se i *preslikavanje*, *transformacija* i *korespondencija*. Zapis

$$f : a \to b$$

znači da je f funkcija od a u b. Umesto $f : a \to b$ piše se i $x \mapsto y_x$, gde se podrazumeva da je $x \in a$ i $y_x \in b$. Skup svih funkcija od a u b je podskup skupa $\mathcal{P}(a \times b)$; on se obeležava sa b^a ili sa ${}^a b$.

Očigledno, za funkciju $f : a \to b$, $\mathrm{dom}(f) = a$. Međutim, ne mora biti $\mathrm{ran}(f) = b$ – važi samo $\mathrm{ran}(f) \subseteq b$. Skup $\mathrm{ran}(f)$ je skup svih onih elemenata y skupa b za koje postoji bar jedan element x iz a za koji je $f(x) = y$, tj. $\mathrm{ran}(f) = \{y \in b \mid (\exists x \in a)\ f(x) = y\}$.

DEFINICIJA 2. Ako je $\mathrm{ran}(f) = b$, onda se kaže da f *preslikava a na b* ili da je f *"na" funkcija* ili *sirjekcija*. Ako je f "na" funkcija od a na b, piše se i

$$f : a \overset{na}{\to} b.$$

DEFINICIJA 3. Funkcija od a u b koja različite elemente skupa a preslikava na različite elemente skupa b zove se *1-1 funkcija*, *1-1 korespondencija*, *injekcija* ili *injektivno preslikavanje*.

Funkcija od a na b koja je 1-1 zove se *bijekcija*.

POTAPANJA, RESTRIKCIJE I EKSTENZIJE

Upoznaćemo nekoliko osnovnih vrsta funkcija. Među njima su potapanja (utapanja), restrikcije (ograničenja) i ekstenzije (proširenja) datih funkcija.

DEFINICIJA 4. Ako je $a \subseteq b$, onda se funkcija f definisana sa $f(x) = x$ za svaki $x \in a$ zove *potapanje (utapanje) skupa a u b*.

Potapanje skupa a u a zove se *identičko preslikavanje skupa a*. To je isto što i relacija jednakosti skupa a. Očigledno, identičko preslikavanje je bijekcija. Ako je $a \subseteq b$, onda postoji veza između potapanja skupa a u b i identičkog preslikavanja skupa b. Taj odnos je poseban slučaj odnosa između *restrikcije* ili *ograničenja* i *ekstenzije* ili *proširenja* funkcija.

DEFINICIJA 5. Neka je $f : b \to c$ funkcija i neka je $a \subseteq b$; tada se na prirodan način može konstruisati jedna funkcija g od a u c, ovako: budući da već postoji f, definišimo $g(x)$ kao $f(x)$, za svaki $x \in a$.

Funkcija g se zove *restrikcija funkcije f na a*, $a \subseteq b$ i $\mathrm{ran}(f) = b$, a f se zove *ekstenzija funkcije g na b*, ako je $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in a$. Funkcija g se obeležava sa $f|a$.

Potapanje skupa a u b je restrikcija identičkog preslikavanja skupa b na skup a.

Navešćemo nekoliko primera funkcija. Za skupove a i b neka je $f : a \times b \overset{na}{\to} a$ za koju važi $(\forall x \in a)\ (\forall y \in b)\ f(x, y) = x$. Funkcija f se zove *projektovanje* ili *projekcija skupa $a \times b$ na a*. Slično se definiše *projektovanje skupa $a \times b$ na b*.

DEFINICIJA 6. Neka je R relacija ekvivalencije skupa a i neka je $f : a \overset{na}{\to} a/R$ za koju je $(\forall x \in a)\ f(x) = [x]_R$. Funkcija f se zove *kanoničko preslikavanje skupa a u a/R.*

Neka je f proizvoljna funkcija, $f : a \overset{na}{\to} b$; pomoću f može se definisati jedna relacija ekvivalencije skupa a. Za $x, y \in a$ definišimo: $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Neka za $z \in b$ bude $g(z) = \{x \in a \mid f(x) = z\}$. Na osnovu definicije relacije R sledi da je, za svaki z, $g(z)$ klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju R. Funkcija g je funkcija od b na skup a/R svih klasa ekvivalencije u odnosu na R. Štaviše, ako su x i y različiti elementi skupa b, onda su $g(x)$ i $g(y)$ različiti elementi skupa a/R.

DEFINICIJA 7. Ako je $a \subseteq b$, onda je *karakteristična funkcija skupa a* funkcija χ od a u skup 2 za koju važi $\chi(x) = 1$ kada je $x \in a$ i $\chi(x) = 0$ kada je $x \in b \setminus a$, za svaki $x \in b$.

Na ovom mestu treba objasniti šta znači da χ preslikava a u 2. Brojevi 0, 1 i 2 mogu se definisati pomoću skupova:

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\} \text{ i } 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Funkcija koja svaki podskup a skupa b preslikava na karakterističnu funkciju χ_a skupa a predstavlja 1-1 korespondenciju između $\mathcal{P}(a)$ i 2^a. Za tu funkciju se kaže: "Funkcija $a \overset{na}{\mapsto} \chi_a$". Slično tome, za projekciju $a \times b$ na a može da se kaže "funkcija $(x, y) \overset{na}{\mapsto} x$", a za kanoničko preslikavanje skupa a sa relacijom R na a/R "funkcija $a \overset{na}{\mapsto} a/R$".

TEOREMA 1. *$b^\emptyset = \{\emptyset\}$ i $\emptyset^a = \emptyset$, ako je $a \neq \emptyset$.*

INVERZNE FUNKCIJE

Važna vrsta funkcija su i *inverzne funkcije.* Nemaju sve funkcije odgovarajuće inverzne funkcije; to imaju samo 1-1 funkcije.

DEFINICIJA 8. Neka je $f : a \to b$ i $c \subseteq a$; tada je $f[c] = \{f(x) \mid x \in c\}$ *slika skupa c za preslikavanje f*. Ako je $d \subseteq b$, onda je $f^{-1}[b] = \{x \in a \mid f(a) \in b\}$ *praslika, inverzna slika* ili *inverzna grana skupa b* za *funkciju f*.

Umesto $f^{-1}[\{y\}]$ za $y \in b$ piše se $f^{-1}[y]$.

Dakle, $f^{-1}[y]$ se sastoji baš od onih elemenata skupa a koje f šalje u y; f^{-1} se zove *inverzna slika elementa y za preslikavanje f.*

TEOREMA 2. *Funkcija $f : a \longrightarrow b$ je "na" ako i samo ako je inverzna slika svakog nepraznog podskupa skupa b za preslikavanje f takođe neprazan skup.*

Funkcija $f : a \longrightarrow b$ je 1-1 ako i samo ako je inverzna slika svakog jednočlanog skupa u ran(f) *jednočlan podskup skupa a.*

Ako je $f : a \longrightarrow b$ 1-1 funkcija, onda se pod f^{-1} podrazumeva i funkcija g za koju je dom$(g) =$ ran(f), a $g(y)$ za $y \in$ ran(f) je onaj jedinstveni $x \in a$ za koji je $f(x) = y$, tj. $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$. Dakle, za 1-1 funkciju f piše se $f^{-1}(y) = x$ ako i samo ako je $f(x) = y$.

TEOREMA 3. *Neka je $f : a \longrightarrow b$ i $c \subseteq b$; tada je $f(f^{-1}[c]) \subseteq c$. Ako je u ovom tvrđenju f "na" funkcija, onda je $f(f^{-1}[c]) = c$.*

DOKAZ. Neka je $y \in f(f^{-1}[c])$; tada je $y = f(x)$ za neki $x \in f^{-1}[c]$. To znači da je $y = f(x)$ i $f(x) \in c$, pa je $y \in c$.

Treba još dokazati da je $c \subseteq f(f^{-1}[c])$, u slučaju kada je f "na" funkcija. Neka je $y \in c$; tada je $y = f(x)$ za neki $x \in a$, pa prema tome i za neki $x \in f^{-1}[c]$. To znači da je $y \in f(f^{-1}[c])$.

TEOREMA 4. *Neka je $f : a \longrightarrow b$ i $c \subseteq a$; tada je $c \subseteq f^{-1}(f[c])$. Ako je u ovom tvrđenju f 1-1 funkcija, onda je $c = f^{-1}(f[c])$.*

DOKAZ. Ako je $x \in c$, onda je $f(x) \in f(c)$; to znači da je $x \in f^{-1}(f[c])$.

Pretpostavimo da je f 1-1 funkcija. Neka je $x \in f^{-1}(f[c])$; tada je $f(x) \in f[c]$, pa je, prema tome, $f(x) = f(y)$ za neki $y \in c$. Kako je f 1-1, proizlazi da je $x = y$ i $x \in c$.

TEOREMA 5. *Neka je $f : a \longrightarrow b$ funkcija i neka je $\{B_i\}$ skup podskupova skupa b; tada je*

$$f^{-1}[\bigcup_i B_i] = \bigcup_i f^{-1}[B_i],$$
$$f^{-1}[\bigcap_i B_i] = \bigcap_i f^{-1}[B_i]$$

i

$$f^{-1}[b \setminus c] = a \setminus f^{-1}[c],$$

za svaki podskup $c \subseteq b$.

KOMPOZICIJA FUNKCIJA

Od datih funkcija f i g ponekad se može izgraditi nova funkcija h koja se zove *kompozicija* funkcija f i g.

DEFINICIJA 9. Neka su $f : a \to b$ i $g : b \to c$ funkcije; budući da je $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, važi $(\forall x \in a)\ (\exists y \in c)\ y = g(f(x))$. Funkcija $h : a \to c$, za koju je $(\forall x \in a)\ h(x) = g(f(x))$, zove se *kompozicija funkcija* f i g i označava se sa gf ili sa $g \cdot f$.

Da bi gf bila definisana, mora biti $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, ali se tom prilikom ne mora desiti da bude i $\mathrm{ran}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$, tj. da je definisana funkcija fg. Čak i kada su gf i fg definisane, ne mora važiti $gf = fg$ (kaže se da kompozicija funkcija ne mora biti *komutativna*).

TEOREMA 6. *Kompozicija funkcija je asocijativna: ako su* $f : a \to b$, $g : b \to c$ *i* $h : c \to d$ *funkcije, onda je za svaki* $x \in a$ $h(gf)(x) = ((hg)f)(x)$.

Neka je $f : a \to b$ funkcija; ponekad se pod inverznom funkcijom f^{-1} podrazumeva funkcija $\mathrm{ran}(f) \to \mathcal{P}(a)$ za koju važi: ako je $y \in \mathrm{ran}(f)$, onda je

$$f^{-1}(y) = f^{-1}[y].$$

U navedenom smislu je izraz "inverzna funkcija" upotrebljen u ovoj knjizi samo u sledećoj teoremi.

TEOREMA 7. *Neka je* $f : a \to b$ *i* $g : b \to c$, *i stoga* $f^{-1} : \mathcal{P}(b) \to \mathcal{P}(a)$ *i* $g^{-1} : \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(b)$, *tako da postoje funkcije* gf *i* $f^{-1}g^{-1}$; *tada je* $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

TEOREMA 8. (1) *Neka je* $f : a \to b$; *ako je* $g : b \to a$ *funkcija za koju je* gf *jednakost skupa* a, *onda je* f *1-1 funkcija, a* g *je "na" funkcija.*

(2) $f[\bigcap_{i\in I} x_i] = \bigcap_{i\in I} f[x_i]$ *za bilo koji skup* $\{x_i \mid i \in I\}$ *podskupova skupa* x *ako i samo ako je* f *1-1 funkcija.*

(3) $f[x \setminus z] \subseteq y \setminus f[z]$ *za svaki podskup* z *skupa* x *ako i samo ako je* f *1-1 funkcija.*

(4) $y \setminus f[z] \subseteq f[x \setminus z]$ *za svaki podskup* z *skupa* x *ako i samo je* f *"na" funkcija.*

FAMILIJE

Ponekad je kodomen funkcije značajniji od same funkcije. Tada se koriste posebne oznake. Neka je x funkcija $I \overset{na}{\to} X$. Element i domena I zove se *indeks*, I se zove *skup indeksa*, kodomen $\operatorname{ran}(x)$ zove se *indeksiran skup*, sama funkcija x je *familija* dok je njena vrednost za indeks i - *član familije* i obeležava se sa (i, x_i). U mnogim kontekstima, pa i ovde, (i, x_i) se izjednačava sa x_i. Tada se familija označava i sa $\{x_i\}$ i kaže se "familija u X" ili samo "familija". Ako je potrebno istaći domen funkcije, to se obično čini u zagradama, recimo $(i \in I)$.

Dakle, pod *familijom* $x = \{x_i \mid i \in I\}$ podrazumevamo funkciju $x : I \overset{na}{\to} X$, gde je $\operatorname{dom}(x) = I$ i $\operatorname{ran}(x) = X$.

DEFINICIJA 10. Pod *familijom* $\{x_i\}$ *podskupova skupa* a podrazumeva se funkcija $x : I \to \mathcal{P}(a)$.

Ako je $\{x_i\}$ familija podskupova skupa a, za uniju kodomena te familije se kaže da je *unija familije* $\{x_i\}$ ili *unija skupova* x_i; ta unija se obeležava sa

$$\bigcup_{i \in I} x_i \text{ ili sa } \bigcup_i x_i,$$

u zavisnosti od toga koliko je važno istaći skup indeksa I.

Dakle, važi

TEOREMA 9. $y \in \bigcup_i x_i$ *ako i samo ako* $y \in x_i$ *bar za jedan* i, *tj.*

$$y \in \bigcup_i x_i \Leftrightarrow \exists i \; y \in x_i$$

Za $I = 2$, kada je kodomen familije $\{x_i\}$ skup $\{x_0, x_1\}$, važi

$$\bigcup_i x = x_0 \cup x_1.$$

Svaka kolekcija skupova predstavlja kodomen neke familije. Jer, svaka kolekcija skupova može se posmatrati kao skup indeksa, a identičko preslikavanje te kolekcije kao familija.

TEOREMA 10. *Neka je* $\{I_j\}$ *familija skupova sa domenom* J; *neka je*

$$K = \bigcup_j I_j$$

i neka je $\{x_k\}$ *familija skupova sa domenom* K. *Tada je*

$$\bigcup_{k\in K} x_k = \bigcup_{j\in J}(\bigcup_{i\in I_j} x_i)$$

(uopštenje asocijativnog zakona za unije).

Na sličan način može se uopštiti i komutativni zakon za unije.

DEFINICIJA 11. Ako je $\{x_i\}$ neprazna familija skupova (to je familija čiji je domen $I \neq \emptyset$), onda se pod *presekom* familije $\{x_i\}$ podrazumeva presek kodomena te familije i obeležava se sa

$$\bigcap_{i\in I} x_i \text{ ili sa } \bigcap_i x_i,$$

već prema tome koliko je važno da se istakne skup indeksa.

Dakle, važi

TEOREMA 11. $y \in \bigcap_i x_i \Leftrightarrow \forall i\ y \in x_i$.

TEOREMA 12. (1) *Neka je* $\{x_i\}$ *familija podskupova skupa* a *i neka je* $b \subseteq a$; *tada važe sledeće jednakosti:*

$$b \cap (\bigcup_i x_i) = \bigcup_i (b \cap x_i)$$

i

$$b \cup (\bigcap_i x_i) = \bigcap_i (b \cup x_i).$$

(2) *Ako su* $\{x_i\}$ i $\{y_j\}$ *familije skupova, onda važe jednakosti:*

$$(\bigcup_i x_i) \cap (\bigcup_j y_j) = \bigcup_{i,j}(x_i \cap y_j)$$

i

$$(\bigcap_i x_i) \cup (\bigcap_j y_j) = \bigcap_{i,j}(x_i \cup y_j),$$

gde $\bigcup_{i,j}$ *znači* $\bigcup_{(i,j)\in I\times J}$.

Koristeći pojam familije uopštava se pojam Dekartovog proizvoda. Postoji 1-1 korespondencija između Dekartovog proizvoda $a \times b$ i određenog skupa familija. Neka je $\{x, y\}$ proizvoljan neuređen par, gde je $x \neq y$ i neka je Z skup svih familija z, koje su indeksirane skupom $\{x, y\}$, tako da je $z_x \in a$ i $z_y \in b$. Funkcija $f : Z \to a \times b$, definisana sa $f(z) = (z_a, z_b)$ predstavlja pomenutu 1-1 korespondenciju.

DEFINICIJA 12. Ako je $\{X_i\}$ familija skupova ($i \in I$), onda se pod *Dekartovim* ili *direktnim proizvodom* te familije podrazumeva skup $\{f \mid (f : I \to \bigcup_i X_i) \wedge (\forall i\ f(i) \in X_i\}$.

Dekartov proizvod se u ovoj knjizi označava sa

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ ili sa } \prod_i X_i.$$

Može se reći i da je Dekartov proizvod familije $\{X_i \mid i \in I\}$ skup svih familija $\{x_i\}$, gde je $x_i \in X_i$, za svaki $i \in I$.

Ako je za svaki $i \in I$ $X_i = X$, za neki dati skup X, onda se Dekartov proizvod zove *Dekartov stepen* i obeležava se sa X^I.

Ako je $I = \{a, b\}$ i $a \neq b$, onda se $X_a \times Y_b$ izjednačava sa Dekartovim proizvodom koji je ranije definisan, a ako je $I = \{a\}$, onda se $\prod_{i \in I} X_i$ izjednačava sa X_a.

Uređene trojke, *uređene četvorke* i, uopšte, *uređene n-torke* definišu se kao familije čiji su skupovi indeksa neuređene trojke, neuređene četvorke, i uopšte, neuređene n-torke.

Neka je $\{X_i\}$ familija skupova ($i \in I$) i neka je X njen Dekartov proizvod; ako je $J \subseteq I$, onda svakom elementu iz X odgovara jedan element Dekartovog proizvoda

$$\prod_{i \in J} X_i. \tag{1}$$

Svaki element x iz X je familija $\{x_i\}$, tj. funkcija od I; odgovarajući element y iz (1) dobija se kada se ta funkcija ograniči na J. Dakle, $y_i = x_i$ za svaki $i \in J$. Korespondencija $f_J : x \overset{na}{\to} y$ zove se *projekcija od X na $\prod_{i \in J} X_i$*.

Ako je J jednočlan skup $\{j\}$, piše se f_j umesto $f_{\{j\}}$. Ovde je reč "projekcija" dvosmislena, jer ona označava i vrednost funkcije f_j za argument x, tj. x_j; u ovom slučaju za x_j se kaže i da je *j-ta koordinata od x*.

DEFINICIJA 13. Funkcija na Dekartovom proizvodu zove se *funkcija više promenljivih*, a funkcija na Dekartovom proizvodu $X_a \times X_b$ zove se *funkcija dve promenljive*.

Na sličan način se definiše *funkcija n promenljivih* ili *funkcija sa n argumenata*.

DEFINICIJA 14. *Dijagonalna injekcija* skupa X u Dekartov stepen X^I je funkcija $d : X \to X^I$ definisana tako da je $d(x) \in X^I$ konstantna funkcija $(d(x))(i) = x$ za svaki $x \in X$.

DEFINICIJA 15. Neka je $\mathcal{H} = \{h_i : X_i \to Y_i \mid i \in I\}$ familija funkcija, neka je $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, $Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$, $\Phi = \prod_{i\in I} X_i$ i $\Psi = \prod_{i\in I} Y_i$. Definišimo funkciju $H : \Phi \to \Psi$ ovako: za svaku $x \in \Phi$, $H(x)$ je funkcija $H(x) : I \to Y$ definisana sa $[H(x)](i) = h_i(x_i)$, za svaki $i \in I$. Budući da je za svaki $i \in I$, $x_i \in X_i$, sledi da je $h_i(x_i)$ potpuno određena tačka u Y_i. Funkcija H označava se i sa $\prod_{i\in I} h_i$ i zove se *Dekartov proizvod familije* $\mathcal{H}$.

Ako je $I = \{1, \ldots, n\}$, onda se Dekartov proizvod familije H označava i sa $h_1 \times \ldots \times h_n$.

DEFINICIJA 16. Neka je $X = X_i$ za svaki $i \in I$ i neka je d dijagonalna injekcija skupa X u X^I; tada se kompozicija h, $h = Hd$, funkcija H i d, $h : X \to \prod_{i\in I} Y_i$, zove *ograničeni Dekartov proizvod familije* $\mathcal{H} = \{h_i : X \to Y_i \mid i \in I\}$.

DEFINICIJA 17. Za skup koji pripada nekoj familiji i sadržan je u svim članovima te familije kaže se da je *najmanji skup u toj familiji*; za skup koji pripada nekoj familiji i sadrži sve njene elemente kaže se da je *najveći skup u toj familiji.*

TEOREMA 13. (1) $(\bigcup_i x_i) \times (\bigcup_i y_i) = \bigcup_{i,j}(x_i \times y_j)$;

(2) $(\bigcap_i x_i) \times (\bigcap_j y_j) = \bigcap_{i,j}(x_i \times y_j)$, *ako su domeni familija neprazni. Takođe, pod istom pretpostavkom za presek, može se dokazati*

(3) $\bigcap_i x_i$ *je najveći skup u odnosu na* $\subseteq$ *koji je sadržan u svakom članu familije* (ako je neki skup y sadržan u svakom članu familije, onda je $y \subseteq \bigcap_i x_i$); i

(4) $\bigcup_i x_i$ *je najmanji skup u odnosu na* $\subseteq$ *u koji je uključen svaki član familije* (ako je svaki član familije uključen u neki skup y, onda je $\bigcup_i x_i \subseteq y$).

Za svaku funkciju $f : a \to b$ postoji funkcija (koja se često takođe označava sa f) $g : \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(b)$, gde je $g(z) = \{y \in b \mid (\exists x \in z)\ f(x) = y\}$ za svaki $z \in \mathcal{P}(a)$, koja svaki podskup z skupa a preslikava na $f(z)$.

TEOREMA 14. *Ako je* $\{x_i\}$ *familija podskupova skupa* a, *onda je*

$$g(\textstyle\bigcup_i x_i) = \bigcup_i g(x_i).$$

Odgovarajuća jednakost ne važi za preseke, sem ukoliko je f 1-1, kada ona važi; u opštem slučaju imamo

$$g(\bigcap_i x_i) \subseteq \bigcap_i g(x_i).$$

TEOREMA 15. (1) *Za funkciju $\Theta : X^2 \to X^2$ definisanu sa $\Theta(a,b) = (b,a)$ za svaku tačku Dekartovog kvadrata X^2 važi $\Theta d = d$, gde je $d : X \to X^2$ dijagonalna injekcija;*

(2) *Neka je Φ Dekartov proizvod familije $\{X_i \mid i \in I\}$ i neka su $\pi_i : \Phi \to X_i$, $i \in I$ njegove projekcije; tada je ograničeni Dekartov proizvod familije $\{\pi_i \mid i \in I\}$ identičko preslikavanje u Φ;*

(3) *Neka je d dijagonalna injekcija, $d : X \to X^I$, i neka su $\pi_i : X^I \to X$, $i \in I$, projekcije Dekartovog stepena X^I; tada je kompozicija $\pi_i \cdot d : X \to X$ identičko preslikavanje za svaki $i \in I$.*

6. PRIRODNI BROJEVI

Pod *prirodnim brojevima* podrazumevaju se u ovoj knjizi brojevi 0, 1, 2, ... Prva tri prirodna broja već su definisana; pokazaćemo kako se u teoriji skupova svaki prirodan broj može definisati. To ćemo učiniti polazeći samo od do sada uvedenih aksioma i aksiome beskonačnosti, koja je data u ovom poglavlju.

Za svaki skup x definišimo skup x^+ koji se zove *neposredni sledbenik skupa* x.

DEFINICIJA 1. *Za svaki skup x neposredni sledbenik skupa x je skup $x^+ = x \cup \{x\}$.*

Ako je y neposredni sledbenik skupa x, onda se x zove *neposredni prethodnik skupa* y.

Sada se nekoliko prvih prirodnih brojeva može definisati ovako:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 1 &= 0^+, \\ 2 &= 1^+, \\ 3 &= 2^+. \end{aligned}$$

Uopšte, ako je prirodan broj n već definisan, onda sledeći prirodan broj možemo definisati kao n^+. Neformalno govoreći, svaki prirodan broj je skup svojih prethodnika (*prethodnik* prirodnog broja n je svaki prirodan broj koji je manji od n). Na primer, $0 = \emptyset$, jer 0 nema prethodnike, $1 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$, dok je $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$.

Iz definicija prirodnih brojeva ne proizlazi da postoji skup kojem svi oni pripadaju. Postojanje takvog skupa uvodi se *aksiomom beskonačnosti*.

AKSIOMA BESKONAČNOSTI. *Postoji skup koji sadrži 0 i neposrednog sledbenika svakog svog elementa, tj.*

$$\exists x (0 \in x \land \forall y (y \in x \Rightarrow y^+ \in x)).$$

DEFINICIJA 2. Skup x je *skup sledbenika* ako i samo ako je $0 \in x$ i $\forall n\ (n \in x \Rightarrow n^+ \in x)$.

Aksiomom beskonačnosti se tvrdi da *postoji bar jedan skup sledbenika*.

TEOREMA 1. *Presek svake neprazne familije skupova sledbenika je takođe skup sledbenika.*

Obeležimo presek svih skupova sledbenika koji su sadržani u skupu x, koji postoji na osnovu aksiome beskonačnosti, slovom ω. Skup ω je podskup svakog skupa sledbenika. U to se možemo lako uveriti. Neka je y skup sledbenika; tada je i $x \cap y$ skup sledbenika, pa kako je $x \cap y \subseteq x$, skup $x \cap y$ je uzet u obzir u definiciji skupa ω. Prema tome, $\omega \subseteq x \cap y$ i otuda $\omega \subseteq y$.

Prema aksiomi ekstenzionalnosti, postoji samo jedan skup sledbenika koji je podskup svakog skupa sledbenika i to je ω.

DEFINICIJA 3. Skup ω je *najmanji* skup sledbenika.

DEFINICIJA 4. *Prirodan broj* je element najmanjeg skupa sledbenika.

DEFINICIJA 5. Familija $\{X_i\}$ čiji je skup indeksa neki prirodan broj ili ω zove se *niz*; taj niz je *konačan* kada je skup indeksa neki prirodan broj i (*prebrojivo*) *beskonačan* kada je skup indeksa ω. Ako je $\{X_i\}$ niz skupova čiji je skup indeksa prirodan broj n^+, onda se unija tog niza obeležava sa

$$\bigcup_{i=0}^{n} X_i \text{ ili sa } X_0 \cup \ldots \cup X_n.$$

Ako je skup indeksa ω, onda se piše

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i \text{ ili } X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots.$$

Slično se obeležavaju preseci i Dekartovi proizvodi nizova:

$$\bigcap_{i=0}^{n} X_i \text{ ili } X_0 \cap \ldots \cap X_n\ ,$$

$$\prod_{i=0}^{n} X_i \text{ ili } X_0 \times \ldots \times X_n$$

i

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} X_i \text{ ili } X_0 \cap X_1 \cap X_2 \ldots\ ,$$

$$\prod_{i=0}^{\infty} X_i \text{ ili } X_0 \times X_1 \times X_2 \ldots .$$

Ponekad nizovi počinju sa 1, a ne sa 0; to znači da se umesto ω posmatra $\omega \setminus \{0\}$.

Nizovi se obeležavaju i sa $x \mapsto y_x$, gde se podrazumeva da je x element skupa indeksa, a y_x x-ti član niza.

Preslikavanje $f : x \overset{na}{\rightarrow} y$, za $x \subseteq \omega$ zove se i *enumeracija* ili *nabrajanje*.

Da je ω skup sledbenika znači da je

(I) $$0 \in \omega$$

i da važi

(II) $$(\forall n \in \omega)\ n^+ \in \omega.$$

Da je ω najmanji skup sledbenika znači

(III) ako je $S \subseteq \omega$ takav da važi

(III.1) $$0 \in S$$

i

(III.2) $$(\forall n \in S)\ n^+ \in S$$

onda je $S = \omega$.

(III) je princip *matematičke indukcije*. On se koristi na sledeći način. Pretpostavimo da želimo da dokažemo da neko tvrđenje (uslov) $A(n)$ važi za svaki prirodan broj. Neka je $S \subseteq \omega$ skup svih prirodnih brojeva za koje $A(n)$ važi. Ako dokažemo da je $S = \omega$, dokazali smo da $A(n)$ važi za svaki prirodan broj.

Kako se dokazuje $S = \omega$? Na osnovu (III), za to je dovoljno dokazati (III.1) i (III.2). Tvrđenje (III.1) zove se *baza indukcije*. Kako se dokazuje (III.2)? Neka n označava bilo koji prirodan broj; ako iz pretpostavke da je $n \in S$ proizlazi da je i $n^+ \in S$, onda je za proizvoljan prirodan broj n dokazano da $(*)$ $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$; budući da je n *bilo koji* prirodan broj, tvrđenje $(*)$ znači isto što i (III.2). U dokazivanju da važi $(*)$ pretpostavka da je $n \in S$ zove se *indukcijska pretpostavka*; izvođenje tvrđenja da je $n^+ \in S$, iz indukcijske pretpostavke, zove se *korak indukcije*. Dakle, (III.2) se dokazuje u koraku indukcije.

Prirodni brojevi imaju i neke druge važne osobine. Upoznaćemo neke od njih.

TEOREMA 2. $(\forall n \in \omega)\ n^+ \neq 0$.

Ovo tvrđenje je trivijalno, jer n^+ sadrži n, pa n^+ nije prazan. I sledeću osobinu izreći ćemo u vidu teoreme.

TEOREMA 3. *Nijedan prirodan broj nije podskup nekog svog elementa.*

DOKAZ. Neka je S skup svih prirodnih brojeva koji nisu sadržani u nekom svom elementu, tj. $\forall n(n \in S \Leftrightarrow (n \in \omega \wedge (\forall x \in n)\ n \not\subseteq x))$. Budući da 0 nije podskup nijednog svog elementa, sledi da je $0 \in S$.

Pretpostavimo da je $n \in S$ (indukcijska pretpostavka). Budući da je $n \subseteq n$, zaključujemo da je $n \notin n$. Dakle, $n^+ \not\subseteq n$. Ako je $n^+ \subseteq x$, onda je $n \subseteq x$, pa zbog $n \in S$ imamo $x \notin n$. Odavde proizlazi da n^+ nije podskup ni skupa n niti nekog elementa skupa n. Prema tome, n^+ nije podskup nijednog elementa skupa n^+, pa je, dakle, $n^+ \in S$. Prema (III), $S = \omega$.

POSLEDICA. $(\forall n \in \omega)\ n \notin n$.

DEFINICIJA 6. Za skup x se kaže da je *tranzitivan* ako i samo ako važi:

$$(\forall y \in x)\ y \subseteq x.$$

TEOREMA 4. *Svaki prirodan broj je tranzitivan.*

DOKAZ. Neka je sada S skup svih tranzitivnih prirodnih brojeva; dakle, važi $\forall n(n \in S \Leftrightarrow (n \in \omega \wedge (\forall x \in n)\ x \subseteq n))$. Pogledajmo 0; svakako je istina da ako je $x \in 0$, onda je $x \subseteq 0$. Ovo tvrđenje ne može biti lažno, jer bi tada postojao $x \in \emptyset$ za koji važi $x \not\subseteq \emptyset$, što nije moguće. Budući da je $0 \in \omega$, dokazali smo $n \in \omega \wedge (\forall x \in 0)\ x \subseteq 0$, pa sledi $0 \in S$.

Pretpostavimo da je $n \in S$ (indukcijska pretpostavka). Ako je $x \in n^+$, onda je ili $x \in n$ ili $x = n$. U prvom slučaju je $x \subseteq n$ na osnovu indukcijske pretpostavke, pa je i $x \subseteq n^+$. U drugom slučaju $x \subseteq n^+$ očigledno važi. Dakle, svaki element skupa n^+ je podskup skupa n^+, pa je $n^+ \in S$. Prema (III), $S = \omega$.

TEOREMA 5. $(\forall m, n \in \omega)\ (m^+ = n^+ \Rightarrow m = n)$.

DOKAZ. Pretpostavimo da su m i n prirodni brojevi i da je $m^+ = n^+$. Budući da je $m \in m^+$, sledi da je $m \in n^+$, pa je ili $m \in n$ ili $m = n$. Na sličan način zaključujemo da je ili $n \in m$ ili $n = m$. Prema tome, ako je $m \neq n$, mora biti $m \in n$ i $n \in m$, i stoga, prema teoremi 4, $m \subseteq n \subseteq m$, tj. $m = n$. Dakle, svakako je $m = n$.

Neki principi teorije prirodnih brojeva, zajedno sa principima teorije skupova, dovoljni su za definisanje celih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva kao i za dokazivanje njihovih aritmetičkih i analitičkih svojstava. Ti principi su poznati kao *Peanove aksiome.*

PEANOVE AKSIOME

(1) *0 je prirodan broj.*

(2) *Ako je n prirodan broj, onda je to i n^+. Za svaki prirodan broj n, $n^+ \neq 0$.*

(3) *Za prirodne brojeve m i n, ako je $m^+ = n^+$, onda je $m = n$.*

(4) *Za svaki podskup S skupa prirodnih brojeva, ako je $0 \in S$ i ako je $n^+ \in S$ kadgod je $n \in S$, onda je $S = \omega$.*

Peanove aksiome su ovde dokazane u prethodnim teoremama, pri čemu umesto "skup prirodnih brojeva" i "prirodan broj" stoji "skup ω" i "element skupa ω", pa se, strogo govoreći, ne bi mogle smatrati aksiomama. Njih je Đuzepe Peano (Giuseppe Peano 1852-1932) uzeo za definiciju prirodnih brojeva.

Neki postupci koji su nalik na princip matematičke indukcije često se koriste u definisanju. Neka je f funkcija, $f : x \to x$ i neka je $a \in x$. Pretpostavimo da želimo da definišemo funkciju $g : \omega \to x$ (tj. beskonačan niz $\{g(n)\}$ elemenata skupa x) za koju važi: $g(0) = a$, $g(1) = f(g(0))$, $g(2) = f(g(1))$ itd. Tada možemo primeniti sledeći induktivni postupak u opisivanju funkcije g : $g(0) = a$ i za svaki $n \in \omega$, $g(n^+) = f(g(n))$. Koristeći princip matematičke indukcije može se dokazati da postoji najviše jedna takva funkcija, ali on nije dovoljan da se dokaže da postoji bar jedna takva funkcija. Za to služi *teorema rekurzije.*

TEOREMA 6 (TEOREMA REKURZIJE). *Za svaki skup x, funkciju $f : x \to x$ i element a skupa x postoji tačno jedna funkcija $g : \omega \to x$ za koju važi* (1) $g(0) = a$ *i* (2) $(\forall n \in \omega)\ g(n^+) = f(g(n))$.

DOKAZ. Neka je y kolekcija svih podskupova z, $z \subseteq \omega \times x$ za koje važi (1′) $(0, a) \in z$ i (2) za svaki $n \in \omega$, ako $(n, k) \in z$ onda $(n^+, f(k)) \in z$. Jasno je da je $\omega \times x \in y$, pa postoji presek g kolekcije y. Nije teško ustanoviti da je $g \in y$, tj. da je g najmanji skup u y. Treba još dokazati da je g funkcija. Neka je S skup svih prirodnih brojeva n za koje važi: (3) postoji tačno jedan $k \in x$ za koji je $(n, k) \in g$.

Pretpostavimo da $0 \notin S$; tada postoji $b \in x$, $a \neq b$, za koji je $(0, b) \in g$. Budući da je $a \neq b$, važi $(0, a) \in g \setminus \{(0, b)\}$. Kako je $n^+ \neq 0$, sledi $(0, b) \neq (n^+, f(k))$, pa ako je $(n, k) \in g \setminus \{(0, b)\}$, mora biti i $(n^+, f(k)) \in g \setminus \{(0, b)\}$. To znači da je $g \setminus \{(0, b)\} \in y$, pa g nije najmanji skup u y. Dakle, $0 \in S$.

Neka je $n \in S$; to znači da postoji $k \in x$ za koji je (3′) $(n, k) \in g$ i (4′) za sve $k, l \in x$, ako je $(n, k) \in g$ i $(n, l) \in g$, onda je $k = l$. Na osnovu (3′), $(n^+, f(k)) \in g$.

Pretpostavimo da je $n^+ \notin S$; tada je $(n^+, b) \in g$ za neki b iz x za koji je $b \neq f(k)$. Budući da je $n^+ \neq 0$, imamo $(0, a) \in g \setminus \{(n^+, b)\}$. Za $m \in \omega$ i $t \in x$, ako je $(m, t) \in g \setminus \{(n^+, b)\}$, onda je i $(m^+, f(t)) \in g \setminus \{(n^+, b)\}$. Jer, ako je $m = n$, onda je $t = k$, pa kako je $b \neq f(k)$, sledi da je $(n^+, f(k)) \in g \setminus \{(n^+, b)\}$; ako je $m \neq n$, onda je i $m^+ \neq n^+$, pa je opet $(m^+, f(k)) \in g \setminus \{(n^+, b)\}$. To znači da je $g \setminus \{(n^+, b)\} \in y$, pa opet g nije najmanji skup u y. Dakle, $n^+ \in S$. Na osnovu principa matematičke indukcije, $S = \omega$.

Pretpostavimo da postoje dve funkcije, g_1 i g_2, za koje je $g_1(0) = g_2(0) = a$ kao i $g_1(n^+) = f(g_1(n))$ i $g_2(n^+) = f(g_2(n))$, za svaki $n \in \omega$. Primenimo matematičku indukciju; na osnovu indukcijske pretpostavke, $g_1(n) = g_2(n)$, pa je $g_1(n^+) = f(g_1(n)) = f(g_2(n)) = g_2(n^+)$. Na osnovu principa matematičke indukcije sledi $g_1(n) = g_2(n)$ za svaki $n \in \omega$, tj. $g_1 = g_2$.

DEFINICIJA 7. Primena teoreme rekurzije koja se sastoji u definisanju funkcije $g : \omega \to x$, kada je data funkcija $f : x \to x$ i određeni $a \in x$, pomoću uslova (1) i (2) te teoreme, zove se *definicija rekurzijom* ili *rekurzivna definicija*.

TEOREMA 7. (1) $(\forall n \in \omega) n \neq n^+$.

(2) $(\forall n \in \omega)\ (n \neq 0 \Rightarrow (\exists m \in \omega)\ n = m^+)$.

(3) ω *je tranzitivan skup.*

(4) *Ako je* $x \neq \emptyset$ i $x \subset n$ za neki $n \in \omega$, onda je $(\exists y \in x)(\forall m \in x)\ (m \neq y \Rightarrow y \in m)$.

Primenićemo teoremu rekurzije u definisanju aritmetičkih operacija. Na osnovu te teoreme za svaki prirodan broj m postoji tačno jedna funkcija $s_m : \omega \to \omega$ za koju je $s_m(0) = m$ i za svaki prirodan broj n $s_m(n^+) = (s_m(n))^+$. Vrednost $s_m(n)$ funkcije s_m je *zbir* $m + n$. Jasno je da je s_m *funkcija sabiranja sa brojem* m.

DEFINICIJA 8. (1) $m + 0 = m$ i (2) $m + n^+ = (m + n)^+$.

Osnovne osobine sabiranja mogu se dokazati primenjujući princip matematičke indukcije.

TEOREMA 8. *Za sve prirodne brojeve* k, m *i* n

$$(k + m) + n = k + (m + n)$$

(sabiranje je *asocijativno*).

DOKAZ. Baza indukcije je $(k + m) + 0 = k + (m + 0)$. Zatim, $(k + m) + n^+ = ((k + m) + n)^+$ na osnovu definicije. Na osnovu indukcijske pretpostavke je

$$(k + m) + n = k + (m + n),$$

pa je, opet na osnovu definicije,

$$(k + m) + n^+ = (k + (m + n))^+ = k + (m + n)^+ = k + (m + n^+).$$

Tvrđenje je dokazano matematičkom indukcijom po n.

TEOREMA 9. *Za sve prirodne brojeve* m *i* n,

$$m + n = n + m$$

(sabiranje je *komutativno*).

DOKAZ. Ovo tvrđenje se dokazuje tako što se prvo indukcijom po n dokaže da je (1) $0 + n = n$ i (2) da je $m^+ + n = (m + n)^+$, pa se onda primeni indukcija po m.

Na osnovu teoreme rekurzije za svaki prirodan broj m postoji tačno jedna funkcija p_m za koju je $p_m(0) = 0$ i za svaki prirodan broj n $p_m(n^+) = p_m(n) + m$. Vrednost $p_m(n)$ funkcije p_m je *proizvod* $m \cdot n$. Funkcija p_m je *funkcija množenja brojem* m.

DEFINICIJA 9. (1) $m \cdot 0 = 0$ i (2) $m \cdot n^+ = (m \cdot n) + m$.

TEOREMA 10. *Množenje je asocijativno, komutativno i važi distributivni zakon:*

$$(\forall k, m, n \in \omega)\ k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n.$$

Na osnovu teoreme rekurzije za svaki prirodan broj m postoji tačno jedna funkcija e_m za koju je $e_m(0) = 1$ i za svaki prirodan broj n $e_m(n^+) = e_m(n) \cdot m$. Vrednost $e_m(n)$ funkcije e_m je *n-ti stepen broja m*. Funkcija e_m je *funkcija stepenovanja broja m*.

DEFINICIJA 10. (1) $m^0 = 1$ i (2) $m^{n^+} = m^n \cdot m$.

I osobine ove funkcije dokazuju se primenom matematičke indukcije.

DEFINICIJA 11. Za prirodne brojeve m i n se kaže da su *uporedivi* ako i samo ako je $m \in n$ ili je $m = n$ ili je $n \in m$.

TEOREMA 11. *Svaka dva prirodna broja su uporediva.*

DOKAZ. Neka za svaki $n \in \omega$ $S(n)$ bude skup svih prirodnih brojeva koji su uporedivi sa n i neka S bude skup svih prirodnih brojeva n za koje je $S(n) = \omega$.

Vidi se da je $0 \in S(0)$. Ako je $m \in S(0)$, onda je $m = 0$ (pa je $0 \in m^+$) ili je $0 \in m$ (i opet je $0 \in m^+$). Dakle, ako je $m \in S(0)$, onda je $m^+ \in S(0)$, pa je $S(0) = \omega$.

Neka je $S(n) = \omega$. Budući da je $n^+ \in S(0)$, sledi $0 \in S(n^+)$. Pretpostavimo da je $m \in S(n^+)$; tada su m i n^+ uporedivi. Ako je $n^+ \in m$, onda je $n^+ \in m^+$. Ako je $n^+ = m$, onda je opet $n^+ \in m^+$. U oba slučaja su m^+ i n^+ uporedivi. Neka je $m \in n^+$. Ako je $m = n$, onda je $m^+ = n^+$, pa su m^+ i n^+ uporedivi. Ako je $m \in n$, na osnovu indukcijske pretpostavke, $m^+ \in S(n)$, pa imamo još (1) $m^+ \in n$ ili (2) $m^+ = n$ ili (3) $n \in m^+$. Ali, ako je (3), onda je ili $n \in m$ ili $n = m$; obe alternative su u suprotnosti sa $m \in n$. S druge strane, i

(1) i (2) povlače $m^+ \in n^+$. Prema tome, ako je $m \in S(n^+)$, onda je i $m^+ \in S(n^+)$. Dakle, $S(n^+) = \omega$.

Time je dokazano da je $S(n) = \omega$ za svaki $n \in \omega$.

TEOREMA 12. *Za svaka dva prirodna broja m i n važi tačno jedna od sledećih mogućnosti: $m \in n$, $m = n$ ili $n \in m$.*

DOKAZ. Bilo koje dve mogućnosti uzete zajedno povlače da je neki prirodan broj podskup jednog svog elementa, suprotno teoremi 3.

TEOREMA 13. $m \in n \Leftrightarrow m \subset n$.

DEFINICIJA 12. Ako je $m \in n$, piše se $m < n$ i kaže se da je prirodan broj m *manji* od prirodnog broja n. Ako je $m < n$ ili $m = n$, onda se piše $m \leq n$ i kaže se da m *nije veći od* n ili da je *manji ili jednak od* n. Ako je $m < n$, onda je n *veći* od m i piše se i $n > m$. Slično se definiše i *biti veći ili jednak*.

TEOREMA 14. (1) *Relacija $\leq$ je refleksivna i tranzitivna, a $<$ je samo tranzitivna.*

(2) $m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$.
(3) $m < n \Rightarrow m + k < n + k$.
(4) $m < n \wedge k \neq 0 \Rightarrow m \cdot k < n \cdot k$.
(5) $m < n \Rightarrow (\exists k \in \omega)\ (k \neq 0 \wedge m + k = n)$.
(6) $m < n \wedge m \neq 0 \Rightarrow (\exists k \in \omega)\ (k \neq 0 \wedge m \cdot k > n)$.

Pokazaćemo kako se teorema rekurzije može primeniti u definisanju nekih Dekartovih proizvoda koje smo ranije već definisali.

Za svaki $n \in \omega \setminus \emptyset$ i familiju skupova $\{X_i\}$, $i \leq n$, Dekartov proizvod $\prod_{i=1}^{n} X_i$ definisan je rekurzivno ovako: za $n = 1$ to je X_1, a za $n > 1$ to je $(\prod_{i=1}^{n-1} X_i) \times X_n$.

Ako je $X = X_1 = X_2 = \ldots X_n$, Dekartov proizvod $X_1 \times \ldots \times X_n$ se zove *Dekartov n-ti stepen skupa* X i obeležava se sa X^n.

DEFINICIJA 13. Elementi skupa X^n zovu se *uređene n-torke elemenata skupa* X.

DEFINICIJA 14. *Relacija dužine n (n-arna relacija) skupa X* je neki podskup skupa X^n.

Jedna od posledica principa matematičke indukcije je i *princip najmanjeg broja.*

TEOREMA 15 (PRINCIP NAJMANJEG BROJA). *Ako je x neprazan podskup skupa ω, onda x ima najmanji element, tj.* $(\forall x \subseteq \omega)\ (x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists m \in x)\ \forall k \in x\ m \leq k)$.

DOKAZ. Neka je $x \subseteq \omega$ i $x \neq \emptyset$; pretpostavimo da ne postoji najmanji element u x. Neka je y skup svih onih prirodnih brojeva m za koje važi $(\forall n \in x)\ m < n$. Tada je $0 \in y$, jer bi inače bilo $0 \in x$, pa bi 0 bio najmanji element skupa x. Neka je $m \in y$; jasno je da $m < n$ povlači $m^+ \leq n$. Ali, $m < n$ važi za svaki $n \in x$, pa je i $m^+ < n$. Jer, ako je $m^+ \in x$, onda je m^+ najmanji element skupa x, suprotno pretpostavci. Dakle, $m^+ < n$ za svaki $n \in x$, pa je $m^+ \in y$. To znači da je $y = \omega$, pa imamo $x \subseteq \omega \setminus y$ i $x = \emptyset$, suprotno pretpostavci teoreme. Dakle, x ima najmanji element.

Jedno svojstvo ili osobina prirodnih brojeva može se posmatrati kao podskup skupa ω, jer su svojstva ili osobine relacije dužine 1, a relacije smo izjednačili sa njihovim grafovima. Prethodna teorema se može iskazati i ovako.

TEOREMA 16. *Ako neko svojstvo važi bar za jedan prirodan broj, onda postoji najmanji prirodan broj za koji to svojstvo važi.*

Pomoću principa najmanjeg broja dokazaćemo *princip potpune* ili *totalne indukcije.*

TEOREMA 17 (PRINCIP POTPUNE INDUKCIJE). *Ako iz pretpostavke da svaki prirodan broj koji je manji od nekog proizvoljnog prirodnog broja n ima neko svojstvo S sledi da i broj n ima svojstvo S, onda svaki prirodan broj ima svojstvo S, tj.* $\forall n(\forall m(m < n \Rightarrow m \in S) \Rightarrow n \in S) \Rightarrow S = \omega$.

DOKAZ. Pretpostavimo da teorema ne važi: tada imamo: (1) ako svaki prirodan broj m koji je manji od nekog proizvoljnog prirodnog broja n ima neko svojstvo S, onda i n ima svojstvo S i (2) postoji prirodan broj koji nema svojstvo S. Ako je S' svojstvo "nemati svojstvo S", onda, na osnovu (2) postoji bar jedan element iz ω koji ima svojstvo S'. Na osnovu principa najmanjeg broja, postoji najmanji prirodan broj k koji ima svojstvo S'. Jasno je da svaki broj m koji je manji od k ima svojstvo S. Sada iz (1) dobijamo da i k ima svojstvo S. Dakle, k ima i nema svojstvo S.

DEFINICIJA 15. Za skupove x i y se kaže da su *ekvipolentni, ekvipotentni, ekvivalentni, istobrojni* ili da su *iste moći* ili *iste kardinalnosti* ako i samo ako među njima postoji 1-1 korespondencija. Tada se piše $x \sim y$.

Lako se može ustanoviti da je ekvipotencija relacija ekvivalencije. Skup $\emptyset$ je ekvipotentan samo sa $\emptyset$.

TEOREMA 18. *Svaki pravi podskup nekog prirodnog broja n ekvipotentan je sa nekim elementom broja n.*

DOKAZ. Ako je $n = 0$, tvrđenje je trivijalno. Pretpostavimo da ono važi za n i neka je $x \subset n^+$; tada je ili $x \subset n$ ili je $x = n$ ili je $n \in x$. U prvom slučaju se može primeniti indukcijska pretpostavka dok je drugi trivijalan. U trećem slučaju postoji prirodan broj k, gde je $k \in n \setminus x$. Definišimo funkciju f na x ovako: $f(i) = i$ ako je $i \neq n$ i $f(n) = k$. Jasno je da je f 1-1 i da f slika x u n. Dakle, slika skupa x za funkciju f ili je jednaka broju n ili je ekvipotentna sa nekim elementom skupa n, pa je x ekvipotentan sa nekim elementom skupa n^+.

TEOREMA 19. *Nijedan prirodan broj nije ekvipotentan sa nekim svojim pravim podskupom.*

DOKAZ. Ako je $n = 0$, tvrđenje je trivijalno. Pretpostavimo da ono važi za n i da postoji 1-1 korespondencija f između n^+ i nekog pravog podskupa x skupa n^+. Ako je $n \notin x$, onda je $f|n$ 1-1 korespondencija između n i nekog pravog podskupa skupa n, što protivreči indukcijskoj pretpostavci. Neka je $n \in x$; tada je n ekvipotentan sa $x \setminus \{n\}$, pa je na osnovu indukcijske pretpostavke, $n = x \setminus \{n\}$. Odavde sledi da je $x = n^+$, pa x nije pravi podskup skupa n^+.

Na osnovu ovog tvrđenja jedan skup može biti ekvipotentan sa najviše jednim prirodnim brojem.

DEFINICIJA 16. Za skup x se kaže da je *konačan* ako i samo je ekvipotentan sa nekim prirodnim brojem; skup x je *beskonačan* ako i samo ako nije konačan.

TEOREMA 20. *Skup ω je beskonačan.*

DOKAZ. Funkcija $f : \omega \to \omega$ za koju je $f(n) = n^+$ za svaki $n \in \omega$ je 1-1. Kako je, za svaki $n \in \omega$, $f(n) \neq 0$, f preslikava ω na deo skupa $\omega \setminus \{0\}$ tj. na pravi podskup skupa ω. Lako se dokazuje da je f "na" funkcija.

TEOREMA 21. *Svaki podskup konačnog skupa je konačan.*

DEFINICIJA 17. Ako je x konačan skup, onda je *broj elemenata skupa* x onaj prirodan broj s kojim je x ekvipotentan. Broj elemenata skupa x obeležićemo ovde sa $\#(x)$.

TEOREMA 22. *Sledeća tvrđenja važe za konačne skupove x i y.*

(1) *Ako je $x \subseteq y$, onda je $\#(x) \leq \#(y)$.*

(2) *$x \cup y$ je konačan skup i $\#(x \cup y) = \#(x) + \#(y)$ ako je $x \cap y = \emptyset$.*

(3) *$x \times y$ i xy su konačni skupovi.*

(4) *$\#(x \times y) = \#(x) \cdot \#(y)$ i $\#(x^y) = \#(x)^{\#(y)}$.*

(5) *Unija konačnog skupa konačnih skupova je konačan skup.*

(6) *Presek neprazne familije konačnih skupova je konačan skup.*

(7) *Ako je $x \subset \omega$ neprazan konačan skup, onda je $(\exists k \in x)\ (\forall m \in x)\ m \leq k$.*

(8) *Nijedan konačan skup nije ekvipotentan ni sa jednim svojim pravim podskupom.*

(9) *Za svaku funkciju f, ako je $x = \mathrm{dom}(f)$, onda je $\mathrm{ran}(f)$ konačan skup.*

7. POREDAK I DOBRO UREĐENJE

U ovom poglavlju posmatraćemo (binarnu) relaciju *poretka.*

DEFINICIJA 1. Relacija R skupa X je *antisimetrična* ako i samo ako važi:

$$(\forall y, z \in X)\ (yRz \land zRy \Rightarrow y = z).$$

DEFINICIJA 2. *Relacija (parcijalnog) poretka, parcijalno (delimično) uređenje* ili *poredak skupa X (u skupu X)* je refleksivna, tranzitivna i antisimetrična relacija R u skupu X.

Uređen par (X, R), gde je X neprazan skup, a R relacija poretka definisana u X zove se *(parcijalno) uređen skup.*

Poredak se obično označava sa $\leq$.

DEFINICIJA 3. Relacija R u skupu X koja je refleksivna i tranzitivna zove se *pretporedak, kvaziporedak* ili *kvaziuređenje.*

Uređen par (X, R), gde je $X \neq \emptyset$, a R kvaziuređenje zove se *kvaziuređen skup.*

DEFINICIJA 4. Za (kvazi)poredak R u skupu X se kaže da je *totalan, prost* ili *linearan* ako i samo ako važi:

$$(\forall y, z \in X)\ (yRz \lor zRy).$$

Totalan poredak se zove i *totalno (prosto, linearno) uređenje.*

Uređen par (X, R), gde je $X \neq \emptyset$, a R totalno uređenje zove se *totalno uređen skup X.*

Totalno uređen skup zove se i *lanac.*

Relacija $\subseteq$ je primer poretka. Relacija $\subseteq$ u skupu X je totalno uređenje ako i samo je $X = \emptyset$ ili je X jednočlan skup. Primer totalnog uređenja je i $(\omega, \leq)$, gde je $\leq$ uobičajena relacija između prirodnih brojeva.

Umesto $x \leq y$ za poredak piše se i $y \geq x$; $\geq$ je relacija inverzna u odnosu na $\leq$.

DEFINICIJA 5. Ako je $x \leq y$, gde je $\leq$ relacija poretka, kaže se da je x *manji ili jednak* y (bez obzira što ne mora biti reč o brojevima ili o totalnom poretku), da x *nije veći od* y, da je y *veći ili jednak* x i da y *nije manji* od x.

Ako je $x \leq y$ i $y \neq x$, piše se $x < y$ ili $y > x$ i kaže se da je x (*strogo* ili *striktno*) *manji od* y ili da je y (*strogo* ili *striktno*) *veći od* x. Kaže se i da x *prethodi elementu* y kao i da je x *prethodnik elementa* y, a da je y *sledbenik elementa* x u odnosu na $<$.

Relacija $<$ definisana u skupu X zove se *relacija strogog* (*striktnog*) *poretka*, *strogo* (*striktno*) *uređenje*.

Uređen par $(X, <)$ zove se *strogo* (*striktno*) *uređen skup* X.

Relacija $<$ je tranzitivna i ni za koje x i y ne važi $x < y$ i $y < x$.

Odnos između $\leq$ i $<$ može se uopštiti za bilo koje relacije. Kada je data relacija R, onda se S može definisati ovako: $xSy \Leftrightarrow xRy \wedge x \neq y$. Kada je data relacija S, onda se R može definisati ovako: $xRy \Leftrightarrow xSy \vee x = y$. Relacija R je *slaba* u odnosu na S, a S je *stroga* u odnosu na R.

DEFINICIJA 6. Neka je X parcijalno uređen i neka je $a \in X$; skup $\{x \in X \mid x < a\}$ zove se (*strogi*) *početni segment* ili *komad* određen elementom a; skup $\{x \in X \mid x \leq a\}$ zove se *slabi početni segment* ili *komad* određen elementom a. Prvi ćemo obeležavati sa $\mathrm{st}(a)$, a drugi sa $\mathrm{sl}(a)$; prvi se zove i *skup strogih* a drugi *skup slabih prethodnika* elementa a. Ako je $x \leq y \leq z$, kaže se da je y *između* x i z; ako je $x < y < z$, kaže se da je y *strogo između* x i z. Ako je $x < z$ i ne postoji element y koji je strogo između x i z, onda se za x kaže da je *neposredni prethodnik elementa* z ili da je z *neposredni sledbenik elementa* x.

Umesto $\mathrm{st}(a)$ piše se i $(\cdot, a)$, a umesto $\mathrm{sl}(a)$ piše se i $(\cdot, a]$.

DEFINICIJA 7. Ako parcijalno uređen skup X ima element a za koji važi $a \leq x$, za svaki x iz X, onda se a zove *minimum*, *najmanji* ili *prvi* element skupa x (u odnosu na $\leq$) i piše se $\min(X) = a$; ako za element a iz X važi $x \leq a$, za svaki x iz X, onda se a zove *maksimum*, *najveći* ili *poslednji* element skupa X (u odnosu na $\leq$) i piše se $\max(X) = a$.

Drugim rečima, a je minimum skupa X ako i samo ako važi

$$(\forall x \in X)\ a \leq x.$$

Najmanji ili najveći element jedinstven je, ako postoji. Skup ω ima najmanji element (to je 0) u odnosu na $<$, ali nema najveći.

DEFINICIJA 8. Ako parcijalno uređen skup X ima element a za koji ne postoji element skupa X koji je strogo manji od a, onda se a zove *minimalan* element skupa X.

Drugim rečima, a je minimalan u skupu X ako i samo ako je $(\forall x \in X)\ x \leq a \Rightarrow x = a$. Za razliku od najmanjih, skup X može imati više minimalnih elemanata. Na primer, ako X nije jednočlan skup, onda je $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ parcijalno uređen relacijom $\subseteq$ u odnosu na koju je svaki jednočlan podskup skupa X minimalan u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

Slično se definiše *maksimalan* element skupa X: a iz X je maksimalan u X ako i samo ako u X ne postoji element koji je strogo veći od a.

DEFINICIJA 9. Neka je X parcijalno uređen skup i neka je $Y \subseteq X$; za element a iz X se kaže da je *donje ograničenje* (*donja granica*) ili *minoranta* podskupa Y ako i samo ako je $(\forall y \in Y)\ a \leq y$. Element a iz X je *gornje ograničenje* (*gornja granica*) ili *majoranta podskupa* Y ako i samo ako je $(\forall y \in Y)\ y \leq a$. Ako X ima bar jednu majorantu (minorantu), kaže se da je X *ograničen odozgo* (*odozdo*); ako je X ograničen odozgo i odozdo, kaže se da je X *ograničen*.

Funkcija f je (odozgo, odozdo) ograničena ako i samo ako je $\mathrm{ran}(f)$ (odozgo, odozdo) ograničen skup.

Neka je $\mu\iota(Y)$ skup minoranti podskupa Y, $Y \subseteq X$; skup $\mu\iota(Y)$ može biti prazan. Ako nije prazan, onda $\mu\iota(Y) \cap Y$ može biti prazan. Ako ovaj presek nije prazan, on je jednočlan skup koji sadrži najmanji element podskupa Y.

Ako sa $\mu\alpha(Y)$ označimo skup svih majoranti podskupa Y, onda slična razmatranja važe i za $\mu\alpha(Y)$.

DEFINICIJA 10. Ako $\mu\iota(Y)$ ima najveći element a (koji je jedinstven), onda se a zove *najveće donje ograničenje*, *najveća donja granica* ili *infimum podskupa* Y i označava se sa $\inf(Y)$ (čita se: "Inf podskupa Y"). Ako $\mu\alpha(Y)$ ima najmanji element a (koji je jedinstven), onda se a zove *najmanje gornje ograničenje*, *najmanja gornja* *granica* ili *supremum* podskupa Y i označava se sa $\sup(Y)$ (čita se: "Sup podskupa Y").

Razmatranje poretka završićemo navođenjem jedne relacije skupa $\omega \times \omega$ koja se često koristi i koja se zove *leksikografski poredak* zato što liči na poredak kojim se u rečnicima ređaju reči. Označimo je sa S i definišimo je ovako:

$$(a,b)S(x,y) \Leftrightarrow a < x \vee (a = x \wedge b \leq y).$$

DOBRO UREĐENJE

Važnu vrstu poretka čini *dobro uređenje*.

DEFINICIJA 11. Za parcijalno uređen skup se kaže da je *dobro uređen* ako i samo ako svaki njegov neprazan podskup ima najmanji element (u odnosu na to parcijalno uređenje).

Posledica ove definicije je činjenica da je svaki dobro uređen skup linearno uređen. Neka su x i y elementi dobro uređenog skupa; tada $\{x,y\}$ ima najmanji element, pa je $x \leq y$ ili $y \leq x$.

Svaki prirodan broj je dobro uređen skup, a to je i skup ω. Skup $\omega \times \omega$ dobro je uređen leksikografskim poretkom.

Za dobro uređene skupove važi princip *transfinitne indukcije*.

TEOREMA 1 (PRINCIP TRANSFINITNE INDUKCIJE). *Neka je Y podskup dobro uređenog skupa X i neka važi*

$$(1) \qquad (\forall x \in X)\ \mathrm{st}(x) \subseteq Y \Rightarrow x \in Y;$$

tada je $X = Y$.

DOKAZ. Ako je $X \setminus Y \neq \emptyset$, onda $X \setminus Y$ sadrži najmanji element, recimo a. To znači da je $\mathrm{st}(a) \subseteq Y$, pa je na osnovu indukcijske pretpostvake $a \in Y$. Dakle, $a \in Y \cap (X \setminus Y)$, što je nemoguće. Prema tome, $X \setminus Y = \emptyset$ i $Y = X$.

Dobro uređeni skupovi su tačno oni linearno uređeni skupovi koji imaju osobinu da (1) povlači $X = Y$. Drugim rečima, važi sledeće tvrđenje.

TEOREMA 2. *Neka je X linearno uređen skup; ako za svaki neprazan podskup Y skupa X važi*

$$(*) \qquad ((\forall x \in X)\ \mathrm{st}(x) \subseteq Y \Rightarrow x \in Y) \Rightarrow X = Y$$

tada je X dobro uređen skup.

DOKAZ. Neka je X linearno uređen skup za koji važi $(*)$ i pretpostavimo da X nije dobro uređen; tada postoji neprazan podskup $Y \subseteq X$ koji nema najmanji element. Ali, važi

$$(**) \qquad (\forall x \in X)\ \mathrm{st}(x) \subseteq X \setminus Y \Rightarrow x \in X \setminus Y,$$

jer bi inače za neki $x \in X$ bilo $\mathrm{st}(x) \subseteq X \setminus Y$ i $x \in Y$, pa bi, s obzirom na linearnost uređenja skupa X, x bio najmanji element skupa Y, suprotno pretpostavci.

$(*)$ i $(**)$ daju $X = X \setminus Y$, pa Y mora biti prazan, suprotno pretpostavci. Skup X je, dakle, dobro uređen.

DEFINICIJA 12. Dobro uređen skup X je *produžetak* dobro uređenog skupa Y ako i samo ako je (1) Y strogi početni komad skupa X i (2) poredak u Y je restrikcija na Y poretka u X, ili je $Y = X$.

Relacija "biti produžetak" je relacija poretka.

TEOREMA 3. *Ako je X dobro uređen skup, $x, y \in X$ i $x < y$, onda je $\mathrm{st}(y)$ produžetak segmenta $\mathrm{st}(x)$, a X je produžetak segmenata $\mathrm{st}(x)$ i $\mathrm{st}(y)$.*

Neka je X kolekcija početnih komada nekog dobro uređenog skupa; tada je X lanac u odnosu na produžetke, tj. u odnosu na relaciju poretka "biti produžetak". Drugim rečima, X je kolekcija dobro uređenih skupova u kojoj za svaka dva elementa važi da je jedan produžetak drugog.

TEOREMA 4. *Neka je X kolekcija dobro uređenih skupova koja je lanac u odnosu na produžetke i neka je*

$$Y = \bigcup X;$$

tada postoji tačno jedno dobro uređenje R skupa Y koje je produžetak svakog elementa (koji je različit od Y) skupa X.

DOKAZ. Ako su $a, b \in Y$, onda postoje $x, y \in X$ za koje je $a \in x$ i $b \in y$. Budući da je $x = y$ ili je jedan od ovih skupova produžetak drugog, postoji $z \in X$ kojem pripadaju i a i b. Poredak u Y se definiše tako što se skup $\{a, b\}$ uredi onako kako je on uređen u svakom elementu skupa X koji sadrži i a i b. Budući da je X lanac, ovaj poredak je jedinstven. Lako se proverava da je ovako definisan poredak traženo dobro uređenje skupa Y.

TRANSFINITNA REKURZIJA

Funkcija f u dobro uređenom skupu X može se definisati tako što će se vrednost funkcije f, za element $x \in X$ odrediti na osnovu vrednosti funkcije f za sve stroge prethodnike elementa x.

DEFINICIJA 13. Za element x dobro uređenog skupa X i za proizvoljan skup Y pod *nizom tipa* x u Y podrazumeva se funkcija f za koju je $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{st}(x)$ i $\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$.

Na primer, za $x \in \omega^+$ nizovi tipa x su konačni ili beskonačni nizovi, već prema tome da li je $x < \omega$ ili $x = \omega$. Ako je $f : X \to Y$ funkcija, onda je $f|\mathrm{st}(x)$ primer niza tipa x. U takvom slučaju se piše f^x umesto $f|\mathrm{st}(x)$. Očigledno, ako je $x < \omega$, onda je $\mathrm{dom}(f) = \{0, \ldots, n\}$ za neki $n \in \omega$, a $\mathrm{ran}(f) = \{f(0), \ldots, f(n)\}$; uobičajena oznaka za $\mathrm{ran}(f)$ je tada $\{f(0), \ldots, f(n)\}$, $\{f(i) \mid i \leq n\}$ ili $\{f_i \mid i \leq n\}$. Ako je $\mathrm{ran}(f) = \omega$, onda se $\mathrm{ran}(f)$ označava sa $\{f_n \mid n \in \omega\}$ ili samo sa $\{f_n\}$.

DEFINICIJA 14. Pod *funkcijom niza tipa* X u Y, gde je X neki dobro uređen skup, podrazumevamo funkciju f čiji se domen sastoji od svih nizova tipa x u Y, za svaki $x \in X$, i $\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$.

Funkcija niza omogućuje da se neki niz produži: kada je dat niz u čiji domen su uključeni svi strogi prethodnici nekog elementa x dobro uređenog skupa X, ali ne i x, onda se pomoću funkcije niza dati niz može proširiti priključivanjem elementa x njegovom domenu, a takođe, nastavljajući ovaj postupak, proširiti i na čitav skup X.

Nije teško pokazati da za dati dobro uređeni skup X može postojati najviše jedno ovakvo proširenje; treba dokazati da za X i datu funkciju može postojati bar jedno takvo proširenje. O tome se govori u *teoremi transfinitne rekurzije.*

TEOREMA 5 (TEOREMA TRANSFINITNE REKURZIJE). *Ako je X dobro uređen skup i f je funkcija niza tipa X u neki skup Y, onda postoji tačno jedna funkcija $g : X \to Y$ za koju je $(\forall x \in X)\ g(x) = f(g^x)$.*

DOKAZ. Za podskup $Z \subseteq X \times Y$ kaže se da je *f-zatvoren* ukoliko ima sledeću osobinu: ako je $x \in X$ i t je niz tipa x koji je sadržan u Z, onda je $(x, f(t)) \in Z$. Drugim rečima, ako je $(c, t(c)) \in Y$ za svaki $c \in \mathrm{st}(x)$, onda je $(x, f(t)) \in Y$. Budući da je $X \times Y$ f-zatvoren, takvi skupovi postoje. Neka je g presek svih takvih skupova. Budući da je g f-zatvoren, dokazaćemo da je g funkcija. U tom dokazu koristi se transfinitna indukcija. Neka je S skup svih onih elemenata $c \in X$ za koje postoji tačno jedan y tako da važi $(c, y) \in g$. Može se dokazati da ako je $\mathrm{st}(x) \subseteq S$, onda je $x \in S$.

$\mathrm{st}(x) \subseteq S$ znači da ako je $c < x$ u X, onda postoji tačno jedan element $y \in Y$ za koji je $(c, y) \in g$. Korespondencija $c \mapsto y$ koja je ovim definisana predstavlja niz tipa x, recimo t, gde je $t \subseteq g$. Ako $x \notin S$, onda je $(x, z) \in g$ za neki z, $z \neq f(t)$. Dokazaćemo da je $g \setminus \{(x, z)\}$ f-zatvoren. To znači da ako je $b \in X$ i ako je r niz tipa b koji je sadržan u $g \setminus \{(x, z)\}$, onda je

$$(b, f(r)) \in g \setminus \{(x, z)\}.$$

Ako je $b = x$, onda je $r = t$ (jer je prema pretpostavci $\mathrm{st}(x) \subseteq S$), pa iz $f(t) \neq z$ sledi $(b, f(r)) \in g \setminus \{(x, z)\}$. Ako je $b \neq x$, onda, budući da je g f-zatvoren, sledi $(b, f(r)) \in g \setminus \{(x, z)\}$. Prema tome, pretpostavka da je $x \notin S$ protivreči činjenici da je g najmanji f-zatvoren skup. Dakle, $x \in S$.

DEFINICIJA 15. Primena teoreme transfinitne rekurzije koja se sastoji u konstruisanju funkcije $g : X \to Y$ kada su dati neki dobro uređen skup X i funkcija niza f tipa X u neki skup Y, zove se *definicija transfinitnom rekurzijom.*

IZOMORFIZAM DOBRO UREĐENIH SKUPOVA

Ovo poglavlje ćemo završiti razmatranjem jedne važne relacije između dobro uređenih skupova.

DEFINICIJA 16. Za dva parcijalno uređena skupa X i Y kaže se da su *izomorfna* i piše se $X \cong Y$ ako i samo ako postoji 1-1 i "na" korespondencija $f : X \overset{na}{\to} Y$ za koju važi: za sve $x, y \in X$, $x \leq y$ (u skupu X) ako i samo ako je $f(x) \leq f(y)$ (u skupu Y). Korespondencija f zove se i *izomorfizam poretka*. Kaže se da korespondencija f čuva poredak.

Može se dokazati da je f izomorfizam ako i samo ako f čuva $<$.

Identičko preslikavanje skupa X na X je primer izomorfizma. Ako su X i Y parcijalno uređeni skupovi i ako je $f : X \overset{na}{\to} Y$ izomorfizam, onda postoji tačno jedna inverzna funkcija $f^{-1} : Y \overset{na}{\to} X$ i ona je takođe izomorfizam. Ako su

$$f : X \overset{na}{\to} Y \text{ i } g : Y \overset{na}{\to} Z$$

izomorfizmi, onda je i gf izomorfizam parcijalno uređenih skupova X i Z. Na osnovu prethodnog, izomorfizam predstavlja relaciju ekvivalencije u bilo kojoj nepraznoj kolekciji parcijalno uređenih skupova.

Dobro uređen skup može biti izomorfan nekom svom pravom podskupu. Na primer, skup parnih brojeva izomorfan je skupu ω, gde je izomorfizam funkcija f koja svakom elementu $n \in \omega$ dodeljuje $2n$. Ako je f izomorfizam između dobro uređenog skupa X i njegovog dela, onda je $x \leq f(x)$ za svaki $x \in X$. U to se lako uveravamo. Pretpostavimo da postoji $y \in X$ za koji je $f(y) < y$; budući da je X dobro uređen, postoji i najmanji takav element. Označimo taj najmanji opet sa y i pogledajmo $f(y)$. Jasno je da je $f(f(y)) < f(y)$. Neka je $z = f(y)$; tada je $f(z) < z$, pa kako je y najmanji element u X sa tom osobinom, mora biti

$$y \leq z = f(y),$$

što nije moguće.

Neposredna posledica prethodnog tvrđenja je činjenica da je identičko preslikavanje jedini izomorfizam dobro uređenog skupa na isti skup.

TEOREMA 6. *Neka su X i Y dva dobro uređena skupa; među njima može postojati najviše jedan izomorfizam.*

DOKAZ. Neka su f i g izomorfizmi dobro uređenih skupova X i Y i neka je $h = f^{-1}g$. Budući da je $h : X \overset{na}{\to} X$ izomorfizam X na X, h je identičko preslikavanje skupa X, pa je $f = g$.

TEOREMA 7. *Nijedan dobro uređen skup nije izomorfan nekom svom početnom segmentu.*

DOKAZ. Neka je X dobro uređen skup, neka je $x \in X$ i neka je $f : X \overset{na}{\to} \mathrm{st}(x)$ izomorfizam. Tada je $f(x) \in \mathrm{st}(x)$, pa je $f(x) < x$, što je nemoguće.

TEOREMA 8. *Ako su X i Y dobro uređeni skupovi, onda su oni ili izomorfni ili je jedan od njih izomorfan nekom početnom segmentu drugog.*

DOKAZ. Pretpostavimo da su X i Y dobro uređeni skupovi i da nijedan od njih nije izomorfan nekom početnom komadu drugog. Neka je $x \in X$ i neka je t niz tipa x u Y (drugim rečima, t je funkcija $t : \mathrm{st}(x) \overset{na}{\to} Y$). Neka je $f(t)$ najmanja prava gornja granica skupa $\mathrm{ran}(t)$ u Y, ako $f(t)$ postoji; inače, neka je $f(t)$ najmanji element skupa Y. Vidi se da je f funkcija niza tipa X u Y. Neka je g funkcija čije se postojanje tvrdi teoremom transfinitne rekurzije. Koristeći transfinitnu indukciju može se dokazati da za svaki $y \in X$ funkcija g preslikava $\mathrm{st}(y)$ na $\mathrm{st}(g(y))$ i da g preskikava X na Y. Dakle, g je izomorfizam skupova X i Y.

TEOREMA 9. (1) *Svaki podskup dobro uređenog skupa X ili je izomorfan skupu X ili nekom početnom komadu skupa X.*

(2) *Ako su X i Y dobro uređeni i izomorfni za preslikavanje f, onda f preslikava supremum (ako ga ima) svakog podskupa skupa X na supremum slike tog podskupa.*

8. ORDINALI

Pojam *ordinala* ili *ordinalnog broja* predstavlja uopštenje pojma prirodnog broja. Prirodni brojevi su bili definisani kao skupovi: $\emptyset$, $\emptyset^+$, $(\emptyset^+)^+$, ..., dok je skup ω bio definisan kao njihova unija.

DEFINICIJA 1. *Skup sledbenika skupa* ω je bilo koji skup x sa svojstvima: (a) $\omega \in x$ i (b) za svaki $\alpha \in x$, $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \in x$. Element skupa sledbenika skupa ω naziva se *sledbenikom* skupa ω.

Počnimo sada da primenjujemo postupak iz definicije prirodnih brojeva na ω: ω, ω^+, $(\omega^+)^+$, ... Da li postoji skup, recimo x, koji sadrži ω i sve skupove koji se dobijaju kao sledbenici skupa ω?

DEFINICIJA 2. Neka je f_n funkcija, $\mathrm{dom}(f_n) = n$, za $n \in \omega$ i $0 < n$; za f_n se kaže da je *funkcija* ω*-sledbenika* ako i samo ako je $f_n(0) = \omega$ i $f_n(m^+) = (f_n(m))^+$ kadgod je $m^+ < n$.

TEOREMA 1. *Za svaki* $n \in \omega$, $n > 0$, *postoji tačno jedna funkcija* ω*-sledbenika sa domenom* n.

DOKAZ. Matematičkom indukcijom po n.

Neka je $S(n, x)$ iskaz "$n \in \omega$ i $x \in \mathrm{ran}(f)$ za funkciju f_n ω-sledbenika sa domenom n".

Za svaki $n \in \omega$ postoji skup $\{x \mid S(n, x)\}$. Drugim rečima, za svaki $n \in \omega$ postoji skup $F(n)$ za koji je $x \in F(n)$ ako i samo ako je iskaz $S(n, x)$ istinit. Da li postoji skup F uređenih parova za koji važi $(n, x) \in F \Leftrightarrow x \in F(n)$? Odgovor na to pitanje se ne može dati sredstvima teorije skupova koja su do sada opisana. Za to nam je potrebna *aksioma zamene*.

AKSIOMA ZAMENE. *Ako je* $A(u, v)$ *formula, gde su* u *i* v *slobodne promenljive, takva da za svaki element* x *skupa* z *postoji skup*

$$\{y \mid A(x, y)\},$$

onda postoji funkcija F *za koju važi*

$$\mathrm{dom}(F) = z \ i \ (\forall x \in z)\ F(x) = \{y \mid A(x, y)\}, \text{ tj.}$$

$$(\forall x \in z)\exists s \forall y(y \in s \Leftrightarrow A(x,y)) \Rightarrow$$

$$\exists F(\mathrm{dom}(F) = z \wedge (\forall x \in z)\ F(x) = \{y \mid A(x,y)\}$$

Tvrđenje da postoji skup $\{y \mid A(x,y)\}$ znači da postoji skup $F(x)$ za koji je $y \in F(x) \Leftrightarrow A(x,y)$. Prema aksiomi ekstenzionalnosti, za svaki skup i za svaku formulu postoji tačno jedna funkcija koju opisuje aksioma zamene.

Aksioma zamene se tako zove zato što omogućuje da se od nekog datog skupa z konstruiše novi skup na taj način što se svaki element $x \in z$ zameni skupom $\{y \mid A(x,y)\}$.

Šta je smisao aksiome zamene? Prirodan broj n je dobro uređen skup za koji važi st $(m) = m$ za svaki $m \in n$. Drugim rečima, svaki početni segment prirodnog broja jednak je elementu koji određuje taj segment. To je osnovna osobina procesa brojanja. Aksioma zamene uopštava ovu osobinu.

DEFINICIJA 3. *Ordinalni broj* ili *ordinal* je dobro uređen skup α za koji važi $(\forall \xi \in \alpha)$ st $(\xi) = \xi$.

Svaki prirodan broj je ordinal; skup ω je takođe ordinal. Može se lako pokazati da je skup ω^+ dobro uređen relacijom $\in$. Umesto $\zeta \in \xi$ pisaćemo i $\zeta < \xi$. Ako je $\xi \in \omega^+$, onda je ili $\xi \in \omega$, pa je st $(\xi) = \xi$, budući da je ω ordinal, ili je $\xi = \omega$, pa je st $(\xi) = \omega$ na osnovu definicije $<$, i, prema tome, st $(\xi) = \xi$. Dakle, ω^+ je ordinal. Na isti način se dokazuje da ako je α ordinal, onda je to i α^+.

Na osnovu aksiome zamene postoji tačno jedna funkcija F na skupu ω za koju je $F(0) = \omega$ i $(\forall n \in \omega)\ F(n^+) = (F(n))^+$. Pogledajmo skup $\omega \cup \mathrm{ran}(F)$ koji se obično označava sa $\omega 2$. Ako umesto $F(n)$ pišemo $\omega + n$ za $n \in \omega$ (što je takođe uobičajeno), onda je $\omega 2$ skup čiji su elementi svi n iz ω i svi skupovi $\omega + n$.

TEOREMA 2. *$\omega 2$ je ordinal.*

DOKAZ. Relacija $<$ na skupu $\omega 2$ definisana je ovako:

$$(\forall x, y \in \omega)\ (x < y \Leftrightarrow x \in y).$$

Dokazaćemo da je $<$ dobro uređenje na $\omega 2$.

Budući da je $\omega \notin \omega$ (jer je $n < \omega$ za svaki $n \in \omega$), $F(0) \notin \omega$. Pretpostavimo da $F(m) \notin \omega$ (indukcijska pretpostavka) i da je $F(m^+) \in \omega$. Tada je $F(m^+) = F(m) \cup \{F(m)\} = n$ za neki $n \in \omega$, pa je $F(m) \in \omega$, suprotno indukcijskoj pretpostavci. Dakle, ni za jedan $m \in \omega$ nije $F(m) \in \omega$.

Sada pokazujemo da je $(\forall m, n \in \omega)\ (F(m) \in F(n) \Rightarrow F(m) \subseteq F(n))$. Ako je $F(m) \in F(0)$, budući da se ovaj uslov ne može ispuniti, onda je i $F(m) \subseteq F(0)$. Pretpostavimo da je $F(m) \subseteq F(n)$ (indukcijska pretpostavka). Ako je $F(m) \in F(n) \cup \{F(n)\}$ za neki $n \in \omega$, onda je ili $F(m) = F(n)$ i $F(m) \subseteq F(n^+)$, ili je $F(m) \in F(n)$, pa je $F(m) \subseteq F(n)$ na osnovu indukcijske pretpostavke; prema tome, $F(m) \subseteq F(n^+)$.

Dokazaćemo i $(\forall m, n \in \omega)\ (F(m) = F(n) \Rightarrow m = n)$. Ako je $m \neq 0$, onda je $F(m) = F(k) \cup \{F(k)\}$ za neki $k \in \omega$, pa ako je $F(m) = F(0)$, onda je $F(k) \in \omega$, što nije moguće. Prema tome, ako je $F(m) = F(0)$ onda je i $m = 0$. Neka je $n \neq 0$ i $F(m) = F(n)$; tada je $m \neq 0$. Neka su m i n brojevi a^+ i b^+ redom. Odavde sledi

$$F(a) \cup \{F(a)\} = F(b) \cup \{F(b)\}.$$

Ako je $F(a) = F(b)$, na osnovu indukcijske pretpostavke je $a = b$ i $m = n$. Ako je $F(a) \neq F(b)$, onda je $F(a) \in F(b)$ i $F(b) \in F(a)$. Na osnovu prethodno dokazanog tvrđenja, $F(a) = F(b)$, pa je na osnovu indukcijske pretpostavke opet $a = b$ i $m = n$.

Dokazaćemo $(\forall m, n \in \omega)\ (m < n \Rightarrow F(m) \in F(n))$. Ako je $m < 0$, onda je $F(m) \in F(0)$. Ako je $m < n^+$, onda je ili $m < n$, pa je na osnovu indukcijske pretpostavke $F(m) \in F(n)$, a odavde sledi $F(m) \in F(n^+)$, ili je $m = n$, pa je $F(m) = F(n)$ i $F(m) \in F(n^+)$.

Najzad, dokazaćemo i $(\forall m, n \in \omega)\ (F(m) \in F(n) \Rightarrow m < n)$. Ako je $F(m) \in F(0)$, onda je i $m < 0$ (jer za ovo tvrđenje nema kontraprimera). Neka je $F(m) \in F(n^+)$; tada je ili $F(m) \in F(n)$, pa je na osnovu indukcijske pretpostavke $m < n$ i $m < n^+$, ili je $F(m) = F(n)$, pa je na osnovu jednog od prethodno dokazanih tvrđenja $m = n$ i $m < n^+$.

Dakle, $(\forall m, n \in \omega)\ (F(m) < F(n) \Leftrightarrow m < n)$. Nije teško videti da je $<$ dobro uređenje na $\omega 2$. To isto važi i za $\leq$ koja je definisana na uobičajen način.

Budući da je $(\forall\zeta \in \omega 2)\ (\zeta < \xi \Leftrightarrow \zeta \in \xi)$, očigledno imamo $(\forall\zeta \in \omega 2)\ \mathrm{st}\ (\zeta) = \zeta$.

Time je dokazano da je $\omega 2$ ordinal.

Parcijalno uređenje na skupu x tačno je određeno njegovim početnim segmentima. Drugim rečima, ako su R i S dva parcijalna uređenja skupa x i ako je za svaki $y \in x$ skup strogih (slabih) prethodnika elementa y u odnosu na R jednak odgovarajućem skupu u odnosu na S, onda su R i S jednaka. Odavde proizlazi da ako se skup x može dobro urediti tako da postane ordinal, onda se to može učiniti samo na jedan način. Budući da je $\mathrm{st}\ (\xi) = \xi$ deo definicije ordinala, relacija kojom se skup x može dobro urediti tako da postane ordinal (ako je to uopšte moguće) mora biti relacija pripadanja.

TEOREMA 3. *Svaki ordinal je tranzitivan skup.*

DOKAZ. Za svaki $\xi \in \alpha$ imamo $\mathrm{st}\ (\xi) = \xi \subseteq \alpha$ što znači da je ordinal α tranzitivan skup.

TEOREMA 4. *Svaki element ordinala je ordinal.*

DOKAZ. Neka je $\xi \in \alpha$, gde je α ordinal, i neka je $\eta \in \xi$; tada je početni segment određen elementom η u ξ isti kao početni segment određen elementom η u α (ξ nasleđuje dobro uređenje od α). Prvi početni segment je jednak elementu η, pa je to i drugi. Dakle, svaki element ordinala je ordinal.

Posledica ove teoreme je da je svaki početni segment ordinala ordinal.

TEOREMA 5. *Dva ordinala su jednaka ako su izomorfna.*

DOKAZ. Neka su α i β ordinali i neka je $f : \alpha \xrightarrow{na} \beta$ izomorfizam. Transfinitnom indukcijom se može dokazati da je $(\forall\xi \in \alpha)\ f(\xi) = \xi$. Neka je $S = \{\xi \in \alpha \mid f(\xi) = \xi\}$; za svaki $\xi \in \alpha$, najmanji element iz α koji ne pripada skupu $\mathrm{st}\ (\xi)$ je ξ. Budući da je f izomorfizam, najmanji element skupa β koji ne pripada slici skupa $\mathrm{st}\ (\xi)$ za f je $f(\xi)$. Odavde proizlazi da ako je $\mathrm{st}\ (\xi) \subseteq S$, onda su ξ i $f(\xi)$ ordinali s istim početnim segmentima, pa je $f(\xi) = \xi$. Dakle, ako je $\mathrm{st}\ (\xi) \subseteq S$, onda je $\xi \in S$. Na osnovu principa transfinitne indukcije, $S = \alpha$, pa sledi $\alpha = \beta$.

TEOREMA 6. *Za ordinale α i β sledeća tvrđenja su ekvivalentna:* (1) $\beta \in \alpha$, (2) $\beta \subset \alpha$, (3) *α je produžetak ordinala β.*

Svaki skup ordinala je uređen relacijom $\in$ (odnosno relacijom poretka $\subset$).

TEOREMA 7. *Svaka dva ordinala α i β su uporediva: ili je $\alpha = \beta$ ili je $\alpha \in \beta$ ili je $\beta \in \alpha$.*

TEOREMA 8. *Svaki neprazan skup ordinala je dobro uređen.*

DOKAZ. Neka je x neprazan skup ordinala i neka je $\alpha \in x$. Ako je $\alpha \leq \beta$ za svaki $\beta \in x$, onda je α najmanji element skupa x. Ako to nije slučaj, onda postoji $\beta \in x$ za koji je $\beta \in \alpha$, pa je $\alpha \cap x \neq \emptyset$. Budući da je α dobro uređen, $\alpha \cap x$ ima najmanji element, recimo α_0. Ako je $\beta \in x$, onda je ili $\alpha \leq \beta$, pa je i $\alpha_0 < \beta$, ili je $\beta < \alpha$, pa je $\beta \in \alpha \cap x$ i $a_0 \leq \beta$. Time je dokazano da x ima najmanji element.

Prirodni brojevi su jedini konačni ordinali; ordinali koji nisu konačni zovu se i *transfinitni*. Skup ω je najmanji transfinitni ordinal. Svaki konačan ordinal različit od 0 ima neposrednog prethodnika.

Svaki ordinal α ima neposrednog sledbenika, i to je ordinal α^+; prema tome, ordinal α ima neposrednog prethodnika ako i samo ako postoji ordinal β takav da je $\beta^+ = \alpha$, i tada je β njegov neposredni prethodnik.

DEFINICIJA 4. Za ordinale koji su neposredni sledbenici nekih ordinala kaže se da su *ordinali sledbenici*; oni koji to nisu zovu se *granični ordinali*.

Granični ordinal je $\emptyset$. Skup ω je najmanji transfinitan granični ordinal.

TEOREMA 9. *Svaki skup ordinala ima supremum.*

DOKAZ. Neka je x kolekcija ordinala. Budući da je x lanac produžetaka, proizlazi da je unija α skupa x dobro uređen skup. Za svaki $\xi \in x$, ako je $\xi \neq \alpha$, onda je α produžetak elementa ξ. Početni segment određen nekim elementom $\beta \in \alpha$ isti je kao početni segment određen elementom β kada β pripada nekom drugom elementu skupa x. Odavde proizlazi da je α ordinal. Za $\xi \in x$ važi $\xi \leq \alpha$; ordinal α je gornja granica elemenata skupa x. Ako je β neka druga gornja granica skupa x, onda $(\xi \in x)\ \xi \subseteq \beta$, pa na osnovu definicije unije, važi $\alpha \subseteq \beta$. Dakle, α je najmanja gornja granica.

TEOREMA 10. *Neka je $\beta = \bigcup \alpha$; ako je α granični ordinal, onda je $\beta = \alpha$; ako je $\alpha = \gamma^+ = \gamma \cup \{\gamma\}$, onda je $\beta = \gamma$.*

DOKAZ. Neka je, prvo, α bilo koji ordinal. Tada $\gamma \in \beta = \bigcup \alpha$ povlači postojanje ordinala $\delta \in \alpha$ takvog da je $\gamma \in \delta$; onda je i $\gamma \in \alpha$. Dakle, u opštem slučaju važi

$$(*) \qquad \beta \subseteq \alpha.$$

Neka je α granični ordinal i neka je $\gamma \in \alpha$. Tada ne može biti $\gamma = \max(\alpha)$, jer bi u tom slučaju bilo $\alpha = \mathrm{st}\,(\gamma) \cup \{\gamma\} = \gamma \cup \{\gamma\}$, pa ordinal α ne bi bio granični. Zbog toga postoji $\delta \in \alpha$ takav da je $\gamma \in \delta$, što povlači $\gamma \in \beta$. To znači da je u ovom slučaju $\alpha \subseteq \beta$, pa je, s obzirom na $(*)$, $\beta = \alpha$.

Neka je $\alpha = \gamma^+ = \gamma \cup \{\gamma\}$. Tada je $\gamma = \max(\alpha)$, pa sledi $\beta = \bigcup \alpha = \gamma$.

POSLEDICA. *Za svaki ordinal α, $\bigcup \alpha$ je granični ordinal ako i samo ako je α granični ordinal ili neposredni sledbenik graničnog ordinala.*

Ordinal α je ordinal sledbenik ako i samo ako α ima maksimum.

TEOREMA 11. *Ne postoji skup svih ordinala.*

DOKAZ. Pretpostavimo da postoji skup svih ordinala. On, kao svaki skup ordinala ima supremum. Taj supremum je ordinal koji je veći od svakog ordinala, što je nemoguće, jer za svaki dati ordinal postoji ordinal koji je od njega strogo veći (na primer, njegov sledbenik). Dakle, ne postoji skup svih ordinala.

Kao što se iz dokaza ove teoreme vidi, kada se pretpostavi da postoji skup svih ordinala nastaje (Burali-Fortijev) paradoks.

Povodom prethodne teoreme, potrebno je ukazati na sledeće momente:

1) relacija poretka $<$ definisana pomoću $\in$ između bilo koja dva ordinala nije binarna relacija nekog skupa, u uobičajenom smislu, nego relacija između tih ordinala definisana na klasi svih ordinala. Ona postaje binarna relacija u nekom skupu ordinala.

2) U teoremi 9 nije reč o supremumu podskupa nekog skupa, u smislu ranije definicije, nego je to majoranta uočenog skupa x ordinala, sa jednom dodatnom osobinom. Drugim rečima, supremum skupa x ordinala je ordinal α takav da je $\beta \leq \alpha$ za svaki $\beta \in x$, sa dodatnim svojstvom da za svaku drugu majorantu γ skupa x važi $\alpha \leq \gamma$.

Vezu između dobro uređenih skupova i ordinala opisuje *teorema nabrajanja*.

TEOREMA 12 (TEOREMA NABRAJANJA). *Svaki dobro uređen skup izomorfan je tačno jednom ordinalu.*

DOKAZ. Jedinstvenost ordinala čije se postojanje tvrdi teoremom proizlazi iz činjenice da je izomorfizam za ordinale isto što i jednakost.

Pretpostavimo da je x dobro uređen skup i pretpostavimo da je $y \in x$ tako da je početni segment određen svakim prethodnikom elementa y izomorfan nekom (jedinstvenom) ordinalu. Ako je $S(z, \alpha)$ iskaz "α je ordinal i st $(z) \cong \alpha$", onda za svaki $z \in$ st (y) postoji skup $\{\alpha \mid S(z, \alpha)\}$ (to je jednoelementan skup). Na osnovu aksiome zamene postoji skup ordinala koji su izomorfni početnim segmentima koji su određeni prethodnicima skupa y. Odavde proizlazi da je st (y) izomorfan nekom ordinalu. Na osnovu principa transfinitne indukcije sledi da je svaki početni segment skupa x izomorfan nekom ordinalu. Posmatrajmo iskaz $S(y, \alpha)$; dokazano je da za svaki $y \in x$ postoji jednoelementan skup $\{\alpha \mid S(y, \alpha)\}$ takav da je st $(y) \cong \alpha$. Na osnovu aksiome zamene, postoji skup ordinala takav da je svaki ordinal tog skupa izomorfan početnom segmentu nekog elementa $y \in x$. Ovaj skup ordinala ima supremum β. Lako se zaključuje da je $x \cong \beta$.

PRINCIP TRANSFINITNE INDUKCIJE ZA ORDINALE

Primena transfinitne indukcije i rekurzije na ordinale ima neke specifičnosti koje ćemo ispitati.

Neka je **ON** klasa svih ordinala. Princip transfinitne indukcije za ordinale dajemo u obliku teoreme.

TEOREMA 13 (PRINCIP TRANSFINITNE INDUKCIJE ZA ORDINALE). *Ako iz pretpostavke da svaki ordinal koji je manji od nekog proizvoljnog ordinala α ima neko svojstvo S sledi da i ordinal α ima svojstvo S, onda svaki ordinal ima svojstvo S,* tj.

$$(\forall\alpha \in \mathbf{ON})\ ((\forall\xi < \alpha)\ S(\xi) \Rightarrow S(\alpha)) \Rightarrow (\forall\alpha \in \mathbf{ON})\ S(\alpha).$$

DOKAZ. Neka je ispunjena pretpostavke teoreme i neka je α ordinal. Tada, očigledno, dobro uređeni skup ordinala $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ ispunjava pretpostavku ranije formulisanog principa transfinitne indukcije u odnosu na svojstvo S, pa svaki element skupa α^+ ima svojstvo S; to važi i za α.

Princip transfinitne indukcije za ordinale odnosi se na svaki ordinal, na svaki element klase **ON**. Ovo je jedno od retkih mesta u ovoj knjizi gde se u izlaganju teorije skupova pozivamo na klase.

Princip transfinitne indukcije za ordinale (*princip indukcije po ordinalima*) ima više formulacija od kojih navodimo dve, bez dokaza.

TEOREMA 14. *Ako važi*

(1) $S(0)$,

(2) $(\forall\alpha \in ON)\ (S(\alpha) \Rightarrow S(\alpha^+))$, *i*

(3) *za svaki granični ordinal* γ, $((\forall\beta < \gamma)\ S(\beta)) \Rightarrow S(\gamma)$,

onda za svaki ordinal α važi $S(\alpha)$.

TEOREMA 15. *Ako postoji ordinal α za koji važi $S(\alpha)$, onda postoji najmanji ordinal β za koji važi $S(\beta)$.*

Sledeća teorema transfinitne rekurzije za ordinale je manje opšta od odgovarajuće teoreme za dobro uređene skupove.

TEOREMA 16. *Neka je α ordinal, y neprazan skup i f funkcija niza tipa α u y; tada postoji tačno jedna funkcija g za koju važi*

(1) $\mathrm{dom}(g) = \alpha$ i

(2) $(\forall\beta < \alpha)\ g(\beta) = f(g|\beta)$.

DEFINICIJA 5. Primena ove teoreme zove se *definicija (transfinitnom) rekurzijom po ordinalima*. ran(g) se zove *(transfinitni) niz indeksiran ordinalima*.

Drugu formulaciju iste teoreme navodimo takođe bez dokaza.

TEOREMA 17. *Za svaki neprazan skup y, za neprazan ordinal α, bilo koji $x \in y$ i bilo koju funkciju f sa osobinom* $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{ran}(f) = y$, *postoji tačno jedna funkcija g za koju važi*

(1) $\mathrm{dom}(g) = \alpha$,
(2) $g(0) = x$,
(3) *za svaki β za koji je $\beta^+ < \alpha$ važi* $g(\beta^+) = f(g(\beta))$,
(4) *za svaki $\beta < \alpha$, ako je β granični ordinal, onda je*

$$g(\beta) = \bigcup_{\gamma \in \beta} g(\gamma).$$

ELEMENTI ORDINALNE ARITMETIKE

Sabiranje, množenje i stepenovanje prirodnih brojeva mogu se uopštiti za ordinale. Definicija se sastoji u primeni transfinitne rekurzije.

DEFINICIJA 6. Za svaka dva ordinala α i β *zbir* $\alpha + \beta$ definisan je ovako:

$$\alpha + 0 = \alpha,$$
$$\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$$

ako je β granični ordinal, onda je $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha + \gamma)$.

Primenjujući transfinitnu indukciju tamo gde treba, mogu se dokazati sledeća tvrđenja.

TEOREMA 18. $\alpha + \beta$ *je ordinal.*

$$0 + \alpha = \alpha$$
$$\alpha + 1 = \alpha^+$$
$$\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$$
$$\beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > \alpha$$
$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$$
$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$$

$$\alpha + \beta \geq \beta$$

Ako je β granični ordinal, onda je to i $\alpha + \beta$

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \exists_1 \gamma(\alpha + \gamma = \beta)$$

$$\neg\exists\gamma(\forall\delta < \beta)\ (\alpha + \delta < \gamma < \alpha + \beta)$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

Ordinalno sabiranje nije komutativno, na primer, $1 + \omega \neq \omega + 1$.

Zbir $\alpha + \beta$ ordinala α i β može se opisati ovako. To je ordinal koji je izomorfan sa dobro uređenim skupom koji se dobija kada se svi elementi skupa β, bez izmene njihovog međusobnog poretka stave iza svih elemenata skupa α u kojem poredak takođe nije izmenjen.

Drukčija definicija zbira ordinala mogla bi da glasi ovako.

Neka je $S = (\{1\} \times \alpha) \cup (\{2\} \times \beta)$ i neka je

$$(\forall\gamma, \delta \in \alpha)\ ((1, \gamma) \leq (1, \delta) \Leftrightarrow \gamma \leq \delta);$$

$$(\forall x', y \in \beta)\ ((2, x') \leq (2, y') \Leftrightarrow x' \leq y');$$

$$(\forall x \in \{1\} \times \alpha)(\forall y \in \{2\} \times \beta)\ x < y.$$

Tada je S sa ovako definisanom relacijom poretka $\leq$ u njemu totalno uređen skup. Sa $\alpha + \beta$ označava se ordinal izomorfan sa S.

Slično se može definisati i zbir $\sum_{\xi<\mu} \alpha_\xi$.

DEFINICIJA 7. Za svaka dva ordinala α i β *proizvod* $\alpha \cdot \beta$ definisan je ovako:

$$\alpha \cdot 0 = 0,$$

$$\alpha \cdot \beta^+ = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$$

ako je β granični ordinal, onda je $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma\in\beta} \alpha \cdot \gamma$.

U sledećoj teoremi $\alpha\beta$ stoji umesto $\alpha \cdot \beta$.

TEOREMA 19. *$\alpha\beta$ je ordinal.*

$$0\alpha = 0$$

$$\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$$

$$\alpha > 0 \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha\beta < \alpha\gamma$$

$$\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha\beta \neq 0$$

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \wedge \alpha > 0 \Rightarrow \beta = \gamma$$

Ako je β granični ordinal i $\alpha > 0$, onda je $\alpha\beta$ granični ordinal

Ako je α granični ordinal i $\beta > 0$, onda je $\alpha\beta$ granični ordinal

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

Ordinalno množenje nije komutativno, na primer,

$$2\omega \neq \omega 2$$

Ne važi desni distributivni zakon, na primer,

$$(1 + 1)\omega \neq 1\omega + 1\omega.$$

DEFINICIJA 8. Za svaka dva ordinala α i β *stepen* α^β definisan je ovako:

$$\alpha^0 = 1,$$

$$\alpha^{\beta^+} = \alpha^\beta \cdot \alpha,$$

ako je β granični ordinal i $\alpha > 0$, onda je

$$\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma\in\beta} \alpha^\gamma,$$

ako je β granični ordinal i $\alpha = 0$, onda je $\alpha^\beta = 0$.

TEOREMA 20.
$$\alpha^1 = \alpha.$$

$$\beta > 0 \Rightarrow 0^\beta = 0$$

$$1^\alpha = 1$$

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$$

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$

$$\alpha > 1 \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$$

$$\alpha > 1 \wedge \beta > 1 \Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha\beta \leq \alpha^\beta$$

$$(2 \cdot 2)^\omega \neq 2^\omega \cdot 2^\omega$$

NIZOVI ORDINALA

Aritmetičke opreacije na ordinalima mogu se definisati za beskonačne nizove ordinala.

DEFINICIJA 9. Pod *μ-nizom*, gde je μ ordinal, podrazumevamo funkciju f za koju je $\mathrm{dom}(f) = \mu$. Za μ-niz se obično koristi oznaka $\{x_\xi\}_{\xi<\mu}$ ili $(x_\xi)_{\xi<\mu}$ gde je x_ξ ξ-ti član niza, $f(\xi) = x_\xi$. Nizovi u običnom smislu su ω-nizovi. Ako je $\mathrm{ran}(f)$ ordinal, onda se takav μ-niz zove *μ-niz ordinala*.

DEFINICIJA 10. Operacija beskonačnog sabiranja definisana je za svaki μ-niz ordinala $\{\alpha_{\xi<\mu}\}$, ovako:

$$\textstyle\sum_{\xi<0}\alpha_\xi = 0, \quad \nu<\mu \Rightarrow \sum_{\xi<\nu^+}\alpha_\xi = \sum_{\xi<\nu}\alpha_\xi + \alpha_\nu,$$

ako je ν granični ordinal i $\nu \leq \mu$, onda je $\sum_{\xi<\nu}\alpha_\xi = \bigcup_{\eta\in\nu}\sum_{\xi<\eta}\alpha_\xi$.

Umesto $\sum_{\xi<\omega}\alpha_\xi$ pisaćemo i $\alpha_0+\alpha_1+\ldots$.

TEOREMA 21. *Neka je $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\mu}$ μ-niz gde je za svaki $\xi<\mu$, $\alpha_\xi = 1$; tada je $\mu = \sum_{\xi<\mu}\alpha_\xi$.*

Neka je $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\beta}$ β-niz gde je $\alpha_\xi = \alpha$ za svaki $\xi<\beta$; tada je $\alpha\cdot\beta = \sum_{\xi<\beta}\alpha_\xi$.

Ako je μ granični ordinal i za svaki $\xi<\mu$, $\alpha_\xi\neq 0$, onda je $\sum_{\xi<\mu}\alpha_\xi$ granični ordinal.

Ako je $\lambda = \sum_{\eta<\mu}\beta_\eta$ i za $\nu<\mu$, $\sigma_\nu = \sum_{\eta<\nu}\beta_\eta$, onda je $\sum_{\xi<\lambda}\alpha_\xi = \sum_{\nu<\mu}(\sum_{\xi<\beta_\xi}\alpha_{\sigma_\nu+\xi})$.

$\alpha\cdot\sum_{\eta<\mu}\beta_\eta = \sum_{\eta<\mu}\alpha\cdot\beta_\eta$.

DEFINICIJA 11. Operacija beskonačnog množenja definisana je za svaki μ-niz ordinala $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\mu}$, ovako:

$$\textstyle\prod_{\xi<0}\alpha_\xi = 1; \quad \nu<\mu \Rightarrow \prod_{\xi<\nu^+}\alpha_\xi = \prod_{\xi<\nu}\alpha_\xi\cdot\alpha_\nu;$$

ako je ν granični ordinal i $\nu\leq\mu$, onda je $\prod_{\xi<\nu}\alpha_\xi = \bigcup_{\eta\in\nu}\prod_{\xi<\eta}\alpha_\xi$, osim u slučaju da je $\alpha_\xi = 0$ za neki $\xi<\nu$, kada je $\prod_{\xi<\nu}\alpha_\xi = 0$.

Umesto $\prod_{\xi<\omega}\alpha_\xi$ pisaćemo i $\alpha_0\cdot\alpha_1\cdot\ldots$.

TEOREMA 22. *Neka je $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\beta}$ β-niz gde je za svaki $\xi<\beta$, $\alpha_\xi = \alpha$; tada je $\alpha^\beta = \prod_{\xi<\beta}\alpha_\xi$;*

ako je $\lambda = \sum_{\eta<\mu}\beta_\eta$ i za $\nu<\mu$, $\sigma_\nu = \sum_{\eta<\nu}\beta_\eta$, onda je $\prod_{\xi<\lambda}\alpha_\xi =$ $\prod_{\nu<\mu}(\prod_{\xi<\beta_\nu}\alpha_{\sigma_\nu+\xi})$;

ako je $\lambda = \sum_{\eta<\mu}\beta_\eta$, onda je $\alpha^\lambda = \prod_{\eta<\mu}\alpha^{\beta_\eta}$;

ako je $\alpha_\xi = \xi+1$ za svaki $\xi<\omega$, onda je (1) $\sum_{\xi<\omega}\alpha_\xi = 1+2+3+\ldots = \omega$ i (2) $\prod_{\xi<\omega}\alpha_\xi = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots = \omega$;

ako je $\alpha_\xi = n$ za svaki $\xi<\omega$, onda je (1) $\sum_{\xi<\omega}\alpha_\xi = n+n+n+\ldots = \omega$ za $n>0$ i (2) $\prod_{\xi<\omega}\alpha_\xi = n\cdot n\cdot n\cdot\ldots = \omega$ za $n>1$;

ako je $\alpha_\xi = \omega$ za svaki $\xi<\omega$, onda je (1) $\sum_{\xi<\omega}\alpha_\xi = \omega+\omega+\omega+\ldots = \omega^2$ i (2) $\prod_{\xi<\omega}\alpha_\xi = \omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\ldots = \omega^\omega$;

$$1+\omega = 2+\omega;$$

$$n + \omega = \omega;$$
$$1 + \omega < \omega + 1;$$
$$n \neq 0 \Rightarrow n + \omega < \omega + n;$$
$$2\omega = 3\omega;$$
$$n \neq 0 \Rightarrow n\omega = \omega;$$
$$2\omega < \omega 2;$$
$$\omega 2 = \omega + \omega;$$
$$(1+1)\omega < 1\omega + 1\omega;$$
$$((\forall \xi < \omega)\ \alpha_\xi = \omega^2) \Rightarrow \sum_{\xi<\omega} \alpha_\xi = \omega^2 + \omega^2 + \omega^2 + \ldots = \omega^3.$$
$$((\forall \xi < \omega + \omega)\ \alpha_\xi = \omega) \Rightarrow \prod_{\xi<\omega+\omega} \alpha_\xi = \omega \cdot \omega \cdot \omega \cdots \omega \cdot \omega \cdot \omega \cdots = \omega^{\omega+\omega}.$$
$$((\forall \xi < \omega)\ \alpha_\xi = \omega^\xi) \Rightarrow \sum_{\xi<\omega} \alpha_\xi = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots = \omega^\omega.$$

ako je α granični ordinal, onda postoji tačno jedan ordinal β za koji je $\alpha = \omega\beta$.

Budući da su definísani zbir, proizvod i stepen ordinala, pokazaćemo kako se način na koji je dobijen ordinal $\omega 2$ može primeniti u dobijanju drugih ordinala. Navešćemo nekoliko prvih ordinala. Prvo imamo $0, 1, 2, \ldots$; zatim dolazi ω, pa onda $\omega+1, \omega+2, \ldots$ i $\omega 2$. Posle ovoga slede $\omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \ldots$, a onda, na osnovu aksiome zamene, $\omega 3$. Posle ovoga dolaze $\omega 3 + 1, \omega 3 + 2, \ldots$, pa onda $\omega 4$. Na sličan način dobijamo ωn, za svaki $n \in \omega$. Zatim dolazimo do ω^2. Posle toga sve počinje ispočetka: $\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \ldots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1$, $\omega^2 + \omega + 2, \ldots, \omega^2 + \omega 2, \omega^2 + \omega 2 + 1, \ldots \omega^2 + \omega 3, \ldots, \omega^2 + \omega 4, \ldots$, $\omega^2 2, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^4, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$. Posle svega ovoga dolazi ε_0, a zatim $\varepsilon_0 + 1, \varepsilon_0 + 2, \ldots, \varepsilon_0 + \omega 2, \ldots, \varepsilon_0 + \omega^2, \ldots$, $\varepsilon_0 + \omega^\omega, \ldots, \varepsilon_0 2, \ldots, \varepsilon_0 \omega, \ldots, \varepsilon_0 \omega^\omega, \ldots, \varepsilon_0^2, \ldots$. Posle ovoga dolazi ω_1; zatim se cela ova konstrukcija ponavlja da bismo došli do ω_2, itd.

Među navedenim ordinalima posebno mesto zauzimaju ε_0 i oni koji dolaze posle njega. U teoriji rekurzivnih funkcija ovaj ordinal ima važnu ulogu i tamo se zove *prvi neizračunljivi ordinal.*

Ordinal ω_1 i oni koji dolaze posle njega su *neprebrojivi ordinali.*

Na kraju ovog poglavlja razmotrićemo odnos između ordinala i uređenih parova čiji je prvi član ordinal, a drugi neki skup. Takvu konstrukciju upotrebićemo u poglavlju o kardinalima da dokažemo da je prizvod nekog beskonačnog kardinala sa samim sobom jednak tom ordinalu.

Neka je $\mathbf{F}$ neka klasa uređenih parova $\langle\alpha, x\rangle$, gde je α ordinal, a x skup tako da za svaki ordinal α postoji tačno jedan skup x za koji je $\langle\alpha, x\rangle \in \mathbf{F}$. Očigledno, $\mathbf{F}$ je funkcija na $\mathbf{ON}$. Ako je $\langle\alpha, x\rangle \in \mathbf{F}$, pisaćemo $x = \mathbf{F}(\alpha)$. Dokazaćemo sledeće tvrđenje.

TEOREMA 23. *Ako je* $\mathrm{ran}(\mathbf{F})$ *skup, onda postoje ordinali* α *i* β, $\beta < \alpha$, *za koje je* $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{F}(\beta)$.

DOKAZ. Neka je $\mathbf{G}(x)$ najmanji ordinal β za koji je $\mathbf{F}(\beta) = x$, ako takav ordinal β postoji; inače, neka je $\mathbf{G}(x) = 0$. Pretpostavimo da je $\mathrm{ran}(\mathbf{F})$ skup. Prema aksiomi specifikacije, postoji skup $\{\mathbf{G}(x) \mid x \in y\}$. Budući da je to skup, postoji bar jedan ordinal α koji nije njegov element; tada je $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\alpha)) \neq \alpha$. Prema tome, postoji α koji ne pripada ovom skupu, pa je $\beta = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\alpha)) < \alpha$; postoje, dakle, ordinali α i β takvi da je $\beta < \alpha$ i $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{F}(\beta)$.

Za ordinale α i β neka je $\max(\langle\alpha, \beta\rangle)$ po definiciji $\max(\{\alpha, \beta\})$. Važi $\max(\langle\alpha, \beta\rangle) = \alpha$ ako je $\beta \leq \alpha$ i $\max(\langle\alpha, \beta\rangle) = \beta$ ako je $\alpha \leq \beta$.

DEFINICIJA 12. Za svaki skup x uređenih parova ordinala definišimo $\mathrm{MP}(x)$ na sledeći način. Neka je α najmanji ordinal za koji važi: $\alpha \times \alpha \nsubseteq x$; takav ordinal postoji, jer bi inače $\pi_1(x)$ bio skup svih ordinala. Neka je β najmanji ordinal za koji važi $\langle\beta, \gamma\rangle \in x$ za neki element γ skupa α i neka je γ najmanji ordinal za koji važi $\langle\beta, \gamma\rangle \notin x$; očigledno, $\beta < \alpha$ i $\gamma < \alpha$. Tada je $\mathrm{MP}(x) = \langle\beta, \gamma\rangle$.

$\mathrm{MP}(x)$ je uređen par ordinala koji nije element skupa x.

TEOREMA 24. *Ako je* α *najmanji ordinal za koji je* $\alpha \times \alpha \nsubseteq x$, *onda je*

$$\max(\mathrm{MP}(x)) < \alpha \ \textit{i} \ \max(\mathrm{MP}(x)) \times \max(\mathrm{MP}(x)) \subseteq x.$$

DOKAZ. Nejednakost $\max(\mathrm{MP}(x)) < \alpha$ neposredno proizlazi iz prethodne definicije ordinala $\mathrm{MP}(x)$ i rasuđivanja kojim je ona propraćena. Iz ove nejednakosti i načina na koji je određen ordinal α neposredno proizlazi inkluzija

$$\max(\mathrm{MP}(x)) \times \max(\mathrm{MP}(x)) \subseteq x.$$

TEOREMA 25. *Ako je* $\pi_1(\mathrm{MP}(x)) \neq 0$, *onda je*

$$\langle 0, \max(\mathrm{MP}(x)) \rangle \in x.$$

DOKAZ. Ako su α i β ordinali kao u definiciji $\mathrm{MP}(x)$ i $\beta \neq 0$, onda je $\langle 0, \gamma \rangle \in x$ za svaki $\gamma < \alpha$, pa, dakle, i za $\gamma = \max(\mathrm{MP}(x))$.

DEFINICIJA 13. Transfinitnom rekurzijom definišimo $\mathbf{K}$ na sledeći način:

$$\mathbf{K}(\alpha) = \mathrm{MP}(\{\mathbf{K}(\beta) \mid \beta < \alpha\}).$$

$\mathbf{K}(\alpha)$ je uređen par ordinala koji nije u $\{\mathbf{K}(\beta) \mid \beta < \alpha\}$.

Dakle, važi

TEOREMA 26. $\beta < \alpha \Rightarrow \mathbf{K}(\alpha) \neq \mathbf{K}(\beta)$.

Na osnovu (24), važi i

TEOREMA 27. $\max(\mathbf{K}(\alpha)) \times \max(\mathbf{K}(\alpha)) \subseteq \{\mathbf{K}(\beta) \mid \beta < \alpha\}$.

Dokazaćemo da za svaki uređen par x ordinala postoji ordinal α za koji je $x = \mathbf{K}(\alpha)$.

TEOREMA 28. *Za svaki uređeni par x ordinala postoji ordinal α takav da je $K(\alpha) \notin (\max(x))^+ \times (\max(x))^+$.*

DOKAZ. Definicijom 12 svakom ordinalu α dodeljen je tačno jedan uređen par ordinala, dakle, tačno jedan skup. Time je definisana funkcija $\mathbf{K}$ na $\mathbf{ON}$, pa se može primeniti teoremu 23. Dakle, ako je $\mathrm{ran}(\mathbf{K})$ skup, onda postoje ordinali α i β za koje je $\alpha < \beta$ i $\mathbf{K}(\alpha) = \mathbf{K}(\beta)$. Na osnovu teoreme 26 zaključujemo da $\mathrm{ran}(\mathbf{K})$ nije skup. Budući da je

$$(\max(x))^+ \times (\max(x))^+$$

skup, postoji ordinal α za koji je

$$\mathbf{K}(\alpha) \notin (\max(x))^+ \times (\max(x))^+.$$

TEOREMA 29. *Za svaki uređeni par x ordinala postoji ordinal α takav da je $x \in \max(\mathbf{K}(\alpha) \times \max(\mathbf{K}(\alpha))$.*

DOKAZ. Prema teoremi 28, postoji ordinal α takav da je

$$\mathbf{K}(\alpha) \notin (\max(x))^+ \times (\max(x))^+.$$

Tada je $(\pi_1(x))^+ \leq \max(\mathbf{K}(\alpha))$ i $(\pi_2(x)^+ \leq \max(\mathbf{K}(\alpha))$, tj. $\pi_1(x) < \max(\mathbf{K}(\alpha))$ i $\pi_2(x) < \max(\mathbf{K}(\alpha))$, pa je

$$x \in \max(\mathbf{K}(\alpha)) \times \max(\mathbf{K}(\alpha)).$$

TEOREMA 30. *Svaki uređen par X ordinala ima oblik* $\mathbf{K}(\alpha)$ *za neki ordinal α.*

DOKAZ. Na osnovu teorema 29 i 27.

TEOREMA 31. $\max(\mathbf{K}(\beta)) < \max(\mathbf{K}(\alpha)) \Rightarrow \beta < \alpha$.

DOKAZ. Pretpostavimo da je $\max(\mathbf{K}(\beta)) < \max(\mathbf{K}(\alpha))$; na osnovu teoreme 27, $\mathbf{K}(\beta) \in \{\mathbf{K}(\gamma) \mid \gamma < \alpha\}$; odavde proizlazi $\beta < \alpha$.

TEOREMA 32. $\max(\mathbf{K}(\alpha)) \leq \alpha$.

DOKAZ. Transfinitnom indukcijom po α. Pretpostavimo da je $\alpha < \max(\mathbf{K}(\alpha))$. Neka je β najmanji ordinal za koji je $\mathbf{K}(\beta) = \langle 0, \alpha\rangle$; tada je $\max(\mathbf{K}(\beta)) = \alpha < \max(\mathbf{K}(\alpha))$. Na osnovu teoreme 31 sledi $\beta < \alpha$, a na osnovu indukcijske pretpostavke dobijamo $\max(\mathbf{K}(\beta)) \leq \beta$. Dakle, $\alpha \leq \beta < \alpha$, što je nemoguće.

TEOREMA 33. *Ako je* $\pi_1(\mathbf{K}(\alpha)) \neq 0$, *onda je* $\max(\mathbf{K}(\alpha)) < \alpha$.

DOKAZ. Neka je $\pi_1(\mathbf{K}(\alpha)) \neq 0$; na osnovu teoreme 25, postoji $\beta < \alpha$ za koji je $\mathbf{K}(\beta) = \langle 0, \max(\mathbf{K}(\alpha))\rangle$. Odavde, na osnovu teoreme 32, proizlazi $\max(\mathbf{K}(\alpha)) = \max(\mathbf{K}(\beta) \leq \beta < \alpha$.

Skup $\{\langle \beta, \mathbf{K}(\beta)\rangle \mid \beta < \alpha\}$ je 1-1 funkcija koja ordinal α preslikava na skup $\{\mathbf{K}(\beta) \mid \beta < \alpha\}$.

KANTOROVA NORMALNA FORMA

Svaki ordinal se može predstaviti kao konačan zbir stepena ordinala ω.

TEOREMA 34. *Svaki ordinal α se može na jedinstven način predstaviti kao zbir*

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n},$$

gde je $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$; ako se saberu članovi sa jednakim eksponentima, onda je

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\beta_m} \cdot n_m,$$

gde je $\beta_1 > \ldots > \beta_m$ *dok su* $n_1 \ldots n_m$ *prirodni brojevi.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je dat ordinal α; neka je α_1 najveći ordinal za koji je $\omega^{\alpha_1} \leq \alpha$ i neka je δ_1 ostatak, tako da je $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \delta_1$. Neka je α_2 najveći ordinal za koji je $\omega^{\alpha_2} \leq \delta_1$ i neka je δ_2 ostatak, tako da je $\omega^{\alpha_2} + \delta_2 = \delta_1$, itd. Budući da je $\alpha > \delta_1 > \delta_2 > \ldots$, ovaj postupak će se završiti posle konačno mnogo koraka. Kako je $\omega^0 = 1$, to će biti kada je $\delta_n = 0$.

Jedinstvenost Kantorove normalne forme proizlazi iz činjenice da se ω^α ne može napisati kao zbir dva ordinala različitih od ω^α.

TEOREMA 35. $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$.

9. AKSIOMA REGULARNOSTI

Da li postoji skup x za koji je $x = \{x\}$? U dosadašnjem izlaganju, osim u izlaganju kumulativne hijerarhije, nije bilo nijedne pretpostavke koja bi isključivala postojanje takvog skupa. Ali, kumulativna hijerahija je bila uvedena neformalno, a ne na osnovu aksioma.

U ovom poglavlju definisaćemo klasu $\mathbf{V}$ skupova takvu da, kao što će se pokazati, za svaki skup x iz nje važi $x \neq \{x\}$. Važnost klase $\mathbf{V}$ je u tome što se svi matematički objekti nalaze u toj klasi, pa proizlazi da se može pretpostaviti da je to klasa svih skupova na koje se odnose naše aksiome. Ova pretpostavka nema posledice u matematičkim teorijama, osim u teoriji skupova, gde vodi mnogim uprošćavanjima, što predstavlja razlog za njeno prihvatanje.

Klasa $\mathbf{V}$ je definisana transfinitnom rekurzijom po ordinalima. Može se reći da se na taj način ponovo, ovoga puta formalno, uvodi kumulativna hijerarhija.

DEFINICIJA 1. Transfinitnom rekurzijom po $\mathbf{ON}$ definisan je skup $\mathbf{V}_\alpha$, za svaki ordinal α.

(a) $\mathbf{V}_0 = 0$;
(b) $\mathbf{V}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathbf{V}_\alpha)$;
(c) $\mathbf{V}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathbf{V}_\xi$, ako je α granični ordinal.

DEFINICIJA 2. $\mathbf{V} = \bigcup\{\mathbf{V}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{ON}\}$. Elementi klase $\mathbf{V}$ zovu se *dobro zasnovani, fundirani* ili *regularni skupovi.*

TEOREMA 1. *Za svaki ordinal* α:

(1) $\mathbf{V}_\alpha \in \mathbf{V}$;
(2) $\mathbf{V}_\alpha$ *je tranzitivan skup*;
(3) $(\forall \xi \leq \alpha)\ (\mathbf{V}_\xi \subseteq \mathbf{V}_\alpha)$.

DOKAZ. (1) $\mathbf{V}_\alpha \in \mathcal{P}(\mathbf{V}_\alpha) = \mathbf{V}_{\alpha+1}$, pa je $\mathbf{V}_\alpha \in \mathbf{V}$.

(2) Transfinitnom indukcijom po α. Pretpostavimo da teorema važi za sve $\beta < \alpha$ i dokažimo je za α.

Ako je $\alpha = 0$, teorema je trivijalna.

Ako je α granični ordinal, onda (2) sledi iz činjenice da je unija tranzitivnih skupova tranzitivan skup, a (3) je posledica definicije.

Ako je $\alpha = \beta + 1$, onda je $\mathbf{V}_\beta$ tranzitivan po indukcijskoj pretpostavci, pa kako je $\mathbf{V}_\alpha = \mathcal{P}(\mathbf{V}_\beta)$, imamo $\mathbf{V}_\beta \subseteq \mathbf{V}_\alpha$, odakle proizlazi da je i $\mathbf{V}_\alpha$ tranzitivan skup.

Ako je $x \in \mathbf{V}$, onda najmanji ordinal α za koji je $x \in \mathbf{V}_\alpha$ mora biti ordinal sledbenik.

DEFINICIJA 3. Ako je $x \in \mathbf{V}$, onda je *rang* skupa x (rank(x)) najmanji ordinal β za koji je $x \in \mathbf{V}_{\beta+1}$.

Iz definicije 3 sledi da ako je $\beta = \text{rank}(x)$, onda je $x \subseteq \mathbf{V}_\beta$, $x \notin \mathbf{V}_\beta$ i $x \in \mathbf{V}_\alpha$ za svaki $\alpha > \beta$.

TEOREMA 2. *Za svaki ordinal* α,

$$\mathbf{V}_\alpha = \{x \in \mathbf{V} \mid \text{rank}(x) < \alpha\}.$$

DOKAZ. Za $x \in \mathbf{V}$, rank(x) $< \alpha$ ako i samo ako postoji ordinal $\beta < \alpha$ za koji je $x \in \mathbf{V}_{\beta+1}$, a to važi ako i samo ako je $x \in \mathbf{V}_\alpha$.

TEOREMA 3. *Ako je* $y \in \mathbf{V}$, *onda je*

(1) $(\forall x \in y)\,(x \in \mathbf{V} \wedge \text{rank}(x) < \text{rank}(y))$;
(2) $\text{rank}(y) = \sup(\{\text{rank}(x) + 1) \mid x \in y\}$.

DOKAZ. (1) Neka je $\alpha = \text{rank}(y)$; tada je $y \in \mathbf{V}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathbf{V}_\alpha)$. Ako je $x \in y$, onda je $x \in y \subseteq \mathbf{V}_\alpha$, tj. $x \in \mathbf{V}_\alpha$, pa imamo $x \in \mathbf{V}$ i rank(x) $< \alpha$ na osnovu teoreme 2.

(2) Neka je $\alpha = \sup(\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\})$. Na osnovu (1), $\alpha \leq \text{rank}(y)$. Svaki $x \in y$ ima rang koji je manji od α, pa je $y \subseteq \mathbf{V}_\alpha$. Dakle, $y \in \mathbf{V}_{\alpha+1}$, pa je rank($y$) $\leq \alpha$.

Prema teoremi 3 (1), klasa $\mathbf{V}$ je tranzitivna, a njene elemente možemo zamišljati kao da su konstruisani transfinitnom rekurzijom od dobro zasnovanih skupova manjeg ranga. Na taj način $\mathbf{V}$ ne sadrži skupove koji su svoji sopstveni elementi. Drugim rečima, ne postoji $x \in \mathbf{V}$ za koji je $x \in x$, jer bi bilo rank(x) $<$ rank(x). $\mathbf{V}$ ne sadrži ni "krugove" $x_1 \in x_2, x_2 \in x_3, \ldots, x_{n-1} \in x_n$ i $x_n \in x_1$.

Svaki ordinal α se nalazi u klasi $\mathbf{V}$ i važi rank(α) $= \alpha$.

TEOREMA 4. (1) $(\forall \alpha \in \mathbf{O}N)\,(\alpha \in \mathbf{V} \;\wedge\; \text{rank}(\alpha) = \alpha)$; (2) $(\forall \alpha \in \mathbf{O}N)\; \mathbf{V}_\alpha \cap \mathbf{O}N = \alpha$.

DOKAZ. Primenimo transfinitnu indukciju na α. Pretpostavimo da (1) važi za svaki $\beta < \alpha$. Tada je, za $\beta < \alpha$, $\beta \in \mathbf{V}_{\beta+1} \subseteq \mathbf{V}_\alpha$, pa imamo $\alpha \subseteq \mathbf{V}_\alpha$ i stoga $\alpha \in \mathcal{P}(\mathbf{V}_\alpha) = \mathbf{V}_{\alpha+1}$. Na osnovu teoreme 3,

$$\operatorname{rank}(\alpha) = \sup(\{\beta + 1 \mid \beta < \alpha\}) = \alpha.$$

Dakle, (1) važi za α.

(2) sledi iz (1) i 2.

Klasa $\mathbf{V}$ ne sadrži samo ordinale, nego i druge skupove koji se dobijaju uobičajenim konstrukcijama.

TEOREMA 5. (1) *Ako je $x \in \mathbf{V}$, onda su $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$ i $\{x\}$ elementi klase $\mathbf{V}$ i rang ovih skupova je manji od* $\operatorname{rank}(x) + 1$;

(2) *ako su $x, y \in \mathbf{V}$, onda su $x \times y$, $x \cup y$, $x \cap y$, $\{x, y\}$, $\langle x, y\rangle$ i x^y elementi klase $\mathbf{V}$ i rang ovih skupova je manji od* $\max(\operatorname{rank}(x), \operatorname{rank}(y)) + 3$.

DOKAZ. (1) Neka je $\alpha = \operatorname{rank}(x)$; tada je $x \subseteq \mathbf{V}_\alpha$, pa je $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{V}_\alpha) = \mathbf{V}_{\alpha+1}$. Dakle, $\mathcal{P}(x) \in \mathbf{V}_{\alpha+2}$. Na sličan način dobijamo $\{x\} \in \mathbf{V}_{\alpha+2}$ i $\bigcup x \in \mathbf{V}_{\alpha+1}$.

(2) Neka je $\alpha = \max(\operatorname{rank}(x), \operatorname{rank}(x))$. Kao u dokazu za (1), može se pokazati da je $\{x, y\} \in \mathbf{V}_{\alpha+2}$, $\langle x, y\rangle \in \mathbf{V}_{\alpha+3}$. Svaki uređen par elemenata skupa $x \cup y$ nalazi se u $\mathbf{V}_{\alpha+2}$, pa je $x^y \subseteq \mathbf{V}_{\alpha+3}$ i $x^y \in \mathbf{V}_{\alpha+4}$. Završavanje dokaza prepuštamo čitaocu.

Na osnovu teoreme 5 može se tačno izračunati rang skupova celih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva; svi se oni nalaze u $\mathbf{V}_{\omega+10}$.

TEOREMA 6. (1) *Klasa $\mathbf{V}$ je tranzitivna*;

(2) $\forall x\, (x \in \mathbf{V} \Leftrightarrow x \subset \mathbf{V})$.

DOKAZ. (1) Ako je $x \in \mathbf{V}$ i $\alpha = \operatorname{rank}(x)$, onda je $x \in \mathbf{V}_{\alpha+1}$, pa, zbog tranzitivnosti skupa $\mathbf{V}_{\alpha+1}$, $x \subseteq \mathbf{V}_{\alpha+1} \subset \mathbf{V}_{\alpha+2} \subseteq \mathbf{V}$ i odatle $x \subset \mathbf{V}$; pritom $\mathbf{V}_{\alpha+1} \subset \mathbf{V}_{\alpha+2}$ proizlazi iz $\mathbf{V}_{\alpha+1} \in \mathbf{V}_{\alpha+2}$ i stoga je $\mathbf{V}_{\alpha+1} \neq \mathbf{V}_{\alpha+2}$.

(2) Ako je $x \in \mathbf{V}$, onda je $x \subset \mathbf{V}$ na osnovu tranzitivnosti klase $\mathbf{V}$. Ako je $x \subset \mathbf{V}$, neka je

$$\alpha = \sup(\{\operatorname{rank}(y) + 1 \mid y \in x\});$$

tada je $x \subseteq \mathbf{V}_\alpha$, pa je $x \in \mathbf{V}_{\alpha+1}$.

TEOREMA 7. *Za svaki $n \in \omega$, $\mathbf{V}_n$ je konačan skup.*

DOKAZ. Indukcijom po n.

TEOREMA 8. *$\mathbf{V}_\omega$ je ekvipotentan sa ω.*

DOKAZ. Budući da je $\omega \subseteq \mathbf{V}_\omega$, dovoljno je dokazati da je $\mathbf{V}_\omega$ prebrojivo beskonačna familija. To proizlazi iz $\mathbf{V}_\omega = \bigcup_{n \in \omega} \mathbf{V}_n$, s obzirom na teoremu 7.

Na osnovu teoreme 8, $\mathbf{V}_n$ i $\mathbf{V}_\omega$ su dobro uređeni skupovi.

U $\mathbf{V}$ se može izgraditi svaka značajnija matematička struktura, kao što su grupe ili topološki prostori. Za taj dokaz potrebna je *aksioma izbora* koja će biti razmotrena u sledećem poglavlju.

DEFINICIJA 4. Neka je R binarna relacija skupa x i neka je $y \subseteq x$; za element $z \in y$ kaže se da je *R-minimalan* element podskupa y ako i samo ako ne postoji $z' \in y$ takav da je zRz' i $z \neq z'$.

Binarna relacija R je *fundirana* (*regularna, dobro zasnovana*) na skupu x ako i samo ako svaki neprazan podskup $y \subseteq x$ ima R-minimalan element.

Ako je R totalno parcijalno uređenje, onda je R fundirana na x ako i samo ako R dobro uređuje x. Primetimo da se u definiciji 3 ne zahteva da bude $R \subseteq x \times x$, ali je jasno da je R fundirana na y ako je R fundirana na x i $y \subseteq x$.

Ako R nije parcijalno uređenje, onda skup x iz definicije 3 može imati više od jednog R-minimalnog elementa.

TEOREMA 9. *Ako je $x \in \mathbf{V}$, onda je relacija $\in$ fundirana na x.*

DOKAZ. Neka je y neprazan podskup skupa x i neka je α najmanji rang nekog elementa $z \in y$. Element z svakako postoji u y, a na osnovu teoreme 3 (1), takav element z je $\in$-minimalan u y.

TEOREMA 10. *Ako je x tranzitivan skup i relacija $\in$ je fundirana na x, onda je $x \in \mathbf{V}$.*

DOKAZ. Na osnovu teoreme 6, dovoljno je dokazati da je $x \subset \mathbf{V}$. Ako to nije tako, neka je $y = x \setminus \mathbf{V} \neq \emptyset$ i neka je z $\in$-minimalan u y. Ako je $a \in z$, onda je $a \notin y$, ali je $a \in x$, jer je x tranzitivan skup. Dakle, $a \in \mathbf{V}$. Prema tome, $z \in \mathbf{V}$ na osnovu teoreme 6, suprotno pretpostavci da je $z \in x \setminus \mathbf{V}$.

Sledećom teoremom se tvrdi da je $x \in \mathbf{V}$ ako i samo ako je $\in$ fundirana na *tranzitivnom zatvorenju* skupa x, tj. na najmanjem tranzitivnom skupu koji sadrži x kao podskup.

DEFINICIJA 5. (a) Rekurzijom po n definišimo $\bigcup^n x$: $\bigcup^0 x = x$ i $\bigcup^{n+1} x = \bigcup(\bigcup^n x)$;

(b) $TZ(x) \doteq \bigcup\{\bigcup^n x \mid n \in \omega\}$ ($TZ(x)$ se zove *tranzitivno zatvorenje skupa* x).

Očigledno, $TZ(x) = x \cup (\bigcup x) \cup (\bigcup^2 x) \cup \ldots$.

TEOREMA 11. (1) $x \subseteq TZ(x)$;
(2) $TZ(x)$ *je tranzitivan skup*;
(3) *ako je* $y \subseteq x$ *i* x *je tranzitivan, onda je* $TZ(y) \subseteq x$;
(4) *ako je* x *tranzitivan, onda je* $TZ(x) = x$;
(5) $(\forall y \in x)\,(TZ(y) \subseteq TZ(x))$;
(6) $TZ(x) = x \cup (\bigcup\{TZ(y) \mid y \in x\})$.

DOKAZ. (1) je trivijalno. (2) Ako je $z \in \bigcup^n x$, onda je $z \subseteq \bigcup^{n+1} x$. (3) Indukcijom po n može se pokazati da je $\bigcup^n y \subseteq x$. (4) sledi iz (1) i (3) za slučaj kada je $x = y$. (5) Ako je $y \in x$, onda je $y \in TZ(x)$, pa sledi $y \subseteq TZ(x)$; sada primenimo (3) na y. (6) Neka je

$$z = x \cup (\bigcup\{TZ(y) \mid y \in x\}).$$

Skup z je tranzitivan, pa je $TZ(x) \subseteq z$ na osnovu (3). Na osnovu (1) i (3), važi $z \subseteq TZ(x)$.

TEOREMA 12. *Za svaki skup* x *sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*
(1) $x \in \mathbf{V}$;
(2) $TZ(x) \in \mathbf{V}$;
(3) $\in$ *je fundirana na* $TZ(x)$.

DOKAZ. Ako je $x \in \mathbf{V}$, onda se indukcijom po n može pokazati da je $\bigcup^n x \subseteq \mathbf{V}$, na osnovu teoreme 5. Dakle, za svaki n, $\bigcup^n x \subseteq \mathbf{V}$. Na isti način kao teorema 9 može se dokazati da za svaki skup x, iz $x \subseteq \mathbf{V}$ proizlazi da je relacija $\in$ fundirana na skupu x. Na osnovu ove činjenice relacija $\in$ je fundirana i na skupu $TZ(x) \subseteq \mathbf{V}$, pa kako je skup $TZ(x)$ još i tranzitivan, prema teoremi 10 imamo $TZ(x) \in \mathbf{V}$.

Da iz (2) sledi (3), tvrdi se u teoremi 9. Pretpostavimo (3); na osnovu teoreme 10, sledi $TZ(x) \in \mathbf{V}$, pa je $x \subseteq TZ(x) \subseteq \mathbf{V}$ i $x \in \mathbf{V}$, na osnovu teoreme 6.

Budući da se sve značajne matematičke strukture mogu izgraditi u $\mathbf{V}$, izgleda prirodno pretpostaviti da je $\mathbf{V}$ klasa svih skupova na koje se odnose do sada razmotrene aksiome teorije skupova. To ne bi značilo ništa drugo nego da je razmatranje skupova ograničeno samo na one skupove koji su u $\mathbf{V}$. Ova pretpostavka iskazuje se obično u obliku *aksiome regularnosti* (*fundiranja, dobre zasnovanosti*).

AKSIOMA REGULARNOSTI. *Svaki neprazan skup ima $\in$-minimalan element*, tj.

$$\forall x \exists y \, (x \neq \emptyset \Rightarrow y \in x \land \forall z (z \in x \Rightarrow z \notin y)).$$

Drugim rečima, relacija $\in$ je fundirana na klasi $\mathbf{V}$.

TEOREMA 13. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *aksioma regularnosti;*

(2) *relacija $\in$ je fundirana na svakom skupu x;*

(3) $\forall x (\exists y \in \mathbf{ON})\, x \in \mathbf{V}$.

DOKAZ. Da su (1) i (2) ekvivalentna tvrđenja sledi iz definicije regularnosti. Iz (2) sledi da je $\in$ fundirana na $TZ(x)$, za svaki skup x, pa je $x \in \mathbf{V}$ prema teoremi 12. Na osnovu teoreme 9, iz (3) sledi (2).

Aksioma regularnosti nema posledica u običnoj matematici. Međutim, u teoriji skupova ona ima važne posledice. Na primer, ne postoji skup x za koji je $x \in x$. Štaviše, ni za jedan prirodan broj n ne postoje skupovi

$$x_1, \ldots, x_{n+1}$$

takvi da je za svaki $1 \leq i \leq n$ $x_i \in x_{i+1}$ i $x_{n+1} \in x_1$. Za svaki neprazan skup x postoji $y \in x$ za koji je $x \cap y = \emptyset$.

TEOREMA 14. *Za svaki skup x, sledeća tvrđenja su ekvivalentna: (1) x je ordinal; (2) x je tranzitivan i totalno uređen relacijom $\in$; (3) x je tranzitivan i svaki element skupa x je tranzitivan.*

DOKAZ. Već je dokazano da (1) povlači (2) i (3). Iz (2) sledi (3) na osnovu tranzitivnosti relacije $\in$.

Pretpostavimo (3); primenjujući transfinitnu indukciju po rangu dokazaćemo da je x totalno uređen relacijom $\in$. Neka su a i b elementi skupa x i neka je $T(a, b)$ tvrđenje "$a \in b$ ili $b \in a$ ili $a = b$". Na osnovu teoreme 13 (3), svaki skup ima rang. Treba dokazati tvrđenje: "za svaka dva elementa a i b skupa x važi $T(a, b)$". Pretpostavimo suprotno i neka je:

$$\alpha = \min\{\text{rank}(\xi) \mid \text{ne važi } T(\xi, t) \text{ za neki } t \in x\}$$

$$\text{rank}(a) = \alpha, \text{ ne važi } T(a, t) \text{ za neki } t \in x;$$

$$\beta = \min\{\text{rank}(\eta) \mid \text{ ne važi } T(a, \eta)\}, \text{rank}(b) = \beta, \text{ ne važi } T(a, b).$$

Iz pretpostavke sledi postojanje skupova α, β, a i b. Pritom važe sledeća dva iskaza:

$(*)$ *za svaki skup c, ako je* $\text{rank}(c) < \text{rank}(a)$, *onda je* $T(c, b)$;

$(**)$ *za svaki skup c, ako je* $\text{rank}(c) < \text{rank}(b)$, *onda je* $T(a, c)$.

Jasno je da važi ili $a = b$ ili $a \setminus b \neq \emptyset$ ili $b \setminus a \neq \emptyset$. Ako je $a = b$, onda važi $T(a, b)$. Neka je $a \setminus b \neq \emptyset$; tada postoji $c \in a$, $c \notin b$, pa je $\text{rank}(c) < \text{rank}(a)$; na osnovu $(*)$, važi $T(c, b)$. Budući da je $c \notin b$, važi $b \in c$ ili $c = b$, a kako je a tranzitivan, sledi $b \in a$, tj. $T(a, b)$. Neka je $b \setminus a \neq 0$; tada postoji $c \in b$, $c \notin a$, pa je $\text{rank}(c) < \text{rank}(b)$. Na osnovu $(**)$, sledi $T(a, c)$, pa je $a \in c$ ili $x = c$. Budući da je b tranzitivan, sledi $a \in b$. Tako se u sva tri slučaja dobija protivrečnost.

Time je dokazano da je skup x totalno uređen relacijom $\in$. Na osnovu aksiome regularnosti i činjenice da je x totalno uređen relacijom $\in$, sledi da je x dobro uređen tom istom relacijom. Iz tranzitivnosti skupa x sledi onda da je, sa relacijom uređenja $\in$, $\text{st}(a) = a$ za svaki $a \in x$. Dakle, x je ordinal.

Aksioma regularnosti sve skupove iz $\mathbf{V}$ svrstava u slojeve $\mathbf{V}_\alpha$, za svaki ordinal α, počevši od praznog skupa. Skupovi su samo one klase koje se nalaze bar u jednom sloju $\mathbf{V}_\alpha$, za neki ordinal α. Kumulativna hijerarhija slojeva $\mathbf{V}_\alpha$ u klasi $\mathbf{V}$ poznata je i kao *univerzum fon Nojmana*, prema velikom matematičaru Džonu fon Nojmanu (John von Neumann 1903-1957).

Teoreme koje smo ovde dokazali pomoću aksiome regularnosti najjača su tvrđenja na jeziku teorije skupova o tome da je proučavanje skupova ograničeno samo na objekte iz kumulativne hijerarhije $\mathbf{V}$. $\mathrm{rank}(x)$ je ordinal koji pokazuje gde je u toj hijerarhiji skup x prvi put uveden, dok je $\mathbf{V}_\alpha$ kolekcija skupova koji su uvedeni pre stupnja α. Kolekcija skupova koji se prvi put pojavljuju na stupnju α je $\mathbf{V}_{\alpha+1} \setminus \mathbf{V}_\alpha$.

10. KARDINALI

Kardinalni brojevi ili *kardinali* služe za upoređivanje veličine skupova.

DEFINICIJA 1. Ako je skup x ekvipotentan sa nekim podskupom skupa y, piše se $x \preceq y$ i kaže se da skup x *ima manju moć* ili *manju kardinalnost* od skupa y, ili da je *jednake ili manje kardinalnosti* od skupa y. Ako su x i y ekvipotentni ($x \sim y$) kaže se i da su x i y *jednake kardinalnosti*. Ako je $x \preceq y$ i nije $y \preceq x$, y piše se $x \prec y$ i kaže se da skup y *ima veću moć* ili *veću kardinalnost* od skupa x.

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Budući da je $x \preceq x$, relacija $\preceq$ je refleksivna. Neka je f 1-1 korespondencija između x i nekog podskupa skupa y, neka je g 1-1 korespondencija između y i nekog podskupa skupa z i, najzad, neka je $h = g|\mathrm{ran}(f)$; tada je hf 1-1 korespondencija između x i nekog podskupa skupa z. Drugim rečima,

$$\forall x, y, z\ (x \preceq y \land y \preceq z \Rightarrow x \preceq z).$$

Jasno je da $x \preceq y$ i $y \preceq x$ ne povlače $x = y$. Može se dokazati *Bernštajn-Šrederova teorema*.

TEOREMA 1. (BERNŠTAJN-ŠREDEROVA TEOREMA). $\forall x, y\ (x \preceq y \land y \preceq x \Rightarrow x \sim y)$.

DOKAZ. Neka je f 1-1 preslikavanje skupa x u skup y i neka je g 1-1 preslikavanje skupa y u x. Ne smanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je $x \cap y = \emptyset$. Ako to nije tako, posmatrajmo skupove $x \times \{0\}$ i $y \times \{1\}$ koji su svakako disjunktni. Dokaz koji sledi važi i za ove skupove, uz nebitnu izmenu notacije. Za element $a \in x$ kažemo da je *roditelj* elementa $f(a)$ u y; element b iz y je roditelj elementa $g(b)$ iz x. Svaki element a iz x ima beskonačan niz potomaka: $f(a)$, $g(f(a))$, $f(g(f(a)))$ .... Potomci elementa b iz y su $g(b)$, $f(g(b))$, $g(f(g(b)))$, ... Svaki član jednog od ovih nizova je potomak svih prethodnih članova. Kazaćemo da je član jednog od ovih nizova *predak* svih potonjih članova tog niza. Za svaki element iz $x \cup y$ postoji jedna od sledećih mogućnosti: idući unazad ka njegovim precima dolazimo do jednog elementa skupa x koji nema roditelje (on je u skupu $x \setminus g(y)$) ili do jednog elementa skupa y koji nema roditelje (on je element skupa $y \setminus f(x)$) ili nas traženje predaka tog elementa vodi u beskonačan regres. Neka je x_x skup svih elemenata iz $x \setminus g(y)$ i njihovih potomaka, neka je x_y skup svih elemenata iz x koji vode poreklo iz y (x_y je skup svih potomaka elemanata skupa $y \setminus f(x)$ koji su u x) i neka je x_0 skup svih onih elemenata iz x koji nemaju pretke bez roditelja. Na isti način skup y može se podeliti na podskupove y_x, y_y i y_0.

Ako je $a \in x_x$, onda je $f(a) \in y_x$; $f|x_x$ je 1-1 korespondencija između x_x i y_x. Ako je $a \in x_y$, onda a pripada domenu inverzne funkcije g^{-1} i $g^{-1}(a) \in y_y$; $g^{-1}|x_y$ je 1-1 korespondencija između x_y i y_y. Ako je $a \in x_0$, onda je $f(a) \in y_0$; $f|x_0$ je 1-1 korespondencija između x_0 i y_0. Spajajući ove tri 1-1 korespondencije dobijamo 1-1 korespondenciju između x i y.

Ovu teoremu prvi je dokazao Bernštajn (F. Bernstein) čiji dokaz navodi Borel (E. Borel) u jednoj svojoj knjizi 1898. Nezavisan dokaz dao je Šreder (E. Schröder) u isto vreme. Kantor je bio prvi koji je ovu teoremu tvrdio bez dokaza, pa se ona zove i *Kantor-Bernštajnova teorema.*

KONAČNI I BESKONAČNI SKUPOVI

Razmotrićemo odnos između konačnih i beskonačnih skupova.

TEOREMA 2. *Ako je $\omega \preceq x$, onda je x beskonačan skup.*

DOKAZ. Kada ne bi bilo tako, imali bismo $\omega \preceq x$ i $x \sim n$ za neki $n \in \omega$, pa bi bilo $\omega \preceq n$, što bi protivrečilo činjenici da je ω beskonačan.

TEOREMA 3. $\forall x, y, z\, ((x \preceq y \wedge y \prec z) \vee (x \prec y \wedge y \preceq z) \Rightarrow x \prec z)$.

DOKAZ. Neka je $x \preceq y$ i $y \prec z$; jasno je da je $x \preceq z$. Treba još dokazati da nije $z \preceq x$.

Pretpostavimo da je $z \preceq x$; to zajedno sa $x \preceq y$ daje $z \preceq y$, jer je relacija $\preceq$ tranzitivna. Ali iz $y \prec z$ proizlazi da je $y \preceq z$ i da nije $z \preceq y$. To je kontradikcija, pa pretpostavka da nije $x \prec z$ nije tačna. Dakle, $x \prec z$.

TEOREMA 4. *Skup x je konačan ako i samo ako je $x \prec \omega$.*

DOKAZ. Ako je x konačan, onda je $x \sim n$ za neki $n \in \omega$. Budući da je ω beskonačan, $n \prec \omega$, pa je, na osnovu teoreme 3, $x \prec \omega$.

Pretpostavimo da je $x \prec \omega$; tada je $x \sim y$ za neki $y \subset \omega$. Ako je $y = \emptyset$, onda je $x = \emptyset$, pa je x konačan. Pretpostavimo da je $y \neq \emptyset$ i da y nema najveći element u odnosu na relaciju $<$ definisanu na ω. Tada se na ω može definisati funkcija $f : \omega \to y$ ovako: $f(0)$ je najmanji element skupa y; $f(n^+)$ je najmanji element skupa $y \setminus f(n)$. Kako y nema najveći element, $(\forall m, n \in \omega)\ (m \neq n \Rightarrow f(m) \neq f(n))$. Zaista, prema načinu na koji je definisana funkcija f, imamo $(\forall n \in \omega)\ f(n^+) > f(n)$. Odavde jednostavno (indukcijom) proizlazi $(\forall m, n \in \omega)\ (m < n \Rightarrow f(m) < f(n))$. Dakle, f je 1-1 funkcija.

Da je f i "na" funkcija možemo se uveriti na sledeći način. Posmatrajmo skup $\mathrm{sl}(n)$ slabih prethodnika elementa $n \in \omega$. Tada je $y \cap \mathrm{sl}(f(0)) = \{f(0)\} \subseteq f(\omega)$; pretpostavka da je $y \cap \mathrm{sl}(f(n)) \subseteq f(\omega)$ povlači $y \cap \mathrm{sl}(f(n^+)) = y \cap (\mathrm{sl}(f(n)) \cup \{f(n^+)\} \subseteq f(\omega)$, jer je $y \cap \mathrm{sl}(f(n)) \subseteq f(\omega)$ po indukcijskoj pretpostavci, a $\{f(n^+)\} \subseteq f(\omega)$ je očigledno. Dakle, $(\forall n \in \omega)\ y \cap \mathrm{sl}(n) \subseteq \mathrm{sl}(f(n^+)) \subseteq f(\omega)$. Odavde je $y = y \cap \omega = y \cap \bigcup_{n \in \omega} \mathrm{sl}(n) = \bigcup_{n \in \omega}(y \cap \mathrm{sl}(n)) \subseteq f(n) \subseteq y$, tj. $f(\omega) = y$. Dakle, f je i "na", pa je $y \sim \omega$. Kako je $x \sim y$, sledi $x \sim \omega$, suprotno pretpostavci da je $x \prec \omega$. Odavde zaključujemo da y ima najveći element i da je konačan skup, pa je to i x.

PREBROJIVI SKUPOVI

Važnu potklasu beskonačnih skupova čine prebrojivi skupovi.

DEFINICIJA 2. Za skup x se kaže da je (*najviše*) *prebrojiv* ako i samo ako je $x \preceq \omega$. Ako je $x \sim \omega$, za x se kaže da je *prebrojivo beskonačan* ili samo *prebrojiv*.

Svaki podskup skupa ω je najviše prebrojiv. Svaki podskup prebrojivog skupa je najviše prebrojiv.

TEOREMA 5. *Ako je f funkcija od ω na skup x, onda je x prebrojiv.*

DOKAZ. Budući da je $f^{-1}(\{a\})$ neprazan, gde je $a \in x$, taj skup ima najmanji element. Definišimo funkciju $g : x \to \omega$ ovako: $g(a)$ je najmanji element skupa $f^{-1}(\{a\})$. g je 1-1 funkcija. Za $a, b \in x$, ako je $g(a) = g(b)$, onda skupovi $f^{-1}(\{a\})$ i $f^{-1}(\{b\})$ imaju isti najmanji element, recimo n. Kako je f funkcija, $f(n) = a = b$. Dakle, $x \preceq \omega$.

Skup x je prebrojiv ako i samo ako postoji preslikavanje nekog prebrojivog skupa na x. Ili: ako je y dati prebrojivo beskonačan skup, onda je skup x prebrojiv ako i samo ako postoji preslikavanje skupa y na x.

Evo nekoliko primera prebrojivih skupova. Preslikavanje f skupa ω na skup parnih brojeva, gde je $f(n) = 2n$, $n \in \omega$, je 1-1 pa je skup parnih brojeva prebrojiv. Preslikavanje g skupa ω na skup neparnih brojeva, gde je $g(n) = 2n + 1$ je takođe 1-1, pa je i skup neparnih brojeva prebrojiv.

TEOREMA 6. *Ako su skupovi x i y prebrojivi, onda je $x \cup y$ prebrojiv skup.*

TEOREMA 7. *Unija konačne familije prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

DOKAZ. Matematičkom indukcijom.

TEOREMA 8. *Postoji disjunktna familija $\{a_n\}$ $(n \in \omega)$ beskonačnih podskupova skupa ω čija je unija ω.*

DOKAZ. Ovo tvrđenje može da se dokaže na razne načine. Jedan je i ovaj. Neka je $a_0 = \{0\} \cup \{2k+1 \mid k \in \omega\}$ i neka je $a_n = \{2^n(2k+1) \mid k \in \omega\}$ $(n \in \omega \setminus \{0\})$; tada su a_k i a_m disjunktni prebrojivi skupovi, za sve $k, m \in \omega$.

TEOREMA 9. *Za svaki prebrojivo beskonačan skup x, $x \sim x \times x$.*

DOKAZ. Dovoljno je dokazati da je $\omega \times \omega \sim \omega$. Poređajmo elemente skupa $\omega \times \omega$ ovako:

$$\begin{array}{l}\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\ldots\\ \langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\ldots\\ \langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Uredimo ovaj skup na sledeći način:

$$(*) \qquad \langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,0\rangle, \ldots.$$

Jasno je da se tako svi uređeni parovi prirodnih brojeva mogu poređati u prebrojivo beskonačan niz. Ova bijekcija između $\omega \times \omega$ i ω može se opisati funkcijom f dve promenljive. Definišimo prvo na $\omega \setminus \{0\}$ funkciju $\binom{}{2}$:

$$\binom{0}{2} = 0 \quad i \quad \binom{n^+}{2} = \binom{n}{2} + n.$$

$\binom{}{2}$ je strogo rastuća funkcija: ako je $m < n$, onda je

$$\binom{m}{2} < \binom{n}{2},$$

sem kada je $m = 0$ i $n = 1$.

Sada možemo definisati $f(m,n)$ za $m, n \in \omega$:

$$f(m,n) = \binom{m+n+1}{2} + m.$$

Funkcija f je tražena bijekcija. Neka je $f(m,n) = f(k,l)$. Ako je $m > k$, onda je za neki $r > 0$ $m = k + r$ i

$$(1) \qquad \binom{k+r+n+1}{2} + k + r = \binom{k+l+1}{2} + k,$$

pa sledi da je $l > r+n$, jer je $\binom{}{2}$ rastuća funkcija. Dakle, $l = r+n+s$ za neki $s > 0$. Neka je $p = k + r + n + 1$; tada se iz (1) dobija

$$\binom{p}{2} + r = \binom{p+s}{2},$$

što je nemoguće, jer je $r < p$, pa je

$$\binom{p}{2} + r < \binom{p}{2} + p = \binom{p+1}{2} \leq \binom{p+s}{2},$$

suprotno (1). Na sličan način se dokazuje da nije $m < k$. Dakle, $m = k$, pa je

$$\binom{k+n+1}{2} = \binom{k+l+1}{2}.$$

Odavde, s obzirom na strogo rašćenje funkcije $\binom{}{2}$ za $n > 1$, proizlazi $n = l$. Time je dokazano da je f injekcija.

Iz $f(0,0) = 0$ i $f(0,1) = 1$ sledi $0, 1 \in \omega$. Pretpostavimo da za $k \in \omega$ postoje $m, n \in \omega$ za koje je $f(m,n) = k$. Ako je $n > 0$, onda je

$$k+1 = f(m,n)+1 = \binom{m+n+1}{2} + m + 1 = f(m+1, n-1),$$

pa je $k+1 \in \omega$. Ako je $n = 0$, onda je

$$k+1 = \binom{m}{2} + m + 1 = \binom{m+1}{2} + 1.$$

Ako je i $m > 0$, onda sledi

$$\binom{1+(m-1)+1}{2} + 1 = f(1, m-1),$$

pa je $k+1 \in \omega$. Ako je $m = n = 0$, onda je $k = 0$, pa je $k+1 = 1 \in \omega$. Time je dokazano da je f i sirjekcija. Dakle, f je bijekcija između $\omega \times \omega$ i ω.

Pogledajmo još jednom funkciju f. Neka su (m,n) i (a,b) dva uređena para prirodnih brojeva. Ako je $m+n < a+b$, onda je $f(m,n) < f(a,b)$; ako je $m+n = a+b$, onda je $f(m,n) < f(a,b)$ ukoliko je $m < a$.

Dokaz prethodne teoreme dao je još Kantor.

TEOREMA 10. $f(m,n) < f(a,b) \Leftrightarrow m+n < a+b \vee (a+b = m+n \wedge a < m)$.

Da li se eksplicitno može definisati funkcija g koja je inverzna funkciji f, u obliku

$$g(k) = \langle l(k), d(k) \rangle,\ k \in \omega?$$

Vrednost funkcije g je uređen par prirodnih brojeva koji se nalazi na k-tom mestu u nizu $(*)$?

TEOREMA 11. *Neka su l i d funkcije definisane na sledeći način.*

$l(0) = 0$; $l(m^+) = l(m) + 1$, *ako postoji k, $k < m$, za koji je $l(k) = l(m)$; inače je $l(m^+) = 0$.*

$d(0) = 0$; $d(n^+) = d(n) - 1$, *ako je $d(n) \neq 0$; inače je $d(n^+) = \max(d(k) \mid k \leq n+1)$.*

Tada je $f(l(k), d(k)) = k$.

DOKAZ. Označimo sa $s_k^+(l)$, $s_k(l)$ i $s_k^-(l)$, redom, $\max(\{l(j) \mid j \leq k^+\})$, $\max(\{l(j) \mid j \leq k\})$ i $\max(\{l(j) \mid j \leq k-1\})$, a na sličan način definišimo i $s_k^+(d)$, $s_k(d)$ i $s_k^-(d)$.

Indukcijom po k može se dokazati

LEMA 1. *Za svaki $k \in \omega \setminus \{0\}$, $l(k) = s_k(d) - d(k)$ i $s_k^-(l) = s_k(d) - 1$.*

Na osnovu leme 1, $l(k^+) = 0 \Leftrightarrow s_k^+(d) = d(k^+)$. Da bismo dokazali teoremu, primenimo indukciju po k.

Teorema 9 ima jednu važnu posledicu.

POSLEDICA. *Dekartov proizvod dva prebrojivo beskonačna skupa je prebrojivo beskonačan skup.*

DOKAZ. Neka su x i y prebrojivo beskonačni skupovi, što znači da postoje bijekcije $g : x \overset{na}{\to} \omega$ i $h : y \overset{na}{\to} \omega$. Ako je još i $f : \omega \times \omega \to \omega$ bijekcija, tada je preslikavanje $F : x \times y \overset{na}{\to} \omega$ definisano sa $F(a, b) = f(g(a), h(b))$ očigledno bijekcija.

Uređena n-torka bila je definisana kao niz čiji je domen neka neuređena n-torka (definicija 5.12). Uređena n-torka, za $0 \leq n$ može se, nešto drukčije, definisati indukcijom po n, na sledeći način:

DEFINICIJA 3. (a) $\langle\ \rangle = \emptyset$;
(b) $\langle a_1 \rangle = a_1$;
(c) $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle, a_{n+1} \rangle$.

Iako su, strogo uzev, pomoću ove dve navedene definicije definisane različite stvari, u daljem razmatranju se n-torke definisane na jedan od ovih načina izjednačavaju sa n-torkama koje su definisane na drugi način, jer su odgovarajuće definicije u izvesnom smislu ekvivalentne.

TEOREMA 12. *Skup svih uređenih n-torki prebrojivo beskonačnog skupa je prebrojivo beskonačan.*

DOKAZ. Matematičkom indukcijom po n, za $n > 0$, dokazuje se $\omega^n \sim \omega$.

TEOREMA 13. *Skup svih konačnih nizova elemenata prebrojivo beskonačnog skupa je prebrojivo beskonačan.*

DOKAZ. Teoremu je dovoljno dokazati za skup svih konačnih nizova prirodnih brojeva. Konstruišimo niz 1-1 funkcija $h_m : \omega^m \overset{na}{\rightarrow} \omega$, $m > 0$, ovako: h_1 je identičko preslikavanje h, a $h_{m+1}(k) = f(h_m(k), h(k))$, gde je f funkcija definisana kao u teoremi 9. Ako se stavi $F(m,n) = h_{m+1}(n)$ za $(m,n) \in \omega^2$, dobija se, očigledno, 1-1 korespondencija između skupa ω^2 i skupa svih konačnih nizova prirodnih brojeva.

TEOREMA 14. *Skup y svih konačnih podskupova prebrojivo beskonačnog skupa x je prebrojivo beskonačan.*

DOKAZ. Budući da se dodeljivanjem svakom elementu skupa y onog konačnog niza koji predstavlja bijekciju nekog prirodnog broja na taj element uspostavlja korespondencija 1-1 između y i nekog podskupa skupa svih konačnih nizova elemenata skupa x, na osnovu 13 sledi $y \preceq \omega$. Kako je x prebrojivo beskonačan, y sadrži svaki jednoelementni podskup skupa x, pa je $\omega \preceq y$. Na osnovu Bernštajn-Šrederove teoreme sledi $y \sim \omega$.

Nije svaki beskonačan skup prebrojiv. O tome svedoči i *Kantorova teorema.*

TEOREMA 15. (KANTOROVA TEOREMA). $\forall x \; x \prec \mathcal{P}(x)$.

DOKAZ. Postoji prirodno 1-1 preslikavanje f skupa x u $\mathcal{P}(x)$ za koje važi $f(a) = \{a\}$ za svaki $a \in x$. Dakle, $x \preceq \mathcal{P}(x)$. Ostaje da se pokaže da nije $x \sim \mathcal{P}(x)$.

Pretpostavimo da je g 1-1 preslikavanje skupa x na $\mathcal{P}(x)$. Neka je $y = \{a \in x \mid a \notin g(a)\}$. Budući da je $y \in \mathcal{P}(x)$ i budući da g preslikava x na $\mathcal{P}(x)$, postoji element $b \in x$ za koji je $g(b) = y$. Ako je $b \in y$, onda je $b \notin g(b)$, ali kako je $g(b) = y$, to je nemoguće. Ako $b \notin y$, onda važi $b \in g(b)$ što je takođe nemoguće.

$\mathcal{P}(x)$ je ekvipotentan sa 2^x (gde je 2^x skup svih funkcija $f : x \to 2$). To se vidi kada svakom podskupu y skupa x dodelimo njegovu karakterističnu funkciju χ_y. Na osnovu Kantorove teoreme, $x \prec 2^x$. Uzimajući ω za x, zaključujemo da skup svih podskupova skupa ω nije prebrojiv. Skup 2^ω je skup svih prebrojivo beskonačnih nizova brojeva 0 i 1.

DEFINICIJA 4. Ako skup x nije prebrojiv, kaže se da je x *neprebrojiv*.

KARDINALI

Kardinali su posebna vrsta ordinala.

DEFINICIJA 5. *Kardinalni broj* ili *kardinal* je ordinal α za koji važi $\alpha \leq \beta$ za svaki ordinal β koji je ekvipotentan sa α. Pod *kardinalnim brojem skupa* x ($\mathrm{card}(x)$) podrazumeva se kardinalni broj koji je ekvipotentan sa x, ako takav kardinalni broj postoji.

Kardinalni brojevi nazivaju se drukčije *početnim* ili *inicijalnim ordinalima*.

Na osnovu ove definicije, ako postoji $\mathrm{card}(x)$, onda je to najmanji ordinal α pomoću kojeg se x može predstaviti kao α-niz.

TEOREMA 16. *Za svaki ordinal α postoji* $\mathrm{card}(\alpha)$.

DOKAZ. Neka je α ordinal i neka je $x = \{\beta \in \mathbf{ON} \mid \beta \sim \alpha \wedge \beta \leq \alpha\}$; kako je $\alpha \in x$, prema aksiomi podskupa, skup x postoji i nije prazan, pa postoji $\gamma = \min(x)$; onda je, očigledno, $\gamma \leq \delta$ za svaki ordinal δ ekvipotentan sa α.

Budući da je svaki skup ekvipotentan sa svojim kardinalnim brojem (ako ovaj postoji), proizlazi da ako $\mathrm{card}(x)$ i $\mathrm{card}(y)$ postoje i ako je $\mathrm{card}(x) = \mathrm{card}(y)$, onda je $x \sim y$. Važi takođe i obrnuto: ako card(x) ili card(y) postoji i ako je $x \sim y$, onda je card(x) = card(y) (to se lako proverava).

Prirodan broj nije ekvipotentan ni sa jednim drugim ordinalom. Odavde proizlazi da ako je x konačan skup, onda je skup ordinala koji su ekvipotentni sa x jednoelementan skup. Drugim rečima, kardinalni broj konačnog skupa x je ordinal koji mu je izomorfan. Prirodni brojevi su (konačni) kardinali. Ako je card(x) = $\mathfrak{a}$, onda je card($\mathcal{P}(x)$) = $2^{\mathfrak{a}}$. To je tako zato što je $\mathcal{P}(x) \sim 2^{\mathfrak{a}}$.

Kardinali koji nisu konačni zovu se *beskonačni* ili *transfinitni*.

Budući da su kardinali ordinali, uređenje među ordinalima prenosi se na kardinale.

TEOREMA 17. *Ako postoje* card(x) *i* card(y), *onda je*

$$\mathrm{card}(x) < \mathrm{card}(y) \Leftrightarrow x \prec y.$$

DOKAZ. Ako je card(x) < card(y), onda je card(x) $\in$ card(y) i card(x) $\subseteq$ card(y), pa proizlazi da je $x \preceq y$. Kada bi bilo i $x \sim y$, imali bismo card(x) = card(y). Dakle, ako je card(x) < card(y), onda je $x \prec y$.

Ako je $x \prec y$, onda ne može biti card(y) $\leq$ card(x) (izomorfizam povlači ekvipotenciju), pa je card(x) < card(y).

Posledica ovih razmatranja je $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}(= \mathrm{card}(2^{\mathfrak{a}}))$ za svaki kardinal $\mathfrak{a}$, (jer je $x \prec \mathcal{P}(x)$), pa ako je card(x) = $\mathfrak{a}$, onda je card(x) < card($\mathcal{P}(x)$) i $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

Sva tvrđenja o uređenju ordinala važe i za kardinale. Na primer, svaka dva kardinala $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ su uporediva: ili je $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ ili je $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ili je $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$. Svaki skup kardinala je dobro uređen. Svaki skup kardinala ima supremum i za svaki skup kardinala postoji kardinal koji je strogo veći od svakog elementa iz tog skupa. Odavde sledi da nema najvećeg kardinala i da nema skupa svih kardinala. Ako pretpostavimo da postoji takav skup, nastaje protivrečnost koja je poznata kao *Kantorov paradoks*.

DEFINICIJA 6. Za svaki skup x,

$$\mathfrak{K}(x) = \{\alpha \mid \alpha \textit{ je ordinal i } \alpha \preceq x\}.$$

$\mathfrak{K}(x)$ je, očigledno, klasa. Pokazaćemo da je $\mathfrak{K}(x)$ skup.

TEOREMA 18. *Za svaki skup x, $\mathfrak{K}(x)$ je skup.*

DOKAZ. Koristeći definicije, lako se dokazuje

(1) $\alpha \preceq x$ ako i samo ako postoji y i relacija R tako da je
(1.1) $y \preceq x$,
(1.2) R dobro uređuje y,
(1.3) skup α je izomorfan skupu y.

Ovakav skup y dobro uređen relacijom R, tj. uređen par $\langle y, R\rangle$, označimo sa b. Neka je zatim $\mathfrak{W}(x)$ kolekcija koju obrazuju svi ovakvi dobro uređeni skupovi b.

LEMA 2. *$\mathfrak{W}(x)$ je skup.*

Dokazuje se jednostavno, primenom aksiome podskupa na

$$\mathcal{P}(x) \times \mathcal{P}(x \times x).$$

Neka je $T(b, \alpha)$ tvrđenje "Dobro uređen skup b je izomorfan ordinalu α." Budući da b može biti izomorfan najviše jednom ordinalu, ispunjen je uslov za primenu aksiome zamene. Na osnovu te aksiome i leme 2 zaključujemo da

(2) postoji skup z takav da je $\alpha \in z$ ako i samo ako postoji $b \in \mathfrak{W}(x)$ takav da je ordinal α izomorfan dobro uređenom skupu b.

Na osnovu (1), leme 2 i (2) zaključujemo da je $\mathfrak{K}(x)$ skup.

TEOREMA 19. *$\mathfrak{K}(x)$ je ordinal.*

TEOREMA 20. *Nije $\mathfrak{K}(x) \preceq x$.*

DOKAZ. Kada bi bilo $\mathfrak{K}(x) \preceq x$, bilo bi i $\mathfrak{K}(x) \in \mathfrak{K}(x)$, što nije moguće budući da je $\mathfrak{K}(x)$ ordinal.

TEOREMA 21. *Ako nije $\mathfrak{a} \preceq x$, onda je $\mathfrak{K}(x) \preceq \mathfrak{a}$.*

DOKAZ. Neka je $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{K}(x)$; budući da je $\mathfrak{K}(x)$ ordinal, sledi $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}(x)$. Na osnovu definicije skupa $\mathfrak{K}(x)$, tada je $\mathfrak{a} \preceq x$, suprotno pretpostavci teoreme.

TEOREMA 22. *$\mathfrak{K}(x)$ je kardinal.*

DOKAZ. Na osnovu prethodne dve teoreme.

TEOREMA 23. *Ne postoji najveći kardinal.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je $\mathfrak{a}$ najveći kardinal (u odnosu na relaciju $<$); tada, na osnovu teoreme 20, nije $\mathfrak{K}(\mathfrak{a}) \preceq \mathfrak{a}$, a kako je $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$ kardinal, sledi $\mathfrak{a} < \mathfrak{K}(\mathfrak{a})$, suprotno pretpostavci da je $\mathfrak{a}$ najveći kardinal.

TEOREMA 24. *Ne postoji skup svih kardinala.*

ALEFI

Kardinali se često obeležavaju slovom $\aleph$, prvim slovom hebrejske azbuke, koje se čita "alef", i nekim indeksom. Na primer, kada se ω posmatra kao kardinal obeležava se sa $\aleph_0$.

Svi ordinali koji se nalaze ispred ω_1 su prebrojivi. Najmanji neprebrojiv ordinal ω_1 često se označava i sa Ω. Ordinal ω je beskonačan dobro uređen skup čiji je svaki početni segment konačan. Ordinal Ω je neprebrojivo beskonačan dobro uređen skup čiji je svaki početni segment prebrojiv.

Ordinal Ω je kardinal. Kada se Ω posmatra kao kardinal, obeležava se sa $\aleph_1$. $\aleph_1$ je najmanji kardinal koji je strogo veći od $\aleph_0$. Dakle, $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$, gde je $2^{\aleph_0} = \mathrm{card}(2^\omega)$. Da li je $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$? Prema Kantorovoj *Hipotezi kontinuuma* (koja se obeležava sa CH), $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Poznato je da je hipoteza kontinuuma konzistentna sa ostalim aksiomama teorije skupova (koje su u ovoj knjizi izložene). To znači da ako se iz tih aksioma ne može izvesti nijedna protivrečnost, onda se protivrečnost ne može izvesti ni kada se tim aksiomama doda hipoteza kontinuuma. Štaviše, hipoteza kontinuuma je nezavisna od ostalih aksioma koje su ovde izložene. To znači da se protivrečnost ne može izvesti ni kada se aksiomama teorije skupova doda negacija hipoteze kontinuuma (ukoliko se samo iz ovih aksioma ne može izvesti nijedna protivrečnost).

Za kardinal $\mathfrak{a}$ neka $c(\mathfrak{a})$ bude skup svih beskonačnih kardinala koji su strogo manji od $\mathfrak{a}$. Budući da je skup $c(\mathfrak{a})$ dobro uređen, on ima svoj ordinal, recimo α. Pomoću transfinitne indukcije može se definisati $\aleph_\alpha$ kao najmanji beskonačan kardinal koji je strogo veći od svih $\aleph_\beta$ za $\beta < \alpha$. Zvanična definicija izgleda ovako.

DEFINICIJA 7. Za svaki ordinal α kardinal $\aleph_\alpha$ je najmanji beskonačan kardinal $\mathfrak{a}$ za koji važi $\mathfrak{a} \notin \{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Kardinali koji imaju oblik $\aleph_\alpha$ za neki ordinal α zovu se *alefi*.

Prethodna analiza pokazuje da je ova definicija korektna.

Budući da su svi kardinali - ordinali, definicija 7 definiše neke ordinale. Kada se $\aleph_\alpha$ posmatra samo kao ordinal, obeležava se sa ω_α.

TEOREMA 25. (1) $\aleph_0 = \omega$; (2) $\aleph_{\alpha^+} = \min(\{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}$ *je kardinal* $\wedge\ \aleph_\alpha \prec \mathfrak{b}\})$; (3) *ako je* α *granični ordinal, onda je* $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta$.

Uslovima (1), (2) i (3) mogu se definisati alefi; ako se to učini, onda se definicija 7 se može dokazati kao teorema.

Alefi se mogu definisati pomoću $\mathfrak{K}(x)$ - *funkcije Hartogsa* (F. Hartogs): $\aleph_0 = \omega$; $\aleph_{\alpha+1} = \mathfrak{K}(\aleph_\alpha)$; $\aleph_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} \aleph_\zeta$, ako je ξ granični ordinal.

Umesto $\mathfrak{K}(x)$ piše se i $\aleph(x)$.

TEOREMA 26. $(\forall\alpha \in \mathbf{ON})\ (\exists\beta \in \mathbf{ON})\ (\forall\gamma \in \mathbf{ON})\ \gamma \in \alpha \Rightarrow \aleph_\gamma \prec \beta$.

DOKAZ. Dovoljno je razmotriti samo $\alpha > 0$. Na osnovu aksiome zamene, postoji neprazan skup x za koji je

$$x = \{\delta \mid \exists\gamma \in \alpha \wedge \delta = \aleph_\gamma\}.$$

Lako se uočava da je $\bigcup x$ ordinal, pa ako je $\delta \in x$, onda je $\delta \leq \bigcup x$. Prema tome, $(\forall\delta \in x)\ (\delta \leq \mathrm{card}(\bigcup x))$, pa za kardinal $\mathfrak{a}$ takav da je $\mathrm{card}(\bigcup x) \prec \mathfrak{a}$, prema teoremi 23, važi: $(\forall\delta \in x)\ \delta \prec \mathfrak{a}$; kardinal $\mathfrak{a}$ je onda traženi ordinal β.

TEOREMA 27. $\aleph_\alpha$ *je transfinitan kardinal.*

TEOREMA 28. $\alpha < \beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

TEOREMA 29. *Za svaki kardinal* $\mathfrak{a}$, *ako je* $\mathfrak{a} \leq \aleph_\alpha$ *za neki ordinal* α, *onda je* $\mathfrak{a}$ *alef.*

TEOREMA 30. *Ni za jedan ordinal* α *ne postoji kardinal* $\mathfrak{a}$ *za koji važi* $\aleph_\alpha < \mathfrak{a} < \aleph_{\alpha+1}$.

DOKAZ. Ako je $\mathfrak{a} < \aleph_{\alpha+1}$, onda je $\mathfrak{a}$ alef, na osnovu teoreme 28. Dakle, $\mathfrak{a} = \aleph_\beta$ za neki ordinal β. Ako je $\aleph_\alpha < \mathfrak{a} < \aleph_\beta$, onda je $\alpha < \beta < \alpha + 1$, što nije moguće.

TEOREMA 31. *Svaki transfinitni kardinal je alef.*

Uopštena (generalisana) hipoteza kontinuuma (GCH) glasi: za svaki ordinal α, gde je $2^{\aleph_\alpha} = \mathrm{card}(2^\alpha)$ važi $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$. Sve što je rečeno o CH važi i za GCH.

ELEMENTI KARDINALNE ARITMETIKE

Aritmetičke operacije za kardinale definisaćemo kao za ordinale. Kada se kasnije uvede aksioma izbora, iskazi koji su uobičajene definicije ovih operacije za kardinale mogu se dokazati kao teoreme.

DEFINICIJA 8. Za kardinale $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, ako su α i β ordinali za koje je $\mathrm{card}(\alpha) = \mathfrak{a}$ i $\mathrm{card}(\beta) = \mathfrak{b}$, definišemo *zbir* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ kardinala $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ kao $\mathrm{card}(\alpha + \beta)$.

TEOREMA 32. *Za sve kardinale* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *i* $\mathfrak{d}$

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a},$$
$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}),$$
$$\mathfrak{a}\leq\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c}\leq\mathfrak{d}\Rightarrow\mathfrak{a}+\mathfrak{c}\leq\mathfrak{b}+\mathfrak{d}.$$

DEFINICIJA 9. Neka je $\{\mathfrak{a}_\xi\}_{\xi\in\mu}$ familija kardinala i neka je $\{\alpha_\xi\}$ odgovarajuća indeksirana familija ordinala za koje je $\mathrm{card}(\alpha_\xi) = \mathfrak{a}_\xi$, za svaki $\xi \in \mu$; tada je zbir $\sum_\xi \mathfrak{a}_\xi$ definisan kao $\mathrm{card}(\sum_\xi \alpha_\xi)$.

DEFINICIJA 10. Za kardinale $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, ako su α i β ordinali za koje je $\mathrm{card}(\alpha) = \mathfrak{a}$ i $\mathrm{card}(\beta) = \mathfrak{b}$ definiše se *proizvod* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ kao $\mathrm{card}(\alpha\cdot\beta)$.

TEOREMA 33. *Za sve kardinale* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *i* $\mathfrak{d}$,
$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \sum_{\xi\in\mu}\mathfrak{a}_\xi$, *gde je* $\mathrm{card}(\mu) = \mathfrak{b}$ *i* $\mathfrak{a}_\xi = \mathfrak{a}$ *za svaki* $\xi \in \mu$,

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{a}\leq\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c}\leq\mathfrak{d}\Rightarrow\mathfrak{a}\mathfrak{c}\leq\mathfrak{b}\mathfrak{d},$$

gde su $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *i* $\mathfrak{d}$ *kardinali*, a $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *stoji ponekad umesto* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$.

Proizvod se može definisati i za beskonačnu familiju $\{\mathfrak{a}_\xi\}$ kardinala.

DEFINICIJA 11. Za beskonačnu familiju $\{\mathfrak{a}_\xi\}_{\xi\in\mu}$ kardinala, ako je $\{\alpha_\xi\}$ odgovarajuća indeksirana familija ordinala za koje važi $(\forall\xi \in \mu)$ $\operatorname{card}(\alpha_\xi) = \mathfrak{a}_\xi$, onda je proizvod odgovarajućih kardinala definisan ovako:

$$\prod_\xi \mathfrak{a}_\xi = \operatorname{card}(\prod_\xi \alpha_\xi).$$

DEFINICIJA 12. Za kardinale $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ i za ordinale α i β za koje je $\operatorname{card}(\alpha) = \mathfrak{a}$ i $\operatorname{card}(\beta) = \mathfrak{b}$ definišemo *stepen* $\mathfrak{a}^\mathfrak{b}$ kao $\operatorname{card}(\alpha^\beta)$.

Stepen se može definisati i drukčije, kao proizvod

$$\prod_{\xi\in\mu} \mathfrak{a}_\xi,$$

gde je $\operatorname{card}(\mu) = \mathfrak{b}$ i $\mathfrak{a}_\xi = \mathfrak{a}$ za svaki $\xi \in \mu$.

TEOREMA 34. *Za sve kardinale* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *i* $\mathfrak{d}$

$$\begin{aligned} a^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} &= a^\mathfrak{b} \cdot a^\mathfrak{c}, \\ (a \cdot b)^\mathfrak{c} &= a^\mathfrak{c} \cdot b^\mathfrak{c}, \\ a^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} &= (a^\mathfrak{b})^\mathfrak{c}, \\ a \le b \wedge c \le d &\Rightarrow a^\mathfrak{c} \le b^\mathfrak{d}. \end{aligned}$$

TEOREMA 35. *Ako je* $\mathfrak{a}$ *prebrojiv, a* $\mathfrak{b}$ *beskonačan kardinal, onda je* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$.

DOKAZ. Budući da su $\mathfrak{b}$ i ω ordinali, oni su ili izomorfni ili je jedan od njih izomorfan nekom početnom segmentu drugog. Kako je $\mathfrak{b}$ beskonačan, nije moguće da $\mathfrak{b}$ bude izomorfan nekom početnom segmentu skupa ω. Dakle, $\omega \preceq \mathfrak{b}$, budući da izomorfizam povlači ekvipotenciju. Neka su x i y disjunktni skupovi za koje je $\operatorname{card}(x) = \mathfrak{a}$ i $\operatorname{card}(y) = \mathfrak{b}$ (kada su dati $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, onda skupovi x i y postoje). Jasno je da je $x \preceq \omega$ i da postoji $z \subseteq y$ za koji je $\omega \sim z$. Ali važi i $\omega \setminus \{0,\ldots,k\} \sim z$ kao i $\omega \sim x \cup z \sim z$, pa postoji bijekcija $f : x \cup z \xrightarrow{na} z$. Definišimo $g : x \cup y \to y$ ovako: $f = g|x \cup z$ i $g|(y \setminus z)$ je identičko preslikavanje $y \setminus z$ na $y \setminus z$. Lako se uveravamo da je g 1-1 korespondencija između $x \cup y$ i y.

TEOREMA 36. (1) *Za svaki kardinal* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = \operatorname{card}(\mathfrak{a})$; (2) *za svaka dva skupa* x *i* y, *ako je* $x \subseteq y$ *i ako postoje* $\operatorname{card}(x)$ *i* $\operatorname{card}(y)$, *onda je* $\operatorname{card}(x) \le \operatorname{card}(y)$.

DOKAZ. (1) Ostavljamo čitaocu.

(2) Iz $x \subseteq y$ proizlazi, očigledno, $x \preceq y$, odakle tvrđenje sledi neposredno, prema teoremi 17.

TEOREMA 37. *Za svaki beskonačan kardinal* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}+\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\cdot 2 \leq \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}$.

TEOREMA 38. *Ako je* $\mathfrak{a}$ *beskonačan kardinal i* $\max(\mathbf{K}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$, *onda je* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

DOKAZ. Dovoljno je dokazati, pod pretpostavkom teoreme, da je $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}$. Na osnovu teoreme 8.26, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a} \subseteq \{\mathbf{K}(\mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b}<\mathfrak{a}\}$, pa je

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} = \operatorname{card}(\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}) \leq \operatorname{card}(\{\mathbf{K}(\mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b}<\mathfrak{a}\}) = \operatorname{card}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

TEOREMA 39. *Ako je* $\mathfrak{a}$ *beskonačan kardinal, onda je*

$$\max(\mathbf{K}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}.$$

DOKAZ. Primenimo transfinitnu indukciju po $\mathfrak{a}$. Prvo se može pokazati da indukcijska pretpostavka povlači

(1) $$\text{ako je } \mathfrak{b}<\mathfrak{a}, \text{ onda je } \mathfrak{b}^+\cdot\mathfrak{b}^+ < \mathfrak{a}.$$

Ako je $\mathfrak{b} < \omega$, onda je $\mathfrak{b}$ prirodan broj, pa je $\mathfrak{b}^+\cdot\mathfrak{b}^+ < \omega \leq \mathfrak{a}$. Pretpostavimo da je $\omega \leq \mathfrak{a}$. Na osnovu indukcijske pretpostavke, $\max(\mathbf{K}(\mathfrak{b})) = \mathfrak{b}$, pa je na osnovu teoreme 37, $\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$. Tada je $\operatorname{card}(\mathfrak{b}^+) = \mathfrak{b}+1 = \mathfrak{b}$. Dakle, $\mathfrak{b}^+\cdot\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{b}<\mathfrak{a}$. Time je dokazano tvrđenje (1).

Pretpostavimo da je $\max(\mathbf{K}(\mathfrak{a})) \neq \mathfrak{a}$; tada je

$$\mathfrak{b} = \max(\mathbf{K}(\mathfrak{a})) < \mathfrak{a}$$

na osnovu teoreme 8.32. Ako je $\mathfrak{c} < \mathfrak{a}$, onda je

$$\max(\mathbf{K}(\mathfrak{c})) \leq \max(\mathbf{K}(\mathfrak{a}))<\mathfrak{b}^+,$$

na osnovu teoreme 8.31. Dakle,

$$\mathbf{K}(\mathfrak{c})\in\mathfrak{b}^+\times\mathfrak{b}^+.$$

Koristeći (1), sada sledi $\mathfrak{a} = \operatorname{card}(\mathfrak{a}) \leq \operatorname{card}((\mathfrak{b}^+)\times(\mathfrak{b}^+)) < \mathfrak{a}$, što je nemoguće.

Spajanjem teorema 37, 38 i 39 dokazana je

TEOREMA 40. *Ako je $\mathfrak{a}$ beskonačan kardinal, onda je*

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

TEOREMA 41. *Za beskonačne kardinale $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$,*

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \max(\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle).$$

Ovu teoremu je prvi dokazao Hesenberg (Hessenberg) još 1906. služeći se Kantorovom normalnom formom za ordinale. Postoje i drugi dokazi ove teoreme; dokaz koji je ovde izložen dao je Šenfild (Shoenfield).

BETI

Posebnu vrstu kardinala čine *beti* ili *bet brojevi*. Bet ($\beth$) je drugo slovo hebrejske azbuke koje se (pored alefa) upotrebljava za obeležavanje nekih kardinala; po analogiji sa alefima, koji se tako zovu prema slovu kojim su obeleženi, ove druge kardinale zvaćemo *beti*.

DEFINICIJA 13. *Sledbenik* $\mathfrak{a}^+$ kardinala $\mathfrak{a}$ je najmanji kardinal koji je veći od $\mathfrak{a}$. Kardinal $\mathfrak{a}$ je *granični kardinal* ako i samo ako nije kardinal sledbenik.

Na osnovu ove definicije, $(\aleph_\xi)^+ = \aleph_{\xi+1}$.

DEFINICIJA 14. *Beti* ili *bet brojevi* $\beth_\xi$ definisani su rekurzijom po ordinalima na sledeći način:

$$\beth_0 = \aleph_0;$$

$$\beth_{\xi+1} = 2^{\beth_\xi}.$$

Ako je ξ granični ordinal, onda je

$$\beth_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} \beth_\zeta.$$

Osim toga, za proizvoljan kardinal $\mathfrak{a}$ definišemo

$$\beth_0(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

$$\beth_{\alpha+1}(\mathfrak{a}) = 2^{\beth_\beta(\mathfrak{a})}.$$

Ako je ξ granični ordinal, onda je

$$\beth_\xi(\mathfrak{a}) = \bigcup_{\zeta<\xi}\beth_\zeta(\mathfrak{a}).$$

DEFINICIJA 15. Kardinal $\mathfrak{a}$ je *jak granični kardinal* ako i samo ako važi

$$(\forall \mathfrak{b} < \mathfrak{a})\ (2^{\mathfrak{b}} < \mathfrak{a}).$$

TEOREMA 42. (1) *$\mathfrak{a}$ je beskonačan granični kardinal ako i samo ako postoji granični ordinal ξ za koji je $\mathfrak{a} = \aleph_\xi$.*

(2) *$\mathfrak{a}$ je beskonačan jak granični kardinal ako i samo ako postoji granični ordinal ξ za koji je $\mathfrak{a} = \beth_\xi$.*

TEOREMA 43. (1) $\xi \leq \aleph_\xi \leq \beth_\xi$.

(2) *Postoje proizvoljno veliki kardinali za koje je*

$$\mathfrak{a} = \aleph_{\mathfrak{a}} = \beth_{\mathfrak{a}}.$$

Hipoteza kontinuuma (CH) je tvrđenje da je $\beth_1 = \aleph_1$, a uopštena hipoteza kontinuuma (GCH) povlači da je $\beth_\xi = \aleph_\xi$. GCH povlači takođe da je svaki granični kardinal jak granični kardinal.

11. AKSIOMA IZBORA

U daljem razvijanju teorije o parcijalnom uređenju koristi se još jedna aksioma.

Neka su $x_1, \dots, x_n$ neprazni skupovi; indukcijom po n (počevši od 1) lako se može dokazati da je $x_1 \times \dots \times x_n$ neprazan skup. Drugim rečima, Dekartov proizvod neprazne konačne familije nepraznih skupova je neprazan. Analogno tvrđenje za Dekartove proizvode proizvoljne neprazne familije ne može da se dokaže na osnovu principa koji su do sada uvedeni. Ovo tvrđenje se stoga postulira kao aksioma izbora.

AKSIOMA IZBORA (CERMELOVA AKSIOMA)

Dekartov proizvod neprazne familije nepraznih skupova je neprazan.

Drugim rečima, ako je $\{X_i\}$ familija nepraznih skupova indeksirana nepraznim skupom I, onda postoji familija $\{x_i\}$, $i \in I$, za koju važi $(\forall i \in I)\ x_i \in X_i$.

Neka je x neprazna kolekcija nepraznih skupova. Uzimajući x za skup indeksa a identičko preslikavanje skupa x za indeksiranje, skup x pretvaramo u familiju. Aksiomom izbora se kaže da Dekartov proizvod familije x ima bar jedan element. Na osnovu definicije, takav element je funkcija čiji je domen skup indeksa, dakle x, i čija vrednost za svaki indeks pripada skupu koji ima taj indeks. Prema tome, postoji funkcija f sa domenom x za koju važi $f(y) \in y$, za svaki y iz x. Poseban slučaj funkcije f imamo kada je x kolekcija svih nepraznih podskupova nekog nepraznog skupa z. Tada, na osnovu ove aksiome, postoji funkcija f sa domenom $\mathcal{P}(z) \setminus \{\emptyset\}$ za koju važi $(\forall a \in \mathcal{P}(z) \setminus \{\emptyset\})\ f(a) \in a$. Neformalno govoreći, funkcija f se može opisati kao skup izbora: iz svakog nepraznog podskupa a skupa z izabere se po jedan element. Zato se f zove *funkcija izbora*; aksiomom izbora tvrdi se da postoji funkcija izbora za familiju $\mathcal{P}(z) \setminus \{\emptyset\}$. Zapisaćemo i zvaničnu definiciju.

DEFINICIJA 1. *Funkcija izbora* za nepraznu familiju $\mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$ nepraznog skupa x je funkcija $f : \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\} \to x$ za koju važi $(\forall y \in \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\})\ f(y) \in y$.

Na osnovu prethodnog razmatranja se vidi da je istinita

TEOREMA 1. *Za svaki neprazan skup postoji funkcija izbora.*

Trivijalna posledica aksiome izbora je sledeća činjenica. Neka je $X = \prod_{i\in I} X_i$ Dekartov proizvod neprazne familije $\{X_i \mid i \in I\}$ nepraznih skupova i neka je $f_i : X \to X_i$ funkcija definisana sa $(\forall x \in X)\ f_i(x) = x_i$; funkcija f_i je sirjektivna, za svaki $i \in I$. Ova funkcija se zove *i-ta projekcija*, a za svaki $x \in X$, $f_i(x)$ je *i-ta projekcija elementa* x.

TEOREMA 2. *Neka je* $\{x_{ij} \mid x_{ij} \subseteq X \wedge i \in I \wedge j \in J_i\}$ *neprazna familija nepraznih skupova i neka je* $\bigcap_{i\in\emptyset}\{y_i\} = X$ *za svaki* $y_i \subseteq X$; *tada je*

$$\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} \{x_{ij}\} = \bigcup_{f\in\prod\limits_{i\in I} J_i} \bigcap_{i\in I} \{x_{if(i)}\}$$

i

$$\prod_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} \{x_{ij}\} = \bigcup_{f\in\prod\limits_{i\in I} J_i} \prod_{i\in I} \{x_{if(i)}\}.$$

Pod *ekvivalentnom formulacijom* (ili *ekvivalentom*) aksiome izbora podrazumevamo svako tvrđenje T za koje se u teoriji skupova bez aksiome izbora može dokazati da aksioma izbora povlači T i da T povlači aksiomu izbora.

Aksioma izbora ima mnogobrojne ekvivalentne formulacije. Upoznaćemo neke od njih.

TEOREMA 3. *Ako je* $\{X_i\}$, $i \in I$, *neprazna disjunktna familija nepraznih skupova, onda postoji skup* y *čiji je presek sa bilo kojim članom familije jednočlan skup.*

DOKAZ. Da je ovo tvrđenje posledica aksiome izbora nije teško videti. Neka je $\{X_i\}$ neprazna disjunktna familija nepraznih skupova.

Prema aksiomi izbora, postoji funkcija izbora f za koju je $f(X_i) \in X_i$ za svaki i. Jasno, $y = \{f(X_i) \mid i \in I\}$.

Aksioma izbora se može izvesti iz pretpostavljenog tvrđenja na sledeći jednostavan način. Posmatrajmo skup $Y = \{(X_i, i) \mid i \in I\}$; svaka dva različita elementa ovog skupa su disjunktna. Sada nije teško završiti dokaz.

Druga formulacija aksiome izbora data je takođe u obliku teoreme.

TEOREMA 4. *Za svaku relaciju R postoji funkcija f za koju je $f \subseteq R$ i* $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{dom}(f)$.

TEOREMA 5. *Svaki beskonačan skup sadrži podskup koji ekvipotentan sa ω.*

DOKAZ. Neka je x neprazan beskonačan skup; prema teoremi 1, postoji funkcija izbora f skupa x. Definišimo funkciju $g : \omega \to x$ ovako:

$$(*) \qquad g(\emptyset) = f(x), \quad (\forall n \in \omega)\ (g(n^+) = f(x \setminus \mathrm{ran}(g|\mathrm{sl}(n))))$$

gde je $\mathrm{sl}(n) = \{k \mid k \leq n\}$ skup svih slabih prethodnika broja n. Kako je svaki skup $\mathrm{sl}(n)$, $n \in \omega$, konačan, i stoga je i svaki skup $\mathrm{ran}(g|\mathrm{sl}(n))$ takođe konačan, prethodnim je, na osnovu druge teoreme o rekurzivnoj definiciji, dobro definisana funkcija $g : \omega \to x$. Neka su m i n prirodni brojevi i neka je $m < n$. Tada postoji a takav da je $m \leq a$ i $a^+ = n$. Kako je, očigledno, $\mathrm{sl}(n) \subseteq \mathrm{sl}(a)$, imamo $\mathrm{ran}(g|\mathrm{sl}(m)) \subseteq \mathrm{ran}(g|a)$, tako da je $g(m)\setminus(g|\mathrm{sl}(m))(m) \in \mathrm{ran}(g|\mathrm{sl}(m)) \subseteq \mathrm{ran}(g|\mathrm{sl}(a))$, tj. $g(m) \in \mathrm{ran}(g|\mathrm{sl}(a))$, dok je, s druge strane, prema $(*)$

$$g(n) = g(a^+) = f(x \setminus \mathrm{ran}(g|\mathrm{sl}(a))) \in x \setminus \mathrm{ran}(g|\mathrm{sl}(a))$$

tj. $g(n) \notin \mathrm{ran}(g|\mathrm{sl}(a))$. To znači da je $g(m) \neq g(n)$, kadgod je $m, n \in \omega$ i $m \neq n$.

Na osnovu prethodnog, skup $\mathrm{ran}(g) \subseteq x$ je ekvipotentan sa skupom ω.

DEFINICIJA 2. Skup x je *D-beskonačan* ili *beskonačan u Dedekindovom smislu* ako i samo ako je ekvipotentan sa nekim svojim pravim podskupom.

Posledica teoreme 4 je sledeća teorema.

TEOREMA 6. *Skup x je beskonačan ako i samo ako je D-beskonačan.*

DOKAZ. Ako je x ekvipotentan sa nekim svojim pravim podskupom, x je beskonačan, jer nije konačan. Pretpostavimo da je skup x beskonačan i neka je g 1-1 korespondencija između ω i nekog podskupa skupa x. Definišimo funkciju f ovako. Za svaki $a \in x$, ako je $a \in \operatorname{ran}(g)$, recimo $a = g(n)$, onda neka je $f(a) = g(n^+)$; ako je $a \notin \operatorname{ran}(g)$, onda neka bude $f(a) = a$. Lako se proverava da je $f : x \to x$ 1-1 funkcija. Budući da $g(0) \notin \operatorname{ran}(f)$, $\operatorname{ran}(f) \subset x$, pa je x preslikan jednom 1-1 funkcijom na jedan svoj pravi podskup.

TEOREMA 7. *Za svaki beskonačan skup x i za svaki prebrojiv (najviše prebrojiv) skup y važi $x \cup y \sim x$.*

TEOREMA 8. *Unija prebrojivo beskonačne familije prebrojivo beskonačnih skupova je prebrojivo beskonačna.*

DOKAZ. Neka je $\{X_i \mid i \in \omega\}$ data prebrojivo beskonačna familija prebrojivo beskonačnih skupova. Na osnovu teoreme 9.7, skup ω može se prikazati kao unija disjunktne prebrojivo beskonačne familije $\{Y_i \mid i \in \omega\}$ prebrojivo beskonačnih skupova Y_i, gde je $Y_0 = \{0\} \cup \{2j+1 \mid j \in \omega\}$, $Y_i = \{2^i(2j+1 \mid j \in \omega\}, i \in \omega \setminus \{0\}$. To znači da su za svaki $n \in \omega$ jednoznačno određeni prirodni brojevi $i(n)$ i $j(n)$ takvi da je $n \in Y_{i(n)}$ i $n = y_{i(n),j(n)}$, gde je $Y_i = \{y_{i,j} \mid j \in \omega\}$ i pritom je $y_{i,j'} < y_{i,j''}$ za $j' < j''$. Za svaki $i \in \omega$ skup F_i svih bijekcija skupa X_i na skup Y_i je neprazan; primenom aksiome izbora na familiju skupova F_i $(i \in \omega)$ zaključujemo da postoji niz bijekcija $f_i : Y_i \to X_i$ $(i \in \omega)$.

Jasno je da je sa $f(n) = f_{i(n)}(j(n))(n \in \omega)$ definisano preslikavanje skupa ω na uniju X skupova X_i $(i \in \omega)$. Ako se za svaki $x \in X$ stavi $g(x) = \min(f^{-1}\{x\})$, dobija se, očigledno, bijekcija g skupa X na deo skupa ω. To znači da je skup X prebrojiv, a kako je i beskonačan, on je prebrojivo beskonačan.

(Primećujemo da smo u prethodnom rasuđivanju, i to bez korišćenja aksiome izbora, u suštini dokazali sledeću činjenicu: ako neka funkcija preslikava skup ω na skup Z, onda je skup Z prebrojiv, konačno ili beskonačno. Na sličan način, ali uz korišćenje aksiome izbora, može se dokazati sledeće tvrđenje: ako neka funkcija preslikava skup Z' na skup Z, onda je $\mathrm{card}(Z') \leq \mathrm{card}(Z)$.)

CORNOVA LEMA

Jedna od važnih ekvivalentnih formulacija aksiome izbora je *Cornova lema.*

TEOREMA 9 (CORNOVA LEMA). *Ako je x parcijalno uređen skup u kojem svaki lanac ima gornju granicu, onda x ima bar jedan maksimalan element.*

DOKAZ. Neka je x parcijalno uređen skup i neka svaki lanac u njemu ima gornju granicu.

Neka je X skup svih lanaca u x. Kolekcija X je neprazna kolekcija skupova parcijalno uređena inkluzijom. Dokazaćemo da u skupu X postoji bar jedan maksimalan element. Odatle sledi da i skup x ima maksimalan element. Naime, ako je z taj maksimalni element skupa X, postoji, prema pretpostavci, njegova gornja granica a u x; ako a ne bi bio maksimalni element skupa x, postojao bi $b \in x$ takav da je $a < b$, pa bi bilo $z \subset z \cup \{b\}$ i $z \cup \{b\}$ bi bio lanac u X; ovo bi, međutim, protivrečilo pretpostavci o skupu z.

Neka je f funkcija izbora za skup x, $f : \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\} \to x$ za koju je $f(y) \in y$ za svaki y iz $\mathrm{dom}(f)$. Za svaki $y \in X$, neka je y^* skup svih onih elemenata iz x koji, kada se dodaju skupu y, daju skup iz X. Drugim rečima,

$$y^* = \{v \in x \mid y \cup \{v\} \in X\}.$$

Definišimo funkciju $g : X \to X$: ako je $y^* \setminus y \neq \emptyset$, onda je $g(y) = y \cup \{f(y^* \setminus y)\}$; ako je $y^* \setminus y = \emptyset$, onda je $g(y) = y$. Iz definicije y^* proizlazi da je $y^* \setminus y = \emptyset$ ako i samo ako je y maksimalan.

Definišimo podskup Z skupa X.

1. $\emptyset \in Z$,
2. ako je $y \in Z$, onda je $g(y) \in Z$,
3. ako je L lanac u Z, onda je $\bigcup L \in Z$.

Skupovi koji zadovoljavaju uslove 1-3 postoje; takav je, na primer, skup X. Presek kolekcije skupova od kojih svaki zadovoljava uslove 1-3 takođe zadovoljava uslove 1-3. Neka je Z_0 presek svih skupova koji zadovoljvavaju uslove 1-3 Može se pokazati da je Z_0 lanac.

Za element a iz Z_0 kaže se da je *uporediv* ako i samo ako za svaki b iz Z_0 važi $a \subseteq b$ ili $b \subseteq a$. Jasno je da je $\emptyset$ uporediv. Neka je a neki uporediv skup iz Z_0.

Neka je $b \in Z_0$ i $b \subset a$; tada je $g(b) \subseteq a$. Jer, budući da je a uporediv, važi $g(b) \subseteq a$ ili $a \subset g(b)$. U drugom slučaju je $a \subset b \cup \{f(b^* \setminus b\}$, što nije moguće, jer je $\{f(b^* \setminus b)\}$ jednoelementan skup.

Neka je Z_1 podskup skupa Z_0 za čiji svaki element b važi $b \subseteq a$ ili $g(a) \subseteq b$. Može se dokazati da Z_1 zadovoljava uslove 1-3

Budući da je $\emptyset \subseteq a$, uslov 1 je ispunjen.

Neka je $b \in Z_1$. Ako je $b \subset a$, onda je $g(b) \subseteq a$ na osnovu prethodnog razmatranja, pa je $g(b) \in Z_1$. Ako je $b = a$, onda je $g(b) = g(a)$, pa je $g(a) \subseteq g(b)$ i $g(b) \in Z_1$. Dakle, Z_1 zadovoljava i uslov 2.

Skup Z_1 zadovoljava i uslov 3 na osnovu definicije.

Dakle, $Z_1 \subseteq Z_0$, pa kako je Z_0 najmanji skup koji zadovoljava uslove 1-3, sledi da je $Z_1 = Z_0$.

Na osnovu ovih razmatranja proizlazi da je za svaki uporediv skup a skup $g(a)$ takođe uporediv. Jer, ako je $a \in Z_0$, onda, budući da je $Z_1 = Z_0$, sledi da ako je $b \in Z_0$, onda je ili $b \subseteq a$ (pa je i $b \subseteq g(a)$) ili je $g(a) \subseteq b$.

Jasno je da je $\emptyset$ uporediv i da g preslikava uporedive skupove na uporedive skupove. Budući da je unija uporedivih skupova opet uporediv skup, proizlazi da uporedivi skupovi skupa Z_0 zadovoljavaju uslove 1-3, pa zaključujemo da su svi elementi skupa Z_0 uporedivi. Dakle, Z_0 je lanac. Budući da je Z_0 lanac, skup $\bigcup Z_0$ (unija lanca Z_0) pripada skupu Z_0. Jasno je da je

$$\bigcup Z_0 \subseteq g(\bigcup Z_0).$$

Budući da unija lanca Z_0 sadrži sve skupove iz Z_0, sledi $g(\bigcup Z_0) \subseteq \bigcup Z_0$. Dakle, $g(\bigcup Z_0) = \bigcup Z_0$.

Ekvivalentnost ove leme sa aksiomom izbora je prvi dokazao Kuratovski (K. Kuratowski) još 1915, pa se ova lema zove i "lema Kuratovskog".

Postoje i druge formulacije Cornove leme koju je Corn (M. Zorn) ponovo (nezavisno od Kuratovskog) otkrio 1935.

TEOREMA 10. *Cornova lema je ekvivalentna sa aksiomom izbora.*

DOKAZ. S obzirom na prethodnu teoremu, dovoljno je ustanoviti da Cornova lema (zajedno sa ostalim do sada uvedenim aksiomama) povlači aksiomu izbora, pa ćemo stoga poći od pretpostavke da važi Cornova lema.

Za dati neprazan skup x, posmatrajmo skup z svih funkcija f čiji su domeni delovi skupa $\mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$ i koje imaju osobinu $f(y) \in y$ za svaki $y \in \mathrm{dom}(f)$; skup z je parcijalno uređen relacijom $\leq$ ekstenzije: za f i g je $f \leq g$ ako i samo ako je g ekstenzija funkcije f. Svaki lanac u f ima gornje ograničenje (ovo se lako dokazuje); primenom Cornove leme ustanovljava se maksimalni element h skupa z. Lako se dokazuje i da je $\mathrm{dom}(h) = \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$.

TEOREMA 11. *Sledeća tri tvrđenja su ekvivalentna sa aksiomom izbora.*

(1) *Svaki parcijalno uređen skup ima bar jedan maksimalan lanac (lanac koji nije pravi podskup nijednog drugog lanca).*
(2) *Svaki lanac u parcijalno uređenom skupu sadržan je u nekom maksimalnom lancu.*
(3) *Svaki parcijalno uređen skup u kojem svaki lanac ima supremum ima bar jedan maksimalan element.*

Prva dva tvrđenja, (1) i (2), poznata su kao *Hausdorfovi principi maksimalnosti*. Dokazao ih je Hausdorf (M. Hausdorff) 1914.

Važna ekvivalentna formulacija aksiome izbora je *Tajhmiler-Takijeva lema*.

DEFINICIJA 3. Neka je $y \subseteq \mathcal{P}(x)$; za y se kaže da je *konačnog karaktera* ako i samo ako za svaki $z \subseteq x$ važi: $z \in y$ ako i samo ako za svaki konačan podskup $a \subseteq z$ važi $a \in y$.

Može se dokazati da je "biti konačnog karaktera" apsolutno svojstvo, u tom smislu što kolekcija y može biti konačnog karaktera nezavisno od izbora skupa x takvog da je $y \subseteq \mathcal{P}(x)$.

TEOREMA 12 (TAJHMILER-TAKIJEVA LEMA). *Za svaki $y \subseteq \mathcal{P}(x)$, ako je y konačnog karaktera, onda y ima maksimalan element u odnosu na $\subseteq$.*

DOKAZ. Ovo tvrđenje se lako dokazuje pomoću Cornove leme.

Da ova lema povlači aksiomu izbora može se dokazati ovako. Neka je x parcijalno uređen skup i neka je $y = \{z \subseteq x \mid z \text{ je lanac}\}$. Neka je $z \subseteq x$ i neka za svaki konačan $a \subseteq z$ važi $a \in y$; tada je svaki konačan $a \subseteq z$ lanac, pa zaključujemo da je z takođe lanac, tj. da je $z \in y$. Kako je, obrnuto, svaki konačan podskup lanca lanac, kolekcija y je konačnog karaktera. Na osnovu Tajhmiler-Takijeve leme, y ima maksimalan element. To znači da x ima maksimalni lanac. Na osnovu 11 (2), odavde sledi aksioma izbora.

Ekvivalentnost ove leme sa aksiomom izbora su, nezavisno jedan od drugog, dokazali Tajhmiler (O. Teichmüller), 1939. i Taki (J. W. Tukey) 1940.

PRINCIP DOBROG UREĐENJA

Princip transfinitne indukcije se može primenjivati na dobro uređene skupove. Sledećim tvrđenjem se kaže da se svaki skup može dobro urediti. To je *princip dobrog uređenja.*

TEOREMA 13 (PRINCIP DOBROG UREĐENJA, CERMELOVA TEOREMA). *Za svaki skup x postoji dobro uređenje R za koje je* $\mathrm{dom}(R) = x$.

DOKAZ. Za dati skup x neka je y kolekcija svih dobro uređenih podskupova skupa x. Drugim rečima, svaki element skupa y je podskup skupa x sa nekim dobrim uređenjem. Skup y nije prazan, jer je $\emptyset \in y$. Štaviše, y je parcijalno uređen produžavanjem. Neka je z lanac u y (u odnosu na produžetke) i neka je a unija lanca z. Na osnovu prethodnih razmatranja, postoji tačno jedno dobro uređenje R skupa z koje je produžetak svakog elementa skupa z. To znači da svaki lanac u y ima gornju granicu, pa se može primeniti Cornova lema. Dakle, postoji maksimalan dobro uređen skup u y, recimo b. Može se pokazati da je $b = x$.

TEOREMA 14. *Tvrđenje da se svaki skup može dobro urediti ekvivalentno je sa aksiomom izbora.*

U daljem tekstu izraz "skup x je dobro uređen" često znači "postoji dobro uređenje skupa x".

DEFINICIJA 4. Za skup y i parcijalno uređen skup x kaže se da je y *kofinalan* u x ako i samo ako je $y \subseteq x$ i za svaki $a \in x$ postoji $b \in y$ za koji je $a \leq b$.

TEOREMA 15. *Svaki linearno uređen skup ima bar jedan kofinalan dobro uređen podskup.*

TEOREMA 16. (1) *Za svako parcijalno uređenje y skupa x postoji linearno uređenje y' skupa x za koje je $y \subseteq y'$.*

(2) *Ako je svaki prebrojiv podskup linearno uređenog skupa x dobro uređen, onda je x dobro uređen.*

AKSIOMA IZBORA, ORDINALI I KARDINALI

Aksioma izbora ima važne posledice u teoriji ordinala i kardinala. Neke od njih opisaćemo u ovom odeljku.

TEOREMA 17 (UOPŠTENA TEOREMA NABRAJANJA). *Svaki skup x ima uređenje sa kojim je ekvipotentan nekom ordinalu α.*

TEOREMA 18. *Uopštena teorema nabrajanja ekvivalentna je sa aksiomom izbora.*

TEOREMA 19 (ZAKON TRIHOTOMIJE). *Za svaka dva skupa x i y važi $x \preceq y$ ili $y \preceq x$*, tj. $x \prec y$ *ili* $x \sim y$ *ili* $y \prec x$.

DOKAZ. Na osnovu teoreme o dobrom uređenju, x i y se mogu dobro urediti. Tada su x i y slični ili je jedan od njih sličan nekom početnom segmentu drugog. U prvom slučaju je $x \sim y$; u drugom je ili $x \preceq y$ ili $y \preceq x$.

TEOREMA 20. *Zakon trihotomije ekvivalentan je sa aksiomom izbora.*

DOKAZ. Treba još dokazati da zakon trihotomije povlači aksiomu izbora.

Ako je $x \preceq y$ ili $y \preceq x$ za svaka dva skupa x i y, onda to važi i za proizvoljan skup x i za $\mathfrak{K}(x)$. Budući da nije $\mathfrak{K}(x) \preceq x$, na osnovu teoreme 9.20, proizlazi da je $x \preceq \mathfrak{K}(x)$, tj. da je $x \sim y$ za neki podskup $y \subseteq \mathfrak{K}(x)$ i neku 1-1 funkciju $f : x \overset{na}{\to} y$, pa se može postupiti kao u dokazu teoreme 17.

Ovu teoremu prvi je dokazao Hartogs 1915.

TEOREMA 21. (1) *Za svaki skup x postoji tačno jedan kardinal $\mathfrak{a}$ za koji je* $\operatorname{card}(x) = \mathfrak{a}$;

(2) *ako su x i y disjunktni i ako je* $\operatorname{card}(x) = \mathfrak{a}$ *i* $\operatorname{card}(y) = \mathfrak{b}$, *onda je* $\operatorname{card}(x \cup y) = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$;

(3) *neka je $\{\mathfrak{a}_i\}$ familija kardinala i neka je $\{x_i\}$ odgovarajuća indeksirana familija disjunktnih skupova za koje je* $\operatorname{card}(x_i) = \mathfrak{a}_i$, *za svaki i; tada je* $\sum_i \mathfrak{a}_i = \operatorname{card}(\bigcup_i x_i)$;

(4) *ako je* $\operatorname{card}(x) = \mathfrak{a}$ *i* $\operatorname{card}(y) = \mathfrak{b}$, *onda je* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \operatorname{card}(x \times y)$;

(5) *za beskonačnu familiju $\{\mathfrak{a}_i\}$ kardinala, ako je $\{x_i\}$ odgovarajuća indeksirana familija skupova za koje važi* $\operatorname{card}(x_i) = \mathfrak{a}_i$ *za svaki i, onda je* $\prod_i \mathfrak{a}_i = \operatorname{card}(\prod_i x_i)$ *(ovde je simbol $\prod$ upotrebljen dvosmisleno: kao proizvod kardinala i kao Dekartov proizvod);*

(6) *za kardinale $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ i za skupove x i y za koje je* $\operatorname{card}(x) = \mathfrak{a}$ *i* $\operatorname{card}(b) = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \operatorname{card}(x^y)$.

TEOREMA 22. Tvrđenje 20 (1) *ekvivalentno je sa aksiomom izbora.*

Sledećih nekoliko teorema dokazaćemo direktno, ne koristeći već dokazane teoreme.

TEOREMA 23. *Ako je x beskonačan skup, onda je*

$$x \times \{0\} \cup x \times \{1\} \sim x.$$

DOKAZ.Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija svih 1-1 funkcija $f : y \times \{0\} \cup y \times \{1\} \overset{na}{\to} y$, za neki $y \subseteq x$. Budući da x ima bar jedan prebrojivo beskonačan podskup, na osnovu teoreme 9.7, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Kolekcija $\mathcal{F}$ je parcijalno uređena relacijom produžavanja. Lako se proverava da su ispunjene pretpostavke za primenu Cornove leme. Dakle, $\mathcal{F}$ ima maksimalan element g, gde je $\mathrm{ran}(g) = y$ za neki y.

Može se pokazati da je $x \setminus y$ konačan skup. Kada bi $x \setminus y$ bio beskonačan, sadržavao bi bar jedan prebrojivo beskonačan podskup z. Koristeći 1-1 korespondenciju između $y \times \{0\} \cup y \times \{1\}$ i y, lako bismo dobili pravo proširenje funkcije g, pa g ne bi bila maksimalna.

Na osnovu teoreme 6, $y \sim y \cup (x \setminus y)$, kao i

$$y \times \{0\} \cup y \times \{1\} \sim (y \cup (x \setminus y)) \times \{0\} \cup (y \cup (x \setminus y)) \times \{1\}.$$

TEOREMA 24. *Ako je bar jedan od disjunktnih skupova x i y beskonačan, a z je jednak većem od njih, onda je $x \cup y \sim z$.*

DOKAZ. Neka su x i y disjunktni skupovi; budući da je $x \preceq z \sim z \times \{0\}$ i $y \preceq z \sim z \times \{1\}$, proizlazi da je

$$x \cup y \preceq z \times \{0\} \cup z \times \{1\} \sim z,$$

prema teoremi 23, a kako je $z \subseteq x \cup y$, proizlazi da je $x \cup y \sim z$.

TEOREMA 25. *Za svaki beskonačan skup x, $x \times x \sim x$.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih 1-1 funkcija $f : y \times y \overset{na}{\to} y$ za neki $y \subseteq x$. Ako je y prebrojivo beskonačan, onda je $y \times y \sim y$, pa je $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Kolekcija $\mathcal{F}$ je parcijalno uređena relacijom produžavanja. Lako se proverava da su ispunjene pretpostavke za primenu Cornove leme. Dakle, $\mathcal{F}$ ima maksimalan element g, gde je $\mathrm{ran}(g) = y$ za neki $y \subseteq x$. Budući da je $y \times y \sim y$, dovoljno je dokazati da je $y \sim x$.

Pretpostavimo da je $y \prec x$. Budući da je $\max(y, x \setminus y) \sim x$, sledi da je $x \sim x \setminus y$, pa je $y \prec x \setminus y$. Odavde proizlazi da $x \setminus y$ ima bar jedan podskup z za koji je $y \sim z$. Budući da je svaki od disjunktnih skupova $y \times y$, $y \times z$ i $z \times z$ beskonačan i ekvipotentan sa $y \times y$, pa, dakle, i sa y i sa z, sledi da je njihova unija ekvipotentna sa z. Sada se g može proširiti do jedne 1-1 korespondencije između z i unije $(y \times y) \cup (y \times z) \cup (z \times y) \cup (z \times z) = (y \cup z) \times (y \cup z)$, pa g nije maksimalna. Dakle, $y \sim x$.

TEOREMA 26. *Za sve skupove x, y, z i a važi:*

(1) *ako je bar jedan od skupova x i y beskonačan, onda je* $x \times y \sim x$ *ili* $x \times y \sim y$;

(2) $x \times x \sim y \times y \Rightarrow x \sim y$;

(3) $(x \prec y \wedge z \prec a) \Rightarrow x \cup z \prec y \cup a$;

(4) $(x \prec y \wedge z \prec a) \Rightarrow x \times z \prec y \times a$;

(5) $x \cup z \prec y \cup z \Rightarrow x \prec y$;

(6) $x \times z \prec y \times z \Rightarrow x \prec y$.

TEOREMA 27. *Nezavisno od aksiome izbora, za svaki beskonačan skup x, ako je $x \times \mathfrak{K}(x) \sim x \cup \mathfrak{K}(x)$, onda je x dobro uređen.*

DOKAZ. Bez smanjivanja opštosti, može se pretpostaviti da su x i $\mathfrak{K}(x)$ disjunktni. Tada postoje disjunktni skupovi y i z za koje je $y \cup z = x \times \mathfrak{K}(x)$, $y \sim x$ i $z \sim \mathfrak{K}(x)$. Prema tome, z je dobro uređen. Ako postoji $a \in x$ za koji je $\{a\} \times \mathfrak{K}(x) \subseteq y$, onda, budući da je $\{a\} \times \mathfrak{K}(x) \sim \mathfrak{K}(x)$, sledi $\mathfrak{K}(x) \preceq x$, suprotno teoremi 9.19.

Ni za jedan $a \in x$ skup $(\{a\} \times \mathfrak{K}(x)) \cap z$ nije prazan. Budući da postoji dobro uređenje skupa z, postoji i funkcija f koja elementu a dodeljuje najmanji element skupa $(\{a\} \times \mathfrak{K}(x)) \cap z$. Jasno je da je $f(a) = \langle a, b \rangle$ za neki $b \in \mathfrak{K}(x)$, kao i da je $f(a') \neq f(a'')$ ukoliko je $a' \neq a''$. Prema tome, funkcija f je 1-1 i preslikava x na neki podskup skupa z. Dakle, $x \preceq z$, pa je x dobro uređen skup.

TEOREMA 28. *Tvrđenje (1) iz teoreme 26 ekvivalentno je sa aksiomom izbora.*

TEOREMA 29. *Tvrđenje (2) iz teoreme 25 ekvivalentno je sa aksiomom izbora.*

DOKAZ. Neka je x beskonačan skup i neka je $y = x^{\aleph_0}$, $z = y \cup \mathfrak{K}(y)$ i $a = y \times \mathfrak{K}(y)$, gde su y i $\mathfrak{K}(y)$ disjunktni skupovi. Važi:

$$y \times y = x^{\aleph_0} \times x^{\aleph_0} \sim x^{\aleph_0} = y,$$

pa je

$$y \sim y \cup \{y\} \preceq y \times y \sim y.$$

Lako se proverava da važi

$$2 \times \mathfrak{K}(y) \sim \mathfrak{K}(y) \sim \mathfrak{K}(y) \cup \{\mathfrak{K}(y)\} \sim \mathfrak{K}(y) \times \mathfrak{K}(y),$$

pa je

$$\begin{aligned}
z \times z &\sim (y \cup \mathfrak{K}(y)) \times (y \cup \mathfrak{K}(y)) \\
&\sim (y \times y) \cup (2 \times y \times \mathfrak{K}(y)) \cup (\mathfrak{K}(y) \times \mathfrak{K}(y)) \\
&\sim y \cup [y \times (\mathfrak{K}(y) \times 2)] \cup \mathfrak{K}(y) \\
&\sim y \cup (y \times \mathfrak{K}(y)) \cup \mathfrak{K}(y) \\
&\sim y \times [\mathfrak{K}(y) \cup \{\mathfrak{K}(y)\}] \cup \mathfrak{K}(y) \\
&\sim (y \times \mathfrak{K}(y)) \cup \mathfrak{K}(y) \\
&\sim (y \cup \{y\}) \times \mathfrak{K}(y) \\
&\sim y \times \mathfrak{K}(y) \\
&\sim y \times y \times [\mathfrak{K}(y) \times \mathfrak{K}(y)] \\
&\sim a \times a.
\end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 25 (2), $z \sim a$, tj. $y \cup \mathfrak{K}(y) \sim y \times \mathfrak{K}(y)$, pa je, prema teoremi 26, y dobro uređen. Budući da je $x \preceq y$, i x je dobro uređen.

TEOREMA 30. *Tvrđenje da je za svaki beskonačan* x, $x \times x \sim x$ *ekvivalentno je sa aksiomom izbora.*

DOKAZ. Na osnovu teoreme 28.

TEOREMA 31. *Ako je* $\mathfrak{a}$ *beskonačan, a* $\mathfrak{b}$ *konačan kardinal veći od* 0, *onda je* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}$.

TEOREMA 32. *Svako od tvrđenja* (3)–(6) *iz* teoreme 25 *ekvivalentno je sa aksiomom izbora.*

DOKAZ. Dovoljno je dokazati da svako od ovih tvrđenja povlači aksiomu izbora.

(3) Neka je x beskonačan skup i $x \cap \mathfrak{K}(x) = \emptyset$; tada je

$$x \preceq x \cup \mathfrak{K}(x) \text{ i } \mathfrak{K}(x) \preceq x \cup \mathfrak{K}(x).$$

Kada bi u ovim tvrđenjima stajalo $\prec$ umesto $\preceq$, dobili bismo

$$x \cup \mathfrak{K}(x) \prec x \cup \mathfrak{K}(x).$$

Dakle, $x \sim x \cup \mathfrak{K}(x)$ ili $\mathfrak{K}(x) \sim x \cup \mathfrak{K}(x)$. Ali, ako je $x \sim x \cup \mathfrak{K}(x)$, onda je $\mathfrak{K}(x) \preceq x$, suprotno teoremi 8.19. Dakle, $\mathfrak{K}(x) \sim x \cup \mathfrak{K}(x)$, pa je $x \preceq \mathfrak{K}(x)$ i x je dobro uređen.

(4) Kao (3), sa $x \times \mathfrak{K}(x)$ umesto $x \cup \mathfrak{K}(x)$.

(5) Neka je x beskonačan skup; ako je $y = \aleph_0 \times x$, onda je $y \times \{0\} \cup y \times \{1\} \sim y$. Tada je $y \times \{0\} \cup y \times \{1\} \preceq y \cup \mathfrak{K}(y)$. Ako je

$$y \times \{0\} \cup y \times \{1\} \sim y \cup \mathfrak{K}(y),$$

onda je $\mathfrak{K}(y) \preceq y$, suprotno teoremi 9.19. Dakle, $y \times \{0\} \cup y \times \{1\} \prec y \times \{0\} \cup \mathfrak{K}(y)$, pa je, na osnovu teoreme 25 (5), $y \sim y \times \{1\} \prec \mathfrak{K}(y)$ i y je dobro uređen. Budući da je $x \preceq y$, i x je dobro uređen.

(6) Kao (5), sa $y = x^{\aleph_0}$ i $\times$ umesto $\cup$.

Tvrđenje da je za svaki beskonačan skup

$$x \sim x \times \{0\} \cup x \times \{1\}$$

ne povlači aksiomu izbora.

TEOREMA 33. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $\operatorname{card}(x) \leq \operatorname{card}(y)$;

(2) *postoji 1-1 funkcija sa x u y;*

(3) *postoji funkcija sa y na x.*

TEOREMA 34. *Za sve kardinale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{c}$:*

(1) $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$;

(2) *ako je $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, onda je $\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}$;*

(3) *ako je $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ i $0 < \mathfrak{c}$, onda je $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{b}}$;*

(4) $\mathfrak{a}^0 = 1$; $1^{\mathfrak{a}} = 1$; *ako je $\mathfrak{a} > 0$, onda je $0^{\mathfrak{a}} = 0$;*

(5) *ako je $\mathfrak{b}$ beskonačan i $\mathfrak{c} > 0$, onda je*

(5.1) $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cup \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}}$;

(5.2) $(2^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$.

(6) *ako je $\mathfrak{a}$ beskonačan i $n > 0$, onda je $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}$;*

(7) *ako je x neprazan skup kardinala, onda su $\bigcup x$ i $\bigcap x$ kardinali.*

TEOREMA 35. (1) *Ako je $x \cup y$ beskonačan skup, onda je*

$$\operatorname{card}(x \cup y) = \operatorname{card}(x) \cup \operatorname{card}(y);$$

(2) *ako je $x \cup y$ beskonačan skup, a x i y su neprazni, onda je*

$$\operatorname{card}(x \times y) = \operatorname{card}(x) \cup \operatorname{card}(y);$$

(3) *ako je X beskonačna familija skupova, onda je*

$$\operatorname{card}(\bigcup X) \leq \operatorname{card}(X) \cup \bigcup\{\operatorname{card}(y) \mid y \in X\};$$

(4) *ako je X dobro uređen inkluzijom ili su svaka dva elementa skupa X disjunktna, onda je*

$$\operatorname{card}(\bigcup X) = \operatorname{card}(X) \cup \bigcup\{\operatorname{card}(y) \mid y \in X\}.$$

Tačka (3) ove teoreme znači da je kardinalnost skupa $\bigcup X$ najviše jednaka supremumu kardinalnosti skupa X i kardinalnosti elemenata skupa X.

TEOREMA 36. (1) $\operatorname{card}(\mathcal{P}(x)) = 2^{\operatorname{card}(x)}$;
(2) $\operatorname{card}(x^x) = 2^{\operatorname{card}(x)}$;
(3) *ako je x beskonačan skup, a $\mathcal{P}_\omega(x)$ skup svih konačnih podskupova skupa x, onda je* $\operatorname{card}(\mathcal{P}_\omega(x)) = \operatorname{card}(x)$.

TEOREMA 37. *Opšti distributivni zakon za kardinale:*

$$\prod_{i\in I}\sum_{j\in J_i} \mathfrak{a}_{ij} = \sum_{f\in\prod\limits_{i\in I} J_i}\ \prod_{i\in I} \mathfrak{a}_{if(i)}.$$

REGULARNI I SINGULARNI KARDINALI

Zanimljiva pitanja u teoriji skupova postavljaju se o regularnim kardinalima.

TEOREMA 38. *Neka je ξ granični ordinal; skup x je kofinalan u ξ ako i samo ako je $x \subseteq \xi$ i $\xi = \bigcup x$.*

DEFINICIJA 6. Za svaki ordinal ξ transfinitnom rekurzijom definisaćemo *kofinalnost* $\operatorname{cf}(\xi)$ ordinala ξ.

$\operatorname{cf}(0) = 0$;

ako je ξ ordinal sledbenik, onda je $\operatorname{cf}(\xi) = 1$

ako je ξ granični ordinal, onda je $\operatorname{cf}(\xi)$ najmanji kardinal $\mathfrak{a}$ za koji je neki skup kardinalnosti $\mathfrak{a}$ kofinalan u ξ.

Iz definicije kofinalnosti neposredno proizlazi

$$\omega \leq \operatorname{cf}(\xi) \leq \xi$$

za svaki beskonačan granični ordinal ξ. Odavde sledi

$$\aleph_0 = \operatorname{cf}(\omega).$$

DEFINICIJA 7. Kardinal $\mathfrak{a}$ je *regularan* ako i samo ako je $\operatorname{cf}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$; kardinal $\mathfrak{a}$ je *singularan* ako i samo ako je $\operatorname{cf}(\mathfrak{a}) < \mathfrak{a}$.

TEOREMA 39. *$\aleph_0$ je regularan kardinal.*

Prema definiciji, 0 i 1 su regularni kardinali, ali su svi ostali konačni kardinali koji su veći od 1 – singularni. Pojmovi regularnih i singularnih kardinala su značajni samo kada se tiču beskonačnih kardinala.

TEOREMA 40. *Svaki beskonačan kardinal sledbenik* $\mathfrak{a}^+$ *je regularan.*

DOKAZ. Neka je skup x kofinalan u $\mathfrak{a}^+$. Na osnovu teoreme 35 (3)

$$\mathfrak{a}^+ \leq \mathrm{card}(x) \cup \bigcup\{\mathrm{card}(\beta) \mid \beta \in x\}.$$

Budući da je $\mathrm{card}(\beta) \leq \mathfrak{a}$ za svaki $\beta \in x$, sledi

$$\bigcup\{\mathrm{card}(\beta) \mid \beta \in x\} < \mathfrak{a}^+.$$

To znači da je $\mathrm{card}(x) = \mathfrak{a}^+$ i $\mathrm{cf}(\mathfrak{a}^+) = \mathfrak{a}^+$.

Ispitivanje graničnih kardinala većih od $\aleph_0$ obično pokazuje da su oni singularni. Na primer, lako se dokazuje

TEOREMA 41. $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0$ *i* $\mathrm{cf}(\beth_\omega) = \aleph_0$.

Dakle, $\aleph_\omega$ i $\beth_\omega$ su singularni kardinali.

TEOREMA 42. *Za svaki granični ordinal* $\xi > 0$,

$$\mathrm{cf}(\aleph_\xi) = \mathrm{cf}(\beth_\xi) = \mathrm{cf}(\xi).$$

DOKAZ. Ako je x kofinalan u ξ, onda je skup $y = \{\aleph_\gamma \mid \gamma \in x\}$ kofinalan u $\aleph_\xi$, pa je $\mathrm{card}(y) = \mathrm{card}(x)$. Dakle, $\mathrm{cf}(\aleph_\xi) \leq \mathrm{cf}(\xi)$.

Ako je x' kofinalan u $\aleph_\xi$, onda je skup

$$y' = \{\gamma \mid (\exists\beta \in x')\ \mathrm{card}(\beta) = \aleph_\gamma\}$$

kofinalan u ξ, pa je $\mathrm{card}(y') \leq \mathrm{card}(x')$. Dakle, $\mathrm{cf}(\xi) \leq \mathrm{cf}(\aleph_\xi)$. Prema tome, $\mathrm{cf}(\xi) = \mathrm{cf}(\aleph_\xi)$.

Slično se dokazuje i $\mathrm{cf}(\xi) = \mathrm{cf}(\beth_\xi)$.

Da li postoji granični kardinal veći od $\aleph_0$ koji je regularan? Na ovo pitanje se ne može dati odgovor sredstvima teorije skupova koja su do sada opisana. Za jak granični kardinal koji je regularan kaže se da je *nedostižan* kardinal. Takvi kardinali, ako postoje, imaju niz lepih svojstava koja su zajednička sa $\aleph_0$.

TEOREMA 43. *Neka je* ξ *beskonačan granični ordinal; tada postoji skup* y *kofinalan u* ξ *koji je kao lanac izomorfan sa* $\mathrm{cf}(\xi)$. *Ako je* ξ *granični kardinal, onda* y *može biti skup kardinala.*

DOKAZ. Neka je $\alpha = \mathrm{cf}(\xi)$ i neka je x skup kofinalan u ξ. Neka je x_β, $\beta < \alpha$, enumeracija elemenata skupa x. Transfinitnom rekurzijom definišimo funkciju $f : \alpha \to \xi$, ovako: neka je $0 < \beta < \alpha$; pretpostavimo da je za svaki $\gamma < \beta$ već izabran element $f(\gamma) \in \xi$; tada je skup

$$z = \{x_\gamma \mid \gamma < \beta\} \cup \{f(\gamma) \mid \gamma < \beta\}$$

podskup skupa ξ i važi $\mathrm{card}(z) < \alpha$, pa ne može biti $\xi = \bigcup z$. Preostaje nam $\bigcup z < \xi$. Na osnovu toga možemo definisati $f(\beta)$ kao najmanji $\zeta < \xi$ za koji je $\bigcup z < \zeta$.

Funkcija f, ovako definisana, ima sledeće osobine:

(1) ako je $\gamma < \beta$, onda je $f(\gamma) < f(\beta)$;

(2) $\xi = \bigcup f(\beta)$, za $\beta < \alpha$.

Odavde proizlazi da je skup $\mathrm{ran}(f)$ kofinalan u ξ i da je f izomorfizam između tog skupa i α .

TEOREMA 44. *Za svaki ordinal* ξ, $\mathrm{cf}(\xi)$ *je regularan kardinal.*

DOKAZ . Potrebno je dokazati da je $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\xi)) = \mathrm{cf}(\xi)$. To je svakako tačno ukoliko je $\mathrm{cf}(\xi) = 0$ ili je $\mathrm{cf}(\xi) = 1$. Neka je $\mathrm{cf}(\xi)$ beskonačan skup i neka je $\alpha = \mathrm{cf}(\xi)$. Na osnovu prethodne teoreme, postoji skup y kofinalan u ξ koji je izomorfan sa α. Označimo sa f izomorfizam između α i y. Neka je z kofinalan u α; tada je skup

$$x = \{f(\beta) \mid \beta \in z\}$$

kofinalan u ξ. Odavde sledi da je $\alpha \leq \mathrm{card}(x)$. Ali, $\mathrm{card}(x) \leq \mathrm{card}(z)$, pa je $\alpha \leq \mathrm{card}(z)$ i $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$.

TEOREMA 45. *Ako je* α *beskonačan kardinal, onda je* $\alpha < \alpha^{\mathrm{cf}(\alpha)}$.

DOKAZ. Neka je skup y kofinalan u α i neka je f izomorfizam između $\mathrm{cf}(\alpha)$ i y. Neka je g bilo koje preslikavanje skupa α u skup $\alpha^{\mathrm{cf}(\alpha)}$; pokazaćemo da g ne može biti "na" preslikavanje. Definišimo funkciju $h \in \alpha^{\mathrm{cf}(\alpha)}$ ovako. Za svaki $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$, neka je $h(\beta)$ najmanji $\xi < \alpha$ koji ne pripada skupu

$$\{g_\gamma(\beta) \mid \gamma < f(\beta)\}. \tag{1}$$

Takav ξ postoji, jer je kardinalnost skupa (1) najviše card(β); osim toga, card$(\beta) < \mathfrak{a}$. Funkcija h ne može biti nijedna od funkcija g_γ, $\gamma < \mathfrak{a}$, zato što $f(\beta) > \gamma$ povlači $h(\beta) \neq g_\gamma(\beta)$. Odavde proizlazi da g ne preslikava $\mathfrak{a}$ na $\mathfrak{a}^{\mathrm{cf}(\mathfrak{a})}$. Dakle,

$$\mathfrak{a} < \mathrm{card}(\mathfrak{a}^{\mathrm{cf}(\mathfrak{a})}) = \mathfrak{a}^{\mathrm{cf}(\mathfrak{a})}.$$

Ova teorema je varijanta tzv. *Kenigove teoreme* koja predstavlja poboljšanje Kantorove teoreme 9.15, jer je

$$2^{\mathrm{cf}(\mathfrak{a})} \leq \mathfrak{a}^{\mathrm{cf}(\mathfrak{a})} = 2^{\mathfrak{a}}.$$

GCH POVLAČI AKSIOMU IZBORA

Lindenbaum i Tarski (A. Lindenbaum) i (A. Tarski) su 1926. ustvrdili da GCH povlači aksiomu izbora. Zaista, tu činjenicu je 1947. dokazao Sierpinski (W. Sierpinski). Reprodukovaćemo ovde taj dokaz.

GCH ćemo koristiti u sledećem obliku: *Ako je x beskonačan skup, onda ne postoji skup y za koji je $x \prec y \prec 2^x$.*

GCH je tvrđenje o postojanju raznih preslikavanja. Kada bi postojao skup za koji je $x \preceq y \preceq \mathcal{P}(x)$), onda bi postojalo 1-1 preslikavanje skupa y na x ili 1-1 preslikavanje skupa y u $\mathcal{P}(x)$. To bi značilo da postoji toliko preslikavanja da bi se svaki skup mogao dobro urediti.

DEFINICIJA 8. $\mathcal{P}_0(x) = x$, $\mathcal{P}_{n+1}(x) = \mathcal{P}(\mathcal{P}_n(x))$.

LEMA 1. *Neka je x beskonačan skup; postoji dobro uređen skup z za koji je $z \subseteq \mathcal{P}_4(x)$ i nije $z \preceq x$.*

DOKAZ. Posmatrajmo sva dobra uređenja skupa x ili podskupova skupa x. Budući da je dobro uređenje skupa x kolekcija uređenih parova skupa x, ova kolekcija je sadržana u $\mathcal{P}_3(x)$. Posmatrajmo sada relaciju ekvivalencije u odnosu na koju su dva dobra uređenja iz ove kolekcije ekvivalentna ako i samo ako su izomorfna. Neka je z skup svih klasa ekvivalencije koje su indukovane tom relacijom (elementi skupa z su ordinali). Lako se uveravamo da je $z \subseteq \mathcal{P}_4(x)$. Budući da je z skup ordinala, z je dobro uređen skup. Ako je $z \preceq x$, onda je z izomorfan sa nekim dobrim uređenjem iz z, pa je z izomorfan sa nekim pravim početnim segmentom samog sebe, što nije moguće. Dakle, nije $z \preceq x$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}_i(x) \times \{0\} \cup \mathcal{P}_i(x) \times \{1\} \sim \mathcal{P}_i(x)$, za $0 \leq i \leq 4$; tada je

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_3(x) &\preceq z \cup \mathcal{P}_3(x)\\ &\preceq \mathcal{P}_4(x) \cup \mathcal{P}_3(x)\\ &\sim \mathcal{P}_4(x).\end{aligned}$$

Na osnovu GCH, ili je $z \cup \mathcal{P}_3(x) \sim \mathcal{P}_4(x)$ ili je $z \cup \mathcal{P}_3(x) \sim \mathcal{P}_3(x)$. Ova dva slučaja moramo posebno ispitati. U ispitivanju prvog potrebna je sledeća

LEMA 2. *Ako su x i y skupovi za koje je $x \cup y \sim \mathcal{P}(x_1 \cup x_2))$, gde su x_1 i x_2 disjunktni skupovi $x \times \{0\}$ i $x \times \{1\}$, redom, onda je $\mathcal{P}(x) \preceq y$.*

DOKAZ. Ako je $f : x \cup y \to \mathcal{P}(x_1 \cup x_2)$ 1-1 funkcija, $\mathcal{P}(x_1 \cup x_2) \sim \mathcal{P}(x_1) \times \mathcal{P}(x_2)$, onda slika skupa x, projektovana na $\mathcal{P}(x_1)$, ne može biti ceo skup $\mathcal{P}(x_1)$, jer je $x_1 \prec \mathcal{P}(x_1)$, pa ako c nije u toj projekciji, funkcija f preslikava neki podskup skupa y na $c \times \mathcal{P}(x_2)$, tj. $\mathcal{P}(x) \preceq y$.

Ako je $z \cup \mathcal{P}_3(x) \sim \mathcal{P}_4(x)) \sim \mathcal{P}((\mathcal{P}_3 \times \{0\}) \cup (\mathcal{P}_3(x) \times \{1\}))$, na osnovu leme 2 zaključujemo da je $\mathcal{P}_4(x) \preceq z$, a budući da je $z \preceq \mathcal{P}_4(x)$, sledi da je $z \sim \mathcal{P}_4(x)$, na osnovu Bernštajn-Šrederove teoreme. Skup $\mathcal{P}_4(x)$ je dobro uređen (jer je to z), pa kako se x može utopiti u $\mathcal{P}_4(x)$, i skup x je dobro uređen.

Ako je $z \cup \mathcal{P}_3(x) \sim \mathcal{P}_3(x)$, onda je $z \preceq \mathcal{P}_3(x)$, pa se može primeniti ista argumentacija da bi se pokazalo kako je ili x dobro uređen skup ili je $z \preceq \mathcal{P}_2(x)$. Ponavljajući ovaj argument još jednom, dolazimo do zaključka da je $z \preceq \mathcal{P}_1(x)$. Na osnovu leme 1 nije moguće da bude $z \sim \mathcal{P}_0(x) \sim x$, pa je $z \sim \mathcal{P}_1(x)$, i x je dobro uređen.

Ostaje da se ukloni ograničenje $\mathcal{P}_i(x) \times \{0\} \cup \mathcal{P}_i(x) \times \{1\} \sim \mathcal{P}_i(x)$, za $0 \leq i \leq 4$. Neka je $y = \mathcal{P}(x \cup \omega)$, pri čemu možemo pretpostaviti da je $x \cap \omega = \emptyset$. Lako se proverava da je $(\mathcal{P}_i(y) \times \{0\}) \cup (\mathcal{P}_i(y) \times \{1\}))$ $\sim \mathcal{P}_i(y)$ za $0 \leq i \leq 4$. Jer, $y \times \{0\} \cup y \times \{1\} \sim \mathcal{P}(x \cup \omega^+) \sim \mathcal{P}(x \cup \omega)$ $\sim y$, jer je $\omega^+ \sim \omega$. Takođe je $y \preceq y^+ \preceq y \times \{0\} \cup y \times \{1\}$, pa je $y^+ \sim y$. Sada je $2 \cdot 2^y \sim 2^{y^+} \sim 2^y$, a sličan argument pokazuje da je

$(\mathcal{P}_i(y) \times \{0\}) \cup (\mathcal{P}_i(y) \times \{1\} \sim \mathcal{P}_i(y)$ za sve i. Budući da se x može prirodno utopiti u y, x se može dobro urediti.

Time je dokazana

TEOREMA 46. GCH *povlači aksiomu izbora.*

DRVETA

Jedna od posledica aksiome izbora je *Kenigova lema* koja ima primenu u teoriji dokaza. Ona se odnosi na strukturu koja je poznata kao *drvo*, čija definicija sledi.

DEFINICIJA 9. Pod *drvetom* ili *stablom* $\langle T, \leq \rangle$ podrazumevamo parcijalno uređen neprazan skup T za čiji je svaki element x (koji se zove *tačka*) skup $\mathrm{st}(x)$ dobro uređen.

Umesto $\langle T, \leq \rangle$ pisaćemo samo T.

TEOREMA 47. *Za svake tri tačke x, y i z iz drveta T važi: ako je $x \leq z$ i $y \leq z$, onda je $x \leq y$ ili je $y \leq x$.*

DEFINICIJA 10. Neka je T drvo; tada

(a) ako je $x \in T$, onda pod *visinom* $\mathrm{vs}(x, T)$ tačke x u drvetu T podrazumevamo jedinstveni ordinal α koji je sličan skupu $\mathrm{st}(x)$;

(b) za svaki ordinal α, pod *slojem* $S(\alpha, T)$ *visine* α podrazumevamo $\{x \in T \mid \mathrm{vs}(x, T) = \alpha\}$;

(c) *visina* $\mathrm{vs}(T)$ *drveta* T je najmanji ordinal α za koji je $S(\alpha, T) = \emptyset$;

(d) *poddrvo* T' drveta T je podskup $T' \subseteq T$ na kojem je indukovan poredak drveta T tako da za svaku tačku $x \in T'$ važi $\mathrm{st}(x) \subseteq T'$, gde se st odnosi na T.

Jasno je da je $\mathrm{vs}(T) = \sup(\{\mathrm{vs}(x, T) + 1 \mid x \in T\})$. Ako je T' poddrvo drveta T, onda je za $x \in T'$, $\mathrm{vs}(x, T') = \mathrm{vs}(x, T)$.

Trivijalan primer drveta je bilo koji neprazan skup sa praznom relacijom kao poretkom.

DEFINICIJA 11. Ako je skup T konačan (beskonačan), za drvo $\langle T, \leq \rangle$ se kaže da je *konačno* (*beskonačno*).

Važno tvrđenje o drvetima je *Kenigova lema*; ona je data u sledećoj teoremi.

TEOREMA 47 (KENIGOVA LEMA). *Ako je* $\mathrm{vs}(T) = \omega$ *i za svaki* $n < \omega$ $S(n,T)$ *je konačan skup, onda* T *sadrži bar jedan beskonačan lanac.*

DOKAZ. Za svaki $x \in T$ definišimo skup P_x: $P_x = \{y \mid x \leq y\}$. Budući da se svaka tačka drveta T javlja tačno u jednom $S(k,T)$, za datu tačku x skup P_x je konačan ako i samo ako postoji m, $k \leq m$, za koju važi $(\forall m \geq n)$ $P_x \cap S(n,T) = \emptyset$. Dakle, ako je $\mathrm{vs}(x,T) = m$, onda je P_x je beskonačan ako i samo ako je $P_x \cap S(n,T) \neq \emptyset$ za svaki n, $m \leq n$. Ako je $\mathrm{vs}(T) = \omega$, onda postoji $a \in S(0,T)$ za koju je P_a beskonačan (inače bismo lako zaključili da je $\mathrm{vs}(T) < \omega$), pa je za $n \in \omega$ presek $P_a \cap S(n,T) \neq \emptyset$. Dakle, $\{P_a \cap S(n,T) \mid n \in \omega\}$ je neprazna familija nepraznih skupova. Na osnovu aksiome izbora, postoji skup $\{x_n \mid n \in \omega\}$ tako da za svaki n važi $x_n \in P_a \cap S(n,T)$. Očigledno, ovaj skup je prebrojivo beskonačan i za svaka dva njegova različita elementa y i z važi ili $y < z$ ili $z < y$.

TEOREMA 48. *Kenigova lema povlači aksiomu izbora za prebrojivu familiju nepraznih konačnih skupova.*

DOKAZ. Neka je $\{x_n \mid n \in \omega\}$ prebrojiva familija nepraznih konačnih skupova. Za svaki $n \in \omega$ proizvod $\prod_{m \in n} x_m$ je neprazan. To se lako dokazuje bez aksiome izbora.

Neka je

$$\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \omega} \left(\prod_{m \in n} x_m\right).$$

Elementi skupa $\mathcal{T}$ su svi konačni nizovi $t = (t_0, \ldots, t_n)$, gde je $t_i \in x_i$ za $i < n$. Skup $\mathcal{T}$ je parcijalno uređen sledećom relacijom $\leq_T$: za $s, t \in \mathcal{T}$ $s \leq_T t$ ako i samo ako je $s = \mathrm{sl}(t)$. Prema tome, slabi prethodnici elementa $t \in \mathcal{T}$, u odnosu na relaciju $\leq_T$, su svi slabi početni segmenti elementa t. Pokazaćemo da je $\langle \mathcal{T}, <_T \rangle$ drvo. Skup početnih segmenata nekog elementa $T \in \mathcal{T}$ je konačan i linearno uređen, pa je zato i dobro uređen. Jedini minimalni element je parazan niz. Dakle, $\langle \mathcal{T}, <_T \rangle$ je drvo. Visina ovog drveta je ω. Ako je $t = (t_0, \ldots, t_{n-1})$, onda su neposredni sledbenici elementa t nizovi $(t_0, \ldots t_{n-1}, s)$, za $s \in x_n$. Budući da je x_n konačan skup, element t ima konačno mnogo neposrednih sledbenika, a budući da je visina drveta ω, drvo $\langle \mathcal{T}, <_{\mathcal{T}} \rangle$ je beskonačno. Na osnovu Kenigove leme, postoji u $\mathcal{T}$ bar jedna beskonačna grana g. Ova grana daje funkciju izbora za familiju $\{x_n \mid n \in \omega\}$: za svaki n neka je $t \in g$ dužine veće on n; n-t član elementa t je izabrani element skupa x_n.

Kenigova lema i aksioma izbora za prebrojivu familiju nepraznih konačnih skupova su ekvivalentna tvrđenja.

12. ALTERNATIVNE TEORIJE SKUPOVA

Teoriju skupova koja je ovde izložena izgradili su Cermelo i Frenkel (E. Zermelo i A. Fraenkel), pa se ona i zove *Cermelo-Frenkelova teorija skupova*. Cermelova teorija $\mathbf{Z}$ imala je 1908. aksiome ekstenzionalnosti, unije, stepena, beskonačnosti, podskupa i izbora. Frenkel je 1922. uveo shemu aksiome zamene. U obliku u kojem se danas koriste, aksiome podskupa i zamene uveo je Skulem (T. Skolem) 1922., pa se ova teorija zove i *Cermelo-Frenkel-Skulemova teorija skupova*. Aksiomu regularnosti uveo je Mirimanov (D. Mirimanoff) 1917.

Cermelo-Frenkelova teorija skupova bez aksiome izbora obeležava se sa $\mathbf{ZF}$, a sa aksiomom izbora – $\mathbf{ZFC}$.

Postoje različite ekvivalentne formulacije teorija skupova $\mathbf{ZF}$ i $\mathbf{ZFC}$, što znači da postoje različiti sistemi aksioma tih teorija čiji se skupovi posledica međusobno poklapaju. Pogledajmo neke od njih. Zapisaćemo ih strogo, kao formule jezika teorije skupova. Evo jedne formulacije teorije $\mathbf{ZF}$.

Ekstenzionalnost: $\forall u, v\ (u = v \Leftrightarrow \forall w(w \in u \Leftrightarrow w \in v)$.

Aksioma praznog skupa: $\exists x \forall y\ (y \notin x)$.

Aksioma neuređenog para:

$\forall u, v \exists w \forall u_1\ (u_1 \in w \Leftrightarrow u_1 = u \vee u_1 = v)$.

Aksioma unije: $\forall u \exists v \forall w\ (w \in v \Leftrightarrow \exists u_1\ (w \in u_1 \wedge u_1 \in u))$.

Aksioma stepena: $\forall u \exists v \forall w\ (w \in v \Leftrightarrow \forall u_1\ (u_1 \in w \Rightarrow u_1 \in u))$.

Aksioma beskonačnosti:

$\exists u\ (\exists v\ (v \in u) \wedge \forall v\ (v \in u \Rightarrow \exists w\ (v \in w \wedge w \in u)))$.

Aksioma regularnosti:

$\forall u\ (\exists v\ (v \in u) \Rightarrow \exists v\ (v \in u \wedge \neg \exists w\ (w \in v \wedge w \in u)))$.

Aksioma podskupa:

$\forall u \exists v \forall w\ (w \in v \Leftrightarrow w \in u \wedge A(w, u_1, \ldots, u_n))$,

gde je A bilo koja formula u kojoj se ne javlja v.

Aksioma okupljanja:

$\forall u\ (u \in u_1 \Rightarrow \exists w A(u, w, u_1, v_1, \ldots, v_n)) \Rightarrow$
$\exists v \forall u (u \in u_1 \Rightarrow \exists w (w \in v \wedge A(u, w, u_1, v_1, \ldots, v_n)))$,

gde je A formula u kojoj se ne javlja promenljiva v.

Kao što se vidi, aksiome podskupa i okupljanja su sheme aksioma.

Iz navedenih aksioma može se izvesti

Aksioma zamene:

$\forall u \exists_1 w A(u, w, u_1, v_1, \ldots, v_n) \Rightarrow$
$\exists v \forall w (w \in v \Leftrightarrow \exists u (u \in u_1 \wedge A(u, w, u_1, v_1, \ldots, v_n)))$,

gde je A formula u kojoj se ne javlja promenljiva v.

S druge strane, aksiome podskupa i okupljanja mogu se izvesti iz aksiome zamene i preostalih aksioma ove formulacije.

Već smo videli da se aksioma praznog skupa može izvesti iz aksiome podskupa.

TEOREMA 1. *Aksioma neuređenog para može se izvesti iz aksiome stepena i aksiome zamene.*

Za sve navedene aksiome se lako može utvrditi da su "istinite" u kumulativnoj hijerarhiji.

Neki delovi teorije **ZF** su takođe zanimljivi.

Teorija **Z** Cermela ima sve aksiome teorije **ZF** osim aksiome okupljanja. Ova teorija je deo teorije **ZF** i ima istorijski značaj, jer prethodi teoriji **ZF**. Kada joj se doda aksioma izbora, dobija se teorija koja je dovoljna za zasnivanje velikog dela klasične matematike, ali nije dovoljna za definisanje nizova $\aleph_\alpha$, pa se u njoj kardinali i dobro uređenje moraju tretirati drukčije.

ZF−P je teorija skupova koja se dobija kada se iz **ZF** izostavi aksioma stepena. Ona je važna u nekim oblastima matematičke logike, kao što su uopštena teorija rekurzije i infinitarna logika. S druge strane, ona nije dovoljna za zasnivanje klasičnih matematičkih teorija, jer se u njoj ne može dokazati da postoji skup realnih brojeva.

Kada se u **ZF** aksioma beskonačnosti zameni svojom negacijom, dobija se teorija skupova $\mathbf{ZF}_\infty$ u kojoj se može izgraditi formalna aritmetika. Svaka formula A formalne aritmetike ima svoj prevod A' u ovoj teoriji tako da je A dokaziva u formalnoj aritmetici ako i samo ako je A' dokaziva u ovoj teoriji skupova. To znači da su $\mathbf{ZF}_\infty$ i formalna aritmetika ekvivalentne teorije. Pa ipak, u $\mathbf{ZF}_\infty$

nema beskonačnih skupova. (Formalna aritmetika se može izgraditi i u teoriji **ZF**.)

U **ZF** se može dokazati neprotivrečnost formalne aritmetike, teorije **Z** i teorije **ZF−P**. Neprotivrečnost formalne aritmetike se može dokazati i u **Z** i u **ZF−P**.

Teorija **ZFC** se dobija kada se teoriji **ZF** doda

Aksioma izbora:

$\forall u \exists v$ (v je funkcija sa domenom $u \wedge \forall w \, (w \in u \wedge \exists u_1 \, (u_1 \in w) \Rightarrow v(w) \in w))$.

U aritmetici se može dokazati da ako je teorija **ZF** neprotivrečna, onda je takva i **ZFC**.

Pored **ZF** postoje i druge teorije skupova. Jedna od njih je *Fon Nojman-Bernajs-Gedelova teorija skupova* (J. Von Neumann, P. Bernays, K. Gödel) koja se obeležava sa **NBG**. U njoj su predmet proučavanja klase dok su skupovi samo posebna vrsta klasa. Klasa X je skup ako i samo ako postoji klasa Y za koju je $X \in Y$. **NBG** ima uobičajene **ZF** aksiome, ali se od **ZF** razlikuje po ograničenju u primeni aksiome podskupa. **NBG** sadrži sve teoreme **ZFC**, a svako tvrđenje o skupovima koje se može dokazati u **NBG** može se dokazati u **ZFC**.

Jezik teorije **NBG** ima, osim logičkih, osnovne simbole $\in$ i V. $V(u)$ se čita kao: "u je skup", a $\neg V(u)$ kao "u je prava klasa".

Aksiome teorije **NBG** mogu se lako izložiti ako se prethodno definiše *relativizacija* A^V formule A u odnosu na **V**.

Ako je A elementarna formula, onda je $A^V = A$;

ako je $A = \neg B$, onda je $A^V = \neg(B^V)$;

ako je $A = B \circ C$, gde je $\circ$ neki od preostalih veznika, onda je $A^V = B^V \circ C^V$;

ako je $A = \forall u B$, onda je $A^V = \forall u (V(u) \Rightarrow B^V)$;

ako je $A = \exists u B$, onda je $A^V = \exists u (V(u) \wedge B^V)$.

Formula A^V znači da se kvantifikatori u toj formuli odnose na klasu **V**.

Aksiome teorije **NBG** su relativizacije aksioma praznog skupa, neuređenog para, unije, stepena i beskonačnosti. Osim toga, tu su još i aksiome ekstenzionalnosti i regularnosti. Zatim dolazi

Aksioma zamene:

$\forall w_1 (w_1$ je funkcija $\Rightarrow (\forall u_1 \exists w \forall v (v \in w \Leftrightarrow \exists u (u \in u_1 \wedge w_1(u))))^V)$.

Aksioma zamene je u ovoj teoriji pojedinačna aksioma, a ne shema aksioma, zato što klasa w_1 igra ulogu formule $A(u,v)$.

Aksioma komprehenzije:

$\exists u \forall v (v \in u \Leftrightarrow V(v) \wedge A(v, u_1, \ldots u_n)^V)$,

gde je $A(v, u_1, \ldots, u_n)$ formula u kojoj se ne javlja promenljiva u.

Aksiomom komprehenzije se tvrdi da postoji klasa

$$x = \{y \mid V(y) \wedge A(y, x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Uslov $V(y)$ je ovde potreban da bi se izbegao Raslov paradoks.

U teoriji **NBG** postoje dve aksiome izbora: jedna je za skupove, a druga za klase. Prva je relativizacija aksiome izbora iz **ZFC** na **V**, a druga ima oblik aksiome izbora iz **ZFC**, ali se odnosi na klase.

Kao što se vidi, **NBG** ima konačan broj aksioma, za razliku od **ZFC**; sve aksiome teorije **NBG** su formule jezika prvoga reda.

Teorija skupova Morzea i Kelija (A. P. Morse i J. L. Kelley), koja se obeležava sa **MK**, razlikuje se od **ZFC** još liberalnijom primenom aksiome podskupa. I u ovoj teoriji se razmatraju klase, ali je ona i u pogledu skupova šira od **ZFC**. U njoj ima tvrđenja samo o skupovima koja se ne mogu dokazati u **ZFC**. U **MK** se može dokazati da je **ZFC** neprotivrečna teorija.

U **MK** aksioma komprehenzije ima sledeći oblik.

Aksioma komprehenzije: $\exists u \forall v (v \in u \Leftrightarrow V(v) \wedge A(v, u_1, \ldots u_n))$, gde je $A(v, u_1, \ldots, u_n)$ formula u kojoj se ne javlja promenljiva u.

I u teoriji **MK** postoje dve aksiome izbora, jedna za skupove a druga za klase.

Sve tri do sada pomenute teorije skupova izgrađene su na istim principima i svi dokazi koji su ovde navedeni mogu se lako prilagoditi drugim dvema teorijama.

Na sasvim drugim principima izgrađena je teorija Kvajna koja se obeležava sa **NF** (W. v. O. Quine).

DODATAK A: FILTERI U TEORIJI SKUPOVA

U logici i teoriji modela (u teorija ultraproizvoda), kao i u topologiji, važan pojam je pojam filtera. U klasičnoj logici svaka teorija je filter u Bulovoj algebri. Teorija filtera se može izložiti u teoriji skupova, gde je $\mathcal{P}(X)$ Bulova algebra.

DEFINICIJA 1. *Filter* $\mathfrak{F}$ u (na) skupu X je podskup skupa $\mathcal{P}(X)$ za koji su ispunjeni uslovi:

$F1$ ako je $Y \in \mathfrak{F}$ i $Y \subseteq Z$, onda je $Z \in \mathfrak{F}$;
$F2$ ako su $Y, Z \in \mathfrak{F}$, onda je $Y \cap Z \in \mathfrak{F}$;
$F3$ $X \in \mathfrak{F}$;
$F4$ $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.

Uslov $F2$ je ekvivalentan uslovu:

za svaki $n \in \omega$, ako su $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathfrak{F}$, onda je $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \in \mathfrak{F}$.

U $\emptyset$ nema filtera. Ako je $X \neq \emptyset$, onda je skup svih podskupova koji su nadskupovi nekog nepraznog $Y \subseteq X$ filter. $\{X\}$ je najmanji filter.

Ako je X beskonačan skup, onda je skup svih komplemenata konačnih podskupova filter.

DEFINICIJA 2. Za beskonačan skup X skup svih komplemenata konačnih podskupova skupa X je *prirodni filter skupa* X; ako je $X = \omega$, onda se prirodni filter zove *Frešeov filter* (Frechet).

Neka je $\mathfrak{F} = \bigcap\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ presek neprazne familije svih filtera na istom nepraznom skupu X; $\mathfrak{F}$ je filter.

DEFINICIJA 3. Neka su $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{G}$ filteri i neka je $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$); tada je $\mathfrak{F}$ (*pravi*) *potfilter* filtera $\mathfrak{G}$, a $\mathfrak{G}$ je (*pravi*) *natfilter* filtera $\mathfrak{F}$.

TEOREMA 1. *Neka je* $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$; *postoji filter* $\mathfrak{F}$ *za koji je* $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ *ako i samo ako je presek svake konačne familije elemenata skupa* $\mathfrak{G}$ *neprazan.*

DOKAZ. Ako postoji filter $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$, onda je presek svake konačne familije skupova iz $\mathfrak{G}$ neprazan, na osnovu definicije filtera.

Neka je $\mathfrak{H}$ skup svih podskupova skupa X koji sadrže presek bar jedne konačne familije elemenata skupa $\mathfrak{G}$. Neka je $A \in \mathfrak{H}$ i $A \subseteq B$; tada je B nadskup preseka bar jedne konačne familije elemenata skupa $\mathfrak{G}$, pa je $B \in \mathfrak{H}$. Neka su $A, B \in \mathfrak{H}$ i neka su C i D preseci konačnih familija elemenata skupa $\mathfrak{G}$ takvih da je $C \subseteq A$ i $D \subseteq B$; tada je $C \cap D$ takođe presek konačne familije elemenata skupa $\mathfrak{G}$, pa kako je $C \cap D \subseteq A \cap B$, sledi $A \cap B \in \mathfrak{H}$. Jasno je da je $X \in \mathfrak{H}$ i da je $\emptyset \notin \mathfrak{H}$.

Za skup $\mathfrak{G}$ se kaže da *generiše filter* $\mathfrak{H}$.

POSLEDICA. *Ako je $\mathfrak{F}$ filter u X i $Y \subseteq X$, onda postoji natfilter $\mathfrak{G}$ filtera $\mathfrak{F}$ za koji je $(\forall Z \in \mathfrak{F})\ (Y \in \mathfrak{G} \Leftrightarrow Y \cap Z \neq \emptyset)$.*

POSLEDICA. *Familija $\mathcal{F}$ filtera u nepraznom skupu X ima filter kao gornje ograničenje ako i samo ako za svaki konačan niz $\{\mathfrak{F}_i\}$, $1 \leq i \leq n$ elemenata $\mathcal{F}$ i bilo koji $A_i \in \mathfrak{F}_i$, $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$.*

TEOREMA 2. *Unija svakog lanca filtera na nepraznom skupu X je filter.*

TEOREMA 3. *Neka je $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$; tada postoji filter $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{B}$ takav da za svaki $Y \in \mathfrak{F}$ postoji $Z \in \mathfrak{B}$ sa osobinom $Z \subseteq Y$ ako i samo ako su ispunjeni ovi uslovi:*

(1) $(\forall U, V \in \mathfrak{B})\ (\exists W \in \mathfrak{B})\ (W \subseteq U \cap V)$;
(2) $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ i $\emptyset \notin \mathfrak{B}$.

DEFINICIJA 4. Skup $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ koji zadovoljava uslove (1) i (2) u teoremi 3 je *baza filtera* $\mathfrak{F}$ u istoj teoremi; jasno je da baza $\mathfrak{B}$ generiše filter $\mathfrak{F}$.

Dve baze su *ekvivalentne* ako i samo ako generišu isti filter.

Ako je $\mathfrak{G}$ skup koji generiše filter $\mathfrak{F}$, onda je skup svih preseka konačnih familija elemenata iz $\mathfrak{G}$ baza filtera $\mathfrak{F}$. Familija $\mathfrak{B}$ može biti baza samo jednog filtera (onog koji predstavlja familiju svih nadskupova elemenata familije $\mathfrak{B}$).

TEOREMA 4. *Podskup $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ filtera $\mathfrak{F}$ u X je baza filtera $\mathfrak{F}$ ako i samo ako $(\forall Y \in \mathfrak{F})\ (\exists Z \in \mathfrak{B})\ Z \subseteq Y$.*

TEOREMA 5. *Neka su* $\mathfrak{B}$ *i* $\mathfrak{B}'$ *baze filtera* $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{F}'$, *redom; tada je* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}' \Leftrightarrow (\forall Y \in \mathfrak{B})\,(\exists Z \in \mathfrak{B}')\; Z \subseteq Y$.

POSLEDICA. *Baze filtera* $\mathfrak{B}$ *i* $\mathfrak{B}'$ *su ekvivalentne ako i samo ako* $(\forall Y \in \mathfrak{B})\,(\exists Z \in \mathfrak{B}')\;\; Z \subseteq Y$ *i* $(\forall Z \in \mathfrak{B}')\,(\exists Y \in \mathfrak{B})\; Z \subseteq Y$.

DEFINICIJA 5. Neka je X skup parcijalno uređen relacijom $\leq$ tako da je ispunjen još i ovaj uslov:

$$(*) \qquad (\forall x, y \in X)\; \exists z\; (x \leq z \wedge y \leq z).$$

Neka je $A_x = \{y \mid x \leq y\}$ i $\mathfrak{F}{=}\{A_x \mid x \in X\}$; tada je $\mathfrak{F}$ filter. Ovakav filter se zove *filter sečenja skupa* A_x.

Frešeov filter je filter sečenja skupa ω, u odnosu na relaciju $\leq$.

DEFINICIJA 6. Neka je $\mathfrak{F}$ filter; tada je to skup parcijalno uređen relacijom $\subseteq$ tako da je ispunjen uslov $(*)$ definicije 5. Tada je za $A \in \mathfrak{F}$ *filter sečenja filtera* $\mathfrak{F}$ *u odnosu na* A skup $\mathfrak{G}$ svih B koji se sadrže u A.

DEFINICIJA 7. *Ultrafilter* u skupu X je filter $\mathfrak{U}$ za koji ne postoji pravi natfilter $\mathfrak{V}$ u X.

TEOREMA 6. *Za svaki filter* $\mathfrak{F}$ *u skupu* X *postoji ultrafilter* $\mathfrak{U}$ *u skupu* X *koji je natfilter filtera* $\mathfrak{F}$.

DOKAZ . Neka je S skup filtera u X koji sadrže filter $\mathfrak{F}$. Očigledno, $S \neq \emptyset$ i parcijalno je uređen relacijom $\subseteq$. Na osnovu teoreme 2, unija lanca elemenata S je filter za koji se lako proverava da je gornje ograničenje lanca. Prema Cornovoj lemi, S ima maksimalan element $\mathfrak{U}$, koji je ultrafilter.

TEOREMA 7. *Za svaki ultrafilter* $\mathfrak{U}$ *skupa* X *i za sve* $A, B \in \mathcal{P}(X)$, *ako je* $A \cup B \in \mathfrak{U}$, *onda je* $A \in \mathfrak{U}$ *ili je* $B \in \mathfrak{G}$.

DOKAZ. Neka je $A \cup B \in \mathfrak{U}$, $A, B \notin \mathfrak{U}$ i neka je $\mathfrak{G}$ skup svih $C \subseteq X$ za koje je $A \cup C \in \mathfrak{U}$. Lako se proverava da je $\mathfrak{G}$ filter i $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{G}$, pa $\mathfrak{U}$ nije ultrafilter, suprotno pretpostavci.

TEOREMA 8. *Neka je* $\mathfrak{G}$ *skup koji generiše filter* $\mathfrak{F}$; *ako za svaki* $Y \subseteq X$ *važi* $Y \in \mathfrak{G}$ *ili* $X \setminus Y \in \mathfrak{G}$, *onda je* $\mathfrak{F}$ *ultrafilter i pritom je* $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$.

DOKAZ. $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$, jer ako je $Y \in \mathfrak{F}$, onda $X \setminus Y \notin \mathfrak{F}$, pa imamo $X \setminus Y \notin \mathfrak{G}$ i $Y \in \mathfrak{G}$.

Zatim, ako je $\mathfrak{F}_1$ natfilter filtera $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ i $Y \in \mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$, imamo $Y \notin \mathfrak{G}$, i stoga $X \setminus Y \in \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Dakle, $Y \in \mathfrak{F}_1$, $X \setminus Y \in \mathfrak{F}_1$ i $Y \cap (X \setminus Y) = \emptyset$, u suprotnosti sa definicijom filtera.

Svi podskupovi skupa X koji sadrže element x čine ultrafilter.

TEOREMA 9. *Svaki filter na skupu* X *je presek svih ultrafiltera koji ga sadrže.*

DOKAZ. Jasno je da je filter $\mathfrak{F}$ podskup preseka svih ultrafiltera koji sadrže $\mathfrak{F}$. Neka je $Y \notin \mathfrak{F}$; tada za svaki $Z \in \mathfrak{F}$ važi $Z \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, pa prema 1 postoji filter $\mathfrak{F}'$ za koji je $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ i $X \setminus Y \in \mathfrak{F}'$. Ali, postoji ultrafilter $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{U}$; tada $Y \notin \mathfrak{U}$. Dakle, ako je $Y \in \mathfrak{U}$ za svaki ultrafilter koji sadrži $\mathfrak{F}$, onda je $Y \in \mathfrak{F}$.

DEFINICIJA 8. Neka je $Y \subseteq X$; *trag filtera* $\mathfrak{F}$ na skupu Y je skup $\mathfrak{F}_Y = \{Z \cap Y \mid Z \in \mathfrak{F}\}$.

TEOREMA 10. *Za svaki filter* $\mathfrak{F}$ *na* X *i* $Y \subseteq X$, *trag filtera* $\mathfrak{F}_Y$ *na* Y *je filter* (*u skupu* Y) *ako i samo* $(\forall Z \in \mathfrak{F})\ Y \cap Z \neq \emptyset$.

DEFINICIJA 9. Ako je trag filtera $\mathfrak{F}_Y$ filter, onda je $\mathfrak{F}_Y$ *filter indukovan filterom* $\mathfrak{F}$ u Y.

TEOREMA 11. *Ultrafilter* $\mathfrak{U}$ *u skupu* X *indukuje filter u skupu* $Y \subseteq X$ *ako i samo ako je* $Y \in \mathfrak{U}$ (*tada je* $\mathfrak{U}_Y$ *ultrafilter u* Y).

Ako je $\mathfrak{B}$ baza filtera u X i $f : X \to X'$ preslikavanje, onda je $f(\mathfrak{B})$ baza filtera u X', zbog toga što $Y \subseteq X$ i $Y \neq \emptyset$ povlače $f(Y) \neq \emptyset$ i $f(Y \cap Z) \subseteq f(Y) \cap f(Z)$. Ako je $\mathfrak{B}_1$ baza filtera $\mathfrak{F}_1$ i $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$, onda je $f(\mathfrak{B}_1)$ baza filtera $f(\mathfrak{F}_1)$ i $f(\mathfrak{F}) \subseteq f(\mathfrak{F}_1)$.

TEOREMA 12. *Ako je* $\mathfrak{B}$ *baza ultrafiltera u* X *i* $f : X \xrightarrow{na} X'$, *onda je* $f(\mathfrak{B})$ *baza ultrafiltera u* X'.

DOKAZ. Ako je $Y' \subseteq X'$ i $Z \subseteq f^{-1}(Y')$ za neki $Z \in \mathfrak{B}$, onda je $f(Z) \subseteq Y'$; ako je $Z \not\subseteq f^{-1}(Y')$ za svaki $Z \in \mathfrak{B}$, onda je

$$X \setminus f^{-1}(Y') = f^{-1}(X' \setminus Y') \text{ i } U \subseteq X \setminus f^{-1}(Y')$$

za neki $U \in \mathfrak{B}$, na osnovu teoreme 7. Teorema sledi na osnovu teoreme 8.

TEOREMA 13. *Neka je $\mathfrak{B}'$ baza filtera u X' i neka je $f : X \to X'$ preslikavanje; tada* (1) *$f^{-1}(\mathfrak{B}')$ je baza filtera u X ako i samo ako je $f^{-1}(Y') \neq \emptyset$ za svaki $Y' \in \mathfrak{B}'$;* (2) *ako je $f^{-1}(\mathfrak{B}')$ baza filtera u X, onda je $f(f^{-1}(\mathfrak{B}'))$ baza natfiltera filtera s bazom $\mathfrak{B}'$.*

Neka je $\{X_i | \, i \in I\}$ familija skupova, neka je $\mathfrak{B}_i$ baza filtera u X_i, neka je $X = \prod_{i \in I} X_i$, neka je $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ skup elemenata oblika $\prod_{i \in I} Y_i$, gde je $Y_i = X_i$ za sve osim za konačno mnogo indeksa i, i neka je $Y_i \in \mathfrak{B}_i$ ukoliko je $Y_i \neq X_i$. Budući da je $(\prod_{i \in I} Y_i) \cap (\prod_{i \in I} Z_i) = \prod_{i \in I}(Y_i \cap Z_i)$, proizlazi da je $\mathfrak{B}$ baza filtera u X.

DEFINICIJA 10. Neka je $\{x_n\}$, $n \in \omega$ beskonačan niz elemenata skupa X; *elementarni filter povezan s nizom* $\{x_n\}$ je skup svih $Y \subseteq X$ takvih da je $x_n \in Y$ za svaki, sa izuzetkom konačno mnogo n.

Elementarni filter povezan s nizom $\{x_n\}$ je Frešeov filter. Skupovi svih S_n onih elemenata x_p za koje je $p \geq n$ čine bazu elementarnog filtera povezanog s nizom $\{x_n\}$. Elementarni filter povezan s nekim podnizom niza $\{x_n\}$ je natfilter elementarnog filtera povezanog s nizom $\{x_n\}$.

TEOREMA 14. *Ako filter $\mathfrak{F}$ ima prebrojivu bazu, onda je $\mathfrak{F}$ presek svih svojih elementarnih natfiltera.*

DOKAZ. Prebrojiva baza filtera $\mathfrak{F}$ može se prikazati u obliku $\{Y_n | \, n \in \omega\}$. Skupovi $Z_n = \bigcap_{p=0}^{n} Y_p$ takođe čine bazu filtera, $Z_{n+1} \subseteq Z_n$ za svaki n. Neka je $z_n \in Z_n$; jasno je da je elementarni filter povezan s nizom $\{z_n\}$ natfilter filtera $\mathfrak{F}$. Dakle, presek $\mathfrak{J}$ elementarnih natfiltera filtera $\mathfrak{F}$ postoji i $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{J}$. Kada bi bilo $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{J}$, postojao bi skup $Y \in \mathfrak{J}$ za koji bi bilo

$$\bigcup_n Z_n \cap (X \setminus Y) = \emptyset$$

za svaki n. Izaberimo iz svakog U_n po element y_n (pomoću aksiome izbora); tada je elementarni filter $\mathfrak{F}_1$ povezan s nizom $\{y_n\}$ natfilter filtera $\mathfrak{F}$ i $Y \notin \mathfrak{F}$, suprotno definiciji filtera $\mathfrak{I}$.

Ako je $\mathfrak{F}$ filter s neprebrojivom bazom, $\mathfrak{F}$ može imati natfiltere koji imaju prebrojivu bazu. Neka je X neprebrojivo beskonačan skup; tada prirodni filter $\mathfrak{F}$ skupa X nema prebrojivu bazu, jer bi skup svih konačnih podskupova skupa X bio prebrojiv. Ali, svaki elementarni filter povezan s beskonačnim nizom međusobno različitih elemenata je natfilter filtera $\mathfrak{F}$ koji ima prebrojivu bazu.

DODATAK B: GRČKI ALFABET

α	alfa
β	beta
$\Gamma\ \gamma$	gama
$\Delta\ \delta$	delta
$\epsilon\ \varepsilon$	epsilon
ζ	zeta
η	eta
$\Theta\ \theta\ \vartheta$	teta
ι	jota
κ	kapa
$\Lambda\ \lambda$	lambda
μ	mi
ν	ni
$\Xi\ \xi$	ksi
o	omikron
$\Pi\ \pi\ \varpi$	pi
$\rho\ \varrho$	ro
$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	sigma
τ	tau
$\Upsilon\ \upsilon$	ipsilon
$\Phi\ \phi\ \varphi$	fi
χ	hi
$\Psi\ \psi$	psi
$\Omega\ \omega$	omega

DODATAK C: GOTICA (FRAKTURA)

𝔄 𝔞	A a	𝔑 𝔫	N n
𝔅 𝔟	B b	𝔒 𝔬	O o
ℭ 𝔠	C c	𝔓 𝔭	P p
𝔇 𝔡	D d	𝔔 𝔮	Q q
𝔈 𝔢	E e	ℜ 𝔯	R r
𝔉 𝔣	F f	𝔖 𝔰	S s
𝔊 𝔤	G g	𝔗 𝔱	T t
ℌ 𝔥	H h	𝔘 𝔲	U u
ℑ 𝔦	I i	𝔙 𝔳	V v
𝔍 𝔧	J j	𝔚 𝔴	W w
𝔎 𝔨	K k	𝔛 𝔵	X x
𝔏 𝔩	L l	𝔜 𝔶	Y y
𝔐 𝔪	M m	ℨ 𝔷	Z z

BIBLIOGRAFIJA

H. BACHMANN
Tranfinite Zahlen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, 1955.

J. L. BELL and M. MACHOVER
A Course in Mathematical Logic, Nort-Holland, Amsterdam, 1977.

G. CANTOR
Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Mathematische Annalen **96** (1895), 481-512; eng. prevod: *Contributions to the Founding of the theory of Transfinite Numbers*, Dover Publications, New York, 1915.

C.C. CHANG and H.J.KEISLER
Model Theory, North-Holand, Amsterdam-London, 1973.

A. CHURCH
Introduction to Mathematical Logic, Vol. 1, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1956.

P. COHEN
The independence of the continuum hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50** (1963), 1143-1148; **51** (1964) 105-110; *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966.

K. J. DEVLIN
Fundamentals of Contemporary Set Theory, Springer-Verlag-Berlin, 1979.

F. R. DRAKE
Set Theory: an Introduction to Large Cardinals, North-Holland, Amserdam, 1974.

A. A. FRAENKEL
Abstract Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1961.

A. A. FRAENKEL and Y. BAR-HILEL
Foundations of Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1958.

A. A. FRAENKEL, Y. BAR-HILEL and A. LEVY
Foundations of Set Theory, II izd. North-Holland, Amsterdam, 1973.

K. GÖDEL
Consistency proof for the generalized continuum hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **25** (1939), 220-224.
The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory, Ann. Math. Studies 3, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1940.

P. HALMOS
Naive Set Theory, Van Nostrand, New York, 1960.

G. HAUSDORFF
Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914; reprint Chelsea, New York, 1949.

SCE-TSEN HU
Elements of General Topology, Holden-Day, San Francisco, 1964; s-h prevod Miroslav Stefančić, Savremena administracija, Beograd, 1972.

T. JECH
Lectures in Set Theory, Lecture Notes in Math. 27, Springer-Verlag, Berlin 1971.

E. KAMKE
Mengenlehre, Sammlung Göschen No. 999, Berlin&Leipzig, 1928; *The Theory of Sets*, eng. prevod F. Bagemihl, Dover, 1950.

J.L. KELLEY
General Topology, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1955.

J. L. KRIVINE
Aksiomatička teorija skupova, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

K. KUNEN
Set Theory. An Introduction to Independence Proofs, North-Holland, Amsterdam, 1980.

K. KURATOWSKI and A. MOSTOWSKI
Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1967; ruski prevod: Mir, Moskva, 1969.

Đ. KUREPA
Teorija skupova, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

YU. I. MANIN
A Course in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin 1977.

E. MENDELSON
Intoduction to Mathematical Logic, Van Nostrand, Princeton, N.J. 1964.

J. D. MONK
Introduction to Set Theory, McGraw Hill, New York, 1969.

J. von NEUMANN
Die Axiomatisierung der Mengenlehre, Math. Zeitschrift, **27** (1928), 669-752.

B. ROTMAN and G. T. KNEEBONE
The Theory of Sets and Transfinite Numbers, Van Nostrand, New York, 1966.

H. RUBIN and J. RUBIN
Equivalents of the Axiom of Choice, North-Holland, Amsterdam, 1963

W. SIERPINSKI
Cardinal and Ordinal Numbers. P.A.N., Warsaw, 1958.

J.R. SHOENFIELD
Mathematical Logic, Addison-Wesley, Reading, Massachusets, 1967.

P. SUPPES
Axiomatic Set Theory, Van Nostrand, Princeton N.J., 1960.

R. L. VAUGHT
Set Theory, Birkhäuser, Boston, 1985.

INDEKS