Matematički vidici 8

Đorđe Mušicki

RAZVOJ ZAKONA O ODRŽANJU ENERGIJE U KLASIČNOJ MEHANICI

Matematički institut SANU

Издавач: Математички институт САНУ, Београд, Кнеза Михаила 36
Серија: Математички видици, књига 8
Рецензенти: др Теодор Атанацковић и др Драган Спасић,
Факултет техничких наука, Нови Сад
Примљено за штампу 23. маја 2011. године,
одлуком Научног већа Математичког института
За издавача: Богољуб Станковић, главни уредник серије
Технички уредник: Драган Благојевић
Штампа: "Академска издања", Земун
Штампање завршено децембра 2011.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

531.62
МУШИЦКИ, Ђорђе, 1921–
Razvoj zakona o održanju energije u klasičnoj mehanici : sa originalnim prikazom radova glavnih tvoraca ovog zakona i sa posebnim osvrtom na doprinos naših istraživača ovoj problematici / Đorđe Mušicki. – Beograd : Matematički institit SANU, 2011 (Zemun, : Akademska izdanja). – 61 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 200. – Abstract: Development of the Energy Conservation Law in Classical Mechanics. – Bibliografija: str. 60–61.

ISBN 978-86-80593-46-3

a) Mehanika
COBISS.SR-ID 188424972

Đorđe Mušicki

RAZVOJ ZAKONA O ODRŽANJU ENERGIJE U KLASIČNOJ MEHANICI

sa originalnim prikazom radova glavnih tvoraca ovog zakona i sa posebnim osvrtom na doprinos naših istraživača ovoj problematici

Đorđe Mušicki:

Razvoj zakona održanja energije u klasičnoj mehanici

Sažetak. U prvom delu ovog rada dat je pregled razvoja zakona održanja energije (tzv. žive sile), kao i odgovarajućih pojmova iz mehanike i neophodnih diferencijalnih jednačina kretanja. Pri tome je posebna pažnja posvećena prvim zakonima održanja energije (D. Bernuli), i Lagranževom i Hamiltonovom formalizmu, uključujući prikaz originalnih dokaza njihovih glavnih rezultata, počev od opšte formule dinamike, preko Lagranževih i Hamiltonovih jednačina do njihove formulacije zakona održanja energije.

U drugom delu nastavljen je pregled razvoja ovog zakona u generalisanim koordinatama, počev od prikaza originalnog dokaza energijskih relacija, čiji je ekvivalent Jakobijev integral energije, do teoreme Emi Neter za nalaženje integrala kretanja. Pri tome je učinjen poseban osvrt na doprinos naših istraživača ovoj problematici: generalisana Neterina teorema za nekonzervativne sisteme (B. Vujanović, Đ. Đukić i L. Cvetićanin), modifikacija mehanike reonomnih sistema (V. Vujičić) i prošireni Lagranžev formalizam za ovakve sisteme (Đ. Mušicki) sa odgovarajućom modifikacijom generalisane Neterine teoreme.

Đorđe Mušicki:

Development of the Energy Conservation Law in Classical Mechanics

Abstract. In the first part of this paper there is given a survey of the development of energy (so-called living force) conservation law, as well as of the corresponding concepts of mechanics and the necessary differential equations of motion. The special attention herein is dedicated to the first energy conservation laws (D. Bernoulli) and to the Lagrangian and Hamiltonian formalism, including the presentation of the original proofs of the principal results, starting from the general formula of the dynamics, through the Lagrangian and Hamiltonian equations up to their formulation of the energy conservation law.

The second part presents the development of this law in the generalized coordinates, from the presentation of the original proof of the energy relations, the equivalent of which is the Jacobi's energy integral, up to the Emmy Noether's theorem for finding the integrals of motion. A special review of the contribution of our investigators on those problems is given as follows: the generalized Noether's theorem for the nonconservative systems (B. Vujanović, Đ. Đukić and L. Cvetićanin), the modification of the mechanics of rheonomic systems (V. Vujičić) and the extended Lagrangian formalism for these systems (Đ. Mušicki) with the modification of the generalized Noether's theorem.

1. Pojam energije i prve formulacije zakona održanja

1.1. **Pojam energije.** Sama reč "energija" je grčkog porkla i potice od reči $\epsilon\nu$ = u i $\epsilon\rho\gamma o\nu$ = delo, rad, i prema sadašnjem shvatanju predstavlja 1. delatnosti, radinost, a 2. u fizici sposobnost za vršenje rada. Međutim, u klasičnoj filozofiji, npr. kod Aristotela ova reč označavala je stvarnost oblik, suštinu, za razliku od reči, koja je označavala mogućnost, materiju (Vujaklija: Recnih stranih reci i izraza).

Izraz "energija" potiče od grčke reči $\epsilon\nu\epsilon\rho\gamma\epsilon\iota\alpha$ ($\epsilon\nu$ = u, $\epsilon\rho\gamma o\nu$ = rad), koja je označavala aktivnost. U Aristotelovoj filozofiji [3] dobija određeno značenje kao korišćenje sposobnosti i mogućnosti da se iz mogućeg pređe u aktuelno stanje. Kasnije, u XIX veku ta reč se prihvata i u fizici i dobija smisao sposobnosti za vršenje rada.

U mehanici kroz ceo stari, srednji i veći deo novog veka ova reč uopšte nije korišćena, a nije ni bilo, uz retke izuzetke, nikakve ozbiljne analize ili formulacije energijskih zakona.

U prvim analizama o energijskim zakonima [1,2] termin "sila" je korišćen za pojam energije (npr. u mehanici živa sila = mv^2, docnije $\frac{1}{2}mv^2$, u elektrodinamici elektromotorna sila), sve do sredine XIX veka, za razliku od termina "ubrzavajuća ili dejstvujuća sila" po jedinici mase (tj. ubrzanje) u smislu Newton-ovog shvatanja pojma sile.

Prikažimo sad sistematski razvoj zakona održanja energije (odnosno žive sile po tadašnjoj terminologiji), kao i odgovarajućih pojmova iz mehanike i neophodnih diferencijalnih jednačina kretanja [1–6]. Pri tome je posebna pažnja posvećena Lagrange-evom i Hamilton-ovom formalizmu, uključujući prikaz originalnih dokaza njihovih glavnih rezultata, kao i primeni teoreme Emmy Noether u mehanici, sa posebnim osvrtom na doprinos naših istraživača ovoj problematici.

1.2. **Prvi zakoni održanja.** Prvi zakon ovog tipa bio je zakon održanja količine kretanja, koji je formulisao R. Descartes [1,2] 1664. godine, ali bez preciziranja pojma mase i u skalarnoj formulizaciji.

Prvi slučajevi zakona održanja energije [1,2] zapaženi su pri padu niz strmu ravan (G. Galilei, XVI vek) i pri sudaru elastičnih kugli (C. Huygens, XVII vek), kad je zapaženo da energija pri padu ne zavisi od nagiba strme ravni, a pri sudaru elastičnih kuglica ostaje nepromenjena.

1.3. **Zakon održanja žive sile.** Dok je Descartes smatrao kao meru kretanja – proizvod mase i brzine, G. Leibnitz [1,3] je smatrao da se kretanje određuje njegovom "silom", čija je mera – proizvod mase i kvadrata brzine. Tu veličinu mv^2 on je nazvao "živa sila" i 1695. godine formulisao zakon održanja žive sile u užem smislu (tj. bez ikakvih dodataka) i to je prvi zakon održanja energije. Ubrzo potom nastala je ozbiljna rasprava koji je od ova dva zakona osnovni zakon prirode.

Posle toga učinjen je niz primena ovog zakona održanja žive sile na razne probleme mehanike sistema čestica i hidromehanike, pre svega u radovima J. Bernoulli-a (1723) i D. Bernoulli-a [1,2] (1748), čija jednačina hidromehanike i nosi njegovo ime.

2. Promena žive sile i uvođenje pojma rada

2.1. **Neke osobine i zakon o promeni žive sile.** Značajan korak ka otkriću energijskih zakona učinjen je kad su otkrivene neke osobine žive sile, posebno zakonitosti pri njenoj promeni. Tako je D. Bernoulli [1,2] 1738. godine utvrdio ako se sistem materijalnih tačaka prevede iz položaja A u položaj B i potom vrati bilo kojim putem u početni položaj A, vrednost žive sile ovog sistema vratiće se na početnu vrednost. Odavde proizilazi da promena žive sile nekog sistema iz položaja A u položaj B ne zavisi od načina na koji se ovaj prelaz izvodi, već samo od vrednosti žive sile u početnom i krajnjem položaju.

Prvi kvantitativni zakon koji određuje čemu je jednaka promena žive sile dao je L. Euler [3] 1751. godine, uvodeći istovremeno pojam rada pod imenom "napor", koji je definisao kao proizvod sile i puta, pa je naveo da je živa sila jednaka negativnom naporu. Precizniju formulu ovog zakona dao je L. Carnot [1,2] 1783. godine, koji je otkrio da je promena žive sile neke materijalne tačke, na koju dejstvuje izvesna sila P na putu $ds = u\,dt$ pod uglom ξ za vreme dt jednaka

$$d\left(\frac{1}{2}mu^2\right) = P\cos\xi\,u\,dt, \tag{2.1}$$

a veličinu na desnoj strani nazvao je "moment delovanja" (moment d'activité).

2.2. **Uvođenje pojma rada i odgovarajuće terminologije.** Pojam rada navođen je i od drugih autora, skoro isključivo vezan za delovanje mašina i pod raznim imenina, kao što smo već i naveli. Pri tom razvoju G. Young [1,2] je 1808. godine uveo termin "energija" a J. Poncelet i G. Coriolis [1,2] su 1827. godine dali strogu definiciju rada i uveli sam termin "rad". Međutim, ti termini nisu lako prihvaćeni u širim naučnim krugovima i počeli su dosledno da se koriste tek od sredine XIX veka, kad je prihvaćena sadašnja uobičajena terminologija mehaničkih pojmova i zakona.

Sam pojam rada, prema savremenoj terminologiji i notaciji i koristeći pojam skalarnog proizvoda vektora, definiše se na sledeći način. Ako sila $\vec{F}$ dejstvuje na neku česticu duž puta $\vec{ds}$ pod uglom α, rad ove sile na tom putu definiše se kao proizvod komponente ove sile u pravcu puta i samog tog puta

$$d'A = F_s\,ds = F\cos\alpha\cdot ds = \vec{F}\cdot\vec{ds} = \vec{F}\cdot d\vec{r}, \tag{2.2}$$

gde je $\vec{r}$ vektor položaja napadne tačke ove sile na tu česticu . Ukupan rad ove sile duž konture puta L tada će biti dat krivolinijskim integralom te sile duž ove konture

$$A = \int_L \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{2.3}$$

i on u opštem slučaju zavisi od puta, a samo u slučaju konzervativnih sila, o kojima će biti reči u sledećem odeljku, neće zavisiti od puta. Ovaj izraz se neposredno generališe na slučaj sistema čestica, tako da je ukupan rad ovih sila koje dejstvuju na čestice sistema duž odgovarajućih kontura

$$A = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{L_\nu} \vec{F}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu \equiv \int_{L_\nu} \vec{F}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu \tag{2.4}$$

Pri tome smo uveli tzv. konvenciju o sabiranju, prema kojoj se podrazumeva sumiranje po indeksu koji se ponavlja, što ćemo pretpostavljati svuda u daljem izlaganju.

2.3. **Stroga formulacija teoreme o živoj sili (**savremenim jezikom**).** Ako se pođe od osnovne jednačine dinamike

$$m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.5}$$

gde je $\vec{F}_\nu$ aktivna sila, a $\vec{R}_\nu$ sila reakcije koje dejstvuju na ν-tu cesticu sistema, pa se obe strane pomnože sa $d\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu dt$ i izvrši sumiranje po indeksu ν, dobija se

$$m_\nu \vec{v}_\nu \cdot d\vec{v}_\nu = (\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu) \cdot d\vec{r}_\nu$$

odnosno

$$dT = d\left(\frac{1}{2} m_\nu v_\nu^2\right) = \left(\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu\right) \cdot d\vec{r}_\nu, \tag{2.6}$$

gde je T kinetička energija sistema.

Prema tome, promena žive sile, odnosno kinetičke energije sistema čestica jednaka je odgovarajućem radu svih sila koje dejstvuju na ovaj sistem, i to je poznata teorema o živoj sili (odnosno kinetičkoj energiji).

3. Uvođenje pojma funkcije sile i zakon održanja žive sile

3.1. **Pojam funkcije sile i potencijalna energija.** U XVIII veku pojavila se potreba za uvođenjem sila čije se komponente mogu prikazati u vidu parcijalnih izvoda neke funkcije po odgovarajućim koordinatama. Tako je A. Clairaut [3] 1743. godine pri ispitivanju uslova ravnoteže Zemlje kao hipotetične tečne kugle u kojoj dejstvuju gravitacione sile došao do zaključka da se ova ravnoteža može postići ako se komponente ovih sila mogu prikazati u ovom obliku, što su docnije koristili i drugi [1,2], npr. L. Euler (1761) i J. Lagrange (1777) u svojim radovima iz nebeske mehanike i hidromehanike.

Prema tome, komponente ovakvih sila mogu se prikazati u obliku (savremenim jezkom)

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{3.1}$$

i tako uvedena funkcija U nazvana je funkcija sile, pa se odgovarajuće sile nazivaju (današnjom terminologijom) potencijalne sile, a ukoliko ova funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena konzervativne sile. U vektorskoj formulaciji ovakve sile imaju oblik

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U \quad \text{ili} \quad \vec{F} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \tag{3.2}$$

pri čemu napominjemo da ovaj poslednji simbol ne znači izvod skalara po vektoru, već samo označava vektor sa navedenim komponentama.

Znatno kasnije, tek sredinom XIX veka, uveden je pojam potencijalne energije kao negativne vrednosti funkcije sile, čime se menja i oblik odgovarajućih potencijalnih sila

$$\Pi_{(x_\alpha, t)} = -U_{(x_\alpha, t)} \Rightarrow \vec{F} = -\operatorname{grad} \Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}}, \tag{3.3}$$

gde je $x_\alpha = (x, y, z)$. Ovaj pojam pominjan je i ranije sa raznim imenima [1,2], kao "sila padanja" u slučaju Zemljine teže (R. Mayer, 1845) ili kao "naponska sila" za privlačne i odbojne sile (H. Helmholtz, 1847), ali bez jasnog fizičkog smisla. Sam fizički smisao ovog pojma može se sagledati ako relaciju (3.3) napišemo u obliku rešenja po veličini Π

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} = -d\Pi \quad \Rightarrow \quad \Pi_{(M)} = -\int_{M_0}^{M} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{3.4}$$

odakle se vidi da je potencijalna energija neke čestice u položaju M jednaka radu koji treba izvršiti protiv sile koja dejstvuje na tu česticu da bi se ona dovela iz polozaja M_0, gde smo uzeli da je $\Pi = 0$, u posmatrani položaj M, međutim ovako izražen smisao potencijalne energije dugo nije shvaćen.

Prvi koji je uveo korektnu definiciju ovog pojma kao i sam termin potencijalne energije bio je W. Rankin $[1, 2]$ (1855). On je sve vrste energije podelio u dve klase: to su "potencijalna ili latentna energija" i "aktuelna ili zapažljiva energija", pri čemu su ovom podelom uključene i vrste energije van mehanike. Ubrzo potom, W. Thomson $[1, 2]$ je uveo i pojam "kinetička energija" i od tog vremena, sredine XIX veka, kao što smo već istakli kod pojma rada, prihvaćena je danas uobičajna terminologija u mehanici.

3.2. **Veza između rada i funkcije sile** (savremenim jezikom)**.** Ako su sve sile koje deluju na neku česticu potencijalne, njihov rad na putu $\vec{ds} = d\vec{r}$ biće

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

a ako su ove sile konzervativne, izraz na desnoj strani biće totalni diferencijal

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dU = -d\Pi \tag{3.5}$$

Ako imamo sistem čestica sa koordinatama $x_{\nu\alpha} = (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, ove rezultate možemo neposredno uopštiti. U tom slučaju komponente potencijalnih sila imaće oblik

$$F_{\nu\alpha} = \frac{\partial U}{\partial x_{\nu\alpha}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_{\nu\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{3.6}$$

a rad svih takvih sila koje dejstvuju na ovaj sistem biće

$$d'A = \vec{F}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu = dU = -d\Pi, \tag{3.7}$$

gde sad funkcije U i Π zavise od svih koordinata čestica sistema. Tada je ukupan rad svih sila koje dejstvuju na čestice ovog sistema duž odgovarajućih kontura prema (2.4)

$$A = \int_{L_\nu} \vec{F}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu = \int_1^2 dU = U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{3.8}$$

gde su U_1 i Π_1 vrednosti funkcije sila i potencijalne energije u početnom položaju, a U_2 i Π_2 njihove vrednosti u krajnjem položaju sistema.

Prema tome, rad svih konzervativnih sila koje dejstvuju na čestice sistema ne zavisi od puta i jednak je razlici vrednosti funkcije sile odnosno potencijalne energije sa suprotnim znakom u krajnjem i početnom položaju sistema.

3.3. **Zakon održanja žive sile, odnosno energije (D. Bernoulli, 1748)** (sa originalnim dokazom i oznakama)**.** Ovaj zakon održanja žive sile u širem smislu (tj. zakon održanja energije), u kome sem žive sile učestvuje još jedna veličina, prvi je formulisao D. Bernoulli [1, 2] u svojoj monografiji "Hidromehanika ili zapisi o silama i kretanjima tečnosti" (1738, na latinskom). Ovde je dao rešenja niza problema iz hidromehanike, primenjujući zakon održanja žive sile, shvaćen kao "uspostavljanje jednakosti između aktuelnog spuštanja žive sile i njenog potencijalnog podizanja", što je ustvari značilo uspostavljanje izvesnog energijskog bilansa u posmatranom problemu, ali bez matematičke formulacije ovog zakona održanja. Njemu se pripisuje i jednačina za stacionarno kretanje idealne nestišljive tečnosti u polju Zemljine teže, ali je verovatnije da je on nije formulisao u danas poznatom obliku, već da se samo neki od njegovih rezultata mogu na izvestan, indirektni način (pošto sam pritisak tečnosti nikad ne figuriše eksplicitno u njegovim radovima) smatrati ekvivalentnim ovoj jednačini. Ona bi se sadašnjim jezikom i oznakama prikazala u obliku

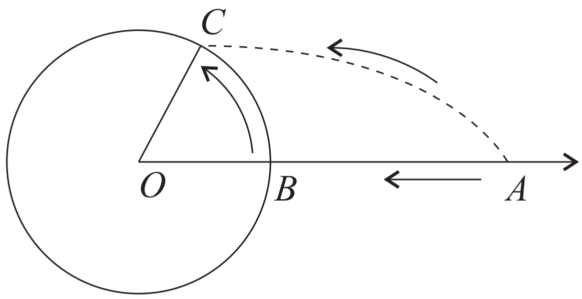
$$\frac{1}{2}v^2 + gh + \frac{p}{\rho} = \text{const}\,. \tag{3.9}$$

gde su $\vec{v}$ i h brzina i visina uočenog delića tečnosti, p pritisak tečnosti na tom mestu, a ρ gustina tečnosti i ova jednačina je izražavala zakon održanja žive sile po jedinici mase duž ma koje strujne linije.

Nekoliko godina kasnije D. Bernoulli je u svom radu "Zapažanja o opštem shvatanju zakona održanja živih sila uzetom u opštem smislu" (1748/50, na francuskom) proširio ovaj zakon i na taj način dobio izvesne opšte zakone održanja žive sile u obliku bliskom sadašnjoj formulaciji zakona održanja energije. Takva formulacija ovog zakona odnosila se na kretanje tela pod uticajem privlačnih centralnih sila i zasnivala se na zameni njihovog realnog kretanja jednim zamišljenim kretanjem svakog od njih duž prave linije ka centru privlačenja i potom duž dela kružnice oko ovog centra. Polazeći od toga da se živa sila ne menja pri kretanju duž ovih kružnica, primenjuje se zakon njenog održanja samo duž ovih pravih u obliku

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + \cdots = 2\int \xi_1(x)\,dx + 2\int \xi_2(x)\,dx + \cdots\,, \tag{3.10}$$

gde je $\xi_i(x)$ ubrzavajuća sila koja dejstvuje na i-to telo i gde se u integracionoj konstanti sadrže početni uslovi. Pri tome je korišćena od njega dokazana osobina da promena žive sile ovih tela ne zavisi od oblika putanje između početnog i krajnjeg položaja svakog od njih (v. odeljak 3.1), što i opravdava zamenu njihovog realnog kretanja gore navedenim zamišljenim kretanjem. Ovako formulisan zakon održanja žive sile (3.10), uz navedenu zamenu realnog kretanja, predstavljao je prvi oblik zakona održanja energije u mehanici, sličan obliku $T = U + \text{const}$, gde je U funkcija sile.



Sl. 1

Ovakva formulacija zakona održanja žive sile u navedenom radu primenjena je na nekoliko problema i u jednom od njih razmatrano je kretanje nekog malog tela mase m pod uticajem privlačne centralne sile oblika $\xi = \xi(r)$, koja potiče od nekog većeg nepomičnog tela mase M u tački O (sl. 1). Neka je početni položaj ovog pokretnog tela u tački A, a njegov krajnji položaj C na rastojanju r od centra privlačenja O. Pri tome je ovo realno kretanje, prikazano na slici tačkastom putanjom, zamenjeno zamišljenim kretanjem duž prave AO ka centru privlačenja do tačke B na rastojanju r od tačke O, a potom duž kružnice sa centrom u tački O do konačnog položaja C. U opštem slučaju zakon održanja žive sile dat je Bernoulli-evim oblikom ovog zakona (3.10) za $\xi = \xi(r)$, a potom je razmatran specijalni slučaj $\xi(r) = -b^2/r^2$, koji je u saglasnosti sa Newton-ovim zakonom gravitacije ako stavimo $b^2 = GmM$ (G = univerzalna gravitaciona konstanta). U ovom slučaju primena ovog zakna (3.10) daje

$$mv^2 = -2 \int \frac{b^2}{x^2}\, dx + \text{const} = 2 \left(\frac{b^2}{x}\right)_{x=r} + \text{const},$$

odnosno, posle deobe sa 2

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{b^2}{r} + \text{const} \tag{3.11}$$

To je odgovarajući zakon održanja žive sile, odakle neposredno vidimo da je funkcija sile u ovom slučaju

$$U = \frac{b^2}{r}, \tag{3.12}$$

u saglasnosti sa današnjim rezultatima u ovom problemu ako stavimo $b^2 = GmM$.

Do prvog oblika zakona održanja žive sile može se jednostavnije doći na osnovu Bernoulli-evog otkrića da promena žive sile sistema malih tela pri njihovom kretanju pod uticajem ma kakve privlačne centralne sile zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja ovih tela. To se matematički može prikazati sa sadašnjim oznakama kao

$$T_2 - T_1 = U_2 - U_1, \tag{3.13}$$

gde je T dvostruka vrednost žive sile (tj. kinetička energija) ovog sistema tela, a U_1 i U_2 njene početne i krajnje vrednoti. Ako se ove vrednosti shvate kao vrednosti neke funkcije položaja $U(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ – funkcije sile i prethodna relacija napiše u obliku

$$T_2 - U_2 = T_2 - U_1 = \text{const}, \tag{3.14}$$

to bi bila prva formulacija zakona održanja žive sile (tj. energije), mada koliko je nama poznato, sam Bernoulli nikad nije napisao zakon održanja žive sile u ovom obliku.

Međutim, moramo naglasiti da se zakon održanja žive sile u ono vreme nije ni mogao shvatiti kao zakon održanja energije u današnjem smislu, jer funkcija sile tada nije imala nikakav mehanički smisao, a ni sam pojam ni termin energije još nisu postojali u današnjem smislu, te je ovaj zakon održanja samo predstavljao prošireni zakon održanja žive sile bez nekog mehaničkog smisla.

Savremenim jezikom. Prema teoremi o živoj sili (2.6) u opštem slučaju je

$$dT = d\left(\frac{1}{2}m_\nu v_\nu^2\right) = (\vec{F}_\nu = \vec{R}_\nu) \cdot d\vec{r}_\nu \tag{3.15}$$

a rad svih konzervativnih sila prema (3.7) biće

$$d'A = \vec{F}_\nu^{\text{konz}} \cdot d\vec{r}_\nu = dU \tag{3.16}$$

Odavde proizilazi, ako nema nepotencijalnih sila ni sila reakcije ili je bar rad ovih poslednjih jednak nuli ($\vec{R}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu = 0$), biće

$$dT = \vec{F}_\nu^{\text{konz}} \cdot d\vec{r}_\nu = dU,$$

a otuda

$$d(T - U) = 0 \quad \Rightarrow \quad T - U = \text{const}, \tag{3.17}$$

što je ekvivalentno sa (3.13), a uvođenjem pojma potencijalne energije (3.3) može se napisati i u uobičajenom obliku

$$E = T + \Pi = \text{const}\,. \tag{3.18}$$

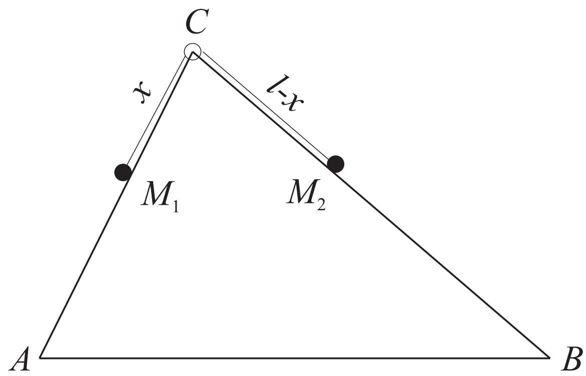
Prema tome, ako je kretanje sistema čestica slobodno i sve sile koje dejstvuju na ovaj sistem konzervativne, ili ako je kretanje ovog sistema prinudno, ali takvo da sem navedenog uslova dejstvuju samo sile reakcije koje ne vrše nikakav rad, važiće zakon održanja energije u obliku $E = T + \Pi = \text{const}$.

4. Lagrange-ev formalizam, Lagrange-eve jednačine i zakon održanja žive sile (J. Lagrange, 1788)

4.1. **Uvođenje metoda generalisanih koordinata.** Ovaj metod uveo je J. Lagrange u svojoj "Analitičkoj mehanici" [11], objavljenoj 1788. godine (na francuskom), pri čemu on sam ne upotrebljava ovu terminologiju kao ni danas uobičajne oznake. Prema današnjoj terminologiji pod generalisanim koordinatama se podrazumeva ma kakav skup nezavisnih veličina $(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ koji pri datim uslovima potpuno određuje položaj posmatranog sistema čestica. Pri tome se uvodi i pojam broja stepena slobode, a to je broj nezavisnih generalisanih koordinata, pa ako sa N označimo broj čestica, a sa k broj veza oblika $f_\mu(x_{\nu\alpha}, t) = 0$, broj stepeni slobode biće

$$n = 3N - k. \tag{4.1}$$

Sam Lagrange u navedenoj monografiji ovako uvedene generalisane koordinate nije nazvao nekim posebnim imenom, a W. Hamilton ih je nazvao "oznake položaja" (marks of position). Suština ovog metoda je da se položaj posmatranog sistema čestica odredi najmanjim brojem najpogodnije izabranih veličina, čime se nalaženje rešenja diferencijalnih jednačina kretanja maksimalno uprošćava.



Sl. 2

Primer. Navedimo kao primer sistem od dve kuglice na dvema pravama na dvostrukoj strmoj ravni (v. sl. 2), koje su vezane nerastegljivim kanapom dužine l. U ovom slučaju imamo pet veza (dve jednačine prave AC, dve jednačine prave BC i uslov $M_1C + CM_2 = l$), pa je broj stepeni slobode $n = 3N - k = 3 \cdot 2 - 5 = 1$, a za generalisanu koordinatu možemo uzeti $q = x = M_1C$, jer je tom veličinom potpuno određen položaj obeju kuglica.

4.2. **Opšta formula dinamike sistema (**sa originalnim dokazom i oznakama**).** Osnovna ideja Lagrange-evog izlaganja dinamike u navedenoj Analitičkoj mehanici sastoji se u tome da se na čelo mehanike stavi neki pogodno izabran opšti princip, iz koga se može dobiti celokupna mehanika. Kao takav princip izabran je d'Alembert-ov princip mogućih pomeranja [11, 7] proširen na dinamiku, a on se prema sadašnjoj interpretaciji ovog principa zasniva u sledećem. Ako osnovnu jednačinu dinamike za jednu česticu napišemo u obliku $\vec{F} + (-m\vec{a}) = 0$, ova jednačina se formalno može interpretirati kao "ravnoteža" između aktivne sile $\vec{F}$ i tzv. sile inercije $-m\vec{a}$ (ovaj pojam tada nije bio poznat, ne brkati sa inercijalnom silom), pa dejstva ovih dveju sila pri ma kakvim mogućim pomeranjima čestica moraju biti uravnotežena. Langrange ovom principu daje malo drukčije obrazloženje, ali u suštini ekvivalentno ovome i formuliše ga na sledeći način.

Posmatra se sistem tela, raspoređenih na proizvoljan način, koja se nalaze pod uticajem izvesnih ubrzavajućih sila (to je tadašnji termin za sile po jedinici mase, tj. za ubrzanja). Ovde se pod pojmom "telo" očigledno podrazumeva malo telo ("telce") u današnjem smislu pojma čestica (partikula), gde se zanemaruju njegove dimenzije i njegovo unutrašnje kretanje. Neka je m masa jednog od tih tela, koje se može smatrati tačkastim, i neka su δx, δy i δz moguća elementarna pomeranja uočenog tačkastog tela iz položaja (x, y, z) u pravcima koordinatnih osa pod uticajem sila md^2x/dt^2, md^2y/dt^2 i md^2z/dt^2, a $-\delta p$, $-\delta q$, $-\delta r$, ... moguća elementarna pomeranja nasuprot delovanju ubrzavajućih sila $P, Q, R, ...$ po jedinici mase. Tada ukupna suma momenata delovanja (to je tadašnji termin za rad) prvih sila

$$S\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + m\frac{d^2y}{dt^2}\delta y + m\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

mora biti uravnotežena sa ukupnom sumom momenata delovanja ovih drugih sila

$$-S(mP\delta p + mQ\delta q + mR\delta r + \cdots),$$

odnosno mora biti

$$Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) + Sm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots) = 0 \tag{4.2}$$

Simbol S označava znak za sumiranje, i to tako ako je diskretno igra ulogu simbola $\sum$ (kao u ovom slučaju), a ako je kontinuirano prelazi u određeni integral, dok je simbol $\int$ zadržan samo za neodređene integrale. Ovu relaciju Lagrange je nazvao opšta formula dinamike sistema i ona predstavlja polaznu tačku celokupne mehanike, iz koje su dobijena opšta svojstva kretanja (između ostalih zakon održanja žive sile), diferencijalne jednačine kretanja, kao i varijacione aproksimativne metode u mehanici. Pri tome je prećutno pretpostavljeno da nema nepotencijalnih sila (taj pojam kao ni termin potencijalne sile tada nisu ni postojali).

Savremenim jezikom: Da bi se mogla porediti Lagrange-eva opšta formula dinamike sa sadašnjom formulacijom d'Alembert–Lagrange-evog principa, izaberimo za ubrzavajuće sile $P, Q, R, ...$ komponente aktivne sile $\vec{F}$ u pravcu koordinatnih osa, koje označimo sa X, Y, Z, a odgovarajuća moguća pomeranja $\delta p, \delta q, \delta r$, ... usmerimo u smeru delovanja ovih sila, pa će biti $\delta p = -\delta x$, $\delta q = -\delta y$, $\delta r = -\delta z$. Tada relacija (4.2) dobija vid

$$Sm\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z\right] = 0, \tag{4.3}$$

a odavde vidimo da je formulacija Lagrange-eve opšte formule dinamike u potpunoj saglasnosti sa d'Alembert–Lagrange-evim principom (v. npr. [7])

$$(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu) \cdot \delta \vec{r}_\nu = 0, \tag{4.4}$$

uzetim sa suprotnim znakom, pri čemu sila $\vec{F}_\nu$ odgovara skupu (mX, mY, mZ). Pri tome ipak postoji jedna razlika: u sadašnjoj formulaciji mehanike virtuelna pomeranja ne predstavljaju moguća, već razlike dva moguća pomeranja.

Ovaj princip obično se dokazuje polazeći od osnovne jednacine dinamike

$$m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu^{pot} + \vec{F}_\nu^{*} + \vec{R}_\nu^{id} \quad (n = 1, 2, ..., N) \tag{4.5}$$

gde smo sa $\vec{F}^*$ označili sve nepotencijalne sile, uključujući i neidealne sile reakcije (npr. sile trenja). Ako se ova relacija skalarno pomnoži sa $\delta \vec{r}_\nu$, i izvrši sumiranje po indeksu ν, dobija se

$$\left(\vec{F}_\nu^{pot} + \vec{F}_\nu^{*} - m_\nu \vec{a}_\nu\right) \cdot \delta \vec{r}_\nu = -\vec{R}_\nu^{id} \cdot \vec{\delta r}_\nu,$$

a pošto je $\vec{R}_\nu^{id} \cdot \vec{\delta r}_\nu = 0$, prema definiciji idealnih sila reakcije, otpada član na desnoj strani i dobija se gore navedena formulacija ovog principa (4.4)

4.3. **Lagrange-eve diferencijalne jednačine kretanja (**sa originalnim dokazom i oznakama**).** Lagrange je dobio svoje diferencijalne jednačine kretanja u generalisanim koordinatama [11] pomoću svoje opšte formule dinamike (4.2). Pri tome se pošlo od identičnosti

$$d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - dx\delta dx - dy\delta dy - dz\delta dz, \tag{4.6}$$

pa se umesto koordinata tela x, y, z uvode nove nezavisno promenljive $\xi, \psi, \varphi, \dots$ (to su ustvari generalisane koordinate, mada sam Lagrange to ne ističe, niti šta je cilj uvođenja ovih novih promenljivih)

$$x = x(\xi, \psi, \varphi, \dots), \quad y = y(\xi, \psi, \varphi, \dots), \quad z = z(\xi, \psi, \varphi, \dots) \tag{4.7}$$

Posle niza transformacija, s ciljem da se desna strana gornje identičnosti izrazi pomoću žive sile, dobija se da je prvi član opšte formule dinamike

$$\begin{aligned} & Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) \\ &= \left(d\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi}\right)\delta\xi + \left(d\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi}\right)\delta\psi + \left(d\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi}\right)\delta\varphi + \cdots, \end{aligned} \tag{4.8}$$

gde je je T polovina žive sile sistema

$$T = \frac{1}{2}Sm\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) \tag{4.9}$$

Ovde simbol d označava izvod po vremenu d/dt, a simbolima δ/δ je označen parcijalni izvod, tako da npr. izraz u prvoj zagradi u sadašnjoj simbolici bi izgledao ovako

$$d\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi},$$

pri čemu je tačkom označen izvod po vremenu.

Što se tiče drugog člana u formuli (4.2), Lagrange je pretpostavio da su ubrzavajuće sile takve da je izraz u zagradi totalna varijacija neke funkcije

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots = \delta\Pi, \tag{4.10}$$

čime su ustvari uvedene potencijalne sile. Ako se i ova funkcija izrazi pomoću nezavisno promenljivih $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ opšta formula dinamike (4.2) dobija vid

$$\begin{aligned} &\left(d\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi}\right)\delta\xi + \left(d\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi}\right)\delta\psi \\ &\qquad + \left(d\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} + \frac{\delta V}{\delta \varphi}\right)\delta\varphi + \cdots = 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

gde je, imajući u vidu (4.10)

$$V = Sm\Pi = Sm\int(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \cdots) \tag{4.12}$$

Pošto su sve ove varijacije proizvoljne i nezavisne, ova relacija biće zadovoljna samo ako su svi njeni koeficijenti jednaki nuli

$$d\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi} = 0, \quad d\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi} = 0, \quad d\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} + \frac{\delta V}{\delta \varphi} = 0, \ldots \tag{4.13}$$

i to su diferencijane jednačine kretanja u generalisanim koordinatama, koje su docnije nazvane Lagrange-eve jednačine.

Savremenim jezikom: Ove jednačine prema današnjim oznakama zajedno možemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial V}{\partial q^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.14}$$

i one se mogu dobiti iz d'Alembert–Lagrange-evog principa (4.4) na analogan, ali jednostavniji način [7, 8]. Naime da bi se ovaj princip preveo u generalisane koordinate, treba staviti $\delta\vec{r}_\nu = (\partial\vec{r}_\nu/\partial q^i)\delta q^i$ i koristiti sledeće dve pomoćne relacije, jedna potiče od

$$\vec{v}_\nu = \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial\dot{q}^i} = \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i}, \tag{4.15}$$

a druga se zasniva na izmeni redosleda operacija

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial q^i} \tag{4.16}$$

Tada se poslednji član u d'Alembert–Lagrange-evom principu može transformisati na sledeći način

$$m_\nu\dot{\vec{v}}_\nu\cdot\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\left(m_\nu\vec{v}_\nu\cdot\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i}\right) - m_\nu\vec{v}_\nu\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\left(m_\nu\vec{v}_\nu\cdot\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial\dot{q}^i}\right) - m_\nu\vec{v}_\nu\cdot\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial q^i},$$

odnosno

$$m_\nu\vec{a}_\nu\cdot\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} \tag{4.17}$$

Na taj način ovaj princip dobija vid

$$(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}\delta q^i = \left(\vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i = 0$$

ili konciznije

$$\left(Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial T}{\partial q^i}\right)\delta q^i = 0, \tag{4.18}$$

gde su veličine Q_i, tzv. generalisane sile date sa

$$Q_i = \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.19}$$

Iz relacije (4.15) zbog proizvoljnosti i nezavisnosti varijacija δq^i neposredno proizlazi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.20}$$

i to su opšte Lagrange-eve jednačine, a ako su ove sile potencijalne, stavljajući $Q_i = -\partial V/\partial q^i$, ove jednačine prelaze u jednačine (4.14). Ako se pređe sa funkcije V na tada uobičajnu funkciju sile $U = -V$ i uvede zbir polovine žive sile i funkcije sile $P = T + U$, ove Lagrange-eve jednačine (4.14) mogu se napisati u konciznijem obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial P}{\partial q^i} = 0, \quad P = T + U \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.21}$$

4.4. **Savremeni oblik Lagrange-evih jednačina.** Ovako uvedena funkcija P kasnije je nazvana Lagrange-eva funkcija ili lagranžijan (koristi se i termin kinetički potencijal) i uobičajno je da se u počast Lagrange-u označava sa L, prvim slovom njegovog imena

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = T + U = T - \Pi. \tag{4.22}$$

Ako imamo i nepotencijalne sile (što je u Lagrange-evoj Analitičkoj mehanici prećutno pretpostavljeno da ih nema), razlaganjem svih aktivnih sila na potencijalne i nepotencijalne $Q_i = -\partial \Pi/\partial q^i + Q_i^*$ gde su ove poslednje označene sa Q_i^*, opšte Lagrange-eve jendnačine (4.20) dobijaju vid

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.23}$$

koje se za $Q_i^* = 0$ poklapaju sa jednačinama (4.21). Za prirodne mehaničke sisteme ove jednačine predstavljaju sistem diferencijalnih jednačina drugog reda, linearnih po $\ddot{q}^i$, čijim rešavanjem dobijamo generalisane koordinate kao funkcije vremena $q^i = q^i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Navedimo još da postoje i uopštene potencijalne sile, koje zavise i od brzine čestica na koje dejstvuju [7]. One se definišu kao generalisane sile oblika

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.24}$$

gde je V tzv. uopšteni potencijal, koji zavisi i od brzina, a zbog uslova da u mehanici nema sila koje zavise od ubrzanja čestica ovaj potencijal može samo linearno zavisiti od generalisanih brzina $\dot{q}^i$

$$V = a_i \dot{q}^i + \Pi(q^i, t), \tag{4.25}$$

gde je nezavisan član potencijalna energija sistema. Odgovarajuće Lagrange-eve jednačine imaju isti oblik kao i u slučaju običnih potencijalnih sila (4.23), samo je u ovom slučaju Lagrange-eva funkcija razlika između kinetičke energije i uopštenog potencijala

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V \tag{4.26}$$

Tipični predstavnik ovakvih sila je tzv. Lorentz-ova sila, kojom elektromagnetno polje dejstvuje na neku česticu sa naelektrisanjem e

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}, \tag{4.27}$$

gde je $\vec{E}$ jačina električnog, $\vec{B}$ jačina magnetnog polja (indukcije), a $\vec{v}$ brzina naelekrisane čestice na koju ova sila dejstvuje, pri čemu jačine ovih polja moraju biti izražene pomoću tzv. elektromagnetnih potencijala. Ovakve sile uveo je H. Weber u elektrodinamici, ali ih je precizno definisao i ispitao tek E. Schering 1873. godine.

4.5. **Lagrange-eva formulacija zakona održanja žive sile (**sa originalnim dokazom i oznakama**).** Lagrange [11] je i ovaj zakon dobio polazeći od opšte formule dinamike sistema (4.2) i to na sledeći način. Ako uslovi ravnoteže između mogućih pomeranja tela pod uticajem navedenih sila ne zavise od vremena, varijacije δx, δy i δz, kao i δp, δq, δr, ... možemo zameniti odgovarajućim diferencijalima, koji predstavljaju njihove realne promene u vremenskom intervalu $(t, t + dt)$, pa ova opšta formula dinamike dobija oblik

$$Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) + Sm(Pdx + Qdy + Rdz + \cdots) = 0, \tag{4.28}$$

Lagrange je pretpostavio da su ubrzavajuće sile takve da je izraz u poslednjoj zagradi totalni diferencijal neke funkcije

$$Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = d\Pi \tag{4.29}$$

Time je ustvari pretpostavio da ubrzavajuće sile imaju funkciju sile, koja ne zavisi eksplicitno od vremena, što bi današnjim jezikom značilo da su ove sile konzervativne. Tada se prethodna relacija (4.26) uprošćava

$$Sm\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) + Sm\ d\Pi = 0 \tag{4.30}$$

a ako se prvi član transformiše, stavljajući $dx = (dx/dt)dt$ i slično za dy i dz, imaćemo

$$Sm\left[\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}d\left(\frac{dz}{dt}\right) + d\Pi\right] = 0,$$

pa se ova relacija može neposredno integraliti, čime se dobija

$$Sm\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) + \Pi\right] = H = \text{const}, \tag{4.31}$$

što bismo u sadašnjem načinu pisanja prikazali ovako

$$\frac{1}{2}m_\nu v_\nu^2 + \Pi = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \Pi(x_{\nu\alpha}) = \text{const} \tag{4.32}$$

Na ovaj način dobijena je formulacija zakona održanja žive sile, odnosno energije, kako je prikazao Lagrange u svojoj Analitičkoj mehanici, ali bez jasnog fizičkog smisla potencijalne energije (taj pojam i termin tada nisu ni postojali) i u pravouglim, a ne u generalisanim koordinatama, koje je sam Lagrange uveo, mada više implicitno. Međutim, sam Lagrange ovom zakonu održanja nije davao preveliki značaj, on ga je samo smatrao kao jednu posledicu opštih postavki mehanike.

4.6. **Primene ovog zakona održanja žive sile.** Lagrange [11] je primenuo ovaj zakon odrzanja na više problema, npr. na sistem tela na koje deluje neko mnogo veće telo, pa prelazeći na koordinatni sistem vezan za težište ovih tela pokazao da se pri tome transformiše u

$$Sm\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}d\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}d\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}d\zeta\right) + Sm(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta) = 0, \tag{4.33}$$

gde su (ξ, η, ζ) koordinate uočenog tela u odnosu na težište, a (X, Y, Z) komponente ubrzavajuće sile koje dejstvuju na to telo. Ova relacija biće integrabilna, tj. važiće zakon održanja žive sile samo u slučaju kad su sile koje dejstvuju na ovo telo usmerene ka većem telu i srazmerne rastojanju od njega. U tom slučaju pri integraciji otpada poslednji član, pa se dobija da u tom koordinatnom sistemu važi zakon održanja žive sile u obliku

$$\frac{1}{2}Sm\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) = H = \text{const}, \tag{4.34}$$

tj. zbir živih sila svih ovih tela u odnosu na njihovo težište ostaje stalan u toku vremena. Ovaj problem je kasnije analizirao i K. Jacobi, ponovivši uglavnom Lagrange-ev dokaz, ali u razumljivijem obliku, bližem sadašnjem načinu izlaganja (v. odeljak 6.1).

Lagrange je ovaj zakon održanja žive sile primenio na još niz drugih problema: na slučaj kada su moguća pomeranja tela srazmerna njihovim brzinama, na rotaciju krutih tela kao i na nestišljivu tečnost. Sem toga, koristio je ovaj zakon i pri dokazu izvesnih stavova, kao npr. pri svojoj preformulaciji Maupertuis-ovog principa najmanjeg dejstva polazeći od svoje opšte formule dinamike sistema.

5. Hamilton-ov formalizam i Hamilton-ove jednačine (W. Hamilton, 1835 [12])

5.1. **Uvođenje generalisanih impulsa.** Sa ciljem uprošćavanja Lagrange-evih jednačina njihovom zamenom nekim jednostavnijim jednačinama, S. Poisson [1, 2] je 1809. godine umesto promenljivih $\dot{q}^i$ uveo nove veličine (tadašnjim simbolima) formalno i bez ikakvog imena

$$p_i = \frac{\delta T}{\delta \eta_i'} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.1}$$

gde je T polovina žive sile (tj. kinetička energija), promenljive η_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ su generalisane koordinate (sadašnjim jezikom), a simbol $'$ označava izvod po vremenu i pomoću njih formulisao polovinu Hamilton-ovih jednačina.

Docnije ih je W. Hamilton prihvatio pri dobijanju svojih diferencijalnih jednačina prvog reda, u svom radu o jednom opštem metodu dinamike 1835. godine [12] (na engleskom), ekvivalentnom Lagrange-evim jednačinama (o njima će biti reči nešto docnije), ali opet čisto formalno, kao oznake za ove veličine. Sam termin "generalisani impuls" uveden je tek kasnije, a prvi ga je upotrebio M. Ostrogradski 1848. godine.

Generalisani impulsi danas se definišu (sadašnjom simbolikom) kao

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{5.2}$$

i to se u klašicnoj mehanici najčešće poklapa sa gornjom definicijom (5.1), sem u slučaju uopštenih potencijalnih sila. Ovako uvedene veličine predstavljaju uopštenje pojma količina kretanja (impuls) u pravouglim koordinatama, čije su komponente određene sa

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2 \right) - \Pi(x_{\nu\alpha}, t) \quad \Rightarrow \quad p_{x_\nu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu} = m_\nu \dot{x}_\nu, \dots \tag{5.3}$$

Skup do sada korišćenih Lagrange-evih promenljivih $(q^i, \dot{q}^i)$ određuje kinematičko stanje sistema, dok skup generalisanih koordinata i generalisanih impulsa (q^i, p_i) određuje dinamičko stanje sistema, jer veličine p_i zavise i od mase čestica i ove veličine zajedno nazivaju se kanonske promenljive. Opšti metod rešavanja problema koji se zasniva na korišćenju Lagrange-evih promenljivih i odgovarajućih Lagrange-evih jednačina naziva se Lagrange-ev formalizam, a drugi, opšti metod koji se zasniva na kanonskim promenljivama i odgovarajućim Hamilton-ovim jednačinama naziva se Hamilton-ov formalizam. Samim ovim nazivima želelo se isteći njihov karakter opštih metoda za rešavanje dinamičkih problema i odati počast njihovim tvorcima, pri čemu je i sam Hamilton izuzetno cenio Lagrange-ev doprinos mehanici i njegovu Analitičku mehaniku nazivao "naučna poema".

Na kraju napomenimo da ovaj Hamilton-ov formalizam ima primena i van mehanike, naime u svim granama teorijske fizike gde pojam stanja sistema igra bitnu ulogu, a to su pre svega statistička fizika kao i kvantna mehanika i teorija polja.

5.2. **D'Alembert-Lagrange-ev princip i Lagrange-eve jednačine (**sa originalnim dokazom i oznakama**).** Glavna preokupacija W. Hamilton-a kao i njegovog savremenika K. Jacobi-a bila je, polazeći od optičko-mehaničke analogije, razvijanje jednog opšteg metoda dinamike za nalaženje rešenja diferencijalnih jednačina kretanja bez integracije [12]. Ovaj metod zasniva se na nalaženju partikularnog rešenja tzv. Hamilton–Jacobi-eve parcijalne diferencijalne jednačine (v. npr. [7])

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}, t\right) = 0, \tag{5.4}$$

(koja je ustvari ekvivalentna Hamilton-ovim jednačinama), potom se parcijalnim diferenciranjem formira jedan sistem jednačina, i najzad algebarskim rešavanjem ovih jednačina dobijaju se sve kanonske promenljive q^i i p_i kao funkcije vremena, dakle bez ikakve integracije. Međutim, ovde ćemo se ograničiti samo na one njihove rezultate koji su u direktnoj ili indirektnoj vezi sa zakonom održanja energije.

Hamilton je pošao od d'Alembert-Lagrange-evog principa [12b], kao i Lagrange, ali u razumljivijem obliku, kako ga je prikazao Jacobi [v. formulu (4.3)], sa komponentama sile (X, Y, Z), ne više po jedinici mase

$$\sum_i \left[\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} - Z_i\right)\delta z_i\right] = 0 \tag{5.5}$$

i pretpostavio da sve sile imaju funkciju sile, tj. da su oblika

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

pa ako skupimo sve članove sa komponentama sila, imaćemo

$$\sum_i (X_i\delta x_i + Y_I\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right) = \delta U,$$

te prethodna relacija dobija vid

$$\sum_i m_i(x_i''\delta x_i + y_i''\delta y_i + z_i''\delta z_i) = \delta U \tag{5.6}$$

To je oblik d'Alembert–Lagrange-evog principa u slučaju potencijalnih sila, koji je predstavljao polaznu tačku za Hamilton-ova istraživanja mnogih problema mehanike kojima se bavio.

Polazeći od ovog principa, Hamilton je dobio Lagrange-eve jednačine uvođenjem generalisanih koordinata, koje je on nazvao "oznake položaja" (marks of position) i to na sledeći način. Koordinate materijalnih tačaka ("tačaka" po samom Hamilton-u) zamenjene su nezavisnim generalisanim koordinatama, koje je označio sa η_i

$$x_i = x_i(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}), \quad y_i = y_i(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}), \quad z_i = z_i(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{3n}), \tag{5.7}$$

gde je n broj materijalnih tačaka sistema. Ako se i funkcija sile U izrazi pomoću ovih generalisanih koordinata i formiraju varijacije svih ovih veličina, d'Alembert–Lagrange-ev princip (5.6) dobija vid

$$\sum_i m_i \sum_k \left(x_i''\frac{\delta x_i}{\delta\eta_k} + y_i''\frac{\delta y_i}{\delta\eta_k} + z_i''\frac{\delta z_i}{\delta\eta_k}\right)\delta\eta_k = \sum_k \frac{\delta U}{\delta\eta_k}\delta\eta_k,$$

što se posle izmene redosleda sumiranja može napisati kao

$$\sum_k \left\{\sum_i m_i \left(x_i''\frac{\delta x_i}{\delta\eta_k} + y_i''\frac{\delta y_i}{\delta\eta_k} + z_i''\frac{\delta z_i}{\delta\eta_k}\right) - \frac{\partial U}{\partial\eta_k}\right\}\delta\eta_k = 0 \tag{5.8}$$

Prvi član izraza u zagradi može se prikazati u obliku

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \left(x_i'' \frac{\delta x_i}{\delta \eta_k} + y_i'' \frac{\delta y_i}{\delta \eta_k} + z_i'' \frac{\delta z_i}{\delta \eta_k} \right) \\ = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \left(x_i' \frac{\delta x_i}{\delta \eta_k} + y_i' \frac{\delta y_i}{\delta \eta_k} + z_i' \frac{\delta z_i}{\delta \eta_k} \right) \right\} \\ - \sum_i m_i \left(x_i' \frac{d}{dt} \frac{\delta x_i}{\delta \eta_k} + y_i' \frac{d}{dt} \frac{\delta y_i}{\delta \eta_k} + z_i' \frac{d}{dt} \frac{\delta z_i}{\delta \eta_k} \right),\end{aligned}$$

a svaki od ova dva člana može se dalje transformisati koristeći relacije $\delta x'/\delta \eta_k' = \delta x_i/\delta \eta_k$ i $\frac{d}{dt}(\delta x_i/\delta \eta_k) = \delta x_i'/\delta \eta_k$ (v. formule (4.15) i (4.16))

$$\sum_i m_i \left(x_i' \frac{\delta x_i}{\delta \eta_k} + y_i' \frac{\delta y_i}{\delta \eta_k} + z_i' \frac{\delta z_i}{\delta \eta_k} \right) = \sum_i m_i \left(x_i' \frac{\delta x_i'}{\delta \eta_k'} + y_i' \frac{\delta y_i'}{\delta \eta_k'} + z_i' \frac{\delta z_i'}{\delta \eta_k'} \right) = \frac{\delta T}{\delta \eta_k'}$$

kao i

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \left(x_i' \frac{d}{dt} \frac{\delta x_i}{\delta \eta_k} + y_i' \frac{d}{dt} \frac{\delta y_i}{\delta \eta_k} + z_i' \frac{d}{dt} \frac{\delta z_i}{\delta \eta_k} \right) \\ = \sum_i m_i \left(x_i' \frac{\delta x_i'}{\delta \eta_k} + y_i' \frac{\delta y_i'}{\delta \eta_k} + z_i' \frac{\delta z_i'}{\delta \eta_k} \right) = \frac{\delta T}{\delta \eta_k},\end{aligned}$$

gde je T polovina žive sile (tj. kinetička energija) sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \tag{5.9}$$

Uvrštavanjem ovih izraza u d'Alembert–Lagrange-ev princip (5.8) dobija se

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \eta_k'} - \frac{\delta T}{\delta \eta_k} - \frac{\delta U}{\delta \eta_k} \right) \delta \eta_k = 0, \tag{5.10}$$

a zbog proizvoljnosti i nezavisnosti varijacija $\delta \eta_k$ ova relacija biće zadovoljena samo ako su svi njeni koeficijenti jednaki nuli

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \eta_k'} - \frac{\delta T}{\delta \eta_k} = \frac{\delta U}{\delta \eta_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, 3n) \tag{5.11}$$

To su Lagrange-eve jednačine za sisteme materijalnih tačaka na koje dejstvuju samo potencijalne sile, dobijene iz d'Alembert–Lagrange-evog principa. Ovaj način dobijanja ovih jednačina je potpuno ekvivalentan Lagrange-evom načinu dobijanja istih jednačina iz njegove opšte formule dinamike sistema, koja je ekvivalentna d'Alembert–Lagrange-evom principu, ali na mnogo očigledniji i jednostavniji način.

5.3. **Hamilton-ov opšti princip mehanike** (uglavnom prema Jacobi-evom prikazu [13])**.** Polazeći od Lagrange-evih jednačina, Hamilton je svoja istraživanja razvio u dva pravca, u pravcu formulacije jednog opšteg principa mehanike, koji bi bio ekvivalentan Lagrange-evim jednačinama, i u pravcu zamene Lagrange-evih jednačina ekvivalentnim, ali jednostavnijim sistemom diferencijalnih jednačina nižeg reda. U prvom slučaju, kao što je poznato iz varijacionog računa, ako imamo integral oblika $\mathcal{I} = \int_a^b f(y_i, y_i', x)\,dx$, gde su promenljive y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ izvesne funkcije od x, diferencijalne jednačine, tzv. Euler–Lagrange-eve jednačine

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.12}$$

određuju one funkcije $y_i = y_i(x)$ pri kojima ovaj integral ima stacionarnu vrednost

$$\delta\mathcal{I} = \delta\int_a^b f(y_i, y_i', x)\,dx = 0. \tag{5.13}$$

Hamilton je zapazio da ako Lagrange-eve jednačine (5.11) napišemo u obliku (4.21)

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta P}{\delta \eta_i'} - \frac{\delta P}{\delta n_i} = 0, \quad P = T + U,$$

one imaju oblik Euler–Lagrange-evih jednačina, te određuju one funkcije $\eta_i = \eta_i(t)$ pri kojima integral $I = \int_{t_0}^{t_1} P(\eta, \eta_i', t)\,dt$ ima stacionarnu vrednost

$$\delta I = \delta\int_{t_0}^{t_1} P(\eta_i, \eta_i', t)\,dt = 0, \tag{5.14}$$

a to je Hamilton-ov opšti varijacioni princip mehanike.

Do ovog rezultata može se doći i neposredno, formirajući varijaciju ovog integrala

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta P dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\delta P}{\delta \eta_i}\delta\eta_i + \frac{\delta P}{\delta \eta_i'}\delta\eta_i'\right) dt \tag{5.15}$$

Radi eliminacije varijacije $\delta\eta_i'$ drugi od ovih integrala se transformiše parcijalnom integracijom

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta P}{\delta \eta_i'}\delta\eta_i' dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta P}{\delta \eta_i'}\frac{d}{dt}(\delta\eta_i) dt \\ &= \left(\frac{\delta P}{\delta \eta_i'}\delta\eta_i\right)_{t=t_1} - \left(\frac{\delta P}{\delta \eta_i'}\delta\eta_i\right)_{t=t_0} - \int_{t_0}^{t_1} \delta\eta_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta P}{\delta \eta_i'}\right) dt\end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da se položaj posmatranog sistema na svim variranim putevima u trenucima $t = t_0$ i $t = t_1$ poklapa sa njegovim položajem na pravom putu, tj. da je $\delta\eta_i = 0$ za $t = t_0$ i $t = t_1$, gornja varijacija integrala svodi se na

$$\delta I = \delta\int_{t_0}^{t_1} P(\eta_i, \eta_i', t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\delta P}{\delta \eta_i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta P}{\delta \eta_i'}\right)\delta\eta_i dt \tag{5.16}$$

Odavde izvodimo sledeći zaključak: ako su Lagrange-eve jednačine zadovoljene, neposredno proizlazi da je $\delta I = 0$, a važi i obrnuto: ako pretpostavimo da je $\delta I = 0$, zbog proizvoljnosti i nezavisnosti varijacija $\delta\eta_i$ odavde proizilaze odgovarajuće Lagrange-eve jednačine.

U savremenoj terminologiji ovaj integral naziva se Hamilton-ovo dejstvo, a funkcija P Lagrange-eva funkcija (4.22), za razliku od tzv. Lagrange-evog dejstva $A =$

$\int_{t_0}^{t_1} 2T dt$, koji figuriše u Maupertuis–Lagrange-evom principu najmanjeg dejstva. Sam stav izražen gornjom relacijom (5.14) danas se piše ovako

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q^i, \dot{q}^i, t)\, dt = 0, \quad L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - \Pi \tag{5.17}$$

i izražava Hamilton-ov opšti varijacioni princip mehanike.

Prema njemu, ako nema nepotencijalnih sila, kretanje sistema materijalnih tačaka slobodno ili prinudno sa tzv. holonomnim vezama oblika $f_\mu(x_{\nu\alpha}, t) = 0$ odvija se tako da Hamilton-ovo dejstvo duž pravog puta ima stacionarnu vrednosti u odnosu na vrednosti ovog dejstva duž svih variranih puteva. Detaljnijom analizom, pomoću druge varijacije ovog dejstva pokazuje se da pri dovoljno malim vremenskim intervalima (t_0, t_1) Hamilton-ovo dejstvo duž pravog puta uvek ima minimalnu vrednost. Napomenimo još da je ovom principu dao sadašnji, opšti oblik M. Ostrogradski 1848. godine, proširujući Hamilton-ov dokaz na slučaj kad funkcija P, odnosno Lagrange-eva funkcija zavisi i eksplicitno od vremena.

5.4. **Hamilton-ove kanonske jednačine** (sa originalnim dokazom i oznakama) [12b]**.** U drugom slučaju W. Hamilton [12b] je dobio svoje jednačine polazeći od Lagrange-evih jednačina (5.11) i uvodeći (sadašnjom terminologijom), pored generalisanih koordinata, kao nove funkcije generalisane impulse. Pri tome on je pretpostavio da na materijalne tačke sistema dejstvuju samo sile koje imaju funkciju sile (prećutno i da nema nepotencijalnih sila) i da je polovina žive sile (tj. kinetička energija) sistema homogena kvdratna funkcija generalisanih brzina

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k a_{ik} \eta_i' \eta_k',$$

pa je prema Euler-ovoj teoremi za homogene funkcije

$$\sum_i \frac{\delta T}{\delta \eta_i'} \eta_i' = 2T \tag{5.18}$$

S druge strane, varijacija funkcije $T(\eta_i, \eta_i')$ biće

$$\delta T = \sum_i \left(\frac{\delta T}{\delta \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\delta T}{\delta \eta_i'} \delta \eta_i' \right),$$

pa ako se varira i relacija (5.18)

$$2\delta T = \sum_i \left(\frac{\delta T}{\delta \eta_i'} \delta \eta_i' + \eta_i' \delta \frac{\delta T}{\delta \eta_i'} \right),$$

oduzimanjem ovih dveju relacija dobija se

$$\delta T = \sum_i \left(\eta_i' \delta \frac{\delta T}{\delta \eta_i'} - \frac{\delta T}{\delta \eta_i} \delta \eta_i \right) \tag{5.19}$$

Ova relacija je Hamilton-u sugerisala da se radi skraćenosti uvede oznaka

$$\varpi_i = \frac{\delta T}{\delta \eta_i'} \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n), \tag{5.20}$$

a to su ustvari generalisani impulsi, pa prethodna relacija dobija vid

$$\delta T = \sum_i \left(\eta_i' \delta \overline{\omega}_i - \frac{\delta T}{\delta \eta_i} \delta \eta_i \right), \tag{5.21}$$

čime je ustvari izvršen prelaz sa generalisanih brzina η_i' na generalisane impulse $\overline{\omega}_i$ (Hamilton to ne ističe, on to prikazuje samo kao kraći način pisanja).

Ako se veličina T sad prikaže kao funkcija od novih promenljivih $T = F(\overline{\omega}_i, \eta_i)$ i formira njena varijacija

$$\delta T = \sum_i \left(\frac{\delta F}{\delta \overline{\omega}_i} \delta \overline{\omega}_i + \frac{\delta F}{\delta \eta_i} \delta \eta_i \right),$$

poređenjem sa relacijom (5.19) nalazimo

$$\frac{\delta F}{\delta \overline{\omega}_i} = \eta_i', \quad \frac{\delta F}{\delta \eta_i} = -\frac{\delta T}{\delta \eta_i} \tag{5.22}$$

Uvrštavanjem ovih rezultata kao i uvedenih veličina $\overline{\omega}_i$ u Lagrange-eve jednačine (5.11) dobija se

$$\frac{d\overline{\omega}_i}{dt} = \frac{\delta T}{\delta \eta_i} + \frac{\delta U}{\delta \eta_i} = -\frac{\delta (F - U)}{\delta \eta_i},$$

što sugeriše uvođenje nove veličine

$$H(\overline{\omega}_i, \eta_i) = F(\overline{\omega}_i, \eta_i) - U(\eta_i), \tag{5.23}$$

pa prethodna jednačina dobija vid

$$\frac{d\overline{\omega}_i}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n) \tag{5.24}$$

Pošto funkcija sile U ne zavisi od $\overline{\omega}_i$, prema (5.24) biće

$$\frac{\delta H}{\delta \overline{\omega}_i} = \frac{\delta}{\delta \overline{\omega}_i}(F - U) = \frac{\delta F}{\delta \overline{\omega}_i}$$

pa prvi sistem relacija (5.22) može se napisati u obliku

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\delta H}{\delta \overline{\omega}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, 3n) \tag{5.25}$$

Jednačine (5.24) i (5.25) predstavljaju Hamilton-ove jednačine, ekvivalentne Lagrange-evim jednačinama (5.11), ali za razliku od njih Hamilton-ove jednačine su diferencijalne jednačine prvog reda sa dvostrukim brojem jednačina. Ovako uvedena funkcija H prema današnjoj terminologiji, a imajući u vidu da je potencijalna energija $\Pi = -U$, predstavlja zbir kinetičke i potencijalne energije, tj. ukupnu mehaničku energiju: $H = T + \Pi = E$. Ove Hamilton-ove jednačine važe dogod je kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, te se u nepromenjenom obliku mogu primeniti i na prinudno kretanje ograničeno vezama koje ne zavise eksplicitno od vremena, ali broj ovih jednačina biće smanjen na dvostruki broj stepena slobode.

Savremenim jezikom: Ove Hamilton-ove jednačine obično se dobijaju polazeći od varijacije Lagrange-eve funkcije [7, 8]

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i, \tag{5.26}$$

pa se $\partial L/\partial q^i$ zameni odgovarajućim izrazom iz Lagrange-evih jednačina (4.23) i uvedu generalisani impulsi (5.2)

$$\delta L = \left(\frac{dp_i}{dt} - Q_i^*\right)\delta q^i + p_i\delta\dot{q}_i$$

i ako još stavimo

$$p_i\delta\dot{q}^i = \delta(p_i\dot{q}^i) - \dot{q}^i\delta p_i,$$

gornja relacija može se napisati u obliku

$$\delta(p_i\dot{q}^i - L) = (Q_i^* - \dot{p}_i)\delta q^i + \dot{q}^i\delta p_i \tag{5.27}$$

Odavde vidimo da se izraz u zagradi na levoj strani, koji označimo sa H, može smatrati kao funkcija od kanonskih promenljivih q^i i p_i i eventualno vremena t

$$H(q^i, p_i, t) = p_i\dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i, t) \tag{5.28}$$

Ovako definisana funkcija nazvana je Hamilton-ova funkcija ili hamiltonijan, i uobičajeno je da se u njegovu počast označava sa H, prvim slovom njegovog imena. Stoga će njegova varijacija biti

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i,$$

pa poređenjem sa relacijom (5.27) dobijamo

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + Q_i^*, \quad \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.29}$$

To su opšte Hamilton-ove ili kanonske jednačine, a za $Q_i^* = 0$ one se svode na jednačine (5.24) i (5.25), koje je dobio sam Hamilton. One predstavljaju sistem diferencijalnih jednačina prvog reda, rešenih po $\dot{q}^i$ i $\dot{p}_i$, što ih čini posebno pogodnim, a njihovim rešenjem dobijaju se kanonske promenljive kao funkcije vremena: $q^i = q^i(t)$ i $p_i = p_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Uporedimo još opštu definiciju Hamilton-ove funkcije (5.28) sa originalnom Hamilton-ovom (5.23), koja ustvari predstavlja ukupnu mehaničku energiju. U tom cilju ispitajmo kolika je vrednost Hamilton-ove funkcije u slučaju kad su potencijalne sile uobičajene ($Q_i = \partial U/\partial q^i$), a kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina. Pošto potencijalna energija ne zavisi od promenljivih $\dot{q}^i$, na osnovu Euler-ove teoreme za homogene funkcije biće

$$H = p_i\dot{q}^i - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = 2T - (T - \Pi)$$

odnosno

$$H = T + \Pi = T - U \tag{5.30}$$

i stoga je Hamilton-ova definicija funkcije H (5.23) u njegovom dokazu ekvivalentna opštoj definiciji Hamilton-ove funkcije (5.28) u slučaju uobičajenih potencijalnih sila i kad je kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina. Ovu opštu definiciju uveo je M. Ostrogradski 1848. godine, kad je pokazao da su transformacije iz Lagrange-evog u Hamilton-ov formalizam ustvari tzv. Legendre-ove transformacije, u okviru kojih se kao nova funkcija pojavljuje ova Hamilton-ova funkcija.

6. Jacobi-eva formulacija održanja žive sile i Poisson-ov opšti kriterijum (K. Jacobi, 1866 [13])

6.1. **Zakon održanja žive sile u pravouglim koordinatama** (sa originalnim dokazom i oznakama)**.** Sam Hamilton je u svojim radovima koristio zakon o održanju žive sile (po tadašnjoj terminologiji) u obliku $T = U + H$, pozivajući se na Lagrange-a, ali ga nikad nije strogo dokazao. Međutim, njegov savremenik K. Jacobi, koji je Hamilton-ove rezultate često proširivao i prikazivao ih u očiglednijem obliku, pitanju zakona održanja žive sile posvetio je više pažnje, prvo u pravouglim, a potom i u generalisanim koordinatama. U prvom slučaju [13] pošao je od d'Alembert–Lagrange-evog principa za sile koje imaju funkcije sile u obliku (5.6), kako ga je formulisao sam Hamilton

$$\sum_i m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \delta U$$

Ako uslovi ravnoteže pri mogućim pomeranjima materijalnih tačaka sistema pod uticajem ubrzavajućih sila ne zavise od vremena, varijacije δx_i, δy_i, δz_i kao i δU možemo zameniti odgovarajućim diferencijalima dx_i, dy_i, dz_i i dU, koji predstavljaju realna elementarna pomeranja materijalnih tačaka i promenu funkcije sile u vremenskom intervalu $(t, t + dt)$, pa gornja relacija dobija vid

$$\sum_i m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} dx_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} dy_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} dz_i \right) = dU \tag{6.1}$$

Ako se ovde stavi $dx_i = (dx_i/dt)\, dt$ i slično za dy_i i dz_i, ova relacija se može napisati u obliku

$$\sum_i m_i \left\{ \frac{dx_i}{dt} d\left(\frac{dx_i}{dt}\right) + \frac{dy_i}{dt} d\left(\frac{dy_i}{dt}\right) + \frac{dz_i}{dt} d\left(\frac{dz_i}{dt}\right) \right\} = dU,$$

što omogućava neposrednu integraciju, čime se dobija

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} = U + h, \tag{6.2}$$

gde je h konstanta, ili konciznije

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = U + h, \tag{6.3}$$

što je ekvivalentno sadašnjem načinu prikazivanja

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 + \Pi = h = \text{const} \tag{6.4}$$

Ovaj Jacobi-ev dokaz zakona održanja žive sile potpuno je ekvivalentan Lagrange-evom dokazu ovog zakona, samo sa mnogo jasnijom polaznom tačkom i načinom prikazivanja, a polazeći od ovog zakona kao i od samog d'Alembert–Lagrange-evog principa Jacobi je dobio niz osobina žive sile. Tako npr. iz ovog zakona održanja u obliku (6.3) neposredno proizilazi da je promena žive sile jednaka

$$\left(\sum_i m_i v_i^2\right)_{t=t_1} - \left(\sum_i m_i v_i^2\right)_{t=t_0} = 2\left[U_{(t=t_1)} - U_{(t=t_0)}\right], \tag{6.5}$$

tj. jednaka je dvostrukoj odgovarajućoj promeni funkcije sile, nezavisno od drugih mogućih faktora.

Prikažimo još kako se menja živa sila sistema materijalnih tačaka i zakon njenog održanja kad pređemo iz početnog u sistem referencije sa koordinatnim početkom u težištu ovih čestica. Ako koordinate težista označimo sa (A, B, C), ove transformacije koordinata su

$$x_i = \xi_i + A, \quad y_i = \eta_i + B, \quad z_i = \zeta_i + C, \tag{6.6}$$

gde su (ξ_i, η_i, ζ_i) koordinate uočene materijalne tačke u odnosu na težište, a samo težište je definisano svojim koordinatama

$$A = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \quad B = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \quad C = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}, \tag{6.7}$$

gde je M ukupna masa sistema: $M = \sum_i m_i$. Tada je $dx_i = d\xi_i + dA$ i slično za dy_i i dz_i, pa imajući u vidu da je prema definiciji težista u sistemu referencije vezanom za ovo težište

$$\sum_i m_i d\xi_i = d\sum_i m_i \xi_i = 0, \quad \sum_i m_i d\eta_i = 0, \quad \sum_i m_i d\zeta_i = 0,$$

pri ovoj transformaciji žive sile otpadaju članovi sa mešovitim proizvodima tipa $\sum_i m_i d\xi_i dA$ i prethodna relacija prelazi u

$$\begin{aligned} &\sum_i m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} \\ &\quad = \sum_i m_i \left\{\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right\} \\ &\qquad + M\left\{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)^2\right\} = U + h \end{aligned} \tag{6.8}$$

Prema tome, apsolutna vrednost žive sile sistema materijalnih tačaka jednaka je zbiru njegove relativne vrednosti u odnosu na težište i apsolutne vrednosti žive sile celokupne mase skoncentrisane u težištu. Sem toga, pošto je poslednji član u ovoj relaciji konstantan, ova relacija može se napisati i u obliku

$$\sum_i m_i \left\{ \left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2 \right\} = U + h', \tag{6.9}$$

gde je h' nova konstanta, jednaka razlici stare konstante i ovog poslednjeg člana. Odavde vidimo da zakon održanja žive sile važi i u sistemu referencije vezanom za tezište, ali samo sa izmenjenom konstantom.

6.2. **Zakon održanja žive sile u generalisanim koordinatama (**sa originalnim dokazom i oznakama**).** K. Jacobi je formulisao zakon održanja žive sile i u generalisanim koordinatama, prikazan u njegovim "Predavanjima iz dinamike" (1866) [13] (na nemačkom), koja su objavljena 15 godina posle njegove smrti od strane njegovog učenika Klebsch-a. Malo je neobično da njegov dokaz ovog zakona u generalisanim koordinatama nije prikazan u četvrtom predavanju: Princip održanja žive sile (gde se govorilo o ovom zakonu samo u pravouglim koordinatama), već u devetom predavanju: Hamilton-ov oblik jednačina kretanja, gde se u ovom podnaslovu i ne pominje ovaj zakon! Pri tome i sama formulacija ovog zakona održanja sa sadašnjeg stanovišta data je više implicitno, ne u danas uobičajenom obliku, koji bi imao univerzalni karakter. Da li to znači da Jacobi ovom zakonu održanja nije davao veliki značaj, posebno u odnosu na probleme iz njegove osnovne preokupacije?

Jacobi je pošao od Lagrange-evih jednačina (5.11) za sisteme materijalnih tačaka na koje dejstvuju samo potencijalne sile

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

pa u njih uvodi generalisane impulse (5.1)

$$\frac{dp_i}{dr} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{6.10}$$

Tada pretpostavlja, kao i Hamilton, da je živa sila sistema homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, pa prema Euler-ovoj teoremi za homogene funkcije važi relacija

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' = 2T,$$

koju piše ovako

$$T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' - T \tag{6.11}$$

Zatim se diferencira ova relacija

$$dT = \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i'} dq_i' + \sum_i q_i' d\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i'} dq_i',$$

a uvođenjem generalisanih impulsa (5.1) ovaj izraz poprima vid

$$dT = \sum_i q_i' dp_i - \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i, \tag{6.12}$$

u saglasnosti sa relacijom (5.21). Ako ovu relaciju podelimo sa dt i član dp_i/dt zamenimo odgovarajućim izrazom iz jednačine (6.10), dobija se

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i q_i' \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} - \sum_i \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i' = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i', ,$$

a pošto je

$$\frac{dU}{dt} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i' + \frac{\partial U}{\partial t},$$

gornju relaciju možemo napisati i u obliku

$$\frac{d}{dt}(T - U) = -\frac{\partial U}{\partial t} \tag{6.13}$$

ili u integralnom obliku

$$T = U - \int \frac{\partial U}{\partial t} dt = \text{const} \tag{6.14}$$

Imajući u vidu da je potencijalna energija $\Pi = -U$, relacija (6.13) prema današnjoj terminologiji ekvivalentna je sa

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \tag{6.15}$$

te gornje relacije predstavljaju zakon održanja žive sile (tj. energije) u diferencijalnom i integralnom obliku.

Do ekvivalentnog rezultata Jacobi je došao polazeći od Hamilton-ovih jednačina (5.24) i (5.25), koje on piše u savremenom obliku

$$p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad q_i' = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{6.16}$$

Naime, ako se formira totalni izvod Hamilton-ove funkcije po vremenu

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i' + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i' + \frac{\partial H}{\partial t}$$

i zamene q_i' i p_i' odgovarajućim izrazima iz Hamilton-ovih jednačina (6.16), dobija se

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

odnosno

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad H(q_i, p_i, t) = T - U \tag{6.17}$$

Imajući u vidu da je Hamilton-ova funkcija u njegovom dokazu svojih jednačina prema (5.23) jednaka $H = T - U$ (tj. $H = T + \Pi$) i da živa sila u ovom slučaju ne zavisi eksplicitno od vremena, relacije (6.13) i (6.17) su ekvivalentne. Iz ovih relacija vidimo da ako na materijalne tačke sistema dejstvuju samo sile koje imaju funkciju sile i ako ona ne zavisi eksplicitno od vremena, važiće zakon održanja žive sile (tj. energije) u obliku

$$T - U = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad H(q_i, p_i) = \text{const} \tag{6.18}$$

6.3. **Savremena formulacija zakona održanja energije.** Ovaj oblik zakona održanja energije razlikuje se od današnjeg, mada se sa današnjim pojmovima lako može dovesti u taj oblik. Naime, ako u relaciji (6.11) od obeju strana oduzmemo funkciju sile U i imamo u vidu da ona ne zavisi od generalisanih brzina, ovu relaciju možemo napisati u ekvivalentnom obliku

$$H = T - U = \sum_i \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i'} q_i' - (T+U) \tag{6.19}$$

Pošto današnjom terminologijom i notacijama veličina $T+U$ prema (4.22) predstavlja Lagrange-evu funkciju, relacije (6.18) možemo prikazati i u savremenom, ekvivalentnom obliku

$$H(q^i, p_i) = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const} \tag{6.20}$$

Međutim, sa tadašnjeg stanovišta to ne bi imalo mnogo smisla, jer bi to samo na komplikovaniji način izražavalo kakav oblik bi imao izraz $T-U$ ako je invarijantan u toku vremena. Pri tome treba imati u vidu da se u to vreme nije moglo ni govoriti o zakonu održanja energije, jer ni pojam ni termin "energija" tada u mehanici nisu postojali, a ni funkcija sile U nije imala smisao energije. Taj smisao imao je samo pojam žive sile, mada ne u punom smislu te reči, a funkcija sile je bila samo neka funkcija položaja. Iz ovoga se vidi da ono što danas smatramo održanjem energije tada je samo značilo da "razlika polovine žive sile i jedne funkcije položaja" pod izvesnim uslovima ostaje stalna u toku vremena. Međutim, uzimajući sve to u obzir, prihvaćeno je da se druga relacija (6.20) naziva Jacobi-ev integral energije i on nam omogućava da ako su zadovoljeni potrebni uslovi, kad znamo Lagrange-evu funkciju odmah dobijamo oblik ovog integrala energije.

Zakon održanja energije u opštem obliku može se najlakše dobiti diferenciranjem Lagrange-eve funkcije $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ po vremenu i korišćenjem Lagrange-evih jednačina (v. npr. [9]). Totalni vremenski izvod Lagrange-eve funkcije je

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}, \tag{6.21}$$

pa se $\partial L / \partial q^i$ zameni odgovarajućim izrazom iz Lagrange-evih jednačina (4.23), čime se dobija

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}^i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - Q_i^* \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) - Q_i^* \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t},$$

što možemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} + Q_i^* \dot{q}^i \tag{6.22}$$

Ako veličinu prikazanu izrazom u zagradi označimo sa

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L, \tag{6.23}$$

odavde vidimo da ako je $\partial L/\partial t = 0$ i $Q_i^*\dot{q}^i = 0$, tj. ako Lagrange-eva funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena i ako nema nepotencijalnih sila ili je bar njihov efekat jednak nuli, ova veličina $\mathcal{E}$ ostaje stalna u toku vremena

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = \text{const} \tag{6.24}$$

Takve nepotencijalne generalisane čiji je efekat $Q_i^*\dot{q}^i = 0$ nazivaju se giroskopske.

Ovako definisanu veličinu $\mathcal{E}$ zvaćemo generalisana energija (koristi se i termin energijska funkcija, mada ti termini nisu opšte prihvaćeni), jer predstavlja generalizaciju pojma ukupne mehaničke energije izražene u pravouglim koordinatama:

$$L = \frac{1}{2}m_\nu(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2) - \Pi(x_{\nu\alpha}, t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\dot{x}_\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\nu}\dot{y}_\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\nu}\dot{z}_\nu - L =$$

$$= m_\nu\dot{x}_\nu \cdot \dot{x}_\nu + m_\nu\dot{y}_\nu \cdot \dot{y}_\nu + m_\nu\dot{z}_\nu \cdot \dot{z}_\nu - \left[\frac{1}{2}m_\nu(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2) - \Pi(x_{\nu\alpha}, t)\right],$$

gde je $x_{\nu\alpha} = (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$, odnosno

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\nu\alpha}}\dot{x}_{\nu\alpha} - L = \frac{1}{2}m_\nu(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2) + \Pi(x_{\nu\alpha}, t) \tag{6.25}$$

Ova veličina $\mathcal{E}$ ustvari predstavlja Hamilton-ovu funkciju (5.28), gde je stavljeno $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$, tj. Hamilton-ovu funkciju izraženu u Lagrange-evim promenljivima, a relacija (6.24) formulisana pomoću ove veličine predstavlja opšti zakon održanja energije u generalisanim koordinatama.

Razmotrimo dva najvažnija slučaja koji se sreću u klasičnoj mehanici: slučaj kada je kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina (što je pretpostavljeno u svim Lagrange-evim i Hamilton-ovim radovima) i kad nije homogena već samo kvadratna funkcija generalisanih brzina. U prvom slučaju

$$T = \frac{1}{2}a_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k, \tag{6.26}$$

imajući u vidu da potencijalna energija ne zavisi od generalisanih brzina, veličina (6.23) na osnovu Euler-ove teoreme za homogene funkcije jednaka je

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = 2T - (T - \Pi) = T + \Pi, \tag{6.27}$$

a zakon održanja energije (6.24) tada predstavlja uobičajeni oblik zakona održanja ukupne mehaničke energije

$$\mathcal{E} = T + \Pi = \text{const} \tag{6.28}$$

Takav slučaj je najčešći u praksi i uključuje kako slobodna kretanja tako i prinudna ograničena vezama koje ne zavise eksplicitno od vremena. U drugom slučaju, kad je kinetička energija oblika

$$T = \frac{1}{2}a_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k + b_i\dot{q}^i + c = T_2 + T_1 + T_0 \tag{6.29}$$

na sličan način koristeći opet Euler-ovu teoremu, nalazimo da je veličina $\mathcal{E}$ jednaka

$$\mathcal{E} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - (T - \Pi) = 2T_2 + 1 \cdot T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - \Pi),$$

odnosno

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = T_2 - T_0 + \Pi, \tag{6.30}$$

pa zakon održanja energije (6.24) ima oblik (P. Painlevé, 1895)

$$\mathcal{E} = T_2 - T_0 + \Pi = \text{const} \tag{6.31}$$

Takav slučaj imamo kod sistema čestica na koje dejstvuju uopštene potencijalne sile definisane formulama (4.24) i (4.25) i kod tzv. reonomnih sistema, čije je kretanje ograničeno vezama koje eksplicitno zavise od vremena.

Zadržimo se još na slučaju kad generalisana energija $\mathcal{E}$ ne ostaje konstantna, već stalno opada u toku vremena, ostajući eventualno povremeno i konstantna, kad je prema (6.22) dovoljno da bude

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad Q_i^* q^i \leqslant 0 \quad \to \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} \leqslant 0 \tag{6.32}$$

Ovakve nepotencijalne sile Q_i^* nazivaju se disipativne i one su oblika

$$Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i}, \quad R = c_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k \tag{6.33}$$

uz uslove da je

$$c_{ik} = c_{ki} \quad \text{i} \quad c_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k \geqslant 0 \tag{6.34}$$

i ovako uvedena funkcija R naziva se Rayleigh-ova disipativna funkcija. Ako uvrstimo izraz za R u $Q_i^*\dot{q}^i$, dobićemo

$$Q_i^*\dot{q}^i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = -2c_{ik}\dot{q}^k\dot{q}^i = -2R, \tag{6.35}$$

odakle vidimo da je zadovoljen uslov (6.32) i da dvostruka vrednost Rayleigh-ove funkcije daje gubirak energije sistema u jedinici vremena.

6.4. **Veza sa teoremom o živoj sili, radom i funkcijom sile.** Pokažimo da se zakon održanja žive sile, odnosno energije može i ovde dobiti na sličan način kao što smo to pokazali u odeljku 3, pomoću odgovarajuće teoreme o živoj sili u kombinaciji sa vezom između rada i funkcije sile. Polazeći od teoreme o živoj sili (2.3) i prelazeći na generalisane koordinate, stavljajući $d\vec{r}_\nu = (\partial\vec{r}_\nu/\partial q^i)\, dq^i$ dobijamo (u savremenoj notaciji)

$$dT = (\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu) \cdot d\vec{r}_\nu = (\vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i} dq^i,$$

što možemo napisati u obliku

$$dT = d\left(\frac{1}{2}m_\nu v_\nu^2\right) = (Q_i + R_i)dq^i \tag{6.36}$$

gde su Q_i i R_i odgovarajuće generalisane sile

$$Q_i = \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}, \quad R_i = \vec{R}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^i}, \tag{6.37}$$

i to je teorema o živoj sili u generalisanim koordinatama.

S druge strane, ako su sve generalisane sile konzervativne, tj. oblika $Q_i = \partial U/\partial q^i$, gde funkcija sile U ne zavisi eksplicitno od vremena, i ako nema sila reakcije ili je bar njihov rad jednak nuli: $R_i dq^i = 0$, rad svih ovih sila biće

$$d'A = Q_i dq^i = \frac{\partial U}{\partial q^i} dq^i = dU = -d\Pi \tag{6.38}$$

Kombinacijom teoreme o živoj sili i ove veze između rada i funkcije sile proizlazi

$$dT = Q_i dq^i = dU,$$

a odavde neposrednom integracijom se dobija

$$T = U + \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad E = T + \Pi = \text{const} \tag{6.39}$$

i to je zakon održanja žive sile, dobijen na analogan način kao i ranije, samo ovde metodom generalisanih koordinata.

6.5. **Zakon o održanju energije i homogenost vremena.** Homogenost vremena je osobina vremena da su svi njegovi trenuci ravnopravni, pa jednačine kretanja kao i odgovarajući zakoni održanja moraju biti nezavisni od početka računanja vremena, te moraju ostati invarijantni pri translaciji vremena

$$t \to t' = t + \delta t \tag{6.40}$$

Pošto su zakoni kretanja u analitičkoj mehanici određeni Lagrange-evim jednačinama, dovoljno je da Lagrange-eva funkcija pri ovoj transformaciji ostane nepromenjena

$$\delta^* L = L(q^i, \dot{q}^i, t + \delta t) - L(q^i, \dot{q}^i, t) \approx \delta t \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)_0 = 0,$$

a odavde sledi da mora biti $\partial L/\partial t = 0$, tj.

$$\text{homogenost vremena} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{6.41}$$

Stoga, ako pretpostavimo da nema nepotencijalnih sila ili je bar $R_i \dot{q}^i = 0$ i ponovimo dokaz koji je doveo do relacija (6.22), dolazimo do zaključka

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L = \text{const} \tag{6.42}$$

Prema tome, zakon održanja energije sistema čestica pod navedenim uslovima je posledica homogenosti vremena, što daje jedan savremeniji pogled na ovaj zakon, kao i na ostale zakone održanja u mehanici.

6.6. **Opšti kriterijum za integrale kretanja** (S. Poisson, 1809)**.** S. Poisson je formulisao jedan opšti kriterijum za integrale kretanja oblika $F(q^i, p_i, t) = \text{const}$, pomoću koga se može utvrditi da li je neka veličina navedenog oblika integral kretanja i bez integracije Hamilton-ovih jednačina. Ovaj kriterijum je verovatno dobijen polazeći od nekih rezultata nebeske mehanike pri proučavanju perturbacionog kretanja nebeskih tela, ali zbog nemogućnosti da prikažemo njegov originalni dokaz ovog stava, mi ćemo ga ovde izložiti savremenim jezikom koristeći Hamilton-ove jednačine [7].

Pođimo od totalnog izvoda ma kakve funkcije navedenog oblika $F(q^i, p_i, t)$ po vremenu

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{6.43}$$

pa zamenimo $\dot{q}^i$ i $\dot{p}_i$ odgovarajućim izrazima iz Hamilton-ovih jednačina (5.29), čime dobijamo

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} + Q_i^*\right) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

što se može napisati u konciznijem obliku

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial p_i}Q_i^* + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{6.44}$$

gde su uvedene po njemu nazvane Poisson-ove zagrade

$$[F.G] = \frac{\partial F}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{6.45}$$

Ako je $Q_i^* = 0$ i $\partial F/\partial t = 0$, ova relacija se svodi na

$$\frac{dF}{dt} = [F, H], \tag{6.46}$$

odakle se izvodi sledeći zaključak. Ako je pod tim uslovima $[F, H] = 0$, biće i $dF/dt = 0$, te je veličina $F(q^i, p_i, t)$ integral (ili konstanta) kretanja: $F(q^i, p_i, t) = \text{const}$, a važi i obrnuto: iz pretpostavke $dF/dt = 0$ proizilazi da je i $[F, H] = 0$. Prema tome, pod uslovom da je $Q_i^* = 0$ i $\partial F/\partial t = 0$, potreban i dovoljan uslov da neka veličina $F(q^i, p_i, t)$ bude integral kretanja je $[F, H] = 0$.

Ovaj kriterijum obuhvata i funkcije ovog tipa koje izražavaju zakon održanja energije, izražen u kanonskim promenljivima. Tako npr. ako je funkcija $F = H(q^i, p_i)$, tj. jednaka Hamilton-ovoj funkciji koja ne sadrži eksplicitno vreme i ako je $Q_i^* = 0$, ona će zadovoljavati navedeni kriterijum

$$[F, H] = [H, H] \equiv 0$$

i predstavljaće integral kretanja, u saglasnosti sa relacijom (6.20).

Ovako definisane Poisson-ove zagrade imaju niz osobina, od kojih navedimo samo sledeću

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \tag{6.47}$$

Ako se ovde za A i B uzmu dva integrala kretanja i stavi $C = H(q^i, p_i, t)$, odavde je izveden sledeći zaključak: Ako imamo dva integrala kretanja $F_1(q^i, p_i, t) =$

const i $F_2(q^i, p_i, t) = \text{const}$, njihova Poisson zagrada biće takođe integral kretanja: $[F_1, F_2] = \text{const}$. Ovaj stav poznat je pod nazivom Poisson-ova teorema i pomoću nje se mogu dobiti, pored već poznatih, i novi nezavisni integrali kretanja.

Napomenimo na kraju da se dublji smisao ovog probelma može sagledati sa aspekta kanonskih (ili kontaknih) transformacija, a to su takve transformacije kanonskih promenljivih koje ostavljaju oblik Hamilton-ovih jednačina invarijantnim (v. npr. [8]). Pri tome se pokazuje da se kretanje ovakvih sistema na koje dejstvuju samo potencijalne sile može shvatiti kao niz beskonačno malih kanonskih transformacija, pa se na osnovu relacija za ovakve transformacije dobija odgovarajuća formula (6.44) za $Q_i^* = 0$ i $\partial F/\partial t = 0$.

7. Proširenje zakona održanja energije za reonomne sisteme (čije je kretanje ograničeno vezama koje eksplicitno zavise od vremena)

7.1. **Različitost energijskih zakona u vektorskoj i Lagrange-evoj formulaciji mehanike.** U slučaju vektorske formulacije mehanike osnovna jednačina dinamike ima oblik

$$m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \vec{F}_\nu^{pot} + \vec{F}_\nu^* + \vec{R}_\nu^{id} \quad (\nu = 1, 2, \dots, N), \tag{7.1}$$

gde smo aktivne sile razložili na potencijalne i nepotencijalne uključujući i neidealne sile reakcije, označene zvezdicom, pa ako je pomnožimo sa $d\vec{r}_\nu = \vec{v}_\nu dt$, dobićemo

$$m_\nu \vec{v}_\nu \cdot d\vec{v}_\nu = d\left(\frac{1}{2} m_\nu \vec{v}_\nu^2\right) = \left(\vec{F}_\nu^{pot} + \vec{F}_\nu^* + \vec{R}_\nu^{id}\right) \cdot d\vec{r}_\nu \tag{7.2}$$

Ako su potencijalne sile konzervativne, prvi član na desnoj strani je jednak

$$\vec{F}_\nu^{pot} \cdot d\vec{r}_\nu = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot d\vec{r}_\nu = -d\Pi, \tag{7.3}$$

gde je Π potencijalna energija sistema čestica. Pošto kod reonomnih sistema veze eksplicitno zavise od vremena, imaćemo

$$f_\mu(\vec{r}_\nu, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_\mu}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot d\vec{r}_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial t} dt = 0,$$

pa treći član s desne strane relacije (7.2), prema definiciji idealnih sila reakcije $\vec{R}_\nu^{id} = \lambda_\mu (\partial f_\mu / \partial \vec{r}_\nu)$ biće

$$\vec{R}_\nu^{id} \cdot d\vec{r}_\nu = \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot d\vec{r}_\nu = -\lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial t} dt \tag{7.4}$$

Ako još pretpostavimo da nema nepotencijalnih sila ili bar da je njihov rad jednak nuli ($\vec{F}_\nu^* \cdot d\vec{r}_\nu = 0$), relacija (7.2) dobija vid

$$dT = -d\Pi - \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial t} dt,$$

pa integracijom dobijamo

$$T + \Pi = -\int \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial t} dt + \text{const} \tag{7.5}$$

i ova integralna relacija predstavlja zakon održanja energije za reonomne sisteme u vektorskoj formulaciji mehanike.

U slučaju Lagrange-ve formulacije mehanike osnovne jednačine kretanja su Lagrange-eve jednačine (4.23)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.6}$$

pri čemu je kod reonomnih sistema kinetička energija kvadratna funkcija generalisanih brzina

$$T = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k + b_i \dot{q}^i + c \equiv T_2 + T_1 + T_0 \tag{7.7}$$

Videli smo da je u ovom slučaju, polazeći od opšteg Jacobi-evog zakona održanja energije u generalisanim koordinatama (6.24)

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L = \text{const}, \tag{7.8}$$

dobijen Painlevé-ov integral energije za reonomne sisteme (6.31)

$$\mathcal{E} = T_2 - T_0 + \Pi = \text{const}\,. \tag{7.9}$$

Odavde zapažamo da iako ovi zakoni održanja energije u dvema formulacijama mehanike važe pod istim uslovima, oni su bitno različiti! U vektorskoj formulaciji mehanike u zakonu održanja energije (7.5) uticaj nestacionarnih veza uključen je preko gornjeg integrala, a kinetička energija sistema tu figuriše u punom iznosu. Međutim, u Lagrange-evoj formulaciji mehanike u zakonu održanja energije (7.9) nema uticaja nestacionarnih veza, a kinetička energija se pojavljuje samo u delovima, mada je to korektan izraz za odgovarajuću generalisanu energiju.

7.2. **Modifikacija mehanike reonomnih sistema** (V. Vujičić, 1987 [14]). Imajući sve ovo u vidu, V. Vujičić [14] je prvi izvršio modifikaciju dinamike reonomnih sistema, čije kretanje je ograničeno nestacionarnim vezama, sa osnovnim ciljem da se u okvirima Lagrange-eve formulacije potpunije prikažu odgovarajući energijski odnosi, koji bi uključili sve faktore koji na njih utiču. Pri tome se pretpostavilo da vreme u nestacionarnim vezama uvek figuriše u vidu neke funkcije $\varphi(t)$ i ta veličina je uzeta kao dopunska, tzv. reonomna generalisana koordinata

$$\begin{gathered} f[\vec{r}_\nu, \varphi(t)] = 0, \quad \text{dop. gener. koordinata } q^0 = \varphi(t) \\ q^\alpha = \{q^i \ (i = 1, 2, \ldots, n), \ q^0 = \varphi(t)\}, \end{gathered} \tag{7.10}$$

gde smo sa q^α označili ovako prošireni skup generalisanih koordinata. Ovde je, za razliku od primarnih q^i, zavisnost dopunske generalisane koordinate q^0 od vremena unapred data i određena samim oblikom nestacionarne veze.

Na osnovu ovih osnovnih ideja dobijene su odgovarajuće Lagrange-eve jednačine u generalisanim koordinatama, polazeći od Lagrange-evih jednačina sa množiteljima veza

$$m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu + \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

množeći ih vektorom $\vec{g}_\alpha = \partial\vec{r}_\nu/\partial q^\alpha$ i sumirajući po indeksu ν

$$(7.11)\qquad m_\nu \vec{a}_\nu \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} + \lambda \frac{\partial f}{\partial\vec{r}_\nu} \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

Član na levoj strani može se transformisati na sličan način kao u uobičajenoj Lagrange-evoj formulaciji, imajući u vidu da je $\partial\vec{v}_\nu/\partial\dot{q}^\alpha = \partial\vec{r}_\nu/\partial q^\alpha$ i $\frac{d}{dt}(\partial\vec{r}_\nu/\partial q^\alpha)$ $= \partial\vec{v}_\nu/\partial q^\alpha$ (v. obrazloženje uz formule (4.15) i (4.16))

$$(7.12)\qquad m_\nu \dot{\vec{v}}_\nu \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \right) - m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha}$$

Pri tome, pošto je ovde $\vec{v}_\nu = (\partial\vec{r}_\nu/\partial q^\alpha)\dot{q}^\alpha$, kinetička energija sistema uvek je homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina

$$(7.13)\qquad T = \frac{1}{2} m_\nu \vec{v}_\nu^2 = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta, \quad a_{\alpha\beta} = m_\nu \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\beta},$$

gde su koeficijenti $a_{\alpha\beta}$ komponente odgovarajućeg metričkog tenzora.

Prvi član na desnoj strani relacije (7.11) predstavlja odgovarajuće generalisane sile, kojih u ovom slučaju ima jedna više nego u uobičajenoj Lagrange-evoj formulaciji, naime ona koja odgovara dopunskoj generalisanoj koordinati q^0. Smisao poslednjeg člana može se sagledati ako se formiraju totalni parcijalni izvodi nestacionarne veze (7.10) u obliku $f(\vec{r}_\nu, q^0) = 0$ po q^i i po q^0, imajući u vidu da ova funkcija zavisi eksplicitno samo od q^0, a implicitno od svih q^α preko vektora položaja $\vec{r}_\nu$

$$(7.14)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\right)_{\text{tot}} &= \frac{\partial f}{\partial\vec{r}_\nu} \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial q^0}\right)_{\text{tot}} &= \frac{\partial f}{\partial\vec{r}_\nu} \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^0} + \frac{\partial f}{\partial q^0} = 0 \end{aligned}$$

Na osnovu ovoga poslednji član u relaciji (7.2) biće

$$(7.15)\qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial\vec{r}_\nu} \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{za } \alpha = 1, 2, \ldots, n \\ -\lambda \dfrac{\partial f}{\partial q^0} \equiv R_0, & \text{za } \alpha = 0, \end{cases}$$

pa se jednačine (7.11) mogu razložiti na dva dela

$$(7.16)\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^0} - \frac{\partial T}{\partial q^0} = Q_0 + R_0, \end{aligned}$$

gde je, prema (7.15)

$$(7.17)\qquad R_0 = -\lambda \frac{\partial f}{\partial\varphi} = \vec{R}_\nu^{id} \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial q^0}$$

Ako su sve aktivne sile potencijalne, tj. oblika $Q_\alpha = -\partial\Pi/\partial q^\alpha$ i ako se veličina R_0 može prikazati kao izvod neke funkcije po q^0

$$R_0 = -\frac{dP}{dq^0} \quad \Leftrightarrow \quad P = -\int R_0 dq^0, \tag{7.18}$$

Lagrange-eve jednačine (7.16) grupisanjem srodnih članova mogu se napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, , 2 \ldots, n), \tag{7.19}$$

gde je nova Lagrange-eva funkcija

$$\mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = T - (\Pi + P) \tag{7.20}$$

Ove diferencijalne jednačine predstavljaju odgovarajuće Lagrange-eve jednačine u ovakvoj modifikaciji mehanike reonomnih sistema, pri čemu se one razlikuju od onih u uobičajenoj Lagrange-evoj formulaciji samo po dopunskoj jednačini za $\alpha = 0$, koja odgovara dopunskoj generalisanoj koordinati q^0. Ovako definisana veličina P potiče od uticaja nestacionarnih veza i karakteristična je za ovu formulaciju mehanike, a zbog izvesne sličnosti sa potencijalnom energijom nazvana je reonomni potencijal. On se može naći pošto se prethodno nađe veličina R_0, ili prema samoj definiiciji ili iz Lagrange-evih jednačina, pa se potom nađe P integracijom (7.18) kao funkcija od q^0.

Dobijene su i odgovarajuće Hamilton-ove jednačine, uvodeći generalisane impulse na uobičajeni način

$$p_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = a_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots n), \tag{7.21}$$

a pošto je za prirodne mehaničke sisteme uvek $|a_{\alpha\beta}| \neq 0$, ovaj sistem jednačina uvek se može rešiti po $\dot{q}^\alpha$

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta}p_\beta \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{7.22}$$

gde je $a^{\alpha\beta}$ konjugovani metrički tenzor. Pri tome je Hamilton-ova funkcija definisana kao ukupna mehanička energija izražena u kanonskim promenljivima

$$H(q^\alpha, p_\alpha, t) \stackrel{def}{=} E = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + V(q^\alpha, t), \tag{7.23}$$

gde je V proširena potencijalna energija. Polazeći od Lagrange-evih jednačina za potencijalne sile (7.19) i uvodeći generalisane impulse, neposrednim računom je pokazano da je

$$\dot{p}_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial E}{\partial q^\alpha},$$

a s druge strane je, pošto V ne zavisi od p_α

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta}p_\beta = \frac{\partial T}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial E}{\partial p_\alpha},$$

te su tako dobijene Hamilton-ove jednačine u obliku

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial E}{\partial q^\alpha}, \quad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial E}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{7.24}$$

Napomenimo da se do ovih jednačina može doći i na drugi, znatno jednostavniji način, pošto je veličina (7.23) ekvivalentna sa odgovarajućom definicijom proširene Hamilton-ove funkcije

$$\mathcal{H}(q^\alpha, p_\alpha, t) = p_\alpha \dot{q}^\alpha - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - \mathcal{L} = 2T - (T - \Pi - P) = T + \Pi + P, \tag{7.25}$$

što se moglo i očekivati, jer je ovde kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina. Stoga umesto prethodne definicije možemo uzeti

$$\mathcal{H}(q^\alpha, p_\alpha, t) \overset{\text{def}}{=} p_\alpha \dot{q}^\alpha - \mathcal{L} = T + \Pi + P, \tag{7.26}$$

odakle se na osnovu Lagrange-evih jednačina (7.19) neposredno dobija

$$\dot{p}_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(p_\alpha \dot{q}^\alpha - \mathcal{H}) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha}$$

kao i

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}[p_\alpha \dot{q}^\alpha - \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t)] = \dot{q}^\alpha,$$

a to su odgovarajuće Hamilton-ove jednačine

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha}, \quad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{7.27}$$

koje su potpuno ekvivalentne sa jednačinama (7.24).

Na osnovu ovih rezultata Vujičić je posebnu pažnju posvetio energijskim odnosima u ovoj formulaciji mehanike. Ako se pođe od vektorske formulacije, videli smo da u slučaju kad su sve aktivne sile konzervativne ($\partial\Pi/\partial t = 0$) i kad nema nepotencijalnih sila ili je bar njihov rad jednak nuli ($\vec{F}_\nu^* \cdot d\vec{r}_\nu = 0$), važi zakon održanja energije (7.5), i u slučaju samo jedne nestacionarne veze ima oblik

$$T + \Pi = -\int \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt + \text{const} \tag{7.28}$$

Ako sad pretpostavimo da je funkcija u ovom integrandu $\lambda(\partial f/\partial t)$ integrabilna i ako rezultat ove integracije označimo sa P

$$P = \int \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt, \tag{7.29}$$

prethodna relacija dobija oblik

$$\mathcal{E} = T + \Pi + P = \text{const} \tag{7.30}$$

Ovaj rezultat dobijen je i na strožiji način, ako se pođe od Lagrange-evih jednačina (7.16) u ovoj formulaciji mehanike:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha + \delta_\alpha^0 R_0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

gde je δ^0_α Kronecker-ov simbol, pa se one pomnože sa $dq^\alpha = \dot{q}^\alpha dt$ i izvrši sumiranje po indeksu α

$$\dot{q}^\alpha d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha}\, dq^\alpha = (Q_\alpha + \delta^0_\alpha R_0) dq^\alpha \tag{7.31}$$

Ako se leva strana transformiše na sledeći način

$$d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - T\right) = Q_\alpha dq^\alpha + R_0 dq^0,$$

pa se pretpostavi da su sve aktivne sile konzervativne, biće $Q_\alpha dq^\alpha = -d\Pi$, te se ova relacija može napisati u obliku

$$d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - T + \Pi\right) = R_0 dq^0 \tag{7.32}$$

Pošto je ovde kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, prema Euler-ovoj teoremi za homogene funkcije biće

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha = 2T,$$

pa se prethodna relacija svodi na

$$d(T + \Pi) = R_0 dq^0. \tag{7.33}$$

Odavde se integracijom neposredno dobija opšti zakon održanja energije za reonomne sisteme u ovoj formulaciji mehanike

$$T + \Pi = \int R_0 dq^0 + \text{const}, \tag{7.34}$$

a ako se veličina R_0 može izraziti kao izvod neke funkcije po q^0 u obliku (7.18), tj. kad je $\int R_0 dq^0 = -P$, prethodna relacija se svodi na

$$\mathcal{E} = T + \Pi + P = \text{const} \tag{7.35}$$

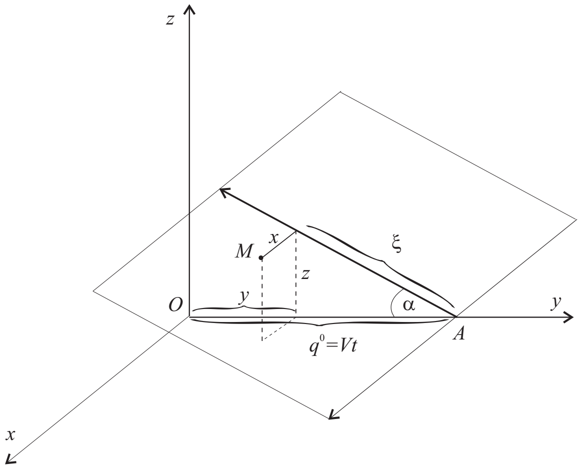
To je odgovarajući zakon održanja proširene mehaničke energije, gde je potencijalna energija proširena reonomnim potencijalom P. Ovaj zakon održanja bitno se razlikuje od Painlevé-ovog integrala energije (7.9) u uobičajenoj Lagrange-evoj formulaciji, jer za razliku od njega on uključuje uticaj nestacionarnih veza na energijske odnose preko reonomnog potenzijala i sadrži kompletnu kinetičku energiju sistema.

Sem toga, izvršena je i modifikacija nekih opštih principa mehanike, pre svega d'Alembert–Lagrange-evog i Hamilton-ovog principa, iz kojih se takođe mogu dobiti ovi rezultati.

Primer: kretanje čestice u polju Zemljine teže po strmoj ravni, koja se pomera uniformno duž horizontalne ose brzinom V (v. sl. 3).

Ako izaberemo koordinatni sistem kao na slici i vreme računamo od trenutka kad je pol A pokretnog sistema referencije bio u tački O, položaj čestice ograničen je uslovom $\operatorname{tg}\alpha = z/(Vt - y)$, i to je nestacionarna veza, koja se može napisati i u obliku

$$f(\vec{r}_\nu, t) \equiv \sin\alpha(Vt - y) - \cos\alpha \cdot z = 0 \tag{7.36}$$



Sl. 3

Položaj čestice na strmoj ravni može se odrediti generalisanim koordinatama $q^i = x$ i $q^2 = \xi$, a za dopunsku generalisanu koordinatu, sugerisanu oblikom nestacionarne veze, treba uzeti $q^0 = y_A = Vt$. Tada su veze između pravouglih i ovih koordinata

$$x = x, \quad y = q^0 - \xi \cos\alpha, \quad z = \xi \sin\alpha, \tag{7.37}$$

pa su kinetička i potencijalna energija čestice

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (\dot{q}_0 - \dot{\xi}\cos\alpha)^2 + (\dot{\xi}\sin\alpha)^2], \quad \Pi = mgz$$

odnosno

$$T = \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{\xi}^2 + (\dot{q^0})^2 - 2\dot{\xi}\dot{q^0}\cos\alpha], \quad \Pi = mg\xi\sin\alpha \tag{7.38}$$

Prošireni sistem Lagrange-evih jednačina (7.16) za generalisane koordinate x, ξ i q^0

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q^0}} - \frac{\partial T}{\partial q^0} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^0} + R_0$$

ovde ima oblik

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{\xi} - m\dot{q^0}\cos\alpha) = -mg\sin\alpha, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{q^0} - m\dot{\xi}\cos\alpha) = R_0 \end{gathered} \tag{7.39}$$

Veličina R_0 može se naći eliminacijom $\ddot{\xi}$, imajući u vidu da je $\dot{q^0} = V = \text{const}$, tako što iz druge jednačine uzmemo $m\ddot{\xi} = -mg\sin\alpha$, pa uvrštavanjem u treću dobijamo

$$R_0 = -m\ddot{\xi}\cos\alpha = mg\sin\alpha\cos\alpha \tag{7.40}$$

Pošto je $R_0 = -\dfrac{d}{dq^0}(-mg\sin\alpha\cos\alpha\; q^0)$, postoji reonomni potencijal i on je određen sa (7.18)

$$\dot{P} = -\int R_0 dq^0 = -\int mg\sin\alpha\cos\alpha\; dq^0 = -mg\sin\alpha\cos\alpha\cdot q^0 \tag{7.41}$$

U ovom slučaju zadovoljeni su svi uslovi za postojanje zakona održanja energije (7.35), naime aktivna sila $\vec{F} = m\vec{g}$ je konzervativna, nema nepotencijalnih sila i postoji reonomni potencijal, pa važi ovaj zakon održanja energije u obliku

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = T + \Pi + P = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{\xi}^2 + (\dot{q}^0)^2 - 2\dot{\xi}\dot{q}^0\cos\alpha] +\\ + mg\xi\sin\alpha - mg\sin\alpha\cos\alpha\; q^0 = \text{const},\end{aligned} \tag{7.42}$$

što se može potvrditi i neposrednim putem da je $d\mathcal{E}/dt \equiv 0$.

Na osnovu svega ovoga vidimo da je na ovaj način izvršena ozbiljna modifikacija mehanike reonomnih sistema, čime je ukazano na nedovoljnost uobičajene Lagrange-eve formulacije ovakvih sistema, mada formalno korektne, što se posebno ispoljava u odsustvu uticaja nestacionarnih veza na energijske odnose, kao i na neprirodno pojavljivanje samo delova kinetičke energije sistema.

7.3. **Traženje odgovarajuće teorije** (Đ. Mušicki, 1992 [15]). Podstaknut rezultatima V. Vujičića, Đ. Mušicki [15] je potražio odgovarajuću teoriju, koja bi na zadovoljavajući način dala objašnjenje dobijenih rezultata u navedenoj modifikaciji mehanike reonomnih sistema, što se odvijalo u dve faze.

Prva faza: jedna parametarska formulacija mehanike, koja se zasniva na dvostrukoj ulozi vremena za ovakve sisteme (nezavisno promenljiva i parametar u vezama) i na zameni vremena kao parametra jednim novim parametrom, koji je određen samim oblikom nestacionarne veze i uzima se za dopunsku generalisanu koordinatu.

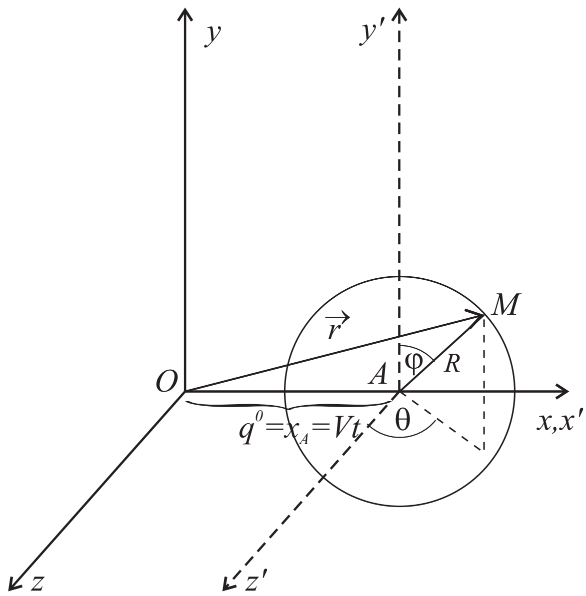
Druga, sledeća faza je prošireni Lagrange-ev formalizam, koji se odnosi na malo opštije nestacionarne veze $f_\mu[\vec{r}_\nu, \varphi_a(t)] = 0$ i zasniva se na proširenju skupa izabranih generalisanih koordinata novim veličinama $\tau_a = \varphi_a(t)$, kojih ima najčešće samo jedna, za koje je pokazano da određuju položaj pridruženog sistema referencije, u odnosu na koji se odnose ove generalisane koordinate. Na taj način prošireni skup generalisanih koordinata je

$$q^\alpha = \{\; \underbrace{q^i (i = 1, 2, \dots, n)}_{\substack{\text{određuju položaj meh.}\\ \text{sistema u odnosu na pri-}\\ \text{druženi sistem referencije}}} \quad ; \quad \underbrace{q^a(t)(a = n+1, \dots, n+A)}_{\substack{\text{određuje položaj ovog sis-}\\ \text{tema u odnosu na neki}\\ \text{inercijalni sistem}}} \;\}, \tag{7.43}$$

pri čemu je zavisnost dopunskih generalisanih koordinata od vremena unapred data.

Primer: kretanje čestice pod uticajem proizvoljnih sila po sferi poluprečnika R, čiji se centar uniformno pomera duž horizontalne ose brzinom V (v. sl. 4).
Ako izaberemo koordinatni sistem kao na slici, jednačina ove pokretne sfere

$$(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{7.44}$$



Sl. 4

predstavlja odgovarajuću nestacionarnu vezu. Položaj čestice na ovoj sferi može se odrediti pomoću sfernih koordinata $q^1 = \theta$ i $q^2 = \varphi$, a za dopunsku generalisanu koordinatu treba uzeti $q^3 \equiv q^0 = x_A = Vt$, jer to je veličina, sugerisana oblikom nestacionarne veze koja se menja prema zakonu $\tau = Vt$.

Kao polazna tačka ovde je uzet ukupni rad idealnih sila reakcija duž virtuelnih pomeranja čestica $d'A = \vec{R}^{id}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu$. Virtuelna pomeranja $\delta\vec{r}_\nu$ ovde su ograničena samim nestacionarnim vezama, pri čemu moramo proširiti sam pojam varijacije položaja na dopunske generalisane koordinate $q^a = \tau_a = \varphi_a(t)$, koje takođe moraju biti varirane, tako da su virtualna pomeranja određena uslovima

$$f(\vec{r}_\nu, \tau_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_\mu}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot \delta\vec{r}_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau_a}\delta\tau_a = 0 \tag{7.45}$$

Tada je ovaj rad idealnih sila reakcija $\vec{R}^{id}_\nu \overset{\text{def}}{=} \lambda_\mu(\partial f_\mu/\partial\vec{r}_\nu)$ na osnovu ovih uslova jednak

$$d'A = \vec{R}^{id}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot \delta\vec{r}_\nu = -\lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau_a}\delta\tau_a,$$

tj. oblika je

$$d'A = \vec{R}^{id}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = R^0_a \delta\tau_a, \tag{7.46}$$

gde je

$$R^0_a = -\lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau_a} = \vec{R}^{id}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q^a} \tag{7.47}$$

Ovaj rezultat bitno se razlikuje od odgovarajućeg rezultata u uobičajenoj Lagrange-evoj formulaciji, gde je $\vec{R}_\nu^{id} \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0$ i predstavlja jednu od bitnih karakteristika ove formulacije mehanike.

Pomoću ovog rezultata formulisan je odgovarajući d'Alembert–Lagrange-ev princip, polazeći od osnovne jednačine dinamike

$$m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu^{id} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

množeći je sa $\delta\vec{r}_\nu$ i sumirajući po indeksu ν. Tako dolazimo do relacije

$$(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu) \cdot \delta\vec{r}_\nu = -\vec{R}_\nu^{id} \cdot \delta\vec{r}_\nu,$$

a zamenjujući $\vec{R}_\nu^{id} \cdot \delta\vec{r}_\nu$ izrazom (7.46) dobijamo d'Alembert–Lagrange-ev princip u ovoj formulaciji mehanike

$$(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu) \cdot \delta\vec{r}_\nu = -R_a^0 \delta\tau_a \tag{7.48}$$

Ako se ovaj princip prevede u ove generalisane koordinate, stavljajući $\delta\vec{r}_\nu = (\partial\vec{r}_\nu/\partial q^\alpha)\delta q^\alpha$ i transformišući poslednji član na sličan način kao u uobičajenoj Lagrange-evoj formulaciji, imajući u vidu da je i ovde $\partial\vec{v}_\nu/\partial\dot{q}^\alpha = \partial\vec{r}_\nu/\partial q^\alpha$ i $\dfrac{d}{dt}(\partial\vec{r}_\nu/\partial q^\alpha) = \partial\vec{v}_\nu/\partial q^\alpha$

$$m_\nu \dot{\vec{v}}_\nu \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha} = \frac{d}{dt}\left(m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\right) - m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha},$$

dobijamo ovaj princip u generalisanim koordinatama

$$\left(Q_\alpha + \delta_\alpha^a R_a^0 - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^\alpha} + \frac{\partial T}{\partial q^\alpha}\right)\delta q^\alpha = 0, \tag{7.49}$$

gde je δ_α^a Kronecker-ov simbol. Odavde zbog proizvoljnosti i nezavisnosti varijacija δq^α sledi da svi koeficijenti uz δq^α moraju biti jednaki nuli

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha + \delta_\alpha^a R_a^0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n + A) \tag{7.50}$$

Ako još generalisane sile Q_α rastavimo na potencijalne i nepotencijalne, označavajući ove poslednje sa zvezdicom, ove jednačine možemo napisati eksplicitno u obliku dveju grupa jednačina

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = Q_a^* + R_a^0 \quad (a = n + 1, \ldots, n + A) \end{aligned} \tag{7.51}$$

To su odgovarajuće Lagrange-eve jednačine u ovoj formulaciji mehanike, čiji je broj $n' = n + A$, gde je A broj dopunskih generalisanih koordinata. Prva grupa jednačina poklapa se sa Lagrange-evim jednačinama u uobičajenoj formulaciji i stoga daje iste jednačine kretanja $q^i = q^i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kao i u toj formulaciji mehanike, ali druga, specifična grupa jednačina zajedno sa prvom daće potpunije energijske zakone. Ako se veličine R_a^0 mogu izraziti kao parcijalni izvodi neke funkcije po odgovarajućoj promenljivoj q^a

$$R_a^0 = -\frac{\partial P}{\partial q^a} \quad \Leftrightarrow \quad P = -\int R_a^0 dq^a, \tag{7.52}$$

Lagrange-eve jednačine (7.51) grupisanjem srodnih članova mogu se napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^* \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n+A) \tag{7.53}$$

gde je nova Lagrange-eva funkcija

$$\mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, t) = L - P = T - (\Pi + P) \tag{7.54}$$

Ovako definisana funkcija P predstavlja izvesno uopštenje odgovarajuće Vujičićeve funkcije, zadržala je naziv reonomni potencijal i pokazano je da se iz kompletnog sistema Lagrange-evih jednačina eliminacijom ostalih veličina uvek može izraziti kao funkcija samo dopunskih generalisanih koordinata q^a.

Na osnovu ovih Lagrange-evih jednačina (7.51) proučeni su odgovarajući energijski odnosi i pokazano je da ovde postoje dva tipa zakona promene energije $d\mathcal{E}/dt$ i odgovarajućih zakona održanja. U tom cilju Lagrange-eve jednačine (7.51), koje zajedno možemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^* + \delta_\alpha^a R_a^0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n+A),$$

pomnožene su sa $dq^\alpha = \dot{q}^\alpha dt$ i izvršeno sumiranje po indeksu α

$$\dot{q}^\alpha d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = (Q_\alpha^* + \delta_\alpha^a R_a^0) dq^\alpha \tag{7.55}$$

Ako se leva strana transformiše na sličan način kao u prethodnom slučaju, imajući u vidu da L može zavisiti i eksplicitno od vremena

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha\right) - dL + \frac{\partial L}{\partial t} dt = Q_\alpha^* dq^\alpha + R_a^0 dq^a,$$

pa se podeli sa dt, dobija se opšti zakon promene energije

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} + Q_\alpha^* \dot{q}^\alpha + R_a^0 \dot{q}^a \tag{7.56}$$

Ovako definisana generalisana energija za uobičajene potencijalne sile na osnovu Euler-ove teoreme za homogene funkcije biće

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - (T - \Pi) = 2T - (T - \Pi) = T + \Pi, \tag{7.57}$$

pa ako je $\partial L/\partial t = 0$, $Q_\alpha^* \dot{q}^\alpha = 0$ i $R_a^0 \dot{q}^a = 0$, važiće zakon o održanju energije u obliku

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - L = T + \Pi = \text{const} \tag{7.58}$$

Ako se veličine R_a^0 mogu izraziti u obliku parcijalnih izvoda neke funkcije po odgovarajućoj promenljivoj q^a, tj. u obliku (7.52), biće $R_a^0 \dot{q}^a = -(\partial P/\partial q^a)\dot{q}^a =$

$-dP/dt$, jer P zavisi samo od promenljivih q^a. Ako se ovaj izraz uvrsti u zakon promene energije

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} + Q^*_\alpha \dot{q}^\alpha - \frac{dP}{dt},$$

grupisanjem srodnih članova i uvodeći funkciju $\mathcal{L} = L - P$, ovaj zakon se može izraziti samo pomoću ove funkcije

$$\frac{d\mathcal{E}^{\text{proš}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - \mathcal{L}\right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + Q^*_\alpha \dot{q}^\alpha \tag{7.59}$$

Ova generalisana energija, takođe primenom Euler-ove teoreme za homogene funkcije biće jednaka

$$\mathcal{E}^{\text{proš}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - \mathcal{L} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - (L - P) = 2T - (T - \Pi - P)$$

odnosno

$$\mathcal{E}^{\text{proš}} = T + \Pi + P, \tag{7.60}$$

pa ako je još $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$ i $Q^*_\alpha \dot{q}^\alpha = 0$, važiće zakon o održanju energije u obliku

$$\mathcal{E}^{\text{proš}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha - \mathcal{L} = T + \Pi + P = \text{const} \tag{7.61}$$

Osnovna karakteristika ove formulacije mehanike je, za razliku od uobičajene Lagrange-eve formulacije, da proširene generalisane koordiate x^α $(\alpha = 1, 2, \dots, n + A)$ određuju položaj posmatranog mehaničkog sistema u odnosu na *isti*, inercijalni sistem referencije u odnosu na koji se odnose sve dinamičke veličine kao i energijski zakoni. Zahvaljujući ovoj osobini, energijski zakoni za reonomne sisteme u ovoj formulaciji mehanike su u potpunoj saglasnosti sa odgovarajućim zakonima u vektorskoj formulaciji mehanike ako se izraze pomoću veličina uvedenih u ovoj formulaciji, a logički konzistentniji, opštiji i prirodniji od odgovarajućih zakona u uobičajenoj Lagrange-evoj formulaciji.

Ova teorija je docnije proširena na neholonomne sisteme i na sisteme sa promenljivom masom (Đ. Mušicki), uz uvođenje i nekih novih pojmova. Pri tome se pokazalo da se u slučaju neholonomnih sistema mora poći od efekta idealnih sila reakcija i Jourdain-ovog principa mehanike, a u slučaju sistema sa promenljivom masom od d'Alembert–Lagrange-evog principa prilagođenog promenljivosti masa. Pomoću Lagrange-evih jednačina koje proizilaze iz ovih principa pokazano je da u oba slučaja postoje četiri tipa zakona promene energije $d\mathcal{E}/dt$ i odgovarajućih zakona održanja, gde pored reonomnog potencijala figurišu i izvesne ovde uvedene analogne veličine.

8. Zakoni održanja primenom Noether-ine teoreme (Emmy Noether, 1918 [16])

8.1. **Teorema Emmy Noether.** U svom radu "Invarijantni varijacioni problemi" [16], objavljenom 1918. godine (na nemačkom) Emmy Noether je razmatrala problem invarijanata varijacionih zadataka, objedinjujući metode varijacionog računa sa metodama teorije grupa S. Lie-a. Pri tome je dala opšti algoritam za nalaženje potpunog sistema invarijanata ma koje fizičke teorije, formulisane u terminima Lagrange-evog ili Hamilton-ovog formalizma (v. npr. L. Polak [4], str. 322–336). Ova Noether-ina teorema je primenljiva ne samo u klasičnoj mehanici i teoriji polja (E. Hill, 1951), već i u kvantnoj mehanici i teoriji polja (Bogoljubov i Širkov, 1957), uz izvesne generalizacije i korišćenje savremenog matematičkog aparata (Scarlet i Contrijn, 1981).

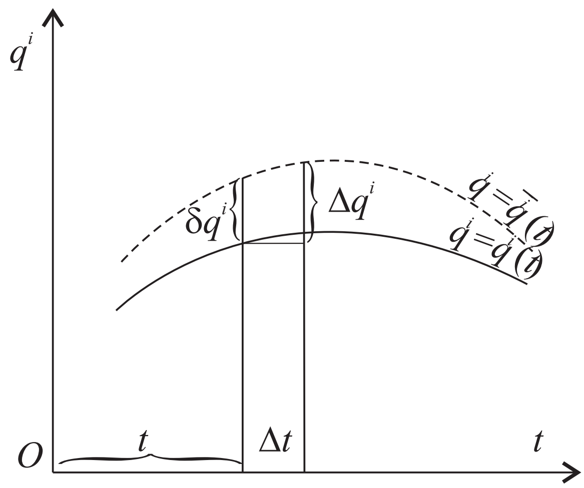
8.2. **Totalna varijacija dejstva.** Primena teoreme Emmy Noether zasniva se na totalnoj varijaciji dejstva i stoga se prethodno kratko osvrnimo na sam pojam totalne varijacije. U tom cilju, uporedo sa skupom realnih putanja čestica sistema, izraženih u vektorskom obliku ili pomoću generalisanih koordinata

$$\text{(8.1)}\qquad \vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t) \ \ (\nu = 1, 2, \ldots, N) \quad \Leftrightarrow \quad q^i = q^i(t) \ \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

zamislimo familiju variranih putanja čestica, prikazanim malo izmenjenim funkcijama vremena u nekom vremenskom intervalu (t_0, t_1)

$$\text{(8.2)}\qquad \vec{r}_\nu = \overline{\vec{r}_\nu(t)} \ \ (\nu = 1, 2, \ldots, N) \quad \Leftrightarrow \quad q^i = \overline{q^i(t)} \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

i definisanih na uobičajeni način. To znači da se ove varirane putanje smeju



Sl. 5

samo malo razlikovati od realnih i moraju biti u saglasnosti sa vezama, u ostalom pogledu mogu biti sasvim proizvoljne. Tada se totalna ili asinhrona varijacija neke generalisane koordinate definiše kao (v. sl. 5)

$$\text{(8.3)}\qquad \Delta q^i \stackrel{\text{def}}{=} \overline{q^i}(t + \Delta t) - q^i(t),$$

a ako se funkcija $\overline{q^i}(t+\Delta t)$ razvije u Taylor-ov red i zanemare viši članovi

$$\overline{q^i}(t+\Delta t) = \overline{q^i}(t) + \Delta t\left(\frac{d\overline{q^i}}{dt}\right)_0 + \cdots \approx \overline{q^i}(t) + \dot{q}^i\Delta t,$$

dobija se

$$\Delta q^i = \overline{q^i}(t) - q^i(t) + \dot{q}^i\Delta t = \delta q^i + \dot{q}^i\Delta t \tag{8.4}$$

Na sličan način, za ma kakvu funkciju oblika $F(q^i, \dot{q}^i, t)$ njena totalna varijacija biće, posle razvijanja funkcije $F(\overline{q^i}, \overline{\dot{q}^i}, t)$ u Taylor-ov red

$$\Delta F = \overline{F}(t+\Delta t) - F(t) \approx \delta F + \dot{F}\Delta t \tag{8.5}$$

Međutim, dok su operacije simultanog variranja i diferenciranja po vremenu komutativne, tj. $\delta\dot{q}^i = \dfrac{d}{dt}(\delta q^i)$, za totalne varijacije to ne važi: $\Delta\dot{q}^i \neq \dfrac{d}{dt}(\Delta q^i)$. U tom cilju primenimo formulu (8.5) na funkciju $F = \dot{q}^i$

$$\begin{aligned}\Delta\dot{q}^i = \delta\dot{q}^i + \ddot{q}^i\Delta t &= \frac{d}{dt}(\delta q^i) + \ddot{q}^i\Delta t = \frac{d}{dt}(\Delta q^i - \dot{q}^i\Delta t) + \ddot{q}^i\Delta t\\ &= \frac{d}{dt}(\Delta q^i) - \ddot{q}^i\Delta t - \dot{q}^i\frac{d}{dt}(\Delta t) + \ddot{q}^i\Delta t,\end{aligned}$$

odnosno između operacije Δ i d/dt postoji veza

$$\Delta\dot{q}^i = \Delta\frac{dq^i}{dt} = \frac{d}{dt}(\Delta q^i) - \dot{q}^i\frac{d}{dt}(\Delta t) \tag{8.6}$$

Na osnovu ovih rezultata može se naći totalna varijacija dejstva, koja je prema definiciji ovog pojma jednaka razlici dejstva na variranom i na stvarnom putu posmatranog sistema

$$\Delta W = \int_{\overline{t_0}}^{\overline{t_1}} L(\overline{q^i}, \dot{\overline{q^i}}, \overline{t})\, d\overline{t} - \int_{t_0}^{t_1} L(q^i, \dot{q}^i, t)\, dt, \tag{8.7}$$

gde je

$$\overline{q^i} = q^i + \Delta q^i, \quad \dot{\overline{q^i}} = \dot{q}^i + \Delta\dot{q}^i, \quad \overline{t} = t + \Delta t \tag{8.8}$$

Prvi integral može se razložiti na tri integrala

$$\int_{\overline{t_0}}^{\overline{t_1}} (\ )\, d\overline{t} = \int_{t_0+\Delta t_0}^{t_0} (\ )\, d\overline{t} + \int_{t_0}^{t_1} (\ )\, d\overline{t} + \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} (\ )\, d\overline{t} \approx \int_{t_0}^{t_1} (\ )\, d\overline{t},$$

jer su prvi i treći integral zanemarljivi u odnosu na drugi, tako da imamo

$$\Delta W \approx \int_{t_0}^{t_1} [L(\overline{q^i}, \dot{\overline{q^i}}, \overline{t})\, d\overline{t} - L(q^i, \dot{q}^i, t)\, dt] = \int_{t_0}^{t_1} \Delta(Ldt) = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta L dt + L\Delta(dt)],$$

a pošto su operacije Δ i d komutativne, ova relacija može se napisati u obliku

$$\Delta W \approx \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta L + L\frac{d}{dt}(\Delta t)\right] dt \tag{8.9}$$

Ako se član $\Delta L(q^i, \dot{q}^i, t)$ razvije, pri čemu se $\Delta\dot{q}^\alpha$ zameni izrazom (8.6) iz relacije između operacija Δ i d/dt, dobija se

(8.10)
$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i}\Delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left[\frac{d}{dt}(\Delta q^i) - \dot{q}^i\frac{d}{dt}(\Delta t)\right] + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + L\frac{d}{dt}(\Delta t)\right\} dt$$

Ovde možemo izvršiti sledeće transformacije, u cilju da se izdvoje članovi koji se mogu napisati u vidu vremenskih izvoda

$$\begin{gathered} L\frac{d}{dt}(\Delta t) = \frac{d}{dt}(L\Delta t) - \frac{dL}{dt}\Delta t = \frac{d}{dt}(L\Delta t) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}\right)\Delta t \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d}{dt}(\Delta q^i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\Delta q^i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\Delta q^i \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\frac{d}{dt}(\Delta t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\Delta t\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i\Delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i\Delta t \end{gathered} \tag{8.11}$$

Ako ove izraze uvrstimo u prethodnu relaciju, imaćemo

$$\begin{aligned} \Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[& \frac{\partial L}{\partial q^i}\Delta q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\Delta q^i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\Delta q^i \\ & - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\Delta t\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i\Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i\Delta t \\ & + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{d}{dt}(L\Delta t) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}\right)\Delta t \Bigg], \end{aligned}$$

pa posle grupisanja srodnih članova totalna varijacija dejstva može se prikazati u obliku

$$\begin{aligned} \Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ & \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\Delta q^i - \dot{q}^i\Delta t) + L\Delta t\right] \\ & + \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)(\Delta q^i - \dot{q}\Delta t)\Bigg\} dt, \end{aligned} \tag{8.12}$$

koji važi sasvim generalno, u opštem slučaju.

8.3. **Noether-ina teorema u klasičnoj mehanici (E. Hill, 1951 [17]).** E. Hill je prvi primenio teoremu Emmy Noether na mehaniku 1951 godine [17], na sisteme koji se mogu odrediti pomoću Lagrange-eve funkcije sa više nezavisno preomenljivih i pokazao kako se pomoću nje mogu dobiti zakoni održanja, uključujući kao specijalni slučaj sistem čestica u klasičnoj mehanici. U ovom poslednjem slučaju ova primena Noether-ine teoreme može se izvršiti i neposredno, znatno jednostavnije i to na sledeći način (v. npr. Dobronravov [18]).

Posmatrajmo sad takve transformacije generalisanih koordinata i vremena Δq^i i Δt koje ostavljaju dejstvo invarijantnim ili ga menjaju do integrala vremenskog izvoda neke funkcije

$$\Delta W = 0 \quad \text{ili} \quad \Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\Lambda}(q^i, t)\, dt, \tag{8.13}$$

gde je Λ proizvoljna funkcija položaja i vremena. Kaže se da je dejstvo u prvom slučaju apsolutno invarijantno, a u drugom kalibraciono invarijantno, ili invarijantno do na kalibracioni term, a ovako uvedena funkcija $\Lambda(q^i, t)$ naziva se kalibraciona funkcija. Uzmimo drugi uslov, koji obuhvata i prvi za $\Lambda = 0$, pa u njemu ΔW zamenimo izrazom za totalnu varijaciju dejstva (8.12)

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} (\Delta q^i - \dot{q}^i \Delta t) + L \Delta t \right] + \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) (\Delta q^i - \dot{q}^i \Delta t) \right\} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Lambda}{dt} dt,$$

a posle izvesnog preuređenja ovaj uslov dobija vid

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \bigg\{ \frac{d}{dt} & \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \Delta q^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) \Delta t - \Lambda \right] \\ & - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) (\Delta q^i - \dot{q}^i \Delta t) \bigg\} dt = 0 \end{aligned} \tag{8.14}$$

Izrazimo sad transformacije generalisanih koordinata i vremena Δq^i i Δt u obliku r-parametarske grupe izvesnih funkcija položaja i vremena i r beskonačno malih parametara ε^m $(m = 1, 2, \ldots, r)$

$$\Delta q^i = \overline{q^i} - q^i = \varepsilon^m \xi^i_m (q^k, t), \qquad \Delta t = \bar{t} - t = \varepsilon^m \xi^0_m (q^k, t) \tag{8.15}$$

i tako definisane funkcije ξ^i_m i ξ^0_m nazivaju se prostorni odnosno vremenski generatori ove infinitezimalne transformacije. Ako još stavimo $\Lambda = \varepsilon^m \Lambda_m$, navedeni uslov (8.14) može se izraziti pomoću ovih funkcija

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon^m \bigg\{ \frac{d}{dt} & \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \xi^i_m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) \xi^0_m - \Lambda_m \right] \\ & - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) (\xi^i_m - \dot{q}^i \xi^0_m) \bigg\} dt = 0 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Odavde se izvodi sledeći zaključak: ako nema nepotencijalnih sila, Lagrange-eve jednačine (4.23) su zadovoljene u obliku Euler-Lagrange-evih jednačina

$$Q^*_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8.17}$$

pa otpada drugi deo u relaciji (8.16)

$$\int_{t_0}^{t_1} \varepsilon^m \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \xi^i_m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) \xi^0_m - \Lambda_m \right] dt = 0,$$

a zbog proizvoljnosti vremenskog intervala (t_0, t_1) i parametra ε^m odavde sledi

$$I_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \xi^i_m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) \xi^0_m - \Lambda_m = \text{const} \quad (m = 1, 2, \ldots, r) \tag{8.18}$$

Prema tome, ako nema nepotencijalnih sila, svakoj transformaciji generalisanih koordinata i vremena koja ostavlja dejstvo invarijantnim ili ga menja do na kalibracioni term odgovara r nezavisnih integrala kretanja oblika (8.18) (teorema Emmy Noether za mehaniku).

8.4. **Integral energije kao posledica translacije vremena.** Sugerisani ranijim zaključkom da je zakon održanja energije posledica homogenosti vremena (v. odeljak 6.5), uzmimo za transformacije generalisanih koordinata i vremena translaciju vremena

$$\Delta t = \bar{t} - t = \varepsilon = \text{const}, \quad \Delta q^i = \overline{q^i} - q^i = 0, \tag{8.19}$$

čemu prema (8.15) odgovaraju, kao generatori ove transformacije $\xi^0_m = 1$ i $\xi^i_m = 0$. Ako nema nepotencijalnih sila i ako je $\partial L/\partial t = 0$, ova transformacija prema (8.10) ostavlja dejstvo invarijantnim, čemu odgovara $\Lambda = 0$, te je zadovoljen uslov za postojanje integrala kretanja. On je određen formulom (8.18)

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i_m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\xi^0_m - \Lambda_m = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\cdot 1 = \text{const},$$

a to je zakon održanja energije

$$I = -\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right) = -\mathcal{E} = \text{const}, \tag{8.20}$$

u saglasnosti sa ranije dobijenim zaključkom (6.24).

Napomenimo još da se iz ove Noether-ine teoreme u slučaju translacije koordinata mogu dobiti zakoni održanja impulsa i momenta impulsa.

9. Uopštenje Noether-ine teoreme za nekonzervativne sisteme

9.1. **Generalizacija Noether-ine teoreme za nekonzervativne sisteme** (B. Vujanović i Đ. Đukić, 1975 [19])**.** Teorema Emmy Noether daje nam kriterijum pod kojim uslovima postoje integrali kretanja i kakav oblik oni imaju, ali nam ne daje odgovor na pitanje kako naći transformacije (8.15) pri kojima postoje integarali kretanja. Takav zadatak postavio je B. Vujanović delimično u saradnji sa Đ. Đukićem [19] i to u širem kontekstiu, sa dvostrukim ciljem: 1) kako naći takve transformacije generalisanih koordinata i vremena koje zadovoljavaju potrebne uslove, i 2) kako generalisati teoremu Emmy Noether tako da važi i za nekonzervativne sisteme. Pokazalo se da su ova dva pitanja međusobno povezana i u tom cilju ovi autori su proširili oblik funkcija generatora ξ^i_m i ξ^0_m, definisanih formulama (8.15), tako da one mogu zavisiti i od generalisanih brzina, pri čemu su se ograničili na jednoparametarske transformacije (sa našim oznakama)

$$\Delta q^i = \overline{q^i} - q^i = \varepsilon\xi^i(q^k, \dot{q}^k, t), \quad \Delta t = \bar{t} - t = \varepsilon\xi^0(q^k, \dot{q}^k, t) \tag{9.1}$$

Baš to proširenje oblika ovih funkcija omogućilo je da se odgovarajućim proširenjem Noether-ine teoreme mogu naći u mnogim slučajevima i izvesni integrali kretanja za nekonzervativne sisteme.

Ova generalizacija Noether-ine teoreme odvijala se u dva koraka. U prvom, koji se odnosio na konzervativne sisteme, pošlo se od totalne varijacije dejstva, koja treba da bude invarijantna do na kalibracioni term

$$\Delta W = \int \varepsilon \dot{\Lambda}(q^k, \dot{q}^k, t)\, dt,$$

pa se ΔW zameni izrazom (8.10), čime se dobija

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ \frac{\partial L}{\partial q^i}\Delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left[\frac{d}{dt}(\Delta q^i) - \dot{q}^i \frac{d}{dt}(\Delta t)\right] \\ + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + L\frac{d}{dt}(\Delta t) - \varepsilon\dot{\Lambda}\Big\} dt = 0 \end{aligned} \tag{9.2}$$

Ako se sad Δq^i i Δt zamene izrazima (9.1) i izvrši izvesno pregrupisavanje, prethodna relacija se može napisati u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1} \varepsilon \left[\frac{\partial L}{\partial q^i}\xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{\xi}^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\dot{\xi}^0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi^0 - \dot{\Lambda}\right] dt = 0, \tag{9.3}$$

a pošto je vremenski interval (t_0, t_1) proizvoljan kao i parametar ε, odavde sledi da mora biti

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}\xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{\xi}^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\dot{\xi}^0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi^0 - \dot{\Lambda} = 0 \tag{9.4}$$

To je uslov za postojanje integrala kretanja, izražen pomoću funkcija generatora ξ^i i ξ^0 i kalibracione funkcije Λ i nazvan je osnovna Noether-ina identičnost, a ako je ovaj uslov zadovoljen, odgovarajući integral kretanja je određen formulom (8.18)

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\xi^0 - \Lambda = \text{const} \tag{9.5}$$

Ovaj uslov (9.4) može se napisati i u eksplicitnom obliku, ako se razviju ovi totalni vremenski izvodi funkcija ξ^i, ξ^0 i Λ, što posle pogodnog grupisanja članova daje

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^i}\xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial \xi^i}{\partial t}\right) + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\left(\frac{\partial \xi^0}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial \xi^0}{\partial t}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\xi^0 \\ - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) + \ddot{q}^k\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial \dot{q}^k} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\frac{\partial \xi^0}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^k}\right] = 0 \end{aligned}$$

Ova relacija je oblika $A + \ddot{q}^k B_k = 0$, gde A i B ne zavise od $\ddot{q}^k$, a da bi ona bila zadovoljena mora biti $A = 0$ i $B = 0$, tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^i}\xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial \xi^i}{\partial t}\right) + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\left(\frac{\partial \xi^0}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial \xi^0}{\partial t}\right) \\ + \frac{\partial L}{\partial t}\xi^0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial q^k}\dot{q}^k - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{9.6}$$

kao i

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial \dot{q}^k} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\frac{\partial \xi^0}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^k} = 0 \tag{9.7}$$

Ove jednačine nazvane su generalisane Killing-ove jednačine i one u eksplicitnom obliku izražavaju uslov za postojanje integrala kretanja (Killing je ove jednačine dobio sa sasvim drugim ciljem i to u specijalnom slučaju kad je $\xi^i = \xi^i(q^k, t)$, $\xi^0 = 0$ i $\Lambda = 0$). Smisao ovih jednačina sastoji se u sledećem: ako se bilo kojim postupkom nađe bar jedno partikularno rešenje ovih jednačina (9.6) i (9.7) za funkcije ξ^i, ξ^0 i Λ, ili ekvivalentne osnovne Noether–identičnosti (9.4), zadovoljen je uslov za postojanje integrala kretanja i on je tada određen formulom (9.5).

Na ovaj način možemo dobiti osnovne zakone održanja energije, impulsa i momenta impulsa. Tako npr. ako je $\partial L/\partial t = 0$, jedno partikularno rešenje generalisanih Killing–ovih jednačina za funkcije ξ^i, ξ^0 i Λ je

(9.8) $$\xi^i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \xi^0 = A = \text{const}, \quad \Lambda = 0,$$

a odgovarajući integral kretanja prema (9.5) biće

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\xi^0 - \Lambda = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)A = \text{const}$$

odnosno

(9.9) $$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = \text{const},$$

u saglasnosti sa ranijim zaključkom da je zakon održanja energije posledica translacije vremena (v. odeljak 8.4).

Međutim, izbor funkcija ξ^i, ξ^0 i Λ koji daje isti integral kretanja nije jednoznačan. Na pr. ako uzmemo

(9.10) $$\xi^i = B\dot{q}^i, \quad \xi^0 = 0, \quad \Lambda = 0,$$

formiramo generalisane Killing-ove jednačine i odredimo Λ tako da ove jednačine budu zadovoljene, odgovarajući integral kretanja biće opet zakon održanja energije (9.9).

Pri drugom koraku proučavanja ovog problema, koji se odnosi na nekonzervativne sisteme, odgovarajuća generalisana Noether–ina teorema dobijena je polazeći od d'Alembert–Lagrange-evog principa (4.4)

(9.11) $$\left(\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu\right) \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0,$$

pa se transformiše u centralnu Lagrange-evu jednačinu i uvedu totalne varijacije odgovarajućih promenljivih, pri čemu nije čak ni pretpostavljeno da su operacije variranja i diferenciranja po vremenu komutativne.

Ako se poslednji član transformiše na sledeći način

$$m_\nu \dot{\vec{v}}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = \frac{d}{dt}(m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu) - m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \delta\vec{v}_\nu + m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \left[\delta\vec{v}_\nu - \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_\nu)\right]$$

gde drugi član na desnoj strani predstavlja varijaciju kinetičke energije δT, d'Alembert–Lagrange-ev princip dobija vid

(9.12) $$\delta T + \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = \frac{d}{dt}(m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu) + m_\nu \vec{v}_\nu \left[\delta\dot{\vec{r}}_\nu - \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_\nu)\right]$$

Rastavljanjem aktivnih sila $\vec{F}_\nu$ na potencijalne i nepotencijalne, pri čemu je $\vec{F}_\nu^{\rm pot}\cdot\delta\vec{r}_\nu=-(\partial\Pi/\partial\vec{r}_\nu)\cdot\delta\vec{r}_\nu=-\delta\Pi$, leva strana može se prikazati kao

$$\delta T+\left(\vec{F}_\nu^{pot}+\vec{F}_\nu^{*}\right)\cdot\delta\vec{r}_\nu=\delta T-\delta\Pi+\vec{F}_\nu^{*}\cdot\delta\vec{r}_\nu=\delta L+\vec{F}_\nu^{*}\cdot\delta\vec{r}_\nu,$$

pa prethodna relacija prelazi u

$$\delta L+\vec{F}_\nu^{*}\cdot\delta\vec{r}_\nu=\frac{d}{dt}(m_\nu\vec{v}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu)+m_\nu\vec{v}_\nu\left[\delta\dot{\vec{r}}_\nu-\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_\nu)\right]\tag{9.13}$$

Ako se pređe na generalisane koordinate, stavljajući $\delta\vec{r}_\nu=(\partial\vec{r}_\nu/\partial q^i)\delta q^i$ i imajući u vidu da je $\partial\vec{v}_\nu/\partial\dot{q}^i=\partial\vec{r}_\nu/\partial q^i$, dobija se

$$m_\nu\vec{v}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu=m_\nu\vec{v}_\nu\cdot\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q^i}\delta q^i=m_\nu\vec{v}_\nu\cdot\frac{\partial\vec{v}_\nu}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i$$

odnosno za obične potencijalne sile

$$m_\nu\vec{v}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i=p_i\delta q^i,\tag{9.14}$$

a na sličan način se dokazuje da je

$$m_\nu\vec{v}_\nu\cdot\left[\delta\dot{\vec{r}}_\nu-\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_\nu)\right]=p_i\left[\delta\dot{q}^i-\frac{d}{dt}(\delta q^i)\right],\tag{9.15}$$

a pošto je $\vec{F}_\nu^{*}\cdot\delta\vec{r}_\nu=Q_i^{*}\delta q^i$, d'Alembert–Lagrange-ev princip (9.13) može se prikazati u vidu

$$\delta L+Q_i^{*}\delta q^i=\frac{d}{dt}(p_i\delta q^i)+p_i\left[\delta\dot{q}^i-\frac{d}{dt}(\delta q^i)\right]\tag{9.16}$$

To je centralna Lagrange-eva jednačina u uopštenom, Hamel-ovom obliku, koja može služiti kao baza za dobijanje relacija bez uobičajenog prihvatanja komutativnosti operacija variranja i diferenciranja po vremenu.

U ovom slučaju prihvaćena je ta komutativnost, tj. $\delta\dot{q}^i=\frac{d}{dt}(\delta q^i)$, kad otpada poslednnji član u relaciji (9.16), pa se prelazi sa sinhronih na totalne varijacije na osnovu (8.4) i (8.5), stavljajući još $p_i=\partial L/\partial\dot{q}^i$, te centralna Lagrange-eva jednačina postaje

$$\Delta L-\dot{L}\Delta t+Q_i^{*}(\Delta q^i-\dot{q}^i\Delta t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}(\Delta q^i-\dot{q}^i\Delta t)\right]\tag{9.17}$$

Ako se ΔL napiše u eksplicitnom obliku, zamenjujući $\Delta\dot{q}^i$ odgovarajućim izrazom iz relacije (8.6) između $\Delta\dot{q}^i$ i $\frac{d}{dt}(\Delta q^i)$, i transformiše drugi član, imaćemo

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial q^i}\Delta q^i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\left[\frac{d}{dt}(\Delta q^i)-\dot{q}^i\frac{d}{dt}(\Delta t)\right]+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t\\&\qquad-\frac{d}{dt}(L\Delta t)+L\frac{d}{dt}(\Delta t)+Q_i^{*}(\Delta q^i-\dot{q}^i\Delta t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}(\Delta q^i-\dot{q}^i\Delta t)\right],\end{aligned}$$

pa ako se od obeju strana oduzme $\varepsilon\dot{\Lambda}$, gde Λ može biti ma kakva funkcija od q^i, $\dot{q}^i$i t (to je ekvivalentno kalibracionoj funkciji), i izvrši izvesno pregrupisavanje članova, prethodna relacija može se napisati u vidu

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial q^i}\Delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\frac{d}{dt}(\Delta q^i) + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)\frac{d}{dt}(\Delta t) + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t \\
&+ Q_i^*(\Delta q^i - \dot q^i \Delta t) - \varepsilon\dot\Lambda = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\Delta q^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)\Delta t - \varepsilon\Lambda\right]
\end{aligned} \tag{9.18}
$$

Ako se još Δq^i i Δt zamene izrazima (9.1), ovako transformisaana centralna Lagrange-eva jednačina dobija vid

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q^i}\xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot\xi^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)\dot\xi^0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi^0 + Q_i^*(\xi^i - \dot q^i\xi^0) - \dot\Lambda \\
= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\xi^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)\xi^0 - \Lambda\right]
\end{aligned} \tag{9.19}
$$

Odavde vidimo da ako je izraz na levoj strani jednak nuli, izraz u srednjoj zagradi na desnoj strani biće konstantan, odakle je izveden sledeći zaključak. Svakoj transformaciji generalisanih koordinata i vremena koja zadovoljava uslov

$$
\frac{\partial L}{\partial q^i}\xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot\xi^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)\dot\xi^0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi^0 + Q_i^*(\xi^i - \dot q^i\xi^0) - \dot\Lambda = 0 \tag{9.20}
$$

odgovara jedan integral kretanja oblika

$$
I = \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\xi^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)\xi^0 - \Lambda = \mathrm{const} \tag{9.21}
$$

To je odgovarajuća generalisana Noether-ina teorema, koja važi i za nekonzervativne sisteme, a uslov (9.20) za postojanje integrala kretanja nazvan je generalisana osnovna Noether-ina identičnost. Nalaženje takvih transformacija generalisanih koordinata i vremena koje zadovoljavaju taj uslov rešen je na sličan način kao i u slučaju konzervativnih sistema, naime u navedenom uslovu (9.20) razviju se svi vremenski izvodi funkcija ξ^i, ξ^0 i Λ, čime su dobijene odgovarajuće generalisane Killing-ove jednačine, koje se razlikuju od jednačina (9.6) samo prisustvom još jednog dopunskog člana $Q_i^*(\xi^i - \dot q^i\xi^0)$, dok jednačine (9.7) ostaju nepromenjene. Njihov smisao je isti kao u prethodnom slučaju: treba samo naći jedno partikularno rešenje ovih jednačina za funkcije ξ^i, ξ^0 i Λ, tada je uslov za postojanje integrala kretanja zadovoljen, a odgovarajući integral kretanja tada se nalazi pomoću formule (9.21)

Poseban značaj ove generalisane Noether-ine teoreme leži u tome što se u mnogim slučajevima kad ne važi zakon održanja energije ovim metodom može naći neki integral kretanja, nazvan zakon održanja energiji slične veličine (energy–like conservation law). U navedenoj monografiji prikazani su i razrađeni metodi za dobijanje takvih integrala kretanja (metod polja, metod iščezavajućeg parametra, metod nekomutativnih pravila, primena Gauss-ovog principa i principa najmanjeg dejstva) sa nizom odgovarajućih primera.

Do ovog rezultata može se doći i neposredno, čak i jednostavnije, polazeći od totalne varijacije dejstva, u kojoj se varijacioni izvod zameni izrazom iz odgovarajućih Lagrange-evih jednačina i izvrše analogne transformacije (Đ. Mušicki, 1994).

Primer. Navedimo ovde jedan primer takvog tipa integrala kretanja: kretanje linearnog oscilatora duž x–ose u otpornoj sredini pod uticajem privlačne sile $F = -m\omega^2 x$ i otporne sile $F^* = -2mk\dot{x}$. U ovom slučaju ne važi zakon održanja energije, ali je nađen jedan zakon održanja energiji slične veličine i to na sledeći način.

Ovaj problem ima samo jedan stepen slobode i za generalisanu koordinatu uzeta je $q = x$, pa je ovaj problem određen sledećom Lagrange-evom funkcijom i nepotencijalnom silom

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad F^* = -2mk\dot{x}, \tag{9.22}$$

a uslov za postojanje integrala kretanja, tj. generalisana osnovna Noether-ina identičnost (9.20) glasi

(9.23)

$$-m\omega^2 x \cdot \xi^1 + m\dot{x}\dot{\xi}^1 + \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - m\dot{x}\cdot\dot{x}\right)\dot{\xi}^0 - 2mk\dot{x}(\xi^1 - \dot{x}\xi^0) - \dot{\Lambda} = 0$$

Potražimo rešenja za ξ^1 i ξ^0 u obliku

$$\xi^1 = F(x,\dot{x})\cdot G(t), \quad \xi^0 = 0, \tag{9.24}$$

a posle ovih nađenih rešenja Λ ćemo odrediti tako da uslov (9.23) bude zadovoljen. Uvrštavanjem ovih izraza u gornju relaciju dobijamo

$$-m\omega^2 xFG + m\dot{x}(\dot{F}G + F\dot{G}) - 2mk\dot{x}\cdot FG - \dot{\Lambda} = 0$$

ili posle grupisanja

$$m\dot{x}F(\dot{G} - 2kG) + mG(\dot{x}\dot{F} - \omega^2 xF) - \dot{\Lambda} = 0 \tag{9.25}$$

Izaberimo sad funkciju G tako da bude

$$\dot{G} - 2kG = 0, \tag{9.26}$$

odakle sledi

$$\frac{dG}{G} = 2kdt \quad \Rightarrow \quad \ln G = 2kt + \ln C,$$

a otuda

$$G(t) = Ce^{2kt}, \tag{9.27}$$

pa se prethodna relacija (9.25) svodi na

$$G(\dot{x}\dot{F} - \omega^2 xF) - \frac{1}{m}\dot{\Lambda} = 0. \tag{9.28}$$

Potražimo sad funkciju $F(x,\dot{x})$ u obliku

$$F(x,\dot{x}) = A\dot{x} + Bx, \tag{9.29}$$

pa uvrštavanjem u relaciju (9.28) imamo

$$G[\dot{x}(A\ddot{x} + B\dot{x}) - \omega^2 x(A\dot{x} + Bx)] - \frac{1}{m}\dot{\Lambda} = 0$$

ili posle grupisanja

$$AG(\dot{x}\ddot{x} - \omega^2 x\dot{x}) + BG(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) - \frac{1}{m}\dot{\Lambda} = 0,$$

što posle uvrštavanja izraza (9.27) za G može da se napiše u obliku

$$ACe^{2kt} \cdot \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) + BCe^{2kt}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) - \frac{1}{m}\dot{\Lambda} = 0 \tag{9.30}$$

Da bi ova relacija bila integrabilna, tj. da bi se funkcija Λ mogla dobiti u konačnom obliku, mora biti

$$BCe^{2kt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ACe^{2kt}\right) \quad \Rightarrow \quad B = kA \tag{9.31}$$

pa prethodna relacija dobija oblik

$$\frac{d\Lambda}{dt} = mC\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Ae^{2kt}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)\right],$$

a otuda

$$\Lambda = \frac{1}{2}ACme^{2kt}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \tag{9.32}$$

Tada je funkcija ξ^1 prema (9.24), (9.27) i (9.29)

$$\xi^1 = FG = (A\dot{x} + Bx) \cdot Ce^{2kt},$$

što se na osnovu (9.31) svodi na

$$\xi^1 = ACe^{2kt}(\dot{x} + kx) \tag{9.33}$$

Sa tako određenim funkcijama ξ^1 i Λ (uz $\xi^0 = 0$) zadovoljen je uslov za postojanje integrala kretanja, koji je tada određen formulom (9.21)

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\xi^1 + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\xi^0 - \Lambda = m\dot{x} \cdot \xi^1 - \Lambda \tag{9.34}$$

Posle uvrštavanja nađenih vrednosti za ξ^1 i Λ dobija se

$$\begin{aligned} I &= m\dot{x} \cdot ACe^{2kt}(\dot{x} + kx) - \frac{1}{2}ACme^{2kt}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \\ &= ACme^{2kt}\left(\dot{x}^2 + kx\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) \end{aligned}$$

odnosno

$$I = A'm\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + kx\dot{x}\right)e^{2kt}, \tag{9.35}$$

gde je $A' = AC$. Prema tome, iako u ovom slučaju ne važi zakon održanja energije, važiće zakon održanja energiji slične veličine u obliku

$$I = A'\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + mkx\dot{x}\right)e^{2kt} = \text{const}, \tag{9.36}$$

gde prva dva člana u zagradi odgovaraju energiji linearnog oscilatora kad ne bi bilo otporne sile, a uticaj ove otporne sile sadržan je u trećem članu i u eksponencijalnom faktoru.

9.2. **Proširenje ove Noether-ine teoreme na sisteme sa promenljivom masom** (L. Cvetićanin, 1993 [20]). U ovim radovima L. Cvetićanin [20] proširenjem Vujanovićevog metoda je dobila generalisanu Noether-inu teoremu za sisteme sa promenljivom masom. To je izvršeno takođe pomoću d'Alembert–Lagrange-evog principa, ovde proširenog na sisteme sa promenljivom masom, potom transformisanog u centralnu Lagrange-evu jednačinu uz prelaz sa sinhronih na totalne varijacije. Pri tome je razmatran najopštiji slučaj, kad mase čestica mogu zavisiti ne samo od vremena, već i od položaja i brzina čestica, a u generalisanim koordinatama od promenljivih q^i, $\dot{q}^i$ i t.

Na taj način dobijena je sledeća generalisana Noether–ina teorema za sisteme sa promenljivom masom (u našim oznakama): Svakoj transformaciji generalisanih koordinata i vremena koja zadovoljava uslov

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}\xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{\xi}^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\dot{\xi}^0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi^0 + (Q_i^* + P_i)(\xi^i - \dot{q}^i\xi^0) - \dot{\Lambda} = 0 \tag{9.37}$$

odgovara jedan integral kretanja oblika

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\xi^i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\xi^0 - \Lambda = \text{const}, \tag{9.38}$$

gde je P_i karakterističan faktor, koji izražava zavisnost masa čestica od t, q^i i $\dot{q}^i$. U navedenoj monografiji, posle teorijskog dela koji obuhvata i adijabatske invarijante, sistematski je izvršena klasifikacija teorijskih modela mašina sa promenljivom masom i za mnoge od njih nađeni su zakoni održanja energiji sličnih veličina.

9.3. **Modifikacija generalisane Noether-ine teoreme za prošireni Lagrange-ev formalizam** (Đ. Mušicki, 2000 [15]). Ovo proširenje generalisane Noether-ine teoreme Đ. Mušicki [15] je izvršio prvo u parametarskoj formulaciji mehanike, a potom i u proširenom Lagrange-evom formalizmu, ali za razliku od Vujanovića izvršeno je direktno, polazeći od totalne varijacije dejstva primenjene na proširene generalisane koordinate x^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n + A$) i odgovarajućih Lagrange-evih jednačina u ovoj formulaciji mehanike. Pri tome se polazi od nešto opštijih transformacija generalisanih koordinata i vremena oblika

$$\Delta q^\alpha = \overline{q}^\alpha - q^\alpha = \varepsilon^m \xi_m^\alpha(q^k, \dot{q}^k, t), \quad \Delta t = \overline{t} - t = \varepsilon^m \xi_m^0(q^k, \dot{q}^k, t), \tag{9.39}$$

gde je $m = 1, 2, \dots, r$, tj. u obliku r-parametarske grupe, primenjene na proširene generalisane koordinate q^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n + A$). Potom se u izrazu za totalnu varijaciju dejstva (8.12) varijacioni izvod zameni odgovarajućim izrazom iz Lagrange-evih jednačina (7.51),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha^* + \delta_\alpha^a R_a^0,$$

gde je δ_α^a Kronecker-ov simbol, čime ona dobija vid

(9.40)
$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}(\Delta q^\alpha - \dot{q}^\alpha \Delta t) + L\Delta t\right] - (Q_\alpha^* + \delta_\alpha^a R_a^0)(\Delta q^\alpha - \dot{q}^\alpha \Delta t)\right\} dt$$

Ako se još transformiše varijacija dejstva, uz zanemarivanje doprinosa promene oblasti integracije (v. obrazloženje uz formulu (8.9))

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \Delta(L dt) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta L + L\frac{d}{dt}(\Delta t)\right] dt,$$

pa se ΔW u relaciji (9.40) zameni ovim izrazom i u integrandu doda i oduzme član $\dot\Lambda(q^i, \dot q^i, t)$, gde je Λ proizvoljna funkcija od navedenih argumenata, posle izvesnog preuređenja dolazi se do integralne relacije

$$\begin{aligned}(9.41)\qquad &\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\Delta q^\alpha + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot q^\alpha\right)\Delta t - \Lambda\right]\right.\\ &\qquad \left. - \left[\Delta L + L\frac{d}{dt}(\Delta t) + (Q^*_\alpha + \delta^a_\alpha R^0_a)(\Delta q^\alpha - \dot q^\alpha \Delta t) - \dot\Lambda\right]\right\} dt = 0\end{aligned}$$

Kad se razvije član ΔL, koristeći pri tome relaciju (8.6) između $\Delta \dot q^\alpha$ i $(d/dt)(\Delta q^\alpha)$, zbir prva dva člana u drugoj srednjoj zagradi biće

$$\begin{aligned}\Delta L + L\frac{d}{dt}(\Delta t) &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\Delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\left[\frac{d}{dt}(\Delta q^\alpha) - \dot q^\alpha \frac{d}{dt}(\Delta t)\right] + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + L\frac{d}{dt}(\Delta t)\\ &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\Delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\frac{d}{dt}(\Delta q^\alpha) + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot q^\alpha\right)\frac{d}{dt}(\Delta t) + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t\end{aligned}$$

Kad se još zamene Δq^α i Δt odgovarajućim izrazima (9.39) i stavi $\Lambda = \mathcal{E}^m \Lambda_m$, prethodna relacija može se napisati u obliku

$$\begin{aligned}(9.42)\qquad &\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}^m \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\xi^\alpha_m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot q^\alpha\right)\xi^0_m - \Lambda_m\right]\right.\\ &\qquad - \left[\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\xi^\alpha_m + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot\xi^\alpha_m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot q^\alpha\right)\dot\xi^0_m\right.\\ &\qquad \left.\left. + \frac{\partial L}{\partial t}\xi^0_m + Q^*_\alpha(\xi^\alpha_m - \dot q^\alpha \xi^0_m) + R^0_a(\xi^a_m - \dot q^a \xi^0_m) - \dot\Lambda_m\right]\right\} dt = 0\end{aligned}$$

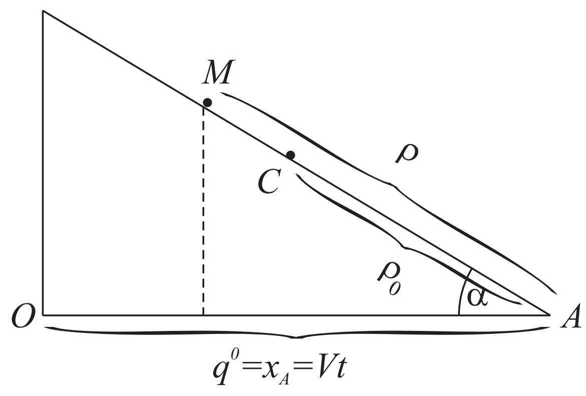
Ako je zadovoljen uslov

$$\begin{aligned}(9.43)\qquad &\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\xi^\alpha_m + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot\xi^\alpha_m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot q^\alpha\right)\dot\xi^0_m + \frac{\partial L}{\partial t}\xi^0_m\\ &\qquad + Q^*_\alpha(\xi^\alpha_m - \dot q^\alpha \xi^0_m) + R^0_a(\xi^a_m - \dot q^a \xi^0_m) - \dot\Lambda_m = 0,\end{aligned}$$

ova integralna relacija se svodi samo na prvi član, a zbog proizoljnosti vremenskog intervala (t_0, t_1) i parametra $\mathcal{E}^m$ odavde proizilazi

$$(9.44)\qquad I_m = \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\xi^\alpha_m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot q^\alpha\right)\xi^0_m - \Lambda_m = \text{const} \quad (m = 1, 2, \ldots, r)$$

Prema tome, svakoj transformaciji generalisanih koordinata i vremena koja zadovoljava uslov (9.43) odgovara r nezavisnih integrala kretanja (9.44), a u slučaju kad je $R^0_a dq^a = -dP$ (tj. totalni diferencijal), pokazano je da umesto L figuriše $\mathcal{L} = L - P$, uz izostavljanje člana sa R^0_a. Ovaj zaključak je sličan Vujanovićevoj formulaciji ove teoreme, ali sa izvesnim razlikama: u uslovu za postojanje integrala kretanja sem većeg broja generalisanih koordinata figuriše i član $R^0_a(\xi^a_m - \dot q^a \xi^0_m)$, karakterističan za ovu formulaciju mehanike, a svakoj transformaciji koja zadovoljava navedeni uslov odgovara r nezavisnih integrala kretanja.



Sl. 6

Naveden je jedan karakterističan primer: kretanje linearnog oscilatora u otpornoj sredini pod uticajem privlačne sile $F = -m\omega^2(\rho - \rho_0)$ sa centrom privlačenja u tački C i otporne slie $F^* = -2mk\dot{\rho}'$ duž strme ravni koja se pomera uniformno duž x-ose brzinom V (v. sl. 6). U ovom slučaju položaj ovog oscilatora je određen generalisanom koordinatom $q = \rho$, a za dopunsku generalisanu koordinatu uzeta je veličina $q^0 = x_A = Vt$, pa je navedenim metodom dobijen zakon održanja energiji slične veličine

$$I = Am\left(\frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\eta^2 + k\eta\dot{\eta}\right)e^{2kt} = \text{const}, \tag{9.45}$$

gde je

$$\eta = (\rho - \rho_0) - q^0 \cos\alpha. \tag{9.46}$$

Ova modifikovana Noether-ina teorema proširena je i na sisteme sa promenljivom masom (Đ. Mušicki), gde je pokazano da uslov postojanja integrala kretanja (9.43) treba samo dopuniti članom $P_\alpha(\xi^\alpha_m - \dot{q}^\alpha\xi^0_m)$, gde je P_α karakterističan faktor koji izražava zavisnost masa čestica od t, q^α i $\dot{q}^\alpha$, dok oblik odgovarajućeg integrala kretanja (9.44) ostaje nepromenjen. Na osnovu toga na primeru rakete koja uzleće uz klizeću strmu ravan izbacujući gasove unazad nađeno je, i pored odsustva integrala energije, da važi zakon održanja jedne energiji slične veličine.

10. Proširenje zakona održanja energije na fiziku

10.1. Podela perioda uopštavanja na faze. Osvrnimo se još ukratko na dalji razvoj zakona održanja energije i on bi se mogao kvalifikovati u tri faze:

(1) Održanje zbira kinetičke i potencijalne energije ili opštije generalisane energije u toku vremena (o čemu je do sada bilo reči) – XVIII i XIX vek

(2) Održanje energije pri njenoj transformaciji u druge vidove energije (toplotna, elektromagnetna, hemijska) – XIX vek.

(3) Održanje energije, odnosno mase u relativističkim kretanjima i atomističkim procesima – XX vek.

10.2. **Opšti zakon održanja i transformacije energije.** U toku druge faze, u raznim toplotnim i elektromagnetnim procesima zapaženo je da se na račun mehaničke energije pojavljuju drugi vidovi energije. Tako npr. S. Carnot je zapazio da se mehanička energija u nekim procesima pretvara u toplotu, a iz toplote se može dobiti koristan rad, ali samo pri prelazu sa više temperature na nižu. On je prvi odredio 1841. godine i mehanički ekvivalent toplote (270mkg/Cal), što je samo za 13% niže od tačne vrednosti, čime svaka toplotna energija postaje ekvivalentna određenoj mehaničkoj energiji. To je matematički uobličio R. Clausius u vidu dva principa termodinamike, objavljenih 1850. godine, od kojih navedimo ovde samo prvi, koji predstavlja proširenje zakona održanja energije u tremodinamici

$$dE = d'A + d'Q \tag{10.1}$$

Prema njemu, ako se pri nekom procesu sistemu dovede izvesna količina toplote $d'Q$ i pri tome na sistemu izvrši izvestan rad $d'A$, njihov zbir predstavlja elementarnu promenu unutrašnje energije sistema.

Na sličan način se i u elektrodinamici može primeniti prošireni zakon odrzhanja energije, od kojih navedimo ovde jedan od prvih primera, koji je H. Helmholtz prikazao 1847. godine. Razmotreno je zatvoreno električno kolo struje sa pokretnim provodnicima i sa izvorom struje (galvanski element) sa elektromotornom silom $\mathcal{E}$ (termin iz perioda kad je pojam sile imao smisao energije), koje se nalazi u magnetnom polju nekog permanentnog magneta stalne jačine polja. Usled dejstva ovog magnetnog polja na pokretne provodnike doći će do njihovog pomeranja, pri čemu će se u kolu struje pojaviti izvesna dopunska, tzv. indukovana struja, čiji je smer suprotan smeru primarne struje. Energija koju razvija izvor struje za vreme dt biće $\mathcal{E}Idt$ ($I =$ jačina struje), i ona se delom pretvara u toplotu RI^2dt (Joule–Lentz-ov zakon), a delom u rad magnetnog polja $d'A$ pri ovom pomeranju provodnika

$$\mathcal{E}Idt = RI^2dt + d'A \tag{10.2}$$

Helmholtz je smatrao da ovaj rad potiče od promene "žive sile" magneta i da je jednak $d'A = IdV$, gde je V izvesna potencijalna funkcija uvedena od Neumann-a. Danas znamo da ovaj rad potiče od promene tzv. magnetnog fluksa $\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S}$ usled navedenog pomeranja provodnika i iznosi $d'A = Id\Phi$. Uvrštavanjem ovog izraza u relaciju (10.2) dobija se

$$\mathcal{E}Idt = RI^2dt + Id\Phi,$$

a otuda

$$I = \frac{1}{R}\left(\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}\right), \tag{10.3}$$

odakle vidimo da je elektromotorna sila dopunske indukovane struje $\mathcal{E}^{\text{ind}} = -d\Phi/dt$.

10.3. **Jedinstvo zakona održanja energije i održanja mase.** Treću fazu karakteriše Specijalna teorija relativnosti, koju je formulisao i objavio A. Einstein 1905. godine i u kojoj je, između ostaloga, dobio čuvenu relaciju između mase i energije $E = mc^2$, gde je c brzina svetlosti. Prema ovoj relaciji svakoj masi m odgovara energija $E = mc^2$, a svakoj energiji E odgovara masa $m = E/c^2$, i na taj način zakon održanja energije i zakon održanja mase postaju ekvivalentni.

Ilustrujmo to na primeru bilo koje nuklearne transformacije

$$A + a(E_a) \;\to\; B + b(Q), \tag{10.4}$$

kad se neko jezgro A bombarduje nuklearnim česticama a sa energijom E_a, usled čega nastaje neko jezgro B i jedna ili više šestica b uz oslobađanje izvesne energije Q. U ovom slučaju zakon održanja mase ne važi: $m_A + m_a \neq m_B + m_b$, ali ako prema Einstein-ovoj relaciji energijama E_a i Q pridružimo mase E_a/c^2 i Q/c^2, važiće zakon o održanju mase u obliku

$$m_A + m_a + \frac{E_a}{c^2} = m_B + m_b + \frac{Q}{c^2}, \tag{10.5}$$

što je potvrđeno u svim eksperimentima ovog tipa.

Bibliografija

[1] А. Грегорян и И. Погребиский (редактори): *История механики*, т. I–II, Наука, Москва 1972

[2] Е. Спаский: *Историја физики*, t. I–II—, Высшая школа, Москва, 1977 (u prvom tomu dat je razvoj mehanike).

[3] M. Mlađenović: *Razvoj fizike – Mehanika i gravitacija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1983.

[4] Л. Полак: *Вариационные принципы механики – их развитие и применения в физике*, Гостехиздат, Москва, 1960.

[5] А Боголюубов: *Математики. Механики – Биографический справочник*, Наукова думка, Киев, 1983.

[6] Ю. Храмов: *Физики – Биографический справочник*, Наука, Москва, 1983.

[7] H. Goldstein: *Classical Mechanics, second edition*, Addison-Wesley, Reading, Massachusets – Sidney, 1980.

[8] E. Whittaker: *A. Treatise of the Analytical Mechanics of Particles and Rigid Bodies*, fourth edition, Univ. Press, Cambridge 1952.

[9] Л. Ландау и Е. Лифшиц: *Теоретическая физика, т.* I – *Механика*, издание третье, Наука, Физматем, Москва, 1973.

[10] D. Bernoulli: *Remarques sur le principle de la conservation des forces vives pris dans un sens général*, Histoire de l'Academie Royale de Berlin, Berlin, 1748/50, 356–364.

[11] J. Lagrange: *Mécanique analytique*, t. I, Paris 1788 (drugi tom uopšte nije izašao); ruski prevod sa drugog izdanja: Ж. Лагранж, *Аналитическая механика* I, Гостехиздат, Москва, 1950 (sa prilogom nekoliko autora o ovom delu).

[12] W. Hamilton: (a) *On a general method in dynamics*, Phil. Trans. Roy. Soc. 2 (1934) 247–308; (b) *Second essay on a general method in dynamics*, Phil. Trans. Roy. Soc. 1 (1935), 95–144; ruski prevod oba članka u zborniku *Вариационные принципы механики*, Гостехиздат, Москва, 1960.

[13] K. Jacobi: *Varlesungen über Dynamik* 1866 (publikovano 15 godina posle Jacobi-eve smrti od strane njegovog učenika Klebsch-a, drugo izdanje 1884), u okviru izdanja Gesamelte Werke, t. VIII - Dynamik, Chelsea, New York, 1969.

[14] V. Vujičić: *Dynamic of Rheonomic Systems*, Matematički institut SANU, Beograd, 1990.

[15] Đ. Mušicki: *A contribution to the theory of the extended Lagrangian formalism for rheonomic systems*, Theor. Appl. Mech. 36 (2009), 47–83.

[16] Emmy Noether: *Invariants Variationsprobleme*, Nachr. Kön. Ges. Wiss. Götingen, Math. Phys. Kl. 2 (1918), 235–258.

[17] E. Hill: *Hamilton's principle and the conservation theorems of mathematical physics*, Rev. Mod. Phys. 23 (1951), 253–260.

[18] В. Добронравов: *Основи аналитической механики*, Высшая школа, Москва, 1978.

[19] B. Vujanović and S. Jones: *Variational Methods in Nonconservative Phenomena*, Academic Press, Boston, 1989.

[20] L. Cvetićanin: *Dynamics of Machines with Variable Mass*, Gordon and Breach, Australia–Switzerland, 1998.