Matematički vidici 7

METODIKA I ISTORIJA GEOMETRIJE

(Divčibare, 12–13 oktobra 1996)

Matematički institut SANU

Matematički vidici 7

METODIKA I ISTORIJA GEOMETRIJE

(Divčibare, 12–13 oktobra 1996)

Priredili:
Mileva Prvanović
Novica Blažić

Matematički institut SANU

Izdavač: Matematički institut SANU, Beograd, Kneza Mihaila 35
serija: Matematički vidici, knjiga 7
Za izdavača: Bogoljub Stanković, glavni urednik
Urednici: Mileva Prvanović i Novica Blažić
Tehnički urednik: Dragan Blagojević
Štampa: "Galeb", Zemun
Štampanje završeno juna 1997.

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

371.3::514(082)
METODIKA i istorija geometrije :
(Divčibare, 12–13. oktobra 1996) /
priredili Mileva Prvanović, Novica Blažić.
– Beograd : Matematički institut SANU, 1997 (Zemun : Galeb).
– 61 str. : graf. prikazi ; 24 cm.
– (Matematički vidici ; 7)

"U organizaciji Matematičkog instituta SANU, održan je na Divčibarama, od 10. do 17. oktobra 1996. godine, 11. jugoslovenski geometrijski seminar." → predgovor.
– Tiraž 300. – Bibliografija uz većinu radova.

ISBN 86–80593–26–5

1. Прврановић, Милева
514(091)(082)
а) Геометрија – Настава – Методика – Зборници
б) Геометрија – Историја – Зборници

ID=55187212

Na osnovu mišljenja Ministarstva za nauku i tehnologiju Srbije
ova publikacija je oslobodjena opšteg poreza na promet.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

U organizaciji Matematičkog instituta SANU, održan je na Divčibarama, od 10. do 17. oktobra 1996. godine, 11. Jugoslovenski geometrijski seminar. S obzirom na ranije takve seminare, koji su se od skromnih početaka razvili u naučne konferencije, ovaj je obogaćen sa dve nove delatnosti: organizovana je jesenja škola diferencijalne geometrije i radila je sekcija "Metodika i istorija geometrije".

Jesenja škola diferencijalne geometrije imala je preko 30 učesnika. Bila je namenjena doktorantima i mlađim naučnim radnicima. Pozvani predavači (D.M. Aleksejevski, P.B. Gilkey i S. Markvorsen) održali su tri mini kursa. Ta predavanja štampana su u "Zborniku radova" Matematičkog instituta SANU, knj. 6(14), Beograd, 1997.

Sekcija "Metodika i istorija geometrije" bila je namenjena srednjoškolskim profesorima matematike. Okupila je oko 100 učesnika. Održana su uvodna predavanja pozvanih stručnjaka, a i zasedanja na kojima se diskutovalo o raznim problemima nastave geometrije. Konstatovano je, između ostalog, da ovakav vid delatnosti treba ne samo nastaviti nego i pojačati

Ova publikacija sadrži sva izlaganja pozvanih predavača na sekciji "Metodika i istorija geometrije", sem predavanja Ž. Mijajlovića: Bogdan Gavrilović — prvi savremeni srpski geometar. Šira verzija tog predavanja objavljena je u ediciji "Život i delo srpskih naučnika", knj. 2, Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd, 1997.

Nadamo se da će ova publikacija biti korisna kako učesnicima 11. Jugoslovenskog geometrijskog seminara, tako i matematičarima koji nisu prisustvovali Seminaru.

I ovom prilikom želimo da zahvalimo ustanovama i preduzećima koji su, pružajući finansijsku pomoć, omogućili održavanje Seminara. To su:

Ministarstvo za nauku i tehnologiju Republike Srbije

Ministarstvo prosvete Republike Srbije

Ministarstvo za prosvjetu i nauku Republike Crne Gore

Ekonomska škola, Valjevo

Big Enex tours, Valjevo

Zadruga "Lajkovac", Lajkovac

Putnik, Beograd

Yu topex, Beograd

Unipromet, Beograd

Mileva Prvanović

Zoran Lučić

METODIKA I ISTORIJA GEOMETRIJE
Divčibare, 12–13 oktobra 1996, 5–11

POGLED NA INTUITIVNO ZNAČENJE OSNOVNIH GEOMETRIJSKIH OBJEKATA

Milosav Marjanović

Svi mi okupljeni ovde, na ovom Seminaru, imamo nameru da sagledamo neke aktuelne probleme tekuće nastave geometrije. A činjenica, da su na skupu univerzitetski profesori, čiji je zadatak i priprema izvođača srednjoškolske nastave, zajedno sa srednjoškolskim profesorima koji su izvođači te nastave, omogućiće ono potrebno sagledavanje problema po ukupnoj vertikali obrazovnog sistema.

Verujem da se svi slažemo s mišljenjem da su, zadnjih decenija, naše škole (kako srednje tako i univerzitet) uspešno pratile savremene tendencije i da je to bio veliki uspeh (ali ostavimo da o tom govore neki drugi ljudi i nekom svečanijom prilikom). Te promene, to novo stanje prate revizije programa, koje predviđaju drukčije rasporede gradiva po razredima i drukčije vidike njegovog didaktičkog oblikovanja. Tako nastaju i novi problemi u nastavi pojedinih predmeta. Jedan od njih stvaraju dva saučesnika — univerzitetski profesor, s tendencijom da formira kompletne formalne kurseve iz pojedinih područje matematike i njegov student, koji ih kasnije prenosi na gotovo istovetan način u srednjoškolsku nastavu. Tako se jedna monolitna struktura otrgnuta od svog prethodnog sadržaja, preliva na njegovo prirodno mesto dalje ga potiskujući i izbacijući. To se, naravno, dešava i s nastavom geometrije.

Nekada isključiva i privilegovana uloga geometrije kao predmeta koji služi vežbanju besprekornog logičkog zaključivanja i razvijanju deduktivnog mišljenja, aksiomatizacijom drugih područja matematike, danas je svedeno na jednu od, u tom smislu, mogućih opcija. Nastojanja da se ta uloga još više uzdigne i pooštri dovela je do velike krize, koju najbolje izražava sledeća rečenica iz materijala međunarodnog kolokvijuma o nastavi geometrije, održanog u belgijskom gradu Monsu (Mons), 1982. godine: "Ne postoji ni jedan jedini geometrijski pojam u srednjoškolskoj nastavi čije pristaše bi činile većinu". Zato naš pogled na značaj i ulogu nastave geometrije mora biti širi i, bez jednostranosti, moramo sagledavati sve moguće funkcije geometrije koje odgovaraju njenom fundamentalnom mestu u istorijskom razvoju matematike i u školskoj nastavi. Tom širem pogledu namenjeno je i sledeće naše izlaganje.

Pitanje prirode matematičkih objekata je tipičan filozofski problem s više međusobno različitih odgovora. Za formaliste matematika se izvodi iz aksioma i nikakvu posebnu matematičku realnost ne treba pretpostavljati, po realistima matematički objekti su apstraktni objekti koji postoje u svetu naših apstrakcija, a za konstruktiviste oni su psihološke konstrukcije koje se formiraju u čovekovom umu. Gledano s pozicija nastave, i uopšte produktivnog mišljenja, malo bismo imali koristi od opredeljivanja za neko od navedenih gledišta. No, od vremena Prosvećenosti na ovamo, uzima se da čovekovo saznanje počinje s čulnim iskustvom, a John Locke u tom smislu ističe svoj dobro poznati princip da je svest deteta "tabula rasa". Daljim "procesiranjem" čulnog iskustva stvaraju se (primarni) apstraktni pojmovi i njihovi sistemi koje u matematici nazivamo matematičkim strukturama, a u psihologiji, i u nešto širem značenju, kognitivnim shemama.

Kad govorimo o pojmovima, nameće nam se pitanje šta pod pojmom podrazumevamo. Naviknuti na logičku strogorst, ne očekujemo odgovor u vidu definicije (a one koje nalazimo u leksikonima: "predikat mogućeg suda", "osnovni objekt mišljenja" itd. samo prebacuju značenje s reči na reč). Pa, kao i u slučaju svih drugih osnovnih ideja, tumačenje okrećemo prema primerima.

Uzmimo kao prvi primer neki od primarnih pojmova tj. onih čije je osmišljavanje direktno vezano za objekte u fizičkom svetu koji nas okružuje. Recimo, analizirajmo kako formiramo pojam "stolica". U fizičkom okruženju uočavamo objekte slične po obliku i nameni (služe za sedenje). Senzorni utisci se organizuju oko nekih invarijantnih svojstava i formiraju unutrašnju predstavu na osnovu koje prepoznajemo i druge slične objekte. Tu unutrašnju predstavu nazivamo mentalna slika. Za te objekte spontano se, korišćenjem prirodnog jezika, veže reč "stolica". Takvu reč uzimaćemo da je naziv takvog posebnog pojma. Sklapajući celinu, vidimo da pojmove možemo shvatati kao trokomponentne celine, prema sledećoj shemi

mentalna slika — naziv

primeri

gde komponenta "primeri" predstavlja, recimo kod pojma "stolica", sve postojeće objekte te vrste. Kod pojma "broj pet", primere bi činili svi međusobno ekvivalentni skupovi kojima bi pripadao, recimo, skup prstiju na jednoj ruci, predstavu o mentalnoj slici dobro bi izražavao skup od pet tačaka, a naziv je reč "pet" u prirodnom jeziku.

Pored reči iz prirodnog jezika, pojmove takođe označavamo simbolima, koji mogu biti konvencionalni tj. svojim oblikom ne sugerišu nikakvo značenje i simboli slike (ili ikone) koji oblikom sugerišu značejnje pojma koji predstavljaju.

Na primer, sledeći simboli

□ □ □
□ □ V 5 pet

Ahmesov papirus

označavaju jedan te isti pojam, prvi je simbol-slika kao i drugi (ako ovu rimsku cifru shvatamo kao modifikaciju šake koja nosi pet prstiju), dok su sledeća dva tipični konvencionalni simboli. Kad na tabli crtamo tačke, duži, trouglove, ... služimo se simbolima-slikama.

Kad operišemo nazivamo (uključujući i konvencionalne simbole), to mišljenje prati (unutrašnji) govor, a takvo mišljenje nazivamo apstraktnim. Kad operišemo mentalnim slikama (i njihovim predstavama u vidu simbola-slika), takvo mišljenje nazivamo intuitivnim.

Sledećom tabelom ističemo neke uporedne karakteristike ova dva tipa mišljenja.

intiutivno	apstraktno
individualno	kolektivno (socijalizovano)
integrativno — ističe strukturu	analitičko — ističe detalje
simultano	sekvencijalno
neposredno shvatanje	logičko zaključivanje

Rasprave o tome do koje mere su dva tipa mišljenja razdvojena i da li uvek simultano teku, nemaju jasne zaključke.

Pojmove upoređujemo po apstraktnosti, pa kažemo da je pojam Q opštiji od pojma P, kad god je svaki primer za pojam P takođe i primer, za pojam Q ili, izražavajući se skupovno, kad je klasa primera za pojam P sadržana u klasi primera za pojam Q. Dalje, definicija je rečenica kojom određujemo pojam P preko opštijeg pojma Q (ili više njih) dodajući karakteristično svojstvo. (Latinska reč "definitio" izvedena je od grčkog etimona s prvobitnim značenjem klesanog kamena međaša kojim je naznačavano područje hrama.)

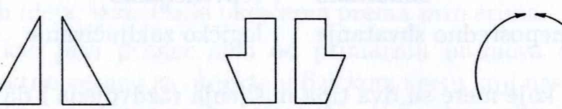
Primeri definicija bi bili: "četvorougao je poligon sa četiri strane", "četvorougao je kompaktni skup (u ravni) s nepraznim interiorom, čija granica ima tačno četiri ekstremalne tačke" (a mi drugu definiciju uzimamo kao kvalitetniju, jer izražava značenje pojma "četvorougao" preko opštijih pojmova).

Shvatajući fenomenologiju (po E. Husserl-u i sledbenicima) kao opis fenomena, bez tradicionalnih epistemoloških i ontoloških razmatranja, nastavimo ovo naše izlaganje citiranjem jednog od najimpresivnijih matematičara našeg vremena, René Thom-a [6] koji kaže: "Svaka fenomenologija je spektakl u nekom prostoru - supstratu, koji se konstruiše polazeći od uobičajenih makroskopskih posmatranja." Pa, shodno tome, reći ćemo da je svet oko nas veliki spektakl u prostoru u kome postojimo. A u tom svetu postoje objekti koji, kad ih gledamo s istog mesta, uvek izgledaju isto (tj. slike koje se formiraju na mrežnjači (retina) su iste). Takve objekte nazivamo čvrsta tela, a oni nam projektuju neka svoja svojstva nezavisna od njihove materijalne supstance. Tako zanemarivanjem svih fizičkih svojstava ostaju ta fundamentalna, koja zbirno izražavamo govoreći o obliku i veličini tela i tu, i tada počinje geometrija. Henri Poincaré [4] kaže: "Pa, dakle, kad ne bi bilo čvrstih tela u prirodi ne bi bilo ni geometrije."

U prirodnom jeziku pojam oblika koristi se sa smislom koji varira, pa je naš cilj sad da taj pojam precizno matematički odredimo u onom smislu gde bi se javljao kao zbirno ime za sva geometrijska svojstva koja neki objekat Euklidske geometrije ima. Ograničimo se na ravan i objekte koje ćemo uzimati da su proizvoljni neprazni podskupovi ravni.

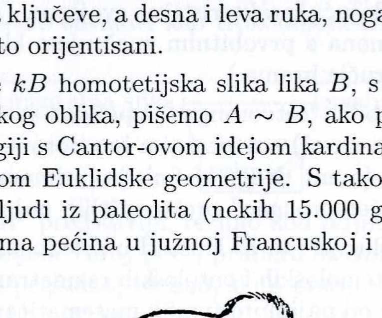
Za objekte A i B reći ćemo da su podudarni i pisati $A \sim B$, ako postoji preslikavanje $f : A \to B$ koje je izometrija i "na". Intuitivno, shvatajući A i B kao "čvrste ploče", možemo ih pomerati, obrtati s druge strane, zaokretati sve dok se najzad ne poklope. A kao što dobro znamo, to se može postići s najviše dva "elegantna pokreta": (I) translacijom, (II) rotacijom, (III) simetrijom, (IV) translacijom s rotacijom ili još (V) translacijom sa simetrijom.

Dve figure u ravni mogu biti podudarne i biti različite po jednom vrlo uočljivom položajnom svojstvu — orijentaciji. To je slučaj kad se podudarnost realizuje s obaveznim uključivanjem simetrije. Na primer, takvi su parovi figura na sledećoj slici



u kojima jedan objekat možemo smatrati pozitivno orijentisanim (ili desnim) a drugi negativno orijentisanim (ili levim). Razlika u orijentaciji je jedno markantno opažajno svojstvo, pa bi zasluživalo i odgovarajuću obradu u kursevima geometrije. A primeri u prirodnom okruženju su mnogobrojni: otisci stopala, poprečni preseci levih i desnih matrica za ključeve, a desna i leva ruka, noga itd. su objekti u prostoru — podudarni ali različito orijentisani.

Za $k > 0$, neka je kB homotetijska slika lika B, s koeficijentom k. Objekti A i B su istog Euklidskog oblika, pišemo $A \sim B$, ako postoji $k > 0$ takvo da je $A \sim kB$. Tako, u analogiji s Cantor-ovom idejom kardinalnog broja, oblik možemo smatrati glavnim pojmom Euklidske geometrije. S tako širokim shvatanjem, ima smisla pitati se jesu li ljudi iz paleolita (nekih 15.000 godina pre Hrista) koji su kreirali crteže na zidovima pećina u južnoj Francuskoj i Španiji bili prvi slikari ili



Primer pećinskog slikarstva iz južne Francuske geometri za koje znamo, ili je možda ispravnije reči da su bili jedno i drugo. Ipak, geometrija se bavi proučavanjem samo nekih vrlo pravilnih oblika koji odgovaraju našim primarnim opažajima i mi ćemo naše izlaganje usmeriti u tom pravcu.

Predmetima koje vidimo u prirodnom okruženju prideljujemo svojstvo prostornosti, a što znači svojstvo pružanja u sva tri pravca po dužini, širini i visini. Međutim granica između materijalne supstance tih predmeta i okružujućeg prostora, a koju zovemo površ tela, prideljujemo svojstvo pružanja u dva pravca. Takve površi često vidimo razdvojene u delove, granice između kojih nazivamo ivice tela. Ti opažaji integrišu neka zajednička svojstva i te tako formirane unutrašnje predstave (mentalne slike) daju smisao intuitivno shvaćenim pojmovima tela, površi i linija. Ovome treba dodati i ona intilegentna ignorisanja jedne ili dve dimenzije, gde tela u obliku ploča, recimo, merimo kao površi, a ona u obliku konopaca ili žica samo po dužini. Tela koja su ili vrlo sićušna ili vrlo daleko, pa se nikakav njihov oblike ne nazire sem njihovog pukog postojanja, stvaraju opažaje koji su osnova na kojoj se formira predstava o tački. Kad unakrsno nacrtamo dve prave onda one imaju zajednički "deo" — tačku u kojoj se seku. To "makroskopsko posmatranje" navodi nas da pravu vidimo sastavljenu od tačaka i da te tačke čine jednu "neprekidnu celinu" (a ovo figurativno izražavanje dobija preciznost izricanjem u vidu aksioma neprekidnosti (videti, npr. [3]). Uopšte uzev, svaki geometrijski objekt uzimamo da se sastoji od tačaka pa su tako tačke elementni objekti u geometriji.

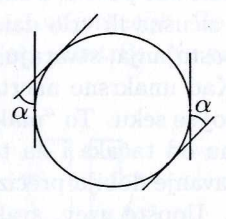
Grčka geometrija ne izdvaja pojam prostora kao poseban, već se on u njoj javlja kao epifenomen — kao okvir u kome se nalaze figure i tela. S idejom univerzalnog skupa u savremenoj matematici kao okvira u kome teku razmatranja, u logički sređenom izlaganju geometrije, prostor se uzima kao skup S s izdvojenim klasama podskupova i njihovih relacijskih odnosa. Tada tačke nemaju drugi smisao sem što su po pretpostavci elementi tog skupa. U analitičkoj geometriji, prostor je skup svih uređenih trojki realnih brojeva s rastojanjem koje se zadaje na uobičajeni način. I tada, tačka je element tog skupa, tj. uređena trojka realnih brojeva. Geometrijski objekti su tada neprazni podskupovi skupa S za koji uzimamo da je prostor.

Pored apstraktnog shvatanja prostora kao skupa S s ovako ili onako navedenom strukturom, a bolje je reći pre takvog shvatanja, stoji realni prostor u kome postojimo zajedno sa svetom koji nas okružuje. A taj realni prostor ne možemo smatrati geometrijskim objektom, kao što ni list papira na kome crtamo trougao ne možemo uzimati da je ravan. Ali ako taj fundamentalni "orbis sensualium" isključujemo iz jednog formalno-logičkog okvira, to ne znači da mu ne pridajemo prvorazredno značenje. Iz njega potiču sve naše predstave koje vide načine formalnog logičkog kodiranja, a to kodiranje najzad i nema drugu svrhu nego da svet koji nas okružuje bolje sagledavamo. Crtanjem i modeliranjem, mi "materijalizujemo" odgovarajuće mentalne slike, formirajući tako simbole sa sugestivnim značenjem. Ti simboli stabilizuju te slike i formiraju vizuelne strukture koje na integrativan način i simultano izražavaju pojedine kompleksne sadržaje i odnose. Simbol za tačku (kao trag vrha olovke ili krede) odgovara intuitivnom poimanju tog pojma, a nacrtana linija povlačenjem olovke duž ivice lenjira u skladu je sa svim našim psihološkim doživljajima "pravosti".

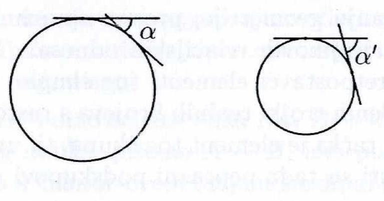
Među linijama ističu se prave s izuzetnim svojstvom, koje Arhimed iskazuje, govoreći da su one i najkraće od svih linija koje imaju zajedničke krajeve".

Krug je drevni kosmološki oblik. Čovek zamišlja sebe kao da stoji na kružnoj ploči nad kojom se nadnosi polusferni nebeski svod. U epskom periodu helenske misli, taj svod se naslanjao na kružni jarak oko sveta — Homerovski okeanos. A među linijama, krug se ističe izuzetnim svojstvom da su mu sve tačke na istom odstojanju od jedne, koja se zove centar. S druge strane, među zatvorenim linijama iste dužine, kružna ograničava najveću površinu.

Shvatajući zakrivljenost kao meru promene pravca tangente duž lukova iste dužine, slikom



lako tumačimo da je zakrivljenost kruga svuda ista (tj. ista je promena pravca nad lukovima jednake dužine). Time se ističe još jedno izuzetno svojstvo kruga među zatvorenim linijama. Slikama kao što su ove



opet možemo zasnovati ideju o većoj zakrivljenosti kruga s manjim poluprečnikom.

Veliki pedagog Johann Pestalozzi smatrao je da su oblik i broj osnova naše sveukupne spoznaje. Navodio je decu da crtaju prave linije i lukove, uglove, pravougaonike itd. smatrajući ih azbukom "oblika" predmeta. Svoju "azbuku vizuelnog posmatranja" (ABC der Anschaung) stavljao je čak i ispred slovne azbuke.

A mi geometriju shvatamo kao nauku o prostoru koja razvija naše sposobnosti viđenja i interpretiranja tog viđenja. I vidimo je kao logički sistem ne zaboravljajući veze sa spoljnim svetom. Herman von Helmholtz [1] govoreći o "nesvesnom sudu" kaže: "čini mi se da u stvarnosti postoji samo površna razlika između zaključaka logičara i onih induktivnih zaključaka čiji rezultat raspoznajemo u predstavama koje dobijamo o spoljnom svetu preko naših oseta".

Zainteresovanog čitaoca za probleme nastave geometrije upućujemo na, na primer, članke navedene pod [2] i [5].

LITERATURA

[1] Helmholtz, Hermann von, *Popular Scientific Lectures,* Dover, New York, 1962.

[2] Hershkowitz, Rina, *Psychological Aspects of Learning Geometry,* in: P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition,* Cambridge University Press, 1990, pp. 70–95.

[3] Lučić, Zoran, *Euklidska i hiperbolička geometrija,* Matematički fakultet, Beograd, 1994.

[4] Poincaré, Henri, *La Science et l'Hypothèse,* E. Flammarion, Paris, 1927.

[5] Quadling, Douglas A., *Algebra, Analysis, Geometry,* Studies in Mathematics Education, Unesco **4** (1985), pp.79–96.

[6] Thom, Réné, *Modèles mathematiques de la morphogenèse,* Inédit, 1974.

METODIKA I ISTORIJA GEOMETRIJE
Divčibare, 12–13 oktobra 1996, 12–24

O ULOZI GEOMETRIJE U SAVREMENOM MATEMATIČKOM OBRAZOVANJU U SREDNJOJ ŠKOLI

Judita Cofman

1. Uvod. Nastava geometrije ima dugu tradiciju. Poznati natpis nad ulazom u Platonovu Akademiju u Atini: "Neka niko ne ulazi ovamo, ko ne zna geometriju", potiče iz IV veka pre naše ere. Od Platona pa do danas geometrija je sastavni deo nastavnog gradiva u školama opšteobrazovnog karaktera. Nastava geometrije se vekovima bazirala na čuvenom delu Euklida "Elementi" iz oko 300. godine pre naše ere. Još na početku ovog veka klasična euklidska geometrija je igrala bitnu ulogu u školskoj nastavi. Tokom XX veka, međutim, desile su se znatne promene u nastavi celokupne matematike, a time i u nastavi geometrije.

Ovaj članak je posvećen razmatranjima o ulozi geometrije u savremenom obrazovanju 10–19-godišnjih đaka – gimnazijalaca. Ta se razmatranja oslanjaju na zapažanja vezana za promenu nastavnog gradiva u proteklim decenijama. Zbog toga u uvodnom delu članka dajemo kratak osvrt na neke od uzroka i posledica ovih promena.

Jedan od važnih uzroka za promene u nastavi jeste promena pojma geometrije kao nauke, uslovljena krupnim naučnim dostignućima u XIX veku.

U prvoj polovini XIX veka Boljai i Lobačevski, nezavisno jedan od drugog, otkrili su prvu vrstu neeuklidske geometrije. Narednih decenija konstruisan je niz drugih neeuklidskih geometrija. Pod uticajem Ponselea i njegovih sledbenika razvijena je teorija geometrijskih transformacija, primenjena prvenstveno na euklidsku, a zatim i na neeuklidske geometrije. Feliksu Klajnu pripada zasluga za povezivanje teorije geometrijskih transformacija s teorijom grupa – algebarskih struktura čije izučavanje je takođe započeto u XIX veku. Feliks Klajn je u svom čuvenom predavanju u Erlangenu, godine 1872. (danas poznatom pod imenom "Erlangenski program") opisao geometrije kao nauke o onim osobinama figura koje se ne menjaju pri posebnim grupama transformacija. Na taj način sveo je klasifikaciju geometrija na klasifikaciju grupa transformacija.

Kao posledica ovih promena u nauci, sredinom XX veka pojam i osnovne osobine transformacija, karakterističnih za euklidsku geometriju, ušli su u gradivo srednjoškolske matematike. Uporedo s translacijama predavale su se i osnovne osobine vektora u ravni i u prostoru. Uskoro su predstavnici "ekstremizma" u reformi nastave, među njima naročito Dieudonne, predlagali da se tretiranje srednjoškolske geometrije svede na primenu elementarnih osobina vektorskog prostora nad telom realnih brojeva. Taj predlog nije prihvaćen i umesto toga težilo se dinamičkom prilazu u nastavi geometrije: klasični stavovi iz euklidske geometrije dokazivani su, kad god je to bilo moguće, primenom transformacija.

Drugi uzrok za promene u nastavi geometrije treba tražiti u postepenom proširivanju srednjoškolskog nastavnog gradiva tokom poslednjih decenija. To se u nastavi matematike odrazilo uvođenjem niza detalja iz velikog broja oblasti savremene matematike.

Danas se u gimnazijama pored aritmetike, klasične algebre i euklidske geometrije predaju: uvod u diferencijalni i integralni račun, elementi kombinatorike, teorije verovatnoće, osnovni pojmovi o algebarskim strukturama, primena teorije matrica na izučavanje geometrijskih transformacija i počeci teorije kompleksnih brojeva.

Ovakvo proširenje programa dovelo je do sužavanja okvira i ubrzanog tempa u nastavi geometrije. Kao rezultat toga u najnovije vreme nekadašnji utisak o važnoj ulozi geometrije u opštem matematičkom obrazovanju postepeno se gubi.

Cilj narednih izlaganja je da podstakne razmišljanje o tome kakvu bi ulogu trebala i kakvu ulogu bi mogla da igra geometrija euklidske ravni i euklidskog prostora u obrazovanju omladine.

2. Primedbe o mogućoj ulozi geometrije u opštem obrazovanju đaka starih 10–19 godina. Sledeće primedbe, praćene predlozima za obradu prigodnih matematičkih zadataka za učenike, zasnovane su na mojim iskustvima u radu sa srednjoškolcima.

1. *Primedba.* U savremenoj nastavi, kada je školski program prenatrpan detaljima iz raznovrsnih oblasti matematike, postoji opasnost da se učenje matematike svede na pamćenje fakata i mehaničko usvajanje algoritama. Nasuprot ovoj pojavi, treba nastojati da učenici shvate postojeće veze među fenomenima koje susreću na pojedinim područjima matematičke nastave. U okviru ovakvih nastojanja, geometrija može da igra izvrsnu ulogu, jer matematičke discipline koje se predaju u srednjoj školi obiluju detaljima za koje postoje geometrijske ilustracije dostupne uzrastu učenika. Primena ovakvih ilustracija, s jedne strane olakšava proces razumevanja ukupnog nastavnog gradiva, a s druge strane skreće pažnju na to da je geometrija nauka od aktuelne važnosti.

Dole navedeni primer ukazuje na vezu između teorije brojeva i stereometrije i stimuliše interes za višedimenzionalne prostore:

Primer 1.1. Nakon izvođenja formule

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

algebarskom metodom, grupa 15-godišnjih đaka želela je da reši zadatak:

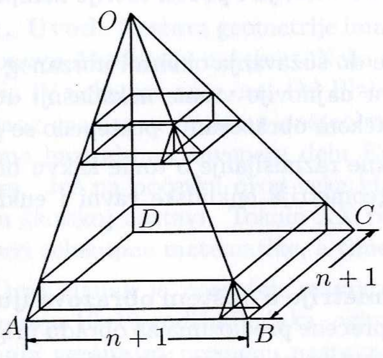
(Z_1) Naći formulu za zbir

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \tag{2}$$

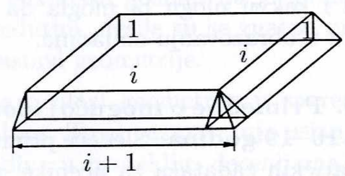
Učenicima je skrenuta pažnja na sledeću poznatu metodu za nalaženje zbira (2):

Za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ broj i^2 se može napisati u obliku $i^2 \cdot 1$ i interpretirati kao zapremina kuboida K_i s ivicama dužine i, i, 1. Kuboidi K_i se mogu smestiti u piramidu $ABCDO$ s kvadratnom osnovom $ABCD$ površine $(n+1)^2$ i visinom $\overline{OD}$ dužine $n+1$ (Sl. 1a).

Deo piramide $ABCDO$ između ravni π_i i π_{i+1} koje sadrže gornju, odnosno donju bazu kuboida K_i, može se razložiti na četiri poliedra: na kuboid K_i, dve trostrane prave prizme zapremine $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot i$ i jednu piramidu zapremine $\frac{1}{3} \cdot 1^3$ (Sl. 1b)



a)



b)

Slika 1

Dakle, zapremina stepenastog tela sastavljenog od kuboida $K_1, K_2, \ldots, K_n$ jeste razlika zapremine $\frac{1}{3}(n+1)^3$ piramide $ABCDO$ i zapremina trostranih prizmi i "malih" piramida koje se odstranjuju od piramide $ABCDO$ na svakom "stepeniku". Drugim rečima:

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot i + (n+1) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^3 \Big)$$

Primenom elementarnih algebarskih operacija gornji zbir se svodi na oblik

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Nakon rešenja zadatka Z_1 učenici su postavili zadatak:

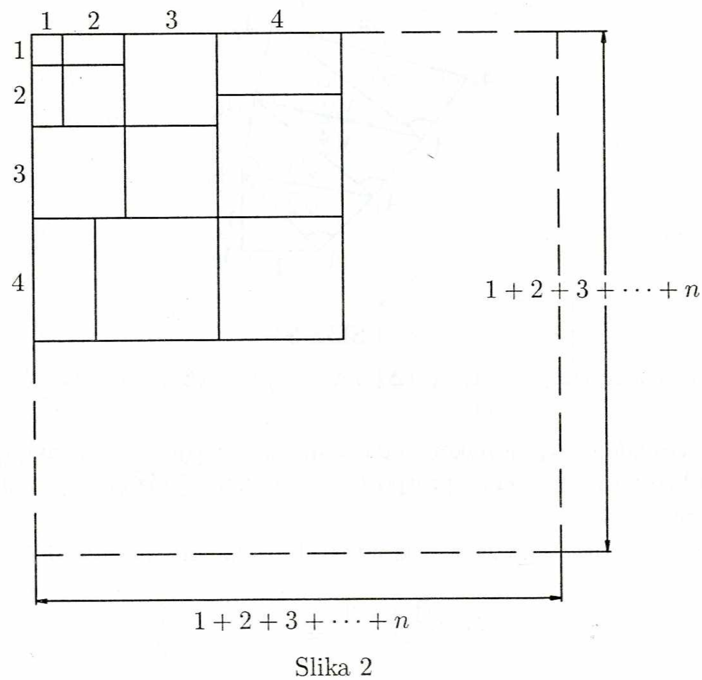
(Z_2) Naći formulu za zbir

$$S_n^{(3)} := 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \tag{3}$$

Za rešenje zadatka Z_2 predložila sam drugu vrstu prilaza (takođe dobro poznatog) – pomoću dvodimenzionalnih geometrijskih slika:

i^3 se može tumačiti kao ukupna površina i kvadrata sa stranama dužine i.

i kvadrata Q_i za $i = 1, 2, \ldots, n$ od kojih je po jedan za svako parno i rastavljen na dva podudarna pravougaonika, mogu se složiti u jedan kvadrat Q sa stranom dužine $1 + 2 + \cdots + n$



Slika 2

Prema tome

$$S_n^{(3)} = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

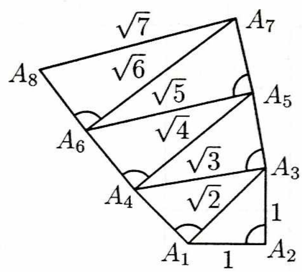
Ovom metodom rešenja nisu svi učenici bili zadovoljni. Raspitivali su se za mogućnost da se postupak primenjen u rešavanju zadatka (Z_1) uopšti na četvorodimenzionalni prostor, o čijem postojanju su neki učenici već ponešto čuli. To nas je odvelo do diskusija o višedimenzionalnim uopštenjima piramida i prizama. Uzgred rečeno, nakon toga smo na matematičkom kružoku našli pogodno rastavljanje k-dimenzionalne piramide, koje dovodi do formule za sumu $S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ za svako $k \geq 1$.

Jedan od učenika je došao na ideju da istraži ponašanje vrednosti sume

$$S_n^{(\frac{1}{2})} = 1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

za početne vrednosti broja n. Pomoću kompjutera našao je neke vrednosti zbira (4).

Sabirak $i^{\frac{1}{2}}$ se može geometrijski tumačiti kao dvostruka površina pravouglog trougla Δ_i s katetama dužine 1 i $\sqrt{i}$. Slika 3 prikazuje geometrijsku interpretaciju polovine zbira $S_6^{\frac{1}{2}}$, kao površinu figure sastavljene od pravouglih trouglova Δ_i za $i = 1, i, \ldots, 6$:



Slika 3

Površina$(\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \Delta_5 \cup \Delta_6) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}\right)$

Niz trouglova Δ_i se nakon toga pomoću kompjutera nastavljao za sve veće vrednosti broja i, dovodeći do pretpostavki o ponašanju izlomljenih linija na obimu geometrijske slike.

Primenom osnovnih znanja iz integralnog računa može se dokazati stav:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{2}{3}$$

2. *Primedba.* Važnost euklidske geometrije u nastavi potkrepljuje činjenica da se s geometrijskim oblicima iz ove geometrije susrećmo u sredini u kojoj živimo. Naročito izučavanje stereometrije potpomaže izučavanje prostora; nažalost nastava stereometrije se često – i po nastavnom planu – zanemaruje.

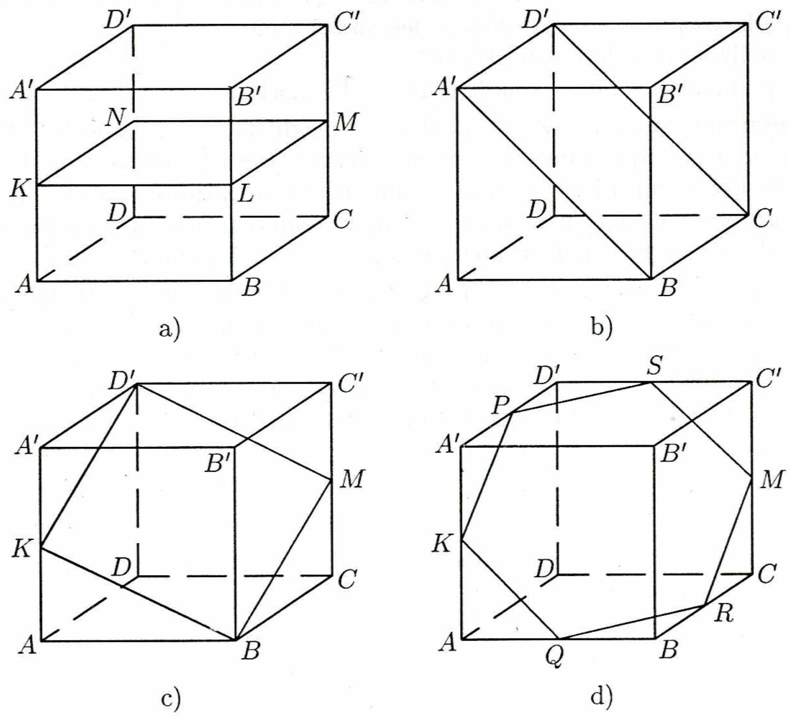
U vezi s geometrijskim osobinama prostora postoji još jedna važna činjenica na koju se često zaboravlja. Većina dece od najranijih godina poseduje niz osnovnih znanja o telima, kao što su na primer kocka ili lopta. Ta se početna znanja izvanredno dobro mogu koristiti pri uvođenju pojmova kao što su: definisani i nedefinisani elementi, aksiome i teoreme, potrebni i dovoljni uslovi i slično. Svi ti pojmovi su važni za sve oblasti matematike – a familijarnost s prostorom može poslužiti za to da đaci, polazeći od konkretnih primera, shvate njihovu suštinu.

Ova je primedba praćena s dva primera.

Primer 2.1. Đacima, starim 10–11 godina, uoči "zvaničnog" prilaza temi o uvođenju pojma trougla, predviđenog nastavnim programom, često sam zadavala kao zadatak da mi objasne šta podrazumevaju pod trouglom. Da bi individualna mišljenja svih đaka u razredu došla do izražaja, odgovori na postavljeni zadatak morali su da se daju spontano, na času, i to pismeno, da jedni drugima ne smetaju svojim mišljenjiima. Posle toga su svi đaci pročitali svoje odgovore, a nakon toga je usledila detaljna diskusija. Tom prilikom su đaci bili pozvani da koriguju odgovore: iz nekih je trebalo odstraniti nepotrebne detalje, druge odgovore je trebalo dopuniti da bi postali dovoljni za karakterizaciju pojma trougla. Na taj način se kod đaka postepeno stvarao utisak o tome šta se podrazumeva pod matematičkom definicijom.

Primer 2.2. U jednoj zbirci našla sam sledeći zadatak:

(Z_3) Preseći datu kocku jednom ravni na dva podudarna dela tako da presek bude: (a) kvadrat, (b) pravougaonik različit od kvadrata, (c) romb različit od kvadrata i (d) šestougao.



Slika 4

S ovim zadatkom napravila sam sledeći eksperiment. Jednoj grupi 13-godišnjih učenika postavila sam zadatak u obliku kakav je bio u zbirci. Odgovori đaka bili su sledeći: Svi su đaci rešili delove (a) i (b) zadatka, bez puno razmišljanja (vidi slike 4a i 4b). Rešenje dela (c) zahtevalo je malo više vremana (Sl. 4c), a deo (d) nisu svi učenici rešili. (Sl. 4d)).

Karakteristično za ovu grupu učenika je bilo to što niko iz grupe nije dao više od jednog rešenja ni za jedan deo zadatka (prema tome nije bilo različitih, nekongruentnih rešenja za b), c) ili d).

Drugu grupu učenika – takođe trinaestogodišnjaka – konfrontirala sam s nizom zadataka inspirisanih zahtevima zadatka (Z_3):

(Z_4) Konstruiši ravan π koja datu kocku $ABCDA'B'C'D'$ seče tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(u_1) Presek kocke i ravni je kvadrat i

(u_2) Ravan deli kocku na dva podudarna dela.

(Z_5) Odgovori na sledeća pitanja:

(1) Kako treba pomerati ravan π, konstruisanu pri rešenju zadatka (Z_4) tako da presek ravni s kockom prilikom pomeranja ostaje kvadrat? (tj. da se uslov (u_1) sačuva).

(2) Šta se dešava pri tome s uslovom (u_2)?

(Z_6) Ravan π, konstruisanu u zadatku (Z_4), rotiraj oko jedne dijagonale kvadrata po kome preseca kocku. Šta se dešava pri tome:

(1) s oblikom preseka ravni i kocke?

(2) s podudarnošću delova na koje ravan deli kocku?

Za rešavanje zadataka (Z_4)–(Z_6) đaci su mogli da koriste modele: skelete kocki, koji su se sastojali samo od temena i ivica kocke i parče kartona, koje je predstavljalo deo ravni, i koje se moglo pomerati u unutrašnjosti skeleta. Radeći u manjim grupama đaci su uspešno rešili sva tri zadatka, prateći neprekidni tok promena položaja ravni i analizirajući posledice pomeranja ravni.

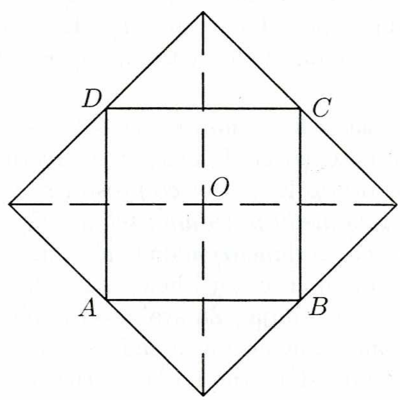
Najvažniji dobitak pri ovom radu, po mom mišljenju, nije se sastojao niti u tome da su dobijena rešenja, niti u tome što su se dopunjavala znanja o prirodi preseka kocke i o njenim simetrijama. Bitno je bilo to što se đacima ukazala prilika da učvrste pojmove od opšteg značaja za savremeno matematičko obrazovanje: pojam transformacije, pojam neprekidne promene i pojam invarijante pri transformacijama. Učenicima se čak može obratiti pažnja na to da su na primer dužine strana, površina, oblik preseka funkcije položaja ravni, i da se tom prilikom učvrsti i pojam funkcije.

3. *Primedba.* Matematika je jedna od najstarijih naučnih disciplina, važan deo kulturnog nasleđa čovečanstva. Ta činjenica se mora odražavati na tok matematičke nastave: poželjno je pri obradi raznih matematičkih tema skrenuti pažnju učenika, kad god se zato ukaže prilika, na njihovu istorijsku pozadinu. Istorija geometrije čini važni deo istorije matematike, i to ne samo zato što je geometrija jedna od najstarijih grana matematike. Važnost geometrije potiče mahom iz razloga da je u ovoj oblasti, počev od grčkog antičkog doba, bilo nekoliko krupnih problema, koji su se tek u XIX veku mogli konačno rešiti. Tokom vekova mnogo se tragalo za rešenjima ovih problema; pokušaji da se problemi reše doveli su do niza novih otkrića i doprineli su daljem razvoju čitave matematike. Među čuvenim problemima

geometrije je tzv. Delski problem udvostručenja kocke. Na sledećem primeru prikazan je jedan od mogućih pristupa Delskom problemu:

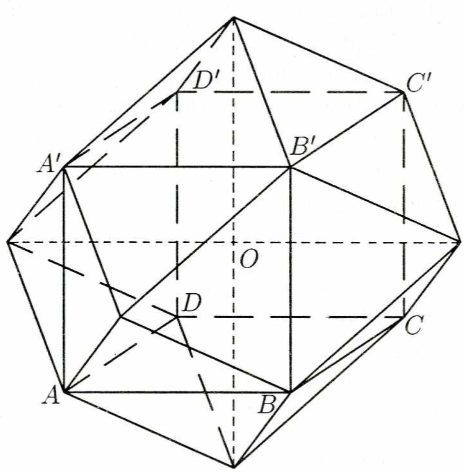
Primer 3.1. 12–13 godišnjim đacima često sam postavljala sledeći zadatak:

(Z_7) Dat je kvadrat $ABCD$ s centrom O. Konstruiši tačke simetrične tački O u odnosu na sve četiri strane kvadrata i spoji svaku od novodobijenih tačaka s onim dvama temenima kvadrata $ABCD$ koji su dotičnoj tački najbliža (Sl. 5).
(1) Odredi prirodu geometrijske figure F ograničene tako konstruisanim dužima.
(2) Izračunaj odnos površina figure F i kvadrata $ABCD$.



Slika 5

Zadatak (Z_7) je lako rešiti: figura F je takođe kvadrat i njena površina je dva puta veća od površine kvadrata $ABCD$. Dakle, Figura F je "udvostručenje" kvadrata $ABCD$.



Slika 6

Sada je sledio naredni zadatak.

(Z_8) Ispitaj da li se konstrukcija u zadatku (Z_7) može uopštiti na kocku, tako da se time data kocka udvostruči.

Uopštenje konstrukcije se u slučaju date kocke $ABCDA'B'C'D'$ s centrom O sastoji od konstrukcije tačaka, simetričnih u odnosu na svih šest strana kocke i od spajanja svake od novih tačaka s onima četirma temenima kocke koja su toj tački najbliža. Tako se dobija novo telo T (Sl. 6).

Odnos zapremine tela T i kocke $ABCDA'B'C'D'$ je isti kao i odnos površina figure F i kvadrata $ABCD$ u zadatku (Z_7); tj. $2:1$. Međutim, telo T nije kocka, nego rombični dodekaedar – poliedar ograničen s 12 rombova. Za većinu učenika to je bio prvi susret s rombičnim dodekaedrom, koji je otkrio Kepler (1571–1630), poznati astronom.

Na ovom mestu je bilo celishodno reći nekoliko reči o zaslugama Keplera na polju astronomije, a i u matematici. Učenici su se uverili u to da dodekaedar zaista ima osobinu, koju je otkrio Kepler: *Ceo prostor se može ispuniti podudarnim dodekaedrima, bez praznina među pojedinim telima.* (To se najlakše može uvideti ako se zamisli neograničena trodimenzionalna šahovska tabla" sastavljena od podudarnih kocki u dvema bojama, crnoj i beloj, tako da su bilo koje dve kocke sa zajedničkom stranom različitih boja. Za svaku od crnih kocki konstruiše se rombični dodekaedar metodom primenjenom u zadatku (Z_8). Tako dobijeni rombični dodekaedri se sastoje od po jedne crne kocke, okružene sa 6 belih četvorostranih piramida. Skup svih rombičnih dodekaedara ispunjava prostor.)

Nakon toga sam đacima ispričala detalje u vezi s Delskim problemom udvostručenja kocke. Čuli su za legendu o neuspehu starih Grka pri konstrukciji oltara u obliku kocke u Apolonijevom hramu, kao i o značaju geometrijskih konstrukcija isključivo šestarom i lenjirom, prema klasičnim Platonovim zahtevima. Uverili su se u to da bi se rešenje zadatka klasičnom metodom svelo na konstrukciju duži dužine $\sqrt[3]{2}$ šestarom i lenjirom, ako je poznata jedinična duž. Spomenula sam viševekovne napore na izvođenju konstrukcije i skrenula sam pažnju na to da će kroz dve-tri godine s više znanja iz analitičke geometrije biti u stanju da razumeju poneke detalje o nemogućnosti rešenja ovog klasičnog zadatka.

Na kraju smo vodili opšti razgovor o mogućnosti konstrukcija dužina raznih duži. Kao domaći zadatak tražila se konstrukcija šestarom i lenjirom duži dužina $\sqrt[2^k]{a}$, za razne vrednosti prirodnog broja k i pozitivnog racionalnog broja a, uz datu jediničnu duž.

4. *Primedba.* Nastava geometrije može da igra korisnu ulogu i u ilustraciji dostignuća u najmodernijim oblastima matematike. Kao primer navešćemo aktuelnu temu iz oblasti diskretne matematike, koja se može objasniti đacima u završnim godinama srednje škole, kada imaju početna znanja iz analitičke geometrije i poznaju definicije grupe i polja.

Primer 4.1. Učenicima je najavljeno da ćemo konstruisati jednu konačnu geometriju, po uzoru na klasičnu euklidsku ravan. Podsetila sam učenike da u dvodimenzionalnom Dekartovom koordinatnom sistemu euklidske ravni:

– tačke se identifikuju s uređenim parovima (x, y) za sve vrednosti x, y iz skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva, a

– prave se identifikuju s podskupovima tačka (x, y) čije koordinate zadovoljavaju jednačine tipa $y = mx + n$, ili tipa $x = a$ za svako $m, n, a \in \mathbb{R}$.

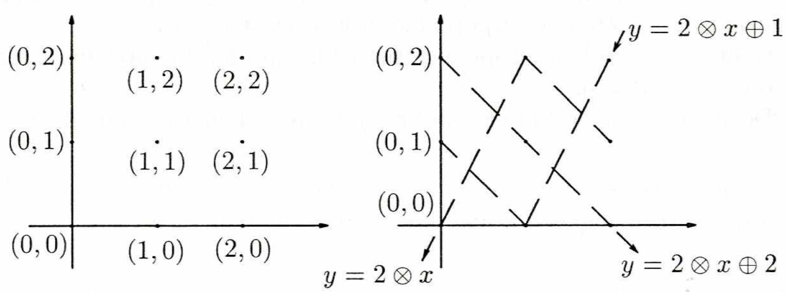
Zatim je postavljen zadatak

(Z_9) U skupu $S_3 = \{0, 1, 2\}$ definisane su dve računske operacije: sabiranje po modulu 3, označeno sa $\oplus$ i množenje po modulu 3, označeno sa $\otimes$. Polazeći od S_3 konstruiše se konačna geometrija A_3 na sledeći način:
– Tačke geometrije A_3 su uređeni parovi (x, y) za sve elemente $x, y \in S_3$;
– prave geometrije A_3 su podskupovi tačaka (x, y) čije koordinate zadovoljavaju jednačine tipa $y = m \otimes x \oplus n$ ili tipa $x = a$ za svako $m, n, a \in S_3$.

(a) Napravi spisak svih tačaka geometrije A_3.

(b) Napravi spisak jednačina svih pravih u geometriji A_3.

Posle toga smo tačke predstavili grafički, po šemi prikazanoj na slici 7a. Spojili smo isprekidanim linijama tačke koje su pripadale jednoj istoj pravoj i tom prilikom smo za crtanje isprekidanih linija upotrebili raznobojne olovke: prave s jednačinama $x = a$ za $a = 0, 1, 2$ bile su nacrtane istom bojom; druga zajednička boja je upotrebljena za prave s jednačinom $y = m \otimes x \oplus n$ za $m = 0$, treća boja za $m = 1$, i četvrta za $m = 2$. (Na slici 7b nacrtane su samo prave s jednačinom $y = 2 \otimes x \oplus n$.).



Slika 7

Sledeći zadatak imao je za cilj da se uporede osobine geometrije A_3 s aksiomima euklidske ravni: "Kroz dve različite tačke prolazi jedna i samo jedna prava" i "Za svaku tačku P i svaku pravu g postoji jedna i samo jedna prava kroz P koja je paralelna pravoj g". (Dve prave se nazivaju paralelne ako se ili poklapaju, ili nemaju zajedničkih tačaka.)

(Z_{10}) Utvrdi posmatranjem grafičkog prikaza svih tačaka i pravih geometrije A_3:

(1) Broj pravih, koje prolaze kroz bilo koje dve različite tačke;

(2) Broj pravih kroz tačku P, paralelnih pravoj g za bilo koji izbor tačke P i prave g.

Rešenjem zadatka je utvrđeno da A_3 ima osobine koje odgovaraju gore navedenim aksiomama euklidske geometrije. Pramenovi paralelnih pravih s jednačinom tipa $y = m \otimes x \oplus n$ su sastavljeni od pravih čije jednačine imaju isti element m iz skupa S_3 – kao i u euklidskoj geometriji istog su "nagiba".

Sledeći korak u našem ispitivanju sastojao se u zameni skupa S_3 skupom $S_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ u kojem su bili definisane operacije: $\oplus$ sabiranje po modulu 6 i $\otimes$ množenje po modulu 6. Usledio je zadatak

(Z_{11}) Reši zadatak analogan zadatku (Z_9) kad se umesto od skupa S_3 polazi od skupa S_6 s operacijama sabiranja i množenja po modulu 6.

Grafičko predstavljanje geometrije A_6, dobijene rešenjem zadatka (Z_{11}), naišlo bi na suviše teškoća pri crtanju mnogobrojnih isprekidanih linija. No i bez crteža je bilo lako naći "kontraprimere" za ponašanje geometrije A_6 slično euklidskoj geometriji, a i geometriji A_3. Utvrđeno je da u geometriji A_6 postoje parovi različitih tačaka kroz koje prolazi više od jedne prave. Na primer kroz tačke $(0, 0)$ i $(3, 0)$ prolaze prave s jednačinama $y = 0$ i $y = 2 \otimes x$.

Đaci su naslućivali da razlika u osobinama geometrija A_3 i A_6 potiče iz toga što je 3 prost broj, dok je 6 složeni broj. Time smo prešli u oblast algebarskih struktura. Poznajući osobine grupa i tela, učenici su uspeli da reše zadatke:

(Z_{12}) Neka je u skupu $S_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, gde je n proizvoljni prirodni broj, definisana operacija sabiranja po modulu n (označena sa $\oplus$). Dokaži da je s obzirom na ovu operaciju S_n komutativna grupa.

(Z_{13}) Neka je u skupu $S_n = \{1, 2, \dots, n-1\}$, gde je n proizvoljni prirodni broj, definisana operacija množenja po modulu n (označena sa $\otimes$).

(a) Dokaži da je s obzirom na ovu operaciju skup S_n komutativna grupa ako i samo ako je n prost broj.

(b) Dokaži da je za svaki prirodni broj p skup S_p komutativno telo s obzirom na operacije $\oplus$ i $\otimes$.

Rešenjem zadatka (Z_{13}) stvoreni su uslovi za algebarsko rešenje zadatka o osobinama geometrije A_p, definisane analogno geometriji A_3 za proizvoljni prost broj p.

(Z_{14}) (a) Neka su $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_2, y_2)$ dve proizvoljne, različite tačke geometrije A_p. Dokaži da kroz P i Q prolazi jedna i samo jedna prava geometrije A_p.

(b) Neka je $P = (x_1, y_1)$ proizvoljna tačka i g proizvoljna prava geometrije A_p. Dokaži da postoji jedna jedina prava u A_p koja prolazi kroz P i paralelna je pravoj g.

Za rešenje ovog zadatka primenjeni su sistemi linearnih jednačina. Pri rešenju dela (a) razlikovala su se dva slučaja:

1. Slučaj: $x_1 = x_2$. Tada prava s jednačinom $x = x_1$ sadrži obe tačke P i Q. Pretpostavka da pored te prave postoji još jedna prava s jednačinom $y = m \otimes x \oplus n$ za neko $m, n \in S_p$ dovodi do uslova

$$y_1 = m \otimes x_1 \oplus n$$
$$y_2 = m \otimes x_2 \oplus n$$

tj. do $y_1 = y_2$, što je zbog $P \neq Q$ nemoguće. Time je ovaj slučaj sređen.

2. Slučaj $x_1 \neq x_2$. Tada prave koje prolaze kroz P i Q treba tražiti među onima čija je jednačina oblika $y = m \otimes x \oplus n$. Da bi se pronašle vrednosti za m i n treba rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1 &= m \otimes x_1 \oplus n \\ y_2 &= m \otimes x_2 \oplus n \end{aligned} \tag{5}$$

Iz (5) sledi jednačina

$$y_1 \oplus (-y_2) = m \otimes (x_1 \oplus (-x_2)) \tag{6}$$

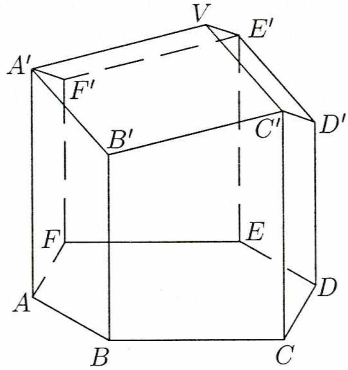
gde $-x$ označava inverzni element elementa $x \in A_p$ s obzirom na operaciju $\oplus$.

Zbog uslova $x_1 \neq x_2$, element $x_1 \oplus (-x_2)$ skupa S_p je različit od 0, i prema tome poseduje multiplikativni inverz, tj. inverz u odnosu na operaciju $\otimes$. (Tu dolazi do izražaja da je A_p telo.) Odatle sledi da jednačina (6) ima jedno i samo jedno rešenje za nepoznatu m. Zamenom te jedinstvene vrednosti za m u jednu od jednačina sistema (5) dobija se jedinstveno rešenje za n. Tako je i u ovom slučaju dat dokaz dela (a) zadatka.

Dokaz dela (b) odvija se na sličan način, oslanjajući se na postojanje inverznih elemenata u odnosu na operacije u skupu S_p.

Gornja razmatranja imaju dvostruku vrednost: stiče se prvi utisak o postojanju konačnih geometrija i, u isto vreme, o mogućnosti primene algebarskih struktura u konstruisanju novih geometrija. Konačne geometrije su u novije vreme našle primene u raznim oblastima diskretne matematike, kao na primer u teoriji kodiranja. Počeci teorije kodiranja izloženi su đacima na sastancima matematičkog kružoka.

5. *Primedba.* Stečena znanja iz nastave geometrije mogu doprineti boljem razumevanju fenomena iz raznih oblasti prirodnih nauka. Sledeći primer se odnosi na oblik ćelije pčelinjeg saća.



Slika 8

Primer 5. Ćelija pčelinjeg saća je telo sa 10 strana: osnovu ćelije čini pravilni šestougao $ABCDEF$; omotač se sastoji od 6 podudarnih trapeza, normalnih na ravan šestougla i poređanih tako da za dužine bočnih ivica važe uslovi $\overline{AA'} = \overline{CC'} = \overline{EE'}$ i $\overline{BB'} = \overline{DD'} = \overline{FF'}$, pri čemu je $\overline{AA'} \neq \overline{BB'}$. "Krov" ćelije čine tri podudarna romba $A'B'C'V$, $C'D'E'V$ i $E'F'A'V$ (Sl. 8)

Oblik ćelije saća fascinirao je razne naučnike tokom vekova. Kepleru se činilo da su na svim ćelijama rombovi krova slični stranama rombičnog dodekaedra. Ta Keplerova pretpostavka je kasnijim merenjima uglova u rombovima ćelija potvrđena. U rombovima ćelija dužine dijagonala se odnose kao $1 : \sqrt{2}$.

U XVIII veku Réaumir je formulisao hipotezu: Od svih tela ograničenih pravilnim šestouglom, sa 6 podudarnih trapeza i sa 3 podudarna romba postavljenih kao na sl. 8, koja imaju datu površinu osnove i datu zapreminu, najmanju površinu ima ono telo kod koga su rombovi slični stranama rombičnog dodekaedra.

Réaumirovu pretpostavku je Kenig (matematičar iz Švajcarske) dokazao primenom diferencijalnog računa. Makloren je izveo dokaz hipoteze, koristeći samo elementarnu geometriju.

Đacima, koji su stekli osnovna znanja iz diferencijalnog računa postavljen je zadatak:

(Z_{15}) Dokaži hipotezu Réaumira metodom diferencijalnog računa. Nakon toga đaci su pročitali Maklorenov dokaz Réaumirove hipoteze (koristeći se knjigama [2] ili [1]) i na narednom času smo zajednički diskutovali o prednostima, odnosno teškoćama u izvođenju svakog od dva navedena dokaza.

Učenicima je skrenuta pažnja na to da pri rešavanju zadatka iz bilo koje oblasti matematike vredi tražiti različite metode i upoređivati detalje pri radu. Najkraći put rešenja nije uvek i najelegantniji prilaz savlađivanju problema.

Niz primedbi o značaju nastave geometrije još bi se dalje mogao nastaviti. Mi ćemo ga međutim prekinuti sledećom završnom napomenom:

Da bi nastava geometrije po školama bila uspešna, nastavno osoblje mora da poseduje solidno znanje iz ovog predmeta. Međutim, ne samo u školama, već i na kursevima na univerzitetu i u drugim pedagoškim ustanovama za obrazovanje budućih nastavnika matematike oseća se tendencija da se studije geometrije zanemaruju. Ta činjenica može da dovede do drastičnog opadanja nivoa nastave geometrije u školama. Potrebno je nastojati na podizanju ugleda geometrije i kod studenata matematike.

Literatura

1. J. Cofman, *What to sove?*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
2. H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, New York, 1965.

METODIKA I ISTORIJA GEOMETRIJE
Divčibare, 12–13 oktobra 1996, 25–30

KAKO ISTICATI HUMANISTIČKE ASPEKTE GEOMETRIJE U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Đorđe Kadijević

Sažetak. Tradicionalna srednjoškolska nastava matematike, koja je zasnovana na deduktivnom zaključivanju zanemarujući heurističko rezonovanje, obično stvara pogrešnu sliku o tome šta je geometrija i kako se razvija njeno znanje. Kao što ističe Filip Dejvis, nastava matematike mora da prikaže humano lice matematike a ne njeno platonsko, algoritamsko, kompjuterizovano ili neko drugo lice. Ovaj rad razmatra četiri načina isticanja humanističkih aspekata geometrije u srednjoškolskoj nastavi matematike. Prvi se zasniva na prikazivanju pogrešnih i neadekvatnih činjenica kreiranih i korišćenih tokom razvijanja geometrijskog znanja. Drugi se bavi objašnjavanjem načina na koji neki elementi geometrijskog znanja mogu biti kreirani i testirani. Treći, koji prikazuje način podsticanja efikasnog deduktivnog zaključivanja korišćenjem dvostubačne argumentacije, posmatra dokazivanje kao oblik socijalne interakcije. Četvrti se zasniva na sagledavanju upotrebe geometrijskog znanja u modeliranju našeg okruženja. Ovi načini, koji se bave istorijskim, epistemološkim, strukturalnim i utilitarnim aspektima geometrijskog znanja, bili su do sada zanemarivani od strane većine istraživača u oblasti nastave matematike.

Uvod. Iako se matematičko znanje najčešće kreira putem heurističkog rezonovanja i dograđuje kroz deduktivna zaključivanja, srednjoškolska nastava geometrije po pravilu ističe samo deduktivne aspekte koji obično formiraju pogrešnu sliku o tome šta je geometrija i kako se razvija njeno znanje. Ovaj problem geometrije, i matematike uopšte, uočen je u mnogim zemljama, i neke od njih su rebalansirale matematički kurikulum (nastavni plan i program) tako da manje ističe deduktivne aspekte matematike [1]. Danas se od srednjoškolske nastave matematike u Danskoj, na primer, eksplicitno zahteva da realizaciju matematičkih sadržaja prožme istorijskim, pragmatičkim i strukturalim (deduktivnim) aspektima odgovarajućih znanja [2]. Kao što ističe Filip Dejvis (koautor knjiga *Mathematical Experience* i *Descartes' Dream;* izdavač: Penguin), nastava matematike mora da prikaže humano lice matematike, a ne njeno platonsko, algoritamsko, kompjuterizovano ili neko drugo lice [3]. To posebno važi za srednjoškolsku nastavu geometrije, jer "logika ne objašnjava više kako razmišljamo nego što gramatika objašnjava kako govorimo; obe nam mogu reći kada su naše rečenice pravilno formirane, ali nam ne mogu reći koje rečenice da sačinimo" [4, str. 186].

U zadnjih par godina intenzivnije se proučavaju humanistički aspekti matematike (e.g., [5]). Ovaj rad razmatra četiri načina isticanja humanističkih aspekata geometrije u srednjoškolskoj nastavi matematike. Prvi se zasniva na prikazivanju pogrešnih i neadekvatnih činjenica kreiranih i korišćenih tokom razvijanja geometrijskog znanja. Drugi se bavi objašnjavanjem načina na koji neki elementi geometrijskog znanja mogu biti kreirani i testirani. Treći, koji prikazuje način podsticanja efikasnog deduktivnog zaključivanja korišćenjem dvostubačne argumentacije, posmatra dokazivanje kao oblik socijalne interakcije. Četvrti se zasniva na sagledavanju upotrebe geometrijskog znanja u modeliranju našeg okruženja. Ove načine razmatramo u narednom poglavlju koristeći raznovrsne primere iz srednjoškolskih sadržaja geometrije. Iako se neki od tih sadržaja realizuju i u osnovnoj školi, izložene metodičke sugestije, naročito prve tri, prvenstveno se odnose na realizaciju srednjoškolske nastave matematike.

Metodičke sugestije

Prikazivati pogrešne i neadekvatne činjenice iz filogeneze znanja. Kao što je enciklopedista Didro podvukao, istina se često dostiže kroz pogrešna iskustva. (Prisetimo se latinske izreke: *Opinio magistri probabilis tantum.*) Istorija geometrije (npr., [6, 7]) sadrži raznovrsne primere kreiranja i korišćenja pogrešnih i neadekvatnih činjenica (naravno, posmatrano iz našeg ugla). Navodimo tri elementarnija primera.

U Vavilonskoj matematici zapremina pravilne zarubljene četvorostrane piramide nalažena je množenjem visine tela sa polovinom zbira površina njegovih baza [6], što je verovatno bila posledica korišćenja pogrešne analogije u vezi sa računanjem površine trapeza.

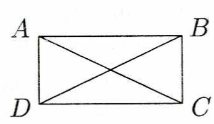
Površina kruga u starom Egiptu računata je kao površina kvadrata čija je stranica jednaka osam devetina prečnika kruga. Ovaj postupak, koji je pretpostavljao da je odnos obima kruga i njegovog prečnika (π) jednak $256/81 \approx 3.16$, imao je izgleda solidnu vizuelnu osnovu [8].

U Vizantijskoj matematici površina kruga računala se kao aritmetička sredina površina kvadrata opisanog i upisanog u taj krug, čime je pomenuti odnos (π) aproksimiran brojem $\sqrt{8} \approx 2.83$ [9].

Ovakva geometrija obično se skriva od očiju učenika, koji stoga stvaraju sliku da je rad matematičara oslobođen svake greške, što očigledno nije slučaj. Nesumnjivo je da će prikazivanje ovih i drugih primera formirati kod učenika ispravniju sliku o geometriji i matematici uopšte, i pomoći im da shvate da su teškoće u kreiranju a samim tim i u savladavanju kreiranog znanja normalna pojava koju ne treba uvek vezivati za slabe matematičke sposobnosti.

Objašnjavati načine kreiranja i testiranja elemenata znanja. Elementi znanja najčešće se kreiraju korišćenjem induktivnog zaključivanja i zaključivanja po analogiji, kao u slučaju Ojlerove formule $s + t = i + 2$ u vezi sa brojem strana (s), temena (t) i ivica (i) konveksnog poliedra [10, 11]. (Površina omotača prave kupe (zarubljene prave kupe) može se računati kao površina trougla (trapeza). Prvo pomoću površine jednog trougla (trapeza), a zatim pomoću zbira površina većeg broja malih trouglova (trapeza).) Ova dva načina zaključivanja posebni su slučajevi heurističkog zaključivanja koje ima svoja, relativno nepoznata, pravila rezonovanja. Jedno od njih kaže: Ako A uzrokuje B i B je tačno, tada i A može biti tačno. (Ako B uzrokuje A i B je pogrešno, tada i A može biti pogrešno.) Iako ova i ostala pravila heurističkog zaključivanja ništa ne dokazuju, veoma su korisna u kreiranju novog znanja jer mogu sugerisati dobar pravac daljeg istraživanja; recimo, u cilju dokazivanja A, dokazali smo njegovu logičku posledicu B koja na neki način učvršćuje naše uverenja da je i A tačno [10]. Pretpostavimo da neko predlaže formulu prema kojoj je površina trapeza jednaka proizvodu visine trapeza i poluzbira njegovih osnovica. Ako ova formula važi za trougao i paralelogram koji se mogu posmatrati kao specijalni slučajevi trapeza, postoji solidna osnova da tvrdimo da je formula verovatno tačna. Naravno, potreban je njen dokaz. (Analogni test možemo koristiti u slučaju zapremine zarubljene piramide ili kupe i površine omotača zarubljene prave kupe. Test po dimenziji takođe može biti od koristi [12, str. 130–132]). Nastavnik matematike bi trebalo da napusti učestalu praksu prikazivanja gotovog elementa znanja uz njegov (često mistifikovan) dokaz, objašnjavajući prvo kako bi učenik mogao da ga samostalno kreira i testira. (Neki rezultati mogu biti izvedeni na prvi pogled, kao u slučaju površine trapeza, jer je površina trougla $ah/2$, površina paralelograma ah, površina trapeza $...h$, $...h/2$, $(a+0)h/2$, $2ah/2$, $\dots$, tj. $(a+b)h/2$.) U okviru ovog konteksta važno je sagledati i ulogu intuitivne spoznaje u kreiranju geometrijskog znanja [13].

Razmatrati dokazivanje kao oblik socijalne interakcije. Proces deduktivnog zaključivanja može se jasnije sagledati korišćenjem dvostubačne argumentacije [14] kod koje leva kolona sadrži šta je dato i šta se tvrdi, dok desna ističe šta se traži i na kojim se razlozima bazira ono što se tvrdi. Na primer, dokaz tvrđenja da dijalonale pravougaonika imaju istu dužinu može imati sledeći oblik:



Dato: $AB = DC$, $AD = BC$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$	Traži se: $AC = BD$
TVRĐENJA	RAZLOZI
$AB = BA$	$=$ je simetrična relacija
$AD = BC$	dato
$\angle A = \angle B$	dato
$\triangle ABD \cong \triangle BAC$	podudarnost trouglova (SUS)
$AC = BD$	posledica podudarnosti

(U opštem slučaju, u koloni razlozi pojavljivaće se ono što je dato, definicije, aksiome, teoreme i pravila deduktivnog zaključivanja.) Dvostubačna argumentacija zaista jasnije prikazuje proces deduktivnog zaključivanja jer od učenika zahteva da: (a) specifikuje šta je dato a šta se traži (neki učenici često uzimaju da je dato ono što se traži), i (b) svoja tvrđenja podupre valjanim razlozima, polako dolazeći do onoga što se traži. Dvostubačna argumentacija takođe omogućava učenicima da sagledaju da u jednom dokazu redosled nekih koraka može biti proizvoljan, što znači da taj dokaz može biti izveden na više načina. (Iskustvo sugeriše da bi dvostubačnu argumentaciju prvo trebalo koristiti u cilju rekonstrukcije već sačinjenih dokaza čiji su argumenti ispremeštani ili pak pomešani sa nekim pogrešnim i/ili nepotrebnim argumentima.) Pored toga, tvrđenja i argumenti konkretnog dokaza obično nisu ni sadržajno fiksirani, jer zavise od zajedničkog znanja onoga koji dokazuje i onoga koji razmatra dokaz, a to znanje, naravno, može varirati od slučaja do slučaja. Dakle, dokazi nisu monolitne strukture kako ih matematička literatura najčešće prikazuje. S obzirom da je matematika u realnosti "oblik socijalne interakcije u kojoj je 'dokaz' kompleks formalnog i neformalnog, izračunavanja i neobaveznih komentara, ubedljivog argumenta i poziva na imaginaciju" [15, str. 73], u nastavi bi i geometrijske dokaze, kad god je to moguće, trebalo tretirati na isti način.

Prikazivati korišćenje elemenata znanja u modeliranju našeg okruženja. U poslednjih desetak godina u mnogim zemljama sveta ponovo se javlja mišljenje da nastava matematike treba da ukazuje i na primene matematičkog znanja u modeliranju našeg okruženja. Geometrijsko znanje je široko primenljivo na modeliranje realnosti. Ono se koristi pri razmatranju pomračenja preko krugova, refleksija preko elipsa i parabola, radio talasa preko hiperbola i parketiranja preko (pravilnih) poligona [16]. Takođe se koristi u dizajniranju brisača stakla automobila [17] i razmatranju vodosnabdevanja iz lokalnog jezera [18]. Uopšte gevoreći, geometrija doprinosi rešavanju mnogih problema svakodnevnog života kao što su pakovanje, oglašavanje, izgradnja mostova, tunela, zgrada i sportskih terena, izrada mapa gradova i saobraćajnih puteva, itd. [19]. Naravno, utilitarni pristup geometrijskom znanju možemo započeti elementarnijim primerima, recimo:

Pravougaoni temelj obično se markira sa 4 kočića oko kojih se zateže kanap koji formira pravougaoni okvir. Kanap se potom zateže po jednoj dijagonali okvira, a zatim se uzeta mera prenosi na drugu dijagonalu. Ako su dijagonale (gotovo) jednake, započinje se sa kopanjem temelja. U suprotnom, postavlja se novi okvir i pravi nova provera.

Pitagorin trougao čije su dužine stranica 3, 4 i 5 mernih jedinica može se koristiti za proveravanje da li je kvadrat dobro udvostručen ili utrostručen. Zaista, jer oštar ugao koje obrazuju dijagonale udvostručenog (utrostručenog) kvadrata (to je pravougaonik dimenzija $2a \times a$, odnosno $3a \times a$, gde je a stranica kvadrata) treba da bude jednak većem (manjem) oštrom uglu Pitagorinog trougla [20].

Tekuća pozicija broda na moru može se, pored drugih metoda, odrediti i merenjem dva horizontalna ugla između tri objekta na obali koji su prikazani na karti oblasti kojom brod plovi. To je zbog toga što ovi objekti i dobijeni uglovi omogućavaju da na karti konstruišemo dva kruga čija jedna presečna tačka predstavlja traženu poziciju broda [21].

Neosporno je da će prikazivanje ovih i drugih primera ne samo povećati interes učenika za geometriju, već ih i dodatno motivisati za usvajanje predviđenih sadržaja.

* * *

Iako je u zadnje dve decenije formirana bogata riznica znanja u vezi sa nastavom i učenjem geometrija (e.g., [22]), prikazani načini isticanja humanističkih aspekata geometrije bili su do sada zanemarivani od strane većine istraživača u oblasti nastave matematike. Nesumnjivo je da će uvažavanje izloženih metodičkih sugestija ne samo unaprediti srednjoškolsku nastavu geometrije, već i doprineti sticanju kvalitetnijeg geometrijskog znanja. Stoga prikazane načine treba dalje metodički razrađivati i istraživati njihove obrazovne vrednosti.

LITERATURA

[1] Quadling, D. A. (1985). *Algebra, analysis, geometry.* In Morris, R. (Ed.), *The Education of Secondary School Teachers of Mathematics* (Studies in mathematics education, vol. 4) (pp. 79–96). Paris: UNESCO.

[2] Blomhøj, M. (1991). *Mathematical Modelling at Upper Secondary Level.* Department of Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies: tekst: MI 42.

[3] Davis, P. J. (1992). *The Five Types of Mathematical Educator. Mathematics and Society* (a series of lectures). Roskilde University, Denmark.

[4] Minsky, M. (1988). *The Society of Mind.* New York: Touchstone.

[5] Ernest, P. (Ed.) (1994). *Mathematics, Education, and Philosophy: An International Perspectivez.* Bristol, PA: Falmer Press.

[6] Eves, H. (1990). *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics* (third edition). Boston, Massachusetts: PWS-KENT Publishing Company.

[7] Kline, M. (1980). *Mathematics: The Loss of Certainty.* New York: Oxford University Press.

[8] Robins, G., & Shute, C. (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus.* London: British Museum Publication.

[9] Heath, T. (1981). *A History of Greak Mathematics (Vol. II).* New York: Dover.

[10] Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

[11] Lakatosh, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge: Cambridge University Press.

[12] Polja, Dž. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak.* Zagreb: Školska knjiga. (Pólya, G. (1990). *How to Solve it* (second edition). London: Penguin.)

[13] Stipanić, E. (1980). *O matematičkoj intuiciji i njenoj ulozi u nastavi i udžbeniku matematike.* U Stipanić, E. (Red.), *Udžbenik kao činilac u unapređivanju nastave matematike.* Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

[14] Goldstein, S. (1989). *Jigsaw Proofs.* Mathematics Teacher, 82, 186–7.

[15] Davis, P. J. & Hersh, R. (1990). *Descartes' Dream.* London: Penguin.

[16] Fremont, H. (1979). *Teaching Secondary Mathematics Through Application* (second edition). Boston, MA: Prindle, Weber & Schmidt.

[17] Clatworthy, N. J., & Galbraith, P. L. (1991). *Mathematical Modelling in Senior School Mathematics: Implementing an Innovation.* Teaching Mathematics and its Application, 10, 6–28.

[18] Matsumiya, T., Yanagimoto, A., & Mori, Y. (1989). *Mathematics of a Lake (Problem Solving in the Real World.)* In Blum, W., Niss. M., & Huntley, I. (Eds.), *Modelling, Applications and Applied Problem Solving: Teaching Mathematics in a Real Context* (pp. 87–97). Chichester, England: Ellis Horwood.

[19] Graumann, G. (1989). *Geometry in Everyday Life.* In Blum, W., Berry, J. S., Biehler, R., Huntley, I. D., Kaiser-Messmer, G., & Profke, L. (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics* (pp. 153–8). Chichester, England: Ellis Horwood.

[20] Hollingdale, S. (1989). *Makers of Mathematics.* London: Penguin.

[21] Belojević, V. (1968). *Pomorska navigacija.* Beograd: Školski centar za brodarstvo, brodogradnju i hidrogradnju.

[22] Hershkowitz, R. (1990). *Psychological Aspects of Learning Geometry.* In Nesher, P., & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70–95). Cambridge: Cambridge University Press.

PROMOTING THE HUMAN FACE OF GEOMETRY IN MATHEMATICS TEACHING AT UPPER SECONDARY LEVEL

Traditional mathematics teaching at upper secondary level, which is based upon deductive reasoning, neglecting heuristic reasoning, frequently creates a false view of what geometry is and how its knowledge has been developed. As Philip Davis points out, mathematics teaching has to display the human face of mathematics rather then its platonic, algorithmic, computerized or whatever face. The study examines four ways whereby the human face of geometry may be promoted. The first is based upon presenting wrong and inadequate pieces of knowledge that have been created and used in the course of the development of geometry knowledge. The second deals with explaining how some pieces of geometry knowledge can be created and tested. The third, which examines a way of promoting efficient deductive reasoning by using two-column proofs, considers proving as a form of social interaction. The fourth is based upon presenting various examples relating to the use of geometry in modelling the reality. These methods, which deal with the historical, epistemological, structural and applicative issues of geometry knowledge, have been neglected so far by most of researchers in mathematics education.

XV beogradska gimnazija, Gočka 40, 11090 Beograd

Matematički institut SANU, Kneza Mihaila 35, 11000 Beograd

METODIKA I ISTORIJA GEOMETRIJE
Divčibare, 12–13 oktobra 1996. 31–40

KARAMATINI PROIZVODI DVA KOMPLEKSNA BROJA

Aleksandar M. Nikolić

Sažetak. Jovan Karamata (1902–1967) u radu *Neke primene kompleksnog broja u elementarnoj geometriji* i u univerzitetskom udžbeniku *Kompleksni brojevi*, konstatuje da u planimetriji ulogu vektora može preuzeti kompleksan broj pri čemu se u postavljanju i rešavanju pojedinih problema javlja proizvod $\overline{a}b = A+Bi$ gde je $\overline{a}$ konjugovani broj od a a a i b kompleksni brojevi kao slobodni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Koristeći geometrijsku interpretaciju a i b, Karamata A i B izražava sa $A = |a|\,|b|\cos\alpha$ i $B = |a|\,|b|\sin\alpha$. Da bi ukazao na geometrijski smisao tih izraza, Karamata ih obeležava $A = (a \perp b)$ i $B = (a \mid b)$i naziva **ortogonalan proizvod i paralelan proizvod.**

Pomoću ova dva simbola, smatranih proizvodima, Karamata interpretira neke probleme planimetrije koji se odnose na paralelnost i ortogonalnost, i pokazuje kako se neposredno algebarski mogu izražavati pojedine geometrijske operacije i preglednije izvoditi same računske operacije. Da bi istakao ulogu ovih proizvoda navodi niz obrazaca i osnovnih stavova trigonometrije u kojima se oni javljaju, i ukazuje na njihovu primenu pri izvođenju algebarske interpretacije dva osnovna stava projektivne geometrije – Papos–Paskalovog i Dezargovog stava, kao i Hesenbergovog stava da se Dezargov stav može izvesti iz Papos–Paskalovog oslanjajući se jedino na aksiome veze.

Jovan Karamata (1902–1967) u radu *Neke primene kompleksnog broja u elementarnoj geometriji,* Bull. Soc. Math. Phys. Macédoine 1 (1950), 55–81 (na srpskom, rezime na nemačkom) i u univerzitetskom udžbeniku *Kompleksni brojevi*, Beograd, 1950, konstatuje da u planimetriji ulogu vektora može preuzeti kompleksan broj, pri čemu se u postavljanju i rešavanju pojedinih problema javlja proizvod $\overline{a}b$ gde je $\overline{a}$ konjugovani broj od a, a a i b kompleksni brojevi kao slobodni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Pri računu sa kompleksnim brojevima stalno se javljaju realni deo A i imaginarni deo B proizvoda $\overline{a}b = A + Bi$ koje Karamata, koristeći geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva $a = |a|e^{\alpha_1 i}$, i $b = |b|e^{\alpha_2 i}$, izražava sa

$$A = |a||b|\cos\alpha \quad \text{i} \quad B = |a||b|\sin\alpha, \quad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1,$$

odakle se vidi da je A skalarni proizvod, a B vektorski proizvod (smatran kao skalar) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Da bi ukazao na geometrijski smisao tih izraza, Karamata ih

AMS Subject Classification (1991): Primary 01A60
Ključne reči: Karamata, projektivna geometrija, kompleksan broj, vektor.

obeležava sa

$$A = (a \perp b) \quad \text{odnosno} \quad B = (a \mid b),$$

i naziva "ortogonalan proizvod" i "paralelan proizvod".

Pomoću ovih simbola mogu se lako izraziti uslovi narmalnosti i pralelnosti dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{ako je} \quad (a \perp b) = 0 \quad \text{i} \quad \vec{a} \,||\, \vec{b} \quad \text{ako je} \quad (a \mid b) = 0,$$

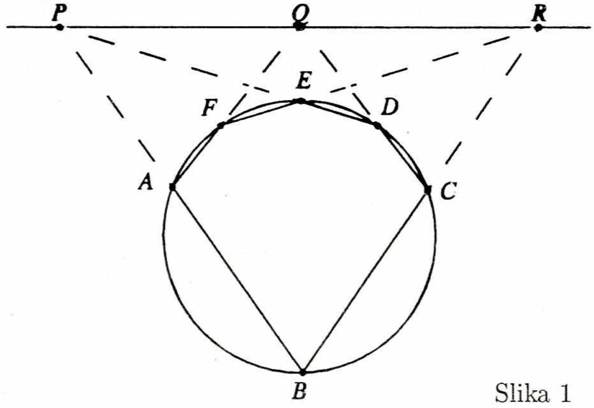
a kako je $(a \perp b) = (a \mid ib)$ i $(ia \perp b) = (a \mid b)$ gde je i imaginarna jedinica, to se jedan od proizvoda uvek može svesti na drugi.

Karamata zatim daje osnovne osobine ovih proizvoda koje i koristi u algebarskom izražavanju pojedinih geometrijskih konstrukcija, posebno onih koje se dobijaju projektovanjem, i u izvođenju nekih obrazaca i osnovnih stavova trigonometrije. Za prikaz jednostavnosti i skladnosti izvođenja pojedinih stavova planimetrije korišćenjem paralelnog proizvoda, kao podesnijeg za upotrebu, Karamata je dao algebarske interpretacije dokaza dva osnovna stava projektivne geometrije — Papos–Paskalovog i Dezargovog stava.

Od osobina Karamatinih proizvoda ćemo navesti asocijatvni zakon, komutativni zakon koji važi samo za ortogonalni proizvod $(a \perp b) = (b \perp a)$, dok je kod paralelnog proizvoda $(a \mid b) = -(b \mid a)$, i distributivni zakon u odnosu na sabiranje, koji važi za oba proizvoda

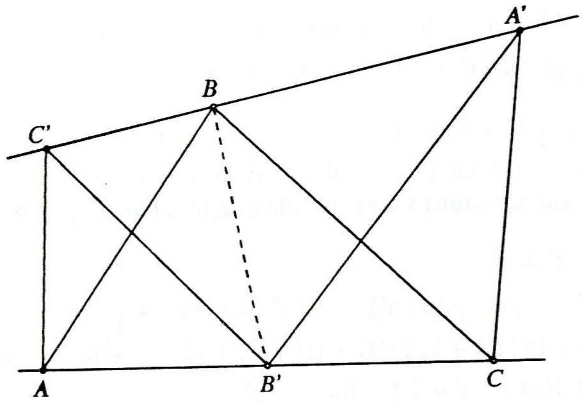
$$((a + b) \perp c) = (a \perp c) + (b \perp c), \qquad ((a + b) \mid c) = (a \mid c) + (b \mid c).$$

Dokaz Papos–Paskalovog stava. Blaise Pascal (1623–1662) je u svojoj šesnaestoj godini u raspravi o konusnim presecima (koja je izgubljena ali koju je spominjao Leibnitz (1646–1716)), i u raspravi *Essay on Conics* iz 1640. godine dao sledeću teoremu koja danas nosi njegovo ime: Ako je šestougao upisan u konusni presek tada tri tačke preseka parova suprotnih strana pripadaju istoj pravoj (Sl. 1).

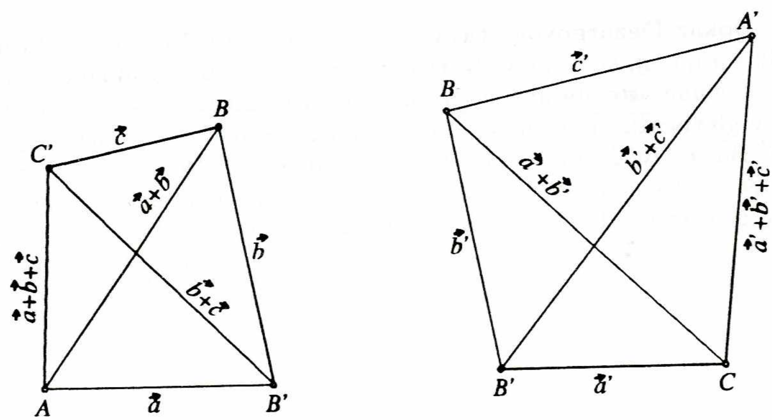


Slika 1

Ako se konusni presek degeneriše u dve prave, odnosno hiperbola u njene asimptote, tada se dobije slučaj koji je opisao Papos, matematičar aleksandrijske škole s kraja 3. i početka 4. veka, o čemu će biti reči u trećem delu rada. Karamata je u svom dokazu posmatrao specijalan slučaj Paposovog stava (koji je nazvao Papos–Paskalov stav) kada se prava nedogleda nalazi u beskonačnosti, što je formulisao na sledeći način (slika 2): Ako se tačke A, B' i C nalaze na jednoj pravoj, a tačke A', B i C' na drugoj, i ako je $AB \parallel A'B'$ i $BC \parallel B'C'$, tada je i $AC' \parallel A'C$.



Slika 2



Slika 3

Karamata je u dokazu ovako formulisanog stava, radi preglednosti, sliku 2. rastavio na dva četvorougla (slika 3), i upotrebom vektora indirektno koristio translaciju a samim tim i kongruenciju. Tako je Papos–Paskalov stav sveo na sledeće tvrđenje: Ako je

$$\vec{a} \parallel \vec{a}\,', \quad \vec{b} \parallel \vec{b}\,', \quad \vec{c} \parallel \vec{c}\,', \quad \vec{a}+\vec{b} \parallel \vec{b}\,'+\vec{c}\,', \quad \vec{b}+\vec{c} \parallel \vec{a}\,'+\vec{b}\,',$$

tada je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \parallel \vec{a}\,'+\vec{b}\,'+\vec{c}\,'$ tj. iz paralelnosti tri homologne strane i nehomolognih dijagonala sledi paralelnost četvrtih strana posmatranih četvorouglova.

Izražavajući ovaj stav preko paralelnog proizvoda i znajući da je

$$(a \mid b) = 0 \quad \text{ekvivalentno sa} \quad \vec{a} \parallel \vec{b},$$

Karamata konstatuje da je za dokaz ovog stava potrebno pokazati da ako je

$$\begin{gathered}(a \mid a') = 0, \quad (b \mid b') = 0, \quad (c \mid c') = 0\\ (a+b \mid b'+c') = 0, \quad (b+c \mid a'+b') = 0,\end{gathered}$$

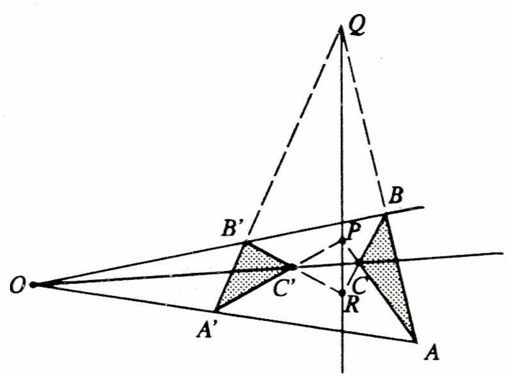
tada je $(a+b+c \mid a'+b'+c') = 0$.

U dokazu je pošao od onoga što treba da dokaže tj. od $(a+b+c \mid a'+b'+c')$, i koristeći samo osobinu distributivnosti paralelnog proizvoda i pretpostavke, dobio

$$\begin{aligned}&(a+b+c \mid a'+b'+c')\\ &= (a \mid a') + (a \mid b') + (a \mid c') + (b \mid a') + (b \mid b') + (b \mid c') + (c \mid a') + (c \mid b') + (c \mid c')\\ &= ((a \mid b') + (a \mid c') + (b \mid b') + (b \mid c')) + ((b \mid a') + (b \mid b') + (c \mid a') + (c \mid b'))\\ &= (a+b' \mid b'+c') + (b+c \mid a'+b') = 0\end{aligned}$$

odakle direktno sledi tvrđenje Papos–Paskalovog stava.

Dokaz Dezargovog stava. Girard Desargues (1591–1661), Paskalov savremenik i prijatelj, većinu svojih tekstova objavio je 1639. godine u knjizi *Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan*, ali njegov glavni stav je štampan 1648. godine kao dodatak knjizi njegovog prijatelja A. Bosse (1602–1676) *Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective*, kao pokušaju popularizovanja Dezargovih praktičnih metoda u projektivnoj geometriji. Taj Dezargov stav glasi (slika 4):



Slika 4

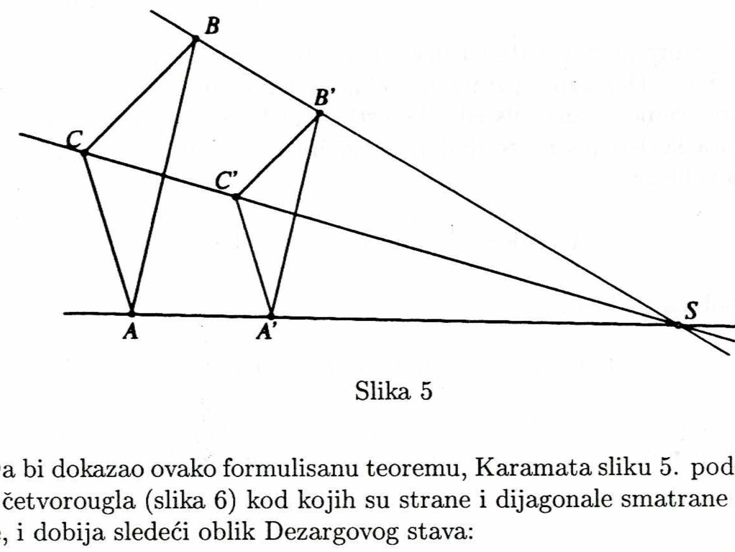
Kod dva iz tačke perspektivna trougla važi da se parovi homolognih strana AB i $A'B'$, BC i $B'C'$, i AC i $A'C'$ ili njihovi produžeci seku u tri tačke koje pripadaju jednoj pravoj. Obrnuto, ako se tri para homolognih strana dva trougla seku u tri tačke koje pripadaju jednoj pravoj, tada se tri prave koje prolaze kroz homologna temena ovih trouglova seku u jednoj tački.

Karamata je, kao i kod Papos–Paskalove teoreme, posmatrao specijalan slučaj, i to obrnutog, Dezargovog stava kada su homologne strane dva trougla paralelne, tj. kada se prava nedogleda nalazi u beskonačnosti, što je formulisao na sledeći način (slika 5):

Ako su homologne strane trouglova ABC i $A'B'C'$ paralelne, tj.

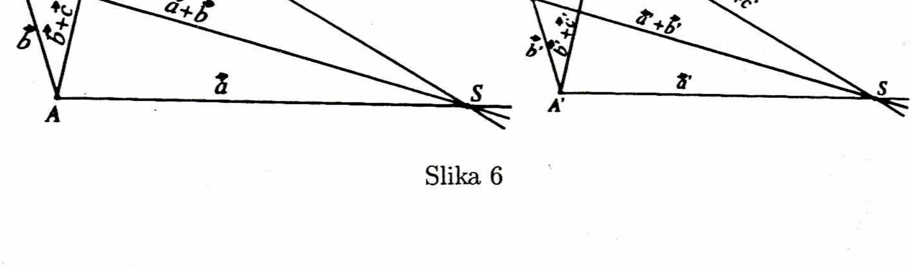
$$AB \parallel A'B', \quad BC \parallel B'C' \quad \text{i} \quad CA \parallel C'A'$$

tada se prave koje prolaze kroz homologna temena AA', BB' i CC' seku u jednoj tački S.



Slika 5

Da bi dokazao ovako formulisanu teoremu, Karamata sliku 5. podesno razlaže na dva četvorougla (slika 6) kod kojih su strane i dijagonale smatrane za slobodne vektore, i dobija sledeći oblik Dezargovog stava:



Slika 6

Ako je

$$\vec{a} \parallel \vec{a}\,', \quad \vec{b} \parallel \vec{b}\,', \quad \vec{c} \parallel \vec{c}\,', \quad \vec{a}+\vec{b} \parallel \vec{a}\,'+\vec{b}\,', \quad \vec{b}+\vec{c} \parallel \vec{b}\,'+\vec{c}\,',$$

tada je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \parallel \vec{a}\,'+\vec{b}\,'+\vec{c}\,'$, tj. iz paralelnosti tri homologne strane i homolognih dijagonala sledi paralelnost četvrtih strana posmatranih četvorouglova.

Izraženo simbolima paralelnog proizvoda ovo se svodi na dokaz da iz

$$(a \mid a') = 0, \quad (b \mid b') = 0, \quad (c \mid c') = 0$$
$$(a+b \mid a'+b') = 0, \quad (b+c \mid b'+c') = 0,$$

sledi

$$(a+b+c \mid a'+b'+c') = 0.$$

U direktnom dokazu se dobija

$$(a+b+c \mid a'+b'+c') = (a+b \mid a'+b') + (b+c \mid b'+c') + (c+a \mid c'+a'),$$

odakle se, zbog pretpostavki da su prva dva sabirka na desnoj strani jednaka 0, vidi da je za dokaz Dezargovog stava potrebno dokazati da je $(c+a \mid c'+a') = 0$. Kako se to korišćenjem samo distributivnosti paralelnog proizvoda ne može pokazati, Karamata koristi još i dve dodatne osobine, iz kojih sledi veza između tri komplanarna vektora

$$(a \mid b)c + (b \mid c)a + (c \mid a)b = 0.$$

Prva osobina je da važi

$$r(a \mid b) = (ra \mid b) = (a \mid rb), \quad r \in \mathcal{R},$$

a druga je da se svaki vektor $\vec{c}$ može razložiti na komponente po pravcima vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. postoje dva realna broja q i r takva da je $\vec{c} = q\vec{a} + r\vec{b}$, kad god je $(a \mid b) \neq 0$.

Da bi dokazao da je $(c+a \mid c'+a') = 0$, Karamata je uzeo proizvoljne realne brojeve p, q i r

$$p = (b \mid c), \quad q = (c \mid a), \quad r = (a \mid b),$$

i dobio da je

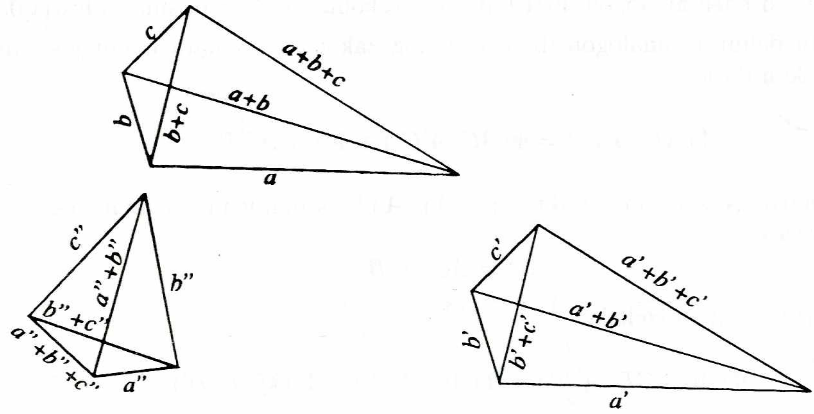
$$(pa+qb+rc \mid pa'+qb'+rc') = pq(a+b \mid a'+b') + qr(b+c \mid b'+c') + rp(c+a \mid c'+a').$$

No, kako su za tako izabrano p, q i r leva strana i prva dva sabirka desne strane jednakosti jednaki 0, sledi da je i $rp(c+a \mid c'+a') = 0$, a kako je $r \neq 0$ i $p \neq 0$ to mora biti

$$(c+a \mid c'+a') = 0,$$

čime je direktno dokazan Dezargov stav.

Ali Karamata pokazuje da se, uvođenjem posrednog četvorougla, odnosno tri pomoćna vektora $\vec{a}''$, $\vec{b}''$ i $\vec{c}''$, Dezargov stav može izvesti i uzastopnom primenom dva Papos–Paskalova stava. Naime, ako su pomoćni vektori tako izabrani da u odnosu na vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ zadovoljavaju Papos–Paskalov stav (slika 7), tj. da je



Slika 7

$$(a \mid a'') = 0, \quad (b \mid b'') = 0, \quad (c \mid c'') = 0,$$
$$(a + b \mid b'' + c'') = 0, \quad (b + c \mid a'' + b'') = 0,$$

tada sledi

$$(a + b + c \mid a'' + b'' + c'') = 0.$$

Ali kako je $(a'' \mid a') = 0$ jer je $(a'' \mid a) = 0$ i $(a \mid a') = 0$, a istim rezonovanjem se dobije da je i

$$(b'' \mid b') = 0, \quad (c'' \mid c') = 0,$$
$$(b'' + c'' \mid a' + b') = 0, \quad (a'' + b'' \mid b' + c') = 0,$$

drugom primenom Papos–Paskalovog stava, sada na vektore $\vec{a'}$, $\vec{b'}$ i $\vec{c'}$, dobija se da je

$$(a'' + b'' + c'' \mid a' + b' + c') = 0,$$

odakle direktno sledi i

$$(a + b + c \mid a' + b' + c') = 0,$$

odnosno tvrđenje Dezargovog stava.

Uopštenje paralelnog proizvoda. Kako se u dokazu Papos–Paskalove teoreme služio samo distributivnim zakonom paralelnog proizvoda, Karamata je, da bi ga uopštio i dokazao opšti slučaj te teoreme, uočio dva para tačaka A, B i A', B' kojima je jednoznačno pridružio realan broj Φ u obliku simboličkog proizvoda

$$\Phi = \Phi(AB, A'B'),$$

za koji važi određen analogon distributivnog zakona i adekvatni smisao broja 0.

Da bi definisao analogon distributivnog zakona Karamata uvodi još jednu tačku C takvu da je

$$\Phi(AB, A'B') = \Phi(AC, A'C') + \Phi(CB, C'B'),$$

gde AB smatra za izvestan "punktualni" zbir A i C, koji nije ni običan ni vektorski, što obeležava sa

$$AB = AC \widehat{+} CB,$$

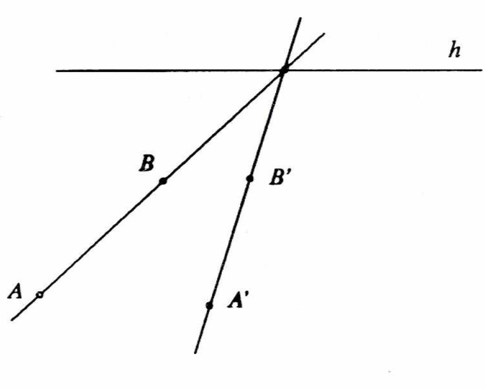
pa distributivni zakon izgleda

$$\Phi(AC \widehat{+} CB, A'B') = \Phi(AC, A'C') + \Phi(CB, C'B').$$

Broj 0 odgovara onim parovima tačaka AB i $A'B'$ za koje je

$$\Phi(AB, A'B') = 0,$$

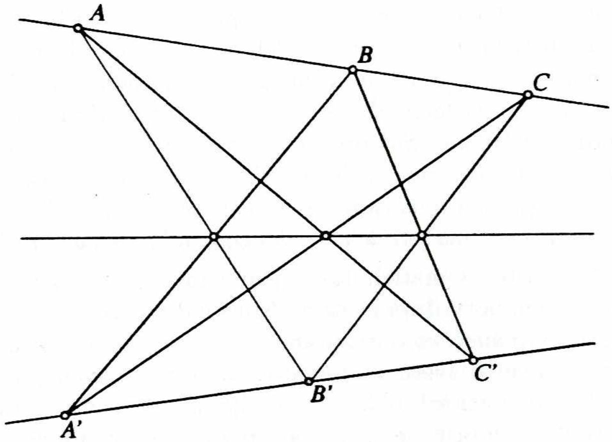
kad se prave AB i $A'B'$ seku u nedogledu ili kad se sve četiri tačke nalaze na jednoj pravoj. Kako se za pravu nedogleda može uzeti proizvoljna prava h (slika 8), Karamata $\Phi(AB, A'B')$ kraće piše $(AB, A'B')_h$.



Slika 8

Karamata zatim konstatuje da ako se ovako uvedeni distributivni zakon i broj 0 uzmu za aksiome, tada na njima i aksiomama veza (incidencije) počiva projektivna geometrija, jer se može pokazati da važi Paposov stav iz koga se može izvesti Dezargov stav, a iz kojih sledi osnovni stav projektivne geometrije o invarijantnosti dvojne razmere. Zbog toga i dokazuje opšti Paposov stav korišćenjem novouvedenog simboličkog proizvoda. Taj stav glasi (slika 9):

Neka se tačke A, B i C nalaze na jednoj pravoj, a tačke A', B' i C' na drugoj. Kada ove tačke spojimo poligonalnom linijom $AB'CA'BC'A$, tada tačka preseka C'' pravih AB' i BA', tačka preseka B'' pravih AC' i CA' i tačka preseka A'' pravih BC' i CB' leže na jednoj pravoj.



Slika 9

Karamata je u dokazu povukao kroz tačke A'' i C'' pravu nedogleda h. Da bi dokazao da se i tačka B'' takođe nalazi na toj pravoj, tj. da će se i prave AC' i CA' seći u nedogledu, pokazuje da iz

$$(AB', BA')_h = 0 \quad \text{i} \quad (BC', CB')_h = 0$$

sledi

$$(AC', CA')_h = 0.$$

Pri tome koristi distributivni zakon ovog proizvoda, definiciju broja 0 i činjenicu da je

$$AC' = AB \widehat{+} BB' \widehat{+} B'C' \quad \text{i} \quad CA' = CB \widehat{+} BB' \widehat{+} B'A'.$$

Na kraju svog rada *Neke primene kompleksnog broja u elementarnoj geometriji*, Karamata simbolički proizvod Φ izražava preko paralelnog proizvoda i kompleksnih funkcija, i konstatuje da bi bilo interesantno videti kako bi se na taj način dobio Paskalov stav koji se odnosi na konusne preseke.

* * *

Iz korišćenja nove terminologije u formulaciji i dokazu Papos–Paskalovog i Dezargovog stava, vidi se, što i Karamata konstatuje u pomenutom radu, poznata činjenica da se Dezargova teorema u ravni može dokazati korišćenjem svih 8 projektivnih aksioma veza (incidencije), ali da se ne može dokazati korišćenjem samo prvih 5 aksioma veza (incidencije). Ako se na tih 5 aksioma doda i Paposov stav koji dobija ulogu aksiome, Dezargov stav se može dokazati, što je 1905. godine pokazao G. Hessenberg (*Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen*, Mathematische Annalen, 61.)

Takođe se i u ovim geometrijskim radovima može primetiti jasan Karamatin metodološki pristup matematičkim dokazima. Naime, on polazi od specijalnog slučaja teoreme koju dokazuje, a zatim uopštava one elemente koje koristi u dokazu. Kako se u dokazima za slučaj da se prava nedogleda nalazi u beskonačnosti oslanjao, uglavnom, na distributivni zakon paralelnog proizvoda, Karamata konstatuje sledeće: *Stvarno, ako želimo da se u dokazu rešimo paralelnosti, treba umesto prave u beskonačnosti pretpostaviti da se prava nedogleda nalazi u konačnosti i ceo dokaz interpretirati projektivno...Suštinski u ovom dokazu se javlja pojam paralelnog proizvoda u vidu koordinacije između skupa od četiri tačke i skupa realnih brojeva sa osobinom da za njega važi analogon distributivnog zakona i da on iščezava kad su duži određene ovim tačkama paralelne, odnosno kad se seku u nedogledu.*

Originalnost pristupa tematici, kao i jednostavnost i elegancija prikazanih dokaza, na najbolji način potvrđuju ne samo Karamatin izuzetan matematički dar, već i njegovo široko matematičko obrazovanje i svestrani matematički interes. Jer ne treba zaboraviti da je u svetu matematičara postao čuven po dva rezultata iz sasvim drukčijih matematičkih oblasti – teorije divergentnih redova, tačnije inverznih stavova Tauberove prirode, i teorije pravilno promenljivih funkcija, a da su mu radovi i rezultati vezani za probleme geometrije, pomalo nezasluženo, zapostavljeni. Napomenućemo još da je Karamata u radu *Eine elementare Herleitung des Desarguesschen Satzes aus dem Satze von Pappos–Pascal*, Elemente der Mathematik, 5, 1950, 9–10 (na nemačkom) dao planimetrijski dokaz Dezargovog stava uz trostruku primenu Papos–Paskalovog stava.

Fakultet tehničkih nauka–03
Univerzitet u Novom Sadu
Trg Dositeja Obradovića 6
21000 Novi Sad

METODIKA I ISTORIJA GEOMETRIJE
Divčibare, 12–13 oktobra 1996, 41–48

ULOGA RENEA DEKARTA U RAZVOJU MATEMATIKE

Đura Paunić

Tokom humanizma i renesanse, u XV i XVI veku, u Zapadnoj Evropi oživljava interes za antičkom filozofijom i umetnošću. U antičkoj filozofiji, naročito u filozofiji Platona i Aristotela, geometrija igra vrlo značajnu ulogu tako da se izučavanje geometrije nije moglo zaobići. Pronalazak štampe sredinom XV veka utiče da se broj pismenih ljudi naglo poveća, jer knjige postaju dostupne i običnim smrtnicima, a ne samo uskom krugu vrlo bogatih. S druge strane, razvoj trgovine je podstakao razvoj trgovačke računice i algebre, tako da se postepeno prihvataju arapske cifre i računsko rešavanje jednačina. Geografska otkrića i putovanje po okeanu razvijaju navigaciju što podstiče interes za kartografiju, sfernu trigonometriju i astronomiju.

Stanje u matematici na početku XVII veka

Oko 1600. godine su postojale, otprilike, šest različitih kategorija ljudi koje je interesovala matematika: klasični geometri, algebristi, primenjeni matematičari, alhemičari i mističari, umetnici i zanatlije i analitičari.

Klasični geometri su bili zainteresovani za izvornu antičku geometriju i najčešće su bili Italijani ili Francuzi. Njihova osnovna preokupacija je bila da tačno shvate i rekonstruišu antička matematička dela koja su bila dosta izobličena mnogobrojnim prepisivanjem i lošim prevodima. Oni su se trudili da pronađu izgubljena dela, rekonstruišu tačan tekst i da komentarima objasne nejasne delove. Tipičan predstavnik je bio Federigo Komandino (Federigo Commandino, 1509–1575) koji je na grčkom i latinskom izdao dosta pouzdane tekstove Euklida, Apolonija, Arhimeda, Aristarha, Autolika, Herona, Paposa, Ptolomeja i Serenusa. Klod Baše de Mezirjak (Claude Bachet de Meziriac, 1581–1638) je izdao grčki tekst i latinski prevod Diofantove Aritmetike.

Druga kategorija su bili algebristi, koji su se često nazivali i kosisti, jer su prvi stepen nepoznate u jednačini nazivali koza (arap. šaj = lat. res = ital. cosa = stvar), a kvadrat nepoznate čenzo (arap. mal = lat. census = ital. censo = imanje) pa se algebra nazivala na latinskom "ars rei et census" ili na italijanskom "l'arte della cosa". Naime, srednjovekovna algebra je bila poreklom iz islamskog sveta u kojem se razvijala na arapskom jeziku iako su je razvijali matematičari raznih nacinalnosti sa bliskog i srednjeg istoka. Model algebarskog računa potiče od al-Hvarizmijeve knjige "Kratka knjiga računa o uspostavljanju i suprotstavljanju" (Al-Kitab al muhtasar fi hisab al-džabr val mukhabala) iz čijeg je imena nastala i reč algebra. Evropljani su se s algebrom najpre upoznali iz knjige "Knjige o računaljci" (Liber abbaci, 1202) italijanskog matematičara trgovačkog porekla Leonarda Pizanskog. Kosista je najviše bilo u Italiji i Nemačkoj i kosistička algebra se razvijala izvan zvaničnih škola i univerziteta. Najpoznatiji kosisti su bili Luka Pačoli (Luca Pacioli, 1445–1517), Nikolo Tartalja (Nicolo Tartaglia, oko 1500–1557), Đerolamo Kardano (Gerolamo Cardano, 1501–1576), Johan Vidman (Johannes Widmann, oko 1462, posle 1498), Miheal Štifel (Michael Stifel, 1487–1567), Adam Riz (Adam Ries, 1492–1559) itd. Kosistička algebra sastojala se od mešavine algebarskog rešavanja jednačina i aritmetičkog računa, jer su jednačine imale numeričke koeficijente. Najveće otkriće kosista je bilo da se jednačine trećeg i četvrtog stepena mogu rešiti korenovanjem. Doprineli su širenju upotrebe arapskih cifara i razvli algebarski simbolizam (oni su izmislili znake $+$, $-$, $=$, $<$, $>$, $\sqrt{\ }$ itd.).

Treća kategorija, primenjeni matematičari, bili su najviše rasprostranjeni u Engleskoj i Holandiji. Oni su najčešće bili vojni inženjeri čija dela pokazuju mešavinu klasične geometrije i kosističke algebre. Pri tome su ih interesovala "praktična" antička geometrijska dela, naročito Arhimedova dela iz hidrostatike i mehanike, Ptolomejevo delo o stereografskoj projekciji, arapska knjige o trigonometriji itd. Praktična primenjivost istraživanja za rešavanje nekog problema mnogo ih je više intesovala nego precizni dokazi ili "čistoća" primenjene metode. Najistaknutiji predstavnik je bio Simon Stevin (Simon Stevin, 1548–1620) i Džon Neper (John Napier, 1550–1617), a najznačijniji njihov doprinos matematici je Stevinova uloga na širenju i prihvatanju decimalnih razlomaka i Neperovo otkriće logaritama.

Četvrta kategorija ljudi zainteresovanih za matematiku su bili alhemičari i mističari koji su u matematici najčešće tražili brojevnu simboliku ili pomoću matematike pokušavali da prodru u "suštinu stvari". Tipičan njihov predstavnik je bio Johan Kepler (Johann Kepler, 1571–1630), koji je primenjivao infinitezimalne metode za izračunavanje zapremina, ali mu je glavna preokupacija bila da otkrije prave zakone kretanja planeta.

Peta kategorija, umetnici i zanatlije, su bili uzgredno zainteresovani za geometriju zbog perspektive. Iako su došli do vrlo interesantnih otkrića, imali su malo uticaja na razvoj matematike. Najpoznatiji su bili Albreht Direr (Albrecht Dürer, 1471–1528) i Žirar Dezarg (Girard Desargues, 1591–1661), a od zanatlija su najviše za geometriju bili zainteresovani optičari.

Poslednja, šesta, kategorija ljudi zainteresovana za matematiku su bili analitičari i to je bila kategorija koja je bila najsličnija savremenim matematičarima. Njihova glavna preokupacija je bila da saznaju kako su stari Grci uspeli da otkriju teoreme koje su dokazivali, jer deduktivan način dokazivanja teorema, korišćen u knjigama, očigledno nije bio put njihovog otkrića. Dakle, njihova glavna preokupacija je bila kako naći uspešnu metodu za rešavanje problema, rekonstrukcija dokaza teorema i izgubljenih dela antičkih matematičara i traženje novih opštih metoda za rešavanje problema, što je jedna od važnih karakteristika savremenih matematičara. Glavni predstavnik analitičara je bio Fransoa Vijet (Francois Viète, 1540–1603) i Dekartov mlađi savremenik Pjer Ferma (Pierre Fermat, 1601–1665).

U svojoj knjizi "Analitička veština" Vijet daje sledeći opis metode za rešavanje problema: "Postoji jedan način za traženje istine u matematici za koji kažu da ga je otkrio Platon i koji Teon naziva *analiza.* Teon je definiše kao *pretpostaviti da je stvar koja se traži poznata i izvoditi zaključke dok se ne dobije istina koja je nesumnjiva.* S druge strane *sinteza* je *iz zadatih stvari pomoću izvođenja posledica doći do traženog cilja i shvatanja tražene stvari*". Vijet transformiše ovaj postupak tako da analiza postaje postavljanje algebarske jednačine u kojoj se pojavljuju poznate i nepoznate veličine, zatim se jednačina rešava korišćenjem algebarskih pravila. Algebarski postupak rešavanja jednačina Vijet naziva poristika i smatra ga svojim otkrićem, a provera da li je nađeno rešenje je sinteza. Da se poznate i nepoznate veličine ne bi razlikovale Vijet i jedne i druge označava slovima, pri čemu nepoznate veličine označava samoglasnicima, poznate suglasnicima. Vijetova algebra je bila vrlo nezgrapna, jer je on insistirao na homogenosti izraza, tj. da se mogu upoređivati, sabirati i oduzimati samo površine s površinama, zapremine sa zapreminama itd. Nije jasno koliko je Dekart znao o Vijetovim radovima pre nego što je napravio svoju matematičku metodu.

Dekartovo delo u matematici

Rene Dekart (René Descartes, lat. Renatus Cartesius, 31. mart 1596 – 11. februar 1650) se matematikom bavio samo povremeno, a praktično je prestao da se interesuje za nju posle 1638. godine.

Za života je objavio samo jedno matematičko delo, "Geometrija", koje je bilo jedan od tri dodatka njegove knjige "Rasprava o metodi" (Discours da la Methode, Leiden 1637). "Geomatrija" nije sistematska razrada njegove metode nego je ilustracija primene opšte metode na traženje istine u geometriji, tako da ima mnogo samo naznačenih ideja.

Tekst "Geometrije" je dosta kratak (116 strana u prvom izdanju) i namerno nejasan, kako sam Dekart to kaže u jednom pismu. Podeljena je na 3 glave. U prvoj glavi, posle objašnjenja kako se geometrijski izvode algebarske operacije sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja, izvlačenja kvadratnog korena i rešavanja kvadratne jednačine, primenjuje dobijene rezultate na rešavanje Paposovog problema tri i četiri prave. Problem četiri prave se sastoji u tom da se odredi geometrijsko mesto tačaka takvo da je proizvod rastojanja do dve fiksne prave proporcionalan proizvodu do druge dve fiksne prave, pri čemu se rastojanja mere duž pravih koje sa zadatim pravama zaklapaju unapred zadate uglove. Problem tri prave je jednostavniji, jer se traži da proizvod rastojanja od dve prave bude proporcionalan kvadratu rastojanje do treće prave. Dekart izvodi jednačinu geometrijskog mesta, dobija da je ona drugog reda, i objašnjava kako se problem uopštava na više pravih i koje se jednačine tada dobijaju.

U drugoj glavi, na osnovu filozofskog razmatranja šta je jasno shvatljivo, zaključuje da se u geometriji mogu precizno izučavàti samo krive koje se mogu izvesti iz jednog kretanja i koje mogu da se opišu jednom algebarskom jednačinom. Takve krive Dekart zove geometrijske. Krive za čiji je opis potrebno dva kretanja, na primer spirale, jesu mehaničke i nisu pogodne za precizno izučavanje "jer se zamišljaju opisom dva različita kretanja, a ona nemaju nikakav međusoban odnos koji bi se mogao tačno meriti" (a cause qu'on les imagine descrites par deux mouements separés, & qui n'ont entre eux aucun raport qu'on puisse mesurer exactement). Istorijski razvoj matematike je pokazao da je Dekartova podela krivih moguća, ali da je suviše uska i da se i "mehaničke" krive mogu vrlo precizno matematički izučavati. Dekart je dobro poznavao infinitezimalne metode svog vremena, ali ih nije smatrao dovoljno jasnim da bi ih dopustio u svojoj "Geometriji". Ostatak glave je posvećen detaljnom opisu rešenja problema tri i četiri prave, opisu nekih dodatnih krivih, konstrukciji normale na krivu. Na kraju izvodi osobine ovala koje je koristio u prethodnom dodatku iz optike. Bio je veoma ponosan na svoju metodu konstrukcije normale na krivu, koja je bila računski veoma komplikovana i u principu primenljiva samo na algebarske krive. U objašnjenju tog postupka prvi put se pojavljuje metoda neodređenih koeficijenata.

Treći deo je posvećen teoriji jednačina i imao je najveći direktan uticaj na razvoj matematike. U njemu Dekart uvodi skoro sasvim savremenu notaciju za polinome, izvodi njihove osobine, rešava opšte jednačine i primenjuje dobijene rezultate na jednačine koje se dobijaju iz poznatih geometrijskih problema.

Izložimo ukratko Dekartovu metodu za geometrijsko rešavanje jednačina trećeg i četvrtog stepena (Facon generale pour construire tous les problemes solides reduits a une Equation de trois ou quatre dimensions. str. 389–95). U posebnom odeljku je ranije objašnjeno kako se u opštoj jednačini n-tog stepena može anulirati monom stepena $n-1$ (Comment on peut oster le second terme d'une Equation, str. 376–77).

Prvo objasnimo rešavanje jednačine četvrtog stepena. Ako se u jednačinu $x^4 + dx^2 + ex + f = 0$ uvede smena $y = x^2$ i ostavi jedno x^2, dobija se

$$y^2 + x^2 + (d-1)y + ex + f = 0,$$

ili

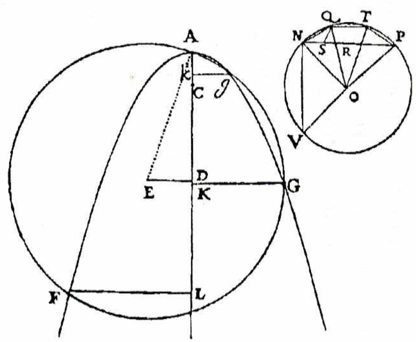
$$\left(y + \frac{d-1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{e}{2}\right)^2 = \left(\frac{d-1}{2}\right)^2 + \frac{e^2}{4} - f,$$

a to je jednačina kruga s centrom u tački $E(-\frac{d-1}{2}, -\frac{e}{2})$, poluprečnika $r = \sqrt{\left(\frac{d-1}{2}\right)^2 + \frac{e^2}{4} - f}$. U preseku ovog kruga i parabole $y = x^2$ se dobijaju rešenja polazne jednačine četvrtog stepena.

Jednačina trećeg stepena se rešava potpuno analogno, jer se rešava jednačina četvrtog stepena $x^4 + px^2 + qx = 0$ koja ima četvrti koren nulu.

Izložimo Dekartovo rešenje trisekcije ugla primenom opisanog postupka pri čemu se koriste oznake sa slike na faksimilu.

descrite, auec la partie de son aissieu A C, qui est $\frac{1}{2}a$ la moitié du costé droit; il faut du point C esleuer la perpendiculaire C E esgale à $\frac{1}{2}q$, & du centre E, par A, descriuant le cercle A F, on trouue F L, & L A, pour les deux moyennes cherchées.



La facon de diuiser vn angle en trois.

Tout de mesme si on veut diuiser l'angle N O P, oubien l'arc, ou portion de cercle N Q T P, en trois parties esgales; faisant N O ∞ 1, pour le rayon du cercle, & N P ∞ q, pour la subtendue de l'arc donné, & N Q ∞ z, pour la subtendue du tiers de cet arc; l'Equation vient,

$z^3 \infty * 3z - q$. Car ayant tiré les lignes N Q, O Q, O T; & faisant Q S parallele a T O, on voit que comme N O est a N Q, ainsi N Q a Q R, & Q R a R S; en sorte que

que N O estant 1, & N Q estant z, Q R est zz, & R S est z^3: Et a cause qu'il s'en faut seulement R S, ou z^3, que la ligne N P, qui est q, ne soit triple de N Q, qui est z, ou à $q \infty 3z - z^3$ oubien,

$z^3 \infty * 3z - q$.

Puis la Parabole F A G estant descrite, & C A la moitié de son costé droit principal estant $\frac{1}{2}$, si on prent C D $\infty \frac{3}{2}$, & la perpendiculaire D E $\infty \frac{1}{2}q$, & que du centre E, par A, on descriue le cercle F A g G, il couppe cete Parabole aux trois poins F, g, & G, sans conter le point A qui en est le sommet. Ce qui monstre qu'il y a trois racines en cete Equation, à sçauoir les deux G K, & g k, qui sont vrayes; & la troisiesme qui est fausse, á sçauoir F L. Et de ces deux vrayes c'est g k la plus petite qu'il faut prendre pour la ligne N Q qui estoit cherchée. Car l'autre G K, est esgale à N V, la subtendue de la troisiesme partie de l'arc N V P, qui auec l'autre arc N Q P acheue le cercle. Et la fausse F L est esgale a ces deux ensemble Q N & N V, ainsi qu'il est aysé a voir par le calcul.

Que tous les problesmes solides se peuuent reduire a ces deux constructions.

Il seroit superflus que ie m'arestasse a donner icy d'autres exemples; car tous les Problesmes qui ne sont que solides se peuuent reduire a tel point, qu'on n'a aucun besoin de cete reigle pour les construire, sinon entant qu'elle sert a trouuer deux moyennes proportionelles, oubien a diuiser vn angle en trois parties esgales. Ainsi que vous connoistrés en considerant, que leurs difficultés peuuent tousiours estre comprises en des Equations, qui ne montent que iusque au quarré de quarré, ou au cube: Et que toutes celles qui montent au quarré de quarré, se reduisent au quarré, par le moyen de quelques autres, qui ne montent

Ddd 3

Dekartovo rešenje trisekcije ugla (faksimil prvog izdanja)

"Opet, neka se želi podeliti ugao NOP, ili preciznije luk ili deo kruga $NQTP$ na tri jednaka dela. Neka je $NO = 1$ poluprečnik kruga, $NP = q$ tetiva koja odgovara datom luku i $NQ = z$ tetiva koja odgovara trećini ugla tada se dobija jednačina

$$z^3 = 3z - q.$$

Naime, ako se povuku duži NQ, OQ, OT i paralela QS sa OT vidi se da je NO prema NQ isto što i NQ prema QR i QR prema RS pa kako je NO jednako 1, a NQ jednako z, QR je z^2, a RS je z^3. A kako nedostaje samo RS, ili z^3, da duž NP, koja je jednaka q, ne bude trostruki umnožak od NQ, koja je jednaka z, ili $q = 3z - z^3$ odnosno $z^3 = 3z - q$." Zatim se ova jednačina rešava na više opisani način.

Dekart piše jednačine u obliku $p(x) = 0$ (iako koristi znak ∞ umesto znaka jednakosti, a kada neki monom ima koeficijent 0 tada na njegovom mestu piše $*$, što se vidi na faksimilu), tako da nema potrebe da razlikuje niz posbnih slučajeva, ali razlikuje "istinita" (pozitivna) od "lažnih" (negativnih) rešenja. Objašnjava i "Dekartovo pravilo znaka" na osnovu kojeg se može iz znakova koeficijenata jednačine odrediti broj "istinitih" i "lažnih" rešenja. Njegovo pravilo važi samo kada jednačina ima sve korene relane.

Iz ovog kratkog prikaza sledi da Dekartova "Geometrija" sadrži samo ideju analitičke geometrije, a da je težište knjige bilo više na teoriji jednačina, gde je Dekart uspeo da značajno pojednostavi i usavrši notaciju.

Interesantno je da je ideju o analitičkoj geometriji imao i Pjer Ferma pre Dekarta, ali je nikada nije štampao nego ju je izložio u jednom kratkom radu u kome je njegov cilj bio još skromniji od Dekartovog. On je želeo da dokaže da se svaki konusni presek opisuje kvadratnim polinomom od dve promenljive i obrnuto da svaki kvadratni polinom od dve promenljive određuje konusni presek (možda degenerisan u par ili jednu pravu). Dakle, Ferma je u potpunosti shvatio osnovne pojmove analitičke geometrije, ali se i on matematikom bavi samo iz hobija pa se nije trudio da svoje ideje u potpunosti razradi. Ferma je po zanimanju bio sudija i radio je u okružnom sudu u Tuluzu.

Pored "Geometrije", Dekart je uspešno rešavao i razne matematičke probleme, koje je saopštavao najčešće Mersenu (Marin Mersenne, 1588–1648). Naime, početkom šesnaestog veka nisu postojali naučni časopisi, a knjige su izlazile sporo, tako da su se naučna otkrića najčešće objavljivala pismima zainteresovanim učenim ljudima. Mersen se dopisivao s velikim brojem naučnika i u svojim pismima, pisanim vrlo nečitkim rukopisom, obaveštavao ih o značajnim naučnim otkrićima.

Značaj Dekartovog dela za opšti razvoj matematika

Nažalost, Dekart je više bio filozof i iskren katolik tako da je najveći deo svog života posvetio izgradnji opšte slike sveta izučavajući mehaniku (u kojoj nije dobio ni jedan tačan rezultat), optiku i izgrađujući principe koji omogućuju pouzdano saznanje o svetu. Na primer, njegovo delo "Meditacije o prvoj filozofiji" sadrži šest meditacija: o stvarima u koje se može sumnjati, o prirodi ljudskog duha, o bogu koji postoji, o istinitom i lažnom, o suštini materijalnih stvari i opet o bogu koji postoji, o postojanju materijalnih stvari i pravoj razlici između duše i ljudskog tela. Za života je Dekart mnogo više bio cenjen kao filozof nego kao matematičar. Bio je svestan značaja svoje metode u geometriji i bio je na nju veoma ponosan. U jednom pismu kaže: "To, što sam napisao u drugom delu knjige o prirodi i osobinama krivih linija i o načinu njihovog ispitivanja, čini mi se da je toliko iznad obične geometrije koliko je i Ciceronova retorika iznad dečijeg bukvara".

Dekartovo delo ima dvojaki značaj u razvoju matematike. Najveći neposredan uticaj na njegove savremenike imala je Dekartova algebra, izložena u trećem delu "Geometrije". Naime, za razliku od algebre u duhu Vijeta koju su do tada koristili Dekartovi savremenici, njegova algebra je vrlo moderna i predstavlja korak koji algebru definitivno svrstava u zrele matematičke discipline. Ona se konačno oslobađa poslednjih ostataka geometrijske interpretacije, posmatraju se algebarske veličine i njihovi odnosi i, praktično, dobija svoj današnji oblik i problematiku: izučavanje polinoma aritmetičkim sredstvima, jasno razgraničeno od mogućih geometrijskih primena. Ona je bila odmah prihvaćena od većine matematičara.

Drugi uticaj je posredan. Analitička geometrija daje pogodnu osnovu za izučavanje proizvoljnih krivih, što je bila osnova za razvoj savremenog pojma funkcije. Ovo je uočio i sam Dekart, ali je njegov vidokrug bio dosta uzak, jer je pokušao da ograniči klasu krivih koja se izučava u geometriji na algebarske krive; bilo mu je savršeno jasno da se one mogu uspešno proučavati, makar samo u principu, na osnovu njegove algebre. Realizaciju Dekartovg programa izučavanja krivih, bez Dekartovih ograničenja, započeo je holanski matematičar Frans fan Shoten (Frans van Schooten, 1615–1660) zajedno sa svojim prijateljima i učenicima. Shoten je preveo "Geometriju" na latinski, jezik tadašnje nauke, i dopunio je "Kratkim zabeleškama" F. de Bona (Florimond de Beaune, 1601–1652) i svojim komentarom.

Naročito značajnu ulogu u istoriji matematike odigralo je drugo, prošireno, latinsko izdanje Dekartove "Geometrije" koje je izašlo iz štampe 1659. godine u dva toma. Prvi tom drugog latinskog izdanja "Geometrije" je sadržavao latinski prevod Dekartovog teksta (str. 1–106), de Bonove "Kratke zabeleške" (str. 107–142), proširen Shotenov komentar (str. 143–344), Shotenov dodatak o rešavanju jednačina trećeg stepena (str. 345–368), Shotenov dodatak o rešavanju veštačkih teškoća u raznim problemima i opšte pravilo o izvlačenju proizvoljnog korena iz binoma (str. 369–400), dva pisma J. Hudea (Jan Hudde, 1628–1704): u jednom se svode jednačine, a u drugom se raspravlja o maksimumu i minimumu (str. 401–516), pismo H. fan Herata (Hendrick van Heuraet, od 1633. do oko 1660) o rektifikaciji krivih. Drugi tom sadrži "Principe univerzalne matematike F. fan Shotena ili uvod u Dekartovu geometrijsku metodu" danskog matematičara E. Bartolina (Erasmus Bartholin, 1625–1698), koji ih je napisao po uputstvima F. fan Shotena (str. 1–40), dve posthumne rasprave F. de Bona, jedna o prirodi i konstrukciji jednačina, a druga o granicama jednačina (str. 49–116), preliminarno pismo E. Bartolina raspravi o granicama jednačina (str. 117–152), elemente krivih linija J. de Vita (Jan de Witt, 1625–1672) (str. 153–340) i Shotenovu raspravu o skladnim geometrijskim dokazima pomoću algebarskog računa (str. 341–420). Ovakav prikaz Dekartove analitičke geometrije je vrlo pogodan za razvoj infinitezimalnog računa. Drugo latinsko izdanje Dekartove "Geometrije" je izučavao Njutn kao student. Interes za analitičku geometriju je neprekidno rastao, a naročito posle otkrića infinitezimalnog računa u drugoj polovini XVII veka.

Literatura

1. The geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition, Dover, New York 1954.
2. Ch. Adam: Descartes sa vie et son œvre, Bovin & Cie, Paris 1937.
3. V. Kaz: A history of mathematics, Harper Collins College Publ. New York 1993.
4. G. Milhaud: Descartes savant, Alcan, Paris 1921.
5. J. Vuillemin: Mathématiques et métaphysique chez Descartes, PUF, Paris 1960.

METODIKA I ISTORIJA GEOMETRIJE
Divčibare, 12–13 oktobra 1996, 49–55

GEOMETRIJA U RANOVIZANTIJSKOM PERIODU

Zoran Lučić

Nakon sjajnih uzleta geometrije u helenističkoj epohi u kojoj dominiraju veličanstvena dela Euklida, Arhimeda i Apolonija, epohi u kojoj je geometrija utemeljena na način koji je u dolazećim vekovima bio uzor svakoj drugoj delatnosti ljudskog uma, naišao je, posle Paposa Aleksandrijskog, poslednjeg značajnog antičkog geometričara, period stagnacije i opadanja. Nailazeće hrišćanstvo, koje je u doba cara Teodosija postalo državna religija rimskog carstva, pomerilo je centar interesovanja intelektualne elite od filozofije i nauke ka hrišćanskoj teologiji. Žarišta paganskog neoplatonizma uspela su, međutim, da zadrže tradiciju izučavanja antičke geometrije u središtu svoje pažnje sve do konačnog prestanka postojanja paganskih škola, bolje reći univerziteta, u Atini i Aleksandriji za vladavine Justinijana, na početku šestog veka. Na sreću, geometrija je stekla poziciju važnog dela opšteg obrazovanja tako da su u Istočnom rimskom carstvu koje je preživelo varvarsku najezdu rušilaca Rima, pre svega na carigradskom univerzitetu koji je postojao od IV do XV veka i kao ustanova bio vezan za helenističku i rimsku tradiciju obrazovanja, geometrijska dela bila strastveno izučavana i prepisivana.

Značaj ranovizantijskog perioda u geometriji i matematici, i nauci uopšte, ogleda se, najpre, upravo u toj usmerenosti ka izučavanju antičkih duhovnih vrednosti, koja je podrazumevala prepisivanje i komentarisanje najznačajnijih pisanih tvorevina grčke i rimske civilizacije. Najstariji sačuvani prepisi Euklidovih *Elemenata*, Apolonijevih *Konika*, Ptolemajevog *Almagesta*, Diofantove *Aritmetike* itd. nastali su u ovom periodu ili čak kasnije ali opet kao prepisi ili prevodi tih dela i njihovih komentara iz ovog, ranovizntijskog perioda. Zahvaljujući radu Teona Aleksandrijskog, njegova ćerke Hipatije, Prokla i Eutokija, pomenimo samo ova imena, sačuvana su dela antičke matematike koja su duboko uticala na kasnija pokolenja ne samo matematičara, već svega obrazovanog sveta.

Ukratko ćemo se osvrnuti na delo najznačajnijih stvaralaca ranovizantijskog perioda koji su za sobom ostavili traga, pre svega u geometriji.

Seren iz Antinoje ili Antinopolisa, grada u Egiptu koji je osnovao Hadrijan, najverovatnije je živeo u IV veku u periodu između Paposa i Teona Aleksandrijskog.

Dva njegova kratka rukopisa, *O cilindarskim presecima* i *O konusnim presecima*, sačuvana su do danas zahvaljujući tome što su ih, počev od sedmog veka, prepisivači i komentatori Apolonijevog dela pridruživali *Konikama* zbog sličnosti teme kojom se bave. U prvoj raspravi koja se sastoji iz 33 stava, Seren u stavovima 14 i 16 ostvaruje svoju osnovnu zamisao i dokazuje da je presek ravni i cilindra *elipsa* [4, vol. ii, str. 520], isti lik koji se dobija u preseku ravni i konusa. U raspravi *O konusnim presecima*, u stavovima 1–57 bavi se površinom trougla koji se dobija u preseku kupe i ravni koja sadrži njen vrh, a u drugom njenom delu, u stavovima 58–69, bavi se zapreminom prave kupe u zavisnosti od njene visine, njene osnove i površine trougla koji se dobija u njenom preseku sa ravni koja sadrži njenu osu [4, vol. ii, str. 522].

Teon Aleksandrijski, neoplatoničar koji je živeo u drugoj polovini IV veka, priredio je novo izdanje Euklidovih dela, a komentarisao je i *Veliki zbornik astronomije* ili *Veliku Sintaksu* Klaudija Ptolemaja, koja je kasnije, spajanjem arapskog „al" sa grčkim „megiste", dobila ime *Almagest.*

Većina sačuvanih rukopisa Euklidovih *Elemenata* su prepisi Teonovog izdanja. I najstariji sačuvani rukopis *Elemenata* (poznat kao *kodeks B*) koji se čuva u biblioteci Oksfordskog univerziteta, prepis koji je 888. godine načinio izvesni Stefan klerik, „teonskog" je porekla. Sačuvan je zahvaljujući najvećem filologu 9. i 10. veka[1], Areti (oko 850–944), mitropolitu grada Cezareje u Kapadokiji, koji je za svoju biblioteku čiji su delovi sačuvani do danas, početkom desetog veka otkupio ovaj izvorni rukopis po veoma visokoj ceni od 4 vizantijske nomizme[2]. Za svoje kritičko izdanje Euklidovih *Elemenata* (*Euclides Elementa*, Biblioteca Teubneriana) na grčkom jeziku sa latinskim prevodom, koje je izdato između 1883. i 1888. godine, holandski istoričar matematike Hajberg (I.L. Heiberg), uz *kodeks B* i još jedan „teonski" rukopis iz desetog veka, *kodeks F*, koji se čuva u Laurentijskoj biblioteci u Firenci, najviše je koristio prepis *Elemenata* koji je nastao početkom desetog veka i koji se danas čuva u Vatikanskoj biblioteci pod brojem 190. Ovaj vatikanski rukopis, poznat pod imenom *kodeks P*, zapravo je jedini sačuvani prepis *Elemenata* koji kao osnovu nema Teonovo izdanje i stoga je dragocen, budući da je Teon često intervenisao na Euklidovom tekstu što se može zaključiti na osnovu njegovih komentara Almagesta u kojima, između ostalog, piše: „Ali sektori jednakih krugova se odnose kao njihovi centralni uglovi *što sam ja dokazao u svom izdanju Elemenata na kraju šeste knjige*" [3, vol. i, str. 46].

Prevod Euklidovih *Elemenata* na naš jezik, koji je između 1949. i 1957. godine načinio Anton Bilimović [2], profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu, zasnovan je na Hajbergovom izdanju, koje se smatra najboljim.

Hipatija, upravnica neoplatonske škole u Aleksandriji na početku petog veka, ćerka Teona Aleksandrijskog, prva je žena čije se ime pominje u istoriji matematike.

[1] H.G. Bek, *Putevi vizantijske književnosti*, SKZ, Beograd, 1967, str. 131.

[2] S. Ransimen, *Vizantijska civilizacija*, Minerva, Subotica, 1964, str. 227. U Stipčevićevoj *Povijesti knjige*, Zagreb 1985, str. 183, navodi se da je Areta platio 14 zlatnika za Euklidove *Elemente*, a čak 21 zlatnik za jedno Platonovo delo.

Komentarisala je Diofantovu *Aritmetiku*, Ptolemajevu *Veliku sintaksu* i Apolonijeve *Konike*. Ovi komentari nisu sačuvani ali Pselove napomene pisane u drugoj polovini jedanaestog veka, u jednom njegovom pismu o Diofantu, o Anatoliju i o egipatskoj metodi računanja [4, vol. ii, str. 528], odnose se na Diofantovo delo i na komentare koji, po svemu sudeći, potiču od Hipatije. Ona je, najverovatnije, komentarisala samo prvih šest knjiga Diofantove *Aritmetike*, te je to razlog da su one sačuvane, dok su ostale, njih sedam, prvo zaboravljene, a potom i izgubljene[3].

Proklo (410–485) iz Carigrada, upravnik Platonove Akademije u Atini, nastavljač dela Porfirija iz Tira (iz drige polovine III veka) i Jambliha (oko 250–325), mnogo je značajniji kao filozof nego kao matematičar. Sačuvani su njegovi komentari prve knjige Euklidovih *Elemenata* [6].

Svojim komentarima Euklidovog dela Proklo se obraća, pre svega, svojim učenicima, početnicima u matematici, pa, stoga, nije čudno što izostavlja, prema sopstvenim rečima, proučavanje Nikomedove i Hipijine krive[4] (kojima se, neelementarnom metodom, rešava problem trisekcije ugla) ili korišćenje Arhimedove spirale[5] za podelu ugla u datom odnosu, zato što je to „preteško za početnike“. Sa druge strane, obraćajući se onima koji će studirati Euklidovo delo, Proklo piše i o složenijim problemima vezanim za heliks, konhoidu i cisoidu.

Značaj njegovih komentara ogleda se, najpre, u istoriji paralelnih. Zahvaljujući Proklu znamo imena nekih grčkih autora koji su se bavili teorijom paralelnih u predeuklidsko vreme — pre svega Teeteta i Eudoksa (s početka IV veka stare ere). Proklo navodi i Posidonijev pokušaj dedukcije petog postulata iz ostalih aksioma geometrije, koji počiva na definiciji prema kojoj su dve prave paralelne ako su *ekvidistantne*, tj. ako su tačke jedne od njih sve na istom rastojanju od druge. Međutim, kako Proklo primećuje, već navedena definicija sadrži pretpostavku da važi peti postulat. Prema Proklovom svedočenju, i Klaudije Ptolemaj se bavio teorijom paralelnih i dokazivao da *prava koja seče dve disjunktne prave jedne ravni, sa svoje iste strane, sa njima zahvata podudarne uglove.* Proklo izbegava da ispravlja ili dopunjava Euklidovo delo, osim kada piše o paralelama. Uz kritike Ptolemajevog dokaza, on iznosi svoj dokaz petog Euklidovog postulata i tvrdi da *svaka prava koja seče jednu od dveju disjunktnih pravih jedne ravni, seče i drugu.*

Na osnovu Proklovih i Simplikijevih citata izvesnih delova izgubljene *Istorije geometrije* koju je Aristotelov učenik Eudem sa Rodosa napisao u drugoj polovini IV veka stare ere (verovatno −334. godine), znamo da je, posle Hipokrata sa Hiosa koji je sredinom petog veka stare ere prvi napravio pokušaj da, u svojim *Elementima*, geometriju utemelji kao deduktivnu nauku, i Leon oko 370. godine stare ere, verovatno pod uticajem samog Platona, sastavio nove *Elemente*, da je, zatim, tridesetak godina posle Leona, opet za potrebe Platonove škole, još potpunije *Elemente* napisao Teudije iz Magnezije, a dopunio ih je Hermotim iz Kolofona. I Hipokratovi i Leonovi *Elemeniti* i Teudijevo delo i njegove dopune koje je sačinio

---

[3]Tenerijeva pretpostavka, v. [4, vol. ii str. 449 i 528].

[4]Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979, str. 125 i 290.

[5]Savelov, isto, str, 244.

Hermotim izgubljeni su jer ih nakon nastanka Euklidovih *Elemenata* niko više nije koristio kao udžbenik pa, stoga, nisu prepisivani, a njihov značaj u istoriji matematike ogleda se, pre svega, u uticaju na Euklida.

Proklo je u svome delu pisao i o pravilnim poliedrima i, zahvaljujući njemu [6, str. 65], konstrukcija pet Platonovih tela: pravilnog tetraedra, kocke, pravilnog oktaedra, pravilnog dodekaedra i pravilnog ikosaedra, koje on naziva „kosmičkim telima“ [9], veoma dugo je pripisivana Pitagori. Kasnije se pokazalo da je Proklo bio u zabludi zato što je prihvatio jednu od mnogih antičkih legendi koje su se odnosile na Pitagoru i otkriće pravilnih poliedara pomerio dva veka unazad. Danas se smatra da je pojam pravilnog poliedra u geometriju prvi uveo Teetet (oko -414 do -369), Sokratov sledbenik i, uz svog učitelja, jedan od učesnika Platonovog dijaloga koji je po njegovom imenu i dobio ime *Teetet*. Činjenica da postoji njegov prilog teoriji iracionalnih brojeva, čiji je značaj u konstrukciji Platonovih tela vidljiv i u trinaestoj knjizi Euklidovih *Elemenata*[6], potkrepljuje tvrdnju da je Teetet pisao i o pravilnim poliedrima.

Marinije iz Neapolisa (Sihem) u Samariji, Proklov učenik i biograf, njegov naslednik na mestu upravnika Platonove Akademije, napisao je uvod u Euklidove *Data*.

Domnin iz Larise, Sirianov učenik u isto vreme kad i Proklo, napisao je *Uputstvo uvoda u Aritmetiku.*

Simplikije, jedan od poslednjih neoplatoničara, bio je najpre Amonijev učenik u Aleksandriji, a potom i Damaskijev u Atini. Živeo je u prvoj polovoni šestog veka. Kada je Justinijan 529. godine zabranio rad „paganskih škola“ u vizantijskom carstvu, zajedno sa Damaskijem, poslednjim upravnikom Platonove Akademije, odlazi u Persiju, ali se, razočaran, 533. godine vraća u Atinu gde je držao predavanja iako je škola bila zatvorena.

Sudeći prema arapskim izvorima, Simplikije se bavio i pitanjima iz teorije paralelnih, a uz njega istim problemom bavio se i **Aganis** o kojem do nas nisu dospeli nikakvi biografski podaci. Persijski matematičar Hatim an-Nairizi [7, str. 42–45], koji je u desetom veku komentarisao Euklidove *Elemente*, tvrdi da su se i Simplikije i Aganis bavili pretpostavkama neophodnim za dokaz 29. stava prve knjige *Elemenata* koji glasi: „Ako prava seče dve paralelne prave, ona gradi unutrašnje naizmenične uglove jednake, spoljašnji ugao jednak odgovarajućem unutrašnjem uglu i dva unutrašnja ugla sa iste strane jednaka dvama pravim uglovima“ (Bilimovićev prevod, [2]). Simplikije je u svojim komentarima prve knjige Euklidovih *Elemenata*, prema an-Nairizijevim rečima [7, str. 18], najpre pomenuo da su se istim problemom bavili Antiniat i Diodor, a potom je izneo razmišljanja „svoga prijatelja“, pa stoga i savremenika, Aganisa koji je dokazivao da su *dve prave disjunktne ako i samo ako postoji prava upravna na obema*, a paralelne prave je

[6]O tome Platon piše u svom *Teetetu*, 147d–148b. O pravilnim poliedrima Platon piše i u *Timaju* [53e, 55c], a na njegove ideje nadovezao se Kepler (1571–1630) u svome delu *Harmonices Mundi*, Libri V Lincii 1619, (prevod na engleski J.V. Field, *Keplers star polyhedra*, Vistas in Astr. 23, 1979, str. 109–141), i u mnogome ih razvio i dopunio.

definisao, slično Posidoniju, kao *ekvidistantne.* An-Nairizi ne iznosi dokaz aksiome paralelnosti samog Simplikija, ali ističe njegovo tvrđenje da su *ekvidistantne prave paralelne.* Detalje Simplikijevog dokaza petog postulata saznajemo iz jednog pisma al-Hanafija (1178–1258) znamenitom arapskom geometričaru Nasiru ad-Dina at-Tusiju (1201–1274) [7, str. 24]. U tom pismu se iznosi značajan argument u dokazu petog postulata prema kojem *prava upravna na jednom kraku oštrog ugla seče drugi krak,* argument za koji će se kasnije ispostaviti da je ekvivalentan petom Euklidovom postulatu. Hiljadu dvesta godina posle Simplikija istim argumentom se poslužio i Ležandr (Adrien Marie Legendre 1752–1833) u svom udžbeniku *Elementi geometrije* (*Eléments de Géométrie*).

Od izvanrednog značaja za istoriju matematike su Simplikijevi komentari Aristotelove *Fizike* budući da su, zahvaljujući tim komentarima, sačuvani delovi Eudemove *Istorije geometrije* koje je Simplikije citirao. U sačuvanim fragmentima Eudem sa Rodosa, koga je Simplikije nazvao „najplemenitijim“ među Aristotelovim učenicima[7], piše o Antifonovom pokušaju rešenja problema kvadrature kruga, iz petog veka stare ere, i o izračunavanju površine lunule, Hipokrata sa Hiosa.

Komentarišući Aristotelovo delo *De caelo*, Simplikije citira aleksandrijskog astronoma Sosigena iz prvog veka stare ere, koji iznosi Eudoksov sistem koncentričnih sfera kojim se objašnjava vidljivo kretanje Sunca, Meseca i planeta, a u komentarima *Fizike* navodi Geminijev pregled Posidonijeve *Meteorologike* iz kojeg se vidi da je Herakleid sa Ponta, Platonov učenik, u IV veku stare ere, dakle pre Aristarha sa Samosa, izložio elemente heliocentričnog sistema [5, str. 21].

Zahvaljujući Simplikijevom komentarisanju Aristotelovog dela sačuvano je i obilje dragocenih fragmenata starih filozofa, Parmenida, Empedokla, Anaksagore, Melisa i drugih.

Eutokije iz Askalona, Simplikijev savremenik, ili čak stariji od njega, rođen verovatno oko 480. godine, komentarisao je Arhimedove spise i Apolonijeve *Konike.* Komentare prve četiri knjige Apolonijevih *Konika* posvetio je Antemiju, arhitekti Svete Sofije, koji je umro oko 534. godine i, u posveti, Antemija nazvao *svojim dragim prijateljem*, što potkrepljuje tvrdnju o približnoj godini njegovog rođenja.

Eutokijevi komentari tiču se triju Arhimedovih rasprava, *O sferi i cilindru, Mera kruga* i *Ravanski ekvilibrijumi*, a komentari Apolonijevih *Konika* odnose se samo na prve četiri knjige. Nema sumnje da su ovi komentari obnovili interesovanje za Arhimedovo i Apolonijevo delo i da je time porasla znatiželja čitalaca, spremnih da njihova dela pronađu u starim bibliotekama ili da nabave neki novi njihov prepis. Upravo ti prepisi dospeli su do nas. Samo prve četiri knjige (od osam) Apolonijevih *Konika* sačuvane su na grčkom jeziku[8], upravo zahvaljujući tome što je samo njih, po svemu sudeći zato što su lakše razumljive, komentarisao Eutokije. Sledeće tri (V–VII) i delovi poslednje (VIII) sačuvani su samo u arapskom prevodu.

---

[7]Koplston, *Istorija filozofije, Grčka i Rim*, BIGZ, 1988, str. 407.

[8]One su najstarije veće svedočanstvo o helenističkom literarnom jeziku koji se obično naziva Koine, prema *Rečniku grčkih i latinskih pisaca antike i srednjeg veka* autora V. Buhvalda, A. Holvega i O. Princa, Beograd 1984.

Eutokojevim komentarima možemo da zahvalimo i za mnoštvo sačuvanih činjenica iz istorije matematike. Posebno mesto među njima zauzimaju, pregled rešenja problema udvostručenja kocke i fragmenti u kojima je rešenje kubne jednačine $(a-x)x^3 = bc^2$ razmatrane u Arhimedovoj raspravi *O sferi i cilindru* (II.4) [4, vol. ii, str. 540–541].

Antemije iz Trala u Lidiji, koji je živeo na prelasku iz petog u šesti vek (zna se da je umro posle 534. godine), uz Isidora iz Mileta bio je neimar pri ponovnoj gradnji crkve Svete Sofije u Carigradu, posle njenog rušenja u pobuni Nika u januaru 532. godine[9]. Ovaj arhitekta je, sudeći prema sačuvanim fragmentima sa naslovom Περι παραβόξων μηχανημάτων, njegovog dela *O sabirnim ogledalima*[10], bio obrazovan i kao matematičar.

Poznati su mu bili spisi Herona Aleksandrijskog u kojima je opisana parna mašina[11] i Arhimedov rad o paraboličnim ogledalima. Međutim on je svoje praktično znanje i svoje pronalaske koristio „jedino da obmane svog suseda, sa kojim se parničio“, kako piše Luj Breje u svojoj *Vizantijskoj civilizaciji*[12].

Prvi i treći sačuvani fragment iz rasprave *O sabirnim ogledalima* posebno su značajni za istoriju geometrije [4, vol. ii, str. 541]. U prvom fragmentu raspravlja se o rešenju problema *kako postići da sunčev zrak (kroz rupu ili prozor) padne na zadato mesto u svakom trenutku u svako godišnje doba.* To se postiže pomoću eliptičkog ogledala u čijem je jednom fokusu traženo mesto, a drugi fokus se postavlja na osunčano mesto. Antemijeva konstrukcija ove elipse počiva na dvema teoremama iz Apolonijevih *Konika*, i na teoremi koje nema u Apolonija, prema kojoj *prava koja povezuje fokus sa presekom dveju tangenti elipse, sadrži bisektrisu ugla kome je teme fokus, a kraci sadrže dodirne tačke tangenti i elipse.* U ovom fragmentu prvi put se pominje konstrukcija elipse pomoću zategnutog konca čiji krajevi su fokusi tražene elipse.

U trećem fragmentu Antemije dokazuje da *svi paralelni zraci odbijeni od paraboličnog ogledala „prolaze kroz jednu tačku“.*

Isidor iz Mileta, bio je mlađi saradnik Antemija Tralskog na izgradnji Svete Sofije u Carigradu, samostalan u tom poslu posle Antemijeve smrti 534. godine. Kao i Antemije, obrazovani je matematičar. Neko od njegovih učenika pisac je takozvane XV knjige Euklidovih *Elemenata* sudeći prema jednoj račenici iz trećeg dela ove knjige u kojoj se pominje Isidorovo ime[13]. Isidor je preradio Eutokijevo izdanje Arhimedovih spisa *Mera kruga* i dve knjige *O sferi i cilindru* i, radi lakšeg razumevanja teksta, prepravio dorski dijalekat grčkog jezika kojim je pisao Arhimed, na savremeniji grčki kojim se govorilo i pisalo u Vizantiji.

---

[9] Georgije Ostrogorski, *Istorija Vizantije*, str. 91.

[10] Westermann, Παραδοξογράφοι (Scriptores rerum mirabilium Graeci), 1839. str. 149–158.

[11] Kako Miloš Radojčić piše u svojoj *Opštoj matematici* [8], u Heronovom delu „nalazimo, na primer, opis dvocilindrične vatrogasne pumpe pa, čak, i parne mašine kakva se pojavila ponovo tek u prošlom stoleću, pre Vatova uređaja“.

[12] Luj Breje, *Vizantijska civilizacija*, Nolit, Beograd, 1976. str. 401.

[13] Videti Bilimovićev prevod trinaeste knjige Euklidovih *Elemenata* [2] sa dodatkom takozvane četrnaeste i petnaeste knjige, Beograd, 1957, str. 79.

Sa prestankom rada neoplatonskih škola u šestom veku, načinjen je prekid u bavljenju geometrijom u Vizantiji. Tek sa pojavom **Mihaila Psela** (1018–1080?), jednog od najobrazovanijih ljudi svoga vremena i najuticajnijeg ministara više careva, obnavlja se interesovanje za matematiku, a time i za geometriju. Geometrijski odeljak Pselovog teksta *o četirima matematičkim naukama*, aritmetici, muzici, geometriji i astronomiji, koji je bio omiljen na zapadu tokom šesnaestog veka [1, str. 274], ilustruje dubinu i ozbiljnost prekida geometrijskih istraživanja budući da se u njemu površina kruga računa kao geometrijska sredina površna upisanog i opisanog kvadrata toga kruga, što kao približnu vrednost broja π daje $\pi = \sqrt{8} = 2,82844271$! Kasnije, u vreme dinasije Paleologa, znanje matematike će se znatno popraviti, ali će autori toga vremena i dalje ostati na nivou komentatora.

LITERATURA

1. C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley, 1968.
2. Euklid, *Elementi*, Naučna knjiga, Beograd, 1957.
3. T.L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. I–III (2nd ed.), Dover, 1956.
4. T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. I–II, Dover, 1981.
5. M. Milanković, *Istorija astronomske nauke*, Naučna knjiga, Beograd, 1979.
6. Proclus, *In Primium Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, ed. Friedlein, Leipzig: B. G. Teubner, 1873.
7. Б.А. Розенфельд, А.П. Юшкевич, *Теория параллельних линий на средневековом востоке* IX–XIV *вв*, Наука, Москва, 1983.
8. M. Radojčić, *Opšta matematika*, Naučna knjiga, Beograd, 1950.
9. W.C. Waterhouse, *The discovery of the regular solids*, Arch. Hist. Ex. Sci. **9** (1972), 212–221.

METODIKA I ISTORIJA GEOMETRIJE
Divčibare, 12–13 oktobra 1996, 56–62

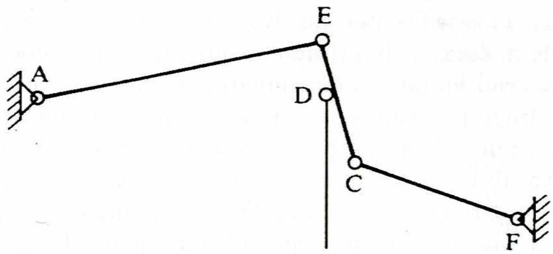
MATEMATIZACIJA KINEMATIKE MEHANIZAMA U DEVETNAESTOM VEKU

Teun Koetsier

Uvod. U svom delu "Essai sur la philosophie des sciences" (1834), u kojem je predstavio novu klasifikaciju nauka, A.-M. Amper (Ampère, 1775–1836) predložio je i novi termin 'kinematika' (cinématique) za granu mehanike koja bi se bavila kretanjem nezavisnim od njegovih uzroka. Bilo je krajnje vreme za ovakav predlog. U geometriji i teorijskoj mehanici bili su postignuti zanimljivi kinematički rezultati u vezi s kretanjem, ali su dostignuća u oblasti mašinstva bila još izraženijaspektakularniji. U vreme osnivanja Politehničke skole (École Polytechnique) 1794, Gaspar Monž (Monge, 1746–1818) je odlučio da se u nastavni program uvede kurs iz mašinskih elemenata, a Žanu Ašetu (Hachette, 1769–1834) je stavljeno u zadatak da ga pripremi. Nažalost promene u nastavnom programu odložile su uvođenje ovog kursa do 1806, a Ašetov udžbenik ("Traité élémentaire des machines") nije bio gotov sve do 1811. godine (Ferguson, 1962). Mada se Ašetova knjiga bavila i dinamičkim aspektima, značajan njen deo posvećen je geometriji kretanja različitih mehanizama. U ovom članku praviće se razlika između kinematike mehanizama i teorijske kinematike čiji su predmet kinematička svojstva kretanja uopšte. Ubrzo pošto je Amper skovao naziv 'kinematika', i kinematička mehanika i teorijska kinematika postale su nezavisna istraživačka područja. Mada su Francuzi gospodarili na polju teorije, prvu knjigu u potpunosti posvećenu kinematici mehanizama napisao je Englez R. Vilis (Willis): "The Principles of Mechanism" (1841). Prva knjiga u potpunosti posvećena teorijskoj kinematici bila je H. Rezalova (Résal) "Traité de cinématique pure" (1862)

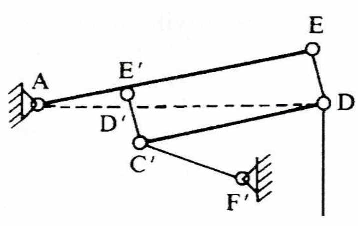
Kinematika mehanizama: Vatovo paralelno kretanje. Jedan čuveni mehanizam igrao je važnu ulogu u razvoju kinematike u devetnaestom stoleću, tzv. 'paralelno kretanje'. Izumeo ga je Džejms Vat (Watt) 1784. Njegov je problem bio kako da poveže klipnjaču dvotaktne parne mašine, koja vuče i gura vertikalno gore-dole, s radnom polugom mašine koja rotira gore-dole. Postojeća rešenja, na primer zupčanicima, nisu bila zadovoljavajuća. Vat je došao na sjajnu ideju da gornji kraj klipnjače vodi "samo njegovim učvršćenjem", kako je pisao svom partneru Metjuu

Boltonu (Boulton) "za komad gvožđa na poluzi, bez lanaca, ili okomitih vođica, ili nepoželjnih trenja i drugih nezgrapnih detalja". U praksi je mehanizam savršeno radio i, piše Vat, "nije pravio ni najmanju buku". Uspeh mehanizma zasnovan je na svojstvu se da tačka D (slika 1a) koja je povezana s klipnjačom, podiže i spušta velikom dužinom u približno pravoj liniji. Vat je rekao da je to zbog toga što se zakrivljenost lukova koje opisuju tačke E (kraj poluge) i C (koja rotira oko F i pričvršćena je za kućište mašine, i okrenutih jedan nasuprot drugom, uzajamno kompenzuju.



Slika 1a. Vatovo "paralelno kretanje" u prvobitnom obliku. AE je greda. D je kraj klipnjače. Trouglovi označavaju fiksirane tačke.

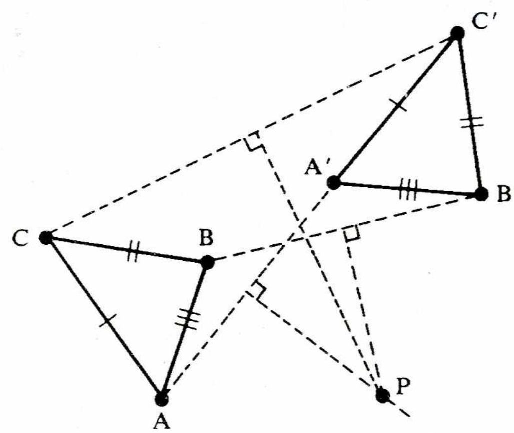
Kasnije te iste godine Vatu je pošlo za rukom da pomoću paralelograma mehanizam učini znatno kompaktnijim (slika 1b). Pošto je $E'C'DE$ paralelogram, D i D' opisuju slične krive. Pošto šipke AE', $E'C'$ i $C'F'$ predstavljaju manju verziju mehanizma sa slike 1a, dimenzije se mogu tako odabrati da D na obe slike opisuje potpuno istu približno pravu liniju.



Slika 1b. Kompaktna verzija paralelnog kretanja, koja koristi produženje paralelograma $E'C'DE$. AE je opet poluga i D je kraj klipnjače.

Paralelno kretanje koje se postiže paralelogramom vrlo uspešno se, izazivajući divljenje, primenjivalo u mnogim parnim mašinama. Dominik Fransoa Arago (Arago) je o tome 1834. pisao: "Pri svakoj dvostrukoj oscilaciji on se otvara i zatvara s mekoćom, skoro bih rekao gracioznošću, koja nas opčinjava u gestovima veštog glumca". Mehanizmi koji se sastoje od zglobno povezanih poluga, korišćeni su i pre 1784. Ali, sa svojim paralelnim kretanjem Vat je primenio takav mehanizam na sasvim nov način, a ova je primena odlučujuće uticala na teoriju (Koetsier, 1983). Pod uticajem Vatovog izuma, mehanizmi koji se sastoje od poluga postali su objektom ozbiljnih istraživanja koja su vodila mnogim zanimljivim rezultatima, naročito u drugoj polovini devetnaestog veka.

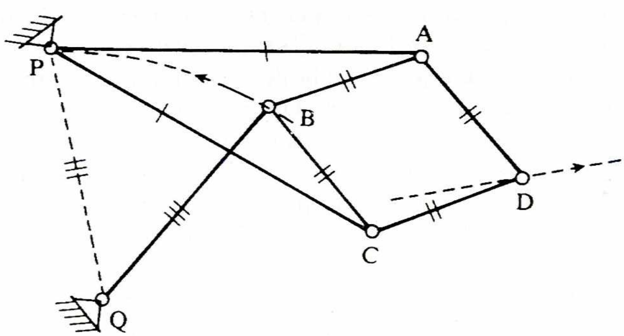
Teorijska kinematika: Šal. Vatovo paralelno kretanje pripada kinematici mehanizama. U Amperovo vreme bilo je i zanimljivih rezultata koji pripadaju teorijskoj kinematici u teorijskoj mehanici i u geometriji. Prost ali izuzuzetno fundamentalan rezultat dokazao je već u prvoj polovini osamnaestog veka Johan Bernuli (Bernoulli); naime da je planarno kretanje i svakom trenutku uvek rotacija ili translacija. Bernulijev dokaz je bio dinamički zasnovan na proraunu sila. Drugi dokaz istog rezultata daoo je Ogisten Luj Koši (Cauchy, 1789–1857) 1827. U istom spisu Koši je takođe dokazao jednu drugu važnu teoremu; naime, da se, uopšteno govoreći, svako planarno kretanje može inicirati pomoću krive koja se kreće bez klizanja duž jedne druge fiksirane krive. Koši je ovako rezonovao: ako se isključe trenutne translacije, put tokom kretanja trenutnog centra rotacije (koji se često zove polom) je kriva, ili tačnije, dve krive – jedna u fiksiranom sistemu, fiksirana 'polhoda' a druga u pokretnom sistemu, pokretna 'polhoda'. U svakom trenutku te dve polhode se dodiruju u trenutnom centru rotacije. Koši je pokazao da se tokom kretanja pokretna polhoda kreće po fiksiranoj bez klizanja. Košijevi dokazi su zasnovani na postojanju sila. Međutim, 1829, Mišel Šal (Chasles, 1793–1880) je pokazao da se takve teoreme mogu lako dokazati isključivo geometrijskim sredstvima. Njegov dokaz postojanja trenutnog centra rotacije je krajnje prost. Dva podudarna trougla ABC i $A'B'C'$ (slika 2) predstavljaju dva položaja pokretne ravni. Lako je videti da simetrale duži AA', BB' i CC' imaju zajedničku tačku preseka P, a rotacijom oko P trougao ABC se može dovesti do poklapanja s trouglom $A'B'C'$. Ako su ta dva truogla beskonačno blizu, onda su simetrale normale na trajektorije A, B i C, a P je trenutni centar rotacije. Šal je ove rezultate primenio na različite načine; on je na primer pokazao kako se trenutani centar rotacije može upotrebiti da se povuku tangente krivih, ukoliko se takve krive mogu definisati odgovarajućim kretanjem.



Slika 2. Šalov dokaz postojanja trenutnog centra rotacije

Predmet proučavanja nisu bila samo kinematička svojstva prvog reda (tangente, brzine), već i svojstva drugog reda (centri krivina, ubrzanja). Na primer 1839. E. Bobije (Bobillier) je dao poznatu konstrukciju za određivanje, pri proizvoljnom trenutnom planarnom kretanju, centra krivine trajektorije proizvoljno izabrane tačke u pokretnoj ravni, kad su dati centri krivine trajektorija drugih dveju tačaka (Koetsier, 1986). Drugi zanimljiv rezultat iz Amperovog doba tiče se Koriolisovog ubrzanja. Gistav de Koriolis (Coriolis, 1792–1843) pokazao je 1835. da se obični zakoni kretanja mogu koristiti u rotirajućem referentnom sistemu ako se ono što se sad zove Koriolisovo ubrazanje uključi u jednačine kretanja. Ubrzanje se u Koriolisovom radu pokazalo kao dodatna sila koja se morala uzeti u obzir, ali je ubrzo postao jasan čisto kinematički karakter njegovih rezultata. Koriolisovo ubrzanje je na primer vrlo važno u proucavanju dinamike atmosfere i u balistici.

Rad na mehanizmima koji se sastoje od zglobno povezanih poluga. Vat je bio svestan da u njegovom 'paralelnom kretanju' tačka D (na slici 1a) samo približno opisuje pravu liniju. Moralo se postaviti pitanje da li je moguće napraviti sličan mehanizam koji opisuje baš pravu liniju. Početkom 1850-tih ruski matematičar Pafnutij Čebišev (1821–1894) bio je očaran Vatovim sklopom. On nije verovao da je moguće konstruisati polužni mehanizam koji opisuje tačnu pravu liniju i usmerio je svoju pažnju na problem kako izabrati dimenzije datog mehanizma u cilju minimalizacije maksimalnog odstupanja od prave linije u određenom rasponu. U ovom kontekstu je Čebišev otkrio dobro znane Čebiševljeve polinome. Početkom 1860-tih Francuz Ž.-N. Poselje (Peaucellier) otkrio je polužni mehanizam koji opisuje tačnu pravu liniju.



Slika 3.

Mehanizam se sastoji od sedam poluga. Poluge PA i PC su jednake dužine a stožer im je nepokretna tačka P. Njihovi krajevi A i C su vezani za suprotne uglove romba koji se sastoji od četiri jednake poluge. Sedma poluga BQ ima za stožer nepokretnu tačku Q tako da je QB jednako QP. Čitalac se sam može uveriti da kada QB rotira oko Q šarka D opisuje pravu liniju (normalno na PQ). Poseljeov izum nije privukao veliku pažnju sve do 1873. kada su na međnarodnoj izložbi u Beču Rusi prikazali potpuno isti mehanizam za pravu liniju koji je nezavisno 1870. izumeo L. Lipkin, jedan od Čebiševljevih studenata. Francuzi su se odmah probudili iz dremeža; Poselje je dobio jednu uglednu nagradu za svoj izum, a mehanizam je počeo da izaziva značajnu međunarodnu pažnju. U Engleskoj je matematičar Silvester (Sylvester, 1814–1897), koji je mehanizam poznavao preko Čebiševa, njime bio silno impresioniran. Kada je rekao da "bi bilo teško navesti neko otkriće koje otvara tako široke i raznolike horizonte kao ovo Poseljeovo" on je preterao, ali je podstakao mlađe matematičare kao A.B. Kempea i H. Harta da se upuste u proučavanje ovakvih mehanizama. 1870-tih godina istraživanja ove dvojice engleskih matematičara i još dvojice, Artura Kejlija (Cayley, 1821–1895) i S. Robertsa, dovela su do novih zanimljivih rezultata. Tekst serije predavanja na temu zglobnih mehanizama za tačnu pravu liniju divno ilustruje tip istraživanja o kojima je ovde reč (Kempe, 1877). Izumljeni su novi mehanizmi, a Roberts je, na primer, 1875. izveo glavna svojstva specijalnih krivih šestog stepena, koje se opisuju mehanizmima od tri poluge poput Vatovog paralelnog kretanja u njegovom prostom obliku (slika 1a): to su tri-cirkularne krive šestog stepena (što znači da prolaze tri puta kroz izotropne tačke ravni I i J: kompleksne tačke u kojima svaki krug preseče bezkonačnu liniju) s tri konačne dvojne tačke koje leže na krugu opisanom oko trougla formiranog trima sigularnim fokalnim tačkama koje poseduju krive.

Nova škola kinematike mehanizama: Relo. Kinematika je naročito u drugoj polovini devetnaestog veka bila vrlo popularna kako među mašinskim inženjerima, tako i među matematičarima. Vrlo je važna figura nemački inženjer Franc Relo (Reuleaux). On je 1864. započeo predavanja o svojom idejama, a 1875. je objavio knjigu Theoretische Kinematik koja ga je učinila poznatim (Naslov vara, u pitanju je teorijska rasprava o kinematici mehanizama). Način na koji danas gledamo na mehanizme dugujemo Relou. Tokom devetnaestog veka izumljeno je mnogo novih mehanizama i bilo je teško klasifikovati ih na razuman način. Relo je rodonačelnik novog apsktraktnog gledišta. On je uočio da se postolje mehanizma, poput svih ostalih elemenata, mora smatrati delom mehanizma. On je shvatio da se mehanizmi mogu razvrstati polazeći od zamisli da se sastoje od lanca poluga, računajući i postolje. Fiksiranje različitih poluga istog kinematičkog lanca obično stvara mehanizme koji izgledaju potpuno različiti, ali su u kinematičkom smislu identični. Relo je uverljivo pokazao plodnost svojih ideja. U svojoj knjizi je dao nekoliko primera rotacionih parnih mašina koje su patentirane kao različite, ali po njegovoj analizi se ispostavilo da su zasnovane na istom kinematičkom lancu (Ferguson, 1962).

Matematizacija kinematike mehanizama: Burmester. Mada je na primer Ašet (Hachette) 1830. upotrebio trenutni centar rotacije da odredi u Vatovom paralelnom kretanju tangente krive koju opisuje kraj klipnjače, trebalo je da prođe dosta vremena pa da kinematika mehanizama počne da ubira koristi od teorijske kinematike. U ovom je pogledu nemački matematičar L.E.H. Burmester imao važnu ulogu. Njegova knjiga "Lehrbuch der Kinematik" koja se temeljila na ranijem radu pojavila se 1888. Na više od 900 stranica on široko razmatra planarnu teorijsku kinematiku i tako dobijene rezultate primenjuje na mnoštvu primera iz kinematike mehanizama. Knjiga sadrži i grafičke metode za određivanje trenutnih brzina i ubrzanja za dati mehanizam u bilo kojoj poziciji. Slične metode 'kinematičke analize' razvili su u Britaniji inženjeri Aleksander Kenedi (Kenedy), koji je Reloovu knjigu preveo na engleski) i R.H. Smit (Smith). Burmesterov rad je, međutim, bio mnogo uticajniji. Negov vrlo originalan doprinos je tzv. "Burmesterova teorija" koja se bavi s tri, četiri ili pet datih diskretnih pozicija pokretne ravni na fiksiranoj ravni. Za tri diskretne pozicije očito će postojati tačke na pokretnoj ravni koje su u trima pozicijama na pravoj liniji u fiksiranoj ravni. Burmester je pokazao da sve takve tačke leže na krugu u pokretnoj ravni. On je isto tako pokazao da za četiri pozicije tačke u pokretnoj ravni koje su u ovim pozicijama na krugu u fiksiranoj ravni sve leže na krivoj trećeg stepena u pokretnoj ravni. Ova se teorija može koristiti u 'kinematičkoj sintezi' za projektovanje mehanizama. Tačke u pokretnoj ravni koje se nalaze na izvesnom broju datih položja na krugu mogu postati krajnje tačke poluga čiji je stožer u centru kruga. Dve takve poluge i veznik koji ih spaja čine mehanizam koji u principu može da pomera pokretnu ravan kroz date položaje (Koetsier, 1989).

Završne napomene. Koreni kinematike su u geometriji, teorijskoj mehanici i mašinstvu. Mada je u devetnaestom stoleću kinematika postala samostalno područje istraživanja, ona ipak nije do kraja institucionalizovana kao nezavisna disciplina, a zanimanje za nju je obično bilo uzgredno. Na primer, interes matematičara za kinematiku je bio povezan s njihovim interesom za geometriju (Schoenflies i Gruebler 1902. sadrži odličan pregled rezultata postignutih u devetnaestom veku). Tokom dvadesetog veka matematičari su se uopšte manje bavili (klasičnom) geometrijom, jer su druga polja u matematici obećavala više rezultata ili opštije rezultate. Zanimanje matematičara za kinematiku kao predmet istraživanja skoro je potpuno iščeznulo.

U mašinstvu je situacija bila drugačija. 1870-tih i 1880-tih godina je interes za kinematiku bio znatan. Ovo je naročito bio slučaj u Nemačkoj gde su Reloove ideje bile vrlo uticajne. Nažalost, postojao je i krupan jaz između teorijskog rada Reloa, Burmestera i drugih, i praktičnog mašinstva. Projektanti i graditelji mašina često su smatrali Reloove kinematičke teorije suviše teoretskim i kako je vreme prolazilo on se sučavao sa sve jačom opozicijom. 1890-tih tzv. 'pokret inženjera' uspeo je da matematiku najvećim delom, a takođe i Reloovu kinematiku, ukloni iz programa nemačkih tehnoloških univerziteta (Hensel i ostali 1989). Tek posle Prvog svetskog rata inženjeri mašinstva su ponovo počeli da cene kinematiku. Od tada na dalje kinematika mehanizama je bila skromno ali plodno istraživačko područje. Što se primena tiče, pre Drugog svetskog rata su grafičke metode bile naročito omiljene, ali u drugoj polovini dvadesetog veka, sa sve raširenijom upotrebom kompjutera nadvladale su analitičke metode. Zanimljivo je da sada u didaktici matematike postoji interesovanje za mogućnosti koje pružaju mehanizmi da se đaci upoznaju s geometrijskim svojstvima raznih krivih. (Bartolini Bussi, 1993; Bartolini Bussi i Pergola, 1994)

Napomena: Ovaj članak se zasniva na mom tekstu (Koetsier, 1994) napisanom na engleskom. Zahvaljujem Miri Bogdanović, Milenku Vasiću i Evertu Wattelu za pomoć u prevođenju i pripremi.

Literatura

1. M. Bartolini Bussi, 1993, "Geometrical Proofs and Mathematical Machines: An Exploratory Study", Proceedings of the 17th PME Conference, vol. II, 97–104, The Program Commitee of the 17th. PME Conference, Tsukuba (Japan)
2. M. Bartolini Bussi, M. Pergola, 1994, "Mathematical Machines in the Classroom: the History of Conic Sections", in N. Malara, Rico L. (eds): Proceedings of the First Italian-Spanish Symposium in Mathematics Education, 233–240. Modena: Dipartimento di Matematica, Università di Modena.
3. E.S. Ferguson, 1962, Kinematics of mechanisms from the time of Watt, Contributions from the Museum of History and Technology, United States National Museum Bulletin 228, Smithsonian Institution, Washington D.C.
4. S. Hensel, K.N. Ihmig, M. Otte, 1990, Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert in Deutschland, Soziale Auseinandersetzung und philosophische Problematik,
5. Van der Hoeck, Ruprecht, 1989, A.B. Kempe, 1877, How to draw a straight line: a lecture on linkages, London, [Reprinted as Vol. 6 of the series Classics in Mathematics Education, The National Council of Teachers of America, 1977, Pentagon, Albion, Michigan].
6. T. Koetsier, 1983, "A contribution to the history of kinematics [On French and English work]", Mechanism and Machine Theory 18, 37–48.
7. T. Koetsier, 1986, "From kinematically generated Curves to instantaneous invariants: episodes in the history of instantaneous planar kinematics", Mechanism and Machine Theory 21, 489–498.
8. T. Koetsier, 1989, "The centenary of Ludwig Burmester's 'Lehrbuch der Kinematik'", Mechanism and Machine Theory 24, 37–38.
9. T. Koetsier, 1994, "Kinematics", Companion Encyclopedia of the History and the Philosophy of the Mathematical Sciences, Vol. 2 (Edited by I. Grattan-Guinness), London and New York, pp. 994–1001
10. A. Schoenflies, M. Gruebler, 1902, "Kinematik", Enc. math. Wissenschaften, vol. 4, part 3, 190–278 / article IV.3

ISBN 86-80593-26-5