TEMATIČKI INSTITUT

POSEBNA IZDANJA

KNJIGA 13

MILAN PLAVŠIĆ

MEHANIKA PROSTIH POLARNIH KONTINUUMA

BEOGRAD

1975.

MATEMATIČKI INSTITUT

POSEBNA IZDANJA

KNJIGA 13

MILAN PLAVŠIĆ

MEHANIKA PROSTIH POLARNIH KONTINUUMA

BEOGRAD
1975.

Tehnički urednik: Milan ČAVČIĆ

Primljeno na 87. sednici Naučnog veća Matematičkog instituta 30. juna 1975. godine.

Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema mišljenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije, ova publikacija je oslobodjena poreza na promet.

SADRŽAJ

1. UVOD

Mehanika kontinuuma je bazirana na pretpostavci o neprekidnosti materije. Kada se, na primer, sa stanovišta mehanike kontinuuma definiše telo konačne zapremine v, tada se podrazumeva da je zapremina v tela u potpunosti ispunjena materijom. Drugim rečima, pretpostavlja se da u svakoj tački zapremine v postoji materija. Jasne su pogodnosti ovakve pretpostavke. U prvom redu se na taj način fizičke predstave o materiji usklađuju sa geometrijskim predstavama o prostoru. Osim toga, na ovaj se način omogućuje primena kompletne teorije polja, što nije od malog značaja za teorijska izučavanja i što je dominantno za ovakvu pretpostavku. Fizička činjenica je, međutim, da materija nije neprekidna, već poseduje diskretnu strukturu. Tada se samo po sebi nameće pitanje: ima li onda smisla i u kojim slučajevima pretpostaviti da je materija neprekidna?

Ako se materija posmatra kao diskretna struktura, tada se bilo kakav poremećaj, izazvan nekim spoljnim efektima, kroz tu strukturu prenosi u vidu talasnog kretanja. Pri tome se mogu javiti talasi različitih talasnih dužina. U onim slučajevima kada su talasne dužine veoma velike u odnosu na rastojanje između dve susedne materijalne tačke strukture, tj. u onim slučajevima kada jedna talasna dužina obuhvata veliki broj materijalnih tačaka, može se rastojanje između materijalnih tačaka zanemariti, tj. pretpostaviti da je materija neprekidna. Jasno je sada da mehanika kontinuuma obuhvata ograničen broj procesa, pa da i u tim slučajevima predstavlja izvesnu aproksimaciju. Za detalje u vezi sa ovim pitanjem čitalac se upućuje na knjigu L. Brillouin-a [1].

Mehanika kontinuuma proučava makroskopsko ponašanje realnih materijala pod dejstvom spoljnih efekata i stoga predstavlja tzv. fenomenološku teoriju. Mikrostruktura realnih matetijala ima, međutim, uticaja na njihovo makroskopsko ponašanje. Korektno opisivanje ponašanja realnih materijala ne može se, prema tome, izvršiti bez uzimanja u obzir njihove mikrostrukture. Iz tog razloga u mehanici kontinuuma su formirani i takvi modeli u kojima se obuhvata uticaj mikrostrukture na makroskopsko ponašanje.

Klasični model kontinuuma pretpostavlja da se materija sastoji iz neprekidno raspoređenih materijalnih tačaka čija pomeranja u potpunosti određuju kretanje, odnosno deformaciju kontinuuma. Takav model, prema tome, karakterisan je sa *tri lokalna stepena slobode.* Pri tome se naponsko stanje, koje je asocirano polju pomeranja, opisuje *simetričnim tenzorom napona.*

Postoje različiti modeli kontinuuma koji predstavljaju generalizaciju klasičnog modela, ali za sve njih je zajedničko da se naponsko stanje, pored drugih veličina, opisuje nesimetričnim tenzorom napona. Sve takve modele kontinuuma zvaćemo zajedničim imenom: *polarni kontinuumi.*

U klasičnoj mehanici kontinuuma, sa simetričnim tenzorom napona, pri opisivanju deformacije uzimaju se u obzir samo prvi gradijenti deformacije. To i ima za posledicu da je za opisivanje naponskog stanja dovoljan simetrični tenzor napona. Generalizaciju ovog modela dali su A. E. Green i R. S. Rivlin [2], [3], [4], formulacijom modela *multipolarnog kontinuuma*. Njihov model je baziran na istoj pretpostavci kao i klasični model: da je deformacija u potpunosti određena pomeranjima neprekidno raspoređenih materijalnih tačaka kontinuuma, pa, prema tome, takođe ima *tri lokalna stepena slobode*. Za razliku od klasičnog modela, međutim, za opisivanje deformacije oni uzimaju u obzir i više gradijente deformacije, što ima za posledicu da se, za opisivanje naponskog stanja, pored drugih veličina pojavljuje i nesimetrični tenzor napona. Kao specijalni slučaj ovog modela, kada se u obzir uzimaju uticaji samo prvih i drugih gradijenata deformacije, dobija se model *dipolarnog kontinuuma*.

Model *kontinnuma reda dva*, koji su proučavali mnogi autori, takođe uzima u obzir uticaj samo prvih i drugih gradijenata deformacije. Za razliku od dipolarnog kontinuuma u ovom slučaju se, međutim, za opisivanje naponskog stanja pored nesimetričnog tenzora napona uvodi i *tenzor naponskih spregova*.

Svi pomenuti modeli kontinuuma imaju tri lokalna stepena slobode i ne uzimaju u obzir uticaj mikrostrukture na makroskopsko ponašanje. Uzimanje u obzir mikrostrukture na ponašanje materijala dovodi do povećanja broja lokalnih stepeni slobode. Sa stanovišta kontinualne teorije, takvi materijali se mogu interpretirati kao tzv. *orijentisani materijali*, kod kojih se svakoj materijalnoj tački pridodaje izvestan broj vektora orijentacije čija je deformacija nezavisna od pomeranja materijalnih tačaka. Ako u svakoj tački kontinuuma ima n takvih vektora orijentacije, tada je broj lokalnih stepeni slobode $3+3n$. U specijalnom slučaju, kada u svakoj tački imamo tri deformabilna vektora orijentacije, dobija se model *prostor kontinuuma sa mikrostrukturom* koji su formulisali A. C. Eringen i E. S. Suhubi [5] i koji ima dvanaest lokalnih stepeni slobode. Kao specijalni slučaj prostog kontinuuma sa mikrostrukturom oni su dobili model *mikropolarnog kontinuuma*, koji se može interpretirati kao orijentisani kontinuum sa tri nedeformabilna vektora orijentacije, čija je rotacija nezavisna od pomeranja tačaka kontinuuma. S obzirom da se vektori orijentacije ne deformišu, već samo kruto rotiraju nezavisno od pomeranja tačaka kontinuuma, ovaj model kontinuuma ima šest lokalnih stepeni slobode.

Model dipolarnog kontinuuma i kontinuuma reda dva mogu se, takođe, interpretirati kao specijalni slučajevi orijentisanog kontinuuma. Ali, u tom slučaju, deformacija, odnosno rotacija vektora orijentacije nije nezavisna od pomeranja tačaka kontinuuma, već je njima potpuno određena. S obzirom, međutim, da ovi modeli ne obuhvataju uticaj mikrostrukture, naziv „specijalni slučaj materijala sa mikrostrukturom" nije za njih korektan.

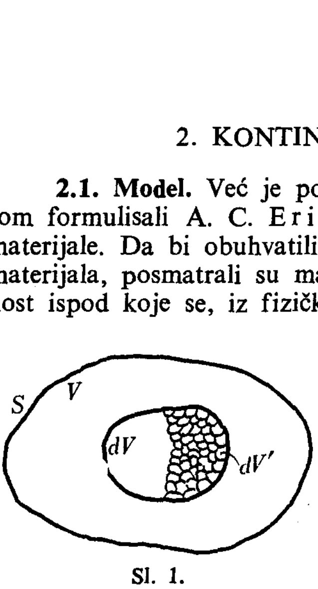
Model kontinuuma sa mikrostrukturom formiran je iz razloga što se pokazalo da za opisivanje ponašanja nekih materijala klasični model nije dovoljan. To se prvenstveno odnosi na tzv. granularne materijale, zatim: fluidne suspenzije, polikristale itd. Model kontinuuma sa mikrostrukturom uveli su Eringen i Suhubi [5] proučavajući elastične materijale. A. C. Eringen je, zatim, dao i opštu teoriju kontinuuma sa mikrostrukturom ili, kako ga je nazvao, *mikromorfnog kontinuuma* [6]. Činjenica da se ovaj model može interpretirati kao model orijentisanog kontinuuma, ne treba da poistovećuje ta dva modela.

Ideja za formiranje modela orijentisanog kontinuuma potiče još iz 1843. godine, kada je St. Venant [7] primetio da se deformacija štapa ne može opisati deformacijom jedne linije, već da se u tačkama te linije moraju uvesti pravci koji se mogu rotirati nezavisno od pomeranja tačaka linije. Generalizaciju ove ideje na trodimenzioni kontinuum, pri čemu bi svakoj tački kontinuuma bio pridodat izvestan broj vektora orijentacije koji se mogu rotirati nezavisno od pomeranja tačaka kontinuuma, sugerisali su W. Voigt [8], koji je proučavao elačtične materijale sa kristalnom strukturom, i P. Duhem [9]. Međutim, potpuniju teoriju orijentisanih kontinuuma razvili su, u periodu od 1907. do 1909. godine, braća E. i F. Cosserat [10], [11], [12]. Iz tog razloga se ovakav model kontinuuma danas naziva *Kosera kontinuum.* Radovi braće Kosera, odnosno savremenija interpretacija njihovih radova koju je dao J. Sudria [13], poslužili su kao osnova za sve kasnije radove iz oblasti mehanike orijentisanih kontinuuma, kako u teorijama štapova i ljuski, tako i u teorijama trodimenzionog kontinuuma. Važno je, međutim, naglasiti da model Kosera kontinuuma dopušta samo rotaciju vektora orijentacije, nezavisnu od pomeranja tačaka kontinuuma, a ne i njihovu deformaciju. Generalizaciju ovog modela predstavlja tzv. model orijentisanog kontinuuma sa deformabilnim vektorima orijentacije ili model *generalisanog Kosera kontinuuma.*

U ovom radu pažnja je posvećena samo modelima prostih polarnih kontinuuma. Pri tome se, kao od najopštijeg, pošlo od modela prostog kontinuuma sa mikrostrukturom, koji je interpretiran kao prosti generalisani Kosera kontinuum. Ostali modeli prostih polarnih kontinuuma: mikropolarni, dipolarni i kontinuum reda dva, dobiveni su kao specijalni slučajevi prostog generalisanog Kosera kontinuuma. Ovakva interpretacija ne samo da se čini pogodnija za izvođenje određenih zaključaka i jednačina, već omogućava da se između uvedenih veličina i izvedenih jednačina, iako se odnose na različite modele, pod određenim uslovima uspostave veze. Na taj način se daje jasan uvid u postojeće veze, odnosno razlike, između pojedinih modela prostih polarnih kontinuuma. U radu su za pojedine modele date kompletne teorije termoelastičnih, elastičnih i viskoznih materijala u najopštijem nelinearnom obliku, koje su za slučaj izotropnih materijala linearizovane. Kao osnova pri pisanju ovog rada, pored navedenih radova stranih autora, poslužili su i moji radovi [27] — [38]), pri čemu bih naročito ukazao na rad [35] u kome se, u određenom domenu, daje slična interpretacija, kao i radovi drugih domaćih autora, od kojih su samo neki navedeni ([22] — [26], [39] — [47]).

2. KONTINUUM SA MIKROSTRUKTUROM

2.1. Model. Već je pomenuto da su model kontinuuma sa mikrostrukturom formulisali A. C. Eringen i E. S. Suhubi [5], proučavajući elastične materijale. Da bi obuhvatili uticaj mikrostrukture na makroskopsko ponašanje materijala, posmatrali su mali element tela čija zapremina ima graničnu vrednost ispod koje se, iz fizičkih razloga, ne može ići a da se materija u njemu može smatrati neprekidnom. Takav element tela oni su nazvali *makroelement*. Telo, konačne zapremine V, ograničene zatvorenom površi S, sastoji se, prema tome, iz velikog broja makroelemenata zapremine dV, a svaki makroelement sastoji se, dalje, iz velikog broja mikroelemenata zapremine dV' (sl. 1.).



Sl. 1.

Ako gustinu mase u jednom mikroelementu označimo sa ρ', tada je njegova masa

$$dm' = \rho' \, dV'. \tag{2.1.1}$$

Masa makroelementa zapremine dV je tada

$$dm = \int_{dV} dm' = \int_{dV} \rho' \, dV' = \rho \, dV, \tag{2.1.2}$$

gde je

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{2.1.3}$$

srednja gustina makroelementa.

2.2 Kretanje i deformacija. Neka se telo $\mathscr{B}$, zapremine V ograničene zatvorenom površi S, u trenutku t_0 vremena nalazi u nedeformisanoj konfiguraciji K_0, koju ćemo smatrati za početnu. U deformisanoj konfiguraciji K, koja odgovara trenutku $t > t_0$ vremena, telo će imati zapreminu v ograničenu zatvorenom površi s. Makroelement dV tela $\mathscr{B}$ deformacijom pređe u makroelement dv, a mikroelement dV' u mikroelement dv'. Pretpostavljamo da u mikroelementima nema izvora mase, pa njihova masa ostaje očuvana tokom kretanja:

$$dm' = \rho_0' \, dV' = \rho' \, dv' = \text{const.}, \tag{2.2.1}$$

gde su ρ_0' i ρ' gustine mikroelemenata u nedeformisanoj i deformisanoj konfiguraciji. Tada i masa makroelemenata ostaje očuvana, tj.

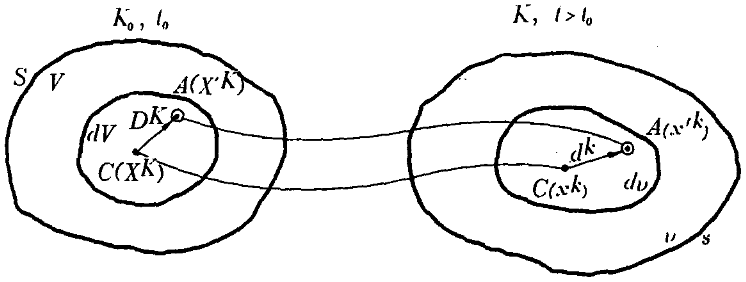
$$dm = \rho_0 \, dV = \rho \, dv = \text{const.}, \tag{2.2.2}$$

gde su ρ_0 i ρ srednje gustine makroelemenata u nedeformisanoj i deformisanoj konfiguraciji.

Ako, u odnosu na sistem krivolinijskih materijalnih koordinata X^K, u makroelementu dV uočimo tačku $C(X^K)$, koja je centar mase makroelementa, tada položaj proizvoljne tačke $A(X'^K)$ makroelementa, koja reprezentuje jedan mikroelement, može biti određen, u odnosu na $C(X^K)$, vektorom D^K, tako da je

$$X'^K = X^K + D^K, \tag{2.2.3}$$

u odnosu na isti sistem materijalnih krivolinijskih koordinata, jer pretpostavljamo da je rastojanje između tačaka $C(X^K)$ i $A(X'^K)$ infinitezimalno (sl. 2.).



Sl. 2.

Makroelement dV pređe deformacijom u dv, tačka $C(X^K)$ u tačku $C(x^k)$ i vektor D^K u vektor d^k (sl. 2.), tako da je

$$x'^k = x^k + d^k, \tag{2.2.4}$$

u odnosu na sistem prostornih krivolinijskih koordinata x^k, pri čemu je

$$d^k = d^k(X^K,\ D^K,\ t). \tag{2.2.5}$$

Poslednjom relacijom jednoznačno je određeno preslikavanje vektora D^K u d^k. Za funkciju preslikavanja pretpostavljamo da je analitička, tako da (2.2.5) možemo predstaviti stepenim redom

$$d^k = \chi^{k}_{\cdot K} D^K + \frac{1}{2!} \chi^{k}_{\cdot KL} D^K D^L + \cdots, \tag{2.2.6}$$

gde su

$$\chi^{k}_{\cdot K} = \left(\frac{\partial d^k}{\partial D^K}\right)_{D^L=0},$$
$$\chi^{k}_{\cdot KL} = \left(\frac{\partial^2 d^k}{\partial D^K \partial D^L}\right)_{D^M=0}, \tag{2.2.7}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ako se u redu (2.2.6) zadržimo na prvoj aproksimaciji, tada će za *proste materijale* biti

$$d^k = \chi^{k}_{\cdot K} D^K, \tag{2.2.8}$$

pa (2.2.4) možemo napisati u obliku

$$x'^k = x^k + \chi^k_{\cdot K} D^K. \tag{2.2.9}$$

Relacija (2.2.8) pretpostavlja homogenu deformaciju makroelementa. Pokazaćemo sada da pri ovakvoj (homogenoj) deformaciji centar mase makroelementa prelazi ponovo u centar mase. S obzirom da smo tačku $C(X^K)$ izabrali kao centar mase makroelementa u nedeformisanoj konfiguraciji, tada je

$$\int_{dV} \rho_0' D^K dV' = 0. \tag{2.2.10}$$

Imajući ovo u vidu i koristeći (2.2.8), lako nalazimo

$$\int_{dv} \rho' d^k dv' = \int_{dv} \rho' \chi^k_{\cdot K} D^K dv' = \int_{dV} \rho_0' \chi^k_{\cdot K} D^K dV' = \chi^k_{\cdot K} \int_{dV} \rho_0' D^K dV' = 0, \tag{2.2.11}$$

gde smo iskoristili jednačinu konzervacije mase makroelementa (2.2.1) i činjenicu da su veličine $\chi^k_{\cdot K}$ definisane u centru mase makroelementa.

Veličine $\chi^k_{\cdot K}$ karakterišu homogenu deformaciju makroelementa i nezavisne su od kretanja njegovog centra mase, tj. od kretanja tačke X^K. Prema tome, kretanje je određeno nezavisnim sistemima jednačina

$$x^k = x^k(X^K, t), \qquad \chi^k_{\cdot K} = \chi^k_{\cdot K}(X^L, t). \tag{2.2.12}$$

Prvim sistemom je određeno kretanje centra mase makroelementa, a drugim — homogena deformacija makroelementa.

Uočimo u tački $C(X^K)$ tri nekomplanarna vektora $D^K_{\cdot(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $|D^K_{\cdot(\alpha)}| \neq 0$, koji su „čvrsto" vezani za makroelement. S obzirom na (2.2.8), biće

$$d^k_{\cdot(\alpha)} = \chi^k_{\cdot K} D^K_{\cdot(\alpha)}. \tag{2.2.13}$$

Odavde je

$$\chi^k_{\cdot K} = d^k_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot K}, \tag{2.2.14}$$

gde su $D^K_{\cdot(\alpha)}$ i $D^{(\alpha)}_{\cdot K}$ međusobno recipročni trijedri, tj.

$$D^K_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot L} = \delta^K_L, \qquad D^K_{\cdot(\alpha)} D^{(\beta)}_{\cdot K} = \delta^\beta_\alpha. \tag{2.2.15}$$

Tenzor $\chi^k_{\cdot K}$ je, dakle, u potpunosti određen deformacijom tri nekomplanarna vektora $D^K_{\cdot(\alpha)}$. Koristeći (2.2.14), jednačinu (2.2.8) možemo napisati u obliku

$$d^k = d^k_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^K, \tag{2.2.16}$$

a (2.2.9) u obliku

$$x'^k = x^k + d^k_{\cdot(\alpha)} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^K. \tag{2.2.17}$$

Vektore $D^K_{\cdot(\alpha)}$, odnosno $d^k_{\cdot(\alpha)}$, možemo interpretirati kao trijedar *vektora orijentacije*, tako da je deformacija određena jednačinama

$$x^k = x^k(X^K, t), \qquad d^k_{\cdot(\alpha)} = d^k_{\cdot(\alpha)}(X^K, D^K_{\cdot(\alpha)}, t). \tag{2.2.18}$$

Na ovaj način uvedeni, jasno je da su vektori orijentacije u odnosu na makroelement — *materijalni vektori*. Uobičajeno je da se nazivaju *usmerivači* ili *direktori* (od engleske reči: directors).

Neka su $d^{k}_{\cdot(\alpha)}$ i $d^{(\alpha)}_{\cdot k}$ međusobno recipročni trijedri, tj.

$$d^{k}_{\cdot(\alpha)}\, d^{(\alpha)}_{\cdot l} = \delta^{k}_{l}, \quad d^{k}_{\cdot(\alpha)}\, d^{(\beta)}_{\cdot k} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \tag{2.2.19}$$

tada iz (2.2.16) dobijamo

$$D^{K} = D^{K}_{\cdot(\alpha)}\, d^{(\alpha)}_{\cdot k}\, d^{k}, \tag{2.2.20}$$

što možemo napisati i u obliku

$$D^{K} = \chi^{K}_{\cdot k}\, d^{k}, \quad \left(\chi^{K}_{\cdot k} = D^{K}_{\cdot(\alpha)}\, d^{(\alpha)}_{\cdot k}\right), \tag{2.2.21}$$

gde su $\chi^{k}_{\cdot K}$ i $\chi^{K}_{\cdot k}$ međusobno recipročni tenzori, tj.

$$\chi^{k}_{\cdot K}\, \chi^{K}_{\cdot l} = \delta^{k}_{l}, \quad \chi^{k}_{\cdot K}\, \chi^{L}_{\cdot k} = \delta^{L}_{K}. \tag{2.2.22}$$

Tenzori $\chi^{k}_{\cdot K}$ i $\chi^{K}_{\cdot k}$ su *gradijenti mikrodeformacije*: $\chi^{k}_{\cdot K}$ su *materijalni* gradijenti mikrodeformacije, a $\chi^{K}_{\cdot k}$ su *prostorni* gradijenti mikrodeformacije.

Diferenciranjem po vremenu, iz (2.2.17) dobijamo

$$v'^{k} = v^{k} + \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)}\, D^{(\alpha)}_{\cdot K}\, D^{K}, \tag{2.2.23}$$

ili, koristeći (2.2.20),

$$v'^{k} = v^{k} + \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)}\, d^{(\alpha)}_{\cdot l}\, d^{l}, \tag{2.2.24}$$

gde je v'^{k} brzina proizvoljne tačke $A(x'^{k})$ makroelementa, a v^{k} brzina centra mase $C(x^{k})$ makroelementa. Uvodeći oznaku

$$\dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)}\, d^{(\alpha)}_{\cdot l} = \dot{\chi}^{k}_{\cdot K}\, \chi^{K}_{\cdot l} = \nu^{k}_{\cdot l}, \tag{2.2.25}$$

biće

$$v'^{k} = v^{k} + \nu^{k}_{\cdot l}\, d^{l}, \tag{2.2.26}$$

što predstavlja izraz za brzinu proizvoljne tačke makroelementa, pri čemu je ν_{kl} definisano u centru mase makroelementa. Tenzor ν_{kl} određuje trenutnu brzinu direktora i zvaćemo ga *giracioni tenzor* (engleski: giration tensor).

2.3. Kinetička energija. Kinetička energija tela $\mathscr{B}$, konačne zapremine v, je

$$2\,T = \int_{v} \int_{dv} \rho'\, v'^{k}\, v'_{k}\, dv'. \tag{2.3.1}$$

Koristeći (2.2.23) i (2.2.10), za kinetičku energiju dobijamo

$$\begin{aligned} 2\,T &= \int_{v} \int_{dv} \rho' \left(v^{k} + \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)}\, D^{(\alpha)}_{\cdot K}\, D^{K}\right)\left(v_{k} + \dot{d}_{k(\beta)}\, D^{(\beta)}_{\cdot L}\, D^{L}\right) dv' = \\ &= \int_{v} \rho\, v^{k}\, v_{k}\, dv + \int_{v} \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)}\, \dot{d}_{k(\beta)}\, D^{(\alpha)}_{\cdot K}\, D^{(\beta)}_{\cdot L} \int_{dv} \rho'\, D^{K} D^{L}\, dv', \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

odnosno

$$2\,T = \int_{v} \rho \left(v^{k}\, v_{k} + I^{KL}\, \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)}\, \dot{d}_{k(\beta)}\, D^{(\alpha)}_{\cdot K}\, D^{(\beta)}_{\cdot L}\right) dv, \tag{2.3.3}$$

gde smo stavili

$$\rho\, I^{KL}\, dv = \int_{dv} \rho'\, D^{K} D^{L}\, dv' = \int_{dV} \rho_{0}'\, D^{K} D^{L}\, dV'. \tag{2.3.4}$$

Tenzor $I^{KL} = I^{LK}$ određuje koeficijente inercije makroelementa dV u odnosu na njegov centar mase i zvaćemo ga *tenzor mikroinercije*. Ako uvedemo *direktorski tenzor mikroinercije* $I^{\alpha\beta}$,

$$I^{\alpha\beta} = I^{\beta\alpha} = I^{KL} D^{(\alpha)}_{\cdot K} D^{(\beta)}_{\cdot L}, \tag{2.3.5}$$

kinetičku energiju možemo izraziti u obliku

$$2\,T = \int_v \rho \left(v^k v_k + I^{\alpha\beta} \dot{d}^k_{\cdot(\alpha)} \dot{d}_{k\,\beta)} \right) dv. \tag{2.3.6}$$

Izvod po vremenu kinetičke energije je

$$\dot{T} = \int_v \rho \left(\dot{v}^k v_k + I^{\alpha\beta} \ddot{d}^k_{\cdot(\alpha)} \dot{d}_{k\,(\alpha)} \right) dv, \tag{2.3.7}$$

gde smo iskoristili jednačinu konzervacije mase makroelementa u obliku

$$\rho\,\dot{\overline{dv}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho\, v^k)_{,k} = 0. \tag{2.3.8}$$

Koristeći (2.2.25), brzinu promene kinetičke energije možemo izraziti u obliku

$$\dot{T} = \int_v \rho \left(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{kl} \nu_{kl} \right) dv, \tag{2.3.9}$$

gde je

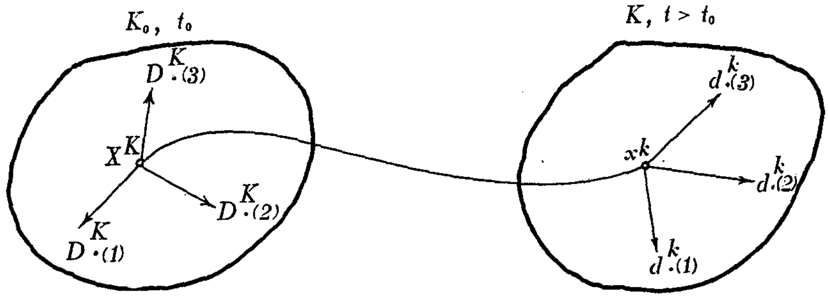
$$\Gamma^{kl} = I^{\alpha\beta} \ddot{d}^k_{\cdot(\alpha)} d^l_{\cdot(\beta)} = I^{KL} \ddot{\chi}^k_{\cdot K} \chi^l_{\cdot L}, \tag{2.3.10}$$

tenzor koji učestvuje u doprinosu kinetičkoj energiji usled homogene deformacije makroelementa i koji ćemo zvati *inercijski spin*.

2.4. Prelaz na kontinuum. U cilju formiranja fenomenološke teorije kontinuuma, pretpostavićemo da se telo sastoji iz neprekidno raspoređenih materijalnih tačaka kojima pripisujemo svojstva makroelemenata dV, odnosno dv. Drugim rečima, svaki ranije posmatrani makroelement identifikovaćemo sada sa jednom materijalnom tačkom tela (centrom mase makroelementa), pri čemu toj tački pripisujemo svojstva ranije posmatranog makroelementa. Prema tome, fizički je svaka materijalna tačka tela *fenomenološki ekvivalentna* deformabilnom telu. Materijalnu tačku, dakle, posmatramo kao deformabilno telo malih dimenzija. Sada su gradijenti mikrodeformacije $\chi^k_{\cdot K}$ definisani u svakoj tački tela, tako da predstavljaju neprekidno dvostruko vektorsko polje, pa je kretanje (deformacija) tela određeno jednačinama (2.2.12) koje su međusobno nezavisne.

Umesto gradijenata mikrodeformacije $\chi^k_{\cdot K}$, možemo u svakoj tački tela definisati trijedar direktora $D^K_{\cdot(\alpha)}$, koji deformacijom prelazi u $d^k_{\cdot(\alpha)}$, tako da je deformacija određena jednačinama (2.2.18), pri čemu je deformacija direktora nezavisna od pomeranja tačaka tela (sl. 3.). Direktore $D^K_{\cdot(\alpha)}$ biramo u nedeformisanoj konfiguraciji proizvoljno i njihova deformacija karakteriše homogenu deformaciju ranije posmatranih makroelemenata. Svodeći, dakle, makroelement na materijalnu tačku tela, deformaciju makroelementa svodimo na deformaciju direktora. S obzirom da je deformacija direktora nezavisna od pomeranja materijalnih tačaka tela, jasno je da posle deformacije direktori $d^k_{\cdot(\alpha)}$ *neće biti mate-*

rijalni vektori.. Uvođenjem deformabilnih direktora u tačkama tela i opisivanjem deformacije jednačinama (2.2.18), prosti kontinuum sa mikrostrukturom inter-



Sl. 3

pretiramo kao orijentisani kontinuum sa tri deformabilna direktora, tj. kao *prosti generalisani Korera kontinuum* (simple generalized Cosserat continuum).

S obzirom da su sve veličine, koje su ranile bile definisane u centru mase makroelementa, *sada neprekidne funkcije položaja*, izraz za kinetičku energiju (2.3.6), kao i brzinu promene kinetičke energije (2.3.9), ostaje nepromenjen, samo što sada dv interpretiramo kao element tela. Svakako da element tela dV, odnosno dv, menja svoj smisao u odnosu na ranije posmatrani makroelement. Element tela, naime, sadrži sada materijalne tačke tela i ima isti smisao kao i u klasičnoj teoriji kontinuuma.

2.5. Jednačina balansa energije i jednačine kretanja. Pretpostavićemo da na telo $\mathcal{B}$ deluju površinske sile T^i i H^{ij} i zapreminske sile f^i i l^{ij}, tako da je efekat rada površinskih i zapreminskih sila

$$\dot{A} = \oint_s (T^i v_i + H^{ij} \nu_{ij})\, ds + \int_v \rho\, (f^i v_i + l^{ij} \nu_{ij})\, dv. \tag{2.5.1}$$

Koristeći (2.2.25), ovaj izraz možemo pisati u obliku

$$\dot{A} = \oint_s (T^i v_i + H^{i(\alpha)} \dot{d}_{i(\alpha)})\, ds + \int_v \rho\, (f^i v_i + l^{i(\alpha)} \dot{d}_{i(\alpha)})\, dv, \tag{2.5.2}$$

gde je

$$H^{i(\alpha)} = H^{ij} d^{(\alpha)}_{\cdot j}, \quad l^{i(\alpha)} = l^{ij} d^{(\alpha)}_{\cdot j}. \tag{2.5.3}$$

Postuliraćemo jednačinu bilansa ukupne energije u obliku

$$\dot{T} + \dot{U} = \dot{A} + Q, \tag{2.5.4}$$

gde je $\dot{T}$ brzina promene kinetičke energije data jednačinom (2.3.9), $\dot{U}$ brzina promene unutrašuje energije,

$$U = \int_v \rho\, u\, dv, \quad \dot{U} = \int_v \rho\, \dot{u}\, dv, \tag{2.5.5}$$

gde je u specifična unutrašnja energija; $\dot{A}$ je efekat rada površinskih i zapreminskih sila određen jednačinom (2.5.2) i Q priraštaj toplotne energije,

$$Q = \oint_s q\, ds + \int_v \rho\, h\, dv \tag{2.5.6}$$

gde je q intenzitet normalne komponente vektora toplotnog fluksa i h jačina (izdašnost) toplotnog izvora računata po jedinici mase. Jednačinu (2.5.4), prema tome, možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}\int_v \rho\,(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{i(\alpha)} \dot{d}_{i(\alpha)})\,dv + \int_v \rho\,\dot{u}\,dv = \oint_s (T^i v_i + H^{i(\alpha)} \dot{d}_{i(\alpha)})\,ds + \\ + \int_v \rho\,(f^i v_i + l^{i(\alpha)} \dot{d}_{i(\alpha)})\,dv + \oint_s q\,ds + \int_v \rho\,h\,dv,\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

gde smo, koristeći (2.2.25), uveli veličinu

$$\Gamma^{i(\alpha)} = \Gamma^{ij} d^{(\alpha)}_{\cdot j}. \tag{2.5.8}$$

Identičkom transformacijom, jednačinu (2.5.7) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}\int_v \rho\,(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{i(\alpha)} \dot{d}_{i(\alpha)})\,dv + \int_v \rho\,\dot{u}\,dv = \oint_s (T^i\,ds - t^{ik}\,ds_k)\,v_i + \\ + \oint_s (H^{i(\alpha)}\,ds - h^{i(\alpha)k}\,ds_k)\,\dot{d}_{i(\alpha)} + \oint_s (q\,ds - q^k\,ds_k) + \\ + \int_v \rho\,(f^i v_i + l^{i(\alpha)} \dot{d}_{i(\alpha)})\,dv + \int_v t^{ik}_{,k} v_i\,dv + \int_v t^{ik} v_{i,k}\,dv + \\ + \int_v h^{i(\alpha)k}_{,k} \dot{d}_{i(\alpha)}\,dv + \int_v h^{i(\alpha)k} \dot{d}_{i(\alpha),k}\,dv + \int_v q^k_{,k}\,dv + \int_v \rho\,h\,dv,\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

pri čemu smo dodate površinske integrale transformisali u zapreminske.

Uočimo sada u nekoj tački tela elementarni tetraedar ograničen ravni sa proizvoljnom spoljašnjom normalom n_k i trima ravnima paralelnim koordinatnim ravnima u toj tačkj. (Pod koordinatnim ravnima podrazumevamo ravni tangentne na koordinatne površi u uočenoj tački). Ako je ds površina stranice tetraedra normalne na n_k i ds_k orijentisani element površi, tada je

$$ds_k = ds\, n_k. \tag{2.5.10}$$

Ako primenimo jednačinu (2.5.9) na uočeni tetraedar i pustimo da zapremina tetraedra teži nuli, zadržavajući orijentacije njegovih stranica, s obzirom da zapremina tetraedra brže teži nuli od njegove površine, dobijamo

$$(T^i\,ds - t^{ik}\,ds_k)\,v_i + (H^{i(\alpha)}\,ds - h^{i(\alpha)k}\,ds_k)\,\dot{d}_{i(\alpha)} + (q\,ds - q^k\,ds_k) = 0. \tag{2.5.11}$$

S obzirom da ova jednačina mora da važi za proizvoljne brzine v_i i $\dot{d}_{i(\alpha)}$, sledi da mora biti

$$\begin{aligned}&T^i = t^{ik} n_k, \\ &H^{i(\alpha)} = h^{i(\alpha)k} n_k, \quad H^{ij} = h^{ijk} n_k, \\ &q = q^k n_k,\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

gde je

$$h^{ijk} = h^{i(\alpha)k} d^{j}_{\cdot(\alpha)}, \tag{2.5.13}$$

što su granični uslovi na površi s tela, sa spoljašnjom normalom n_k.

Vektor T^i je površinska sila ili *napon*, f^i je zapreminska sila, dok je t^{ij} nesimetrični tenzor napona. Koristeći terminologiju iz teorije Kosera kontinuuma, vektore $H^{i(\alpha)}$ zvaćemo *direktorski naponi*, $l^{i(\alpha)}$ *direktorske zapreminske sile*, a $h^{i(\alpha)k}$ *tenzori direktorskih napona*. Koristeći terminologiju Eringena i Suhubija, tenzor H^{ij} zvaćemo *prvi naponski moment*, l^{ij} *prvi zapreminski moment*, a h^{ijk} *tenzor prvih naponskih momenata*. Veličina q^k je *vektor toplotnog fluksa*.

Koristeći (2.5.11), jednačina (2.5.9) postaje

$$\begin{aligned}\int_v \rho\,(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{i(\alpha)}\dot{d}_{i(\alpha)})\,dv + \int_v \rho\,\dot{u}\,dv = \int_v \rho\,(f^i v_i + l^{i(\alpha)}\dot{d}_{i(\alpha)})\,dv + \\ + \int_v t^{ik}_{,k} v_i\,dv + \int_v t^{ik} v_{i,k}\,dv + \int_v h^{i(\alpha)k}_{,k}\dot{d}_{i(\alpha)}\,dv + \\ + \int_v h^{i(\alpha)k}\dot{d}_{i(\alpha),k}\,dv + \int_v q^k_{,k}\,dv + \int_v \rho\,h\,dv,\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

i važi za sve moguće brzine v_i, $\dot{d}_{i(\alpha)}$, $v_{i,k}$ i $\dot{d}_{i(\alpha),k}$, tj. važi za sva moguća kretanja. Da bismo dobili diferencijalne jednačine kretanja, iskoristićemo činjenicu da ova jednačina mora biti invarijantna u odnosu na superpronirana kruta kretanja. Zahtev ove invarijantnosti je fizički očigledan, jer u slučaju krutih kretanja unutrašnja energija ostaje konstantna, pa je efekat rađa inecijskih sila jednak efektu rada površinskih i zapremiskih sila. Zahtev invarijantnosti jednačine (2.5.14) u odnosu na superponirana kruta kretanja postavićemo posebno za slučaj superponiranih translacija i slučaj superponiranih krutih rotacija, što je ekvivalentno primeni Pioline teoreme (videti, na primer, [14]).

Ako stvarnim brzinama, u trenrtku t vremena, superponiramo proizvoljnu brzinu tianslacije, sve veličine u jednačini (2.5.14) ostaju nepromenjene, izuzev brzine v_i, koju treba zameniti sa $v_i + a_i$, gde je $a_i = \text{const.}$ i određuje superponiranu brzinu translacije. Da bi jednačina (2.5.14) ostala invarijantnog oblika u odnosu na ovakvu superpoziciju, lako je pokazati da mora biti

$$\int_v (\rho\,\dot{v}^i - \rho f^i - t^{ik}_{,k})\,a_i\,dv = 0, \tag{2.5.15}$$

odakle sledi, s obzirom da je a_i proizvoljni konstantni vektor,

$$\rho\,\dot{v}^i = t^{ik}_{,k} + \rho f^i, \tag{2.5.16}$$

što je *prvi Košijev zakon kretanja*, tj. potreban i dovoljan uslov za balans količine kretanja, koji predstavlja tri klasične diferencijalne jednačine kretanja.

Pretpostavljajući da prvi Košijev zakon kretanja važi, jednačina (2.5.14) se svodi na

$$\begin{aligned}\int_v \rho\,\Gamma^{i(\alpha)}\dot{d}_{i(\alpha)}\,dv + \int_v \rho\,\dot{u}\,dv = \int_v \rho\,l^{i(\alpha)}\dot{d}_{i(\alpha)}\,dv + \\ + \int_v t^{ik} v_{i,k}\,dv + \int_v h^{i(\alpha)k}_{,k}\dot{d}_{i(\alpha)}\,dv + \int_v h^{i(\alpha)k}\dot{d}_{i(\alpha),k}\,dv + \\ + \int_v q^k_{,k}\,dv + \int_v \rho\,h\,dv.\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Zahtevaćemo, dalje, invarijantnost ove jednačine u odnosu na superponiranu brzinu krute rotacije.

Ako u trenutku t vremena stvarnim brzinama u jednačini (2.5.17) superponiramo konstantnu ugaonu brzinu (ugaonu brzinu krute rotacije), sve veličine u toj jednačini ostaju nepromenjene, izuzev $v_{i,k}$, $\dot{d}_{i(\alpha)}$ i $\dot{d}_{i(\alpha),k}$, koje treba zameniti sa $v_{i,k}+\Omega_{ik}$, $\dot{d}_{i(\alpha)}+\Omega_{il}d^{l}_{\cdot(\alpha)}$ i $\dot{d}_{i(\alpha),k}+\Omega_{il}d^{l}_{\cdot(\alpha),k}$, gde je Ω_{ij} proizvoljni konstantni antisimetrični tenzor koji određuje superponiranu ugaonu brzinu krute rotacije. Da bi jednačina (2.5.17) bila invarijantnog oblika u odnosu na ovakvu superpoziciju, mora biti

$$\int_v (\rho\,\Gamma^{i(\alpha)}d^{l}_{\cdot(\alpha)}-\rho\, l^{i(\alpha)}d^{l}_{\cdot(\alpha)}+t^{il}-h^{i(\alpha)k}_{\quad\;\;,k}d^{l}_{\cdot(\alpha)}-h^{i(\alpha)k}d^{l}_{\cdot(\alpha),k})\Omega_{il}\,dv=0,$$

odnosno

$$\int_v (t^{ij}+h^{ijk}_{\;\;\;,k}+\rho\, l^{ij}-\rho\Gamma^{ij})\,\Omega_{ij}\,dv=0,$$

odakle sledi

$$(t^{ij}+h^{ijk}_{\;\;\;,k}+\rho\, l^{ij}-\rho\Gamma^{ij})\,\Omega_{ij}=0. \tag{2.5.18}$$

S obzirom da je Ω_{ij} proizvoljni konstantni antisimetrični tenzor, iz prethodne jednačine sledi

$$t^{[ij]}+h^{[ij]k}_{\quad\;,k}+\rho\, l^{[ij]}-\rho\Gamma^{[ij]}=0, \tag{2.5.19}$$

što je *drugi Košijev zakon kretanja*, tj. potreban i dovoljan uslov za balans momenta količine kretanja, koji predstavlja tri diferencijalne jednačine kretanja.

Ako pišemo

$$t^{ij}+h^{ijk}_{\;\;\;,k}+\rho\, l^{ij}-\rho\Gamma^{ij}=\tau^{ij}, \tag{2.5.20}$$

drugi Košijev zakon kretanja se svodi na

$$\tau^{[ij]}=0, \tag{2.5.21}$$

tj. na uslov da tenzor τ^{ij} mora biti simetričan.

Pretpostavljajući da je drugi Košijev zakon kretanja zadovoljen, tj. da je tenzor τ^{ij} simetričan, jednačina (2.5.20) predstavlja sistem od devet diferencijalnih jednačina kretanja u kojima su sadržane tri diferencijalne jednačine kretanja (2.5.19) kao antisimetrični deo od (2.5.20). U sistemu od devet diferencijalnih jednačina (2.5.20) smatramo da su prvi zapreminski momenti l^{ij} poznati (zadati), dok t^{ij}, τ^{ij} i h^{ijk} moraju biti određeni konstitutivnim jednačinama, pri čemu drugi Košijev zakon kretanja (2.5.21) mora biti zadovoljen u konstitutivnoj jednačini po τ^{ij}.

Jednačinu (2.5.20) možemo napisati u obliku

$$\tau^{ij}=t^{ij}+h^{i(\alpha)k}_{\quad\;\;,k}d^{j}_{\cdot(\alpha)}+h^{i(\alpha)k}d^{j}_{\cdot(\alpha),k}+\rho\,(l^{i(\alpha)}-\Gamma^{i(\alpha)})\,d^{j}_{\cdot(\alpha)}, \tag{2.5.22}$$

odakle sledi

$$h^{i(\alpha)k}_{\quad\;\;,k}+\rho\, l^{i(\alpha)}=\tau^{ij}d^{(\alpha)}_{\cdot j}-t^{ij}d^{(\alpha)}_{\cdot j}+h^{ijk}d^{(\alpha)}_{\cdot j,k}+\rho\Gamma^{i(\alpha)}. \tag{2.5.23}$$

Korišćenjem ove jednačine u (2.5.17), dobijamo

$$\int_v \rho\,\dot{u}\,dv=\int_v [t^{ik}v_{i,k}+(\tau^{ij}d^{(\alpha)}_{\cdot j}-t^{ij}d^{(\alpha)}_{\cdot j}+h^{ijk}d^{(\alpha)}_{\cdot j,k})\,\dot{d}_{i(\alpha)}+h^{i(\alpha)k}\dot{d}_{i(\alpha),k}+q^{k}_{\cdot k}+\rho h]\,dv,$$

odakle sledi lokalna jednačina

$$\rho \dot{u} = t^{ik} v_{i,k} + \left(\tau^{ij} d^{(\alpha)}_{.j} - t^{ij} d^{(\alpha)}_{.j} + h^{ijk} d^{(\alpha)}_{.j,k}\right) \dot{d}_{i(\alpha)} + h^{i(\alpha)k} \dot{d}_{i(\alpha),k} + q^{k}_{,k} + \rho h, \tag{2.5.24}$$

što je jednačina balansa specifične unutrašnje energije, koja je invarijantna u odnosu na superponirana kruta kretanja. Ovu jednačinu očigledno možemo napisati u obliku

$$\rho \dot{u} = t^{ik} v_{i,k} + (\tau^{ij} - t^{ij}) \nu_{ij} + h^{ijk} \nu_{ij,k} + q^{k}_{,k} + \rho h \tag{2.5.25}$$

što je saglasno sa jednačinom balansa specifične unutrašnje energije koju su dobili E r i n g e n i S u h u b i [1], gde oni simetrični tenzor τ^{ij} nazivaju *srednji mikro-napon.*

Ranije je pomenuto da je kretanje kontinuuma sa mikrostrukturom određeno nezavisnim sistemima jednačina (2.2.18). Na osnovu toga zaključujemo da kontinuum sa mikrostrukturom ima *dvanaest lokalnih stepeni slobode.* Za određivanje dvanaest nepoznatih funkcija — tri koordinate vektora pomeranja i devet koordinata direktora — na raspolaganju su nam sistemi (2.5.16) i (2.5.20) od dvanaest diferencijalnih jednačina kretanja. Napomenimo da sistem (2.5.20) možemo napisati i u obliku

$$\rho I^{\alpha\beta} \ddot{d}^{\,i}_{.(\alpha)} d^{\,j}_{.(\beta)} = t^{ij} - \tau^{ij} + h^{ijk}_{,k} + \rho l^{ij}, \tag{2.5.26}$$

pri čemu je, kao što je već pomenuto, l^{ij} zadato, a t^{ij}, τ^{ij} i h^{ijk} određujemo preko konstitutivnih jednačina.

3. MIKROPOLARNI KONTINUUM

3.1. Model. Posmatraćemo specijalni slučaj kontinuuma sa mikrostrukturom u kome se u procesu deformacije makroelementi ne deformišu. Kretanje svakog makroelementa tela sastoji se tada iz translatornog pomeranja, određenog pomeranjem centra mase makroelementa, i rotacije oko centra mase. Trijedar direktora $D^K_{\cdot(\alpha)}$ biće sada *kruto* vezan za makroelement, pa procesom deformacije prelazi u trijedar $d^k_{\cdot(\alpha)}$ translacijom i krutom rotacijom.

Sa stanovišta kontinualne teorije, kada makroelement identifikujumo sa materijalnom tačkom tela, svaka materijalna tačka *fenomenološki je ekvivalentna krutom telu.* Identifikovanjem makroelementa sa materijalnom tačkom kontinuuma, kruto kretanje makroelementa svodimo na kruto kretanje trijedra direktora koji su definisani u svakoj tački tela, tj. predstavljaju tri neprekinda vektorska polja. S obzirom da je rotacija direktora nezavisna od pomeranja materijalnih tačaka kontinuuma, jasno je da direktori $d^k_{\cdot(\alpha)}$ *neće biti materijalni vektori.* Na ovaj način, prema tome, mikropolarni kontinuum interpretiramo kao prosti orijentisani kontinuum sa tri nedeformabilna direktora, tj. kao *prosti Kosera kontinuum* (simple Cosserat cotinuum).

3.2. Kretanje i deformacija. Pošto se pri deformaciji direktori kruto kreću, njihov intenzitet se ne menja, pa možemo pisati

$$g_{kl}\, d^k_{\cdot(\alpha)}\, d^l_{\cdot(\beta)} = G_{KL}\, D^K_{\cdot(\alpha)}\, D^L_{\cdot(\beta)} = \text{const.} \tag{3.2.1}$$

Koristeći (2.2.13), odavde sledi

$$g_{kl}\, \chi^k_{\cdot K}\, \chi^l_{\cdot L} = G_{KL}, \quad G^{KL} \chi_{kK} \chi_{lL} = g_{kl}, \tag{3.2.2}$$

što je uslov ortogonalnost matrice $\{\chi^k_{\cdot K}\}$. Relacija

$$d^k_{\cdot(\alpha)} = \chi^k_{\cdot K}\, D^K_{\cdot(\alpha)}$$

predstavlja, prema tome, ortogonalnu transformaciju. Da bi ona, međutim, odgovarala rotacijama, mora biti

$$|\chi^k_{\cdot K}| = +\sqrt{\frac{G}{g}}. \tag{3.2.3}$$

Deformacija mikropolarnog kontinuuma određena je, dakle, jednačinama

$$x^k = x^k(X^K,\ t), \quad \chi^k_{\cdot K} = \chi^k_{\cdot K}(X^L,\ t), \tag{3.2.4}$$

gde prva jednačina određuje pomeranje tačkama kontinuuma, pa, prema tome, i translatorno pomeranje direktora, dok druga određuje nezavisnu rotaciju direktora, jer je $\chi^{k}_{\cdot K}$ ortogonalan tenzor koj· odgovara rotacijama, tj. zadovoljava uslove (3.2.2) i (3.2.3).

S obzirom da je tenzor $\chi^{k}_{\cdot K}$ ortogonalan, tj. da između njegovih koordinata postoji šest veza (3.2.2) (uslov (3.2.3) je sadržan u (3.2.2)), zaključujemo da ima *tri međusobno nezavisne koordinate.* Uslov ortogonalnosti tenzora $\chi^{k}_{\cdot K}$ možemo napisati i u obliku

$$\chi_{kK} = \chi_{Kk}, \quad (\underset{\sim}{\chi}^{T} = \underset{\sim}{\chi}^{-1}). \tag{3.2.5}$$

Diferenciranjem po vremenu iz (3.2.2) dobijamo

$$G^{KL}\dot{\chi}_{kK}\chi_{lL} = -G^{KL}\chi_{kK}\dot{\chi}_{lL}. \tag{3.2.6}$$

Koristeći (3.2.5) i (2.2.25), odavde sledi

$$\nu_{kl} = \dot{\chi}_{kK}\chi^{K}_{\cdot l} = -\dot{\chi}_{lK}\chi^{K}_{\cdot k} = -\nu_{lk}. \tag{3.2.7}$$

Vidimo, dakle, da je u teoriji mikropolarnog kontinuuma giracioni tenzor ν_{kl} antisimetričan, tj. da ima tri međusobno nezavisne koordinate.

3.3. Jednačina balansa energije i jednačine kretanja. Ako u jednačini balansa energije (2.5.9) stavimo

$$\dot{d}_{k\,(\alpha)} = \nu_{kl}\,d^{l}_{\cdot(\alpha)}, \tag{3.3.1}$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\int_v \rho\,(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{ij}\nu_{ij})\,dv + \int_v \rho\,\dot{u}\,dv &= \oint_s (T^i ds - t^{ik} ds_k)\,v_i + \\ + \oint_s (H^{ij} ds - h^{ijk} ds_k)\,\nu_{ij} &+ \oint_s (q ds - q^k ds_k) + \int_v \rho\,(f^i v_i + l^{ij}\nu_{ij})\,dv + \\ + \int_v \big(t^{ik}_{\ ,k} v_i + t^{ik} v_{i,k} &+ h^{ijk}_{\ ,k}\nu_{ij} + h^{ijk}\nu_{ij,k} + q^{k}_{,k} + \rho h\big)\,dv.\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

S obzirom da je ν_{ij} antisimetričan tenzor, doprinos u ovoj jednačini čine samo antisimetrični delovi tenzora Γ^{ij}, H^{ij}, l^{ij} i h^{ijk}. Iz tog razloga, bez gubljenja u opštosti, možemo uzeti da su ti tenzori antisimetrični, tj. da je $\Gamma^{ij} = -\Gamma^{ji}$, $H^{ij} = -H^{ji}$, $l^{ij} = -l^{ji}$ i $h^{ijk} = -h^{jik} = m^{ijk}$, gde je m^{ijk} *tenzor naponskih spregova* koji ima devet međusobno nezavisnih koordinata. Tenzor H^{ij} tada predstavlja *površinski* ili *naponski spreg*, a l^{ij} *zapreminski spreg.*

Primenjujući jednačinu (3.3.2) na elementarni tetraedar, na isti način kao i u odeljku 5.2., dobijamo granične uslove

$$T^i = t^{ij} n_j, \qquad H^{ij} = m^{ijk} n_k, \qquad q = q^k n_k, \tag{3.3.3}$$

pa se jednačina (3.3.2) svodi na

$$\begin{aligned}\int_v \rho\,(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{ij}\nu_{ij})\,dv + \int_v \rho\,\dot{u}\,dv &= \int_v \rho\,(f^i v_i + l^{ij}\nu_{ij})\,dv + \\ + \int_v \big(t^{ik}_{\ ,k} v_i + t^{ik} v_{i,k} + m^{ijk}_{\ ,k}\nu_{ij} &+ m^{ijk}\nu_{ij,k} + q^{k}_{,k} + \rho h\big)\,dv.\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Zahtevaćemo sada invarijantnost ove jednačine u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Za superponiranu brzinu translacije, sve veličine u (3.3.4) ostaju nepromenjene, izuzev brzine v_i koju treba zameniti sa v_i+a_i, gde je $a_i=\text{const.}$ superponirana brzina translacije. Da bi jednačina (3.3.4) bila invarijantnog oblika u odnosu na ovakvu superpoziciju, mora biti

$$t^{ik}_{,k}+\rho f^i=\rho \dot{v}^i, \tag{3.3.5}$$

što je prvi Košijev zakon kretanja, tj. potreban i dovoljan uslov za balans količine kretanja, koji predstavlja sistem od tri diferencijalne jednačine kretanja.

Ako je prvi Košijev zakon kretanja zadovoljen, jednačina (3.3.4) se svodi na

$$\begin{aligned}\int_v \rho\Gamma^{ij}\nu_{ij}\,dv+\int_v \rho\,\dot{u}\,dv=\int_v \rho\, l^{ij}\nu_{ij}\,dv+\\ +\int_v \left(t^{ij}v_{i,j}+m^{ijk}_{,k}\nu_{ij}+m^{ijk}\nu_{ij,k}+q^k_{,k}+\rho h\right)dv.\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Zahtevaćemo, dalje, invarijantnost ove jednačine u odnosu na superponiranu brzinu krute rotacije. Pri ovakvoj superpoziciji, sve veličine u toj jednačini ostaju nepromenjene, izuzev v_{ij} i $\nu_{i,j}$ koje treba zameniti sa $v_{i,j}+\Omega_{ij}$ i $\nu_{ij}+\Omega_{ij}$, gde je Ω_{ij} proizvoljni konstantni antisimetrični tenzor koji određuje trenutnu brzinu superponirane krute rotacije. Da bi jednačina (3.3.6) bila invarijantnog oblika u odnosu na ovakvu superpoziciju, mora biti

$$t^{[ij]}+m^{ijk}_{,k}+\rho\,(l^{ij}-\Gamma^{ij})=0, \tag{3.3.7}$$

što je drugi Košijev zakon kretanja, tj. potreban i dovoljan uslov za balans momenta količine kretanja, koji predstavlja sistem od tri diferencijalne jednačine kretanja.

Ako je i drugi Košijev zakon kretanja zadovoljen, jednačina (3.3.6) postaje

$$\int_v \rho\,\dot{u}\,dv=\int_v \left(t^{ij}v_{i,j}-t^{[ij]}\nu_{ij}+m^{ijk}\nu_{ij,k}+q^k_{,k}+\rho h\right)dv, \tag{3.3.8}$$

odakle sledi lokalna jednačina balansa specifične unutrašnje energije,

$$\rho\,\dot{u}=t^{ij}v_{i,j}-t^{[ij]}\nu_{ij}+m^{ijk}\nu_{ij,k}+q^k_{,k}+\rho\,h, \tag{3.3.9}$$

koja je invarijantnog oblika u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Upoređujući poslednju jednačinu sa jednačinom balansa specifične unutrašnje energije (2.5.25) za kontinuum sa mikrostrukturom, vidimo da se (3.3.9) može neposredno bobiti iz (2.5.25) stavljajući da je ν_{ij} antisimetričan tenzor. Važno je, međutim, pomenuti da nije korektan zaključak da se (3.3.9) dobija iz (2.5.25) stavljanjem $t^{ij}-\tau^{ij}=t^{[ij]}$ i $h^{ijk}=m^{ijk}$, jer se u mikropolarnoj teoriji tenzor τ^{ij} ne pojavljuje, pa primena ovakvog formalizma može dovesti do pogrešnih zaključaka.

S obzirom da koordinate direktora $d^k_{\cdot(\alpha)}$ nisu međusobno nezavisne, već zadovoljavaju šest veza (3.2.1), tj. da su samo tri od njih devet međusobno nezavisne, zaključujemo da mikropolarni kontinuum ima *šest lokalnih stepeni slobode*. Za određivanje šest nepoznatih funkcija — tri koordinate vektora pomeranja i tri nezavisne koordinate direktora — na raspolaganju su nam sistemi (3.3.5) i (3.3.7) od šest diferencijalnih jednačina kretanja. Napomenimo da sistem (3.3.7) možemo napisati i u obliku

$$\rho\, I^{\alpha\beta}\, \ddot{d}^{[i}{}_{\cdot\,(\alpha)}\, d^{j]}{}_{\cdot\,(\beta)} = t^{[ij]} + m^{ijk}_{\ ,k} + \rho\, l^{ij}, \tag{3.3.10}$$

pri čemu su zapreminski spregovi l^{ij} zadati, a $t^{[ij]}$ i m^{ijk} određujemo preko konstitutivnih jednačina.

4. DIPOLARNI KONTINUUM

4.1. Model. U teoriji kontinuuma sa mikrostrukturom kao i teoriji mikropolarnog kontinuuma, s obzirom da je deformacija, odnosno rotacija direktora nezavisna od pomeranja tačaka kontinuuma, direktori nisu materijalni vektori. Ako, međutim, pretpostavimo da je kontinuum sastavljen iz neprekidno raspoređenih materijalni tačaka i svakoj tački pridodamo trijedar nekomplanarnih materijalnih vektora čije je kretanje, odnosno deformacija potpuno određena pomeranjima tačaka kontinuuma, tada je deformacija određena jednačinama

$$x^k = x^k (X^K, t). \tag{4.1.1}$$

Deformacija direktora, s obzirom da su materijalni vektori, određena je jednačinama

$$d^k_{\cdot(\alpha)} = x^k_{;K} D^K_{\cdot(\alpha)} + x^k_{;KL} D^K_{\cdot(\alpha)} D^L_{\cdot(\alpha)} + \cdots, \tag{4.1.2}$$

i nije nezavisna od kretanja tačaka kontinuuma, koje je dato jednačinama (4.1.1).

Ovakav specijalni slučaj generalisanog Kosera kontinuuma odgovara modelu multipolarnog kontinuuuma. Posebno, ako se u jednačini (4.1.2) zadržimo na prvoj aproksimaciji, za prosti kontinuum dobijamo

$$d^k_{\cdot(\alpha)} = x^k_{;K} D^K_{\cdot(\alpha)} \tag{4.1.3}$$

što odgovara modelu dipolarnog kontinuuma.

Diferenciranjem po vremenu iz (4.1.3) dobijamo

$$\dot{d}^k_{\cdot(\alpha)} = \dot{x}^k_{;K} D^K_{\cdot(\alpha)} = v^k_{,l} x^l_{;K} D^K_{\cdot(\alpha)} = v^k_{,l} d^l_{\cdot(\alpha)}, \tag{4.1.4}$$

pa je

$$v_{k,l} = \dot{d}_{k(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot l}. \tag{4.1.5}$$

Koristeći (4.1.4), iz (2.3.6) za kinetičku energiju dobijamo

$$2T = \int_v \rho (v^k v_k + i^{lm} v^k_{,l} v_{k,m}) dv, \tag{4.1.6}$$

gde smo stavili

$$i^{lm} = I^{\alpha\beta} d^l_{\cdot(\alpha)} d^m_{\cdot(\beta)} = I^{KL} x^l_{;K} x^m_{;L}. \tag{4.1.7}$$

Izvod po vremenu kinetičke energije je

$$\dot{T} = \int_v \rho \left(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{ij} v_{i,j}\right) dv, \tag{4.1.8}$$

gde je

$$\Gamma^{ij} = i^{lj} \dot{v}^i_{,l}, \qquad (\dot{v}^i_{,l} = (\dot{v}^i)_{,l}), \tag{4.1.9}$$

inercijski spin. S obzirom da su $I^{\alpha\beta}$, odnosno I^{KL}, kao koeficijenti inercije materijalnih tačaka, konstante, iz (4.1.9) i (4.1.7) vidimo da je inercijski spin u potpunosti određen kretanjem materijalnih tačaka kontinuuma.

Izraz za kinetičku energiju (4.1.6) brzinu promene kinetičke energije (4.1.8) i inercijski spin (4.1.9) možemo neposredno dobiti iz odgovarajućih izraza za prosti kontinuum sa mikrostrukturom, ako umesto gradijenata mikrodeformacije $\chi^k_{\cdot K}$ pišemo gradijente deformcije $x^k_{;K}$ i umesto giracionog tenzora ν_{ij} pišemo gradijent brzine $v_{i,j}$.

4.2. Jednačina balansa energije i jednačine kretanja. Koristeći (4.1.4), jednačina balansa energije (2.5.14) postaje

$$\begin{aligned} &\int_v \rho \left(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{ij} v_{i,j}\right) dv + \int_v \rho\, \dot{u}\, dv = \int_v \rho \left(f^i v_i + l^{ij} v_{i,j}\right) dv + \\ &+ \int_v \left(t^{ik}_{\ ,k} v_i + t^{ik} v_{i,k} + h^{ijk}_{\ \ ,k} v_{i,j} + h^{ijk} v_{i,jk} + q^k_{\ ,k} + \rho h\right) dv. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Zahtevajući invarijantnost ove jednačine u odnosu na superponiranu brzinu translacije, dobijamo

$$\rho\, \dot{v}^i = t^{ij}_{\ ,j} + \rho f^i, \tag{4.2.2}$$

što je prvi Košijev zakon kretanja, koji predstavlja sistem od tri diferencijalne jednačine kretanja. Ako je prvi Košijev zakon kretanja zadovoljen, jednačina (4.2.1) se svodi na

$$\begin{aligned} &\int_v \rho \Gamma^{ij} v_{i,j}\, dv + \int_v \rho\, \dot{u}\, dv = \int_v \rho l^{ij} v_{i,j}\, dv + \\ &+ \int_v \left(t^{ij} v_{i,j} + h^{ijk}_{\ \ ,k} v_{i,j} + h^{ijk} v_{i,jk} + q^k_{\ ,k} + \rho h\right) dv. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Zahtevajući, dalje, invarijantnost ove jednačine u odnosu na superponiranu brzinu krute rotacije, dobijamo

$$t^{[ij]} + h^{[ij]k}_{\ \ \ ,k} + \rho \left(l^{[ij]} - \Gamma^{[ij]}\right) = 0, \tag{4.2.4}$$

što je drugi Košijev zakon kretanja, koji ne predstavlja nezavisni sistem diferencijalnih jednačina kretanja, jer je inercijski spin u potpunosti određen poljem brzine materijalnih taćaka kontinuuma.

Pretpostavljajući da je drugi Košijev zakon kretanja zadovoljen, jednačina (4.2.3) dobija oblik

$$\int_v \rho\, \dot{u}\, dv = \int_v \left(\tau^{ij} v_{i,j} + h^{ijk} v_{i,jk} + q^k_{,k} + \rho h\right) dv, \tag{4.2.5}$$

gde smo, s obzirom na (4.2.4), uveli oznaku

$$\tau^{ij} = t^{ij} + h^{ijk}_{\ ,k} + \rho\,(l^{ij} - \Gamma^{ij}) = \tau^{ji}. \tag{4.2.6}$$

Iz (4.2.5) dobijamo lokalnu jednačinu

$$\rho\,\dot{u} = \tau^{ij} v_{i,j} + h^{i(jk)} v_{i,jk} + q^{k}_{\ ,k} + \rho\,h, \tag{4.2.7}$$

što je jednačina balansa specifične unutrašnje energije, koja je invarijantnog oblika u odnosu na superponirana kruta kretanja. U toj jednačini ne figuriše eksplicitno tenzor napona t^{ij}. Iz nje vidimo da konstitutivnim jednačinama možemo odrediti tenzor τ^{ij} i samo simetrični deo $h^{i(jk)}$ tenzora h^{ijk}. Tenzor napona t^{ij} nije, dakle, nepospedno određen konstitutivnim jednačinama, već ga određujemo iz sistema algebarskih jednačina (4.2.6). Međutim, s obzirom da konstitutivnim jednačinama ne možemo odrediti sve koordinate tenzora h^{ijk}, već samo njegov deo $h^{i(jk)}$, iz (4.2.6) ne možemo odrediti ni sve koordinate tenzora napona t^{ij}. Neodređenost tenzora $h^{i[jk]}$ nema, međutim, uticaja u diferencijalnim jednačinama kretanja (4.2.2), jer je $h^{i[jk]}{}_{,jk} = 0$, premda se o tom delu mora voditi računa pri korektnoj formulaciji graničnih uslova, kao što su pokazali A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [15] i J L. BLEUSTEIN i A. E. GREEN [16]. Napominjemo da su granični uslovi i u ovom slučaju oblika (2.5.12),

Upoređujući jednačinu balansa specifične unutrašnje energije (4.2.7) sa odgovarajućom jednačinom (2.5.25) za prosti kontinuum sa mikrostrukturom, vidimo da se (4.2.7) neposredno dobija iz (2.5.25) stavljanjem $v_{i,j}$ umesto ν_{ij}. Ovo, međutim, ne znači da se dipolarni kontinuum može nazvati specijalni slučaj kontinuuma sa mikrostrukturom, jer dipolarni kontinuum ne uzima u obzir uticaj mikrosktrukture.

S obzirom da je deformacija direktora u potpunosti određena pomeranjima tačaka kontinuuma, dipolarni kontinuum ima tri lokalna stepena slobode. Za određivanje tri koordinate vektora pomeranja na raspolaganju nam je sistem od tri diferencijalne jednačine (4.2.2), pri čemu je tenzor napona t^{ij} određen sistemom algebarskih jednačina (4.2.6), dok τ^{ij} i $h^{i(jk)}$ određujemo iz konstitutivnih jednačina.

5. KONTINUUM REDA DVA

5.1. Model. Kontinuum reda dva posmatraćemo kao specijalni slučaj Kosera kontinuuma u kome su rotacije direktora ograničene u smislu da nisu nezavisne od pomeranja materijalnih tačaka. Kretanje ovakvog kontinuma u potpunosti je određeno, prema tome, pomeranjima tačaka kontinuuma, tj. jednačinama

$$x^k = x^k(X^K, t), \tag{5.1.1}$$

pri čemu su rotacije direktora određene relacijama

$$\dot{d}_{k(\alpha)} = \omega_{kl} \dot{d}^{l}_{.(\alpha)} = v_{[k,l]} \dot{d}^{l}_{.(\alpha)}. \tag{5.1.2}$$

S obzirom da se direktori samo rotiraju a ne i deformišu, jasno je da $d^{k}_{.(\alpha)}$ *nisu materijalni vektori.*

Iz (5.1.2) dobijamo

$$\omega_{kl} = \dot{d}_{k(\alpha)} d^{(\alpha)}_{.l}. \tag{5.1.3}$$

Rotacija direktora u svakoj tački kontinuuma određena je, prema tome, vrednošću tenzora vrtložnosti u odgovarajućoj tački.

Koristeći (5.1.2), iz (2.3.6) za kinetičku energiju dobijamo

$$2T = \int_v \rho\left(v^k v_k + i^{kl} \omega^{r}_{.k} \omega_{rl}\right) dv \tag{5.1.4}$$

gde je

$$i^{kl} = I^{\alpha\beta} d^{k}_{.(\alpha)} d^{l}_{.(\beta)}. \tag{5.1.5}$$

Izvod po vremenu kinetičke energije je

$$\dot{T} = \int_v \rho\,(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{ij} \omega_{ij})\, dv, \tag{5.1.6}$$

gde je

$$\Gamma^{ij} = i^{lj}\left(\dot{\overline{\omega^{i}_{.l}}} + \omega^{i}_{.r} \omega^{r}_{.l}\right) \tag{5.1.7}$$

inercijski spin koji je u potpunosti određen kretanjem tačaka kontinuuma.

Izraz za brzinu promene kinetičke energije (5.1.6) možemo neposredno dobiti iz odgovarajućeg izraza (2.3.9) za prosti kontinuum sa mikrostrukturom ako umesto ν_{ij} pišemo ω_{ij}. Jasno je, međutim da ni kontinuum reda dva ne uzima u obzir uticaj mikrostrukture, pa ga nije korektno smatrati za specijalni slučaj kontinuuma sa mikrostrukturom. Napomenimo još da se u većini teorija kontinuuma reda dva uticaj inercijkog spina zanemaruje.

5.2. Jednačina balansa energije i jednačine kretanja. Ako u jednačini balansa energije (2.5.9) stavimo $\dot{d}_{k(\alpha)} = \omega_{kl}\, d^{l}{}_{.(\alpha)}$, dobijamo

$$\begin{aligned} \int_v \rho\,(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{ij}\omega_{ij})\,dv + \int_v \rho\,\dot{u}\,dv = \oint_s (T^i ds - t^{ik} ds_k)\, v_i + \\ + \oint_s (H^{ij} ds - h^{ijk} ds_k)\,\omega_{ij} + \oint_s (q ds - q^k ds_k) + \int_v \rho (f^i v_i + l^{ij}\omega_{ij})\,dv + \\ + \int_v \left(t^{ik}{}_{,k}\, v_i + t^{ik}\, v_{i,k} + h^{ijk}{}_{,k}\,\omega_{ij} + h^{ijk}\,\omega_{ij,k} + q^k{}_{,k} + \rho\, h\right) dv. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

S obzirom da je tenzor vrtložnosti antisimetričan, doprinos u ovoj jednačini čine samo antisimetrični delovi tenzora Γ^{ij}, H^{ij}, l^{ij} i h^{ijk}. Iz tog razloga, bez gubljenja u opštosti, možemo uzeti da su antisimetrični, tj. da je $\Gamma^{ij} = -\Gamma^{ji}$, $H^{ij} = -H^{ji}$, $l^{ij} = -l^{ji}$ i $h^{ijk} = -h^{jik} = m^{ijk}$ gde je H^{ij} površinski ili naponski spreg, l^{ij} zapreminski spreg i m^{ijk} tenzor naponskih spregova.

Primenjujući jednačinu (5.2.1) na elementarni tetraedar, dobijamo granične uslove

$$T^i = t^{ij} n_j, \quad H^{ij} = m^{ijk} n_k, \quad q = q^k n_k, \tag{5.2.2}$$

pa se jednačina (5.2.1) svodi na

$$\begin{aligned} \int_v \rho\,(\dot{v}^k v_k + \Gamma^{ij}\omega_{ij})\,dv + \int_v \rho\,\dot{u}\,dv = \int_v \rho\,(f^i v_i + l^{ij}\omega_{ij})\,dv + \\ + \int_v \left(t^{ik}{}_{,k}\, v_i + t^{ik}\, v_{i,k} + m^{ijk}{}_{,k}\,\omega_{ij} + m^{ijk}\,\omega_{ij,k} + q^k{}_{,k} + \rho\, h\right) dv. \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Da bi ova jednačina bila invarijantnog oblika u odnosu na superponiranu brzinu translacije, mora biti

$$\rho\,\dot{v}^i = t^{ij}{}_{,j} + \rho f^i, \tag{5.2.4}$$

što je prvi Košijev zakon kretanja, koji predstavlja sistem od tri diferencijalne jednačine kretanja.

Pretpostavljajući da prvi Košijev zakon kretanja važi, jednačina (5.2.3) postaje

$$\begin{aligned} \int_v \rho\,\Gamma^{ij}\omega_{ij}\,dv + \int_v \rho\,\dot{u}\,dv = \int_v \rho\, l^{ij}\omega_{ij}\,dv + \\ + \int_v \left(t^{ij}\, v_{i,j} + m^{ijk}{}_{,k}\,\omega_{ij} + m^{ijk}\,\omega_{ij,k} + q^k{}_{,k} + \rho\, h\right) dv. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Da bi ova jednačina, dalje, bila invarijantnog oblika u odnosu na superponiranu brzinu krute rotacije, mora biti

$$t^{[ij]}+m^{ijk}{}_{,k}+\rho\,(l^{ij}-\Gamma^{ij})=0, \tag{5.2.6}$$

što je drugi Košijev zakon kretanja, koji ne predstavlja nezavisni sistem diferencijalnih jednačina kretanja, s obzirom da je inercijski spin u potpunosti određen kretanjem tačaka kontinuuma.

Koristeći (5.2.6), jednačina (5.2.5) postaje

$$\int_v \rho\,\dot{u}\,dv=\int_v \left(t^{(ij)}v_{i,j}+m^{ijk}\,\omega_{ij,k}+q^k{}_{,k}+\rho h\right)dv, \tag{5.2.7}$$

odakle dobijamo lokalnu jednačinu

$$\rho\,\dot{u}=t^{(ij)}d_{ij}+m^{ijk}\,\omega_{ij,k}+q^k{}_{,k}+\rho\,h,\quad (d_{ij}=v_{(i,j)}). \tag{5.2.8}$$

Ovo je jednačina balansa specifične unutrašnje energije koja je invarijtntnog oblika u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Iz jednačine (5.2.8) vidimo da doprinos promeni specifične unutrašnje energije čine simetrični deo tenzora napona i tenzor naponskih spregova. Međutim, s obzirom da gradijent tenzora vrtložnosti ima samo osam međusobno nezavisnih koordinata, jer između njih devet postoji veza

$$\varepsilon^{ijk}\,\omega_{ij,k}=0,$$

zaključujemo da ni celokupni tenzor naponskih spregova ne čini doprinos promeni specifične unutrašnje energije. Pošto je tenzor naponskih spregova antisimetričan po prva dva indeksa, možemo pisati

$$m^{ijk}\,\omega_{ij,k}=m^{ijk}\,v_{i,jk}$$

jer tenzor naponskih spregova antisimetrizuje drugi gradijent brzine po prva dva indeksa. Kako je, dalje, drugi gradijent brzine simetričan po druga dva indeksa, možemo pisati

$$m^{ijk}\,\omega_{ij,k}=m^{i(jk)}\,v_{i,jk}=m^{i(jk)}\,\omega_{ij,k},$$

tako da jednačinu balansa specifične unutrašnje energije možemo pisati u obliku

$$\rho\,\dot{u}=t^{(ij)}d_{ij}+m^{i(jk)}\,\omega_{ij,k}+q^k{}_{,k}+\rho\,h, \tag{5.2.9}$$

pri čemu simetrični deo $m^{i(jk)}$ tenzora naponskih spregova ima osam međusobno nezavisnih koordinata kao i gradijent tenzora vrtložnosti. Na ovaj način zaključujemo da doprinos promeni specifične unutrašnje energije čine samo simetrični deo tenzora napona i simetrični deo $m^{i(jk)}$ tenzora naponskih spregova, pa samo njih i možemo odrediti preko konstitutivnih jednačina. Neodređenost tenzora naponskih spregova, pa, prema tome, i antisimetričnog dela tenzora napona iz jednačine (5.2.6), nema, međutim, uticaja u diferencijalnim jednačinama kretanja (5.2.4), jer je očigledno $m^{i[jk]}{}_{,kj}=0$, ali o tom delu tenzora naponskih spregova, odnosno tenzora napona, mora se voditi računa pri korektnoj formulaciji graničnih uslova.

6. TERMODINAMIKA

6.1. Jednačina balansa entropije i disipativna funkcija. Jednačinu balansa specifične unutrašnje energije možemo napisati u obliku

$$\rho\, \dot{u} = \tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} + q^{k}_{\ ,k} + \rho\, h, \tag{6.1.1}$$

gde je $\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)}$ efekat mehaničkog rada koji se još naziva i *snaga napona.* Za posmatrane modele kontinuuma sa mikrostrukturom, mikropolarnog kontinuma, dipolarnog kontinuuma i kontinuuma reda dva, snaga napona je, respektivno,

$$\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} = t^{ij}\,(v_{i,j} - \nu_{ij}) + \tau^{ij}\, \nu_{(ij)} + h^{ijk}\, \nu_{ij,k}, \tag{6.1.2}$$

$$\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} = t^{ij}\, v_{i,j} - t^{[ij]}\, \nu_{ij} + m^{ijk}\, \nu_{ij,k}, \tag{6.1.3}$$

$$\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} = \tau^{ij}\, d_{ij} + h^{i(jk)}\, v_{i,jk}, \tag{6.1.4}$$

$$\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} = t^{(ij)}\, d_{ij} + m^{i(jk)}\, v_{i,jk}. \tag{6.1.5}$$

Ako veličine koje određuju naponsko stanje razložimo na zbir reverzibilnih i ireverzibilnih delova, tj. pišemo

$$\tau_{(a)} = {}_{E}\tau_{(a)} + {}_{D}\tau_{(a)}, \tag{6.1.6}$$

dobijamo

$$\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} = {}_{E}\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} + {}_{D}\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)}. \tag{6.1.7}$$

Ako, dalje, uvedemo oznaku

$${}_{E}\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} = \rho\dot{\sigma}, \tag{6.1.8}$$

gde je σ *energija deformacije* ili *elastični potencijal,* jednačina balansa specifične unutrašnje energije postaje

$$\rho\, \dot{u} = \rho\dot{\sigma} + {}_{D}\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} + q^{k}_{\ ,k} + \rho\, h \cdot \tag{6.1.9}$$

Ovu jednačinu, dalje, možemo napisati u obliku

$$\rho\, \dot{u} = \rho\dot{\sigma} + \rho\theta\dot{\eta}, \tag{6.1.10}$$

gde je θ apsolutna temperatura i gde je

$$\rho\theta\dot{\eta} = {}_{D}\tau_{(a)}\, \dot{v}^{(a)} + q^{k}_{\ ,k} + \rho\, h \tag{6.1.11}$$

jednačina balansa entropije.

Jednačinu (6.1.11) možemo napisati i u ekvivalentnom obliku

$$\rho\dot{\eta}=\frac{\rho h}{\theta}+\left(\frac{q^k}{\theta}\right)_{,k}+\frac{1}{\theta}\,{}_D\tau_{(a)}\dot{v}^{(a)}+\frac{q^k\theta_{,k}}{\theta^2}. \tag{6.1.12}$$

Prva dva člana na desnoj strani ove jednačine predstavljaju reverzibilni deo promene entropije,

$$\rho\,{}_E\dot{\eta}=\frac{\rho h}{\theta}+\left(\frac{q^k}{\theta}\right)_{,k}, \tag{6.1.13}$$

dok je izrazom

$$\rho\,{}_D\dot{\eta}=\frac{1}{\theta}\,{}_D\tau_{(a)}\dot{v}^{(a)}+\frac{q^k\theta_{,k}}{\theta^2} \tag{6.1.14}$$

određen ireverzibilni deo promene entropije koji se još naziva i *proizvodnja entropije*. Na osnovu drugog zakona termodinamike, proizvodnja entropije je jednaka nuli za reverzibilne procese i veća od nule za ireverzibilne procese,

$${}_D\dot{\eta}\geqslant 0. \tag{6.1.15}$$

Uvodeći disipativnu funkciju Φ,

$$\rho\Phi={}_D\tau_{(a)}\dot{v}^{(a)}+\frac{q^k\theta_{,k}}{\theta},\quad (\Phi=\theta\,{}_D\dot{\eta}) \tag{6.1.16}$$

drugi zakon termodinamike možemo formulisati i u obliku

$$\Phi\geqslant 0. \tag{6.1.17}$$

Ako uvedemo specifičnu slobodnu energiju ψ,

$$\psi=u-\theta\eta, \tag{6.1.18}$$

dobijamo

$$\rho\dot{\psi}=\rho\dot{u}-\rho\theta\dot{\eta}-\rho\eta\dot{\theta}, \tag{6.1.19}$$

ili, ako iskoristimo (6.1.10),

$$\rho\dot{\psi}=\rho\dot{\sigma}-\rho\eta\dot{\theta}, \tag{6.1.20}$$

što je jednačina balansa specifične slobodne energije.

6.2. Mehanički reverzibilni procesi. U slučaju kada veličine koje karakterišu naponsko stanje nemaju ireverzibilnih delova, tj. kada je

$${}_D\tau_{(a)}=0, \tag{6.2.1}$$

za proces kažemo da je *mehanički reverzibilan*. U tom slučaju iz (6.1.9) dobijamo jednačinu balansa specifične unutrašnje energije u obliku

$$\rho\dot{u}=\rho\dot{\sigma}+q^k_{,k}+\rho h, \tag{6.2.2}$$

a iz (6.1.11) jednačinu balansa entropije u obliku

$$\rho\theta\dot{\eta}=q^k_{,k}+\rho h. \tag{6.2.3}$$

Kod mehanički reverzibilnih procesa nema disipacije mehaničke energije, pa, s obzirom na (6.2.1), iz (6.1.16) za disipativnu funkciju dobijamo

$$\rho\Phi = \frac{q^k \theta_{,k}}{\theta} \geqslant 0. \tag{6.2.4}$$

Disipacija enegrije je, prema tome, posledica postojanja ireverzibilnih procesa izazvanih samo toplotnim provođenjem. Iz tog razloga se ovakvi materijali, čije je ponašanje mehanički reverzibilno, nazivaju *termoelastični materijali.*

6.3. Potpuno reverzibilni procesi. Ako u nekom procesu nema disipacije energije kažemo da je on potpuno reverzibilan. U tom slučaju je disipativna funkcija jednaka nuli, pa iz (6.1.10), koristeći (6.1.12) i (6.1.16), dobijamo jednačinu balansa specifične unutrašnje energije u obliku

$$\rho\, \dot{u} = \rho\dot{\sigma} + \rho\, h + \theta \left(\frac{q^k}{\theta}\right)_{,k}, \tag{6.3.1}$$

a jednačinu balansa entropije u obliku

$$\rho\dot{\eta} = \frac{\rho\, h}{\theta} + \left(\frac{q^k}{\theta}\right)_{,k}. \tag{6.3.2}$$

Na osnovu (6.1.13) vidimo da je ovom jednačinom određena promena samo reverzibilnog dela entropije, jer je proizvodnja entropije jednaka nuli.

Iz izraza za disipativnu funkciju (6.2.4) vidimo da će ona biti jednaka nuli u dva posebna slučaja: 1) kad je $q^k = 0$, u kom slučaju nema razmene toplotne energije sa okolnom sredinom, i 2) kad je $\theta_{,k} = 0$ ili $\theta = \mathrm{const.}$ Prvi slučaj odgovara *adijabatskim*, a drugi *izotermičkim procesima.* (Slučaj kada je vektor $\vec{q}$ upravan na vektoru $\mathrm{grad}\,\theta$ moramo iz fizičkih razloga odbaciti).

Kod adijabatskih procesa, s obzirom da je $q^k = 0$, jednačina balansa entropije (6.3.2) se svodi na

$$\dot{\eta} = \frac{h}{\theta}, \tag{6.3.3}$$

a ako uzmemo da je i $h = 0$, dobijamo

$$\dot{\eta} = 0, \tag{6.3.4}$$

pa jednačina balansa specifične unutrašnje energije postaje

$$\rho\, \dot{u} = \rho\dot{\sigma}. \tag{6.3.5}$$

Odavde zaključujemo da se kod adijabatskih procesa specifična unutrašnja energija može posmatrati kao specifična energija deformacije: $u = \sigma$.

Kod izotermičkih procesa, s obzirom da je $\theta = \mathrm{const.}$, jednačina balansa specifične unutrašnje energije ostaje oblika (6.2.2), a jednačina balansa entropije oblika (6.2.3). Međutim, uvodeći slobodnu energiju, iz (6.1.20) dobijamo

$$\rho\dot{\psi} = \rho\dot{\sigma}, \tag{6.3.6}$$

pa vidimo da se specifična slobodna energija može posmatrati kao specifična energija deformacije: $\psi = \sigma$.

Materijali čije je ponašanje potpuno reverzibilno nazivaju se *elastični materijali.* Za izvođenje konstitutivnih jednačina za elastične materijale uvek možemo koristiti specifičnu energiju deformacije: kod adijabatskih procesa to je specifična unutrašnja energija, a kod izotermičkih-specifična slobodna energija.

7. PROSTI TERMOELASTIČNI MATERIJALI SA MIKROSTRUKTUROM

7.1. Disipativna funkcija i termodinamičke sile. U termoelastičnosti se pretpostavlja da veličine koje karakterišu naponsko stanje nemaju ireverzibilnih delova. Disipativna funkcija je u tom slučaju oblika (6.2.4) i možemo je izraziti na sledeći način:

$$\rho\,\Phi = Q_{(a)}\,\dot{q}^{(a)}, \tag{7.1.1}$$

gde su $Q_{(a)}$ ireverzibilne termodinamičke sile, a $\dot{q}^{(a)}$ odgovarajuće generalisane brzine. U ovom slučaju kao ireverzibilnu termodinamičku silu možemo uzeti $\frac{\theta_{,k}}{\theta}$, a kao odgovarajuću generalisanu brzinu q^k.

Da bismo uspostavili relaciju između ireverzibilnih termodinamičkih sila i odgovarajućih generalisanih brzina, možemo iskoristiti Onzagerove konstitutivne jednačine (videti, na pr. [17]), koje određuju linearnu vezu između generalisanih brzina i termodinamičkih ireverzibilnih sila:

$$\dot{q}^{(a)} = L^{(ab)}\,Q_{(b)}, \tag{7.1.2}$$

gde su $L^{(ab)} = L^{(ba)}$ Onzagerovi simetrični fenomenološki koeficijenti. Opštiji prilaz, za dobijanje nelinearnih konstitutivnih jednačina, predložio je H. Ziegler [18], formulacijom principa najmanje ireverzibilne sile. Koristeći taj princip, ireverzibilne termodinamičke sile, izražene preko generalisanih brzina, su

$$Q_{(a)} = \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}^{(b)}}\dot{q}^{(b)}\right)^{-1}\Phi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}^{(a)}}, \tag{7.1.3}$$

pri čemu je

$$\Phi = \Phi\left(\frac{\theta_{,k}}{\theta}\right), \tag{7.1.4}$$

gde sada $\frac{\theta_{,k}}{\theta}$ interpretiramo kao generalisanu brzinu, a q^k kao ireverzibilnu termodinamičku silu. Koristeći (7.1.3) i (7.1.4), dobijamo

$$q^k = \lambda\,\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\frac{\theta_{,k}}{\theta}\right)}, \tag{7.1.5}$$

gde je uvedena oznaka

$$\lambda = \rho\Phi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{\theta_{,l}}{\theta}\right)}\frac{\theta_{,l}}{\theta}\right)^{-1}. \tag{7.1.6}$$

Jednačina (7.1.5) predstavlja nelinearnu konstitutivnu jednačinu za određivanje vektora toplotnog fluksa.

7.2. Slobodna energija i konstitutivne jednačine. Jednačina balansa specifične slobodne energije, na osnovu (6.2.0), (6.1.1), (6.1.8) i (6.1.2), je

$$\rho\dot{\psi} = t^{ij}(v_{i,j} - \nu_{ij}) + \tau^{ij}\nu_{(ij)} + h^{ijk}\nu_{ij,k} - \rho\eta\dot{\theta}. \tag{7.2.1}$$

Koristeći (2.2.25), ovu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}\rho\dot{\psi} = t^{ij}X^K_{;j}\dot{x}_{i;K} + [(\tau^{ij} - t^{ij})\,d^{(\alpha)}_{.j} + h^{ijk}X^K_{;k}\,d^{(\alpha)}_{.j;K}]\,\dot{d}_{i(\alpha)} + \\ + h^{ijk}X^K_{;k}\,d^{(\alpha)}_{.j}\,\dot{d}_{i(\alpha);K} - \rho\eta\dot{\theta},\end{aligned} \tag{7.2.2}$$

odakle zaključujemo da je specifična slobodna energija funkcija oblika

$$\psi = \psi\left(x^k_{;K},\ d^k_{.(\alpha)},\ d^k_{.(\alpha);K},\ \theta\right). \tag{7.2.3}$$

Diferenciranjem po vremenu izraza (7.2.3) i izjednačavanjem koeficijenata uz nezavisne brzine $\dot{x}^k_{;K}$, $\dot{d}^k_{.(\alpha)}$, $\dot{d}^k_{.(\alpha);K}$ i $\dot{\theta}$ u tako dobijenoj jednačini i jednačini (7.2.2), dobijamo nelinearne konstitutivne jednačine

$$\begin{aligned}
t^{ij} &= \rho g^{il}\frac{\partial\psi}{\partial x^l_{;K}}x^j_{;K} \\
\tau^{ij} &= \rho g^{il}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^l_{;K}}x^j_{;K} + \frac{\partial\psi}{\partial d^l_{.(\alpha)}}d^j_{.(\alpha)} + \frac{\partial\psi}{\partial d^l_{.(\alpha);K}}d^j_{.(\alpha);K}\right), \\
h^{ijk} &= \rho g^{il}\frac{\partial\psi}{\partial d^l_{.(\alpha);K}}d^j_{.(\alpha)}\,x^k_{;K}, \\
\eta &= -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.
\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

Međutim, da bi drugi Košijev zakon kretanja (2.5.21) bio zadovoljen, tj. da bi tenzor τ^{ij} bio simetričan, desna strana jednačine $(7.2.4)_2$, mora zadovoljavati uslov

$$\left[g^{il}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^l_{;K}}x^j_{;K} + \frac{\partial\psi}{\partial d^l_{.(\alpha)}}d^j_{.(\alpha)} + \frac{\partial\psi}{\partial d^l_{.(\alpha);K}}d^j_{.(\alpha)K}\right)\right]_{[ij]} = 0. \tag{7.2.5}$$

Ovaj sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine, koji mora zadovoljavati funkcija slobodne energije, predstavlja *uslov objektivnosti* (uslov invarijantnosti u odnosu na superponirana kruta kretanja) za funkciju slobodne energije (7.2.3) i konstitutivne jednačine (7.2.4).

Koristeći relacije

$$d^j_{\cdot(\alpha)}=\chi^j_{\cdot K}\,D^K_{\cdot(\alpha)}\,,\qquad d^j_{\cdot(\alpha);\,K}=\chi^j_{\cdot L;\,K}\,D^L_{\cdot(\alpha)}\,,$$

konstitutivne jednačine (7.2.4) možemo napisati i u obliku

$$\begin{aligned}
t^{ij}&=\rho\, g^{il}\frac{\partial\psi}{\partial x^l_{;K}}x^j_{;K}\,,\\
\tau^{ij}&=\rho\, g^{il}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^l_{;K}}x^j_{;K}+\frac{\partial\psi}{\partial\chi^l_{\cdot K}}\chi^j_{\cdot K}+\frac{\partial\psi}{\partial\chi^l_{\cdot L;\,K}}\chi^j_{\cdot L;\,K}\right),\\
h^{ijk}&=\rho\, g^{il}\frac{\partial\psi}{\partial\chi^l_{\cdot L;\,K}}\chi^j_{\cdot L}\,x^k_{;K}\,,\\
\eta&=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,,
\end{aligned}\tag{7.2.6}$$

pri čemu je specifična slobodna energija sada funkcija oblika

$$\psi=\psi\left(x^k_{;K},\ \chi^k_{\cdot K},\ \chi^k_{\cdot L;\,K},\ \theta\right),\tag{7.2.7}$$

a uslov objektivnosti (7.2.5) je oblika

$$\left[g^{il}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^l_{;K}}x^j_{;K}+\frac{\partial\psi}{\partial\chi^l_{\cdot K}}\chi^j_{\cdot K}+\frac{\partial\psi}{\partial\chi^l_{\cdot L;\,K}}\chi^j_{\cdot L;\,K}\right)\right]_{[ij]}=0.\tag{7.2.8}$$

S obzirom da je specifična slobodna energija funkcija od 46 nezavisno promenljivih $x^k_{;K}$, $\chi^k_{\cdot K}$, $\chi^k_{\cdot L;\,K}$ i θ, sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine (7.2.8) ima stoga $46-3=43$ osnovna (međusobno nezavisna) integrala. Opšte rečenje sistema (7.2.8) biće, prema tome, proizvoljna funkcija osnovnih integrala.

7.3. Materijalne mere deformacije i nelinearne konstitutivne jednačine za anizotropne materijale. Postoji više mogućnosti za izbor osnovnih integrala sistema (7.2.8). Mi ćemo uzeti sledeće:

$$\begin{aligned}
\Psi_{KL}&=g_{kl}\,\chi^k_{\cdot K}\,\chi^l_{\cdot L}\,,\\
\Sigma_{KL}&=\chi_{Kk}\,x^k_{;L}\,,\\
D_{KLM}&=\chi_{Kk}\,\chi^k_{\cdot L;\,M}\,,
\end{aligned}\tag{7.3.1}$$

tako da sistem (7.2.8) ima opšte rešenje

$$\psi=\psi\left(\Psi_{KL},\ \Sigma_{KL},\ D_{KLM},\ \theta\right).\tag{7.3.2}$$

Koristeći (7.3.2) i (7.3.1), iz (7.2.4) dobijamo

$$
\begin{aligned}
t^{ij} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \Sigma_{KL}} \chi_K^{\cdot i} x^j_{;L}, \\
\tau^{ij} &= 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \Psi_{KL}} \chi^i_{\cdot K} \chi^j_{\cdot L}, \\
h^{ijk} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial D_{KLM}} \chi_K^{\cdot i} \chi^j_{\cdot L} x^k_{;M}, \\
\eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}.
\end{aligned}
\tag{7.3.3}
$$

Ovo su nelinearne konstitutivne jednačine za proste anizotropne termoelastične materijale sa mikrostrukturom i invarijantnog su oblika u odnosu na superpronirana kruta kretanja.

Da bismo objasnili izbor osnovnih integrala (7.3.1), postupićemo na sledeći način. U jednačini balansa specifične slobodne energije (7.2.1) tenzori $v_{i,j} - \nu_{ij}$, $\nu_{(ij)}$, $\nu_{ij,k}$ i θ su svi objektivni, tj. invarijantnog su oblika u odnosu na superponirana kruta kretanja. Koristeći relacije

$$
\nu_{ij} = \dot{d}_{i(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot j} = \dot{\chi}_{iK} \chi^K_{\cdot j}, \quad v_{i,j} = \dot{x}_{i;K} X^K_{;j},
$$

dobijamo

$$
\begin{aligned}
\nu_{(ij)} &= \frac{1}{2} (\dot{\chi}_{iK} \chi^K_{\cdot j} + \dot{\chi}_{jK} \chi^K_{\cdot i}) = \frac{1}{2} (\dot{\chi}_{kK} \chi^k_{\cdot L} \chi^L_{\cdot i} \chi^K_{\cdot j} + \dot{\chi}_{kK} \chi^k_{\cdot L} \chi^L_{\cdot j} \chi^K_{\cdot i}) = \\
&= \frac{1}{2} (\dot{\chi}_{kK} \chi^k_{\cdot L} + \dot{\chi}_{kL} \chi^k_{\cdot K}) \chi^K_{\cdot j} \chi^L_{\cdot i} = \frac{1}{2} \overline{\chi_{kK} \chi^k_{\cdot L}}^{\cdot} \chi^K_{\cdot j} \chi^L_{\cdot i},
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\nu_{(ij)} = \frac{1}{2} \dot{\Psi}_{KL} \chi^K_{\cdot j} \chi^L_{\cdot i}, \tag{7.3.4}
$$

gde je

$$
\Psi_{KL} = \chi_{kK} \chi^k_{\cdot L}.
$$

Na sličan način dobijamo

$$
v_{i,j} - \nu_{ij} = \dot{\Sigma}_{KL} \chi^K_{\cdot i} X^L_{;j}, \tag{7.3.5}
$$

$$
\nu_{ij,k} = \dot{D}_{KLM} \chi^K_{\cdot i} \chi^L_{\cdot j} X^M_{;k}, \tag{7.3.6}
$$

gde je

$$
\Sigma_{KL} = \chi_{Kk} x^k_{;L},
$$

$$
D_{KLM} = \chi_{Kk} \chi^k_{\cdot L;M}.
$$

Zamenjujući sada (7.3.4), (7.3.5) i (7.3.6) u (7.2.1), dobijamo

$$
\rho \dot{\psi} = t^{ij} \chi^K_{\cdot i} X^L_{;j} \dot{\Sigma}_{KL} + \frac{1}{2} \tau^{ij} \chi^K_{\cdot i} \chi^L_{\cdot j} \dot{\Psi}_{KL} + h^{ijk} \chi^K_{\cdot i} \chi^L_{\cdot j} X^M_{;k} \dot{D}_{KLM} - \rho \eta \dot{\theta}, \tag{7.3.7}
$$

odakle zaključujemo da je specifična slobodna energija funkcija oblika

$$\psi=\psi(\Psi_{KL},\ \Sigma_{KL},\ D_{KLM},\ \theta).$$

Specifična slobodna energija, kao funkcija materijalnih tenzora Ψ_{KL}, Σ_{KL} i D_{KLM} i temperature θ, je objektivna funkcija. Stoga te veličine predstavljaju minimalnu integralnu bazu za specifičnu slobodnu energiju.

Diferenciranjem poslednjeg izraza po vremenu, dobijamo

$$\dot{\psi}=\frac{\partial\psi}{\partial\Psi_{KL}}\dot{\Psi}_{KL}+\frac{\partial\psi}{\partial\Sigma_{KL}}\dot{\Sigma}_{KL}+\frac{\partial\psi}{\partial D_{KLM}}\dot{D}_{KLM}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta}. \tag{7.3.8}$$

Upoređivanjem ovog izraza sa (7.3.7), dobijamo konstitutivne jednačine (7.3.3), koje su invarijantnog oblika u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Ako umesto tenzora Ψ_{KL} i Σ_{KL} uvedemo sledeće materijalne mere deformacije:

$$2F_{KL}=\Psi_{KL}-G_{KL},\quad \in_{KL}=\Sigma_{KL}-G_{KL}; \tag{7.3.9}$$

konstitutivne jednačine (7.3.3) dobijaju oblik

$$\begin{aligned}
t^{ij}&=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\in_{KL}}\chi_{K}^{\cdot i}x^{j}_{;L},\\
\tau^{ij}&=\rho\frac{\partial\psi}{\partial F_{KL}}\chi^{i}_{\cdot K}\chi^{j}_{\cdot L},\\
h^{ijk}&=\rho\frac{\partial\psi}{\partial D_{KLM}}\chi_{K}^{\cdot i}\chi^{j}_{\cdot L}x^{k}_{;M},\\
\eta&=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.
\end{aligned} \tag{7.3.10}$$

Materijalne mere deformacije možemo izraziti na pogodan način ako uvedemo *vektore direktorskog pomeranja* $\varphi^{k}_{\cdot(\alpha)}$, tj. stavimo da je

$$d^{k}_{\cdot(\alpha)}=g^{k}_{K}D^{K}_{\cdot(\alpha)}+\varphi^{k}_{\cdot(\alpha)}=D^{k}_{\cdot(\alpha)}+\varphi^{k}_{\cdot(\alpha)}; \tag{7.3.11}$$

Množenjem sa $D^{(\alpha)}_{\cdot K}$, odavde dobijamo

$$\chi^{k}_{\cdot K}=g^{k}_{K}+\varphi^{k}_{\cdot K},\quad (\varphi^{k}_{\cdot K}=\varphi^{k}_{\cdot(\alpha)}D^{(\alpha)}_{\cdot K}) \tag{7.3.12}$$

Iz (7.3.11) sledi

$$D^{K}_{\cdot(\alpha)}=g^{K}_{k}d^{k}_{\cdot(\alpha)}-\varphi^{K}_{\cdot(\alpha)}=d^{K}_{\cdot(\alpha)}-\varphi^{K}_{\cdot(\alpha)}, \tag{7.3.13}$$

a odavde, množenjem sa $d^{(\alpha)}_{\cdot k}$,

$$\chi^{K}_{\cdot k}=g^{K}_{k}-\varphi^{K}_{\cdot k},\quad (\varphi^{K}_{\cdot k}=g^{K}_{l}\varphi^{l}_{\cdot(\alpha)}d^{(\alpha)}_{\cdot k}). \tag{7.3.14}$$

Iz (7.3.12) i (7.3.14) vidimo da su gradijenti mikrodeformacije $\chi^{k}_{\cdot K}$ i $\chi^{K}_{\cdot k}$ povezani sa gradijentima *mikropomeranja* $\varphi^{k}_{\cdot K}$ i $\varphi^{K}_{\cdot k}$ na isti način kao i gradijenti deformacije sa gradijentima vektora pomeranja, tj.

$$x^{k}_{;K}=g^{k}_{K}+u^{k}_{;K},\quad X^{K}_{;k}=g^{K}_{k}-u^{K}_{;k}. \tag{7.3.15}$$

S obzirom na relacije

$$d^{k}_{\cdot(a)} d^{(a)}_{\cdot l} = \chi^{k}_{\cdot K} \chi^{K}_{\cdot l} = \delta^{k}_{l}, \quad D^{K}_{\cdot(a)} D^{(a)}_{\cdot L} = \chi^{K}_{\cdot k} \chi^{k}_{\cdot L} = \delta^{K}_{L},$$

lako je pokazati da između materijalnih i prostornih gradijenata mikropomeranja, $\varphi^{k}_{\cdot K}$ i $\varphi^{K}_{\cdot k}$, mogu da se uspostave veze:

$$\varphi^{K}_{\cdot L} = \varphi^{k}_{\cdot L} g^{K}_{k} = \varphi^{K}_{\cdot l} g^{l}_{L} + \varphi^{K}_{\cdot l} \varphi^{l}_{\cdot L} = \varphi^{K}_{\cdot l} g^{l}_{L} + \varphi^{K}_{\cdot M} \varphi^{M}_{\cdot l} g^{l}_{L} = \varphi^{K}_{\cdot l} \chi^{l}_{\cdot L}, \tag{7.3.16}$$

$$\varphi^{k}_{\cdot l} = g^{k}_{K} \varphi^{K}_{\cdot l} = \varphi^{k}_{\cdot L} g^{L}_{l} - \varphi^{k}_{\cdot L} \varphi^{L}_{\cdot l} = \varphi^{k}_{\cdot L} g^{L}_{l} - \varphi^{k}_{\cdot m} \varphi^{m}_{\cdot L} g^{L}_{l} = \varphi^{k}_{\cdot L} \chi^{L}_{\cdot l}. \tag{7.3.17}$$

Materijalne tenzore deformacije F_{KL}, $\in_{KL}$ i D_{KLM}, koji figurišu u konstitutivnim jednačinama (7.3.10), možemo izraziti u obliku

$$\begin{aligned} 2F_{KL} &= \varphi_{KL} + \varphi_{LK} + \varphi_{MK} \varphi^{M}_{\cdot L}, \\ \in_{KL} &= u_{K,L} - \varphi_{KL} - (u_{M,L} - \varphi_{ML}) \varphi_{Kk} g^{Mk}, \\ D_{KLM} &= \varphi_{KL,M} - \varphi_{SL,M} \varphi_{Kk} g^{Sk}. \end{aligned} \tag{7.3.18}$$

pri čemu smo iskoristili relacije (7.3.1), (7.3.9), (7.3.12), (7.3.14), (7.3.16) i (7.3.17).

Za infinitezimalne deformacije, kada su gradijenti vektora pomeranja i gradijenti mikropomeranja po apsolutnoj vrednosti male veličine, u linearnoj teoriji gornji tenzori deformacije su oblika

$$\begin{aligned} F_{KL} &= \frac{1}{2} (\varphi_{KL} + \varphi_{LK}) = \varphi_{(KL)}, \\ \in_{KL} &= u_{K,L} - \varphi_{KL}, \\ D_{KLM} &= \varphi_{KL,M}. \end{aligned} \tag{7.3.19}$$

Nelinearne konstitutivne jednačine za anizotropne termoelastične proste materijale sa mikrostrukturom (7.3.10), sa materijalnim tenzorima deformacije oblika (7.3.18), zadovoljavaju princip objektivnosti. Dalja njihova redukcija, međutim, zavisi od materijalnih simetrija. Za posebne klase materijalnih simetrija petrebno je, naime, određivati minimalne integralne baze funkcije specifične slobodne energije, čime se dalje ograničava funkcionalna zavisnost (7.3.2). Određivanjem minimalnih integralnih baza omogućava se, zatim, pisanje konstitutivnih jednačina za posebne klase materijalnih simetrija. Na tome se, međutim, ovde nećemo zadržavati, već ćemo odmah preći na slučaj izotropnih materijala.

7.4. Prostorne mere deformacije i nelinearne konstitutivne jednačine za izotropne materijale. Kod izotropnih materijala možemo uvesti sledeće prostorne tenzore deformacije

$$\begin{aligned} \psi_{kl} &= G_{KL} \chi^{K}_{\cdot k} \chi^{L}_{\cdot l}, \\ \sigma_{kl} &= \chi_{kK} X^{K}_{;l} \\ d_{klm} &= \chi_{kK;m} \chi^{K}_{\cdot l} = -\chi_{kK} \chi^{K}_{\cdot l;m}, \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

tako da je specifična slobodna energija funkcija oblika

$$\psi = \psi(\psi_{kl}, \sigma_{kl}, d_{klm}, \theta). \tag{7.4.2}$$

Zamenjući (7.4.2) u (7.2.4) i koristeći (7.4.1), dobijamo

$$
\begin{aligned}
t^{ij} &= -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{kj}} \sigma_k^{\cdot i} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_{klj}} d_{kl}^{\cdot\cdot i}, \\
\tau^{ij} &= -2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \psi_{jk}} \psi^i_{\cdot k} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ik}} \sigma^j_{\cdot k} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{kj}} \sigma_k^{\cdot i} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_{ilm}} d^j_{\cdot lm} - \\
&\quad - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_{kjm}} d_{k\cdot m}^{\cdot i} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_{klj}} d_{kl}^{\cdot\cdot i}, \\
h^{ijk} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_{ijk}}, \\
\eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}.
\end{aligned}
\tag{7.4.3}
$$

Ovo su nelinearne konstitutivne jednačine za izotropne proste termoelastične materijale sa mikrostrukturom. One, međutim, ne zadovoljavaju princip objektivnosti. Da bi taj princip bio zadovoljen, tj. da bi drugi Košijev zakon kretanja (2.5.21) bio zadovoljen, desna strana jednačine $(7.4.3)_2$ mora zadovoljavati uslov

$$
\begin{aligned}
&\left(2 \frac{\partial \psi}{\partial \psi_{jk}} \psi^i_k - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ik}} \sigma^j_{\cdot k} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{kj}} \sigma_k^{\cdot i} - \frac{\partial \psi}{\partial d_{ilm}} d^j_{\cdot lm} + \right. \\
&\left. + \frac{\partial \psi}{\partial d_{kjm}} d_{k\cdot m}^{\cdot i} + \frac{\partial \psi}{\partial d_{klj}} d_{kl}^{\cdot\cdot i} \right)_{[ij]} = 0.
\end{aligned}
\tag{7.4.4}
$$

Ovaj sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine nameće ograničenje funkciji specifične slobodne energije (7.4.2), odnosno konstitutivnim jednačinama (7.4.3). To ograničenje se sastoji u tome da funkcija slobodne specifične energije može zavisiti od navedenih prostornih tenzora samo preko međusobno nezavisnih invarijanata koje se od njih mogu formirati.

Ako umesto tenzora ψ_{kl} i σ_{kl} uvedemo sledeće prostorne tenzore relativne deformacije

$$
\begin{aligned}
2f_{kl} &= g_{kl} - \psi_{kl} = g_{kl} - G_{KL} \chi^K_{\cdot k} \chi^L_{\cdot k}, \\
\varepsilon_{kl} &= g_{kl} - \sigma_{kl} = g_{kl} - \chi_{kK} X^K_{;l},
\end{aligned}
\tag{7.4.5}
$$

konstitutivne jednačine (7.4.3) postaju

$$
\begin{aligned}
t^{ij} &= \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{kj}} \varepsilon_k^{\cdot i} - \frac{\partial \psi}{\partial d_{klj}} d_{kl}^{\cdot\cdot i} \right), \\
\tau^{ij} &= \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial f_{ij}} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial f_{jk}} f^i_k + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ik}} \varepsilon^j_{\cdot k} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{kj}} \varepsilon_k^{\cdot i} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \psi}{\partial d_{ilm}} d^j_{\cdot lm} - \frac{\partial \psi}{\partial d_{kjm}} d_{k\cdot m}^{\cdot i} - \frac{\partial \psi}{\partial d_{klj}} d_{kl}^{\cdot\cdot i} \right), \\
h^{ijk} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_{ijk}}, \\
\eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta},
\end{aligned}
\tag{7.4.6}
$$

pri čemu, kao uslov objektivnosti, mora biti

$$\left(-2\frac{\partial\psi}{\partial f_{jk}}f^{i}_{k}+\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ik}}\varepsilon^{j}_{\cdot k}-\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{kj}}\varepsilon_{k}^{\cdot i}+\frac{\partial\psi}{\partial d_{ilm}}d^{j}_{\cdot lm}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\psi}{\partial d_{kjm}}d_{k\cdot m}^{\cdot i}-\frac{\partial\psi}{\partial d_{klj}}d_{kl}^{\cdot\cdot i}\right)_{[ij]}=0. \tag{7.4.7}$$

Tenzore deformacije f_{kl}, ε_{kl} i d_{klm}, koji figurišu u konstitutivnim jednačinama (7.4.6), možemo, koristeći (7.3.12), (7.3.14), (7.3.15), (7.3.17), (7.4.1) i (7.4.5), izraziti u obliku

$$\begin{aligned}
2f_{kl}&=\varphi_{kl}+\varphi_{lk}-\varphi_{mk}\varphi^{m}_{\cdot l},\\
\varepsilon_{kl}&=u_{k,l}-\varphi_{kl}+(u_{m,l}-\varphi_{ml})\varphi_{kK}g^{mK},\\
d_{klm}&=\varphi_{kl,m}+\varphi_{rl,m}\varphi_{kK}g^{rK}.
\end{aligned}\tag{7.4.8}$$

Za slučaj infinitezimalnih deformacija, kada su gradijenti vektora pomeranja i gradijenti mikropomeranja po apsolutnoj vrednosti male veličine, u linearnoj teoriji ovi tenzori su oblika

$$\begin{aligned}
f_{kl}&=\frac{1}{2}(\varphi_{kl}+\varphi_{lk})=\varphi_{(kl)},\\
\varepsilon_{kl}&=u_{k,l}-\varphi_{kl},\\
d_{klm}&=\varphi_{kl,m}.
\end{aligned}\tag{7.4.9}$$

Između materijalnih tenzora deformacije (7.3.18) i prostornih (7.4.8) mogu se uspostaviti sledeće veze:

$$\begin{aligned}
F_{KL}&=f_{kl}\chi^{k}_{\cdot K}\chi^{l}_{\cdot L}, & f_{kl}&=F_{KL}\chi^{K}_{\cdot k}\chi^{L}_{\cdot l},\\
\in_{KL}&=\varepsilon_{kl}\chi_{K}^{\cdot k}x^{l}_{;L}, & \varepsilon_{kl}&=\in_{KL}\chi_{k}^{\cdot K}X^{L}_{;l},\\
D_{KLK}&=d_{klm}\chi_{K}^{\cdot k}\chi^{l}_{\cdot L}x^{m}_{;M}, & d_{klm}&=D_{KLM}\chi_{k}^{\cdot K}\chi^{L}_{\cdot l}X^{M}_{;m}.
\end{aligned}\tag{7.4.10}$$

7.5. Linearne konstitutivne jednačine za izotropne materijale. U linearnoj teoriji, izostavljanjem nelinearnih članova u jednačinama (7.4.6), konstitutivne jednačine su obika

$$\begin{aligned}
t^{ij}&=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}},\\
\tau^{ij}&=\rho\frac{\partial\psi}{\partial f_{ij}},\\
h^{ijk}&=\rho\frac{\partial\psi}{\partial d_{ijk}},\\
\eta&=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta},
\end{aligned}\tag{7.5.1}$$

pri čemu su tenzori deformacije oblika (7.4.9) i specifična slobodna energija funkcija oblika

$$\psi=\psi(\varepsilon_{ij},\ f_{ij},\ d_{ijk},\ \theta). \tag{7.5.2}$$

U prethodnim jednačinama kao nezavisno promenljiva figuriše i apsolutna temperatura θ. Da bismo, međutim, omogućili linearizaciju u slučaju infinitezimalnih deformacija, pretpostavićemo da je promena temperature mala u odnosu na referentnu temperaturu, tj stavićemo da je

$$\theta=\theta_0+T,\quad |T|\ll\theta_0\quad \theta_0>0, \tag{7.5.3}$$

gde je θ_0 neka referentna temperatura, a T priraštaj temperature u odnosu na referentnu temperaturu. S obzirom da je $\theta_0=\text{const.}$, možemo uzeti da je specifična slobodna energija funkcija oblika

$$\psi=\psi(\varepsilon_{ij},\ f_{ij},\ d_{ijk},\ T). \tag{7.5.4}$$

Pretpostavljamo da je ovo neprekidna i diferencijabilna funkcija svojih agrumenata, tako da je možemo razviti u stepeni red. U slučaju kada nema inicijalnih napona, specifičnu slobodnu energiju predstavljamo, u linearnoj teoriji, kvadratnim polinomom oblika

$$\begin{aligned}\rho\psi=&\frac{1}{2}\alpha T^2+A^{ij}\varepsilon_{ij}T+B^{ij}f_{ij}T+\frac{1}{2}C^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\\&+D^{ijkl}\varepsilon_{ij}f_{kl}+\frac{1}{2}E^{ijkl}f_{ij}f_{kl}+\frac{1}{2}F^{ijklmn}d_{ijk}d_{lmn},\end{aligned} \tag{7.5.5}$$

gde su

$$\begin{aligned}&A^{ij}=ag^{ij},\\&B^{ij}=bg^{ij},\\&C^{ijkl}=\nu_1 g^{ij}g^{kl}+\nu_2 g^{ik}g^{jl}+\nu_3 g^{il}g^{jk},\\&D^{ijkl}=\lambda_1 g^{ij}g^{kl}+\mu_1(g^{ik}g^{jl}+g^{il}g^{jk}),\\&E^{ijkl}=\lambda g^{ij}g^{kl}+\mu(g^{ik}g^{jl}+g^{il}g^{jk}),\\&F^{ijklmn}=\gamma_1(g^{ij}g^{kl}g^{mn}+g^{jk}g^{in}g^{lm})+\gamma_2(g^{ij}g^{km}g^{nl}+g^{ki}g^{jn}g^{lm})+\\&\quad+\gamma_3 g^{ij}g^{kn}g^{lm}+\gamma_4 g^{jk}g^{il}g^{mn}+\gamma_5(g^{jk}g^{im}g^{nl}+g^{ki}g^{jl}g^{mn})+\\&\quad+\gamma_6 g^{ki}g^{jm}g^{nl}+\gamma_7 g^{il}g^{jm}g^{kn}+\gamma_8(g^{jl}g^{km}g^{in}+g^{kl}g^{im}g^{jn})+\\&\quad+\gamma_9 g^{il}g^{jn}g^{km}+\gamma_{10}g^{jl}g^{kn}g^{im}+\gamma_{11}g^{kl}g^{in}g^{jm},\end{aligned} \tag{7.5.6}$$

izotropni materijalni tenzori, a α, a, b, ν_1, ν_2, ν_3, λ_1, μ_1, λ, μ, γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_{11}$ materijalne konstante.

Koristeći (7.5.5) i (7.5.6), iz (7.5.1) dobijamo linearne konstitutivne jednačine u obliku

$$t^{ij}=(\lambda_1 f_I+\nu_1 \varepsilon_I+aT)\,g^{ij}+2\,\mu_1 f^{ij}+\nu_2\,\varepsilon^{ij}+\nu_3\,\varepsilon^{ji}, \tag{7.5.7}$$

$$\tau^{ij}=(\lambda f_I+\lambda_1 \varepsilon_I+bT)\,g^{ij}+2\,\mu f^{ij}+2\,\mu_1\,\varepsilon^{(ij)}, \tag{7.5.8}$$

$$\begin{aligned} h^{ijk}=&\ \gamma_1\left(d^{kl}_{\cdot\cdot l}g^{ij}+d^{l\cdot i}_{\cdot l}\,g^{jk}\right)+\gamma_2\left(d^{lk}_{\cdot\cdot l}\,g^{ij}+d^{l\cdot j}_{\cdot l}\,g^{ki}\right)+\\ &+\gamma_3\,d^{l\cdot k}_{\cdot l}\,g^{ij}+\gamma_4\,d^{il}_{\cdot\cdot l}\,g^{jk}+\gamma_5\left(d^{li}_{\cdot\cdot l}\,g^{jk}+d^{jl}_{\cdot\cdot l}\,g^{ki}\right)+\\ &+\gamma_6\,d^{lj}_{\cdot\cdot l}\,g^{ki}+\gamma_7\,d^{ijk}+\gamma_8\,(d^{jki}+d^{kij})+\\ &+\gamma_9\,d^{ikj}+\gamma_{10}\,d^{jik}+\gamma_{11}\,d^{kji}, \end{aligned} \tag{7.5.9}$$

$$\rho_0\,\eta=-\alpha\,T-a\,\varepsilon_I-bf_I, \tag{7.5.10}$$

gde su tenzori deformacije oblika (7.4.9), a f_I i ε_I prve osnovne invarijante tenzora deformacije f_{ij} i ε_{ij}. Pri izvođenju jednačine (7.5.10) iskoristili smo i jednačinu konzervacije mase u obliku

$$\rho\approx\rho_0\,(1-f_I-\varepsilon_I). \tag{7.5.11}$$

7.6. Jednačina provođenja toplote. Da bismo dobili jednačinu provođenja toplote, iskoristićemo Onzagerovu linearnu konstitutivnu jednačinu (7.1.2). Na osnovu te jednačine možemo pisati

$$q^k=L^{kl}\frac{\theta_{,l}}{\theta} \tag{7.6.1}$$

ili, ako uvedemo oznaku $\dfrac{L^{kl}}{\theta}=k^{kl}$,

$$q^k=k^{kl}\,\theta_{,l}. \tag{7.6.2}$$

Za izotropne materijale je

$$k^{kl}=kg^{kl}, \tag{7.6.3}$$

pa za vektor toplotnog fluksa dobijamo

$$q_k=k\,\theta_{,k}, \tag{7.6.4}$$

što je poznati Furijeov zakon provođenja toplote.

Na osnovu drugog zakona termodinamike (6.1.17) i jednačina (7.1.1) i (7.6.4), dobijamo

$$k\geqslant 0. \tag{7.6.5}$$

Veličina k se naziva *koeficijent toplotne provodljivosti* i on je, u opštem slučaju, funkcija temperature. U linearnoj teoriji, međutim, za male temperaturske priraštaje, koeficijent toplotne provodljivosti možemo aproksimirati konstantom.

Jasno je da smo do jednačine provođenja toplote (7.6.4) mogli doći i linearizacijom jednačine (7.1.3).

7.7. Jednačine polja. Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja dobićemo iz jednačina (2.5.16) i (2.5.26), koristeći linearne konstitutivne jednačine (7.5.7), (7.5.8) i (7.5.9). Postupajući na taj način, dobijamo

$$\begin{aligned}(\nu_1+\nu_3)\,u^k_{,ki}+\nu_2\,\Delta u_i+a\,\theta_{,i}+(\lambda_1-\nu_1)\,\varphi^{k}_{\cdot k,i}+(\mu_1-\nu_2)\,\varphi_{i,k}^{\cdot k}+&\\ +(\mu_1-\nu_3)\,\varphi^{k}_{\cdot i,k}+\rho f_i-\rho_0\,\ddot{u}_i=0,&\end{aligned} \tag{7.7.1}$$

$$\begin{aligned}&(2\lambda_1-\lambda-\nu_1)\,\varphi^{k}_{\cdot k}g_{ij}+(\nu_1-\lambda_1)\,u^k_{,k}g_{ij}+(a-b)\,Tg_{ij}+(\nu_2-\mu_1)\,u_{i,j}+\\ &+(\nu_3-\mu_1)\,u_{j,i}+(2\mu_1-\mu-\nu_2)\,\varphi_{ij}+(2\mu_1-\mu-\nu_3)\,\varphi_{ji}+(\gamma_1+\gamma_2)\,\varphi^{mn}_{\ \ ,mn}g_{ij}+\\ &+(\gamma_1+\gamma_2)\,\varphi^{m}_{\cdot m,ij}+\gamma_3\,\Delta\varphi^{m}_{\cdot m}g_{ij}+(\gamma_4+\gamma_9)\,\varphi_{i,mj}^{\cdot m}+(\gamma_5+\gamma_8)\,\varphi_{j,mi}^{\cdot m}+\\ &+(\gamma_5+\gamma_8)\,\varphi^{m}_{\cdot i,mj}+(\gamma_6+\gamma_{11})\,\varphi^{m}_{\cdot j,mi}+\gamma_7\,\Delta\varphi_{ij}+\gamma_{10}\,\Delta\varphi_{ji}+\rho\,l_{ij}-\rho_0\,I\,\ddot{\varphi}_{ij}=0,\end{aligned} \tag{7.7.2}$$

pri čemu smo u poslednjoj jednačini za inercijski spin u prvoj aproksimaciji stavili

$$I^{\alpha\beta}\,\ddot{d}^{i}_{\cdot(\alpha)}\,d^{j}_{\cdot(\beta)}\approx I^{\alpha\beta}\ddot{\varphi}^{i}_{\cdot k}\,d^{k}_{\cdot(\alpha)}\,d^{j}_{\cdot(\beta)}=i^{kj}\,\ddot{\varphi}^{i}_{\cdot k}=Ig^{kj}\,\ddot{\varphi}^{i}_{\cdot k}=I\,\ddot{\varphi}^{ij}. \tag{7.7.3}$$

Diferencijalnu jednačinu za određivanje polja temperature dobijamo iz jednačine balansa entropije (6.2.3), koristeći linearnu konstitutivnu jednačinu (7.5.10), i ona je oblika

$$k\,\Delta\theta+\rho\,h+\theta_0\,\alpha\,\dot{\theta}+\theta_0\,a\,\dot{u}^k_{,k}+\theta_0\,(a-b)\,\dot{\varphi}^{k}_{\cdot k}=0, \tag{7.7.4}$$

gde smo koeficijent toplotne provodljivosti aproksimirali konstantom.

Sistem od 13 diferencijalnih jednačina (7.7.1), (7.7.2) i (7.7.4), zajedno za jednačinom konzervacije mase (7.5.11), predstavlja kompletan sistem diferencijalnih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija u_i, φ_{ij}, θ i ρ.

8. PROSTI MIKROPOLARNI TERMOELASTIČNI MATERIJALI

8.1. Slobodna energija i konstitutivne jednačine. Iz jednačine balansa specifične unutrašnje energije za mikropolarni kontinuum (3.3.9), uvodeći slobodnu specifičnu energiju $\psi = u - \theta\eta$, dobijamo jednačinu balansa specifične slobodne energije u obliku

$$\rho\dot{\psi} = t^{ij} v_{i,j} - t^{[ij]} \nu_{ij} + m^{ijk} \nu_{ij,k} - \rho\eta\dot{\theta}. \tag{8.1.1}$$

Koristeći (2.2.25), ovu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \rho\dot{\psi} = {} & t^{ij} X^K_{;j} \dot{x}_{i;K} + \left(- t^{[ij]} d^{(\alpha)}_{\cdot j} + m^{ijk} X^K_{;k} d^{(\alpha)}_{\cdot j;K} \right) \dot{d}_{i(\alpha)} + \\ & + m^{ijk} X^K_{;k} d^{(\alpha)}_{\cdot j} \dot{d}_{i(\alpha);K} - \rho\eta\dot{\theta}, \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

odakle zaključujemo da je specifična slobodna energija funkcija oblika

$$\psi = \psi \left(x^k_{;K},\ d^k_{\cdot(\alpha)},\ d^k_{\cdot(\alpha);K},\ \theta \right). \tag{8.1.3}$$

Diferenciranjem po vremenu, odavde je

$$\dot{\psi} = \frac{\partial x}{\partial x^k_{;K}} \dot{x}^k_{;K} + \frac{\partial \psi}{\partial d^k_{\cdot(\alpha)}} \dot{d}^k_{\cdot(\alpha)} + \frac{\partial \psi}{\partial d^k_{\cdot(\alpha);K}} \dot{d}^k_{\cdot(\alpha);K} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta}, \tag{8.1.4}$$

pa, upoređivanjem ove sa jednačinom (8.1.2), dobijamo konstitutivne jednačine

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \rho\, g^{il} \frac{\partial \psi}{\partial x^l_{;K}} x^j_{;K}, \\ t^{[ij]} &= - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d^l_{\cdot(\alpha)}} g^{l[i} d^{j]}_{\cdot(\alpha)} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d^l_{\cdot(\alpha);K}} g^{l[i} d^{j]}_{\cdot(\alpha);K}, \\ m^{ijk} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial d^l_{\cdot(\alpha);K}} g^{l[i} d^{j]}_{\cdot(\alpha)} x^k_{;K}, \\ \eta &= - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{8.1.5}$$

Prve dve od ovih jednačina moraju biti kompatibilne, tj. mora biti zadovoljen uslov

$$\left(g^{il}\frac{\partial \psi}{\partial x^{l}_{;K}}x^{j}_{;K}+g^{il}\frac{\partial \psi}{\partial d^{l}_{\cdot(\alpha)}}d^{j}_{\cdot(\alpha)}+g^{il}\frac{\partial \psi}{\partial d^{l}_{\cdot(\alpha);K}}d^{j}_{\cdot(\alpha);K}\right)_{[ij]}=0, \tag{8.1.6}$$

što je uslov objektivnosti konstitutivnih jednačina (8.1.5), tj. uslov njihove invarijantnosti u odnozu na superponirana kruta kretanja, koji predstavlja sistem od tri diferencijalne jednačine koji mora zadovoljavati funkcija ψ.

Ako je uslov (8.1.6) zadovoljen, tada je druga od jednačina (8.1.5) suvišna, jer je sadržana u prvoj kao njen antisimetrični deo, pa su konstitutivne jednačine oblika

$$\begin{aligned} t^{ij}&=\rho\, g^{il}\frac{\partial \psi}{\partial x^{l}_{;K}}x^{j}_{;K},\\ m^{ijk}&=\frac{\partial \psi}{\rho\, d^{l}_{\cdot(\alpha);K}}g^{l[i}d^{j]}_{\cdot(\alpha)}x^{k}_{;K},\\ \eta&=-\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{8.1.7}$$

Ako uzmemo da je specifična slobodna energija funkcija oblika

$$\psi=\psi\left(x^{k}_{;K},\ \chi^{k}_{\cdot K},\ \chi^{k}_{\cdot L;K},\ \theta\right), \tag{8.1.8}$$

konstitutivne jednačine (8.1.7) postaju

$$\begin{aligned} t^{ij}&=\rho\, g^{il}\frac{\partial \psi}{\partial x^{l}_{;K}}x^{j}_{;K},\\ m^{ijk}&=\rho\frac{\partial \psi}{\partial \chi^{l}_{\cdot(\alpha);K}}g^{l[i}\chi^{j]}_{\cdot(\alpha)}x^{k}_{;K},\\ \eta&=-\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{8.1.9}$$

a uslov objektivnosti (8.1.6) postaje

$$\left(g^{il}\frac{\partial \psi}{\partial x^{l}_{;K}}x^{j}_{;K}+g^{il}\frac{\partial \psi}{\partial \chi^{l}_{\cdot K}}\chi^{j}_{\cdot K}+g^{il}\frac{\partial \psi}{\partial \chi^{l}_{\cdot L;K}}\chi^{j}_{\cdot L;K}\right)_{[ij]}=0. \tag{8.1.10}$$

pri čemu gradijenti mikrodeformacije, kao ortogonalni tenzori, imaju tri međusobno nezavisne koordinate.

8.2. Materijalni tenzori deformacije i nelinearne konstitutivne jednačine za anizotropne materijale. Specifična slobodna energija (8.1.8) je funkcija od 22 nezavisno promenljivih argumenata $x^{k}_{;K}$, $\chi^{k}_{\cdot K}$, $\chi^{k}_{\cdot L;K}$ i θ. Sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine (8.1.10) dozvoljava stoga $22-3=19$ međusobno nezavisnih integrala. Uzećemo te integrale u obliku

$$\Sigma_{KL}=\chi_{Kk}x^{k}_{;L},\quad K_{KLM}=\chi_{Kk}\chi^{k}_{\cdot L;M},\quad \theta. \tag{8.2.1}$$

S obzirom da su gradijenti mikrodeformacije ortogonalni tenzori, tj. da zadovoljavaju uslove (3.2.5), očigledno je da materijalne tenzore deformacije Σ_{KL} i K_{KLM} možemo napisati i u obliku

$$\begin{aligned} \Sigma_{KL} &= \chi_{kK}\, x^{k}_{;L}, \\ K_{KLM} &= \chi_{kK}\, \chi^{k}_{\cdot L;M} = -\chi_{kL}\, \chi^{k}_{\cdot K;M} = -K_{LKM}. \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

Sistem (8.1.10), prema tome, ima opšte rešenje oblika

$$\psi = \psi(\Sigma_{KL}, K_{KLM}, \theta), \tag{8.2.3}$$

pa konstitutivne jednačine (8.1.9) postaju

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \Sigma_{KL}} \chi^{i}_{\cdot K}\, x^{j}_{;L}, \\ m^{ijk} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial K_{KLM}} \chi^{i}_{\cdot K}\, \chi^{j}_{\cdot L}\, x^{k}_{;M}, \\ \eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{8.2.4}$$

i invarijante su u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Jednačine (8.2.4) su nelinearne konstitutivne jednačine za proste anizotropne termoelastične mikropolarne materijale.

Ako umesto materijalnog tenzora deformacije Σ_{KL} uvedemo materijalni tenzor relativne deformacije $\in_{KL}$,

$$\in_{KL} = \Sigma_{KL} - G_{KL} = \chi_{kK}\, x^{k}_{;L} - G_{KL}, \tag{8 2.5}$$

konstitutivne jednačine dobijaju oblik

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \in_{KL}} \chi^{i}_{\cdot K}\, x^{j}_{;L}, \\ m^{ijk} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial K_{KLM}} \chi^{i}_{\cdot K}\, \chi^{j}_{\cdot L}\, x^{k}_{;M}, \\ \eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

Uvodeći vektore direktorskog pomeranja, odnosno gradijente mikropomeranja, tada na isti način kao i u odeljku 7.3, dobijamo

$$\chi^{k}_{\cdot K} = g^{k}_{K} + \varphi^{k}_{\cdot K}, \quad \chi^{K}_{\cdot k} = g^{K}_{k} - \varphi^{K}_{\cdot k}. \tag{8.2.7}$$

Međutim, s obzirom da je $\chi^{k}_{\cdot K}$ ortogonalan tenzor, tj. da zadovoljava relacije (3.2.2), lako nalazimo da je

$$\varphi_{KL} + \varphi_{LK} + \varphi_{MK}\, \varphi^{M}_{\cdot L} = 0. \tag{8.2.8}$$

Odavde vidimo da je u linearnoj teoriji

$$\varphi_{KL}+\varphi_{LK}=0, \quad \text{tj.} \quad \varphi_{KL}=-\varphi_{LK}. \tag{8.2.9}$$

Koristeći (8.2.7) i (7.3.15), materijalne tenzore deformacije $\in_{KL}$ i K_{KLM}, na osnovu $(8.2.2)_2$ i (8.2.5), možemo izraziti u obliku

$$\begin{aligned} \in_{KL} &= u_{K,L}+\varphi_{LK}+\varphi_{MK}\, u^{M}_{\ ,L}=u_{K,L}-\varphi_{KL}+(u_{M,L}-\varphi_{ML})\,\varphi^{M}_{\cdot K}, \\ K_{KLM} &= \varphi_{KL,M}+\varphi_{SK}\,\varphi^{S}_{\cdot L,M}=-\varphi_{LK,M}-\varphi_{SL}\,\varphi^{S}_{\cdot K,M}. \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

U linearnoj teoriji ovi tenzori su oblika

$$\begin{aligned} \in_{KL} &= u_{K,L}+\varphi_{LK}=u_{K,L}-\varphi_{KL}, \\ K_{KLM} &= \varphi_{KL,M}=-\varphi_{LK,M}. \end{aligned} \tag{8.2.11}$$

8.3. Prostorni tenzori deformacije i nelinearne konstitutivne jednačine za izotropne materijale. Kod izotropnih materijala mogu se uvesti sledeći prostorni tenzori deformacije:

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} &= \chi_{kK}\, X^{K}_{;\,l}, \\ \varkappa_{klm} &= G^{KL}\,\chi_{kK;m}\,\chi_{lL}=-G^{KL}\,\chi_{lK;m}\,\chi_{kL}=-\varkappa_{lkm}, \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

tako da je specifična slobodna energija funkcija oblika

$$\psi=\psi(\sigma_{kl},\ \varkappa_{klm},\ \theta). \tag{8.3.2}$$

Koristeći (8.3.1) i (8.3.2), iz (8.1.9) dobijamo nelinearne konstitutivne jednačine za izotropne materijale

$$\begin{aligned} t^{ij} &= -\rho\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kj}}\,\sigma_{k}^{\cdot i}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa_{klj}}\,\varkappa_{kl}^{\cdot\cdot i}, \\ m^{ijk} &= \rho\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa_{ijk}}, \\ \eta &= -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \end{aligned} \tag{8.3.3}$$

a iz (8.1.10) uslov objektivnosti

$$\left(-\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kj}}\,\sigma_{k}^{\cdot i}+\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ik}}\,\sigma^{j}_{\cdot k}+2\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa_{ilm}}\,\varkappa^{j}_{\cdot lm}-\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa_{klj}}\,\varkappa_{kl}^{\cdot\cdot i}\right)_{[ij]}=0. \tag{8.3.4}$$

Ako umesto σ_{kl} uvedemo prostorni tenzor relativne deformacije ε_{kl},

$$\varepsilon_{kl}=g_{kl}-\sigma_{kl}=g_{kl}-\chi_{kK}\,X^{K}_{;\,l}, \tag{8.3.5}$$

za konstitutivne jednačine dobijamo

$$
\begin{aligned}
t^{ij} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{kj}} \varepsilon_k^{\cdot i} - \rho \frac{\partial \psi}{\rho \varkappa_{klj}} \varkappa_{kl}^{\cdot\cdot i}, \\
m^{ijk} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varkappa_{ijk}}, \\
\eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta},
\end{aligned}
\tag{8.3.6}
$$

a za uslov objektivnosti

$$
\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ik}} \varepsilon^{j}_{\cdot k} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{kj}} \varepsilon_k^{\cdot i} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varkappa_{ilm}} \varkappa^{j}_{\cdot lm} - \frac{\partial \psi}{\partial \varkappa_{klj}} \varkappa_{kl}^{\cdot\cdot i} \right)_{[ij]} = 0. \tag{8.3.7}
$$

Iz uslova ortogonalnosti (3.2.5), koristeći (8.2.7), dobijamo

$$
\varphi_{kK} = -\varphi_{Kk}. \tag{8.3.8}
$$

Prema tome je

$$
\varphi_{kl} = -\varphi_{lK} g^{K}_{k} = -\varphi_{LK} g^{L}_{l} g^{K}_{k}. \tag{8.3.9}
$$

Koristeći ovu relaciju i (8.2.7), iz (3.2.2) lako nalazimo

$$
\varphi_{kl} + \varphi_{lk} - \varphi_{mk} \varphi^{m}_{\cdot l} = 0, \tag{8.3.10}
$$

i vidimo da je, u linearnoj teoriji,

$$
\varphi_{kl} + \varphi_{lk} = 0, \quad \text{tj.} \quad \varphi_{kl} = -\varphi_{lk}. \tag{8.3.11}
$$

Tenzore deformacije ε_{kl} i $\varkappa_{klm}$, koristeći (8.3.1), (8.3.5), (8.2.7), (8.3.9) i (8.3.10), možemo izraziti u obliku

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{kl} &= u_{k,l} + \varphi_{lk} - \varphi_{mk} u^{m}_{,\,l} = u_{k,l} - \varphi_{kl} - (u_{m,l} - \varphi_{ml}) \varphi^{m}_{\cdot k}, \\
\varkappa_{klm} &= \varphi_{kl,m} - \varphi_{rk} \varphi^{r}_{\cdot l,m} = -\varphi_{lk,m} + \varphi_{rl} \varphi^{r}_{\cdot k,m}.
\end{aligned}
\tag{8.3.12}
$$

U linearnoj teoriji ovi tenzori su oblika

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{kl} &= u_{k,l} + \varphi_{lk} = u_{k,l} - \varphi_{kl}, \\
\varkappa_{klm} &= \varphi_{kl,m} = -\varphi_{lk,m}.
\end{aligned}
\tag{8.3.13}
$$

8.4. Linearne konstitutivne jednačine za izotropne materijale. U linearnoj teoriji, izostavljanjem nelinearnih članova u (8.3.6), konstitutivne jednačine su oblika

$$
t^{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad m^{ijk} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varkappa_{ijk}}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \tag{8.4.1}
$$

gde su tenzori deformacije oblika (8.3.13).

S obrirom da su $\varkappa_{klm}$ i m^{klm} antisimetrični tenzori u odnosu na prva dva indeksa, možemo uvesti tenzore drugog reda

$$\varkappa_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varkappa^{kl}_{\cdot\cdot j}, \quad m_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl} m^{kl}_{\cdot\cdot j}, \tag{8.4.2}$$

tako da konstitutivne jednačine (8.4.1) možemo izraziti u obliku

$$t^{ij} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_{ij}}, \quad m^{ij} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\varkappa_{ij}}, \quad \eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{8.4.3}$$

gde je

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= u_{i,j} - \varphi_{ij} = u_{i,j} - \varepsilon_{ijk}\varphi^k, \\ \varkappa_{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varphi^{kl}_{\cdot\cdot,j} = \varphi_{i,j}, \end{aligned} \tag{8.4.4}$$

i

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, \varkappa_{ij}, \theta). \tag{8.4.5}$$

Ako nema inicijalnih napona, specifična slobodna energija je u linearnoj teoriji kvadratni polinom oblika

$$\rho\psi = \frac{1}{2}\alpha T^2 + A^{ij}\varepsilon_{ij} T + \frac{1}{2}B^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}C^{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}, \tag{8.4.6}$$

gde smo, u analogiji sa (7.5.4), uveli priraštaj temperature, $T = \theta - \theta_0$, za koji pretpostavljamo da je dovoljno mali.

U (8.4.6) su

$$\begin{aligned} A^{ij} &= a g^{ij}, \\ B^{ijkl} &= \nu_1 g^{ij} g^{kl} + \nu_2 g^{ik} g^{jl} + \nu_3 g^{il} g^{jk}, \\ C^{ijkl} &= \tau_1 g^{ij} g^{kl} + \tau_2 g^{ik} g^{jl} + \tau_3 g^{il} g^{jk}, \end{aligned} \tag{8.4.7}$$

materijalni izotropni tenzori, α, a, ν_1, ν_2, ν_3, τ_1, τ_2 i τ_3 materijalne konstante.

Koristeći (8.4.6) i (8.4.7), iz (8.4.3) dobijamo linearne konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} t^{ij} &= (\nu_1\varepsilon_I + aT) g^{ij} + \nu_2\varepsilon^{ij} + \nu_3\varepsilon^{ji}, \\ m^{ji} &= \tau_1\varkappa_I g^{ij} + \tau_2\varkappa^{ij} + \tau_3\varkappa^{ji}, \\ \rho_0\eta &= -\alpha T - a\varepsilon_I, \end{aligned} \tag{8.4.8}$$

gde je

$$\varepsilon_I = u^i_{,i} = \operatorname{div}\vec{u}, \quad \varkappa_I = \varphi^i_{,i} = \operatorname{div}\vec{\varphi} \tag{8.4.9}$$

i gde smo iskoristili jednačinu konzervacije mase u obliku

$$\rho \approx \rho_0(1 - \varepsilon_I). \tag{8.4.10}$$

Ako stavimo

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} - \varphi_{ij} = e_{ij} + r_{ij} - \varphi_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_{ijk}(r^k - \varphi^k), \tag{8.4.11}$$

gde je

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}),\quad r_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i}),\tag{8.4.12}$$

konstitutivne jednačine (8.4.8) možemo pisati u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned}
&t^{ij}=(\lambda e_I+aT)g^{ij}+2\mu e^{ij}+k\varepsilon^{ijk}(r_k-\varphi_k),\\
&m^{ij}=\tau_1\varphi^{k}_{,k}g^{ij}+\tau_2\varphi^{i,j}+\tau_3\varphi^{j,i},\\
&\rho_0\eta=-\alpha T-ae_I,
\end{aligned}\tag{8.4.13}$$

gde su λ i μ klasične Lameove konstante, a φ_k vektorska reprezentacija ugla nezavisne rotacije materijalnih tačaka kontinuuma.

Iz (8.4.13) vidimo da u linearnoj teoriji ukupan broj materijalnih konstanata iznosi 8.

8.5. Jednačine polja. Prvi i drugi Košijev zakon kretanja (jednačine (3.3.5) i (3.3.10)) možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}
&\rho_0\ddot{u}^i=t^{ij}_{,j}+\rho f^i,\\
&\rho_0 I\ddot{\varphi}^{ij}=t^{[ij]}+m^{ijk}_{,k}+\rho l^{ij},
\end{aligned}\tag{8.5.1}$$

gde smo, s obzirom da su deformacije infinitezimalne, u prvoj aproksimaciji stavili

$$\rho\dot{v}^i=\rho_0\ddot{u}^i,\quad \rho I^{\alpha\beta}\ddot{d}^{[i}_{\cdot(\alpha)}d^{j]}_{\cdot(\beta)}=\rho_0 I\ddot{\varphi}^{ij}.\tag{8.5.2}$$

Na osnovu $(8.5.1)_1$, koristeći linearnu konstitutivnu jednačinu $(8.4.8)_1$, prvi Košijev zakon kretanja dobijamo u obliku

$$\nu_2\Delta u_i+(\nu_1+\nu_3)u^{k}_{,ki}+a\theta_{,i}+(\nu_3-\nu_2)g_{ir}\varepsilon^{rjk}\varphi_{k,j}+\rho f_i-\rho_0\ddot{u}_i=0.\tag{8.5.3}$$

Napisana u vektorskom obliku, ova jednačina je

$$\nu_2\Delta\vec{u}+(\nu_1+\nu_3)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{u})+a\operatorname{grad}\theta+(\nu_3-\nu_2)\operatorname{rot}\vec{\varphi}+\rho\vec{f}-\rho_0\ddot{\vec{u}}=0.\tag{8.5.4}$$

Da bismo dobili drugi Košijev zakon kretanja, konstitutivnu jednačinu $(8.4.8)_2$ napisaćemo u povoljnijem obliku. Koristeći, naime, relaciju

$$m^{ijk}=\varepsilon^{ijl}m_l{}^{k},$$

dobijamo

$$m^{ijk}=\tau_1\varkappa_l\varepsilon^{ijk}+\tau_2\varkappa^{ijk}+\frac{1}{2}\tau_3 g^{kr}\delta^{lij}_{rmn}\varkappa^{mn}_{\cdot\cdot l}.$$

Diferenciranjem, odavde je

$$m^{ijk}_{,k}=\tau_1\varkappa_{l,k}\varepsilon^{ijk}+\tau_2\varkappa^{ijk}_{,k}+\frac{1}{2}\tau_3 g^{kr}\delta^{ijl}_{rmn}\varkappa^{mn}_{\cdot\cdot l,k},$$

što možemo izraziti u obliku

$$m^{ijk}_{,k}=\tau_2\varepsilon^{ijl}\Delta\varphi_l+(\tau_1+\tau_3)\varepsilon^{ijl}\varphi^{k}_{,kl}.\tag{8.5.5}$$

Iz konstitutivne jednačine $(8.4.8)_1$ lako nalazimo

$$t^{[ij]} = (\nu_2 - \nu_3)\,\varepsilon^{[ij]} = (\nu_2 - \nu_3)\,(r^{ij} - \varphi^{ij}),$$

što možemo izraziti u obliku

$$t^{[ij]} = (\nu_2 - \nu_3)\,\varepsilon^{ijk}\,(r_k - \varphi_k). \tag{8.5.6}$$

Zamenjujući sada (8.5.6) i (8.5.5) u $(8.5.1)_2$, dobijamo

$$\rho_0\, I\, \ddot{\varphi}^{ij} = \tau_2\, \varepsilon^{ijk}\, \Delta\varphi_k + (\nu_2 - \nu_3)\, \varepsilon^{ijk}\,(r_k - \varphi_k) + (\tau_1 + \tau_3)\, \varepsilon^{ijk}\, \varphi^{l}_{\;,lk} + \rho\, l^{ij}.$$

Ako još stavimo

$$\ddot{\varphi}^{ij} = \varepsilon^{ijk}\, \ddot{\varphi}_k, \quad l^{ij} = \varepsilon^{ijk}\, l_k,$$

dobijamo, konačno, drugi Košijev zakon kretanja u obliku

$$\rho_0\, I\, \ddot{\varphi}_k = \tau_2\, \Delta\varphi_k + (\nu_2 - \nu_3)\,(r_k - \varphi_k) + (\tau_1 + \tau_3)\, \varphi^{l}_{\;,lk} + \rho\, l_k. \tag{8.5.7}$$

Napisana vektorskim oznakama, ova jednačina je oblika

$$\tau_2\, \Delta\vec{\varphi} + (\tau_1 + \tau_3)\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{\varphi}) + (\nu_3 - \nu_2)\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} + \vec{\varphi}\right) + \rho\,\vec{l} - \rho_0\, I\, \ddot{\vec{\varphi}} = 0. \tag{8.5.8}$$

Da bismo dobili diferencijalnu jednačinu za određivanje polja temperature, iskoristićemo konstitutivnu jednačinu $(8.4.8)_3$, jednačinu balansa entropije (6.2.3) i Furijeov zakon (7.6.4). Na taj način dobijamo

$$k\,\Delta\theta + \rho\, h + \theta_0\, \alpha\, \dot{\theta} + \theta_0\, a\, \dot{u}^{k}_{\;,k} = 0. \tag{8.5.9}$$

Sistem od sedam diferencijalnih jednačina (8.5.4), (8.5.8) i (8.5.9), zajedno sa jednačinom konzervacije mase

$$\rho = \rho_0\,(1 - \mathrm{div}\,\vec{u}), \tag{8.5.10}$$

predstavlja kompletan sistem jednačina za određivanje nepoznatih funkcija $\vec{u}$, $\vec{\varphi}$, θ i ρ.

9. DIPOLARNI ELASTIČNI MATERIJALI

9.1. Energija deformacije i konstitutivne jednačine. S obzirom da su elastični procesi potpuno reverzibilni, pri njihovom proučavanju uvek možemo uvesti specifičnu energiju deformacije. Kod adijabatskih procesa to je specifična unutrašnja energija, a kod izotermičkih — specifična slobodna energija. U saglasnosti sa (4.2.7), jednačina balansa specifične energije deformacije za dipolarne elastične materijale je oblika

$$\rho\dot{\sigma}=\tau^{ij}v_{i,j}+h^{i(jk)}v_{i,jk}. \tag{9.1.1}$$

Koristeći relacije

$$\begin{aligned} v_{i,j}&=\dot{x}_{i;K}X^K_{;j},\\ v_{i,jk}&=\dot{x}_{i;KL}X^K_{;j}X^L_{;k}+\dot{x}_{i;K}X^K_{;jk},\end{aligned} \tag{9.1.2}$$

jednačinu (9.1.1) možemo napisati u obliku

$$\rho\dot{\sigma}=\left(\tau^{ij}X^K_{;j}+h^{i(jk)}X^K_{;jk}\right)\dot{x}_{i;K}+h^{i(jk)}X^K_{;j}X^L_{;k}\dot{x}_{i;KL}, \tag{9.1.3}$$

odakle zaključujemo da je specifična energija deformacije funkcija oblika

$$\sigma=\sigma\left(x^k_{;K},\ x^k_{;KL}\right). \tag{9.1.4}$$

Diferenciranjem po vremenu odavde dobijamo

$$\dot{\sigma}=\frac{\partial\sigma}{\partial x^k_{;K}}\dot{x}^k_{;K}+\frac{\partial\sigma}{\partial x^k_{;KL}}\dot{x}^k_{;KL}. \tag{9.1.5}$$

Upoređujući jednačine (9.1.5) i (9.1.3), dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} \tau^{ij}&=\rho g^{il}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^l_{;K}}x^j_{;K}+\frac{\partial\sigma}{\partial x^l_{;KL}}x^j_{;KL}\right),\\ h^{i(jk)}&=\rho g^{il}\frac{\partial\sigma}{\partial x^l_{;KL}}x^j_{;K}x^k_{;L}.\end{aligned} \tag{9.1.6}$$

Da bi, međutim, tenzor napona τ^{ij} bio simetričan, tj. da bi drugi Košijev zakon kretanja (4.2.4) bio zadovoljen, desna strana jednačine $(9.1.6)_1$ mora zadovoljavati uslov

$$\left(g^{il}\frac{\partial\sigma}{\partial x^l_{;K}}x^j_{;K}+g^{il}\frac{\partial\sigma}{\partial x^l_{;KL}}x^j_{;KL}\right)_{[ij]}=0, \tag{9.1.7}$$

što je uslov objektivnosti za specifičnu energiju deformacije (9.1.4) i konstitutivne jednačine (9.1.6).

Jednačina (9.1.7) predstavlja sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine koje mora zadovoljavati funkcija specifične energije deformacije. S obzirom da je specifična energija deformacije funkcija od 27 nezavisno promenljivih $x^k_{;K}$ i $x^k_{;KL}$, sistem (9.1.7) ima $27-3=24$ međusobno nezavisnih integrala. Ima više mogućnosti za izbor tih integrala. Mi ćemo uzeti sledeće:

$$C_{KL}=g_{kl}\,x^k_{;K}\,x^l_{;L},\qquad E_{KLM}=G_{KN}\,X^N_{;k}\,x^k_{;LM}=E_{KML},\tag{9.1.8}$$

tako da (9.1.7) ima opšte rešenje

$$\sigma=\sigma(C_{KL},\ E_{KLM}).\tag{9.1.9}$$

Koristeći sada (9.1.9) i (9.1.8), konstitutivne jednačine (9.1.6) možemo napisati u obliku

$$\tau^{ij}=2\,\rho\frac{\partial\sigma}{\partial C_{KL}}\,x^i_{;K}\,x^j_{;L},\qquad h^{i\,(jk)}=\rho\frac{\partial\sigma}{\partial E^K_{.LM}}\,g^{il}\,X^K_{;l}\,x^j_{;L}\,x^k_{;M}.\tag{9.1.10}$$

Ovo su nelinearne konstititivne jednačine za anizotropne dipolarne elastične materijale i invarijantne su u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Ako umesto tenzora C_{KL} uvedemo tenzor relativne deformacije

$$2\,E_{KL}=C_{KL}-G_{KL},\tag{9.1.11}$$

konstitutivne jednačine dobijaju oblik

$$\tau^{ij}=\rho\frac{\partial\sigma}{\partial E_{KL}}\,x^i_{;K}\,x^j_{;L},\qquad h^{i\,(jk)}=\rho\frac{\partial\sigma}{\partial E^K_{.LM}}\,g^{il}\,X^K_{;l}\,x^j_{;L}\,x^k_{;M}.\tag{9.1.12}$$

Materijalne tenzore deformacije E_{KL} i E_{KLM}, koristeći (9.1.11), (9.1.8) i (7.3.15), možemo izraziti u obliku

$$2\,E_{KL}=u_{K,\,L}+u_{L,\,K}+u_{M,\,K}\,u^M_{\ ,\,L},\qquad E_{KLM}=u_{K,\,LM}-u_{K;k}\,u^k_{\ ;LM}.\tag{9.1.13}$$

U linearnoj teoriji, u slučaju infinitezimalnih deformacija, ovi tenzori su oblika

$$E_{KL}=\frac{1}{2}(u_{K,\,L}+u_{L,\,K}),\qquad E_{KLM}=u_{K,\,LM}.\tag{9.1.14}$$

Za izotropne dipolarne elastične materijale uvešćemo prostorne tenzore deformacije

$$
\begin{aligned}
& c_{kl} = G_{KL}\, X^K_{;k}\, X^L_{;l}, \\
& e_{klm} = g_{rk}\, x^r_{;LM}\, X^L_{;l}\, X^M_{;m} = -g_{rk}\, x^r_{;K}\, X^K_{;lm} = e_{kml},
\end{aligned}
\tag{9.1.15}
$$

tako da konstitutivne jednačine (9.1.6) postaju

$$
\begin{aligned}
& \tau^{ij} = -2\rho \frac{\partial \sigma}{\partial c_{jk}} c^i_k + \rho \frac{\partial \sigma}{\partial e_{ilm}} e^j_{.lm} - 2\rho \frac{\partial \sigma}{\partial e_{kmj}} e^{..i}_{km}, \\
& h^{i(jk)} = \rho \frac{\partial \sigma}{\partial e_{ijk}},
\end{aligned}
\tag{9.1.16}
$$

a uslov objektivnosti (9.1.7) postaje

$$
\left(-2 \frac{\partial \sigma}{\partial c_{jk}} c^i_k + \frac{\partial \sigma}{\partial e_{ilm}} e^j_{.lm} - 2 \frac{\partial \sigma}{\partial e_{kmj}} e^{..i}_{km} \right)_{[ij]} = 0. \tag{9.1.17}
$$

Ako umesto prostornog tenzora deformacije c_{kl} uvedemo prostorni tenzor relativne deformacije e_{kl},

$$
2\, e_{kl} = g_{kl} - c_{kl}, \tag{9.1.18}
$$

konstitutivne jednačine će biti oblika

$$
\begin{aligned}
& \tau^{ij} = \rho \left(\frac{\partial \sigma}{\partial e_{ij}} - 2 \frac{\partial \sigma}{\partial e_{jk}} e^i_k + \frac{\partial \sigma}{\partial e_{ilm}} e^j_{.lm} - 2 \frac{\partial \sigma}{\partial e_{kmj}} e^{..i}_{km} \right), \\
& h^{i(jk)} = \rho \frac{\partial \sigma}{\partial e_{ijk}},
\end{aligned}
\tag{9.1.19}
$$

a uslov objektivnosti oblika

$$
\left(2 \frac{\partial \sigma}{\partial e_{jk}} e^i_k - \frac{\partial \sigma}{\partial e_{ilm}} e^j_{.lm} + 2 \frac{\partial \sigma}{\partial e_{kmj}} e^{..i}_{km} \right)_{[ij]} = 0. \tag{9.1.20}
$$

Koristeći (9.1.18), (9.1.15) i (7.3.15), prostorne tenzore deformalije e_{kl} i e_{klm} možemo izraziti u obliku

$$
\begin{aligned}
& 2\, e_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k}\, u^m_{,l}, \\
& e_{klm} = u_{k,lm} + u_{k;K}\, u^K_{;lm}
\end{aligned}
\tag{9.1.21}
$$

U linearnoj teoriji, za slučaj infinitezimalnih deformacija, ovi tenzori su

$$
e_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad e_{kln} = u_{k,lm}, \tag{9.1.22}
$$

U linearnoj teoriji, izostavljanjem nelineranih članova u jednačinama (9.1.19), konstitutivne jednačine za izotropne materijale su oblika

$$
\tau^{ij} = \rho \frac{\partial \sigma}{\partial e_{ij}}, \quad h^{i(jk)} = \rho \frac{\partial \sigma}{\partial e_{ijk}} \tag{9.1.23}
$$

i invarijantne su u odnosu na superponirana kruta kretanja.

U jednačinama (9.1.23) specifična energija deformacije je funkcija tenzora e_{kl} i e_{klm}. Pretpostavljamo da je ona neprekidna i diferencijabilna funckija. Ako još pretpostavimo da nema inicijalnih napona, u linearnoj teoriji ona je kvadratni polinom oblika

$$\rho\sigma = \frac{1}{2} A^{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \frac{1}{2} B^{ijklmn} e_{ijk} e_{lmn}, \tag{9.1.24}$$

gde su

$$\begin{aligned} A^{ijkl} &= \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \\ B^{ijklmn} &= \gamma_1 g^{jk} g^{il} g^{mn} + \gamma_2 (g^{jl} g^{mk} g^{ni} + g^{lk} g^{mj} g^{ni} + g^{lj} g^{nk} g^{mi} + \\ &+ g^{lk} g^{nj} g^{mi}) + \gamma_3 (g^{li} g^{jm} g^{kn} + g^{il} g^{jn} g^{km}) + \\ &+ \gamma_4 (g^{in} g^{lm} g^{jk} + g^{im} g^{ln} g^{jk} + g^{lj} g^{ki} g^{mn} + g^{kl} g^{ij} g^{mn}) + \\ &+ \gamma_5 (g^{ij} g^{kn} g^{lm} + g^{jn} g^{lm} g^{ki} + g^{ij} g^{km} g^{ln} + g^{jm} g^{ln} g^{ki}), \end{aligned} \tag{9.1.25}$$

izotropni tenzori, a λ, μ, γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_5$ materijalne konstante.

Zamenjujući sada (9.1.24) u (9.1.23) i koristeći (9.1.25), dobijamo linearne konstitutivne jednačine za izotropne dipolarne elastične materijale u obliku

$$\tau^{ij} = \lambda e_l g^{ij} + 2\mu e^{ij}, \tag{9.1.26}$$

$$\begin{aligned} h^{i(jk)} &= h_1 g^{jk} e^{il}_{..l} + h_2 (e^{jki} + e^{kji}) + h_3 e^{ijk} + \\ &+ h_4 (2 g^{jk} e^{l.i}_{.l} + g^{ki} e^{jl}_{..l} + g^{ji} e^{kl}_{..l}) + h_5 (g^{ij} e^{l.k}_{.l} + g^{ik} e^{l.j}_{.l}), \end{aligned} \tag{9.1.27}$$

gde smo uveli oznake

$$\gamma_1 = h_1, \quad 2\gamma_2 = h_2, \quad 2\gamma_3 = h_3, \quad \gamma_4 = h_4 \quad 2\gamma_5 = h_5. \tag{9.1.28}$$

U linearnoj teoriji dipolarnih elastičnih materijala, prema tome, ukupan broj materijalnih konstanata iznosi 7.

9.2. Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja. Diferencijalne jednačine kretanja za dipolarni kontinuum, na osnovu (4.2.2), možemo napisati u obliku

$$t^{ij}_{,j} + \rho f^i - \rho_0 \ddot{u}^i = 0, \tag{9.2.1}$$

gde smo u prvoj aproksimaciji stavili

$$\rho \dot{v}^i = \rho_0 \ddot{u}^i = \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}.$$

Iz konstitutivnih jednačina vidimo da tenzor napona t^{ij} nije njima određen. Međutim, iz jednačine (4.2.6) nalazimo

$$t^{ij} = \tau^{ij} - h^{ijk}_{,k} - \rho l^{ij} + \rho \Gamma^{ij}, \tag{9.2.2}$$

pa diferencijalne jednačine kretanja (9.2.1) možemo pisati u obliku

$$\tau^{ij}_{,j} - h^{ijk}_{,jk} - \rho l^{ij}_{,j} + \rho \Gamma^{ij}_{,j} + \rho f^i - \rho_0 \ddot{u}^i = 0. \tag{9.2.3}$$

Ako okoline materijalnih tačaka u nedeformisanoj konfiguraciji posmatramo kao infinitezimalne sfere, možemo pisati

$$I^{KL} = IG^{KL}, \tag{9.2.4}$$

pa, na osnovu (4.1.7), u prvoj aproksimaciji dobijamo

$$i^{kl} = Ig^{kl}. \tag{9.2.5}$$

Koristeći ovaj izraz, iz (4.1.9) za inercijski spin nalazimo

$$\Gamma^{ij} = I\ddot{u}^{i,j} \tag{9.2.6}$$

gde smo u prvoj aproksimaciji stavili

$$\dot{v}^{i,j} = \ddot{u}^{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u^{i,j}).$$

Koristeći linearne konstitutivne jednačine (9.1.26) i (9.1.27), kao i izraz za inercijski spin (9.2.6), iz (9.2.3) nalazimo linearne parcijalne diferencijalne jednačine kretanja u obliku

$$\begin{aligned}&\mu\left(1-\frac{h_1+h_3}{\mu}\Delta\right)\Delta u^i+(\lambda+\mu)\left(1-\frac{2h_2+4h_4+2h_5}{\lambda+\mu}\Delta\right)u^{l,i}_{,l}-\\&-\rho\, l^{ij}_{,j}-\rho_0(1-I\Delta)\ddot{u}^i=0.\end{aligned} \tag{9.2.7}$$

Ovaj sistem od tri linearne parcijalne diferencijalne jednačine, zajedno sa jednačinom konzervacije mase, $\rho = \rho_0(1 - u^k_{,k})$, predstalja kompletan sistem jednačina za određivanje nepoznatih funkcija u^i i ρ.

10. ELASTIČNI MATERIJALI REDA DVA

10.1. Konstitutivne jednačine. U saglasnosti sa (5.2.9), jednačina balansa specifične energije deformacije za elastične materijale reda dva je oblika

$$\rho\dot{\sigma} = t^{(ij)} v_{i,j} + m^{ijk} \omega_{ij,k}. \tag{10.1.1}$$

S obzirom, međutim, da gradijent tenzora vrtložnosti ima osam međusobno nezavisnih koordinata, jer između njih devet postoji jedna veza oblika

$$\varepsilon^{ijk} \omega_{ij,k} = 0, \text{ odn. } \omega_{ij,k} + \omega_{jk,i} + \omega_{ki,j} = 0, \tag{10.1.2}$$

jasno je da svih devet koordinata tenzora naponskih spregova ne učestvuju u jednačini balansa (10.1.1).

Ako tenzor naponskih spregova razložimo na sferni i devijatorski deo, tj.

$$m^{ijk} = \frac{1}{3!} \delta^{ijk}_{lmn} m^{lmn} + \mu^{ijk}, \tag{10.1.3}$$

tada je očigledno, zbog (10.1.2),

$$m^{ijk} \omega_{ij,k} = \mu^{ijk} \omega_{ij,k}, \tag{10.1.4}$$

pri čemu devijatorski deo tenzora naponskih spregova takođe ima osam međusobno nezavisnih koordinata, jer između njih devet postoji jedna veza oblika

$$\varepsilon_{ijk} \mu^{ijk} = 0, \text{ odn. } \mu^{ijk} + \mu^{jki} + \mu^{kij} = 0. \tag{10.1.5}$$

S obzirom na (10.1.4), jednačinu (10.1.1) možemo napisati u obliku

$$\rho\dot{\sigma} = t^{(ij)} v_{i,j} + \mu^{ijk} \omega_{ij,k} \tag{10.1.6}$$

i iz nje zaključujemo da samo devijatorski deo tenzora naponskih spregova može biti određen konstitutivnim jednačinama.

Neodređenost tenzora naponskih spregova nema, međutim, uticaja u diferencijalnim jednačinama kretanja, jer je očigledno, iz (10.1.3),

$$m^{ijk}{}_{,jk} = \mu^{ijk}{}_{,jk} \tag{10.1.7}$$

Koristeći (9.1.2), jednačinu balansa specifične energije deformacije (10.1.6) možemo napisati u obliku

$$\rho\dot{\sigma} = \left(t^{(ij)} X^K_{;\,j} + \mu^{i(jk)} X^K_{;\,jk}\right) \dot{x}_{i;K} + \mu^{i(jk)} X^K_{;\,j} X^L_{;\,k} \dot{x}_{i;\,KL}, \tag{10.1.8}$$

odakle zaključujemo da je specifična energija deformacije funkcija oblika

$$\sigma = \sigma\left(x^k_{;K},\ x^k_{;KL}\right). \tag{10.1.9}$$

Diferenciranjem po vremenu odavde je

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x^k_{;K}} \dot{x}^k_{;K} + \frac{\partial \sigma}{\partial x^k_{;KL}} \dot{x}^k_{;KL}, \tag{10.1.10}$$

pa upoređivanjem ove sa jednačinom (10.1.8), dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} t^{(ij)} &= \rho\, g^{il}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^l_{;K}} x^j_{;K} + \frac{\partial \sigma}{\partial x^l_{;KL}} x^j_{;KL}\right), \\ \mu^{i(jk)} &= \rho\, g^{il} \frac{\partial \sigma}{\partial x^l_{;KL}} x^j_{;K}\, x^k_{;L}. \end{aligned} \tag{10.1.11}$$

Desna strana prve od ovih jednačina mora biti simetrična po indeksima i i j. Takođe, s obzirom da je $\mu^{ijk} = -\mu^{jik}$, biće $\mu^{(i(jk))} = 0$, pa otuda konstitutivne jednačine (10.1.11) moraju zadovoljavati uslove

$$\begin{aligned} &\left(g^{il} \frac{\partial \sigma}{\partial x^l_{;K}} x^j_{;K} + g^{il} \frac{\partial \sigma}{\partial x^l_{;KL}} x^j_{;KL}\right)_{[ij]} = 0, \\ &\left(g^{il} \frac{\partial \sigma}{\partial x^l_{;KL}} x^j_{;K}\, x^k_{;L}\right)_{(ijk)} = 0. \end{aligned} \tag{10.1.12}$$

Specifična energija deformacije (10.1.9) je funkcija 27 nezavisno promenljivih $x^k_{;K}$ i $x^k_{;KL}$, pa otuda sistem od 13 parcijalnih homogenih diferencijalnih jednačina (10.1.12) ima $27 - 13 = 14$ međusobno nezavisnih integrala. Te integrale ćemo uzeti u obliku

$$\begin{aligned} C_{KL} &= g_{kl}\, x^k_{;K}\, x^l_{;L}, \\ D_{KLM} &= C_{M[K,L]} = \frac{1}{2}\left(g_{kl}\, x^k_{;ML}\, x^l_{;K} - g_{kl}\, x^k_{;MK}\, x^l_{;L}\right), \end{aligned} \tag{10.1.13}$$

tako da sistem (10.1.12) ima opšte rešenje

$$\sigma = \sigma\left(C_{KL},\ D_{KLM}\right). \tag{10.1.14}$$

Koristeći (10.1.14) i (10.1.13), konstitutivne jednačine (10.1.11) postaju

$$\begin{aligned} t^{(ij)} &= 2\rho\left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_{LK}} x^i_{;K}\, x^j_{;L} + \frac{\partial \sigma}{\partial D_{KLM}} x^{(i}_{;K}\, x^{j)}_{;LM}\right), \\ \mu^{i(jk)} &= \rho \frac{\partial \sigma}{\partial D_{KLM}} x^i_{;K}\, x^{(j}_{;L}\, x^{k)}_{;M}. \end{aligned} \tag{10.1.15}$$

Ovo su nelinearne konstitutivne jednačine za anizotropne elastične materijale reda dva i invarijantne su u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Ako umesto tenzora C_{KL} uvedemo tenzor relativne deformacije

$$2\,E_{KL}=C_{KL}-G_{KL}, \tag{10.1.16}$$

konstitutivne jednačine dobijaju oblik

$$\begin{aligned} t^{(ij)}&=\rho\left(\frac{\partial\sigma}{\partial E_{KL}}x^i_{;K}x^j_{;L}+2\frac{\partial\sigma}{\partial D_{KLM}}x^{(i}_{;K}x^{j)}_{;LM}\right),\\ \mu^{i(jk)}&=\rho\frac{\partial\sigma}{\partial D_{KLM}}x^i_{;K}x^{(j}_{;L}x^{k)}_{;M}. \end{aligned} \tag{10.1.17}$$

Na osnovu (10.1.16) i (10.1.13), koristeći relaciju

$$x^k_{;K}=g^k_K+u^k_{;K},$$

tenzore deformacije E_{KL} i D_{KLM} možemo izraziti u obliku

$$\begin{aligned} 2\,E_{KL}&=u_{K,L}+u_{L,K}+u_{M,K}u^M_{,L},\\ D_{KLM}&=\frac{1}{2}\left(u_{K,LM}-u_{L,KM}+u_{R,ML}u^R_{,K}-u_{R,MK}u^R_{,L}\right). \end{aligned} \tag{10.1.18}$$

U linearnoj teoriji ovi tenzori su oblika

$$\begin{aligned} E_{KL}&=\frac{1}{2}(u_{K,L}+u_{L,K}),\\ D_{KLM}&=\frac{1}{2}(u_{K,LM}-u_{L,KM}). \end{aligned} \tag{10.1.19}$$

Za slučaj izotropnih materijala možemo uvesti sledeće tenzore deformacije

$$\begin{aligned} c_{kl}&=G_{KL}X^K_{;k}X^L_{;l},\\ d_{klm}&=c_{m[k,l]}=\frac{1}{2}\left(G_{KL}X^K_{;ml}X^L_{;k}-G_{KL}X^K_{;l}X^L_{;km}\right), \end{aligned} \tag{10.1.20}$$

tako da konstitutivne jednačine (10.1.11) postaju

$$\begin{aligned} t^{(ij)}&=-\rho\left(2\frac{\partial\sigma}{\partial c_{jk}}c^i_k+2\frac{\partial\sigma}{\partial d_{jkl}}d^i{}_{.kl}+\frac{\partial\sigma}{\partial d_{klj}}d_{kl}{}^{..i}\right),\\ \mu^{i(jk)}&=-\frac{1}{2}\rho\,c^i_l\left(\frac{\partial\sigma}{\partial d_{ljk}}+\frac{\partial\sigma}{\partial d_{lkj}}\right). \end{aligned} \tag{10.1.21}$$

Ako, pak, uvedemo prostorni tenzor relativne deformacije

$$2\,e_{ij}=g_{ij}-c_{ij}, \tag{10.1.22}$$

konstitutivne jednačine dobijaju oblik

$$\begin{aligned} t^{(ij)}&=\rho\left(\frac{\partial\sigma}{\partial e_{ij}}-2\frac{\partial\sigma}{\partial e_{jk}}e^i_k-2\frac{\partial\sigma}{\partial d_{jkl}}d^i{}_{.kl}-\frac{\partial\sigma}{\partial d_{klj}}d_{kl}{}^{..i}\right),\\ \mu^{i(jk)}&=\rho\left(\frac{\partial\sigma}{\partial d_{ijk}}+\frac{\partial\sigma}{\partial d_{ikj}}\right)-\rho\,e^i_l\left(\frac{\partial\sigma}{\partial d_{ljk}}+\frac{\partial\sigma}{\partial d_{lkj}}\right), \end{aligned} \tag{10.1.23}$$

pri čemu, na osnovu (10.1.22) i (10.1.20), koristeći relaciju

$$X^K_{;\,k}=g^K_k-u^K_{;\,k},$$

za tenzore deformacije e_{ij} i d_{ijk} dobijamo

$$\begin{aligned} 2\,e_{ij}&=u_{i,j}+u_{j,i}-u_{m,i}\,u^m_{,\,j},\\ d_{klm}&=\frac{1}{2}\left(u_{l,km}-u_{k,lm}+u_{r,ml}\,u^r_{,k}-u_{r,km}\,u^r_{,l}\right). \end{aligned} \tag{10.1.24}$$

U linearnoj teoriji ovi tenzori su oblika

$$\begin{aligned} e_{ij}&=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right),\\ d_{ijk}&=\frac{1}{2}\left(u_{j,ik}-u_{i,jk}\right). \end{aligned} \tag{10.1.25}$$

U linearnoj teoriji, izostavljanjem nelinearnih članova u jednačinama (10.1.23), konstitutivne jednačine su

$$\begin{aligned} t^{(ij)}&=\rho\frac{\partial\sigma}{\partial e_{ij}},\\ \mu^{i(jk)}&=\rho\left(\frac{\partial\sigma}{\partial d_{ijk}}+\frac{\partial\sigma}{\partial d_{ikj}}\right), \end{aligned} \tag{10.1.26}$$

pri čemu je

$$\sigma=\sigma\left(e_{ij},\ d_{ijk}\right), \tag{10.1.27}$$

a tenzori deformacije su oblika (10.1.25).

S obzirom da tenzor d_{ijk} ima osam međusobno nezavisnih koordinata, funkcionalnu zavisnost specifične energije deformacije od tog tenzora ograničićemo na takav način da bude ([19])

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\sigma}{\partial d_{ijk}}=0,\quad \text{odn.}\quad \frac{\partial\sigma}{\partial d_{ijk}}+\frac{\partial\sigma}{\partial d_{jki}}+\frac{\partial\sigma}{\partial d_{kij}}=0. \tag{10.1.28}$$

Konstitutivnim jednačinama (10.1.26) određen je simetrični deo $\mu^{i(jk)}$ devijatorskog dela tenzora naponskih spregova. Ovaj tenzor, kao i μ^{ijk}, ima osam međusobno nezavisnih koordinata. Da bismo, međutim, znajući $\mu^{i(jk)}$, odredili μ^{ijk}, postupićemo na sledeći način.

Uvodeći oznaku

$$\mu^{i(jk)} = \nu^{ijk} = \nu^{ikj}, \tag{10.1.29}$$

lako je pokazati, s obzirom na (10.1.5), da važi

$$\mu^{ijk} = \frac{4}{3}\nu^{[ij]k}. \tag{10.1.30}$$

Koristeći, dalje, (10.1.28), iz $(10.1.26)_2$ dobijamo

$$\nu^{i[jk]} = \frac{3}{2}\rho\frac{\partial\sigma}{\partial d_{ijk}},$$

tako da je, s obzirom na (10.1.30),

$$\mu^{ijk} = 2\rho\frac{\partial\sigma}{\partial d_{ijk}}. \tag{10.1.31}$$

S obzirom da su antisimetrični po prva dva indeksa, tenzore μ^{ijk} i d_{ijk} možemo prikazati pomoću tenzora drugog reda, tj.

$$\mu^{ijk} = \varepsilon^{ijl}\mu_l{}^{k}, \quad d_{ijk} = \varepsilon_{ijl}\varkappa^{l}{}_{.k}, \tag{10.1.32}$$

odnosno

$$\mu_l{}^{k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}\mu^{ijk}, \quad \varkappa^{l}{}_{.k} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijl}d_{ijk}. \tag{10.1.33}$$

Koristeći ove relacije, konstitutivnu jednačinu (10.1.31) možemo izraziti u obliku

$$\mu^{ij} = \rho\frac{\partial\sigma}{\partial\varkappa_{ij}}, \tag{10.1.34}$$

pri čemu je

$$\mu^{i}_{.i} = 0, \quad \varkappa^{i}_{.i} = 0, \quad g_{ij}\frac{\partial\sigma}{\partial\varkappa_{ij}} = 0. \tag{10.1.35}$$

Tenzor μ^{ij} je devijatorski deo tenzora naponskih spregova

$$\mu^{ij} = m^{ij} - \frac{1}{3}m_l g^{ij}, \quad \left(m_i^{\cdot j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{lri}m^{lrj}\right), \tag{10.1.36}$$

a tenzor $\varkappa_{ij}$, koristeći $(10.1.25)_2$ i $(10.1.32)_2$, možemo izraziti u obliku

$$\varkappa^{l}{}_{.k} = \frac{1}{2}\varepsilon^{lij}u_{j,ik}, \tag{10.1.37}$$

odnosno

$$\varkappa^{l}{}_{.k} = -r^{l}{}_{,k}, \tag{10.1.38}$$

gde je

$$r^l=\frac{1}{2}\varepsilon^{lij}u_{i,j}, \quad \text{odn.} \quad \{r^l\}=-\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u}. \tag{10.1.39}$$

U konstitutivnim jednačinama $(10.1.26)_1$ i (10.1.34) specifična energija deformacije je funkcija tenzora e_{ij} i $\varkappa_{ij}$. U linearnoj teoriji ona se može predstaviti kvadratnim polinomom oblika

$$\rho\sigma=\frac{1}{2}A^{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}B^{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}, \tag{10.1.40}$$

gde su

$$\begin{aligned}A^{ijkl}&=\lambda g^{ji}g^{kl}+\mu(g^{il}g^{jk}+g^{ik}g^{jl}),\\ B^{ijkl}&=\tau_1 g^{ij}g^{kl}+\tau_2 g^{ik}g^{jl}+\tau_3 g^{il}g^{jk},\end{aligned} \tag{10.1.41}$$

materijalni izotropni tenzori, a λ, μ, τ_1, τ_2 i τ_3 materijalne konstante.

Koristeći sada (10.1.40) i (10.1.41), iz $(10.1.26)_1$ i (10.1.34) dobijamo linearne konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned}t^{(ij)}&=\lambda e_l g^{ij}+2\mu e^{ij},\\ \mu^{ij}&=\nu_1\varkappa^{ij}+\nu_2\varkappa^{ji},\end{aligned} \tag{10.1.42}$$

gde smo uveli oznake

$$\nu_1=\tau_2, \quad \nu_2=\tau_3.$$

Konstitutivne jednačine (10.1.42) su identične konstitutivnim jednačinama koje su dobili R. D. Mindlin i H. F. Tiersten [20] linearizujući konstitutivne jednačine koje je izveo R. A. Toupin [19].

10.2. Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja. Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja za kontinuum reda dva, na osnovu (5.2.4), možemo, u linearnoj aproksimaciji, napisati u obliku

$$t^{(ij)}{}_{,j}+t^{[ij]}{}_{,j}+\rho f^i=\rho_0\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}. \tag{10.2.1}$$

Konstitutivnim jednačinama nije određen antisimetrični deo tenzora napona. Međutim, iz (5.2.6) nalazimo

$$t^{[ij]}=-m^{ijk}{}_{,k}+\rho(\Gamma^{ij}-l^{ij}), \tag{10.2.2}$$

odakle sledi

$$t^{[ij]}{}_{,j}=-m^{ijk}{}_{,jk}+\rho(\Gamma^{ij}{}_{,j}-l^{ij}{}_{,j}), \tag{10.2.3}$$

pa (10.2.1) možemo napisati u obliku

$$t^{(ij)}_{,j}-\mu^{ijk}{}_{,jk}+\rho(\Gamma^{ij}{}_{,j}-l^{ij}{}_{,j})+\rho f^i=\rho_0\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \tag{10.2.4}$$

pri čemu smo iskoristili i (10.1.7).

Koristeći (10.1.33), iz (10.1.42) nalazimo

$$\mu^{ijk} = \nu_1 d^{ijk} + \frac{1}{2} \nu_2 \varepsilon^{ijl} \varepsilon^{kmn} d_{mnl}, \tag{10.2.5}$$

odakle sledi

$$\mu^{ijk}{}_{,jk} = \nu_1 d^{ijk}{}_{,jk}, \quad (\varepsilon^{ijl} \varepsilon^{kmn} d_{mnl,jk} \equiv 0). \tag{10.2.6}$$

Posmatrajući materijalne tačke kontinuuma kao infinitezimalne sfere, na osnovu (5.1.7), za inercijski spin u prvoj aproksimaciji dobijamo

$$\Gamma^{ij} = I \dot{\omega}^{ij} = \frac{1}{2} I \left(\frac{\partial^2 u^{i,j}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{j,i}}{\partial t^2} \right), \tag{10.2.7}$$

odakle je

$$\Gamma^{ij}{}_{,j} = \frac{1}{2} I \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u^i - u^j{}_{,j}{}^{;i}). \tag{10.2.8}$$

Koristeći sada $(10.1.42)_1$, (10.2.6), (10.2.8) i (10.1.25), iz (10.2.4) dobijamo linearne parcijalne diferencijalne jednačine kretanja u obliku

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) u^k{}_{,k}{}^{;i} + \mu \Delta u^i + \frac{1}{2} \nu_1 \Delta\Delta u^i - \frac{1}{2} \nu_1 \Delta u^k{}_{,k}{}^{;i} - \rho l^{ij}{}_{,j} + \\ + \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (I \Delta u^i - I u^k{}_{,k}{}^{;i} - u^i) = 0.\end{aligned} \tag{10.2.9}$$

Ako zanemarimo uticaj inercijskog spina i zapreminskih spregova, ove jednačine postaju

$$(\lambda + \mu) u^k{}_{,k}{}^{;i} + \mu \Delta u^i + \frac{1}{2} \nu_1 \Delta\Delta u^i - \frac{1}{2} \nu_1 \Delta u^k{}_{,k}{}^{;i} - \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = 0, \tag{10.2.10}$$

ili u vektorskom obliku

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} + \frac{1}{2} \nu_1 \Delta\Delta \vec{u} - \frac{1}{2} \nu_1 \Delta \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{u}) - \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0. \tag{10.2.11}$$

Za nestišljive materijale je

$$u^k{}_{,k} = \operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

pa, bez uticaja inercijskog spina i zapreminskih spregova, linearne parcijalne diferencijalne jednačine kretanja su

$$\mu \Delta u^i + \frac{1}{2} \nu_1 \Delta\Delta u^i = \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}; \tag{10.2.12}$$

ili u vektorskom obliku

$$\mu \Delta \vec{u} + \frac{1}{2} \nu_1 \Delta\Delta \vec{u} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \tag{10.2.13}$$

Važno je, na kraju, uočiti da se u parcijalnim diferencijalnim jednačinama kretanja ne pojavljuje materijalna konstanta ν_2 koja figuriše u linearnim konstantnim jednačinama.

Sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine kretanja (10.2.9), zajedno sa jednačinom konverzacije mase, $\rho = \rho_0 (1 - u^k{}_{,k})$, predstavlja kompletan sistem jednačina za određivanje nepoznatih funkcija u^i i ρ.

11. PROSTI MIKROFLUIDI

11.1. Disipativna funkcija i konstitutivne jednačine. Za razliku od ponašanja elastičnih materijala, kod viskoznog tečenja postoji disipacija mehaničke energije. To znači da proces viskoznog tečenja nije mehanički reverzibilan, pa za izvođenje konstitutivnih jednačina nije dovoljan samo prvi zakon termodinamike (zakon konzervacije mehaničke energije) već i drugi zakon, u nekom od svojih ekvivalentnih oblika.

U saglasnosti sa jednačinama (6.1.16) i (6.1.17), disipativna funkcija je

$$\rho\,\Phi = {}_D\tau_{(a)}\,\dot{v}^{(a)} \geqslant 0, \tag{11.1.1}$$

pri čemu nemehaničke efekte nismo uzeli u obzir.

Jednačina (11.1.1) daje vezu između disipativne funkcije i mehaničkih ireverzibilnih sila. Da bismo, međutim, ireverzibilne sile izrazili preko disipativne funkcije, iskoristićemo princip najmanje ireverzibilne sile [18], tako da dobijamo

$${}_D\tau_{(a)} = \rho\,\Phi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{v}^{(b)}}\,\dot{v}^{(b)}\right)^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{v}^{(a)}}, \tag{11.1.2}$$

gde je Φ funkcija generalisanih brzina $\dot{v}^{(a)}$.

Viskozni fluid sa mikrostrukturom ćemo definisati kao specijalnu klasu viskoelastičnih materijala kod koje su reverzibilni delovi tenzora napona dati sa

$${}_Et^{ij} = -pg^{ij}, \quad {}_E\tau^{ij} = -pg^{ij}, \quad {}_Eh^{ijk} = 0, \tag{11.1.3}$$

tako da je

$$t^{ij} = -pg^{ij} + {}_Dt^{ij}, \quad \tau^{ij} = -pg^{ij} + {}_D\tau^{ij}, \quad h^{ijk} = {}_Dh^{ijk}, \tag{11.1.4}$$

gde je p hidrostatički pritisak.

Koristeći (11.1.1) i (6.1.2), disipativnu funkciju možemo izraziti u obliku

$$\begin{aligned}\rho\,\Phi = {}&{}_Dt^{ij}\,g_{il}\,X^K_{;j}\,\dot{x}^l_{;K} + \left({}_D\tau^{ij}\,d^{(\alpha)}_{.j} - {}_Dt^{ij}\,d^{(\alpha)}_{.j} + {}_Dh^{ijk}\,d^{(\alpha)}_{.j;K}\,X^K_{;k}\right)\dot{d}_{i(\alpha)} + \\ &+ {}_Dh^{ijk}\,d^{(\alpha)}_{.j}\,X^K_{;k}\,\dot{d}_{i(\alpha);K},\end{aligned} \tag{11.1.5}$$

pri čemu smo stavili

$${}_D\tau_{(a)} = \begin{cases} {}_Dt^{ij}\,g_{il}\,X^K_{;j} & \text{za } a = 1, 2, \ldots, 9 \\ {}_D\tau^{ij}\,d^{(\alpha)}_{.j} - {}_Dt^{ij}\,d^{(\alpha)}_{.j} + {}_Dh^{ijk}\,d^{(\alpha)}_{.j;K}\,X^K_{;k} & \text{za } a = 10, 11, \ldots, 18 \\ {}_Dh^{ijk}\,d^{(\alpha)}_{.j}\,X^K_{;k} & \text{za } a = 19, 20, \ldots, 45 \end{cases} \tag{11.1.7}$$

i

$$\dot{v}^{(a)} = \begin{cases} \dot{x}^{l}_{;K} & \text{za} \quad a = 1, 2, \dots, 9 \\ \dot{d}_{i(\alpha)} & \text{za} \quad a = 10, 11, \dots, 18 \\ \dot{d}_{i(\alpha);K} & \text{za} \quad a = 19, 20, \dots, 45. \end{cases} \tag{11.1.7}$$

Iz (11.1.5) zaključujemo da je

$$\Phi = \Phi\left(\dot{x}^{k}_{;K}, \quad \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)}, \quad \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha);K}\right), \tag{11.1.8}$$

tako da koristeći (11.1 5), iz (11.1.2) dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} {}_D t^{ij} &= \lambda g^{il} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{l}_{;K}} x^{j}_{;K}, \\ {}_D \tau^{ij} &= \lambda g^{il} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{l}_{;K}} x^{j}_{;K} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^{l}_{\cdot(\alpha)}} d^{j}_{\cdot(\alpha)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^{l}_{\cdot(\alpha);K}} d^{j}_{\cdot(\alpha);K} \right), \\ {}_D h^{ijk} &= \lambda g^{il} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^{l}_{\cdot(\alpha);K}} d^{j}_{\cdot(\alpha)} x^{k}_{;K}, \end{aligned} \tag{11.1.9}$$

gde smo uveli oznaku

$$\lambda = \rho \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{l}_{;K}} \dot{x}^{l}_{;K} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^{l}_{\cdot(\alpha)}} \dot{d}^{l}_{\cdot(\alpha)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^{l}_{\cdot(\alpha);K}} \dot{d}^{l}_{\cdot(\alpha);K} \right)^{-1}. \tag{11.1.10}$$

Desna strana jednačine $(11.1.9)_2$ mora, međutim, zadovoljavati uslov

$$\left[g^{il} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^{l}_{;K}} x^{j}_{;K} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^{l}_{\cdot(\alpha)}} d^{j}_{\cdot(\alpha)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^{l}_{\cdot(\alpha);K}} d^{j}_{\cdot(\alpha);K} \right) \right]_{[ij]} = 0, \tag{11.1.11}$$

u cilju da bi drugi Košijev zakon kretanja bio zadovoljen. Poslednja jednačina, koja predstavlja sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine, je *uslov objektivnosti* za disipativnu funkciju i konstitutivne jednačine, tj. uslov njihove invarijantnosti u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Disipativna funkcija (11.1.8) je funkcija od 45 nezavisno promenljivih $\dot{x}^{k}_{;K}$, $\dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)}$ i $\dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha);K}$. Sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine (11.1.11) ima stoga $45-3=42$ osnovna međusobno nezavisna integrala. Te integrale ćemo uzeti u obliku

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\dot{d}_{i(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot j} + \dot{d}_{j(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot i}\right) = \nu_{(ij)}, \\ a_{ij} &= g_{il} X^{K}_{;j} \dot{x}^{l}_{;K} - \dot{d}_{i(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot j} = v_{i,j} - \nu_{ij} \\ d_{ijk} &= \dot{d}_{i(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot j;K} X^{K}_{;k} + \dot{d}_{i(\alpha);K} X^{K}_{;k} d^{(\alpha)}_{\cdot j} = \nu_{ij,k}, \end{aligned} \tag{11.1.12}$$

tako da sistem (11.1.11) ima opšte rešenje

$$\Phi = \Phi\left(f_{ij}, \quad a_{ij}, \quad d_{ijk}\right). \tag{11.1.13}$$

Lako je pokazati da su tenzori f_{ij}, a_{ij} i d_{ijk} svi objektivni, tj. da ostaju invarijantni pri superponiranom krutom kretanju.

Zamenjujući sada (11.1.13) u (11.1.9) i koristeći (11.1.12), dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$
\begin{aligned}
{}_D t^{ij} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}}, \\
{}_D \tau^{ij} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial f_{ij}}, \qquad (11.1.14) \\
{}_D h^{ijk} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial d_{ijk}},
\end{aligned}
$$

gde je

$$\lambda = \rho \, \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_{kl}} a_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{kl}} f_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial d_{klm}} d_{klm} \right)^{-1}. \qquad (11.1.15)$$

Jednačine (11.1.14) su nelinearne konstitutivne jednačine za proste izotropne mikrofluide i invarijantne su u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Disipativna funkcija (11.1.13) je izotropna funkcija svojih agrumenata i pretpostavljamo da se može predstaviti u obliku stepenog reda. U linearnoj teoriji, kada nema inicijalnih napona, ona je kvadratni polinom oblika

$$\rho \, \Phi = \frac{1}{2} C^{ijkl} a_{ij} a_{kl} + D^{ijkl} a_{ij} f_{kl} + \frac{1}{2} E^{ijkl} f_{ij} f_{kl} + \frac{1}{2} F^{ijklmn} d_{ijk} d_{lmn}, \qquad (11.1.16)$$

gde su C^{ijkl}, D^{ijkl}, E^{ijkl} i F^{ijklmn} izotropni tenzori koji se mogu predstaviti u obliku $(7.5.6)_{3,4,5,6}$. Koristeći te izraze i (11.1.16), iz (11.1.14) dobijamo linearne konstitutivne jednačine u obliku

$$
\begin{aligned}
t^{ij} &= (-p + b_1 f_l + c_1 a_l) g^{ij} + 2 b_2 f^{ij} + c_2 a^{ij} + c_3 a^{ji}, \\
\tau^{ij} &= (-p + a_1 f_l + b_1 a_l) g^{ij} + 2 a_2 f^{ij} + 2 b_2 a^{(ij)}, \\
h^{ijk} &= d_1 (d^{kl}{}_{\cdot\cdot l} g^{ij} + d^{l\cdot i}{}_{\cdot l} g^{jk}) + d_2 (d^{lk}{}_{\cdot\cdot l} g^{ij} + d^{l\cdot j}{}_{\cdot l} g^{ik}) + \\
&\quad + d_3 d^{l\cdot k}{}_{\cdot l} g^{ij} + d_4 d^{il}{}_{\cdot\cdot l} g^{jk} + d_5 (d^{li}{}_{\cdot\cdot l} g^{jk} + d^{jl}{}_{\cdot\cdot l} g^{ik}) + \qquad (11.1.17) \\
&\quad + d_6 d^{lj}{}_{\cdot\cdot l} g^{ik} + d_7 d^{ijk} + d_8 (d^{jki} + d^{kij}) + \\
&\quad + d_9 d^{ikj} + d_{10} d^{jik} + d_{11} d^{kji},
\end{aligned}
$$

gde smo, s obzirom na (11.1.4), dodali i reverzibilne delove tenzora napona i gde su a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, ..., d_{11} materijalne konstante — koeficijenti viksoznosti. U linearnoj teoriji, prema tome, ukupan broj koeficijenata viskoznosti iznosi 18, što je u saglasnosti sa brojem materijalnih konstanata u linearnoj teoriji elastičnih materijala sa mikrostrukturom.

Napomenimo, na kraju, da je C. A. Eringen [21], izvodeći linearne konstitutivne jednačine za proste mikrofluide, dobio veći broj koeficijenata viskoznosti. On je, naime, u jednačini $(11.1.17)_3$ dobio 15 materijalnih konstanata, tako da u njegovim linearnim konstitutivnim jednačinama ukupan broj koeficijenata viskoznosti iznosi 22.

11.2. Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja. Uvodeći momente mikroinercije

$$i^{ij} = I^{\alpha\beta} d^{i}_{\cdot(\alpha)} d^{j}_{\cdot(\beta)} = I^{KL} \chi^{i}_{\cdot K} \chi^{j}_{\cdot L}\,, \tag{11.2.1}$$

dobijamo

$$\dot{\overline{i^{ij}}} = I^{\alpha\beta} \dot{d}^{i}_{\cdot(\alpha)} d^{j}_{\cdot(\beta)} + I^{\alpha\beta} d^{i}_{\cdot(\alpha)} \dot{d}^{j}_{\cdot(\beta)}\,, \tag{11.2.2}$$

odnosno, stavljajući $\dot{d}^{i}_{\cdot(\alpha)} = \nu^{i}_{\cdot l}\, d^{l}_{\cdot(\alpha)}$ i koristeći (11.2.1),

$$\frac{\partial i^{ij}}{\partial t} + i^{ij}_{,k} v^{k} - i^{lj} \nu^{i}_{\cdot l} - i^{li} \nu^{j}_{\cdot l} = 0, \tag{11.2.3}$$

što je sistem od šest parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje šest veličina i^{ij}.

Stavljajući

$$\ddot{d}^{i}_{\cdot(\alpha)} = \left(\dot{\nu}^{i}_{\cdot l} + \nu^{i}_{\cdot n} \nu^{n}_{\cdot l}\right) d^{l}_{\cdot(\alpha)}$$

i koristeći (11.2.1), iz (2.3.10) za inercijski spin dobijamo

$$\Gamma^{ij} = i^{lj} \left(\dot{\nu}^{i}_{\cdot l} + \nu^{i}_{\cdot k} \nu^{k}_{\cdot l}\right) \tag{11.2.4}$$

i vidimo da je u potpunosti određen veličinama i^{ij} i ν_{ij}.

U linearnoj teoriji prostih mikrofluida ukupan broj nepoznatih funkcija ρ, v^{i}, ν_{ij} i i^{ij} iznosi $1+3+9+6=19$. Za njihovo određivanje na raspolaganju su nam 19 parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^{k})_{,k} = 0,\\
&\frac{\partial i^{ij}}{\partial t} + i^{ij}_{,k} v^{k} - i^{lj} \nu^{i}_{\cdot l} - i^{li} \nu^{j}_{\cdot l} = 0,\\
&t^{ij}_{,j} + \rho\left(f^{i} - \dot{v}^{i}\right) = 0,\\
&t^{ij} - \tau^{ij} + h^{ijk}_{,k} + \rho\,(l^{ij} - \Gamma^{ij}) = 0.
\end{aligned} \tag{11.2.5}$$

Koristeći linearne konstitutivne jednačine (11.1.17), parcijalne diferencijalne jednačine $(11.2.5)_{3,4}$ dobijamo u obliku

$$\begin{aligned}
&\rho \frac{\partial v^{i}}{\partial t} + \rho v^{i}_{,k} v^{k} + p_{,j} g^{ij} - (c_1 + c_3) v^{k}_{,kj} g^{ij} - c_2 v^{i}_{,kl} g^{kl} +\\
&+ (c_1 + c_2 - a_1) \nu^{k}_{\cdot k,j} g^{ij} + (c_2 - b_2) \nu^{ik}_{,k} - b_2 \nu^{ki}_{,k} - \rho f^{i} = 0,\\
&\rho \frac{\partial \nu^{i}_{\cdot l}}{\partial t} i^{lj} + \rho\, i^{lj} \nu^{i}_{\cdot l,k} v^{k} + \rho\, i^{lj} \nu^{i}_{\cdot k} \nu^{k}_{\cdot l} + (b_1 - c_1) v^{k}_{,k} g^{ij} +\\
&+ (b_2 - c_2) v^{i,j} + (b_2 - c_3) v^{j,i} + (a_1 - 2b_1 + c_2) \nu^{k}_{\cdot k} g^{ij} + (a_2 - 2b_2 + c_2) \nu^{ij} +\\
&+ (a_2 - 2b_2 + c_3) \nu^{ji} - (d_1 + d_2) \nu^{kl}_{,kl} g^{ij} - (d_1 + d_2) \nu^{k,ij}_{\cdot k} - d_3 \nu^{k,l}_{\cdot k\cdot l} g^{ij} -\\
&- (d_4 + d_9) \nu^{ik,j}_{\cdot\cdot\cdot k} - (d_5 + d_8) \nu^{ki,j}_{\cdot\cdot\cdot k} - (d_5 + d_6) \nu^{jk,i}_{\cdot\cdot\cdot k} - d_7 \nu^{ij,k}_{\cdot\cdot\cdot k} -\\
&- d_{10} \nu^{ji,k}_{\cdot\cdot\cdot k} - d_{11} \nu^{kj,i}_{\cdot\cdot\cdot k} - \rho\, l^{ij} = 0.
\end{aligned} \tag{11.2.6}$$

12. PROSTI MIKROPOLARNI FLUIDI

12.1. Konstitutivne jednačine. Naponsko stanje mikropolarnog kontinuuma određeno je nisimetričnim tenzorom napona t^{ij} i tenzorom naponskih spregova m^{ijk}. Ako ove tenzore razložimo na reverzibilne i ireverzibilne delove, tj.

$$t^{ij} = -pg^{ij} + {}_D t^{ij}, \quad m^{ijk} = {}_D m^{ijk}, \tag{12.1.1}$$

tada, na osnovu (11.1.1) i (6.1.3), disipativnu funkciju možemo izraziti u obliku

$$\rho\Phi = {}_D t^{ij} v_{i,j} - {}_D t^{[ij]} \nu_{ij} + {}_D m^{ijk} \nu_{ij,k}, \tag{12.1.2}$$

Ako sada iskoristimo relacije

$$v_{i,j} = \dot{x}_{i;K} X^{K}_{;j}, \quad \nu_{ij} = \dot{d}_{i(\alpha)} d^{(\alpha)}_{\cdot j},$$

$$\nu_{ij,k} = \dot{d}_{i(\alpha)} X^{K}_{;k} d^{(\alpha)}_{\cdot j;K} + \dot{d}_{i(\alpha);K} X^{K}_{;k} d^{(\alpha)}_{\cdot j},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \rho\Phi = {}_D t^{ij} X^{K}_{;j} \dot{x}_{i;K} + \left(-{}_D t^{[ij]} d^{(\alpha)}_{\cdot j} + {}_D m^{ijk} X^{K}_{;k} d^{(\alpha)}_{\cdot j;K}\right) \dot{d}_{i(\alpha)} + \\ + {}_D m^{ijk} X^{K}_{;k} d^{(\alpha)}_{\cdot j} \dot{d}_{i(\alpha);K}, \end{aligned} \tag{12.1.3}$$

što možemo napisati u obliku

$$\rho\Phi = {}_D\tau_{(a)} \dot{v}^{(a)} \tag{12.1.4}$$

gde smo stavili

$${}_D\tau_{(\alpha)} = \begin{cases} {}_D t^{ij} X^{K}_{;k} & \text{za } a = 1, 2, \dots, 9 \\ -{}_D t^{[ij]} d^{(\alpha)}_{\cdot j} + {}_D m^{ijk} X^{K}_{;k} d^{(\alpha)}_{\cdot j;K} & \text{za } a = 10, 11, \dots, 18 \\ {}_D m^{ijk} X^{K}_{;k} d^{(\alpha)}_{\cdot j} & \text{za } a = 19, 20, \dots, 45, \end{cases} \tag{12.1.5}$$

i

$$\dot{v}^{(\alpha)} = \begin{cases} \dot{x}^{k}_{;K} & \text{za } a = 1, 2, \dots, 9 \\ \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha)} & \text{za } a = 10, 11, \dots, 18 \\ \dot{d}^{k}_{\cdot(\alpha);K} & \text{za } a = 19, 20, \dots, 45. \end{cases} \tag{12.1.6}$$

Koristeći izraze (12.1.3) — (12.1.6), iz (11.1.2) dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$
\begin{aligned}
{}_D t^{ij} &= \lambda g^{il} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} x^j_{;K}, \\
{}_D t^{[ij]} &= -\lambda g^{il} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^l_{\cdot(\alpha)}} d^j_{\cdot(\alpha)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^l_{\cdot(\alpha);K}} d^j_{\cdot(\alpha);K} \right), \qquad (12.1.7) \\
{}_D m^{ijk} &= \lambda g^{il} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^l_{\cdot(\alpha);K}} d^j_{\cdot(\alpha)} x^k_{;K},
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\lambda = \rho \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} \dot{x}^l_{;K} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^l_{\cdot(\alpha)}} \dot{d}^l_{\cdot(\alpha)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{d}^l_{\cdot(\alpha);K}} \dot{d}^l_{\cdot(\alpha);K} \right)^{-1}. \qquad (12.1.8)
$$

Ako sada iskoristimo relacije

$$
\begin{aligned}
\dot{d}^l_{\cdot(\alpha)} &= \nu^l_{\cdot m} d^m_{\cdot(\alpha)}, \\
\dot{d}^l_{\cdot(\alpha);K} &= \nu^l_{\cdot m,k} x^k_{;K} d^m_{\cdot(\alpha)} + \nu^l_{\cdot m} d^m_{\cdot(\alpha);K},
\end{aligned}
$$

konstitutivne jednačine možemo napisati u obliku

$$
\begin{aligned}
{}_D t^{ij} &= \lambda g^{il} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} x^j_{;K}, \\
{}_D t^{[ij]} &= -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_{ij}}, \qquad (12.1.9) \\
{}_D m^{ijk} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_{ij,k}},
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\lambda = \rho \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} \dot{x}^l_{;K} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_{kl}} \nu_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_{kl,m}} \nu_{kl,m} \right)^{-1} \qquad (12.1.10)
$$

i

$$
\Phi = \Phi\left(\dot{x}^k_{;k},\ \nu^k_{\cdot l},\ \nu^k_{\cdot l,m}\right). \qquad (12.1.11)
$$

Prve dve od jednačina (12.1.9) moraju, međutim, biti saglasne, tj. mora biti

$$
\left(g_{il} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} x^j_{;K} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_{ij}} \right)_{[ij]} = 0. \qquad (12.1.12)
$$

Ova jednačina, koja predstavlja sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine, predstavlja *uslov objektivnosti* za disipativnu funkciju i konstitutivne jednačine, tj. uslov njihove invarijantnosti u odnosu na superponirana kruta kretanja. Ako je ovaj uslov zadovoljen, tada druga od jednačina (12.1.9) postaje suvišna, jer je sadržana u prvoj kao njen antisimetrični deo, pa konstitutivne jednačine možemo, konačno, pisati u obliku

$$
\begin{aligned}
{}_D t^{ij} &= \lambda g^{il} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} x^j_{;K}, \\
{}_D m^{ijk} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_{ij,k}},
\end{aligned}
\tag{12.1.13}
$$

pri čemu mora biti zadovoljen uslov (12.1.12).

Disipativna funkcija (12.1.11) zavisi od 21 nezavisno promenljivih $\dot{x}^k_{;K}$, ν_{kl} i $\nu_{kl,m}$. Sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine (12.1.12) dozvoljava stoga $21-3=18$ međusobno nezavisnih osnovnih integrala. Te integrale ćemo uzeti u obliku

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= v_{i,j} - \nu_{ij} = \dot{x}_{i;K} X^K_{;j} - \nu_{ij}, \\
d_{ijk} &= \nu_{ij,k},
\end{aligned}
\tag{12.1.14}
$$

tako da (12.1.12) ima opšte rešenje

$$
\Phi = \Phi(a_{ij}, d_{ijk}), \tag{12.1.15}
$$

Zamenjujući (12.1.15) u (12.1.13) i koristeći (12.1.14), dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$
\begin{aligned}
{}_D t^{ij} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}}, \\
{}_D m^{ijk} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial d_{ijk}},
\end{aligned}
\tag{12.1.16}
$$

gde je

$$
\lambda = \rho \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_{kl}} a_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial d_{klm}} d_{klm} \right)^{-1}. \tag{12.1.17}
$$

Jednačine (12.1.16) su nelinearne konstitutivne jednačine za izotropne proste mikropolarne fluide, koje su invarijantne u odnosu na superponirana kruta kretanja.

S obzirom da su m^{ijk} i d_{ijk} antisimetrični tenzori po indeksima i i j, možemo im koordinirati tenzore drugog reda, tako da konstitutivne jednačine (12.1.16) možemo pisati u alternativnom obliku

$$
\begin{aligned}
{}_D t^{ij} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}}, \\
{}_D m^{ij} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial b_{ij}},
\end{aligned}
\tag{12.1.18}
$$

gde je

$$
m^{ijk} = \varepsilon^{ijl} m_l{}^{\cdot k}, \quad d_{ijk} = \varepsilon_{ijl} b^l{}_{\cdot k}, \tag{12.1.19}
$$

i

$$
\lambda = \rho \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_{kl}} a_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_{kl}} b_{kl} \right)^{-1}. \tag{12.1.20}
$$

Disipativna funkcija je u ovom slučaju funkcija oblika

$$\Phi = \Phi(a_{ij}, b_{ij}) \qquad (12.1.21)$$

i pretpostavljamo da je neprekidna i diferencijabilna funkcija svojih argumenata, tako da je možemo predstaviti u obliku stepenog reda. U linearnoj teoriji, pod pretpostavkom da nema inicijalnih napona, ona je kvadratni polinom oblika

$$\rho\Phi = \frac{1}{2} A^{ijkl} a_{ij} a_{kl} + \frac{1}{2} B^{ijkl} b_{ij} b_{kl}, \qquad (12.1.22)$$

gde su

$$\begin{aligned} A^{ijkl} &= \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu g^{ik} g^{jl} + \nu g^{il} g^{jk}, \\ B^{ijkl} &= \tau_1 g^{ij} g^{kl} + \tau_2 g^{ik} g^{jl} + \tau_3 g^{il} g^{jk}, \end{aligned} \qquad (12.1.23)$$

izotropni tenzori, a λ, μ, ν, τ_1, τ_2 i τ_3 materijalne konstante.

Koristeći (12.1.22), (12.1.23) i (12.1.20), iz (12.1.18) dobijamo linearne konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} t^{ij} &= -pg^{ij} + \lambda a_I g^{ij} + \mu a^{ij} + \nu a^{ji}, \\ m^{ij} &= \tau_1 b_I g^{ij} + \tau_2 b^{ij} + \tau_3 b^{ji}, \end{aligned} \qquad (12.1.24)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_I &= v^k_{,k} = div\, \vec{v}, \\ b_I &= b^k_{.k} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} d_{ijk}, \end{aligned} \qquad (12.1.25)$$

i gde smo, na osnovu (12.1.1), dodali reverzibilni deo tenzora napona.

Ako stavimo

$$\begin{aligned} a^{ij} &= v^{i,j} - \nu^{ij} = d^{ij} + \omega^{ij} - \nu^{ij} = d^{ij} + \varepsilon^{ijk}(\omega_k - \nu_k), \\ b^{ij} &= \nu^{i,j}, \end{aligned} \qquad (12.1.26)$$

gde su

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega^{ij}, \\ \nu^k &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \nu^{ij}, \end{aligned} \qquad (12\ 1.27)$$

vektor vrtložnosti (vrtlog) i vektor ugaone brzine nezavisne rotacije materijalnih tačaka fluida, konstitutivne jednačine možemo izraziti u obliku

$$\begin{aligned} t^{ij} &= -pg^{ij} + \lambda d_I g^{ij} + 2\eta d^{ij} + \tau \varepsilon^{ijk}(\omega_k - \nu_k), \\ m^{ij} &= \tau_1 \nu^k_{,k} g^{ij} + \tau_2 \nu^{i,j} + \tau_3 \nu^{j,i}, \end{aligned} \qquad (12.1.28)$$

pri čemu smo uveli oznake

$$2\eta = (\mu + \nu), \quad \tau = (\mu - \nu). \qquad (12.1.29)$$

Napomenimo još da se prva od konstitutivnih jednačina (12.1.28) može napisati i u ekvivalentnom obliku

$$t^{ij} = -pg^{ij} + \left(\eta_V - \frac{2}{3}\eta\right) d_l g^{ij} + 2\eta d^{ij} + \tau \varepsilon^{ijk}(\omega_k - \nu_k), \qquad (12.1.30)$$

gde su $\eta_V = \lambda + \frac{2}{3}\eta$ i η koefilijenti zapreminske i smičuće viskoznosti, koji figurišu i u konstitutivnim jednačinama za model tzv. Njutnovog fluida.

Za slučaj nestišljivih fluida je

$$\rho = \text{const.}, \quad v^k_{,k} = div\,\vec{v} = 0, \qquad (12.1.31)$$

pa se konstitutivne jednačine svode na

$$\begin{aligned} t^{ij} &= -pg^{ij} + 2\eta d^{ij} + \tau \varepsilon^{ijk}(\omega_k - \nu_k), \\ m^{ij} &= \tau_1 \nu^k_{,k} g^{ij} + + \tau_2 \nu^{i,j} + \tau_3 \nu^{j,i}. \end{aligned} \qquad (12.1.32)$$

Iz navedenih ekvivalentnih oblika linearnih konstitutivnih jednačina za model prostih mikropolarnih fluida vidimo da ukupan broj koeficijenata viskoznosti iznosi 6, odnosno 5 za slučaj nestišljivih fluida.

12.2. Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja. Uvodeći momente mikroinercije, kao i u odeljku 11.2, dobijamo sistem od šest parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{\partial i^{kl}}{\partial t} + i^{kl}_{,m} v^m - i^{ml} \nu^k_{.m} - i^{mk} \nu^m_{.l} = 0, \qquad (12.2.1)$$

za određivanje momenata mikroinercije i^{kl}. Za razliku od jednačine (11.2.3), u ovoj jednačini je giracioni tenzor ν_{ij} antisimetričan.

Takođe, za inercijski spin, dobijamo

$$\Gamma^{ij} = i^{lj}(\dot{\nu}^i_{.l} + \nu^i_{.m}\nu^m_{.l}) \qquad (12.2.2)$$

i vidimo da je u potpunosti određen veličinama i^{kl} i ν_{kl}. Napominjemo da samo antisimetrični deo inercijskog spina figuriše u difenencijalnim jednačinama kretanja (3.3.7).

Diferencijalne jednačine kretanja mikropolarnog kontinuuma su (3.3.5) i (3.3.7). Da bismo, međutim, napisali parcijalne diferencijalne jednačine kretanja prostog mikropolarnog fluida, iskoristićemo linearne konstitutivne jednačine (12.1.30) i $(12.1.28)_2$.

Iz (12.1.30), diferenciranjem dobijamo

$$t^{ij}_{,j} = -p^{,i} + \left(\eta_V + \frac{1}{3}\eta - \frac{\tau}{2}\right) v^{k,i}_{,k} + \left(\eta + \frac{\tau}{2}\right) \Delta v^i - \tau \varepsilon^{ijk} \nu_{k,j}, \qquad (12.2.3)$$

tako da (3.3.5) daje

$$-p^{,i} + \left(\eta_V + \frac{1}{3}\eta - \frac{\tau}{2}\right) v^{k,i}_{,k} + \left(\eta + \frac{\tau}{2}\right) \Delta v^i - \tau \varepsilon^{ijk} \nu_{k,j} + \rho f^i - \rho \dot{v}^i = 0, \qquad (12.2.4)$$

što predstavlja sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine kretanja.

Iz konstitutivne jednačine $(12.1.28)_2$, korišćenjem relacije

$$m^{ij}=\frac{1}{2}\varepsilon^{ipq}m_{pq}^{\cdot\cdot j},$$

dobijamo

$$m^{ijk}=\tau_1\nu^l_{,l}\varepsilon^{ijk}+\tau_2\varepsilon^{ijl}\nu_l^{,k}+\tau_3\varepsilon^{ijl}\nu^k_{,l}, \qquad (12.2.5)$$

odakle je

$$m^{ijk}_{,k}=(\tau_1+\tau_3)\varepsilon^{ijk}\nu^l_{,lk}+\tau_2\varepsilon^{ijk}\Delta\nu_k. \qquad (12.2.6)$$

Takođe, iz (12.1.30) nalazimo

$$t^{[ij]}=\tau\varepsilon^{ijk}(\omega_k-\nu_k)=\frac{\tau}{2}(v^{i,j}-v^{j,i})-\tau\varepsilon^{ijk}\nu_k, \qquad (12.2.7)$$

pa, korišćenjem ove jednačine, kao i jednačina (12.2.6) i (12.2.2), iz (3.3.7) dobijamo

$$(\tau_1+\tau_3)\varepsilon^{ijk}\nu^l_{,lk}+\tau_2\varepsilon^{ijk}\Delta\nu_k+\frac{\tau}{2}(v^{i,j}-v^{j,i})-\tau\varepsilon^{ijk}\nu_k+$$
$$+\rho l^{ij}-\frac{\rho}{2}(i^j_l\varepsilon^{ilk}-i^i_l\varepsilon^{jlk})\dot{\nu}_k-\frac{\rho}{2}(i^j_l\nu^i\nu^l-i^i_l\nu^j\nu^l)=0, \qquad (12.2.8)$$

što je drugi sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine kretanja.

Sistem od dvanaest parcijalnih diferencijalnih jednačina (12.2.1), (12.2.4) i (12.2.8), zajedno sa jednačinom konzervacije mase

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho v^k)_{,k}=0, \qquad (12.2.9)$$

predstavlja potpuni sistem diferencijalnih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija ρ, v^k, ν^k i i^{kl}.

Ako materijalne tačke fluida posmatramo kao infinitezimalne sfere konstantnog poluprečnika, tada je

$$I^{KL}=IG^{KL}, \qquad (12.2.10)$$

pri čemu je [16]

$$I=\frac{D^2}{20} \qquad (12.2\ 11)$$

gde je D prečnik posmatranih infinitezimalnih sfera, biće

$$i^{kl}=I^{KL}\chi^k_{\cdot K}\chi^l_{\cdot L}=IG^{KL}(g^k_K+\varphi^k_{\cdot K})(g^l_L+\varphi^l_{\cdot L}), \qquad (12.2.12)$$

odnosno, s obzirom na $(3.2.2)_2$,

$$i^{kl}=Ig^{kl}. \qquad (12.2.13)$$

Za inercijski spin tada dobijamo

$$\Gamma^{ij}=I\dot{\nu}^{ij}, \qquad (12.2.14)$$

pa jedenačina (12.2.8) postaje

$$\begin{aligned}&(\tau_1+\tau_2)\,\varepsilon^{ijk}\,\nu^l_{,lk}+\tau_2\,\varepsilon^{ijk}\,\Delta\nu_k+\tau\,\varepsilon^{ijk}\,(\omega_k-\nu_k)+\\&+\rho\,\varepsilon^{ijk}\,l_k-\rho\,I\,\varepsilon^{ijk}\,\dot{\nu}_k=0,\end{aligned}\tag{12.2.15}$$

odnosno

$$(\tau_1+\tau_3)\,\nu^l_{,lk}+\tau_2\,\Delta\nu_k+\tau\,(\omega_k-\nu_k)+\rho\,l_k-\rho\,I\,\dot{\nu}_k=0.\tag{12.2.16}$$

Diferencijalne jednačine kretanja u ovom slučaju su (12.2.4) i (12.2.16). Napisane u vektorskom obliku ove jednačine su

$$\begin{aligned}&\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{f}-\operatorname{grad}p+\left(\eta+\frac{\tau}{2}\right)\Delta\vec{v}+\left(\eta_V+\frac{1}{3}\eta-\frac{\tau}{2}\right)\operatorname{grad}(div\,\vec{v})-\tau\,rot\,\vec{\nu},\\&\rho\,I\frac{d\vec{\nu}}{dt}=\rho\,\vec{l}+\tau_2\,\Delta\vec{\nu}+(\tau_1+\tau_3)\operatorname{grad}(div\,\vec{\nu})-\tau\left(\frac{1}{2}rot\,\vec{v}+\vec{\nu}\right),\end{aligned}\tag{12.2.17}$$

i zajedno sa jednačinom konzervacije mase (12.2.9) predstavljaju kompletan sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija ρ, $\vec{v}$ i $\vec{\nu}$.

Za nestišljive fluide, s obzivom da je $\rho=\text{const.}$ i $div\,\vec{v}=0$, gornje jednačine se uprošćuju i imaju oblik

$$\begin{aligned}&\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{f}-\operatorname{grad}p+\left(\eta+\frac{\tau}{2}\right)\Delta\vec{v}-\tau\,rot\,\vec{\nu},\\&\rho\,I\frac{d\vec{\nu}}{dt}=\rho\,\vec{l}+\tau_2\,\Delta\vec{\nu}+(\tau_1+\tau_3)\operatorname{grad}(div\,\vec{\nu})-\tau\left(\frac{1}{2}rot\,\vec{v}+\vec{\nu}\right).\end{aligned}\tag{12.2.18}$$

U slučaju kad su τ, τ_1, τ_2, τ_3, I i $\vec{l}$ svi jednaki nuli, diferencijalne jednačine (12.2.17), odnosno (12.2.18) se svode na Navie-Stoksove jednačine za model Njutnovog fluida.

13. DIPOLARNI FLUIDI

13.1. Konstitutivne jednačine. Tenzore τ^{ij} i h^{ijk} razložićemo na reverzibilni i ireverzibilni deo na sledeći način

$$\tau^{ij} = -pg^{ij} + {}_D\tau^{ij}, \quad h^{ijk} = {}_Dh^{ijk}, \tag{13.1.1}$$

tako da, na osnovu (11.1.1) i (6.1.4), disipativnu funkciju možemo pisati u obliku

$$\rho\Phi = {}_D\tau^{ij} v_{i,j} + {}_Dh^{i(jk)} v_{i,jk}, \tag{13.1.2}$$

ili, s obzirom da je

$$v_{i,j} = \dot{x}_{i;K} X^K_{;\,j}, \quad v_{i,jk} = \dot{x}_{i;KL} X^K_{;\,j} X^L_{;\,k} + \dot{x}_{i;K} X^K_{;\,jk}, \tag{13.1.3}$$

u obliku

$$\rho\Phi = \left({}_D\tau^{ij} X^K_{;\,j} + {}_Dh^{i(jk)} X^K_{;\,jk}\right) \dot{x}_{i;K} + {}_Dh^{i(jk)} X^K_{;\,j} X^L_{;\,k} \dot{x}_{i;KL}. \tag{13.1.4}$$

Ako disipativnu funkciju izrazimo u obliku

$$\rho\Phi = {}_D\tau_{(a)} \dot{v}^{(a)}, \tag{13.1.5}$$

gde su

$${}_D\tau_{(a)} = \begin{cases} {}_D\tau^{ij} X^K_{;\,j} + {}_Dh^{i(jk)} X^K_{;\,jk} & \text{za } a = 1, 2, \ldots 9 \\ {}_Dh^{i(jk)} X^K_{;\,j} X^L_{;\,k} & \text{za } a = 10, 11, \ldots, 27 \end{cases} \tag{13.1.6}$$

ireverzibilne sile, i

$$\dot{v}^{(a)} = \begin{cases} \dot{x}_{i;K} & \text{za } a = 1, 2, \ldots, 9 \\ \dot{x}_{i;KL} & \text{za } a = 10, 11, \ldots, 27 \end{cases} \tag{13.1.7}$$

generalisane brzine, iz (11.1.2) dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} {}_D\tau^{ij} &= \lambda\, g^{il} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} x^j_{;K} + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;KL}} x^j_{;KL} \right), \\ {}_Dh^{i(jk)} &= \lambda\, g^{il} \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} x^j_{;K}\, x^k_{;\,L}, \end{aligned} \tag{13.1.8}$$

gde je

$$\lambda = \rho\Phi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} \dot{x}^l_{;K} + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;KL}} \dot{x}^l_{;KL} \right)^{-1}, \quad \Phi = \Phi\left(\dot{x}^k_{;K},\ \dot{x}^k_{;KL}\right). \tag{13.1.9}$$

Da bi, međutim, tenzor napona ${}_D\tau^{ij}$ bio simetričan, tj. da bi drugi Košijev zakon kretanja (4.2.4) bio zadovoljen, desna strana jednačine $(13.1.8)_1$ mora zadovoljavati uslov

$$\left[g^{il}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} x^j_{;K} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;KL}} x^j_{;KL}\right)\right]_{[ij]} = 0. \tag{13.1.10}$$

Ovaj sistem od tri diferencijalne jednačine predstavlja *uslov objektivnosti* za disipativnu funkciju $(13.1.9)_2$ i konstitutivne jednačine (13.1.8). S obzirom da disipativna funkcija zavisi od 27 nezavisno promenljivih $\dot{x}^k_{;K}$ i $\dot{x}^k_{;KL}$, sistem (13.1.10) ima stoga $27-3=24$ osnovna međusobno nezavisna integrala. Za te integrale ćemo uzeti sledeće

$$\begin{aligned} d_{kl} &= v_{(k,l)} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_{k;K} X^K_{;l} + \dot{x}_{l;K} X^K_{;k}\right), \\ d_{klm} &= v_{k,lm} = \dot{x}_{k;KL} X^K_{;l} X^L_{;m} + \dot{x}_{k;K} X^K_{;lm}, \end{aligned} \tag{13.1.11}$$

tako da (13.1.10) ima opšte rešenje

$$\Phi = \Phi(d_{kl}, d_{klm}). \tag{13.1.12}$$

Koristeći ovu relaciju i (13.1.11), iz (13.1.8) dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} {}_D\tau^{ij} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial d_{ij}}, \\ {}_Dh^{i(jk)} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial d_{ijk}}, \end{aligned} \tag{13.1.13}$$

gde je

$$\lambda = \rho\Phi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial d_{kl}} d_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial d_{klm}} d_{klm}\right)^{-1}. \tag{13.1.14}$$

Jednačine (13.1.13) su nelinearne konstitutivne jednačine za izotropne dipolarne fluide, koje su invarijantne u odnosu na superponirana kruta kretanja.

Disipativna funkcija (13.1.2) je izotropna funkcija svojih argumenata i u linearnoj teoriji, pod pretpostavkom da nema inicijalnih napona, ona je kvadratni polinom oblika

$$\rho\Phi = \frac{1}{2} A^{ijkl} d_{ij} d_{kl} + \frac{1}{2} B^{ijklmn} d_{ijk} d_{lmn}, \tag{13.1.15}$$

gde su A^{ijkl} i B^{ijklmn} izotropni tenzori koji se mogu izraziti u obliku (9.1.25). Koristeći te izraze i (13.1.15), iz (13.1.13) dobijamo linearne konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} \tau^{ij} &= -pg^{ij} + \lambda d_l g^{ij} + 2\mu d^{ij}, \\ h^{i(jk)} &= \tau_1 d^{\,il}_{..l} g^{jk} + \tau_2 (d^{jki} + d^{kji}) + \tau_3 d^{ijk} + \\ &+ \tau_4 \left(2 d^{l\cdot i}_{\cdot l} g^{jk} + d^{\,jl}_{..l} g^{ik} + d^{\,kl}_{..l} g^{ij}\right) + \tau_5 \left(d^{l\cdot k}_{\cdot l} g^{ij} + d^{l\cdot j}_{\cdot l} g^{ik}\right), \end{aligned} \tag{13.1.16}$$

gde su λ, μ, $\tau_1, \ldots\ldots, \tau_5$, materijalne konstante — koeficijenti viskoznosti. U ovim jednačinama smo, na osnovu (13.1.1), dodali reverzibilni deo tenzora napona.

Za nestišljive fluide, s obzirom da je $d_l = v^k_{,k} = \operatorname{div} \vec{v} = 0$ i $d^l{}_{.lk} = 0$, konstitutivne jednačine su

$$\tau^{ij} = -pg^{ij} + \lambda d_l g^{ij} + 2\mu d^{ij},$$

$$h^{i(jk)} = \tau_1 d^{.il}_{..l} g^{jk} + \tau_2 (d^{jki} + d^{kji}) + \tau_3 d^{ijk} + \tag{13.1.17}$$

$$+ \tau_4 \left(d^{.jl}_{..l} g^{ik} + d^{.kl}_{..l} g^{ij}\right).$$

U linearnim konstitutivnim jednačinama, prema tome, ukupan broj koeficijenata viskoznosti iznosi 7, odnosno 5 za slučaj nestišljivih fluida. Napomenimo, na kraju, da se konstitutivne jednačine (13.1.17) razlikuju od jednačina koje su koristili Bleustein i Green [16], jer se u njihovim jednačinama, pored ostalog, pojavljuje jedan koeficijent viskoznosti manje.

13.2. Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja. Koristeći (13.1.11), linearne konstitutivne jednačine (13.1.16) možemo napisati u obliku

$$\tau^{ij} = -pg^{ij} + \lambda v^k_{,k} g^{ij} + \mu (v^{i,j} + v^{j,i}),$$

$$h^{i(jk)} = \tau_1 \Delta v^i g^{jk} + \tau_2 (v^{j,ki} + v^{k,ji}) + \tau_3 v^{i,jk} + \tag{13.2.1}$$

$$+ \tau_4 (\Delta v^j g^{ik} + \Delta v^k g^{ij}).$$

Iz druge od ovih jednačina je

$$h^{i(jk)}{}_{,k} = (\tau_1 + \tau_3)\, v^{i,jl}_{...l} + (\tau_2 + \tau_4)\, v^{j,il}_{...l} +$$

$$+ \tau_2 v^{k\cdot ij}_{,k} + \tau_4 v^{k\cdot l}_{,k\cdot l} g^{ij}, \tag{13.2.2}$$

pa, na osnovu (4.2.6), za tenzor napona t^{ij} dobijamo

$$t^{ij} = -pg^{ij} + \lambda v^k_{,k} g^{ij} + \mu (v^{i,j} + v^{j,i}) - (\tau_1 + \tau_3)\, v^{i,jl}_{...l} -$$

$$- \tau_2 v^{k\cdot ij}_{,k} - \tau_4 v^{k\cdot l}_{,k\cdot l} g^{ij} - \rho (l^{ij} - \Gamma^{ij}). \tag{13.2.3}$$

Odavde je, dalje,

$$t^{ij}{}_{,j} = -p^{,i} + \lambda v^{k\cdot i}_{,k} + \mu \left(v^{i,j}_{..j} + v^{j,\cdot i}_{\cdot j}\right) -$$

$$- (\tau_1 + \tau_3)\, v^{i,k\cdot l}_{\cdot\cdot k\cdot l} - 2 (\tau_2 + \tau_4)\, v^{k\cdot l\cdot i}_{,k\cdot l} - \rho \left(l^{ij}{}_{,j} - \Gamma^{ij}{}_{,j}\right), \tag{13.2.4}$$

tako da, na osnovu (4.2.2), dobijamo parcijalne diferencijalne jednačine kretanja u obliku

$$\rho \dot{v}^i = \rho f^i - p^{,i} + \lambda v^{k\cdot i}_{,k} + \mu \left(v^{i,j}_{..j} + v^{j\cdot i}_{,j}\right) -$$

$$- (\tau_1 + \tau_3)\, v^{i,k\cdot l}_{\cdot\cdot k\cdot l} - 2 (\tau_2 + \tau_4)\, v^{k\cdot l\cdot i}_{,k\cdot l} - \rho \left(l^{ij}{}_{,j} - \Gamma^{ij}{}_{,j}\right). \tag{13.2.5}$$

Inercijski spin Γ^{ij} je određen jednačinom (4.1.9), gde su i^{kl} dati sa (4.1.7). Diferenciranjem po vremenu, iz (4.1.7) dobijamo

$$\dot{\overline{i^{lm}}} = I^{KL}\,\dot{x}^{l}_{;K}\,x^{m}_{;L} + I^{KL}\,x^{l}_{;K}\,\dot{x}^{m}_{;L},$$

odnosno

$$\dot{\overline{i^{lm}}} = i^{km}\,v^{l}_{,k} + i^{kl}\,v^{m}_{,k}. \tag{13.2.6}$$

S druge strane je

$$\dot{\overline{i^{lm}}} = \frac{\partial i^{lm}}{\partial t} + i^{lm}_{,k}\,v^{k},$$

tako da dobijamo

$$\frac{\partial i^{lm}}{\partial t} + i^{lm}_{,k}\,v^{k} - i^{km}\,v^{l}_{,k} - i^{kl}\,v^{m}_{,k} = 0, \tag{13.2.7}$$

što predstavlja sistem od šest parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje šest veličina i^{kl}.

Iz (4.1.9) sledi

$$\Gamma^{ij}_{,j} = i^{lj}_{,j}\,\dot{v}^{i}_{,l} + i^{lj}\,\dot{v}^{i}_{,lj}, \quad \left(\dot{v}^{i}_{,lj} = (\dot{v}^{i})_{,lj}\right). \tag{13.2.8}$$

Koristeći ovu jednačinu, iz (13.2.5) dobijamo parcijalne diferencijalne jednačine kretanja u obliku

$$\begin{aligned} & -p^{,i} + \lambda\,v^{k}_{,k}{}^{;i} + \mu\left(\Delta v^{i} + v^{k}_{;k}{}^{;i}\right) - (\tau_1+\tau_3)\,\Delta\Delta v^{i} - \\ & - 2\,(\tau_2+\tau_4)\,v^{k}_{,k}{}^{;l;i}_{;l} - \rho\,l^{ij}_{,j} + \rho f^{i} + i^{lj}_{,j}\,\dot{v}^{i}_{,l} + i^{lj}\,\dot{v}^{i}_{,lj} - \rho\,\dot{v}^{i} = 0. \end{aligned} \tag{13.2.9}$$

Za slučaj nestišljivih fluida, s obzirom da je $v^{k}_{,k} = 0$, prethodna jednačina postaje

$$\begin{aligned} & -p^{,i} + \mu\Delta v^{i} - (\tau_1+\tau_3)\,\Delta\Delta v^{i} - \rho\,l^{ij}_{,j} + \rho f^{i} + \\ & + i^{lj}_{,j}\,\dot{v}^{i}_{,l} + i^{lj}\,\dot{v}^{i}_{,lj} - \rho\,\dot{v}^{i} = 0. \end{aligned} \tag{13.2·10}$$

Sistem od devet parcijalnih diferencijalnih jednačina (13.2.7) i (13.2.9), zajedno sa jednačinom konzervacije mase

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho\,v^{k})_{,k} = 0,$$

predstavlja kompletan sistem jednačina za određivanje nepoznatih funkcija ρ, v^{k} i i^{kl}.

Ako materijalne tačke fluida posmatramo kao infinitezimalne sfere, tada je

$$I^{KL} = I G^{KL},$$

pa iz (4.1.7) dobijamo

$$i^{kl} = I G^{KL}\,x^{k}_{,K}\,x^{l}_{,L}$$

odnosno

$$i^{kl} = I \overset{-1}{c}{}^{kl} = I G^{KL} \left(g^k_K + u^k_{;K}\right) \left(g^l_L + u^l_{;L}\right). \tag{13.2.11}$$

U linearnoj teoriji, u prvoj aproksimaciji, možemo uzeti da je

$$i^{kl} = I g^{kl}. \tag{13.2.12}$$

Ova relacija podrazumeva pretpostavku da su materijalne tačke fluida infinitezimalne sfere konstantnog prečnika u svim trenucima vremena.

S obzirom na (13.2.12), za inercijski spin u ovom slučaju dobijamo

$$\Gamma^{ij} = I \dot{v}^{i,j}, \qquad \Gamma^{ij}{}_{,j} = I \Delta \dot{v}^i, \tag{13.2.13}$$

tako da parcijalne diferencijalne jednačine kretanja (13.2.5) postaju

$$\begin{aligned} \rho (1 - I \Delta) \dot{v}^i = \rho f^i - \rho \dot{l}^{ij}{}_{,j} - p^{,i} + (\lambda + \mu) v^{k}{}_{,k}{}^{\cdot i} + \\ + [\mu - (\tau_1 + \tau_3) \Delta] \Delta v^i - 2 (\tau_2 + \tau_4) v^{k}{}_{,k}{}^{\cdot}{}_{\cdot l}{}^{l \cdot i}. \end{aligned} \tag{13.2.14}$$

Za slučaj nestišljivih fluida, $v^k{}_{,k} = 0$, parcijalne diferencijale jednačine kretanja su oblika

$$\rho (1 - I \Delta) \dot{v}^i = \rho f^i - \rho l^{ij}{}_{,j} - p^{,i} + [\mu - (\tau_1 + \tau_3) \Delta] \Delta v^i. \tag{13.2.15}$$

14. FLUIDI REDA DVA

14.1. Konstitutivne jednačine. Razlaganjem tenzora $t^{(ij)}$ i m^{ijk} na reverzibilne i ireverzibilne delove,

$$t^{(ij)} = -pg^{ij} + {}_Dt^{(ij)}, \quad m^{ijk} = {}_Dm^{ijk}, \tag{14.1.1}$$

na osnovu (11.1.1) i (6.1.5), za disipativnu funkciju u ovom slučaju dobijamo

$$\rho\Phi = {}_Dt^{(ij)} v_{i,j} + {}_D\mu^{i(jk)} v_{i,jk}. \tag{14.1.2}$$

gde je $\mu^{ijk} = {}_D\mu^{ijk}$ devijatorski deo tenzora naponskih spregova. Koristeći (13.1.3), prethodnu jednačinu možemo napisati i u obliku

$$\rho\Phi = \left({}_Dt^{(ij)} X^K_{;j} + {}_D\mu^{i(jk)} X^K_{;jk}\right) \dot{x}_{i;K} + {}_D\mu^{i(jk)} X^K_{;j} X^L_{;k} \dot{x}_{i;KL}. \tag{14.1.3}$$

Ako sada (14.1.3) napišemo u obliku

$$\rho\Phi = {}_D\tau_{(a)} \dot{v}^{(a)}, \quad (a = 1, 2, \ldots, 27), \tag{14.1.4}$$

gde su

$${}_D\tau_{(a)} = \begin{cases} {}_Dt^{(ij)} X^K_{;j} + {}_D\mu^{i(jk)} X^K_{;jk} & \text{za } a = 1, 2, \ldots, 9 \\ {}_D\mu^{i(jk)} X^K_{;j} X^L_{;k} & \text{za } a = 10, 11, \ldots, 27 \end{cases} \tag{14.1.5}$$

ireverzibilne sile, i

$$\dot{v}^{(a)} = \begin{cases} \dot{x}_{i;K} & \text{za } a = 1, 2, \ldots, 9 \\ \dot{x}_{i;KL} & \text{za } a = 10, 11, \ldots, 27 \end{cases} \tag{14.1.6}$$

generalisane brzine, iz (11.1.2) dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} {}_Dt^{(ij)} &= \lambda g^{il} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} x^j_{;K} + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;KL}} x^j_{;KL}\right), \\ {}_D\mu^{i(jk)} &= \lambda g^{il} \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;KL}} x^j_{;K} x^k_{;L}, \end{aligned} \tag{14.1.7}$$

gde je

$$\lambda = \rho\Phi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} \dot{x}^l_{;K} + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}^l_{;KL}} \dot{x}^l_{;KL}\right)^{-1} \tag{14.1.8}$$

i

$$\Phi = \Phi(\dot{x}^k_{;K},\ \dot{x}^k_{;KL}) . \tag{14.1.9}$$

Desne strane jednačina (14.1.7) moraju, međutim, zadovoljavati uslove

$$\begin{aligned} &\left[g^{il}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;K}} x^j_{;K} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;KL}} x^j_{;KL}\right)\right]_{[ij]} = 0, \\ &\left(g^{il}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^l_{;KL}} x^j_{;K} x^k_{;L}\right)_{(ijk)} = 0, \end{aligned} \tag{14.1.10}$$

što predstavlja sistem od trinaest parcijalnih diferencijalnih jednačina koje mora zadovoljavati disipativna funkcija. S obzirom da je disipativna funkcija (14.1.9) funkcija od 27 nezavisno promenljivih $\dot{x}^k_{;K}$ i $\dot{x}^k_{;KL}$, sistem od 13 parcijalnih diferencijalnih jednačina (14.1.10) ima $27-13=14$ osnovnih međusobno nezavisnih integrala. Te integrale ćemo uzeti u obliku

$$\begin{aligned} d_{ij} &= v_{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_{i;K} X^K_{;j} + \dot{x}_{j;K} X^K_{;i}\right), \\ d_{ijk} &= \omega_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_{i;KL} X^K_{;j} X^L_{;k} - \dot{x}_{j;KL} X^K_{;i} X^L_{;k} + \dot{x}_{i;K} X^K_{;jk} - \dot{x}_{j;K} X^K_{;ik}\right), \end{aligned} \tag{14.1.11}$$

tako da (14.1.10) ima opšte rešenje

$$\Phi = \Phi(d_{ij},\ d_{ijk}). \tag{14.1.12}$$

Gradijent tenzora vrtložnosti, s obzirom da zadovoljava relaciju $\varepsilon^{ijk}\omega_{ij,k}=0$, ima osam međusobno nezavisna koordinata.

Koristeći (14.1.12) i (14.1.11), iz (14.1.7) dobijamo konstitutivne jednačine u obliku

$$\begin{aligned} {}_D t^{(ij)} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial d_{ij}}, \\ {}_D \mu^{i(jk)} &= \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial \Phi}{\partial d_{ijk}} + \frac{\Phi \partial}{\partial d_{ikj}}\right), \end{aligned} \tag{14.1.13}$$

gde je

$$\lambda = \rho\Phi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial d_{kl}} d_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial d_{klm}} d_{klm}\right)^{-1}. \tag{14.1.14}$$

Jednačine (14.1.13) su nelinearne konstitutivne jednačine za izotropne fluide reda dva, i invarijantne su u odnosu na superponirana kruta kretanja.

S obzirom da tenzor d_{ijk} ima osam međusobno nezavisnih koordinata, funkcionalnu zavistnost disipativne funkcije od tog tenzora ograničićemo na taj način da bude

$$\varepsilon^{ijk}\frac{\partial \Phi}{\partial d_{ijk}} = 0, \quad \text{odn.} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial d_{ijk}} + \frac{\partial \Phi}{\partial d_{jki}} + \frac{\partial \Phi}{\partial d_{kij}} = 0. \tag{14.1.15}$$

Uvodeći oznaku

$$ {}_D\mu^{i(jk)} \equiv \frac{1}{2}\left({}_D\mu^{ijk} + {}_D\mu^{ikj}\right) = {}_D\nu^{ijk} = {}_D\nu^{ikj}, \tag{14.1.16} $$

s obzirom na relaciju (10.1.5), dobijamo

$$ {}_D\mu^{ijk} = \frac{4}{3}\, {}_D\nu^{[ij]k}, $$

odnosno, koristeći $(14.1.13)_2$ i (14.1.15),

$$ {}_D\mu^{ijk} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial d_{ijk}}. \tag{14.1.17} $$

Ako sada tenzorima ${}_D\mu^{ijk}$ i d_{ijk} koordiniramo tenzore drugog reda

$$ {}_D\mu^{ijk} = \varepsilon^{ijl}\, {}_D\mu_l^{\cdot k}, \quad d_{ijk} = \varepsilon_{ijl}\, \varkappa^{l}_{\cdot k}, \tag{14.1.18} $$

nelinearne konstitutivne jednačine za izotropne fluide reda dva možemo pisati u alternativnom obliku

$$ \begin{aligned} {}_D t^{(ij)} &= \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial d_{ij}}, \\ {}_D\mu^{ij} &= \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \varkappa_{ij}}, \end{aligned} \tag{14.1.19} $$

gde je

$$ \lambda = \rho\, \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial d_{kl}} d_{kl} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varkappa_{kl}} \varkappa_{kl} \right)^{-1} \tag{14.1.20} $$

i

$$ \Phi = \Phi(d_{kl}, \varkappa_{kl}). \tag{14.1.21} $$

Tenzor $\varkappa_{ij}$ možemo izraziti u obliku

$$ \varkappa_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn}\, \omega^{mn}{}_{,j} = \omega_{i,j} \tag{14.1.22} $$

gde je

$$ \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn}\, v^{m,n}, \quad \text{odn.} \quad \vec{\omega} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} \tag{14.1.23} $$

vektor vrtložnosti.

Disipativna funkcija (14.1.21) je izotropna funkcija svojih agrumenata i u linearnoj teoriji, pod pretpostavkom da nema inicijalnih napona, ona je kvadratni polinom oblika

$$ \rho\, \Phi = A^{ijkl} d_{ij} d_{kl} + B^{ijkl} \varkappa_{ij} \varkappa_{kl}, \tag{14.1.24} $$

gde su

$$ \begin{aligned} A^{ijkl} &= \lambda g^{ij} g^{kl} + \eta \left(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}\right), \\ B^{ijkl} &= \tau g^{ij} g^{kl} + \tau_1 g^{ik} g^{jl} + \tau_2 g^{il} g^{jk}. \end{aligned} \tag{14.1.25} $$

materijalni izotropni tenzori, a λ, η, τ, τ_1 i τ_2 materilalne konstante — koeficijenti viskoznosti.

Koristeći sada (14.1.24) i (14.1.25), iz (14.1.19) dobijamo linearne konstitutivne jednačine u obliku

$$
\begin{aligned}
t^{(ij)} &= -pg^{ij} + \lambda\, d_l\, g^{ij} + 2\,\eta\, d^{ij}, \\
\mu^{ij} &= \tau_1\, \varkappa^{ij} + \tau_2\, \varkappa^{ji},
\end{aligned}
\qquad (14.1.25)
$$

gde smo, s obsirom na (14.1.1), dodali reverzibilni deo tenzora napona.

Uvodeći koeficijent zapreminske viskoznosti $\eta_V = \lambda + \frac{2}{3}\eta$, prvu od prethodnih jednačina možemo napisati u obliku

$$
t^{(ij)} = -pg^{ij} + \left(\eta_V - \frac{2}{3}\eta\right) d_l\, g^{ij} + 2\,\eta\, d^{ij}. \qquad (14.1.27)
$$

Za nestišljive fluide, s obzirom da je $d_l = v^k_{,k} = \operatorname{div} \vec{v} = 0$, konstitutivne jednačine su

$$
\begin{aligned}
t^{(ij)} &= -pg^{ij} + 2\,\eta\, d^{ij}, \\
\mu^{ij} &= \tau_1\, \varkappa^{ij} + \tau_2\, \varkappa^{ji}.
\end{aligned}
\qquad (14.1.28)
$$

U linearnim konstitutivnim jednačinama, prema tome, ukupan broj koeficijenata viskoznosti iznosi 4, odnosno 3 za nestišljive fluide.

14.2. Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja. Linearne konstitutivne jednačine (14.1.27) i $(14.1.26)_2$ možemo pisati i u obliku

$$
\begin{aligned}
t^{(ij)} &= -pg^{ij} + \left(\eta_V - \frac{2}{3}\eta\right) v^k_{,k}\, g^{ij} + \eta\,(v^{i,j} + v^{j,i}), \\
\mu^{ijk} &= \tau_1\, \omega^{ij,k} + \tau_2\, g_{mn}\, g^{kr}\, \delta^{ijn}_{pqr}\, \omega^{pq,m}.
\end{aligned}
\qquad (14.2.1)
$$

Parcijalne diferencijalne jednačine kretanja kontinuuma reda dva, na osnovu (5.2.4), možemo pisati u obliku

$$
\rho\, \dot{v}^i = \rho f^i + t^{(ij)}_{,j} + t^{[ij]}_{,j}, \qquad (14.2.2)
$$

gde je antisimetrični deo tenzora napona određen jednačinom (5.2.6). Diferenciranjem, iz te jednačine nalazimo

$$
t^{[ij]}_{,jk} = \quad {}^{ijk}_{,jk} - \rho\left(l^{ij}_{,j} - \Gamma^{ij}_{,j}\right), \qquad (14.2.3)
$$

pri čemu smo iskoristili jednakost $\mu^{ijk}_{,jk} = m^{ijk}_{,jk}$. Zamenjujući (14.2.3) u (14.2.2) dobijamo

$$
\rho\, \dot{v}^i = \rho f^i + t^{(ij)}_{,j} - \mu^{ijk}_{,jk} - \rho\, l^{ij}_{,j} + \rho \Gamma^{ij}_{,j}. \qquad (14.2.4)
$$

Inercijski spin je određen antisimetričnim delom jednačine (5.1.7), tj.

$$
\Gamma^{ij} = \left[i^{lj} \left(\dot{\omega}^{i}_{\cdot l} + \omega^{i}_{\cdot r}\, \omega^{r}_{\cdot l}\right)\right]_{[ij]}. \qquad (14.2.5)
$$

Diferenciranjem, iz (5.1.5) dobijamo

$$\dot{\overline{i^{kl}}} = I^{\alpha\beta}\, \omega^{k}_{\cdot m}\, d^{m}_{\cdot(\alpha)}\, d^{l}_{\cdot(\beta)} + I^{\alpha\beta}\, d^{k}_{\cdot(\alpha)}\, \omega^{l}_{\cdot m}\, d^{m}_{\cdot(\beta)}\,, \quad \left(d^{k}_{\cdot(\alpha)} = \omega^{k}_{\cdot l}\, d^{l}_{\cdot(\alpha)}\right),$$

odnosno, korišćenjem (5.1.5),

$$\dot{\overline{i^{kl}}} = i^{ml}\, \omega^{k}_{\cdot m} + i^{mk}\, \omega^{l}_{\cdot m}\,. \tag{14.2.6}$$

S druge strane je

$$\dot{\overline{i^{kl}}} = \frac{\partial\, i^{kl}}{\partial t} + i^{kl}_{\ \ ,m}\, v^{m},$$

pa dobijamo

$$\frac{\partial\, i^{kl}}{\partial t} + i^{kl}_{\ \ ,m}\, v^{m} - i^{ml}\, \omega^{k}_{\cdot m} - i^{mk}\, \omega^{l}_{\cdot m} = 0, \tag{14.2.7}$$

što je sistem od šest parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje šest veličina i^{kl}. Ako, kao rešenje ovog sistema, uzmemo

$$i^{kl} = I g^{kl}, \qquad (I = \text{const.}), \tag{14.2.8}$$

jer ga očigledno zadovoljava, za inercijski spin iz (14.2.4) dobijamo

$$\Gamma^{ij} = I\left(\dot{\omega}^{ij} + \omega^{i}_{\cdot r}\, \omega^{rj}\right)_{[ij]},$$

odnosno

$$\Gamma^{ij} = I\, \dot{\overline{\omega^{ij}}} = I\left(\frac{\partial\, \omega^{ij}}{\partial t} + \omega^{ij}_{\ \ ,k}\, v^{k}\right). \tag{14.2.9}$$

Koristeći relaciju

$$\dot{\overline{v^{i,j}}} = \dot{v}^{i,j} - v^{i}_{,k}\, v^{k,j}, \qquad \left(\dot{v}^{i,j} = (\dot{v}^{i})^{,j}\right),$$

inercijski spin (14.2.9) možemo izraziti i u obliku

$$\Gamma^{ij} = \frac{I}{2}\left(\dot{v}^{i,j} - \dot{v}^{j,i} - v^{i}_{,k}\, v^{k,j} + v^{j}_{,k}\, v^{k,i}\right), \tag{14.2.10}$$

odakle dobijamo

$$\Gamma^{ij}_{,j} = \frac{I}{2}\left(\Delta \dot{v}^{i} - \dot{v}^{k\cdot i}_{,k} + v^{k}_{,kl}\, v^{l,i} + v^{l}_{,k}\, v^{k,i}_{\cdot\cdot\cdot l} - v^{i}_{,kl}\, v^{k,l} - v^{i}_{,k}\, \Delta v^{k}\right). \tag{14.2.11}$$

U linearnoj teoriji, ako izostavimo nelinearne članove kao male veličine višeg reda, biće

$$\Gamma^{ij}_{,j} = \frac{I}{2}\left(\Delta \dot{v}^{i} - \dot{v}^{k\cdot i}_{,k}\right). \tag{14.2.12}$$

Iz (14.2.1) diferenciranjem dobijamo

$$\begin{aligned} t^{(ij)}_{,j} &= -p^{,i} + \left(\eta_{V} + \frac{1}{3}\eta\right) v^{k\cdot i}_{,k} + \eta\, \Delta v^{i} \\ \mu^{ijk}_{\ \ ,jk} &= \frac{\tau_1}{2}\left(\Delta\Delta\, v^{i} - \Delta v^{k\cdot i}_{,k}\right). \end{aligned} \tag{14.2.13}$$

Zamenjujući sada (14.2.12) i (14.2.13) u (14.2.4), dobijamo parcijalne diferencijalne jednačine kretanja u obliku

$$\rho \dot{v}^i - \rho \frac{I}{2}(\Delta \dot{v}^i - \dot{v}^{k\cdot i}_{,k}) = \rho f^i - \rho l^{ij}_{,j} - p^{,i} + \left(\eta_V + \frac{1}{3}\eta\right) v^{k\cdot i}_{,k} + \\ + \eta \Delta v^i - \frac{\tau_1}{2} \Delta\Delta v^i + \frac{\tau_1}{2} \Delta v^{k\cdot i}_{,k}, \tag{14.2.14}$$

ili u vektorskom obliku

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \frac{I}{2}\left[\Delta \frac{d\vec{v}}{dt} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\frac{d\vec{v}}{dt}\right)\right] = \rho \vec{f} + \rho \,\mathrm{rot}\,\vec{l} - \mathrm{grad}\, p + \\ + \left(\eta_V + \frac{1}{3}\eta\right)\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{v}) + \eta \Delta \vec{v} - \frac{\tau_1}{2} \Delta\Delta \vec{v} + \frac{\tau_1}{2} \Delta\, \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{v}). \tag{14.2.15}$$

Za nestišljive fluide, s obzirom da je $v^k_{,k} = 0$, biće diferencijalna jednačina kretanja oblika

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \frac{I}{2} \Delta \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \rho\, \mathrm{rot}\, \vec{l} - \mathrm{grad}\, p + \eta \Delta \vec{v} - \frac{\tau_1}{2} \Delta\Delta \vec{v}. \tag{14.2.16}$$

Jednačine (14.2.15), odnosno (14.2.16), zajedno sa jednačinom konzervacije mase

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \vec{v}) = 0,$$

odnosno, za nestišljive fluide,

$$\rho = \mathrm{const.},$$

predstavljaju kompletan sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija ρ i $\vec{v}$.

LITERATURA

[1] Brillouin L.: *Wave propagation in periodic structures*, Dover Publications, Inc. 1953.

[2] Green A. E. and R. S. Rivlin: *Multipolar continuum mechanics*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, 113—147, 1964.

[3] Green A. E. and R. S. Rivlin: *Multipolar continuum mechauics: Functional theory*: Part 1., Proc. Roy. Soc., London (A), **284**, 303—324, 1965.

[4] Green A. E. and R. S. Rivlin: *The relation between director and multipolar theories in continuum mechanics*, ZAMP **18**, 208—218, 1967.

[5] Eringen A. C. and E. S. Suhubi: *Nonlinear theory of simple microelastic solids*, Int. J. Engn. Sci., **2**, 189—203, 1964.

[6] Eringen A. C.: *Mechanics of micromorphic continua, Mechanics of generalized continua*, Proc. IUTAM Symposium, Freudenstadt—Stuttgart 1967., Ed. E. Kröner, Springer—Verlag, 1969.

[7] St. Venant: *Mémoire sur le calcul de la résistence et de la flexion des pièces à double courbure, en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquelles elles peuvent être soumises dans tous les sens*, C. R. Acad. Sci., Paris, **17**, 942—954, 1020—1031, 1843.

[8] Voigt W.: *Theoretische Studien über die Elastizitätstverhälnistse der Krystalle*, Abh. Wiss. Ges. Göttingen, **34**, 1887.

[9] Duhem P.: *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, Ann. Ecole Norm., **10**, 187—230, 1893.

[10] Cosserat E. et F.: *Sur la mécanique générale*, C. R. Acad. Sci., Paris, **145**, 1139—1142, 1907.

[11] Cosserat E. et F.: *Sur la théorie des corps minces*, C. R. Acad. Sci., Paris, **146**, 169—172, 1908.

[12] Cosserat E. et F.: *Sur la théorie des corps déformables*, Paris, 1909,

[13] Sudria J.: *L'action euclidienne de déformation et de mouvement*, Mém. Sci. Physique, **29**, Paris 1935.

[14] Truesdell C. and R. Toupin: *The Classical Field Theories*, Handb. der Phys, (Ed. S. Flügge), Bd. III/1, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.

[15] Green A. E. and R. S. Rivlin: *Simple force and stress multipoles*, Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, 325—353, 1964.

[16] Bleustein J. L. and A. E. Green: *Dipolar fluids*, Int. J. Eng. Sci., **5**, 323—340, 1967.

[17] De Groot S. R.: *Thermodynamics of irreversible processes*, North—Holl. Publ. Co. Amsterdam, 1966.

[18] Ziegler H.: *Progress in solid mechanics*, vol. IV, 1963.

[19] Toupin R. A.: *Elastic materials with couple-stresses*, Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, 385—414, 1962.

[20] Mindlin R. D. and H. F. Tiersten: *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **11**, 414—448, 1962.

[21] Eringen A. C.: *Simple microfluids*, Int. J. Engn. Sci., **2**, 205—217, 1964.

[22] Blagojević D.: *Opšta rešenja u teoriji elastičnih materijala reda dva*, Zbornik radova IX jugoslovenskog kongresa racionalne i primenjene mehanike, Split, 1968.

[23] Blagojević D. i R. Stojanović: *Prilog problemu konstitutivnih jednačina za elastične materijale reda dva*, Tehnika, **2**, 240—244, 1969.

[24] Đurić, S.: *Princip virtualnog rada za orijentisani kontinuum i problem graničnih uslova*, Tehnika, **7**, 1968.

[25] Komljenović S: *Plastično tečenje sa nesimetričnim tenzorom napona* (doktorska disertacija), Publikacije mašinskog fakulteta, Kragujevac, **10**, 109—145, 1966.

[26] Naerlović-Veljković N.: *Rotaciono-simetrično termoelastično naprezanje u materijalu sa naponskim spregovima*, Zbornik radova IX jugoslovenskog kongresa racionalne i primenjene mehanike, Split 1968.

[27] Plavšić M. i R. Stojanović: *Konstitutivne jednačine viskoznog fluida sa naponskim spregovima*, Naučno-tehnički Pregled, **7**, 3—12, 1966.

28] Plavšić M.: *Diferencijalne jednačine kretanja viskoznog fluida sa nesimetričnim tenzorom napona*, Naučno-tehnički pregled, **7**, 13—19, 1966.

[29] Plavšić M.: *Termodinamika viskoznog tečenja sa nesimetričnim tenzorom napona*, Saopštenja Instituta za vodoprivredu „Jaroslav Černi", vol. XIV, № 43, 31—41, 1967.

[30] Plavšić M.: *On the influence of couple-stresses on the distribution of velocities in the flow of polar fluids, Mechanics of generalized continua*, Proc. IUTAM Symposium, Freudenstadt—Stuttgart 1967., Ed. E. Kröner, Springer—Verlag, 1969.

[31] Plavšić M.: *Teorija prostih mikrofluida*, Zbornik radova XI jugoslovenskog kongresa racionalne i primenjene mehanike, Baško Polje, 1972.

[32] Naerlović-Veljković N. and M. Plavšić: *Thermodiffusion in elastic solids with microstructure*, Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, Sér. Sci. Techn., **22**, 623, 1973.

[33] Plavšić M. and N. Naerlović-Veljković: *Field equations for thermodiffusion in elastic solids with microstructure*, Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, Sér. Sci. Techn., **23**, 353, 1975.

[34] Plavšić M. i J. Jarić: *Princip virtualnog rada za kontinuum sa mikrostrukturom*, Zbornik radova IX jugoslovenskog kongresa racionalne i primenjene mehanike, Baško Polje, 1972.

[35] Plavšić M. and J. Jarić: *The principle of virtual work and the constitutive equations in generalized theories of elasticity*, Engineering Transaction, **22**, **2**, 181—211, Polska akademia nauk, 1974.

[36] Jarić J., M. Plavšić and D. Ružić: *Micromorphic theory of thin shells*, Teorijska i primenjena mehanika, **1**, 139—150, 1975.

[37] Plavšić M. and M. Gligorić: *Elastic dielectric with microstructure*, Teorijska i primenjena mehanika, **1**, 39—58, 1975.

[38] Radenković D. i M. Plavšić: *Visko-plastično tečenje sa nesimetričnim tenzorom napona*, Zbornik radova X jugoslovenskog kongresa racionalne i primenjene mehanike, Baško polje, 1972.

[39] Stojanović R.: *The elastic generalized Cosserat continuum with incompatible strains*, Proc. of the Symposium on Fundamental Aspects of Dislocation Theory, Washington, 1969.

[40] Stojanović R. and D. Blagojević: *On the general solution for torsion of polar elastic media*, Int. J. Solids Structures, **5**, 251—260, 1969·

[41] Stojanović R. and S. Đurić: *On the measures of strain in the theory of the elastic generalized Cosserat Continuum*, Simposia mathematica, **1**, 211—228, 1968.

[42] Stojanović R. i S. Đurić: *Kosera kontinuum II reda*, Zbornik radova IX jugoslovenskog kongresa racionalne i primenjene mehanike, Split, 1968.

[43] Stojanović R. i S. Đurić: *Ravan problem u teoriji elastičnih orijentisanih kontinuuma*, Tehnika, **3**, 388—393, 1969.

[44] Stojanović R., S. Đurić i L. Vujošević: *Prilog dinamici Kosera kontinuuma*, Matematički vesnik, **1**, (16), 127—140, 1964.

[45] Stojanović R. and L. Vujošević: *Couple-stresses in non-Euclidean continua*, Publ. Inst. Math., **2**, 71—74, 1962.

[46] Stojanović R.: *Mechanics of polar continua*, CISM, Udine, 1969.

[47] Stojanović R.: *Recent developments in the theory of polar continua*, CISM, Udine, 1970.

MECHANICS OF SIMPLE POLAR CONTINUA

M. Plavšić

Summary

The classical model of continuous media is based on the assumption that a continuum has three local degrees of freedom and that the deformation is completely determined by the first-order deformation gradients. The consequence of these assumptions is the fact that the response of a material to the displacements of its points is characterized by a symmetric stress tensor.

There are different physical and mathematical models of continuous media which represent a generalization of a classical model. It is known that such generalizations lead to the theories in which the stress tensor is not symmetric. These models are called *polar continua.*

Models of polar continua may be classified into two groups. The first group consists in models which retain the assumption that a continuous medium has three local degrees of freedom, but the deformation is determined by the gradients of an arbitrary order. Such a model was formulated by A. E Green and R. S. Rivlin ([2], [3], [4], [15], and they have given it the name *multipolar continuum.* A special case of that model is the so-called *dipolar continuum,* or the simple multipolar continuum. This one was applied by J. L. Bleustein and A. E. Green [16], when they considered the model of dipolar fluids. This group contains also the model of a *continuum of grade two,* or the continuum with couple-stresses, which was considered by R. A. Toupin [19] and R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [20]. In the theory of a continuum of grade two, as in the theory of a dipolar continuum, the deformation is determined only by first and second-order deformation gradients, but, instead of dipolar stress tensor which appears in the dipolar theory, the couple-stress tensor appears in the theory of a continuum of grade two. A common characteristic of all these models is the fact that the stress tensors are not completely determined by constitutive equations.

The second group consists in models which admit more than three local degrees of freedom. Those models may be considered as oriented continua, i. e. as continua consisting of material points with assigned sets of vectors called *directors* in each of them, whose deformations are independent of the deformation of position. A continuum of N directors at each point has $3+3N$ local degrees of freedom. Such a continuum, with deformable directors, represents a *generalized Cosserat continuum.* In a special case, when a triad of deformable directors is assigned to every point, a medium is a *simple generalized Cosserat continuum.* This model of continuous media has 12 local degrees of freedom. The *Cosserat continuum* in the strict sense is a material medium to each point of which are assigned three directors, which represent rigid triads of vectors, and it has 6 local degrees of freedom. The directors in this continuum are subjected only to rigid rotations, which are independent of the displacements of material points.

In contrast to the formal approach, where triads of deformable directors are assigned to every point, A. C. Eringen and E. S. Suhubi [5] for-

mulated the model of a *simple continuum with microstructure*, giving both its physical meaning and a mathematical formulation. They showed that the in crease of the number of local degrees of freedom is the consequence of the influence of the microstructure on the macroscopic behaviour of the continuum. The deformation, in this case, is determined not only by the field of displacements of material points, but also by the field of micro-displacements, i. e. by deformation gradients and micro-deformation gradients, so that the continuum has 12 local degrees of freedom and its motion is completely determined by 12 equations of motion. A special case of this model is the model of a so-called *micropolar continuum*, which can be obtained from the assumption that every material point of the continuum is phenomenologically equivalent to a rigid body. Material points in this case rotate independently of the displacements.

Only the models of simple polar continua are considered in this paper: the simple continuum with microstructure, the simple micropolar continuum, the dipolar continuum and the continuum of grade two. The fact was used that all these models can be treated either as a simple generalized Cosserat continuum or as its special case. The simple continuum with microstructure was treated as a simple generalized Cosserat continuum, and the simple micropolar continuum as a Cosserat continuum. The dipolar continuum and the continuum of grade two were treated respectively as special cases of a simple generalized Cosserat continuum and a Cosserat continuum, where the deformation and the rotation of orientation vectors are not independent of displacements of material points. Such an approach to the study of mentioned models is not only apparently more suitable for the drawing of corresponding conclusions and equations, but furthemore it gives a clearer view of existing relations, i. e. of differences between considered models. For that reason all introduced quantities and obtained equations are written in such a form that relations can be found, under some conditions, between them, independently of the fact that they are related to different models.

In sections 2, 3, 4 and 5 the formulation of all models of simple polar continua was given, the balance energy equations were postulated and, from the requirement of their invariance with respect to superposed rigid motions, the differential equations of motion and specific internal energy balance equations are found.

In section 6 are given in short the basis ideas and laws of thermodynamics of reversible and irreversible processes.

In sections 7 and 8 the theory of termoelasticity is given for simple materials with microstructure and for simple micropolar materials. Nonlinear theory is given for anisotropic and isotropic materials, and linear theory for isotropic materials. The deformation tensors are introduced in a way that gives the most simple form for consititutive equations. Finally, the field equations for the linear theory of isotropic materials are written.

In sections 9 and 10 the theories of dipolar elastic materials and elastic materials of grade two are given. As in previous two sections, given are nonlinear theories for anisotropic and isotropic materials, and particularly in the case of isotropic materials, a linear theory.

The theories of simple polar fluids are given in sections 11, 12, 13 and 14. Nonlinear constitutive equations are obtained from the expression for dissipative function and from the principle of the least irreversible force [18]. At the end, the constitutive equations are linearized and corresponding partial differential equations of motion are written.

ПОСЕБНА ИЗДАЊА МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА У БЕОГРАДУ

1. (1963) *D. S. Mitrinović* et *R. S. Mitrinović*:
   Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling. III.
2. (1963) *K. Milošević-Rakočević*:
   Prilozi teoriji i praksi Bernoullievih polinoma i brojeva.
3. (1964, 1972) *V. Dévide*:
   Matematička logika.
4. (1964) *D. S. Mitrinović* et *R. S. Mitrinović*:
   Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling. IV.
5. (1965) *D. Z. Đoković*:
   Algebra trigonometrijskih polinoma.
6. (1966) *D. S. Mitrinović* et *R. S. Mitrinović*:
   Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling. VI.
7. (1969) *T. Peyovitch, M. Bertolino, O. Rakić*:
   Quelques problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires.
8. (1969) *Б. П. Ђерасимовић*:
   Правилни верижни разломци.
9. (1971) *Veselin Milovanović*:
   Matematičko-logički model organizacijskog sistema.
10. (1971) *Borivoj N. Rachajsky*:
    Sur les systèmes en involution des équations aux dérivées partielles du premier ordre et d'ordre supérieur. L'application des systèmes de Charpit.
11. (1974) *Zlatko P. Mamuzić*:
    Koneksni prostori.
12. (1974) *Z. Ivković, J. Bulatović, J. Vukmirović, S. Živanović*:
    Application of spectral multiplicity in separable Hilbert space to stochastic processes.

Izdaje: Matematički institut u Beogradu

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17