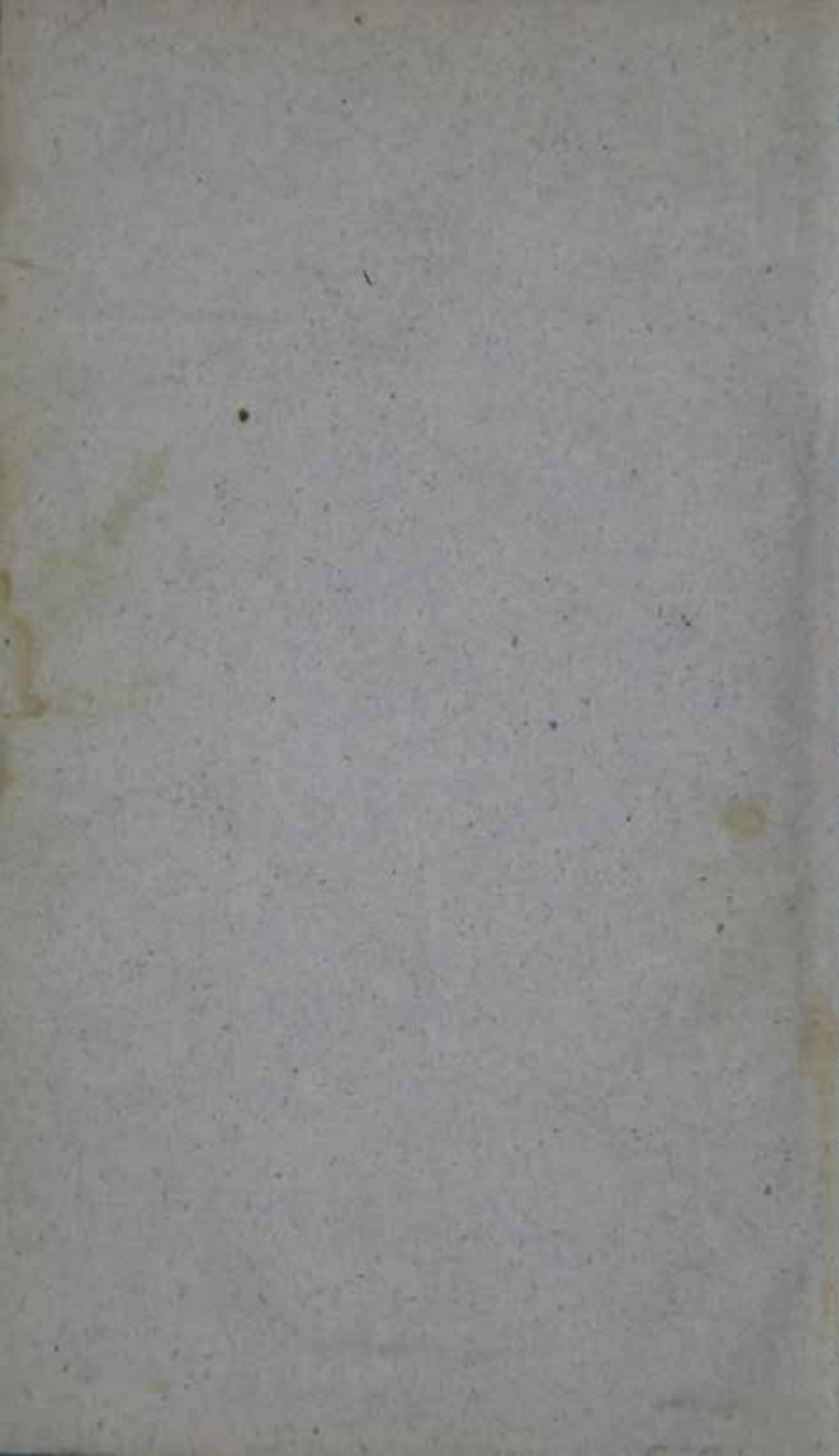
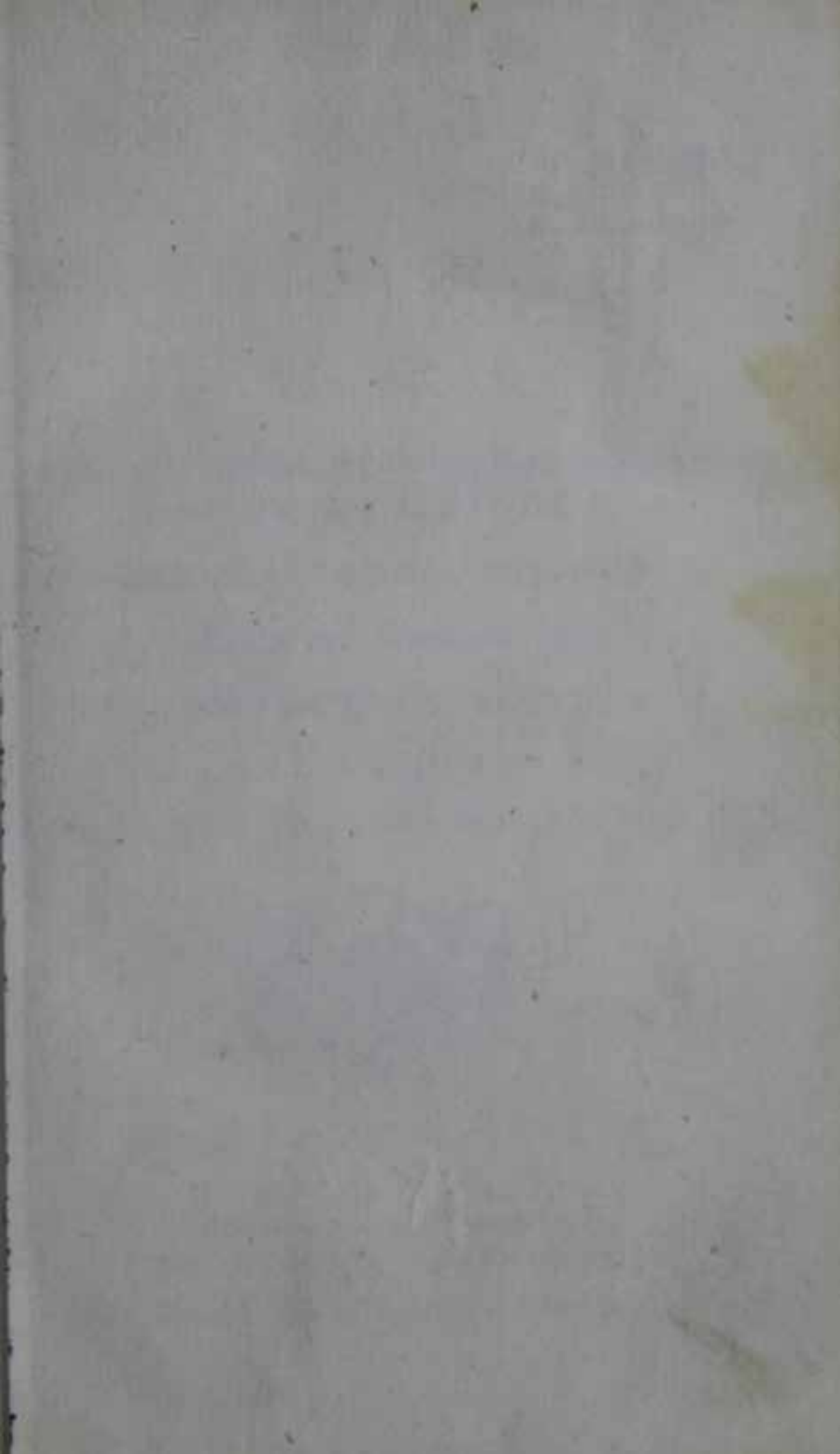








00000
E L E M E N T I

D I Ep. ~~936~~ 1018

M A T E M A T I C H E
P U R E

*Secondo il metodo del Chiarissimo Signor
Abbate DE LA GAILLE.*

EDIZIONE SECONDA ITALIANA

Accresciuta del Trattato della

TRIGONOMETRIA SFERICA

D E L P A D R E

RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH.



I N V E N E Z I A,
MDCCLXXV.

~~XXXXXXXXXXXX~~
Presso TOMMASO BETTINELLI.

Con Licenza de' Superiori, e Privilegio.



1830

MATHEMATICS

PART I

ALGEBRA

ARITHMETIC

GEOMETRY

TRIGONOMETRY

MECHANICS

PHYSICS



THE UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

1830

CHICAGO, ILL.

T A V O L A

D E L L E M A T E R I E.

Idea generale delle Matematiche. pag. 1

P A R T E P R I M A.

Delle Matematiche Pure. 7

L I B R O P R I M O.

Aritmetica Numerica.	ivi
CAP. I. De' Numeri intieri.	ivi
Natura, Formazione, e Valore de' Numeri.	ivi
Addizione de' Numeri intieri.	13
Sottrazione de' Numeri intieri.	15
Moltiplicazione de' Numeri intieri.	16
Divisione de' Numeri intieri.	19
CAP. II. Delle Frazioni.	24
Riduzione de' Fratti.	25
Addizione de' Fratti.	28
Sottrazione de' Fratti.	ivi
Moltiplicazione de' Fratti.	29
Divisione de' Fratti.	32
CAP. III. Delle Frazioni Decimali.	33
Addizione delle Decimali.	35
Sottrazione delle Decimali.	36
Moltiplicazione delle Decimali.	ivi
Divisione delle Decimali.	37

LIBRO II.

Dell' Algebra.	39
CAP. I. Dell' Algebra propriamente detta.	ivi
Operazioni Algebraiche.	41
Riduzione.	ivi
Addizione.	vi
Sottrazione.	42
Moltiplicazione.	ivi
Divisione.	44
Della Composizione, e Risoluzione.	47
Trovar i divisori d' una quantità data.	49
Elevazione delle Quantità alle Potenze.	53
Estrazione delle Radici.	57
Estrazione della Radice Quadrata.	59
Estrazione della Radice Cubica.	63
Degl' Incommensurabili.	68
Calcolo de' Radicali.	ivi
Calcolo delle Potenze per i loro Esponenti.	76
Riflessioni sull' oggetto ed essenza dell' Algebra.	78
CAP. II. Dell' Analisi.	83
Dell' Equazione.	ivi
Trasposizione.	84
Divisione.	85
Moltiplicazione.	ivi
Estrazione della Radice.	86
Sostituzione.	ivi
Proporzione.	87
Risoluzione dei Problemi.	ivi
Equazione del primo grado.	88
Equazione del secondo grado.	97
Delle Quantità negative.	109
Problemi del secondo grado.	110
Dell' Equazioni di differenti gradi.	114
Equazioni del terzo grado.	116
Caso irriducibile.	121
Equazioni del quarto grado.	123
Riflessioni.	126

CAP. III.

CAP. III. Delle Proporzioni.	129
Proprietà delle Ragioni e Proporzioni Aritmetiche.	131
Progressione Aritmetica.	132
Problemi sulle Progressioni Aritmetiche.	138
Delle Ragioni e Proporzioni Geometriche.	140
Proprietà delle Proporzioni Geometriche.	143
Problemi sulle Proporzioni Geometriche.	144
Delle Progressioni Geometriche.	148
Problemi sulla Progressione Geometrica.	151
CAP. IV. De' Logaritmi.	157
Proporzione Armonica.	167
CAP. V. Proprietà della Grandezza considerata nell' infinito.	169
CAP. VI. Delle Serie.	175
Somma delle Serie.	179
CAP. VII. Della Combinazione.	185
Alternazione o Permutazione.	188

L I B R O III.

Della Geometria Elementare.	191
CAP. I. Delle Linee o della Longimetria.	192
Proprietà delle Linee rette nella posizione d' una retta riguardo ad un'altra.	ivi
Proprietà delle linee rette nella posizione di una riguardo a due o a più altre, senza racchiudere spazio.	198
Proprietà delle linee rette riguardo al Circolo.	204
Proprietà delle linee rette che racchiudono spazio.	212
De' Triangoli.	ivi
Differenti specie e proprietà de' Triangoli.	ivi
Comparazione de' Triangoli.	216
Degli altri Poligoni.	219
Proprietà de' Poligoni in generale.	ivi
Proprietà de' Poligoni Simetrici.	221
Proprietà de' Poligoni Regolari.	223
Proprietà del Circolo.	226
Delle linee Proporzionali.	231

Com-

Comparazione delle Figure , o proprietà delle Figure simili.	237
CAP. II. Delle Superficie , o della Planimetria.	239
Del contorno della Superficie e della lor comparazione.	ivi
Delle misure proprie per determinar la grandezza della Superficie.	240
Metodo generale di misurare la Superficie.	241
Osservazioni sulla Quadratura del Circolo.	250
Delle Figure Ioperimetre.	252
Della Geodesia o Agrimensura.	254
Proprietà delle Superficie Piane o de' Piani.	263
CAP. III. De' Solidi o della Stereometria.	267
Origine e proprietà de' Solidi prodotti da un moto rettilineo.	268
Origine e proprietà de' Solidi formati da un moto circolare.	271
De' Poliedri e de' loro rapporti.	274
Comparazione de' Solidi.	278
Misura delle Superficie di ciascuna specie di Solidi.	281
Comparazione delle Superficie de' Solidi.	285
Misura delle Solidità di ciascuna specie di Solidi.	286
Comparazione delle Solidità dei Solidi.	290

APPENDICE PRIMA.

Della Trigonometria.	291
Principj per la costruzione delle Tavole de' Seni.	295
Principj per la Teoria del Calcolo Trigonometrico.	297
Uti della Teoria precedente per i Calcoli Trigonometrici.	301
Calcoli de' Triangoli Rettangoli.	302
Calcoli de' Triangoli Obbliquangoli.	304
Applicazione della Trigonometria.	306

APPENDICE SECONDA.

Del Compasso di Proporzione.	314
Uso della Linea delle Parti uguali.	315
Uso della Linea delle Corde.	318
Uso della Linea de' Poligoni.	319
Uso delle Linee de' Piani.	320
Uso della Linea de' Solidi.	321
Uso della Linea de' Metalli.	322
Uso della Linea de' Seni, delle Tangenti, e delle Seganti.	323
Uso del Compasso di Proporzione per la Trigonometria.	324
Uso del Compasso di Proporzione nella Geometria.	327
Uso del Compasso di Proporzione nell' Agrimensura.	328
Osservazioni sulla Geometria.	329
Della Geometria Trascendente.	332
CAP. I. Delle Curve in generale.	<i>ivi</i>
CAP. II. Delle Sezioni Coniche.	341
Della Natura e proprietà delle Sezioni Coniche descritte sopra un piano, e considerate rapporto ai loro assi.	<i>ivi</i>
Proprietà delle Sezioni Coniche riguardo a loro diametri.	364
Proprietà dell' Iperbole riguardo ai suoi Asintoti.	371
Problemi sopra le Sezioni Coniche.	375
CAP. III. Di varie Curve principali.	388
Concoide di Nicomede.	389
Cissoide di Diocle.	391
Curve Meccaniche o Trascendenti.	392
Quadratrice di Dinostrate.	<i>ivi</i>
di Tschirnhausen.	393
Spirale d' Archimede.	<i>ivi</i>
Logaritmica.	<i>ivi</i>
Logaritmica Spirale.	394
Cicloide.	<i>ivi</i>
Epicycloide.	396

Svilupata .	397
CAP. IV. De' Luoghi Geometrici.	298
CAP. V. Del Calcolo Infinitesimale.	407
CAP. VI. Del Calcolo Differenziale.	412
Uso del Calcolo Differenziale. per trovare le Tangenti, Normali ec.	419
Per trovar i raggi della Curvatura delle Curve.	422
Per i Massimi e i Minimi.	424
CAP. VII. Del Calcolo Integrale.	431
Per le Quadrature delle Superficie Piane e Curve.	433
Per la Rettificazione delle Curve.	436
Per la Cubatura de' Solidi.	438
Per il Metodo inverso delle Tangenti.	439
Trigonometria Sferica.	442



IDEA GENERALE DELLE MATEMATICHE.

LA parola *Matematica* significa *Scienza*. Infatti si possono riguardar le *Matematiche* come la *Scienza* per eccellenza; poichè elle racchiudono le sole cognizioni certe accordate ai nostri lumi naturali.

Si chiaman *Matematiche* quelle Scienze, che han per oggetto le proprietà della *Grandezza* in quanto ella è calcolabile o misurabile.

La *Grandezza*, o sia *Quantità*, è tutto ciò che può concepirsi composto di parti; tutto ciò che è suscettibile di accrescimento e di diminuzione.

La *Quantità* si può concepire, o come composta di parti separate le une dall'altre, o come composta di parti unite e legate fra loro. Un mucchio di arena è una quantità composta di parti fra loro separate; un bastone è una grandezza composta di parti unite o continue.

La quantità composta di parti separate si esprime con numeri, ed è l'oggetto dell'*Aritmetica*; allora la quantità è *calcolabile*.

La *Quantità*, di cui le parti son continue, fa l'*Estensione*, e questo è l'oggetto della *Geometria*; allora la quantità è *misurabile*.

Le *Matematiche* si dividon in due Classi. La prima Classe abbraccia le *Matematiche Pure*, cioè quelle, ove le proprietà della grandezza calcolabile

Elem. di Matem.

A

le

le e misurabile son considerate in una maniera *astratta*, vale a dire senza disegnar un soggetto particolare.

La seconda Classe comprende le *Matematiche Miste*, o *Fisico-Matematiche*, nelle quali si considerano le proprietà della grandezza calcolabile o misurabile in una maniera *concreta*, cioè ne' corpi o soggetti particolari; il che è opposto all' *astratto*. Per esempio, 3, è un numero *astratto*, lorchè non disegna nè tre Uomini, nè tre alberi, nè altra cosa particolare; ma tre alberi è *concreto*.

La *Quantità astratta*, oggetto delle Matematiche Pure, è o *numerabile*, o *estesa*. La *quantità astratta numerabile* è divenuta l'oggetto dell' *Aritmetica*; e la *quantità astratta estesa* quello della *Geometria*.

L' *Aritmetica* si divide in *Aritmetica numerica* o per *Cifre*, ed in *Algebra* o sia *Aritmetica universale per lettere*, la quale non è altro che il calcolo delle grandezze in generale, e di cui le operazioni non sono propriamente che operazioni Aritmetiche in una maniera più compendiosa.

L' *Algebra* è *elementareo infinitesimale* secondo la natura delle quantità alle quali si applica. L' *Infinitesimale* è o *Differenziale* o *Integrale*. E' *Differenziale*, quando si tratta di scendere dall' espressione d'una quantità finita, o considerata come tale, all'espressione del suo accrescimento, o della sua diminuzione istantanea. *Integrale*, quando si tratta di rimontare da questa espressione alla stessa quantità finita.

La *Geometria*, o ha per oggetto primitivo le proprietà del circolo e della linea retta, o abbraccia nelle sue speculazioni ogni sorte di curve. Quindi si divide in *Elementare*, in *Trascedente*, ed in *Sublime*.

Le *Matematiche Miste* han tante divisioni e sud divisioni quanti sono gli esseri reali, ne' quali la quantità può essere considerata.

La quantità considerata ne' corpi mobili, o tendenti a muoversi, è l'oggetto della *Meccanica*, la qual ha due rami, la *Statica*, e la *Dinamica*.

La *Statica* ha per oggetto la quantità considerata ne' corpi in equilibrio, e tendenti soltanto a muoversi. La *Dinamica* ha per oggetto la quantità considerata ne' corpi attualmente mossi.

La *Statica* si divide in *Statica propriamente detta*, che ha per oggetto la quantità considerata ne' corpi solidi in equilibrio, e tendenti solo a muoversi; ed in *Idrostatica*, che ha per oggetto la quantità considerata ne' corpi fluidi, e tendenti soltanto a muoversi.

La *Dinamica* si ripartisce in *Dinamica propriamente detta*, che ha per oggetto la quantità considerata ne' corpi solidi attualmente mossi; ed in *Idrodinamica*, che ha per oggetto la quantità considerata ne' corpi fluidi attualmente mossi.

Ma se si considera la quantità nell'acque attualmente, l'*Idrodinamica* prende il nome d'*Idraulica*.

Alla *Idrodinamica* si riferisce la *Navigazione*, ed alla *Meccanica* la *Balistica* o sia il getto delle Bombe.

La quantità considerata nel movimento de' corpi Celesti dà l'*Astronomia Geometrica*; donde la *Cosmografia* o *Descrizione dell'Universo*, la quale si divide in *Uranografia* o *Descrizione del Cielo*, in *Idrografia* o *descrizione dell'acque*, ed in *Geografia*. Quindi ancora deriva la *Cronologia*, e la *Gnomonica* o l'arte di costruir i quadranti.

La quantità considerata nella Luce è l'oggetto dell'*Ottica*. Dalla quantità considerata nel movimento della luce nascon i differenti rami dell'*O-*

tica. La luce mossa in linea retta è l'oggetto dell'*Ottica* propriamente detta; la luce riflessa in un solo e stesso mezzo lo è della *Catottrica*; la luce rotta nel passare da un mezzo in un altro diverso, forma l'oggetto della *Diottrica*. All'*Ottica* si riferisce la *Prospettiva*.

La *quantità* considerata nel Suono, nella sua veemenza, movimento, gradi, riflessioni, velocità ec. dà l'*Acustica*.

La *quantità* considerata nell'Aria, nel suo peso, movimento, condensazione, rarefazione ec. dà la *Pneumatica*.

La *quantità* considerata nella possibilità degli avvenimenti, somministra l'*Arte di Congetturare*, donde nasce l'*Analisi de' Giuochi d'azzardo*.

Ecco per maggior chiarezza una Tavola di tutta la divisione delle *Matematiche*.

Pure	Aritmetica	{	Numerica	{	Elementare	{	Differenziale			
			Algebra		Infinitesimale			{	Integrale	
	Geometria	{	Elementare	{	Architettura Civile	{	Architettura Militare. Tattica.			
					Trascendentale (Teoria delle Curve.					
	Meccanica	{	Statica	{	Statica propriamente detta	{				
					Idrostatica					
			Dinamica	{	Dinamica propriamente detta					
					Balistica			Idraulica		
					Idrodinamica			{	Navigazion. Archite.	
									Navale . . .	
Miste	Astronomia	{	Cosmografia	{	Uranografia	{				
					Geografia					
					Idrografia					
	Geometrica	{	Cronologia	{		{				
					Gnomonica					
	Ottica	{	Ottica propriamente detta	{		{				
					Diottrica. Prospettiva					
					Catottrica					

Fisico-Matematiche.

Da ciò si vede , che le Matematiche si estendono sopra
A 3 quasi

quasi tutte le cognizioni umane . Illuminan lo spirito
a distinguér il vero dal falso , lo convincono delle ve-
rità già note , e l'ajutano a portare con un'intiera
certezza la perfezione in tutte le Scienze che l'uo-
mo può acquistaré colla sola sua ragione.





PARTE PRIMA

DELLE MATEMATICHE PURE.

LIBRO PRIMO.

Aritmetica Numerica.

CAPITOLO PRIMO.

De' Numeri interi.

Natura, Formazione e Valore de' Numeri.

1.  *Aritmetica Numerica* è una scienza, che considera le proprietà de' Numeri, per apprendere a calcolare esattamente con facilità e prontezza.
2. I Numeri son disegnati presentemente in una gran parte della Terra, almen in Europa, in *dieci figure*, le quali dagli Indiani passarono agli Arabi, e indi verso il fine del decimo secolo per mezzo di Gerberto, che fu poi Pa-

pa Silvestro II, furon a noi comunicate. Queste dieci figure sono

Uno.	1	Sei.	6
Due.	2	Sette.	7
Tre.	3	Otto.	8
Quattro.	4	Nove.	9
Cinque.	5	Zero.	0

Invenzione che per la sua grand' utilità , fa grand' onore allo spirito umano . E' mirabile come con sì poche figure si esprimi ogni sorte di numeri . Ma il più mirabile è l'idea concepita in quest'invenzione , in variar il valore d' una figura col metterla in differenti luoghi , e d'inventar il zero , il quale trovandosi dopo una figura ne accresce il valore d' una decina .

Dieci.	10	Venti.	20
Undici.	11	Cinquanta.	50
Dodici.	12	Cento.	100
Vent' uno.	21	Settecento.	700
Duecento trenta quattr.	234	Novecento quattro.	904
Quattrocento venti tre.	423	Mille.	1000
Trecento venti.	320	Mille ed uno.	1001

3. Da ciò apparisce , che una sola cifra non esprime che unità : come 8 esprime otto unità . Ma quando son più cifre ordinate di seguito in una stessa linea , esprimono differenti valori secondo il rango che occupano . Questi ranghi si contano da destra a sinistra , e ciascuna cifra esprime decine riguardo a quella che l' è a destra .

Per enunciar il valore di questo numero 4579. si osservi che la figura 9 (che è la prima incominciando a destra) è un numero semplice di nove unità ; la figura 7 susseguente esprime sette decine o settanta ; la susseguente 5 esprime centinaja o siacincquecento ; finalmente l'ultima 4 esprime quattro mila .

Onde

Onde riassumendo tutti questi valori, ma ordine inverso, cioè incominciando a sinistra, si vede che questo numero 4579. significa quattromila cinquecento settantanove.

4. Il zero, quando è preceduto da altra figura, serve per far esprimer alle decine il loro valore; come 10 dieci, 50 cinquanta, 603 seicento e tre. Ma quando è solo, 0, non significa nulla.

5. Lorchè son molte figure (cifre o caratteri che dir si vogliano) come 2109208430021694701, per conoscerne ed esprimerne con facilità il valore, si suole ripartirle (incominciando da destra a sinistra) in più classi, ciascuna di tre cifre, separate con virgole.

Le cifre contenute nella prima classe o primo ternario (andando sempre da destra a sinistra) esprimon unità, decine, e centinaja semplici. Nel secondo ternario son unità, decine, e centinaja di migliaia. Il terzo esprime unità, decine, e centinaja di milioni. Il quarto unità, decine, e centinaja di migliaia di milioni. Il quinto unità, decine, centinaja di milioni di milioni; o sia di *bilioni*. Il sesto unità, decine, e centinaja di migliaia di bilioni. Il settimo unità, decine, centinaja di milioni di bilioni, o sien *trilioni*, e così in appresso *quadrilioni*, *quintilioni* ec.

Onde le predette cifre ripartite in questa maniera

3	2	1	
2,	109,	208,	430, 021, 694, 701,

e mettendo per maggior facilità sopra la settima cifra 1, sopra l'altra settima 2, sulla terza settima 3 ec. si leggon così, due trilioni, cento nove mila duecento otto bilioni, quattrocento trentamila ventuno milione, seicento novanta quattromila settecento uno.

Si legge sempre da sinistra a destra; e la denominazione di un ternario non si fa se non che dopo aver enunciata l' ultima cifra dello stesso ternario. Come per leggere 694, 700, non si dice secentomila, novantamila, quattromila, settecento; ma seicento novantaquattro mila settecento.

6. Gli antichi Romani esprimevan i numeri con queste

queste sette cifre, I, V, X, L, C, D, M.

La cifra I significa uno; V, cinque; X, dieci; L, cinquanta; C, cento; D, cinquecento; M, mille.

I, ripetuto due volte fa due, II; tre volte III, tre.

I, posto avanti a V, o X, leva un' unità dal numero espresso da ciascuna di queste lettere; onde IV, significa 4; IX, 9.

Ma se I, si aggiunge a V, o ad X, accresce unità ai numeri ai quali si aggiunge. Come VI significa 6; VII, 7; VIII, 8; XI, 11; XII, 12 &c.

Lo stesso è rapporto a X, avanti o dietro L, e C.

Onde XL significa 40; LX, 60; LXX, 70; XC, 90; CX, 110.

Più C significa più centinaja, come CC, 200 ec.

Talvolta, ma s'incontra di rado, CD, 400.

Oltre la lettera D esprimente 500, si esprime lo stesso numero in questa maniera ID. Così invece di M, significante mille, si fa CID. Onde IDC, 600; IDCC, 700 ec. Così CCIDD, significa 10, 000; CCCIDD, 100, 000 ec.

Ufavan anche di porre una sbarretta per dinotar le migliaja, come V, significa 5000; LX, 60, 000; M, 1, 000, 000; MM, 2, 000, 000.

In qual maniera facefsero i Romani con tali cifre le loro operazioni numeriche, ci è intieramente ignoto. Questa inutile, e non difficile scoperta appartien agli eruditi.

7. Il *Numero*, secondo la giusta definizione di Nevvton, è un rapporto, o sia una ragione.

Per ben intender ciò, convien sapere che rapporto, o ragione non è altro che il risultato del paragone di due quantità, l'una coll'altra, relativamente alla loro grandezza. Ogni quantità che si paragona ad un'altra, è o maggiore, o minore, o uguale.

Onde ogni grandezza ha un certo rapporto con un'altra con cui si paragona; vale a dire ella vi è contenuta, o la contiene in un certo modo.

Que-

Questo modo di contenere o d'esser contenuto, cioè questo rapporto, è quel che si chiama Numero.

Onde il numero 4 esprime il rapporto d'una grandezza verso un' altra più piccola, che si prende per l' unità, e che è contenuta quattro volte dalla più grande. All'incontro la frazione $\frac{1}{4}$, cioè un quarto, esprime il rapporto d' una certa grandezza verso una più grande che si prende per l' unità, in cui la minore si contiene quattro volte.

1. Numero intero sarà dunque quello, che vien misurato dall' unità, come 1, 2, 3 &c. Numero fratto, o rotto, è quello ch'è parte dell' unità.

Non vi è unità, che non si possi concepir composta d' un certo numero di parti uguali fra loro. Una tesa o pertica, per esempio, è composta di 6 parti, cioè di 6 piedi; un piede è composto di 12 pollici; un pollice di 12 linee, una linea di 12 punti ec.

Dunque lorchè si dice $\frac{2}{3}$ o $\frac{2}{4}$ di tesa, s'intende dire che d'una tesa si prendono 2, o 3 parti.

9. Il rapporto è di due specie. Si dice Geometrico, lorchè si considera come una quantità ne contenga un' altra; e si chiama Aritmetico, quando si considera l' eccesso, o la differenza d'una quantità verso l' altra. L'uguaglianza di due rapporti geometrici dicesi proporzione geometrica; e l'uguaglianza di due rapporti aritmetici si dice proporzione aritmetica. Onde per aver una proporzione, richiedonfi quattro quantità, in maniera che la prima sia alla seconda, come la terza è alla quarta.

Così queste quantità scritte in questa guisa 10:5::4:2 forman una proporzione Geometrica; e quest' altre 8:6:4:2 forman una proporzione Aritmetica.

10. Or se i numeri son rapporti, l' Aritmetica, ch' è la scienza de' numeri, è dunque l' arte di combinar fra loro questi rapporti, servendosi per questa combinazione de' segni stessi, co' quali i numeri son distinti.

Quindi nascono le quattro principali operazioni dell' Aritmetica, perchè le differenti combinazioni che si possono fare de' rapporti si riducono o ad esaminare l' eccesso

eccello degli uni sugli altri, o la maniera come si contengono. L' *Addizione* e la *Sottrazione* adempion il primo oggetto, la *Moltiplicazione* e *Divisione* il secondo.

11. L' *Addizione* consiste a trovar la *somma* o il *totale* di tutti i numeri che si uniscono insieme: 3, e 6, uniti insieme fan la *somma* 9.

La *Sottrazione* è levar un numero da un altro. Se da 5 si leva 3, il *resto* è 2.

Quantunque i numeri sien propriamente rapporti Geometrici, pure nell' *Addizione* e *Sottrazione* si considera l' eccello scambievole de' numeri, cioè il rapporto Aritmetico. Nell' *Addizione* uno de' due numeri rappresenta l' eccello della somma sopra l' altro numero. Nella *Sottrazione* si cerca la differenza de' due numeri.

12. La *Moltiplicazione* consiste in trovare quante volte un numero contien un altro. Avendosi 4 da moltiplicare per 5, ed il *prodotto* essendo 20, si vede che 20 contiene 4 cinque volte, ovvero contiene 5 quattro volte.

La *Divisione* consiste in conoscere quante volte un numero si contien in un altro. Volendosi 20 divider per 4, il *quoziente* 5 fa vedere, che 4 si contiene in 20 cinque volte.

Dunque nella *Moltiplicazione* e *Divisione* si considerano i numeri nel rapporto Geometrico.

13. Da tutto ciò si deduce, che tutte le operazioni dell' Aritmetica riduconsi, o a formar un tutto per mezzo della riunione di differenti parti, come nell' *Addizione* e nella *Moltiplicazione*; o a risolvere un tutto in differenti parti, il che si fa colla *Sottrazione*, e colla *Divisione*.

14. Si deduce ancora, che queste quattro operazioni dell' Aritmetica si riducon rigorosamente a due, all' *Addizione* ed alla *Sottrazione*. Poichè la *Moltiplicazione* non è propriamente che una maniera abbreviata di far l' *addizione* d' un medesimo numero più volte a se stesso; e la *Divisione* è parimenti una manie-

maniera abbreviata di sottrarre uno stesso numero ad un' altro . Onde ben accuratamente furon le Regole dell' Aritmetica definite da Nevvton *Composizione e Risoluzione de' Numeri*.

15. Il dettaglio delle operazioni particolari dell' Aritmetica dipende dalla forma e dalla istituzione de' segni, co' quali si esprimon i numeri. La nostra Aritmetica, che non ha che dieci cifre, sarebbe differentissima, se ne avesse più o meno: ed i Romani che avean cifre diverse, dovean anche avere operazioni di Aritmetica ben diverse dalle nostre. Ma qualunque Aritmetica si ridurrà sempre alle quattro regole surriferite; perchè di qualunque maniera si disegnano o scrivon i rapporti, non si potranno giammai combinarli, che nelle quattro predette maniere, ed a queste si riducono tutte l'altre operazioni dell' Aritmetica.

Addizione de' Numeri intieri.

16. L' Addizione de' numeri *semplici*, cioè d' una sola cifra, non ha bisogno d' alcuna regola.

Si fa subito, che 4 aggiunto a 3, fa 7. Per brevità si segna così, $4 + 3 = 7$. Il segno $+$ significa più, ed il segno $=$ significa uguale.

17. Ne' numeri composti di più cifre, l'addizione si eseguisce col porre i numeri in colonne verticali; badando però di metter le unità sotto le unità, le decine sotto le decine ec. Si tira indi una linea o sbarra orizzontale. Poi s' incomincia a sommare tutte le unità (andando sempre da destra a sinistra) di una colonna, poi le decine dell' altra ec.; e si scrivono queste somme sotto la sbarra successivamente alle colonne corrispondenti. Come per sommare queste due quantità.

643

236

879

La Somma è.

Perchè la somma delle unità della prima colonna essendo $3 + 6 = 9$, si mette 9 sotto la prima colonna.

na. La somma delle decine della seconda colonna essendo $4 + 3 = 7$, si scrive 7 sotto la seconda colonna; e la somma delle centinaja della terza colonna essendo $6 + 2 = 8$, si mette 8 sotto la terza colonna. Onde la somma totale è 879.

18. Ma se la somma di una delle colonne forpassa 9, cioè se è composta di decine ed unità, conviene iscriver solamente le unità sotto di essa colonna ed aggiunger alla colonna susseguente un numero ugual a quello delle decine trovate nella precedente somma. Come.

	18
	94
	—
Somma.	122
$8 + 4 = 12$, poichè 12 contiene una decina e due unità, si metta 2 sotto la prima colonna, e si aggiunga una decina alla somma della colonna susseguente, la quale sarà $1 + 2 + 9 = 12$. Così.	3946
	215
	1031
	28
	204
	—
Somma.	5417

Questa regola non ha bisogno di dimostrazione: ad ognuno è noto, che il tutto è uguale a tutte le sue parti, prese insieme.

Per accertarsi di non aver errato, si rifaccia l'operazione, prendendo la somma delle colonne da giù in su, poichè dovrà esser la stessa di quella presa da su in giù.

19. Come si è fatta l'addizione de' numeri *omogenei* cioè della stessa specie, così si fa ancora l'addizione de' numeri *eterogenei*, vale a dire di specie diversa.

Convien però ne' numeri eterogenei usar due attenzioni: una di porre i numeri della stessa denominazione gli uni sotto gl' altri, come avendosi a sommare scudi, paoli, bajocchi, con altri scudi paoli, e bajocchi, bisogna porre gli scudi sotto gli scudi, i paoli sotto

sotto i paoli, i bajocchi sotto i bajocchi ec. L' altra attenzione è, che nella somma di ciascuna colonna convien osservare quante volte si contiene la specie della colonna susseguente, ed aggiungerla a tal colonna, mettendo il resto sotto la prima.

Come nel sottoposto esem-

tese,	piè,	pollici,	linee
26,	4,	10,	11
3,	7,	9,	6
31,	0,	8	5

 pia; poichè 17 linee contengono un pollice e 5 linee, il numero 5 devesi porre sotto la colonna delle linee, e quel pollice aggiungerlo alla colonna de' pollici; e poichè 20 pollici contengono 1 piede ed 8 pollici, si porrà 8 sotto la colonna de' pollici, e si aggiungerà 1 a quella de' piedi, la di cui somma essendo 12, cioè 2 tese, si porrà 0 sotto la colonna de' piedi, e si porterà 2 in quella delle tese.

Sottrazione de' Numeri Intieri.

20. E' facile la Sottrazione de' Numeri semplici. Se da 6 si ha da toglier 4, farà 2 il *resto*, che si può anche chiamar *eccesso* o *differenza*. Questa operazione per brevità si esprime così, $6 - 4 = 2$: il segno — significa meno.

21. Per sottrarre i numeri composti, convien porre il più piccolo sotto il più grande, e le unità sempre sotto le unità, le decine sotto le decine ec. Indi tratta una sbarra, scrivali sotto ciascuna colonna successivamente la *differenza* che passa tralle unità, decine ec. del numero superiore e quelle del numero inferiore
 $5 - 2 = 3$, $7 - 3 = 4$, $6 - 4 = 2$.

675

432

—

Resto. 243

22. Ma se in una colonna la cifra inferiore sorpassa la superiore, bisogna aggiunger alla superiore una decina, e far la solita sottrazione; ma per compensare questa decina, bisogna o diminuire d' un' unità la cifra superiore della colonna susseguente, o accrescer d' una

d'una unità la cifra inferiore della stessa colonna seguente. Come nel sottoposto esempio.

7650

1561

Resto. 6089

Per i numeri eterogenei, nel caso che il numero inferiore sia più grande del superiore, bisogna aggiunger invece di decine il valor di una unità della specie susseguente. Come per sottrarre 7 linee da 3 linee, a 3 non convien aggiunger 10, ma 12 linee, che è il valore di un pollice ec.

teste, piè, poll., linee

15, 5, 4, 3

7, 6, 10, 7

Resto. 7, 4, 5, 8

23. Per prova della giustezza della sottrazione, si aggiunga insieme il resto ed il minor numero sottratto, la somma deve esser ugual al numero maggiore.

2141

1742

Resto. 399

Numero minore. 1742

Numero maggiore. 2141 Somma.

Moltiplicazione de' Numeri Intieri.

24. La Moltiplicazione serve per trovare nella maniera più breve la somma d'un numero, che si ha da aggiunger molte volte a se stesso. Moltiplicar 8 per 9, altro non significa, che saper la somma di 8 aggiunto nove volte. Si avrebbe perciò da far una colonna di nove 8, per aver la somma di 72. Or per evitar questa lunga ripetizione di addizione, si è trovata una maniera più spedita, ch'è la Moltiplicazione.

25. Per moltiplicar i numeri semplici non vi è regola, basta saper la volgarissima tavola Pitagorica, o far

far uso delle dita. E' chiaro, che 4 moltiplicato per 6 fa 24; il che si esprime in compendio $4 \times 6 = 24$; il segno $\times$ significa *moltiplicato per*.

De' due numeri che si moltiplican insieme, uno si chiama *moltiplicatore*, l'altro *moltiplicando*, ovvero *radici*, e *fattori* del *prodotto* che è il risultato della moltiplicazione.

26. Nella moltiplicazione de' numeri composti, convien mettere quello che si è scelto per *moltiplicatore* (che è ordinariamente il più piccolo) sotto il *moltiplicando*; in maniera però che sempre le unità sien sotto le unità, le decine sotto le decine ec. E tratta una linea, incominciar da destra a sinistra a moltiplicar ciascuna colonna, ritenendo però le decine, e scrivendo sotto al *moltiplicatore* il numero che resta dalle decine.

Le decine poi ritenute convien aggiungerle al numero susseguente. Come

$8 \times 4 = 32$, si mette giù 2, e si portan tre decine.

$3 \times 4 + 3 = 15$, si mette giù 5, e si porta 1.

Moltiplicando 438	
Moltiplicatore 24	
1752	
876	
10512	

$4 \times 4 + 1 = 17$, si mette giù 7, e si porta 1. Ecco che $438 \times 4 = 1752$.

Resta ora 438×2 ; il che si fa nella stessa maniera

$8 \times 2 = 16$, si mette giù 6, e si porta 1.

$3 \times 2 + 1 = 7$, si mette giù 7.

$4 \times 2 = 8$, si mette giù 8.

Onde $438 \times 2 = 876$.

Finalmente si sommano questi due *prodotti* nella maniera come son disposti, e la somma 10512, farà il *prodotto* di 438×24 .

27. Se vi sono de' zeri al fine dell'uno o de' due numeri da moltiplicarsi, si abbrevia molto l'operazione, se si moltiplican solamente le cifre, ed al fin del pro-

dotto si mettan tanti zeri, quanti ve ne sono all'estremità de' numeri dati.

			3000
			100
		76013	
		40100	60000
2460			
300			
		7601300	
		0000	
738000		304052	
		3048121300	

28. La prova della moltiplicazione è di cambiar l'ordine de' numeri dati, cioè del moltiplicatore farne il moltiplicando, e reciprocamente: il *prodotto* dovrà sempre esser lo stesso.

29. La moltiplicazione tra numeri *concreti* propriamente non si dà. 45 operai han fattociascuno 20 tesse di opera, qual'è il *prodotto totale*? Il senso comune dice subito, che bisogna moltiplicare 45 per 20; ma è strano che le tesse si abbian da moltiplicare per gli operai. Effettivamente ciò non può essere.

La moltiplicazione consiste in prender una data quantità un dato numero di volte; onde il moltiplicatore deve esser sempre un numero *astratto*. Perciò quando si propone di moltiplicare 20 tesse per 45 operai, è lo stesso che dire, si prendan 20 tesse 45 volte.

30. La moltiplicazione *composta* è quando si han da moltiplicar quantità di differente specie. Come piè, poll.

5, 3
2, 4
10, 6
1, 8
1

Prodotto, 12, 3

1°. Si moltiplichino i piedi per i piedi, cioè $5 \times 2 = 10$, e si metta 10, sotto la colonna de' piedi.

2°. Piedi

2°. Piedi per i pollici, cioè $2 \times 3 = 6$, e si metta 6 sotto la colonna de' pollici.

3°. $5 \times 4 = 20$, pollici, cioè 1 piè, e 8 pollici; si metta dunque 1 piè sotto i piedi, e 8 poll. sotto i poll.

4°. $3 \times 4 = 12$, parti di piede, cioè 1 poll. si metta dunque 1 sotto la colonna de' poll.

La somma 12 piedi 3 poll. farà il prodotto.

Questa operazione si farà ancora più comodamente per mezzo di Frazioni.

Divisione de' Numeri Intieri.

31. La *Divisione* è una sottrazione abbreviata, togliendo un minor numero da un altro maggiore quante volte si può, affin di sapere quante volte vi è contenuto.

Onde per sapere quante volte 2, si contien in 8, la maniera più naturale è sottrarre 2 da 8, il resto è 6; da 6 poi sottrarre 2, il resto è 4; e da 4 sottrarre 2, il resto è 2; finalmente da 2 sottraendo 2, il resto è 0. Or essendosi fatte quattro sottrazioni, si deve conchiudere, che 2 si contenga in 8 quattro volte.

Ma siccome questo metodo sarebbe troppo lungo, se i numeri fossero alquanto grandi, si è perciò trovato un metodo più compendioso, che è la *Divisione*.

32. Nella *Divisione* si consideran tre numeri. 1°. Quello che si ha da dividere si dice il *dividendo*. 2°. Quello per cui si divide, è il *divisore*. 3°. Quello che esprime quante volte il *divisore* è contenuto nel *dividendo*, si chiama il *quoziente*. Come nell' addotto esempio 8 è il *dividendo*, 2 il *divisore*, 4 il *quoziente*.

33. Quindi siegue, che il *dividendo* contiene tante volte il *divisore*, quante unità sono nel *quoziente*, come $8:2::4:1$. Onde il prodotto del *divisore* per il

quoziente è ugual al *dividendo*, $2 \times 4 = 8$. Dunque la prova dell'esattezza della *divisione* è moltiplicar il *divisore* per il *quoziente*; il loro prodotto deve esser ugual al *dividendo*.

34. Per divider i numeri semplici, non vi è bisogno di regola.

È visibile che $\frac{8}{2} = 4$. Il segno della divisione è porre il *dividendo* sopra il *divisore* con una linea fra mezzo, altri scrivon così $8 : 2 = 4$.

35. Ma se si tratta di numeri composti, come se si ha da divider 6759 per 3, si dispongan i termini come si veggono nell'operazione.

dividendo	}	3	divisore
6759			
....			
6			2253 quoziente

6	
. 7	
6	
15	
15	
.. 9	
9	
9.	

Indi si metta un punto sotto la prima cifra 6 del *dividendo*, e veggasi quante volte 3 entra in 6. Vi entra 2 volte; si metta dunque 2 sotto la linea del *divisore*. Per vedere se 3 si contiene realmente 2 volte in 6, si moltiplichino 3 per 2, ed il prodotto 6 si scriva sotto il 6 del *dividendo*; si sottragga; non resta niente; dunque 3 si contien in 6 esattamente 2 volte.

Si metta poscia un altro punto sotto la cifra 7 del *dividendo*, e dicasi 3 in 7 quante volte entra? 2. Scrivasi dunque 2 al *quoziente*. Si moltiplichino poi questo *quoziente* 2 per il *divisore* 3, il prodotto è 6. Si sottragga questo 6 da 7 del *dividendo*, resta 1.

A fianco

A fianco a questo si cali giù il 5 del *dividendo* col porgli prima il suo punto sotto; e dicasi 3 in 15 quante volte entra? 5. Dunque si metta 5 nel *quoziente*. Indi il *quoziente* 5 $\times$ 3 *divisore*, ed il prodotto 15 si sottragga dal *dividendo* 15, e non vi è alcun resto.

Finalmente si metta un punto sotto il 9 del *dividendo*, si cali giù detto 9, e veggasi quante volte il *divisore* 3 vi entra? 3 volte. Si metta 3 al *quoziente*.

Poi il *quoziente* 3 $\times$ 3 *divisore*, e sottraendo il prodotto 9 dal *dividendo* 9, non resta nulla: l'operazione è compita, tutte le cifre del *dividendo* sono state divise per il *divisore*; dunque il *quoziente* è 2253; cioè il *divisore* 3 è contenuto 2253 nel *dividendo* 6759.

Infatti per vedere, se l'operazione sia esatta, si moltiplichi il *divisore* per il *quoziente*, il prodotto deve esser ugual al *dividendo*. La moltiplicazione è dunque la prova della divisione.

36. Lorchè il *divisore* contiene più cifre, la divisione è più difficile, e vi si va a tastone, ma anche questo tastone ha le sue regole.

dividendo

32035

2814..

• 3895

3752

• 143

469 divisore

68

143 quoziente

469

Poichè le tre prime cifre del *dividendo* non contengono il *divisore*, bisogna prenderne quattro, e metter sotto la quarta cifra 3 il solito punto. Indi si dica 4 prima cifra del *divisore* quante volte entra in 32, prime due cifre del *dividendo*? 8. Ma non si metta però 8 nel *quoziente*, perchè moltiplicandosi prima per il *divisore*, si vedrà che il prodotto 3752 è maggiore di 3203, onde il *divisore* 469 non è com-

B 3

preso

preso 8 volte nel primo membro del *dividendo* 3203.

Suppongasì che vi sia contenuto 7 volte; ma non si metta ancora 7 nel *quoziente*, poichè per la stessa ragione $7 \times 469 = 3283 > 3203$, (questo segno $>$ significa maggiore, e quello $<$ minore.)

Si moltiplichì dunque il *divisore* 469 per 6, e poichè il prodotto è $2814 < 3203$, si sottragga, il resto sarà 389. Si metta dunque 6 nel *quoziente*.

A canto al resto 389 si cali giù la cifra 5 del *dividendo*, e si avrà 3895, in cui si deve vedere quante volte entra il *divisore* 469. A questo effetto si deve osservare quante volte la prima cifra 4 del *divisore* entra nelle due prime cifre 38 del *dividendo* (e ciò dovrà generalmente osservarsi sempre che un membro della divisione ha una cifra di più del *divisore*) 4 in 38 entra 9 volte, ma non si porrà già 9 nel *quoziente* per le ragioni addotte di sopra, ma si porrà 8; perchè $8 \times 469 = 3752$, che sottraendosi dal *dividendo* 3895, il resto è 143, che non è più divisibile per 469.

Dunque il *divisore* 469 si contiene 68 volte nel *dividendo* 32035, e resta 143, che è quel che si chiama una *frazione*, mettendovi sotto il *divisore* con una linea fra mezzo.

Se si volesse proseguir questa divisione, nel caso che questi 143 significassero, per esempio, scudi; si posson ridurre in paoli, moltiplicando per 10, onde il prodotto sarebbe 1430, da dividersi per 469.

Il *quoziente* sarebbe 3, e resterebbe ancora 23 da dividersi per 469. Questi 23 paoli riducendosi a bajocchi, faranno 230 bajocchi; ma siccome il *divisore* 469 non entra alcuna volta in 230, si porrà zero nel *quoziente* a canto a 3. I 230 bajocchi riducendosi a quattrini, cioè $230 \times 5 = 1150$, in cui il *divisore* 469 entra 2 volte, e si porrà 2 al *quoziente*, e resteranno 212 quattrini, che non sono più nè riduttibili, nè divisibili.

37. Da tutte queste operazioni si deduce. 1°. Che per far la *divisione* bisogna da principio prender tan-

te cifre nel *dividendo* quante ve ne sono nel *divisore*.

Ma se si vede, che le cifre del *divisore* non son comprese in quelle d' ugal numero del *dividendo*, allora si aumenterà d' una cifra il primo membro della *divisione*: ed in questo caso si cercherà quante volte la prima cifra del *divisore* è contenuta nelle due prime cifre del membro da dividersi; si scriverà questo numero nel *quoziente* dopo aver provato che non sia troppo grande.

2°. Determinato il primo membro della *divisione*, che produce già una cifra nel *quoziente*, è chiaro che ciascuna dell' altre cifre del *dividendo* deve dare una cifra nel *quoziente*. Onde fin dal principio dell' operazione si sa quante cifre deve aver il *quoziente*.

3°. Compita l'operazione sul primo membro, se dopo aver calata una cifra si scorge, che il *divisore* non si contiene alcuna volta intiero nel nuovo membro del *dividendo*, si porrà zero nel *quoziente*, e si calerà giù un' altra cifra. E se accadesse, che il *divisore* nemmeno si contenesse intiero in questo membro così accresciuto, si metta ancora zero nel *quoziente*, e così in appresso finchè il *divisore* fosse finalmente compreso nel membro su cui si opera.

4°. Non si deve mai metter nel *quoziente* un numero maggiore di 9.

5°. Se dopo aver fatta la sottrazione si trovasse un resto ugal o maggiore del *divisore*, sarebbe segno che il numero posto nel *quoziente* è troppo grande. Onde affinchè una cifra posta nel *quoziente* sia legittima, bisogna che il prodotto di questa cifra per il *divisore* non sia maggiore del membro diviso, nè che dopo la sottrazione vi sia un resto ugal o maggiore del *divisore*. Nel primo caso convien diminuire la cifra del *quoziente*, nel secondo aumentarla.

32. Quando il *divisore* è terminato da zeri, si abbrevia la *divisione* separando al fine del *dividendo* tante cifre quanti zeri sono al fine del *divisore*. Si divi-

don poi l'altre per le sole cifre del *divisore*, e si avrà il *quoziente*.

Se vi è resto, si mette a sinistra delle cifre separate, e se ne farà una frazione.

Avendosi, per esempio, 238873 da divider per 3600, si opererà così.

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \quad 2388 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 36 \text{ divisore} \\
 \hline
 66 \quad 1273 \text{ quoziente.} \\
 \hline
 3600
 \end{array}
 \end{array}$$

39. Se il *dividendo* ed il *divisore* son terminati da zeri, si cancelli ugual numero di zeri dall'uno e dall'altro, e ci si faccia il resto della divisione secondo le regole prescritte. Come 417000: 2500.

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \quad 417 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 25 \text{ divisore} \\
 \hline
 20 \\
 166 \text{ — quoziente} \\
 25
 \end{array}
 \end{array}$$

40. Se si ha da dividere più quantità di diversa specie per altre quantità di diversa specie; come se si avesse da divider 2 tese e 4 piedi per 4 tese e 2 piedi, bisogna ridurre tutto a piedi, e si avrà 130: 26 = 5.

C A P I T O L O II.

Delle Frazioni.

41. **S**I è veduto (8) che cosa è *Frazione*, Ella può definirsi nel senso il più esteso una *divisione indicata*; e nel senso più stretto, e come opposta all'intero, ella è una *divisione indicata che non può consumarsi*.

42. Tutte e due queste definizioni esiggon necessariamente due termini, de' quali l'uno rappresenta il dividendo, l'altro il divisore, Si mettono l'uno sotto l'altro.

l'altro con una piccola linea trasversale fra loro. Il superiore, che rappresenta il dividendo, è detto *numeratore*, l'inferiore, che rappresenta il divisore, si dice il *denominatore*. Nella frazione $\frac{3}{5}$, 3 è il *numeratore*, 5 il *denominatore*.

43. Se il numeratore è *multiplice* del denominatore, cioè se lo contiene giustamente un dato numero di volte, allora la Frazione è *supposta*. Come $\frac{4}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$.

44. Se il numeratore è più grande, ma non multiplice del denominatore, la Frazione è *mista*. Come $\frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}$.

45. Finalmente chiamasi *Frazione pura*, lorchè il numeratore è più piccolo del denominatore. Come $\frac{3}{5}$: su questa frazione non può farsi divisione alcuna.

46. Il valor assoluto d'una frazione è tanto più grande, quanto più grande è il suo numeratore, e quanto più piccolo è il suo denominatore: ed al contrario ec.

Per comprenderne la ragione, non si ha che ricordarsi, che il numeratore è il dividendo, il denominatore il divisore, ed il valor della frazione è il quoziente. Onde $\frac{1}{4} > \frac{2}{5}$.

47. Duplicare, triplicare ec. il valore d'una frazione è lo stesso che moltiplicar il suo numeratore, o divider il suo denominatore per 2, 3, ec. Come $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$, e $\frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2}$.

48. Non si cambia punto il valore d'una frazione nè col moltiplicare, nè col divider i suoi due termini per la stessa quantità. $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$.

Da ciò si deduce la maniera di ridurre le frazioni.

Riduzione de' Fratti.

49. Ridurre le frazioni è lo stesso che trasformarle senza cambiar il loro valore, affin di render più comode l'altre loro operazioni.

50. Per

50. *Per ridurre gl' interi a frazioni.*

1°. Si può ridurre ogni intero a frazione col mettergli sotto 1 per denominatore. Così $6 = \frac{6}{1}$.

2°. Per ridurre un intero ad una frazione di qualsivoglia denominatore, convien moltiplicar l'intero per il dato denominatore; il prodotto sarà il numeratore della frazione. Onde per ridurre 6 ad una frazione il di cui denominatore sia 7, si avrà $6 = \frac{42}{7}$. E' chiaro che dividendo 42 per 7, il quoziente è 6, onde $6 = \frac{42}{7}$.

3°. Un intero unito con una frazione si riduce ad una sola frazione, col moltiplicar l'intero per il denominatore della frazione, e coll'aggiunger a questo prodotto il numeratore; la somma sarà il numeratore della frazione ridotta: $6\frac{1}{2} = \frac{13}{2}$.

51. *Per ridurre più frazioni ad uno stesso denominatore.*

Si moltiplichino primo i denominatori fra loro, e si avrà il denominatore comune: indi si moltiplichino il numeratore di ciascuna frazione per ciascun denominatore di tutte l'altre frazioni.

Così per ridurre $\frac{2}{3}$, e $\frac{1}{2}$ ad uno stesso denominatore, si avrà $\frac{8}{12} + \frac{6}{12}$. E $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{12}{24} + \frac{18}{24} + \frac{16}{24}$.

52. Nella stessa maniera si possono ridurre quante frazioni si vogliono ad uno stesso denominatore, non avendosi da far altro che moltiplicar i termini di ciascuna frazione per ciascun denominatore dell'altre. Onde $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{6}{18} + \frac{6}{9} + \frac{6}{15}$, perchè $1 \times 3 \times 2 = 6$, $3 \times 3 \times 2 = 18$, $4 \times 1 \times 2 = 8$, $5 \times 3 \times 1 = 15$.

53. *Ridurre una frazione all'espressione la più semplice.*

Convien trovar il più gran comune divisore, cioè un numero, per cui si divida intieramente il numeratore ed il denominatore della frazione. Come per ridurre la frazione $\frac{6}{27}$ all'espressione la più semplice, bisogna trovar un numero, come 3, per cui 6 e 27 si dividan senza resto; i quozienti 2 e 9 saranno i due

ter-

termini della frazione $\frac{6}{27}$ ridotta alla più semplice espressione $\frac{2}{9}$.

54. Ecco il metodo, per trovar il più gran divisore comune di due quantità.

Dividasi la maggior quantità per la minore; se non vi è resto, la minore sarà il più gran divisore cercato.

Ma se vi è resto, si divida la minore per questo resto; se la divisione riesce esatta, questo resto è il più gran divisore.

Ma se questa seconda divisione è con resto, dividasi il primo resto per il secondo resto: se questa terza divisione è senza terzo resto, il secondo resto sarà il gran divisore. E così via via: onde in generale *il resto che divide giustamente il resto precedente è il più gran comune divisore cercato.*

Così per ridurre $\frac{294}{91}$ all'espressione la più semplice, dividasi 294 per 91, e trascurando il quoziente 3, si prenda il resto 21 per cui si divida 91. Si trascuri il quoziente 4, e si prenda il resto 7 per cui si divida 21; il quoziente è 3 senza altro resto. Dunque 7 è il più gran comune divisore per 91 e 294. Onde dividendo per 7 il numeratore, ed il denominatore della frazione $\frac{294}{91}$, ella sarà ridotta a $\frac{42}{13}$, ch'è la sua più semplice espressione.

La ragione di questa regola è, che due quantità non sono esattamente divisibili per uno stesso numero, se non quando elle son prodotti esatti di questo numero.

Quindi siegue che quando queste divisioni vengon ad aver in fine l'unità per ultimo resto, la frazione non può ridursi ad una espressione più semplice, perchè l'unità è un divisore comune a tutti i numeri.

Ogni numero intero, che non è moltiplice d'alcun altro numero intero maggiore dell'unità, si chiama *numero primo*. I numeri primi minori di 100 sono, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89,

97. E' chiaro, che una frazione composta di *numeri primi* non può ridursi ad espressione più semplice.

Ogni numero pari è moltiplice di 2, cioè divisibile per 2: dunque se i termini d'una frazione son numeri pari, posson esser ridotti alla loro metà. Come

$$\frac{128}{412} = \frac{64}{206} = \frac{32}{103} = \frac{16}{51.5} = \frac{8}{25.7}$$

Addizione de' Fratti.

55. Per sommare più frazioni, bisogna prima ridurre tutte ad uno stesso denominatore, e poi sommarne tutti i numeratori, e mettervi sotto il denominatore comune. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{12 + 16 + 18}{20} = \frac{46}{20}$

$$\frac{23}{10}$$

Sottrazione de' Fratti.

56. Dopo aver ridotto *separatamente* le due quantità proposte in una sola frazione, darsi alle due frazioni risultanti un denominatore comune, il quale si scrivi sotto alla differenza de' numeratori.

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{31}{20} - \frac{7}{10} = \frac{186 - 140}{200} = \frac{23}{60}$$

Da questa operazione apparisce, che quando si tratta di sommare o di sottrarre le frazioni, non si deve prender la pena di ridurre alla più semplice espressione che il risultato dell'ultima operazione.

Se vi sono degli intieri alla testa de' fratti, convien sottrarre gl'intieri nella maniera degli intieri, ed i fratti all'uso de' fratti. $4\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Per sottrarre una frazione da un intiero, bisogna ridurre l'intiero in frazione. $3 - \frac{1}{2} = \frac{3}{1} - \frac{1}{2} = \frac{6 - 1}{2} = \frac{5}{2}$

Lo stesso bisogna fare, se la frazione da sottrarsi è maggiore $6\frac{1}{4} - 3\frac{2}{3} = \frac{25}{4} - \frac{11}{3} = \frac{75 - 44}{12} = \frac{31}{12}$
 $2\frac{7}{12}$ Mol.

Moltiplicazione de' Fratti.

57. Per moltiplicar i fratti non vi è bisogno di riduzione; basta moltiplicar i numeratori fra loro; il prodotto di quelli sarà il numeratore, ed il prodotto di questi il denominatore della nuova frazione.

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Se si ha da moltiplicar un intiero per un fratto, bisogna ridurre l'intiero a frazione col mettergli per denominatore 1; ovvero basta moltiplicar l'intiero per il numeratore della frazione

$$4 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}.$$

58. La ragione di queste regole è, che moltiplicare, per esempio, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ non è altro, che prender $\frac{2}{3}$ tante volte quante l'unità è contenuta in $\frac{1}{2}$; or l'unità non è contenuta che una mezzavolta in $\frac{1}{2}$; dunque bisogna prender $\frac{2}{3}$ una mezza volta: onde $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

59. La riduzione de' fratti di fratti appartiene alla moltiplicazione, e non già alla divisione, come a prima vista può sembrare. In fatti prender $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$, non è forse dividere $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$? No; anzi è moltiplicarli. Se si avesse da prender il $\frac{1}{3}$ di $\frac{3}{4}$, bisognerebbe moltiplicar 1×3 numeratori, e 3×4 denominatori, e si avrebbe $\frac{3}{12}$, ma siccome bisogna prender i due terzi, bisogna dunque raddoppiare quel che si ha trovato, cioè moltiplicar il numeratore 2 per il numeratore 3. Onde

$$\frac{2}{3} \text{ di } \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

60. La moltiplicazione per le parti aliquote (30) può farfi di una maniera comoda col ridurre e trattar i termini in frazione. Avendosi, per esempio, da moltiplicare 5 piedi e 3 pollici per 2 piedi e 4 pollici, si posson considerar i pollici come frazioni di piedi: onde

de il proposto esempio si ridurrebbe a questa forma $5 \frac{1}{4} \times 2 \frac{1}{2}$, perchè 3 pollici son il $\frac{1}{4}$ d'un piede, e 4 pollici il $\frac{1}{2}$ d'un piede. Sicche riducendo ciascun termine ad una sola frazione, si avrebbe

$$\frac{21}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{105}{8} = 12 \frac{5}{8} = 12 \frac{1}{4}.$$

61. Ma siccome ne' numeri troppo composti questa operazione in fratti riuscirebbe assai lunga e penosa, per non invilupparsi nel tedio de' calcoli, ecco un metodo più spedito.

Esempio.

tese	piedi	pollici	linee	punti	
6,	5,	4,	0,	0	moltiplicando
4,	2,	6,	0,	0	moltiplicatore
27,	3,	4,	0,	0	prodotto di 4 per la prima linea
2,	1,	9,	4,	0	prodotto di 2 per la prima linea
0,	3,	5,	4,	0	prodotto di 6 per la prima linea
30,	2,	6,	8,	0	prodotto totale.

In questo esempio è da osservarsi,

1°. Che il prodotto del moltiplicatore 4 per la prima linea è secondo la moltiplicazione ordinaria degli interi.

2°. Che il prodotto di 2 piedi per la prima linea si è fatto considerando 2 piedi come $\frac{2}{6}$ o $\frac{1}{3}$ di tesa; onde $\frac{1}{3} \times 6 = 2$, e si è posto 2 sotto la colonna delle tese. Indi $\frac{1}{3} \times 5 = 1 \frac{2}{3}$, cioè 1 piede, che già si è posto nella colonna de' piedi, ed avanzan 2 piedi che sono 24 pollici. Questi 24 pollici si uniscan ai 4 pollici del moltiplicando, e si avrà 28 che moltiplicato

cato per $\frac{1}{2} = \frac{2^8}{8} = 9 \frac{1}{2}$, cioè 9. pollici che si metton alla colonna de' pollici, ed avanza 1 poll. = 12. linee. Onde $12 \times \frac{1}{2} = 6$, che si mette nella colonna delle linee.

3°. Che il prodotto di 6. poll. per la prima linea è ricavato nella maniera predetta, considerando 6. poll. come $\frac{1}{2}$ piede, il qual piede è $\frac{1}{2}$ di tesa, onde 6 poll. = $\frac{1}{2}$ di tesa. Dunque $\frac{1}{2} \times 6 = \frac{6}{2}$, perciò o nella colonna delle tese; e 6 tese o sia 36 piedi uniti con 5 = $41 \times \frac{1}{2} = 20 \frac{1}{2}$, si è posto 3 nella colonna de' piedi, e 5 che avanzano ovvero 60 poll. $\div 4 = 15$, $15 \times \frac{1}{2} = 7 \frac{1}{2}$, si è posto 5 alla colonna de' poll., e 4 in quella delle linee.

4°. Il prodotto totale è la somma de' tre prodotti precedenti.

La prova di questa operazione si fa col dimeziare una delle dimensioni, e col raddoppiar l'altra.

Ecco l'addotto esempio messo a prova.

tese	piedi	poll.	linee,	punti	
3,	2,	8,	0,	0	o moltiplicando dimeziato
8,	5,	0,	0,	0	o moltiplicatore raddoppiato
27,	3,	4,	0,	0	o prodotto di 8 per la prima linea
1,	4,	4,	0,	0	{ prodotto di 5 per la prima linea
1,	0,	10,	8,	0	
30,	2,	6,	8,	0	o prodotto totale.

Qui è da osservarsi, che dovendosi moltiplicare 5 piedi per la prima linea, si son considerati 5 piedi come $\frac{5}{6}$ di tesa; e siccome $\frac{5}{6}$ è composto di $\frac{1}{2}$ e di $\frac{1}{3}$, ovvero di $\frac{1}{2}$, e di $\frac{1}{3}$, perciò si è prima moltiplicata la prima linea per $\frac{1}{2}$, e n'è nato il prodotto della quarta linea; e poi si è moltiplicata la prima linea per $\frac{1}{3}$, e n'è nato il prodotto della quinta linea. Questa risoluzione.

luzione deve sempre osservarsi, lorchè il numeratore della frazione non è 1.

Come si è fatto il calcolo di due dimensioni per le superficie, nella stessa maniera si può far di tre dimensioni per i solidi; poichè compito quello di due dimensioni, sotto il prodotto totale si metta la terza dimensione, e si proceda di nuovo nel modo stabilito.

Della Divisione de' Fratti.

62. Questa divisione si fa col moltiplicar in croce i termini, badando di mettere per denominatore della nuova frazione il prodotto del numeratore del dividendo per il denominatore del divisore. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

63. Questa moltiplicazione in croce è lo stesso che rovesciar i termini del divisore, e moltiplicar poi i numeratori fra loro, ed i denominatori fra loro.

64. Una tal operazione fatta pel rovesciamento de' termini spiega una specie di paradosso, che suol colpir i principianti. Accade spesso nella moltiplicazione de' fratti, che il prodotto sia più piccolo del moltiplicando: $2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Al contrario nella divisione il quoziente riesce maggiore del dividendo; $2 : \frac{2}{3} = \frac{6}{2} = 3$.

3. Ciò deve necessariamente accadere, sempre che la frazione, che rappresenta il moltiplicatore o il divisore, è più piccola dell'unità: perchè allora il suo numeratore è più piccolo del denominatore. Quando dunque la frazione resta diretta nella moltiplicazione, è il più piccolo termine che moltiplica la prima frazione, mentre il più grande la divide. Quando al contrario la frazione si rovescia nella divisione, è il più gran termine che moltiplica la prima frazione; mentre il più piccolo la divide; guadagna dunque più di quel che perde, ed in conseguenza divien maggiore.

65. Per ridurre i fratti in intieri, non si ha che mol-

moltiplicar ciascun numeratore per tutti gli altri denominatori eccetto per il suo proprio. $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = 8 + 9$.

CAPITOLO III.

Delle Frazioni Decimali.

66. **L**E Frazioni Decimali son quelle, delle quali il denominatore è 1, seguito da uno o più zeri come $\frac{1}{10}$, $\frac{62}{100}$, $\frac{7}{1000}$ sono frazioni decimali.

67. In queste frazioni si sopprime ordinariamente il denominatore, ed in sua vece si mette avanti al numeratore un punto o una virgola. Così $\frac{5}{10} = .5$; $\frac{46}{100} = .46$. Nella stessa guisa, 125 esprime cento venti cinque parti d'una cosa qualunque divisa in mille parti. Onde, $125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$. Altri esprimono le frazioni decimali in questa maniera, 125'''.

Dunque nelle decimali la prima cifra a destra dopo il punto esprime le decine, la seconda le centinaja, la terza le migliaia ec. Lorchè non vi è numero intero avanti una frazione decimale, si mette ordinariamente un zero avanti il punto: onde invece di .5, si scrive 0.5. Questo non serve ad altro, che per render il punto più rimarchevole, e per toglier ogni equivoco.

68. Siccome i zeri che si metton a destra de' numeri interi, li fan crescere in ragion decupla (poichè 2 con un zero dopo divien dieci volte maggiore, cioè 20); così le frazioni decimali decrescono in ragion decupla, o crescon in ragione suddecupla, cioè divengono dieci volte più piccole mettendo de' zeri alla loro sinistra. Se si vuole dunque render la frazione decimale 0.5 dieci volte più piccola, cioè esprimere centesimi, scrivali 0.05.

I zeri dunque che si metton a destra delle decimali, non significan niente; come 0.5000 = 0.5. *Elem. di Matem.*

stesso in un senso opposto riguardo ai numeri intieri $00005 = 5$.

69. Da una Frazione Decimale composta di più cifre, se ne può toglier qualcuna alla destra, senza molto diminuir il valore della frazione. Togliendo, per esempio, dalla frazione 2. 4546 tesa l'ultima cifra 6 scrivendo 2. 454, il valor della frazione sarebbe diminuito di $\frac{6}{10000}$ di tesa, cioè una mezza linea in circa. Ma se si togliessero le due ultime cifre, scrivendo 2. 45, il valor della frazione sarebbe diminuito di $\frac{46}{10000}$ di tesa, che vale circa 4 linee. Lorchè dunque si levan due cifre, l'ultima che resta alla frazione 2. 45, va accresciuta d' un' unità; onde si scriva 2. 46, la quale si accosta più al vero valore.

70. Poichè le frazioni non sono spesso che resti di divisione ineseguibile, perciò si son inventate le *frazioni decimali* per proseguire la divisione.

Essendosi, per esempio diviso 147475 per 362, e trovato il quoziente 407 col resto 141; per proseguir avanti la divisione, si aggiunga 0 a questo resto, e si divida 1410 per 362, il quoziente sarà 3 con un nuovo resto 324. Si aggiunga 0 a questo secondo resto, e $3240 : 362 = 8$ col resto 344. A questo terzo resto si aggiunga 0, e $3440 : 362 = 9$ col resto 182. E così via via. Onde $147475 : 362 = 407.389$ ec.

Se non vi è bisogno d' una gran precisione, bastano due o tre decimali; ma se ne richieggono cinque e sei dove ricercasi una gran precisione.

71. *Ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale.*

Si aggiunga 0 al numeratore, e dividasi per il denominatore.

Per ridurre in decimale la frazione $\frac{1}{2}$, si aggiunga 0 ad 1, e $10 : 2 = 5$. Infatti $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.

Se il quoziente vien con resto, bisogna al resto aggiunger un altro 0, e proseguir la divisione nel medesimo modo.

todo sopraindicato, $\frac{3}{4} = \frac{30}{40} = 7\frac{2}{4} = 7\frac{20}{40} = 75$.

72. Vi son molte frazioni, che non posson ridursi esattamente in decimali per quante volte si aggiunga zero ai resti successivi delle divisioni.

Ciò si riconosce facilmente, o quando si giunge sempre ad aver uno stesso resto, o quando si veggono ritornare le stesse cifre nello stesso ordine: Come per ridurre in frazione decimale $\frac{4}{7}$, si troverà . 571428571 428571428 ec. Nella stessa maniera $\frac{5}{12} = . 416666$ ec. In questi casi convien contentarsi di due o tre decimali, e non curar il resto. Onde $\frac{4}{7} = 0.57$; $\frac{5}{12} = 0.416$.

73. Si opera sulle Frazioni *decimali* nella stessa maniera come sopra gl'intieri. La sola attenzione che quì richiedesi, è in situar il punto o la virgola, che deve separar le decimali dagl'intieri.

Addizione delle Decimali.

74. Per sommare due o più frazioni *decimali*, non si ha che porle l'une sotto l'altre; gl'intieri sotto gl'intieri, le decine sotto le decine, le centinaja sotto le centinaja ec., e far l'addizione nella maniera ordinaria.

Operazione.

35. 7802	queste	35. 78020
1. 053	quantità	1. 05300
. 42687	equivagliori	. 42687
15. 86	a quest'altre	15. 86000
53. 12007	somma	53. 12007

Si vede, che nella somma vi son tante decimali quante ne contien il più gran numero. 42687 delle
C 2 fra-

frazioni *decimali*; il che forma una regola per questa operazione.

Sottrazione delle Decimali.

75. Convien disporre le quantità nella maniera sopradotta.

Operazione.

$\begin{array}{r} 78.302 \\ 9.5332 \\ \hline 68.7688 \text{ resto.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 4.00435 \\ .17 \\ \hline 3.83435 \text{ resto.} \end{array}$
--	--

Moltiplicazione delle Decimali.

76. Questa operazione si fa come quella degl' intieri, senza badare alla posizione de' punti; ma dopo terminata, convien separare col punto tante cifre sulla destra quante decimali sono nel moltiplicando e nel moltiplicatore.

Operazione.

$$\begin{array}{r} 34.632 \\ 1.5234 \\ \hline 138528 \\ 173160 \\ 69264 \\ 34632 \\ \hline 52.758388 \text{ prodotto.} \end{array}$$

Di-

Divisione delle Decimali.

77. Anche questa divisione si fa come quella degli interi; ma nel quoziente bisogna separar con un punto tante cifre sulla destra quanta è la differenza tralle decimali del dividendo e quelle del divisore.

Operazione.

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \quad \{ \quad \text{1. 5254 divisore} \\
 18. 1263888 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 \quad \quad \quad | \quad 34. 632 \text{ quoziente}
 \end{array}$$

Poichè le decimali del dividendo sono sette, e quelle del divisore son quattro, nel quoziente ve ne devono esser tre.

78. Ma se nel divisore vi son più decimali che nel dividendo, convien allora aggiungere alle decimali del dividendo quanti zeri si vorrà, tanti però che le decimali del dividendo contengano maggior numero di cifre di quelle del divisore.

Se si vuol per esempio, divider 49. 1 per 20. 074, aggiungasi al dividendo quattro zeri, onde

$$\begin{array}{r}
 \text{dividendo} \quad \text{divisore} \quad \text{quoziente} \\
 49. 10000 : 20. 074 = 2. 44.
 \end{array}$$

79. Questa Aritmetica *decimale* è stata inventata da Regiomontano, che se n'è servito nella costruzione delle tavole de' seni.

80. Vi sono diverse altre specie di frazioni.

Le *Sessagesimali* son quelle, di cui i denominatori son le potenze successive di 60; cioè 60 X 60, 60 X 60 X 60. ec.

Queste frazioni sono state inventate per la divisione del circolo, il quale si divide in 360 gradi, ogni grado in 60 minuti, ogni minuto in 60 secondi, ogni secondo in 60 terzi ec. Queste parti si esprimon così

1° , $1'$, $1''$, che significano un grado, un minuto, un secondo ec.

Quante divisioni e suddivisioni si son fatte sopra i pesi, misure, monete ec. somministrano tante frazioni diverse, che hanno un denominator uguale ad un numero di parti uguali, in cui il tutto è stato diviso.

Sarebbe ben desiderabile, che tutte le divisioni fossero decimali, cioè che il tutto fosse stato diviso di 10 in 10. Questa divisione renderebbe il calcolo più facile e più comodo, e sarebbe molto preferibile alla division arbitraria dell'anno in 12 mesi, del mese in 30 giorni, del giorno in 24 ore, dell'ora in 60 minuti; e così di tutte l'altre divisioni di pesi, misure, e monete ec.

Quanto finora si è qui spiegato è quel che si chiama Aritmetica Numerica.



LIBRO SECONDO

DELL' ALGEBRA.

CAPITOLO PRIMO.

Dell' Algebra propriamente detta.

31. **T**utte le operazioni fatte colle cifre Arabe nell' Aritmetica Numerica , posson anche farli più facilmente colle lettere dell' Alfabeto , che sono segni Universalissimi e d' un uso più facile , e più comodo di qualunque altra specie di segni . Or il metodo di far le combinazioni ed il calcolo delle quantità rappresentate dai segni i più universalis è quella che si chiama propriamente Algebra.

32. *Espressione o quantità Algebraica* è una o più grandezze disegnate da una o più lettere dell' Alfabeto : ordinariamente si prendon le lettere minuscole .

33. Una quantità Algebraica può esser *incomplessa* , o *complessa* .

Incomplessa è quella ch'è sola , cioè non è nè preceduta nè seguita da altra quantità unita col segno $+$, o separata col $-$. Onde a , ab , acd , $-b$, $-bcd$, son tutte quantità *incomplesse* . L' *incomplessa* si chiama anche *Monomio* .

34. *Quantità Complessa* è quella , che è composta di più quantità congiunte o separate con i segni $+$, o $-$. Come $a + b$, $aa + b - c$, dd . La quantità *complessa* dicesi anche *Polimomio* ; se è di due termini , come $a + b$, dicesi *Binomio* ; se di tre , co-

me $a + b + c$, *Trinomio*; se di quattro, come $ad + bcd + e - fi$, *Quadrinomio* &c.

85. Chiamansi *Termini* le parti comprese tra i segni d'un polinomio. Dicesi *termine positivo* quello ch'è preceduto dal segno $+$; e *termine negativo* quello ch'è preceduto dal segno $-$. Onde la quantità $+a - b + 2c - dd$ ha due termini positivi, e due negativi.

Quando il primo termine non è preceduto da alcun segno, si prende per *positivo*; onde $a + b$ è lo stesso che $+a + b$.

86. Una cifra o una quantità qualunque che precede un termine qualunque si dice *Coefficiente* del termine. In $2abc$ il *coefficiente* è 2. Quello *coefficiente* significa, che il termine abc è preso 2 volte, o moltiplicato per 2. Così di ax e di nz , i coefficienti sono a , n .

Un termine che non è preceduto da alcuna cifra, si suppone che abbia per coefficiente l'unità; onde $ab = 1ab$.

87. Una cifra posta al di sopra d'una lettera, come a^2 , dicesi *esponente*; e significa, che quella lettera è moltiplicata tante volte in se stessa, e deve essere scritta tante volte di seguito quante unità si contengono nell'esponente. Onde $a^2 = aa$, $a^4b^2c^3 = aaaabbccc$.

Una lettera che non ha alcun esponente, si suppone che abbia per esponente l'unità: $ab = a^1b^1$.

La differenza tra il *coefficiente* e l'*esponente* è ben sensibile, $3a = a + a + a$; $a^3 = aaa$. Or se $a = 2$, $3a = 6$ $a^3 = 8$.

88. I termini d'una quantità complessa diconsi *simili*, se hanno le stesse lettere e precisamente lo stesso numero di lettere, per quanto diversi sieno i loro coefficienti ed i loro segni. La quantità $2ab + bc - 3bc + abd$, ha due termini simili, $+bc - 3bc$. Ma $a^2b - ab^2$ non sono termini simili, perchè in $a^2b - ab^2 = aab - abb$, le lettere non sono in ciascun termine nello stesso numero.

OPERAZIONI ALGEBRAICHE.

Queste Operazioni sono : Riduzione, Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione, Divisione.

Riduzione.

§9. La Riduzione consiste in esporre ed esprimerle quantità Algebraiche colla maggior semplicità.

1.º I termini e lettere di ciascun termine devon conservar sempre l'ordine Alfabetico. dc + ba + cba + c — b, van disposte così ab + abc + dc — b + c.

2.º Lorchè vi sono più termini simili, bisogna ridurli ad un sol termine, e cancellarli se si distruggono. Questa regola racchiude tre casi.

Primo caso. Tutti i termini simili preceduti dallo stesso segno, si riducon ad un sol termine preceduto anche da uno stesso segno, e da un coefficiente ugual alla somma di questi termini. Onde ab — cd + 2ab — 3cd si riduce . . . 3ab — 4cd.

2.º caso. Quando tutti i termini simili son preceduti da differenti segni, convien sottrarre il minor coefficiente dal maggiore, e scriver la differenza col lo stesso segno del maggior coefficiente. Come 5ab — 3cd — ab + 2cd si riduce in 4ab — cd.

3.º caso. Se termini simili preceduti da segni contrarj, han coefficienti uguali, i termini si cancellano. 2ab + bc — ab — bc + ab = 2ab.

Addizione.

§10. Per sommare le quantità Algebraiche, basta scriverle tutte di seguito, e poi far le necessarie riduzioni.

Così per unire ab con bc, si scrive ab + bc.

La somma di ab + c, e di b — c, è ab + c + b — c, la quale si riduce a ab + b.

Sot-

Sottrazione.

91. La Sottrazione si fa collo scriver di seguito alla quantità data quella che si vuol sottrarre, ma col cambiarne i segni, cioè il $+$ in $-$, ed il $-$ in $+$.

Per sottrarre b da a , si scrive $a - b$.

Per sottrarre $b - c$ da $a + c$, si scrive $a + c - b + c$, che ridotta diviene $a - b + 2c$.

92. E' per un compenso necessario, che si cambian i segni $+$ in $-$, ed i $-$ in $+$ nella quantità che si sottrae. Se per sottrarre $b - d$ da a , si scrivesse $a - b$, si toglierebbe troppo; perchè b non essendo una quantità intiera, ma diminuita di d , si toglierebbe troppo tutto d . Dunque affinchè la sottrazione sia esatta, bisogna aggiunger alla differenza quel che si è tolto di troppo, vale a dire che ad $a - b$ bisogna aggiungere d , e scrivere $a - b + d$.

Maggior chiarezza apparisce ne' numeri. Avendosi a sottrarre $8 - 3$ da 9 , si scrive $9 - 8 + 3 = 4$; perchè se si scrivesse $9 - 8 - 3$, allora da 9 si sottrarrebbe 11 , mentre che $8 - 3 = 5$.

Moltiplicazione.

93. La Moltiplicazione Algebraica è molto più semplice della numerica. Basta scriver le quantità Algebraiche le une a canto all'altre senza alcun segno. Onde $a \times b = ab$, $cd \times f = cdf$.

94. Se s'incontran coefficienti, convien moltiplicarli nella maniera ordinaria, $3ab \times 5ab = 15ab$.

95. Se vi son esponenti, il prodotto deve aver un esponente ugual alla somma de' moltiplicandi, $a^2 \times a = a^3$; $a^2b \times a^2a^2 = a^4b$.

96. Lorchè le quantità da moltiplicarsi, son precedute da $+$ o $-$, ecco le regole da seguirsi.

1.^a Regola, se due termini, che si moltiplicano, hanno gli stessi segni, il prodotto è col segno $+$, come $+a \times +b = +ab$, $-a \times -b = +ab$.

2. Re-

2.^a Regola, se due termini hanno segni diversi, il prodotto avrà il segno di —; come $a \times -b = -ab$.

Dunque $+ \times + = +$; $- \times - = +$; $+ \times - = -$.

Dimostrazione. $+ 3 \times + 1 = + 6$; perchè il moltiplicatore $+ 2$ avendo il segno $+$ mostra, che bisogna prender la quantità $+ 3$ positiva quante volte è segnata da 2, cioè bisogna prenderla 2 volte tale quale com'è: or 2 volte $\times 3 = + 3 + 3 = + 6$; dunque $+ \times + = +$.

$+ 3 \times - 2 = - 6$; perchè il moltiplicatore 2 col segno — fa conoscere che bisogna sottrarre la grandezza $+ 3$ due volte; or per sottrarre il positivo convien cambiarlo in negativo (91), dunque si scriverà $- 3 - 3 = - 6$. Dunque $+ \times - = -$.

Finalmente $- 3 \times - 2 = + 6$; perchè il segno del moltiplicatore 2 essendo negativo, indica che bisogna sottrarre $- 3$ due volte; dunque (91) al termine $- 3$ che si deve sottrarre, convien mutar il segno, e scrivere $+ 3 + 3 = + 6$. Dunque $- \times - = +$.

97. La moltiplicazione de' polinomj si fa come nell'Aritmetica ordinaria, col moltiplicare ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore; si cerca indi la somma di tutti que' differenti prodotti; e se vi sono quantità simili, si riducono.

Esempio 1.^o

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ac + c^2 \\ \times \\ a - c \end{array}$$

moltiplicando

moltiplicatore

$$\begin{array}{r} a^3 - 2a^2c + ac^2 \\ - a^2c + 2ac^2 - c^3 \\ \hline a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3 \end{array}$$

prodotto di a per il moltiplicando

prodotto di -c per il moltiplicando

prodotto totale.

Esem.

Esempio 2.^o

$$\begin{array}{rcl}
 5ab + 3ac - c^2 & \text{moltiplicando} \\
 \hline
 5ab + 3ac - c^2 & \text{moltiplicatore} \\
 \hline
 25a^2b^2 - 15a^2bc + 3abc^2 & \text{prodotto di } 5ab \\
 & \text{per il moltiplicando} \\
 + 15a^2bc - 9a^2c^2 - 3ac^3 & \text{prodotto di } 3ac \\
 & \text{per il moltiplicando} \\
 - 5abc^2 - 3ac^3 + c^4 & \text{prodotto di } -c^2 \\
 & \text{per il moltiplicando} \\
 \hline
 25a^2b^2 * + 9a^2c^2 * - 6ac^3 + c^4 & \text{prodotto totale.}
 \end{array}$$

I due asterischi notan le distruzioni fatte per i segni contrarij.

98. Talvolta non si eseguisce la moltiplicazione, ma si accenna col segno X; ma per evitare la confusione delle lettere ne' termini complessi, vi si mette sopra una sbarra. Per esprimer il prodotto di $a - b + c$, per $2ab + 3c - e$, si scrive così

$$\begin{array}{l}
 a - b + c \times 2ab + 3c - e. \text{ Altri si servono di parentesi, } \\
 (a - b + c)(2ab + 3c - e).
 \end{array}$$

Divisione.

99. La Divisione Algebraica si fa precisamente come la numerica.

1.^o La regola de' segni $+$ e $-$, è la stessa che nella moltiplicazione.

2.^o I coefficienti si dividono come nell' Aritmetica ordinaria.

3.^o Si fanno sparire quelle lettere che son comuni al dividendo, ed al divisore.

Esempio.

$$\begin{array}{r} \text{dividendo} \\ 1a \ bcd \end{array} \left| \begin{array}{l} 3d \text{ divisore} \\ \hline 4 \ bc \text{ quoziente} \end{array} \right.$$

Esempio 2°.

Esempio 3°.

$$\begin{array}{r} \text{dividendo} \\ 15 \ abc \end{array} \left| \begin{array}{l} -5 \ ac \text{ divisore} \\ \hline -3 \ b \text{ quoziente} \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} \text{dividendo} \\ -18 \ a^2 c^2 d \end{array} \left| \begin{array}{l} 3 \ acd \text{ divisore} \\ \hline -6 \ ac^2 \text{ quoz.} \end{array} \right.$$

Esempio 4°.

$$\begin{array}{r} \text{dividendo} \\ -24 \ ac^2 d^2 f \end{array} \left| \begin{array}{l} -3 \ c^2 d^2 f \text{ divisore} \\ \hline 3 \ acd \text{ quoziente.} \end{array} \right.$$

4°. Se il divisore non ha niente di comune col dividendo, si mette in frazione nella maniera ordinaria : $\frac{3ab}{5cd}$.

100. Si soglion anche metter talvolta in frazione due termini da dividerli, ancorchè abbian delle lettere comuni. Come $\frac{abc}{ac} = b$; $\frac{6ce}{3cf} = \frac{2d}{f}$; qui sono scacciate via quelle lettere comuni al divisore ed al dividendo.

Lo stesso si fa anche alle frazioni de' polinomy; come $\frac{ax^2 - 2abx + a^2}{bx^2 + b^2} = \frac{ax - a}{b}$.

101. Benchè sia generalmente vero, che si debban sopprimere tutte le lettere comuni al dividendo ed al divisore, non ne siegue però che $\frac{abc}{abc} = 1$. Bisogna sempre supporre, che una quantità algebrica sia preceduta dal coefficiente 1; onde $\frac{abc}{abc} = \frac{1 \cdot abc}{1 \cdot abc} = 1$. Infatti divider abc per abc , è lo stesso che determinare quante volte abc è contenuto in sè stesso: or ogni grandezza è contenuta una volta in sè stessa, dunque $\frac{abc}{abc} = 1$.

102. Per divider i *polinomi*, come $9a^2b + 6a^2 - 15a^2b$ per $-3ab + 2a^2$, bisogna,

1°. Disporre i termini (come si vede nella operazione) secondo i gradi della lettera a che sembra dominare.

Operazione.

dividendo	1	2a ² - 3ab	divisore
6a ² - 15a ² b + 9ab ²	{	3a - 3b	quoziente.
- 6a ² + 9a ² b			
* - 6a²b + 9ab² + 6a²b - 9ab² * *			

2°. Divider il primo termine $6a^2$ del dividendo per il primo termine $2a^2$ del divisore, e metter sotto al divisore il quoziente $3a$.

4°. Moltiplicar il quoziente $3a$ per tutto il divisore, e sottrarre il prodotto dal dividendo. Un tal prodotto è $6a^2 - 9a^2b$, il quale dovendosi sottrarre dal dividendo, cioè sottoporlo con segni contrari $- 6a^2 + 9a^2b$, il resto sarà $- 6a^2b + 9ab^2$.

5°. Di

Si parlerà in appresso della Comparazione delle quantità.

104. E' ordinariamente facile comporre una quantità di molte altre, perchè ciò si fa per mezzo dell'addizione o della moltiplicazione, operazioni tutte due sempre suscettibili di esattezza ne' loro risultati. Ma è difficile e spesso impossibile risolvere o scomporre una quantità, specialmente lorchè si vuole valutarla in numeri intieri, perchè ciò si fa ordinariamente per mezzo della divisione, la quale ben di rado dà quozienti senza resto.

105. Qualsivìa quantità a , riguardata come semplice e non composta, si chiama una quantità del *primo grado*, o della sua *prima potenza*. Se poi questa quantità si moltiplica per sè stessa una volta, due, tre, quattro volte ec., il suo prodotto divien una quantità del *secondo*, *terzo*, *quarto grado* ec., ovvero si dice ch'ella è inalzata alla *seconda*, *terza*, *quarta* ec. *potenza*. In generale, il prodotto divien una quantità d'un grado o d'una potenza espressa dall'esponente, che risulta da questa moltiplicazione.

Così aa o a^2 considerato come prodotto di $a \times a$, si chiama il *secondo grado* o la *seconda potenza* di a ; a^4 , prodotto di $a \times a \times a \times a$, è la *quarta potenza* di a .

106. La quantità semplice, o stimata semplice, che si è inalzata ad una potenza, si chiama la *radice* di questa potenza. Come a è la radice seconda di a^2 , la radice terza di a^3 , la radice settima di a^7 ec.

Nella stessa maniera il numero 16 essendo la quarta potenza di 2, la radice quarta di 16 è 2.

107. Per analogia alle dimensioni de' corpi, la seconda potenza d'una quantità come a^2 , si chiama il *quadrato* di a ; la terza potenza a^3 , si chiama il *cubo* di a . Un tempo a^4 si diceva il *quadrato-quadrato* di a ; a^6 , il *quadrato-cubo*; a^8 , il *cubo-cubo*: e reciprocamente a si chiama la *radice quadrata* di a^2 , la *radice cubica* di a^3 ec.

108. La *composizione* e la *risoluzione* delle quantità si riducon a queste quattro cose: 1°. A formar una sola quantità di molte altre: questa è la pratica dell'addizione e della moltiplicazione. 2°. A trovar tutte le quantità, delle quali una quantità data è il *multiplo*, o composta; cioè a trovar tutti i divisori che posson dividere esattamente e senza resto una quantità data. 3°. Ad elevar una quantità qualunque ad una potenza data. 4°. Ad estrarre una radice qualunque da una data quantità riguardata come potenza di quella radice.

Trovar tutti i Divisori di una quantità data.

109. Se la quantità data è un numero, bisogna,

1°. Tentar di dividerla successivamente per tutti i numeri *primi*, finchè si trovi un quoziente senza resto.

2°. Divider questo primo quoziente, per alcuni numeri *primi*, finchè si trovi un secondo quoziente senza resto.

3°. Divider ancora questo secondo quoziente per i numeri *primi*, finchè finalmente un quoziente sia l'unità, cioè finchè non si trovi più altro divisore più piccolo dell'ultimo quoziente.

4°. Trovati tutti questi divisori convien moltiplicarli due a due, poi tre a tre, indi quattro a quattro ec.

Questi prodotti e questi divisori daranno tutti i divisori del numero dato.

Eccone il metodo e l'esempio.

Sia il numero 120. di cui si cercano tutti i divisori.

1	120
2	60
4.2	30
8.2	15
24.12. 6.3	5
120.60.40.30.20.15.10.5	1

1°. Si tirì una sbarra verticale a sinistra di questo

numero 120, a fianco di cui si metta 1 come suo primo divisore.

2°. Si tenti divider 120 per 2; la divisione riesce, dunque si metta 2 a sinistra della sbarra, ed a destra alla stessa altezza si metta il quoziente 60.

3°. Si tenti divider il quoziente 60 anche per 2: riesce, dunque si metta il nuovo divisore 2 a sinistra sotto il primo, ed a destra il nuovo quoziente 30 sotto 60. Nello stesso tempo si moltiplichino questo nuovo divisore 2 per l'altro 2 di sopra, ed il prodotto 4 si metta a sinistra del secondo 2, come un nuovo divisore del numero proposto 120. La ragione di questa moltiplicazione è, che se 120 è divisibile per 2, e la sua metà per 2, deve esserlo necessariamente per 4.

4°. Siccome 30 può dividersi per 2, si scriva a sinistra 2 alla quarta linea, ed il quoziente 15 a destra.

Si moltiplichino il nuovo divisore 2 per 4, ed il prodotto 8 si metta a sinistra per nuovo divisore del numero proposto. Questo nuovo 2 non va moltiplicato per gli altri 2 di sopra, perchè ne verrebbe 4 che già è scritto.

5°. Non si può 15 divider per 2: dividasi per 3, e mettasi il divisore 3 a sinistra, ed il quoziente 5 a destra. Si moltiplichino 3 per 2, per 4, per 8, che sono nelle bande superiori, ed i prodotti 6, 12, 24 si scrivano a sinistra di 3. E' evidente che questi prodotti sono nuovi divisori del numero proposto.

6°. Finalmente 5 non avendo altro divisor esatto che se stesso, scrivasi 5 a sinistra, ed il suo quoziente 1 a destra. Si moltiplichino 5 per tutti i divisori precedenti 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, ed i prodotti 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120, si scrivano a fianco di 5 nella stessa linea.

Tutti i numeri che sono a sinistra della sbarra, contando da 1 fin a 120, son i divisori di 120.

Onde tutti i divisori del proposto numero 120, sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

110. Lo stesso metodo serve per le quantità algebrici.

braiche. Si cerchino, per esempio, tutti i divisori di $b^2d^2 + b^2d$.

$$\begin{array}{r} 1 \mid b^2d^2 + b^2d \\ b \mid b^2d^2 + b^2d \\ b^2, b \mid d^2 + bd \end{array}$$

$$b^2 + b^2d, b^2 + bd, b^2 + d \mid d$$

$$b^2d + b^2d^2, b^2d + bd^2, bd + d^2, b^2d, bd, d \mid 1$$

Dividasi la quantità data per 1, indi per b , e si ha il primo quoziente. Dividasi questo quoziente ancora per b , e si avrà il secondo quoziente $d^2 + bd$. Nel tempo stesso $b \times b$, si metta b^2 .

Dividasi il secondo quoziente $d^2 + bd$ per $b + d$, si avrà il terzo quoziente d . Nel tempo stesso si moltiplichi $b + d$ per tutti i divisori superiori b, b^2 , e si avranno i prodotti, $b^2 + bd, b^2 + b^2d$.

Finalmente il terzo d non può dividersi che per d ; mettasi dunque d a sinistra, ed il quoziente 1 a destra. Si moltiplichi d per tutti i divisori antecedenti, che sono $b, b^2, b + d, b^2 + bd, b^2 + b^2d$, ed i prodotti $bd, b^2d, bd + d^2, b^2d + bd^2, b^2d + b^2d^2$, si mettano a lato di d .

Onde tutti i divisori di $b^2d^2 + b^2d$ sono 1, $b, d, b + d, b^2, bd, b^2 + bd, bd + d^2, b^2d, b^2d + bd^2, b^2 + b^2d, b^2d + b^2d^2$.

111. Per trovar il più gran comune divisore di due quantità algebriche, il metodo è lo stesso che quello (54) delle quantità numeriche.

Si cerchi, per esempio, il più gran comune divisore delle quantità $qnp^2 + np^2q^2 - 2npq^2 - 2nq^4$, e di $2mp^2q^2 - 4mp^2 - mp^2q + 3mpq^2$.

1°. Tolgasi qn , che è comune a tutti i termini della prima quantità, e che non si trova nella seconda. Tolgasi parimenti pm , che è comune a tutti i termini della seconda, senza esser contenuto nella prima. Quindi l'operazione sarà ridotta (ordinando le lettere) a trovar il più gran comune divisore di

(A) $-4p^2 - p^2q + 2pq^2 + 3q^2$, e di

(B) $p^2 + 3p^2q - 2pq^2 - 2q^2$

2°. Dividasi A per B, e trascurando sempre il quo-

ziente — 4, si avrà per resto (C) $11p^2q - 6pq^2 - 5q^3$.

Si deve ora divider B per C; ma siccome il primo termine p^3 di B non può dividersi per il primo termine $11p^2q$ di C, si può moltiplicare B per $11q$, affinchè il suo primo termine possa esser esattamente diviso per il primo termine di C; ma siccome q è contenuto in tutti i termini di C, si può moltiplicar B semplicemente per 11 , e così B sarà convertito in (D) $11p^3 + 33p^2q - 22pq^2 - 22q^3$.

3°. Dividasi D per C, il quoziente sarà p , ed il resto sarà (F) $39p^2q - 17pq^2 - 22q^3$.

Ora si deve dividere C per F, ma perchè il primo termine $11p^2q$ di C non è esattamente divisibile per il primo termine $39p^2q$ di F, si moltiplichi C per 39, e C si convertirà in (G) $429p^2 - 234pq - 195q^2$.

4°. Dividasi G per F, il quoziente sarà 11 , ed il resto (H) $-47pq + 47q^2$. Si deve ora dividere F per H, ed a tal effetto converrebbe moltiplicar F per $47q$, ma siccome $47q$ è un divisore di H, si tolga dunque da H, e resta $q - p$ per divisore di F $39p^2 - 17pq - 22q^2$.

Or dividendo F per $q - p$, la divisione si fa esattamente senza resto; dunque $q - p$ è il più gran comune divisore.

Infatti dividendosi per $q - p$ le due quantità proposte

$$qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4$$

$$2mp^2q^2 - 4mp^3 - mp^3q + 3mpq^3$$

Si convertono in

$$-2nq^3 - 4npq^2 - nqp^2$$

$$3mpq^2 + 5mp^2q + 4mp^3$$

E riducendo, in

$$-nq^2 - 3nqp - p^2$$

$$q^2 + 2mqp + mp^2$$

Ele.

Elevazione delle Quantità alle Potenze.

112. Poichè la prima potenza di a è a , o a^1 ; e la seconda potenza è a^2 o $a \times a$; e la terza potenza è a^3 o $a \times a \times a$: si può formarne questa regola generale: Che per elevar una quantità ad una potenza data, convien moltiplicarla in se stessa tante volte, quante unità meno una si contengono nell' esponente della potenza. Così per elevar 3 alla terza potenza, convien moltiplicarlo due volte in se stesso, $3 \times 3 \times 3 = 27 = 3^3$.

Nella stessa guisa la seconda potenza di $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, la terza potenza di $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Donde si vede, che una vera frazione divien più piccola quanto a maggior potenza s'innalza.

113. Per elevar un Monomio a qualunque potenza, bisogna mettergli a ciascuna delle sue lettere l' esponente della potenza. Come abc sarà elevato alla sua terza potenza, lorchè sarà espresso così $a^3 b^3 c^3$; e la potenza m di abc , è $a^m b^m c^m$. (Le lettere m che in vece di cifre si mettono agli esponenti, significan esponenti indeterminati).

114. Se nella quantità data vi son lettere che abbian più esponenti, convien moltiplicarli per l' esponente della potenza, cui si vuol innalzare detta quantità. Onde per elevar $a^2 c^3$ alla terza potenza, si moltiplichino gli esponenti per 3, e diverrà $a^6 c^9$.

115. Si suol indicar un polinomio elevato ad una potenza, lorchè vi si tira sopra una sbarra coll' espo-

nente all' estremità. Questa espressione $\overline{a + b}$ significa $a + b$ elevato alla terza potenza. Altri scrivono $(a + b)^3$.

116. Se si eleva al quadrato la quantità $a + b$, o $a - b$, servendosi della moltiplicazione, si ha $a^2 + 2ab + b^2$.

Donde siegue, che il quadrato d' un binomio è composto del quadrato del primo termine, del quadrato

del secondo termine, e del prodotto del doppio del primo termine per il secondo termine. E che quando i due termini hanno lo stesso segno, tutte le parti del quadrato son positive, ma lorchè i due termini han segni differenti, il prodotto del doppio per il primo termine è negativo.

Se un binomio s' innalza alla terza potenza, $\overline{a+b^3}$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: il che dimostra, che il cubo d'un binomio qualunque è composto de' cubi de' suoi due termini, e de' prodotti di tre volte il quadrato di ciascun termine per l'altro.

Così $\overline{a+b^6} = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

117. Nella formazione di queste potenze è da osservarsi, che gli esponenti del primo termine a decrescono secondo la serie de' numeri 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; all' incontro gli esponenti del secondo termine b crescono secondo la serie inversa de' numeri precedenti, cioè, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ma il maggior esponente nell' uno e l'altro termine è sempre 6.

I Coefficienti camminano con questa legge: Il coefficiente del termine precedente è diviso per l' esponente di b del dato termine, ed il quoziente è moltiplicato per l' esponente di a dello stesso termine, accresciuto però d'una unità. Onde nell'addotto esempio, il coefficiente del primo termine è 1, quello del secondo è $\frac{1}{1} \times 5 + 1 = 6$, del terzo $\frac{6}{2} \times 4 + 1 = 15$, del quarto $\frac{15}{3} \times 3 + 1 = 20$, del quinto $\frac{20}{4} \times 2 + 1 = 15$, del sesto $\frac{15}{5} \times 1 + 1 = 6$, del settimo $\frac{6}{6} \times 0 + 1 = 1$.

118. Da questa serie costante degli esponenti e de' coefficienti si può stabilir una formola generale per innalzar il binomio $a+b$ a qualunque potenza m . Onde la serie de' termini (non considerati per ora i coefficienti) anderà così: $a^m, a^{m-1}b, a^{m-2}b^2, a^{m-3}b^3, a^{m-4}b^4$ ec. dovendosi continuare finchè l' esponente di b divenga m .

I coefficienti poi cammineran in quest'ordine
 $1, m, m \times \frac{m-1}{2}, m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ ec.

Onde si avrà la formola generale $a+b=a^m + m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ ec.

Nella stessa guisa si trova la formola per il binomio $a-b^m$, con questo solo divario, che il termine deve esser negativo, lorchè l'esponente di b è numero dispari. Come nel cubo $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, il secondo e quarto termine sono negativi; la ragion si rileva evidentemente dalla moltiplicazione.

119. La stessa formola può applicarsi ancora ad una quantità composta di più di due termini. Volendosi, per esempio, elevar il trinomio $a+2b-c$ alla potenza m , non si ha che far i due primi termini $a+2b=p$, ed il terzo termine $-c=q$. In questo caso il trinomio $a+2b-c=p-q$. S'innalzi dunque $p-q$ alla potenza m secondo la formola prescritta, ed i valori trovati di $p-q$ si sostituiscano ad $a+2b-c$.

Si elevi, per esempio, $a+2b-c$. Fatto $a+2b=p$, $-c=q$, sarà $p-q$ $= p^m - 3p^2q + 3pq^2 - q^m$.

Si sostituiscano ora $a+2b$ ai valori trovati di p , e $-c$ a quelli di q , la quantità trovata $p^m - 3p^2q + 3pq^2 - q^m$ diverrà $a^m + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 - 3a^2c - 12b^2c - 12abc - 12b^2c + 3ac^2 + 6bc^2 - c^m$.

Lo stesso è per un polinomio qualunque; deve sempre ridursi ad un binomio.

120. Sopra gli esponenti si posson fare le quattro operazioni ordinarie.

1°. L'Addizione e la Sottrazione son inutili, perchè nè la somma nè la differenza di due potenze possono ridursi ad un esponente comune: la loro più semplice espressione è $a^m \pm a^n$.

2°. Moltiplicazione. Sia a^m da moltiplicarsi per a^n . Facciasi la somma de' due esponenti, e si scriva a^{m+n} .

zione della radice è perfetta, come $a^{\frac{2}{2}} c^{\frac{6}{2}} = ac^3$.

Ma se si avesse da estrarre la radice quadrata di $a^3 c^5$, siccome questa frazione $a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{5}{2}}$ non può ridursi ad intero, la radice sarà imperfetta.

124. Quando la radice è semplicemente indicata, vi si mette avanti $\sqrt{}$ che si chiama *segno radicale*, tra i cui gambi si mette l'esponente della radice. Come

$\sqrt[3]{ab}$ significa, che dalla quantità ab si ha da estrarre la radice cubica. Quando al segno radicale non si mette alcuna cifra, s'intende la radice quadrata.

125. Il segno radicale annunzia evidentemente l'estrazione delle radici nelle quantità semplici. $\sqrt{a^2} = a$,
 $\sqrt{a^2 c^2} = ac$.

Si vede al primo colpo d'occhio, che le quantità proposte sono state generate dalla moltiplicazione delle radici che loro si attribuiscono, e che $a^2 = a \times a$, $a^2 c^2 = ac \times ac$.

126. Se il monomio ha un coefficiente, bisogna anche dal coefficiente estrarre la radice secondo le regole che or ora si daranno per i numeri.

Così $\sqrt{9a^2 c^2} = 3ac$, $\sqrt{\frac{a^2}{9c^2}} = \frac{a}{3c}$ &c.

127. Per indicar l'estrazione della radice de' Polinomi, si cuopre il polinomio con una linea tirata dopo il segno radicale. Onde per designare la radice qua-

drata di $a^2 + b^2$, si scrive $\sqrt{a^2 + b^2}$. Altri scrivono così $a^2 + b^2^{\frac{1}{2}}$, o $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, o $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$.

Per indicare la radice cubica, si scrive così $\sqrt[3]{a+b}$
 Estr.

Estrazione della Radice Quadrata.

128. Sia $a^2 + 2ab + b^2$, da cui vogliam estrarre la radice quadrata.

$$\begin{array}{r|l}
 e & \\
 a^2 + 2ab + b^2 & 2a + b \\
 -a^2 & a + b \text{ radice} \\
 \hline
 * + 2ab + b^2 & \\
 -2ab - b^2 & \\
 \hline
 * & *
 \end{array}$$

1.^o Estraggasi dal primo termine a^2 la radice quadrata a , e si metta da parte. Si quadri la radice a , ed il suo prodotto a^2 si sottragga dalla quantità E ; il resto sarà $+2ab + b^2$.

2.^o Si raddoppi la radice a , ed il suo doppio $2a$ si metta sopra la radice. Dividasi il suo termine $+2ab$ del resto per $2a$, ed il quoziente $+b$ si scriva alla radice, e sopra a canto a $2a$.

Si moltiplichi questo quoziente b per $2a + b$, ed il prodotto si sottragga dal predetto resto. Non rimane più nulla. Dunque $a + b$ è la radice esatta di $a^2 + 2ab + b^2$.

Ecco un'altra operazione più a lungo.

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{a^4 + 6a^2c + 5a^2c^2 - 12ac^3 + 4c^4 - a^4} & 2a^2 + 6ac - 2c^2 \\
 & 2a^2 + 3ac - 2c^2 \\
 & a^2 + 3ac - 2c^2 \text{ radice} \\
 \hline
 * -6a^2c + 5a^2c^2 - 12ac^3 + & \\
 4c^4 - 6a^2c - 9a^2c^2 & \\
 \hline
 * -4a^2c^2 - 12ac^3 + 4c^4 & \\
 + 4a^2c^2 + 12ac^3 - 4c^4 & \\
 \hline
 * & *
 \end{array}$$

La prova dell'estrazione della radice quadrata, è la
mol.

moltiplicazione della radice per sè stessa ; il prodotto deve dare la prima quantità.

La ragione di questa operazione rilevasi chiaramente da (116)

129. Lo stesso metodo serve precisamente per estrarre da numeri le radici quadrate.

Ma convien prima sapere le radici quadrate de' numeri che son al di sotto di 100. Eccole

Quadrati... 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Radici ... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Siegue da ciò, che un numero semplice non può aver più di due cifre nel suo quadrato ; poichè 10, che è il primo numero composto, ha per quadrato 100, che è il primo numero composto di tre cifre. Seguendo questo ragionamento si vede, che un numero composto di due cifre, non ne può aver più di quattro al suo quadrato ; perchè 100 primo de' numeri composti di tre, ha per quadrato 10000, primo de' numeri composti di cinque cifre. In generale, un numero qualunque non può aver al suo quadrato più del doppio delle sue cifre.

Si estraiga la radice quadrata da 625. Poichè questo numero ha tre cifre, la sua radice deve averne due.

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{625} & 25 \text{ radice} \\
 \underline{4} & \\
 225 & \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 = 5$$

$$25 \times 25 = 625$$

Si separi dunque in due membri per mezzo d' una virgola o di un punto, incominciando da destra a sinistra. Questa separazione di membri ciascuno di due cifre, deve farsi sempre nell'estrazione numerica della radi-

radice quadrata, nulla però importando che l'ultimo membro a sinistra resti d'una sola cifra. Si cerchi la radice quadrata del primo membro a sinistra 6: La più prossima è 2: si metta questo 2 nel luogo della radice. Si quadri questa radice, ed il suo quadrato 4 si sottragga dal primo membro 6; il resto è 2. A canto a questo resto 2 si cali giù l'altro membro 25, e vegga si quante volte la radice 2 entra nella metà delle due prime cifre 22, cioè in 11. Vi entra 5 volte. Mettasi dunque 5 nel luogo della radice, e si avrà in tutto la radice 25, la quale moltiplicata in sè stessa $25 \times 25 = 625$.

In questa operazione devonfi osservar due cose come nella divisione. 1.^o Che dopo la prima cifra della radice non si deve metterle a canto l'altre, se pria non si provano per veder se son troppo grandi, nel qual caso si diminuiscono. 2.^o Che se ne' numeri abbassati la radice non entra alcuna volta, convien metter zero alla radice; ed abbassate l'altre due cifre del membro susseguente continuar l'operazione.

Esem.

Esempio .

$\begin{array}{r} \sqrt{10,21,04} \\ 9 \\ \hline 1 \quad 21 \end{array}$	radice $319,53$	decimali $10,21,04,00,00$
$\begin{array}{r} 6 \\ \hline = 2 \\ 3 \quad 1021 \\ 31 \times 31 = 961 \\ \hline 6004 \end{array}$		$\begin{array}{r} 34300 \\ 1715 \\ \hline = 5 \\ 319 \end{array}$
$\begin{array}{r} 300 \\ \hline = 9 \\ 31 \end{array}$		$\begin{array}{r} 10210400 \\ 3195 \times 3195 = 10208025 \\ \hline 237500 \end{array}$
$\begin{array}{r} 102104 \\ 319 \times 319 = 101761 \\ \hline 343 \end{array}$		$\begin{array}{r} 11875 \\ \hline = 3 \\ 3195 \end{array}$
		$\begin{array}{r} 1021040000 \\ 31953 \times 31953 = 1020994209 \\ \hline 45791 \end{array}$

La radice prossima di 10 è 3, il di cui quadrato 9 sottratto da 10, resta 1. A fianco di questo 1 si cali il secondo membro 21, e neglettane l'ultima cifra 1, sotto di cui si metta un puntino, si prenda la metà di 12, cioè 6, e si divida per la radice 3, il quoziente è 2. Ma non si metta questo quoziente 2 subito nel luogo della radice, perchè $32 \times 32 = 1024 > 1021$. Mettasi dunque alla radice 1, e si avrà $31 \times 31 = 961$, che sottratto da 1021, resterà 60. A lato di questo resto 60 si cali già l'altro membro 04, e negletta l'ultima cifra 4, si divida la metà di 600, cioè 300 per 31. Il quoziente è 9, che (faccane la prova) si metterà alla radice. Finalmente $319 \times 319 = 101761$, che sot-

tratto

tratto da 102104, resta 343. E siccome non vi sono più membri d'abbassare, deve si conchiudere che la più prossima radice quadrata di 102104 è 319, e che se non vi fosse 343 di troppo, quel numero sarebbe quadrato.

130. Lorchè il calcolo non richiede grand' esattezza, si può nell'estrazione delle radici trascurar l'ultimo resto; ma quando si esige la maggior esattezza, bisogna cercar le decimali della radice. In tal caso, bisogna aggiunger successivamente ai resti tante volte due zeri, quante decimali si vorranno avere, e si continuerà l'estrazione secondo il metodo prescritto.

Così nel proposto esempio si aggiungan due zeri alla quantità 102104, che diverrà 10210400. Si abbassino questi due zeri a canto al resto 343, e negletta l'ultima cifra, si divida la metà di 3430, cioè 1715 per la radice 319, il quoziente è 5, che si deve metter nel luogo della radice con un punto o virgola avanti come decimale. Si quadri ora tutta la radice $3195 \times 3195 = 10208025$, che sottratto da 10210400, resta 2375.

Se si vogliono più decimali, aggiungansi alla proposta quantità due altri zeri, e si abbassino quelli due zeri a fianco al resto 2375. Veggasi nella metà 23750, cioè in 11875 quante volte entra la radice 3195. Vi entra 3 volte, dunque mettasi 3 alla radice, e $31953 \times 31953 = 1020994209$ sottratto da 1021040000, resta 45791. E così si può proseguir quanto si vuole.

131. Si estrae la radice di una frazione, coll'estrarre quella di ciascuno de' suoi termini. $\sqrt{\frac{4}{9} - \frac{2}{3}}$, perchè $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Ma quando i termini non sono numeri quadrati, bisogna indicarla col segno radicale, o ridurla in decimali.

Estrazione della Radice Cubica.

132. Per concepire l'estrazione della Radice Cubica, convien ricordarsi, che (116) un binomio elevato alla terza potenza è composto del cubo di ciascun termine,

mine, e del triplo prodotto di ciascun termine per il quadrato dell'altro.

Esempio 1.^o

$\begin{array}{r} \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \\ - a^3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{l} 3a^2 \\ a + b \text{ radice} \end{array}$
$\begin{array}{r} * + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 \\ \hline \end{array}$	
$* \quad * \quad *$	

Sia ora proposto di estrarre questa radice cubica.

1.^o Si estraiga dal primo termine a^3 la radice cubica a , e si metta nel luogo della radice. Si cubi la radice a , ed il suo prodotto a^3 si sottragga dalla prima quantità; il resto sarà . . .

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2.^o Si quadri la radice a , e si triplichi; ella diverrà $3a^2$. Per questo $3a^2$ si divida il primo termine $3a^2b$ del predetto resto; il quoziente sarà $+b$, che si deve metter a fianco alla radice. Si cubi la radice $a + b$, ed il suo prodotto si sottragga dal resto; non rimane più niente: dunque $a + b$ è la radice cubica cercata.

Esem-

Esempio 2°.

$\begin{array}{r} \sqrt{z^6 + 6z^5 + 40z^4 + 96z^3 + 64} \\ 1^{\circ} \text{ rest. } * 6z^5 + 40z^4 + 96z^3 + 64 \\ 2^{\circ} \text{ sottr. dalla } \\ 1^{\circ} \text{ qu. } - z^6 - 6z^5 - 12z^4 + 8z^3 \\ 2^{\circ} \text{ rest. } ** 12z^4 - 48z^3 + 96z^2 + 64 \\ 3^{\circ} \text{ sottr. dalla } \\ 1^{\circ} \text{ quant. } z^6 - 6z^5 + 40z^4 - 96z^3 + 64 \end{array}$	z^2 prima radice di z^6 $6z^5 : 3z^3 = 2z$ seconda radice $z^2 + 2z$ elevata alla 2ª potenza $z^4 + 6z^3 + 12z^2 + 8z^3$ $-12z^4 : 3z^3 = -4$ terza radice $z^2 + 2z - 4$ radice totale elevata alla 3ª potenza $z^6 + 6z^5 - 40z^4 + 96z^3 - 64$
* * * * *	

133. L'estrazione della radice cubica de' numeri è la stessa che l'Algebraica. Convien però conoscer prima i dieci primi cubi perfetti, che sono

Cubi, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.
 Radici, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Donde si vede, che un numero non può averal suo cubo più del triplo delle sue cifre; perchè 10 primo de' numeri di due cifre, ha per cubo 1000 primo de' numeri di quattro cifre: 100 primo de' numeri di 3 cifre, ha per cubo 1000000 primo de' numeri di 7 cifre ec.

Sia dato il numero 15625, da cui si abbia ad estrarre la radice cubica.

1° Si separi il dato numero in membri di tre cifre l'uno, incominciando dalla destra

15, 625	25 radice
8	
76	
— = 25	
3 — = 6	
4	

2°. Si estragga dal primo membro 15 la più prossima radice cubica 2, che si deve subito porre nel luogo della radice.

3°. Si cubi la radice 2, ed il suo cubo 8 si sottragga dal primo membro 15. A fianco al resto 7 si abbassi la prima cifra 6 del secondo membro 625.

4°. Si quadri la radice 2, il suo quadrato è 4. Invece di triplicar questo quadrato 4, per cui divider il resto 76, come si è fatto Algebricamente; si divida 76 per 3, ed il quoziente 25 divida si per il quadrato 4, si avrà il quoziente 6.

5°. Questo quoziente 6 non si deve metter alla radice prima di provarlo, e la prova è ilubar la radice 26. Or siccome $26 \times 26 \times 26 = 17676 > 15625$, perciò si scemi 6, e si renda 5, e si provi. $25 \times 25 \times 25 = 15625$ che è il numero proposto. Dunque 25 n'è la radice cubica.

Con questo metodo si proseguirà per qualunque numero composto, come si vede nel secondo esempio.

Esempio.

Gli altri, che si chiaman incommensurabili, non possono esser espressi da numeri se non che in una maniera approssimante: ma possono però esser rappresentati, o immaginarsi che lo sieno, in un'altra maniera, per esempio, per mezzo de' rapporti d'una linea verso un'altra.

158. Di più. L'Aritmetica Ordinaria ha due sorte di principj. Gli uni son dipendenti dai segni o cifre, colle quali si esprimon i numeri. Son questi principj che si chiaman propriamente regole dell'Aritmetica. Regole che son attaccate alla natura di questi segni: così che elleno farebbero ben differenti, se invece di dieci segni, de' quali ci serviamo per esprimer tutti i numeri possibili, ne avessimo maggiore o minor numero, o se li disponessimo altrimenti.

159. Gli altri principj, su quali son fondate le regole Aritmetiche, sono più generali, sono indipendenti dalle cifre, colle quali si possono esprimer i numeri, e son unicamente attaccati alla natura stessa de' numeri, Come

1.° Se da un maggior numero si toglie un minore, ed a questo minore si aggiunge la loro differenza, si avrà il numero maggiore.

2.° Il prodotto di due numeri diviso per uno de' due fattori, dà l'altro fattore.

3.° Il prodotto del quoziente per il divisore è ugual al dividendo.

Tali principj sono proprietà generali de' numeri, di qualunque specie e di qualunque maniera essi numeri sieno disegnati. Dunque tali principj possono esser posti sotto gl'occhi nella più chiara e più semplice maniera per mezzo di caratteri generali. Perciò per esprimerli si sono scelte le lettere dell'alfabeto, come le più note, e d'un uso il più familiare ed universale.

160. Dunque l'Algebra serve

1.° A rappresentare e dimostrare in una maniera semplice e facile le verità, che han relazione alle proprietà de' numeri. 1.^a utilità.

2.° Sic-

2°. Siccome vi sono proprietà generali de' numeri indipendentemente dalla maniera con cui son espressi, così per il calcolo de' numeri vi devon esser principj generali per mezzo de' quali si potrà esprimer nella maniera la più semplice e più ristretta il risultato della combinazione e delle operazioni di questi numeri.

Le regole per trovare questo risultato, sono le regole dell' Algebra. Già si è veduto, che l' Addizione Algebraica non è altro che il mezzo di esprimer colla maggior semplicità e brevità il risultato dell' addizione di molti numeri, senza dar loro alcun valore particolare. L'altre regole danno gli stessi vantaggi. Se si ha, per esempio, da moltiplicare $a+b$ per $c+d$, si scrive $ac + bc + ad + bd$, o compendiosamente

$a+b \times c+d$; laddove in numeri questa operazione farebbe ben lunga. 2.^a utilità.

3.^o La 3.^a utilità è di esprimer i rapporti incommensurabili, che non posson esser esattamente rappresentati da numeri, e di esprimerne tutti i risultati del calcolo. Come, per esempio, si duplica, triplica, quadrupla un numero ordinario, moltiplicandolo per 2, per 3, per 4; così si duplica, triplica, quadrupla un rapporto incommensurabile moltiplicandolo per 2, per 3, per 4: ed in quella guisa che per mezzo della divisione i numeri ordinari si riducono a metà, a terzo, a quarto, lo stesso si fa anche degl' incommensurabili.

Infomma tutte le verità sopra i numeri, le quali non si possono disegnar esattamente per mezzo del calcolo aritmetico ordinario, convengon ai rapporti incommensurabili, e son trattate dal calcolo algebraico.

161. Da tutto ciò si comprende con quanta ragione sia stata l' Algebra definita *Aritmetica Universale* da Nevvton, genio luminoso e profondo, che ha rimontato in tutte le scienze ai loro veri principj metafisici. Infatti le regole di questa Scienza non consistono, che ad estrarre quanto vi sarebbe di generale e di comune in tutte le Aritmetiche particolari, che si fareb-

rebbero con più o meno o con quante cifre come la nostra, ed a presentare sotto la forma la più semplice e compendiosa quelle operazioni aritmetiche indicate.

162. Per maggiormente conoscere l'utilità e l'oggetto dell'Algebra, convien osservare, che le quistioni che si possono proporre sopra i numeri, non sono tutte così semplici come le quattro operazioni ordinarie aritmetiche. Vi sono quistioni molto più complicate, per la soluzione delle quali convien fare delle combinazioni, nelle quali devon entrar i numeri che si cercano. Ci vuol dunque un'arte per fare queste combinazioni senza conoscer il numero che si cerca. Perciò bisogna esprimer questi numeri con caratteri differenti da caratteri numerici; poichè sarebbe un grandissimo inconveniente esprimer un numero ignoto con carattere numerico, che senza una gran casualità non potrebbe convenirgli.

Si cerchi, per esempio, due numeri, de' quali la somma sia 100, e la differenza 60. Se si designano i due numeri incogniti con caratteri numerici presi ad arbitrio, per esempio, l'uno 25, l'altro 50, si dà loro una falsissima espressione, poichè 25 e 50 non adempiono le condizioni del problema.

Per evitare questo inconveniente, il maggiore di questi numeri incogniti si chiami x , ed il minore y . Con questa denominazione algebrica si ha $x+y=100$, e $x-y=60$; onde $x+y+x-y=100+60$, cioè $2x=160$: dunque $x=80$, e $y=20$.

163. Quindi si vede che l'oggetto e la massima utilità dell'Algebra è, che per mezzo delle generalità de' caratteri si possono esprimer le condizioni supposte tra' numeri dati ed i numeri incogniti, e praticar le operazioni ugualmente su gli uni che su gli altri, per indi liberare gl'incogniti dai dati, e finalmente conoscerli relativamente alle condizioni proposte.

164. L'espressione algebrica d' un problema non è altro, come l' ha ben osservato Nevvton, che la traduzione dello stesso problema in caratteri algebrici.

Il comodo e l'essenziale di questa traduzione si riduce.

duce a metter nel problema quel ch' è assolutamente necessario, ed a bandirne le condizioni superflue. Ecco un efempio.

Problema enunciato in linguaggio ordinario.	Lo stesso Problema tradot- to algebricamente.
Si chieggono due età con queste condizioni .	$x, y.$
Che la loro somma sia 100	$x + y = 100$
E che la loro differen- za sia 30	$x - y = 30$

Onde la quistione si riduce a trovar le due incogni-
te x, y .

165. Da ciò si rileva, che l' *Aritmetica Universa-
le* ha due parti .

La prima è quella , che insegna a far le combina-
zioni ed il calcolo delle quantità rappresentate da' se-
gni più universali di quel che non son i numeri ; in
maniera che le quantità incognite , cioè quelle delle
quali s'ignora il valor numerico , possion esser combi-
nate colla stessa facilità che le quantità date (cioè
quelle alle quali si può assegnar un' valor numerico).

Queste operazioni non suppongono che le proprietà
generali della quantità , vale a dire vi si considera la
quantità semplicemente come quantità , e non come
rappresentata e fissata da tale o tal espressione partico-
lare. Questa è quella che propriamente si chiama Al-
gebra , di cui si è trattato in questo capitolo.

La seconda parte dell' *Aritmetica universale* consi-
ste a saper far uso della prima parte (cioè del meto-
do generale di calcolar le quantità), affin di scoprire
per mezzo delle quantità note le quantità incognite
che si cercano . Questa seconda parte si chiama pro-
priamente *Analisi* , di cui si va a trattare nel capito-
lo seguente . Ma siccome ella è la parte principale e
più estesa, cui l' Algebra è diretta , se le dà spesso a
dirittura il nome d' Algebra .

CAPITOLO II.

Dell'Analisi.

166. **L'**Analisi è l'arte di sciogliere per mezzo del calcolo Algebraico tutti i problemi che si possono proporre sulle grandezze.

167. *Proporre un Problema*, è domandare che si trovi il valore d'una o più grandezze. Sarà impossibile trovar questo valore, se nel proposto problema non si assegna qualche rapporto tralle quantità incognite e le cognite, le quali si chiaman i *dati del problema*.

168. Ciascuno de' rapporti assegnato tra i dati e le incognite, si chiama *una condizione del problema*; perchè questi rapporti esprimon la condizione per cui vi è uguaglianza fralle incognite ed i dati.

169. L'espressione algebraica d'una condizione d'un problema si chiama *equazione*.

Dell'Equazione.

170. L'*Equazione* è dunque una unione di termini Algebraici composti di quantità cognite ed incognite, unite col segno =

171. Si usa esprimer *le date* colle prime lettere minuscole dell'Alfabeto, e le *incognite* colle ultime x, y, z. Così distinguonsi a prima vista l'une dall'altre.

172. Tutti i termini che son a sinistra del segno =, forman *il primo membro dell'equazione*, e tutti gli altri che son a destra ne forman il 2.^o *membro*.

173. Dicesi *equazione del primo grado*, se l'incognita è alla sua prima potenza, come $x + a = b$. Del 2.^o *grado*, se l'incognita è alla sua 2.^a potenza. Del 3.^o *grado*, se ella è alla 3.^a potenza ec.

174. *Risolver un problema*, è trovar il valore di ciascuna incognita richiesta; o provare che sia impossibile di trovarlo, il che accade lorchè i rapporti dati implicano qualche contraddizione.

175. *Trovar il valore d'una incognita*, è farla restar sola in un membro dell'equazione, e l'altro membro far che sia composto di quantità tutte cognite.

176. Possono l'equazioni riguardarsi in due aspetti; o come ultime conclusioni alle quali si arriva nella soluzione de' problemi, lorchè l'incognita è rimasta sola ed eguale a quantità tutte note, ed in tal caso possono queste equazioni dirsi *finali*, o come mezzi, per i quali si giunge alla soluzione finale, e tali equazioni dir si possono *mediate*. L'equazioni mediate racchiudono più incognite che devon esser paragonate e combinate insieme, finchè si giunga ad una nuova equazione, che non contenga più che una sola incognita mista con cognite,

177. Per trovare il valore delle incognite d'un problema, o sia per giunger all'equazioni *finali*, bisogna fare successivamente sopra ciascuna equazione *mediata* diverse operazioni secondo lo stato in cui sono esse incognite. Queste operazioni sono la Trasposizione, la Divisione, la Moltiplicazione, l'Estrazione delle radici, la Sostituzione, e la Proporzione.

Trasposizione.

178. Consiste questa operazione a trasportar un termine da uno in un altro membro dell'equazione; senza però che l'uguaglianza fra essi membri sia punto cangiata. Per effettuar ciò, si tolga questo termine dal membro dov'è, e con un segno contrario si trasporti nell'altro membro.

Sia $ac + x = b$. Per trasportar il termine ac , si sottragga dall'uno e l'altro membro, e si avrà $ac + x - ac = b - ac$, e riducendo $x = b - ac$. E' chiaro, che quest'ultima equazione non ha valore differente dalla prima.

179. Si può dunque per la trasposizione render positivo un termine negativo, e reciprocamente.

180. E si può prender il valore d'un termine qualunque, col lasciarlo solo in un membro.

Divisione.

181. Serve questa a liberar una incognita dalle cognite colle quali ella è moltiplicata, senza che il valore dell'equazione sia punto alterato. Se nell'equazione $bx - ac = d - cd$, si vuol liberar x da b , convien

divider per b tutti gli altri termini, si avrà $\frac{bx}{b} =$

$$\frac{ac}{b} = \frac{d}{b} - \frac{cd}{b}; \text{ o } x - \frac{ac}{b} = \frac{d}{b} - \frac{cd}{b}.$$

Così $ax - bx + 3x - d$ per mezzo della divisione diviene $x = \frac{ax - bx + 3x - d}{a - b + 3}$.

$ax - x = b$ diviene $x = \frac{b}{a - 1}$.

$ab^2 - bx^2 = bd$ diviene $\frac{ab^2 - bx^2}{b} = \frac{bd}{b}$, o $ab - x^2 = \frac{d}{b}$.

Dunque per liberar un' incognita da una o più cognite colle quali ella è moltiplicata, bisogna divider gli altri termini per quelle cognite.

Per mezzo della divisione dunque si rende l'equazione più semplice; il che sempre è da procurarsi.

Moltiplicazione.

182. Questa serve, per fare svanire le frazioni che trovansi nell'equazioni, senza però cambiarsi l'uguaglianza de' membri.

Se nell'equazione $a + \frac{bx}{x} = dx$, si vuol fare svanire il denominatore x , convien moltiplicarlo per

quantità uguali , ma con una sola stessa lettera esprimer (se occorre) i denominatori , o i coefficienti .

3°. Esprimer ciascuna condizione del problema con una equazione .

4°. In una soluzione completa devon esser tante l' equazioni , quante sono le incognite , ed in tal caso il problema dicesi *determinato* , cioè non ammette che un numero limitato di soluzioni . Se poi vi sono meno incognite che equazioni , il *problema è più che determinato* , e talvolta si scuopre d' impossibile soluzione per le contradizioni che si trovano nell' equazioni . Finalmente se sono più le incognite che l' equazioni , dicesi *problema indeterminato* , e può aver un' infinità di soluzioni ; e sarà *più che indeterminato* quanto il numero delle incognite è maggiore rispetto a quello dell' equazioni .

5°. Trovare per mezzo delle regole prescritte il valore di ciascuna delle incognite .

189. Da tutto ciò siegue , che *la preparazione d' un problema* consiste principalmente in esaminare se le proposizioni o parole , nelle quali il problema è espresso , posson esser espresse in termini Algebraici , come noi esprimiamo le nostre idee ordinarie in caratteri Greci , Latini , o Italiani . Se ciò può farsi , come generalmente si può far in tutte le quistioni , che si fanno su i numeri e sulle quantità astratte , in tal caso bisogna dar de' nomi alle quantità cognite ed incognite secondo la quistione lo esige , e tradurre così in linguaggio Algebraico il senso della quistione . Queste condizioni così tradotte daran tante equazioni , quante il problema può darne .

Equazioni del primo grado .

Problema primo .

190. Un padre ed un figlio han fra tutti due 100 anni , il figlio ne ha 30 meno del padre . Qual è l' età di ciascheduno ?

Qual

Qui vi sono due quantità date, cioè 100, e 30; e due incognite, l'età del padre e quella del figlio. Le due condizioni sono, che la somma delle due età incognite sia 100, e la loro differenza 30. Bisogna dunque esprimerle con due equazioni; e supponendo $100 = a$, $30 = b$, l'età del padre $= x$, l'età del figlio $= y$, si riduce il problema a questa quistione generale: *Data la somma e la differenza di due quantità trovar ciascuna quantità: e si esprime così*

Problema.

Espresso in parole	Espresso Algebraicamente.
Si domandano due età ...	x, y ?
di cui la somma è $100 = a$	$x + y = a$
e di cui la differenza è $30 = b$	$x - y = b$

Si hanno dunque le due equazioni $x + y = a$, $x - y = b$, nelle quali vi sono due incognite. Or per aver il valore di queste incognite, conviene (184) farne svanir una. Dunque se $x + y = a$ faranno $x = a - y$, e $x - y = b$ faranno $x = b + y$
 $a - y = b + y$, o $2y = a - b$, o $y = \frac{a - b}{2}$, cioè $y =$

$\frac{100 - 30}{2} = 35$. Nella stessa guisa si poteva far anche

svanire y , poichè se $x + y = a$ faranno $y = a - x$,
 $x - y = b$ faranno $y = x - b$
 $a - x = x - b$

dunque $a - x = x - b$, o $2x = a + b$, o $x = \frac{a + b}{2} =$

$\frac{100 + 30}{2} = 65$.

Dunque l'età del padre sarà di 65, e quella del figlio di 35 anni.

191. Poichè questa quistione particolare è stata ridotta ad una quistione generale, ne siegue che l'equazioni

zioni $x = \frac{a+b}{2}$, e $y = \frac{a-b}{2}$ danno una soluzione ge-

nerale; perchè queste lettere rappresentando tutti i numeri possibili, ogni volta che si proporrà di trovare due quantità x ed y , delle quali si conosca la somma a e la differenza b , si vedrà che la maggiore di queste quantità, designata qui da x , farà ugual alla metà della somma $a + b$ di due quantità date; e che la più piccola (espressa da y) farà ugual alla metà della differenza $a - b$ di queste due quantità date.

192. Le equazioni che danno la soluzione generale d'un problema, si chiaman *Formole*; elle rappresentano un metodo generale di risolvere tutti i problemi possibili che abbiano le stesse condizioni di quello che si è risoluto colle stesse equazioni. La Formola è dunque un risultato generale tirato da un calcolo Algebrico, e rinchiude un' infinità di casi, così che non si ha da far altro che sostituire de' numeri particolari alle lettere, per trovar il risultato particolare di qualunque caso si proponga. Ella è di un metodo facile per operare, e se si può renderla assolutamente generale, è di un massimo vantaggio, poichè spesso tutta una scienza si riduce ad una sola linea. Ma affinchè la formola abbia un tal vantaggio, bisogna che per trovarla, s'incontri assai più difficoltà che a scioglier un problema particolare.

Se per esempio si propone questo problema: *Pietro e Giovanni han dato insieme 14 soldi a' poveri; Pietro ne ha dato 4 di più che Giovanni; quanti ne ha dato ciascuno?*

E' chiaro che questo problema ha le stesse condizioni del precedente, poichè vi si cercan due quantità, di cui si conosce la somma 14, e la differenza 4.

Dunque $x = \frac{a+b}{2} = \frac{14+4}{2} = 9$; ed $y = \frac{a-b}{2} = \frac{14-4}{2} = 5$.

Dunque Pietro ha dato 9 soldi, e Giovanni 5.

193. Una formola dunque espressa in parole dà una
rego.

regola generale. Come le formole $x = \frac{a+b}{2}$ $y = \frac{a-b}{2}$,

che sono lo stesso che $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$,

danno questa regola generale o Teorema: Quando si conosce la somma e la differenza di due quantità incognite, per aver la più grande bisogna aggiunger la metà della differenza alla metà della somma; e per la più piccola bisogna togliere la metà della differenza dalla metà della somma. Questa proposizione può anche enunciarsi così:

Di due quantità inuguali, la più grande è uguale alla metà della loro somma più la metà della loro differenza: E la più piccola è uguale alla metà della loro somma meno la metà della loro differenza.

194. Da tutto ciò risulta, che per risolvere i problemi che si propongono sopra i numeri o sulle quantità astratte, non si ha da far quasi altro che tradurli dal linguaggio ordinario in linguaggio algebrico, cioè in caratteri propri da esprimer le nostre idee su i rapporti delle quantità. Può darsi talvolta, che il discorso in cui il problema è proposto, non possa esser espresso algebricamente; ma col farvi qualche piccolo cambiamento, ed avendo principalmente riguardo più al senso che alle parole, la traduzione diverrà ben facile: la difficoltà che può incontrarsi in questa traduzione, vien unicamente dalla differenza degli idiomi, come nelle traduzioni ordinarie.

Problema 2°.

Pietro e Gio: avendo insieme 36 scudi, ne han perduto insieme 10 al giuoco. Pietro ha perduto il terzo di quel che avea, e Gio: il quinto. Si domanda quanto ciascuno avea avanti il giuoco, e quanto ciascuno vi ha perduto.

Sembra a prima vista che qui vi sieno quattro incognite,

gnite, ma realmente non ve ne sono che due. Perchè quando si conoscerà quel che Pietro avea prima del giuoco, il $\frac{1}{3}$ di questa somma farà la sua perdita, la quale per conseguenza non è un' incognita. Lo stesso è della perdita di Giovanni.

195. Quindi si può inferire: che il numero delle incognite non dipende dal numero delle domande che si fanno in un problema; ma bisogna vedere prima di determinar il numero delle domande, se la soluzione d'una domanda dà la soluzione dell'altra.

Problema.

Espresso in parole	espresso algebricamente
Si domandano due quantità . . di cui la somma è $36 = a$	x, y , $x + y = a$ prima equazione
e di cui il $\frac{1}{3}$ della prima, più il $\frac{1}{5}$ della seconda, è $10 = b$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = b$, 2. ^a equazione

Si facciano svanire nella seconda equazione i denominatori, ella diverrà $5x + 3y = 15b$; e dividendo

e permutando farà $x = 3b - \frac{3y}{5}$.

e la prima farà . . . $x = a - y$, dunque

$a - y = 3b - \frac{3y}{5}$; e facendo sparir il denominatore, farà $5a - 5y = 15b - 3y$, e permutando $2y = 5a - 15b$, e dividendo farà $y = \frac{5a - 15b}{2} = \frac{180 - 150}{2} = 15$.

Dunque $x = a - y = 36 - 15 = 21$.

Dunque Pietro avea 21, e ne ha perduto 7, che è il $\frac{1}{3}$ di 21: e Giovanni avea 15, ed ha perduto 3, che è il $\frac{1}{5}$ di 15. E son vere tutte le condizioni, $21 + 15 = 36$, $7 + 3 = 10$.

Pro.

Problema 3.º

Un Padre lascia in suo testamento il suo asse da dividerfi tra suoi figli con queste condizioni, che il primogenito si prenda 1000 scudi, ed il $\frac{1}{6}$ di quel che resterà dopo levata quella somma; che il 2.º si prenda 2000 scudi con il $\frac{1}{6}$ del resto; il 3.º 3000 con il $\frac{1}{6}$ del resto; e così gli altri fin all'ultimo, il qual avrà quel ch'è avanzato a suoi fratelli. Eseguita questa bella disposizione, si trova che ciascuno ha avuto parte uguale. Or si domanda, quanti figli erano? Quanto ha ciascuno avuto? quanto il padre ha lasciato?

Benchè le domande sien tre, l'incognita non è che una, cioè il bene del padre.

Sia questo $= x$, gli scudi 1000 $= a$. Dunque la porzione del primogenito farà $a + \frac{x-a}{6}$, che ridotta

tutta in frazione farà $\frac{6a+x}{6}$, o $\frac{5a+x}{6}$; e sottrat-

ta da tutto il bene x , il resto farà $x - \frac{5a+x}{6}$,

ovvero $\frac{5x-5a}{6}$,

Da questo resto il secondo figlio deve prender prima $2a$, onde resterà $\frac{5x-5a}{6} - 2a = \frac{5x-17a}{6}$, e poi

$\frac{1}{6}$; sicchè $\frac{5x-17a}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5x-17a}{36}$.

Dun-

$$\text{Dunque la porzione del secondo figlio è } 22 + \frac{5x-172}{36} \\ \frac{552+5x}{36}$$

E poichè le porzioni si sono trovate uguali, farà
 $\frac{52+x}{6} = \frac{552+5x}{36}$; e togliendo le frazioni, trasportando e riducendo, si ha $6x = 1502$, e dividendo $x = 250 = 25000$.

Dunque il bene del padre è 25000 scudi, e ciascuno ne ha avuto 5000: onde i figli sono cinque.

Problema 4.º

Trovar tre numeri x, y, z , de' quali la somma sia 105, e la loro differenza sia la stessa.

Le condizioni di questo problema non possono esprimersi che con queste due equazioni, $x+y+z = 105$, $x-y = y-z$.

Questo è dunque un problema *indeterminato*, perchè il numero delle incognite è maggiore del numero delle condizioni, ed in conseguenza dell'equazioni.

Non si può questo problema risolvere colle regole precedenti, perchè rimarranno nell'equazioni sempre due incognite.

$$1.^\text{a} \text{ equaz. } x+y+z=105, \quad \text{o } x=105-y-z$$

$$2.^\text{a} \text{ equaz. } x-y=y-z, \quad \text{o } x=2y-z$$

dunque $2y-z=105-y-z$,
 $3y=105$, o $y=\frac{105}{3}=35$. Sostituendo il valore di y nella prima equazione, si avrà $x+35+z=105$, ovvero $x+z=105-35=70$; nella qual equazione non può farsi svanire nè z , nè x .

Convien dunque supporre qualche valore ad una di queste due incognite, per conoscer quello dell'altra. Suppongasi $x=10$, ecco subito $z=60$; ed i tre numeri richiesti faranno 10, 35, 60, i quali sciolgono il problema. Se poi si facesse $x=12$, farebbe $z=58$,
 ed

ed i tre numeri farebbero 12, 35, 58, i quali ugualmente sciolgono la quistione.

Quindi si vede, che questo problema può aver 69 soluzioni in numeri intieri e positivi, perchè può supporfi x uguale successivamente a tutti i numeri da 1 fin a 69, ma non al di là, perchè la somma delle due incognite è 70. Può aver però un'infinità di soluzioni, se si suppone x uguale a qualunque numero minore di 70 con qualsivisia frazione.

196. Vi son certi problemi, i quali sono determinati, benchè racchiudano meno equazioni che incognite.

Sieno 40 scudi da ripartirsi a 20 persone tra uomini, donne, e fanciulli, in maniera che gli uomini abbian 4 scudi per ciascheduno, le donne 2, ed i fanciulli 1. Si domanda, quanti uomini, quante donne, quanti fanciulli sono?

Le incognite sono tre, x, y, z , e l'equazioni son due

$$1.^a \text{ equaz. } x + y + z = 20, \quad z = 20 - x - y$$

$$2.^a \text{ equaz. } 4x + 2y + z = 40, \quad z = 40 - 4x - 2y$$

$$\text{dunque } 40 - 4x - 2y = 20 - x - y, \quad 0$$

$$3x + y = 20, \quad 0$$

$$x = 20 - y$$

3

Sembra a prima vista che si possa prender per y qualunque numero si voglia; ma se si fa riflessione che y , ed x esprimono numeri intieri positivi, si vede bene che y deve esser un numero intiero più piccolo di 20, e che $20 - y$ deve esser divisibile esattamente per 3. Si farà dunque successivamente $20 - y$ uguale a tutti i multipli di 3: cioè $20 - y = 3, 20 - y = 6, 20 - y = 9, 20 - y = 12, 20 - y = 15, 20 - y = 18$. Non si può andar oltre, perchè se si fa $20 - y = 21$, si avrebbe $y = -1$. Perciò tutte le soluzioni possibili di questo problema son le sei della tavola seguente.

$$y = 17$$

y = 17	x = 1	z = 2
y = 14	x = 2	z = 4
y = 11	x = 3	z = 6
y = 8	x = 4	z = 8
y = 5	x = 5	z = 10
y = 2	x = 6	z = 12

Lorchè dunque ne' problemi indeterminati le incognite esprimon cose indivisibili, non si può dar loro valor arbitrario, ed in conseguenza tali problemi son propriamente determinati.

Ecco alcuni altri problemi del primogrado per esercizio de' principianti.

1.^o *Pietro arrivato a Roma vi spende il primogiorno il terzo del suo danaro; il secondogiorno ne spende il quarto; il terzo giorno ne spende il quinto, e non gli restan più che 26 scudi. Si domanda che somma egli avea nell'entrar in Roma?*

Risposta 120 scudi.

2.^o *Un Orefice compra per 318 lire una massa di metallo composta di 3 oncie d'oro e di 5 d'argento; e compra per 522 lire un'altra massa composta di 5 oncie d'oro, e di 7 oncie d'argento. Si domanda il valore dell'oncia d'oro, e dell'oncia d'argento.*

Risposta. L'oncia d'oro è 96 l., e l'oncia d'argento 6 l.

3.^o *Pietro, Giacomo, e Giovanni han perduto al giuoco tutta la loro moneta, Pietro e Giacomo han perduto insieme 10 scudi; Pietro, e Giovanni 11 scudi; Giacomo e Giovanni 9 scudi. Quanto ha perduto ciascuno in particolare?*

Risposta. Pietro 6, Giacomo 4, Giovanni 5.

4.^o *Un Afino dice ad una Mula, se io ti dassi uno de' miei sacchi, noi saremmo ugualmente carichi; ma se tu me ne dai uno de' tuoi, io porterò un carico doppio del tuo. Quanti sacchi ciascuno porta?*

Risposta. L'Afino 7, la Mula 5.

5.^o *Pietro e Giovanni hanno ugual somma di danaro. Si metton al giuoco, e Pietro vi perde 12 scudi*

scudi, e Giovanni 57. Finito il giuoco, si trova Pietro quattro volte più ricco di Giovanni. Quanto avea ciascuno prima di giuocare?

Risposta. 72. scudi.

6°. Si domanda ad un uomo quanti fig'i ha? Egli risponde: se aggiungete insieme la metà, il terzo, ed il quarto, la somma sorpasserà di uno il numero de' miei figli.

Risposta. 12.

7°. Un'artista, che ha 6 lire, riceve quel che gli è dovuto per 5 settimane. Quindici giorni dopo non gli resta che il $\frac{2}{3}$ di tutto il suo danaro; ma avendo ricevuto il guadagno di queste due settimane, si trova aver ancora 21 lira. Quanto ha egli guadagnato per settimana?

Risposta. 6 lire.

8°. Un Mercante compra 3 cavalli; il prezzo del primo colla metà del prezzo degli altri due è 25 doppie; il prezzo del secondo con il terzo de' prezzi degli altri due è 26 doppie; ed il prezzo del terzo colla metà del prezzo degli altri due è 29. Quanto è il prezzo di cadaun cavallo?

Risposta. Il prezzo del primo è 8, del secondo 18, del terzo 16.

Equazioni del secondo grado.

197. Se nel risolvere qualche problema si arriva ad un'equazione, che contenga il quadrato d'una quantità incognita ed insieme il prodotto della stessa incognita per qualche data, come $y^2 + ay = b$, si chiama questa equazione del secondo grado.

In tali equazioni convien usare le seguenti parole.

1°. Trasferire in un membro dell'equazione tutti i termini convenienti l'incognita, così che nell'altro membro sieno tutti termini di quantità cognite.

2°. Se il quadrato dell'incognita ha qualche coefficiente, si divida per quel coefficiente ciascun termine dell'equazione.

O se il quadrato dell'incognita è diviso per qualche coefficiente, si moltiplichi per quel coefficiente ciascuno termine dell'equazione; affinchè il quadrato dell'incognita resti libero da qualunque coefficiente.

3°. Se il membro contenente l'incognita non è un quadrato perfetto, si prenda il quadrato della metà del coefficiente annesso all'incognita, e si aggiunga all'uno ed all'altro membro dell'equazione. In questa guisa il membro contenente l'incognita sarà ridotto ad un quadrato perfetto, da cui si può secondo le regole (128) estrarre la radice quadrata.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Sia} & \dots\dots\dots & ay = c - 4dy^2 \\
 \text{trasponendo} & & 4dy^2 + ay = c \\
 \text{dividendo} & & y^2 + \frac{ay}{4d} = \frac{c}{4d} \\
 & & \quad \quad \quad + \frac{a^2}{64d^2} = \frac{c}{4d} + \frac{a^2}{64d^2} \\
 \text{aggiungendo il qua-} & & y^2 + \frac{ay}{4d} + \frac{a^2}{64d^2} = \frac{c}{4d} + \frac{a^2}{64d^2} \\
 \text{drato della metà del} & & \\
 \text{coefficiente} & & \frac{a}{4d} \\
 \text{estraz. della radice } y & + \frac{a}{8d} = \sqrt{\frac{c}{4d} + \frac{a^2}{64d^2}} \\
 \text{trasponendo} & & y = \sqrt{\frac{c}{4d} + \frac{a^2}{64d^2}} - \frac{a}{8d}
 \end{array}$$

198. Accade talvolta, che nel membro delle incognite s'invii più di due termini, come $y^2 + ay - by = c$.

In tal caso si ha da esprimere così $y^2 + a - b \times y = c$; ed ecco che il membro dell'incognite è ridotto a due termini, poichè $a - b \times y$ non è che un sol termine, dal coefficiente del quale cioè da $a - b$ si ha

si ha da prender il quadrato della metà, ed aggiungerlo all'uno ed all'altro membro dell'equazione, la

$$\text{quale perciò diverrà } y^2 + a - b \times y + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} = c + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4}.$$

Per render il calcolo più facile, si fa in questa altra guisa: essendo già noto il valore del coefficiente $a - b$, e supponendolo ugual ad e , si metta e invece di $a - b$; onde si avrà.

$$y^2 + ey + \frac{e^2}{4} = c + \frac{e^2}{4}$$

$$x + \frac{e}{2} = \pm \sqrt{c + \frac{e^2}{4}}$$

$$y = \pm \sqrt{c + \frac{e^2}{4}} - \frac{e}{2}$$

199. Diligentemente è da osservarsi il segno $\pm$ premesso alla radice quadrata. Quel segno $+$ significa $+$ o $-$; perchè la radice quadrata di qualunque quantità, come di a^2 , può esser $+a$, ovvero $-a$, poichè $+a \times +a = a^2$, ed $-a \times -a = a^2$.

Perciò nell'ultima equazione $y + \frac{e}{2} = \pm \sqrt{c + \frac{e^2}{4}}$, ovvero

$$\text{vero } y + \frac{e}{2} = -\sqrt{c + \frac{e^2}{4}}; \text{ perchè } +\sqrt{c + \frac{e^2}{4}}$$

$$x + \sqrt{c + \frac{e^2}{4}} = c + \frac{e^2}{4} = -\sqrt{c + \frac{e^2}{4}} x -$$

$$\sqrt{c + \frac{e^2}{4}}.$$

200. Ma poichè i quadrati di tutte le quantità son positivi, è evidente, che la radice d'una quantità negativa è impossibile, cioè non può assegnarsi, e perciò quelle radici negative son dette *immaginarie*.

201. Si dan talvolta equazioni che non ammetton alcuna soluzione.

Sia $y^2 - ay + 3a^2 = 0$
 trasponendo. $y^2 - ay = -3a^2$
 aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente $-a$ $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a^2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$

estraendo la radice $y - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$

trasponendo $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$

Qui è manifesto, che i due valori della radice y son *immaginarj*, poichè non può assegnarsi radice della quantità $-\frac{11a^2}{4}$.

Lorchè dunque nella soluzione de' problemi, si giun-

ge a quantità *immaginaria*, è segno manifesto, o che il problema è impossibile, o che siasi adoprato un metodo contenente qualche impossibilità.

202. Se ad una radice immaginaria, come $\sqrt{-a^2}$, si aggiunge una quantità reale b , tutto divien immaginario: Così $b + \sqrt{-a^2}$ è immaginario; perchè se $b + \sqrt{-a^2}$ fosse ugual ad una quantità reale c , si avrebbe $\sqrt{-a^2} = c - b$, il che è impossibile.

203. Le radici immaginarie che han la stessa quantità sotto il segno radicale, come $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$, posson fare per mezzo della moltiplicazione un prodotto reale, in cui non resti alcun segno radicale, purchè quelle radici si moltiplichino sempre in numero pari. Poichè non può svanir il segno radicale, se non quando il termine affetto di tal segno si moltiplichi per un altro termine avente lo stesso segno radicale, e la stessa quantità sotto il predetto segno (145. 2.º).

Se poi tolto così il segno radicale, il prodotto della prima moltiplicazione $+$ si moltiplica per lo stesso segno radicale, il nuovo prodotto sarà di nuovo affetto dello stesso segno radicale. Ma se un'altra volta si moltiplica lo stesso segno radicale, di nuovo svanirà ancora il radicale; e così in appresso.

204. Se qualche termine d'un polinomio contien una radice immaginaria, come è il polinomio $x - a - \sqrt{-b}$, non può svanir il segno radicale, se il dato polinomio non si moltiplichi per un altro, il quale non differisca dal primo che per il segno premesso al radicale. Onde nel proposto polinomio non può svanir il ra-

dicale, se non $x - a - \sqrt{-b} \times x - a + \sqrt{-b}$; poichè fatta la moltiplicazione, si ha $x^2 - 2ax + a^2 + b$. In questo solo caso ciascun prodotto di cadaun termi-

ne reale in $\sqrt{-b}$ si elide scambievolmente per i segni contrarij, ed il termine b che contien il prodotto de' due radicali $+\sqrt{b-x} - \sqrt{-b}$, è necessariamente positivo.

L'uso delle quantità immaginarie è frequente: e la lor impossibilità non solo si toglie talvolta colla moltiplicazione, ma anche coll'addizione di due quantità *miste* (cioè composte di real e d'immaginario) con

altre quantità *miste*. Come $3 + \sqrt{-1} + 3 - \sqrt{-1} = 6$, la somma 6 è reale. Reale è anche la differenza $5 - 3 - \sqrt{-1} - 3 + \sqrt{-1} = -1$.

205. Ogni equazione del secondo grado si suol rappresentare con questa formola $x^2 - px = q$, in cui p e q esprimono qualunque quantità positive o negative.

Onde subito si conchiude $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

Su di ciò posson farsi alcune difficoltà. 1.^o Per qual ragione $x - \frac{p}{2}$ è egual alla radice negativa $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$?

Due quadrati uguali devon dare radici uguali e collo stesso segno: se $4 = 4$, non sarà $2 = -2$. 2.^o Tan-

to $x - \frac{p}{2}$, quanto $\frac{p}{2} - x$ sono radici dello stesso quadrato $x^2 - px + \frac{p^2}{4}$; onde sembra che debbasi scrive-

re $\pm x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

Que.

Queste difficoltà si sciolgono facilmente, se si osserva che quell'ultima equazione può risolversi nelle quattro seguenti.

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$x - \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$\frac{p}{2} - x = -\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

Le ultime equazioni convengono intieramente colle prime; onde è sufficiente metter il doppio segno $\pm$ in una parte dell'equazione generale, come suol praticarsi.

Si può inoltre stabilir la risoluzione dell'equazione così: La radice quadrata dell'equazione $x^2 - px + \frac{p^2}{4}$ è $x - \frac{p}{2}$, se $x > \frac{p}{2}$; e può essere $\frac{p}{2} - x$, se $x < \frac{p}{2}$. Nel primo caso si avrà $x - \frac{p}{2} =$

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}; \text{ e nel 2.º sarà } \frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Quelli dunque son i due casi distintamente espressi, i quali

i quali col dop io segno $+$ son implicitamente ed ofcu-
ramente enunciati nella formola generale $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

Se si avesse $x^2 + px = q$, si troverebbe allo-
ra secondo il precedente ragionamento, $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

$\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, cioè la sola radice positiva; della radi-
ce negativa, o falsa non si saprebbe che farne, poi-
ché ella non risolve punto il problema. Frattanto si
avrebbe la radice negativa, se si avesse quest'altra e-
quazione $x^2 - px = q$, perchè la radice sarebbe

$$\frac{p}{2} \pm x, \text{ o } x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Questo è dunque il metodo per distinguere le ra-
dici positive necessarie dalle inutili, le vere dalle
falle.

206. Le radici d' un' equazione son i differenti va-
lori d' un' incognita. Sembra dunque che un problema
debba aver tante soluzioni, quante radici ha un' equa-
zione. Ciò è vero in un certo senso, ma richiede di-
lucidazione.

1.° Si trovi un numero x , il di cui quadrato più
15 sia ugual a 8 volte il numero cercato. Cioè

$$\begin{aligned} \text{sia } x^2 + 15 &= 8x \\ x^2 - 8x &= -15 \\ x^2 - 8x + 16 &= 16 - 15 = 1 \\ x - 4 &= \pm \sqrt{1} \\ x &= \pm \sqrt{1} + 4 \end{aligned}$$

Que.

Questa equazione ha due radici reali e positive, $x = 3$, $x = 5$. Infatti il quadrato di 3 ch' è 9, accresciuto di 15 $= 24 = 3 \times 8$; ed il quadrato di 5 che è 25 accresciuto di 15 $= 40 = 5 \times 8$.

Onde ciascuna delle due radici dell'equazione scioglie in questo caso il problema, senza niente cambiar il suo enunciato.

Vi son dunque de' casi, ne' quali tutte le radici dell'equazione risolvono il problema nel senso il più immediato, come il suo enunciato presenta.

2.^o Si trovi un numero x minore di 1, ma tale che il quadrato $1 - x = \frac{1}{4}$; o $1 - x = \frac{1}{4}$.

Fatte le prescritte operazioni, si avrà $x = \frac{3}{4}$, e $x = \frac{1}{4}$.

Ecco due radici reali e positive. Frattanto non vi è che la radice $x = \frac{1}{4}$ che propriamente adempia il problema, perchè il quadrato di $\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Ma l'altra radice $\frac{3}{4}$ non risolve il problema, poichè il quadrato di $\frac{3}{4}$ è $\frac{9}{16}$, e non già $\frac{1}{4}$. Come dunque scappa fuori questa radice $\frac{3}{4}$ reale e positiva ma inutile?

Ella farebbe utile, se il problema fosse proposto in quest'altra maniera: Trovar un numero x maggiore di

1, e tale che $x - 1 = \frac{1}{4}$.

Si avrebbe la stessa equazione trovata nel problema antecedente. Poichè $x - 1 = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{1}{4} \\ x^2 - 2x + 1 &= \frac{1}{4} \\ x^2 - 2x &= \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \\ x^2 - 2x + 1 &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ x - 1 &= \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x = +\frac{1}{2} + 1, x = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{2}$$

Qui

Qui la radice $\frac{1}{2}$ è il vero valore dell' incognita x , perchè $\frac{1}{2} > 1$ ed il quadrato di $\frac{1}{2}$ — $1 = \frac{1}{4}$.

Il primo di questi due problemi, esige $x = \frac{1}{2}$, ed il secondo $x = \frac{3}{2}$.

Dunque sebben le radici d' un' equazione sien tutte due reali e positive, non ne siegue ch' elle risolvano tutte esattamente, e rigorosamente il problema; ma elle lo risolvono col presentarlo in due sensi differenti, de' quali l' Algebra non può esprimere la differenza. L' enunciato dovrebbe esser nel caso presente così: *Trovar una grandezza x tale che sottraendo l' unità dalla grandezza x , il quadrato del resto sia uguale a $\frac{1}{4}$.*

3.° Si trovi un numero x tale che sottraendone l' unità, il quadrato del resto sia uguale a 4, cioè

$$\text{---} - 2$$

$$x \text{ ---} 1 = 4$$

$$x^2 \text{ ---} 2x + 1 = 4$$

$$x^2 \text{ ---} 2x = 4 - 1 = 3$$

Terminate le necessarie operazioni, si avran queste due radici $x = 3$, $x = -1$. La prima $x = 3$, che è reale e positiva risolve la quistione proposta, ma l'altra $x = -1$ non la risolve punto. Ella però la risolverebbe, se si proponesse il problema in in quest' altra guisa: *Trovar un numero x , cui aggiugnendo 1, il quadrato della somma sia uguale a 4.* Qui aggiunger e somma è invece di sottrarre e

di resto nell' altro problema. In fatti $x + 1 = 4$ dà per radici $x = 1$, $x = -3$, che sono precisamente le stesse radici dell' equazione precedente prese con segni contrarij.

Donde si vede, che le radici negative soddisfano il problema non come è proposto, ma con farvi de' leggieri cambiamenti, i quali consiston in aggiungere quel che dovea sottrarsi, ed in sottrarre quel che si avea da aggiungere. Il segno che precede queste radici

dieci indica una falsa supposizione ch'è stata fatta nell'enunciato, di *addizione* in vece di *sottrazione* &c.; e questo segno — raddrizza questa falsa supposizione.

Eccone un esempio ben palpabile. Si trovi un numero x che aggiunto a 20, dia la somma ugual a 10. $x + 20 = 10$ diviene $x = 10 - 20$, o $x = -10$.

Questo $x = -10$ significa, che bisognava enunciar la quistione in quest'altro modo: *Trovar un numero x che sottratto da 20, il resto sia ugual a 10.*

4°. Se si propone questo problema: *Trovar un numero x che unito con 1, il quadrato del tutto sia ugual ad $\frac{1}{4}$* ; cioè $x + 1 = \frac{1}{4}$.

Le radici faranno $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$. Ecco due radici negative, che indicano che bisognava enunciar il problema in quest'altra guisa: *Trovar un numero x da cui sottratto 1, il resto sia ugual a $\frac{1}{4}$.* Questo è precisamente il caso del numero 1°. in cui le radici sono le stesse che qui con i segni contrari).

5°. Tutto ciò dunque prova, che le radici negative indicano false supposizioni fatte nell'enunciato, e che il calcolo raddrizza. Perciò le radici negative sono state da molti Autori chiamate *false*, e le radici positive *vere*, perchè le prime non soddisfano che un falso enunciato del problema.

Quando tutte le radici son negative, come nel caso precedente, l'inconveniente è leggiero: indicano che il problema avea un falso enunciato. Si raddrizzi l'enunciato, e tutte le radici diverranno positive.

Ma quando elle sono in parte positive, ed in parte negative, l'inconveniente è maggiore. Indican allora, che l'enunciato del problema è in parte vero, ed in parte falso; frammischiano, nostro mal grado, una quistione straniera colla quistione proposta, senza che sia possibile separarle, neppure col rettificare l'enunciato; perchè col cambiar nell'enunciato le parole *aggiugner e somma* in *sottrarre e resto*, la radice ne-

gativa divien bensì positiva, ma la positiva divien negativa; e si resta sempre nello stesso imbarazzo, senza poter mai ridurre la quistione ad un enunciato che dia solamente radici reali e positive.

Dunque queste radici negative, se sono una ricchezza, come ha sembrato a molti Algebristi, son una ricchezza imbarazzante.

6°. Se si propone trovar un numero x , che $x + 1 = -4$ avrebbero le radici $x = -1 + \sqrt{-4}$ e $x = -1 - \sqrt{-4}$.

Valori *immaginarj* indicanti che l'enunciato del problema è assurdo, e ch'è impossibil a risolversi.

Ma perchè due radici immaginarie? Una sola non basterebbe forse per avvertire l'assurdità? Si risponde, che le due immaginarie avvertono, che la quistione è assurda non solamente nel suo enunciato, ma anche in qualunque altro enunciato, che se gli sostituisse. Poichè se invece di $x + 1$ si mette $x - 1$, o

$1 - x$, tanto $x - 1 = -4$, come $1 - x = -4$, dà sempre le radici $x = 1 + \sqrt{-4}$, e $x = 1 - \sqrt{-4}$, radici sempre immaginarie, che danno un'impossibile soluzione.

7°. Sicchè quando un'equazione ha tutte le radici *negative*, o *false*, ciò indica che il problema è impossibile nel senso diretto, ma non in un altro senso. Ma quando l'equazione ha tutte le radici *immaginarie*, questo è un indizio che il problema è impossibile in qualunque senso si presenta. Lorchè le radici son *reali* ed *incommensurabili*, ciò indica che il problema non ha soluzione numerica esatta, ma che si può trovar un numero che si avvicini più che si vorrà alle condizioni proposte.

Dunque le radici negative, immaginarie, incommensurabili disegnano differenti specie d'impossibilità nella

nella soluzione, ma impossibilità più o meno intiere, più o meno assolute.

Delle Quantità Negative.

207. Ora si può aver un'idea chiara delle quantità negative.

A'cuni riguardano queste quantità come *meno del niente*, nozione intieramente assurda. Altri le ravvisano *esprimenti debiti*; nozione troppo limitata, ed in conseguenza poco esatta. Altri le considerano come quantità che *devon esser prese in un senso contrario alle quantità positive*: nozione anche questa soggetta a molte eccezioni, poichè gli esempj fan vedere, che le quantità rappresentate col segno negativo devon talvolta esser prese nello stesso senso come le quantità caratterizzate col segno positivo.

Che cosa dunque sono le quantità negative? Convien distinguerne di due sorti.

1°. Le prime indicano una falsa supposizione, ch'è stata fatta nell'enunciato del problema: supposizione raddrizzata dalla soluzione. Se si domanda *un numero che aggiunto a 20 faccia 15*, si troverà 5 col segno negativo. Il che mostra, che si avrebbe dovuto proporre il problema in quest'altra maniera: *trovar un numero che sottratto (e non aggiunto), da 20, il resto sia ugual a 5*. Le quantità negative di questa specie mostran la generalità e'l vantaggio del calcolo Algebrico, il quale raddrizza, per così dire, il calcolatore partendo dalla supposizione stessa che avrebbe dovuto smarrirlo.

2°. La seconda specie delle quantità negative s'incontra principalmente ne' problemi, ove il risultato del calcolo sembra presentare molte soluzioni. Le quantità negative allora indicano soluzioni del medesimo problema, ravvisato in un punto di vista un po differente dal supposto nell'enunciato, ma sempre analogo al primo senso. Le quantità negative di questa seconda specie mostran da una parte la ricchezza dell'

dell'Algebra, che fa trovar nella soluzione del problema fin e cose che non si domandano; ma nel tempo stesso l'imperfezione del calcolo, il quale nel dare quel che non si cerca, non dà sempre quel che gli si domanda con tutta l'esattezza. Accade spesso ne' problemi Algebraici, che di quante soluzioni dà il calcolo, non ve ne sia che una sola possibile nel senso proposto, ma questa soluzione è sovente incorporata ed amalgamata con molte altre soluzioni di problemi analoghi ma differenti: onde tutte queste altre soluzioni involupando e mascherando la prima la rendono difficil a scoprirsi.

Problemi del 2.^o Grado.

1.^o Probl. *Trovar sopra la data linea, che unisce due lumi qualunque, il punto in cui questi due lumi illuminino ugualmente:* supponendo il noto principio di Fisica, che l'effetto d'un lume è in ragion inversa de' quadrati della distanza.

La distanza tra i due lumi sia a , il rapporto del lume minore al lume maggiore sia come m ad n , ed x sia la distanza tra il minor lume ed il punto richiesto. E' chiaro, che $a - x$ sarà la distanza tra l'altro lume e lo stesso punto, e che i quadrati di queste distanze saranno x^2 , e $x^2 - 2ax + a^2$.

Or si è già supposto, che gli effetti, o intensità della luce, son in ragion inversa de' quadrati delle di-

stanze, dunque le intensità di questi lumi faranno $\frac{1}{x^2}$,

e $\frac{1}{x^2 - 2ax + a^2}$. Ma questi lumi son in ragione di m

ad n , dunque i lor effetti sono tra loro come $\frac{m}{x^2}$

$\frac{1}{x^2 - 2ax + a^2}$ dunque si ha questa equazione

mol-

$$\frac{m}{x^2} = \frac{n}{x^2 - 2ax + a^2}$$

moltiplicando, $mx^2 - 2amx + a^2m = nx^2$
 trasferendo $nx^2 - mx^2 + 2amx = a^2m$

ovvero $x^2 \times n - m + 2amx = a^2m$
 $2amx \quad a^2m$

dividendo $x^2 + \frac{2amx}{n-m} = \frac{a^2m}{n-m}$

aggiungendo il qua- $2amx \quad a^2m^2 \quad a^2m$
 drato della metà del $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{a^2m^2}{n-m^2} = \frac{a^2m}{n-m} +$
 coefficiente del se- $n-m \quad n-m^2 \quad n-m$
 condo termine ; e $a^2m^2 - a^2mn$
 riducendo ad uno $=$
 stesso denominatore $n-m^2 \quad n-m^2$

estraendo la radice $x + \frac{am}{n-m} = \pm \sqrt{\frac{a^2mn}{n-m^2}}$

trasponendo $x = -\frac{am}{n-m} \pm \sqrt{\frac{a^2mn}{n-m^2}}$

estraendo $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m} \sqrt{mn}$

formola delle due $x = \frac{a}{n-m} \times -m \pm \sqrt{m}$
 radici.

E' chiaro che di queste due radici una ha valor po-
 sitivo, e l'altra negativo; perchè se $\sqrt{mn}$ si pren-
 de col segno $-$, tutta la quantità divien negativa;
 se poi $\sqrt{mn}$ si prende col segno $+$, la quantità $-m$
 $+$

Problema 3°.

Trovar un numero, cui aggiungendo la radice quadrata del suo prodotto per 10, sia ugual a 20.

Risposta. 10.

Problema 4°.

Data la somma 6 di due numeri, e la somma 20 de' loro quadrati: Qual sarà ciascuno di questi numeri?

Risposta. Il maggior $= 4$, il minore $= 2$.

Problema 5°.

Trovar due numeri, de' quali il prodotto sia 12, e la differenza de' loro quadrati sia 7.

Risposta. L'uno sarà 4, e l'altro 3.

Dell'Equazioni di differenti Gradi.

208. Per regular il calcolo dell'equazioni di qualunque grado, si usa mettere nel primo membro tutti i termini secondo l'ordine decrescente degli esponenti dell'incognita, e nell'altro membro si mette zero. Ciò si dice *ordinar un'equazione*, come $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x - 258 = 0$.

E' un' *equazione compita*, o che ha tutti i suoi termini, quella in cui l'ordine decrescente degli esponenti dell'incognita è secondo la serie naturale de' numeri senza interruzione, e che inoltre ha un termine composto di quantità tutte cognite, com'è l'equazione precedente.

Onde un' *equazione compita* deve aver un termine di più di quel che sieno le unità nel più grande esponente dell'incognita. Dunque un' equazione compita del 4° grado deve aver 5 termini.

209. I termini d'un'equazione prendon il loro nome

me dall'ordine in cui si devon trovare, supponendo l'equazione *compita ed ordinata*.

Onde si chiama primo termine quello in cui l'incognita ha il maggior esponente; secondo termine quello in cui l'esponente dell'incognita è più piccolo d'una unità &c.; finalmente ultimo termine quello che non contien alcuna incognita.

Se vi è qualche interruzione nella progressione de' crescente delle potenze dell'incognita, l'equazione è *incompleta*; e quando si dice che vi mancan tali termini, s'intendon quelli che dovrebbero esser ne' luoghi, ove è l'interruzione, ed i termini mancanti si suppliscono cogli asterismi. Come $x^5 - 3x^3 + x^2 - 6 = 0$ è un'equazione *incompleta*, perchè vi manca il 2°. e 5°. termine.

210. Un'equazione che non ha l'ultimo termine è d'un grado inferior a quello che apparisce. Così $x^3 - ax^2 + bx = 0$, è del secondo grado, perchè dividendo tutti i termini per x , diviene $x^2 - ax + b = 0$.

Nella stessa guisa $x^4 + a^2 x^2 = a^4$, che pare del 4°. grado, è un'equazione del 2°, perchè facendo $x^2 = az$, diviene $a^2 z^2 + a^2 z = a^4$, ovvero $z^2 + az = a^2$. Questo è quel che si chiama *abbassamento*.

211. Un'equazione ha tante radici, quante unità vi sono nel numero che n'esprime il grado. Onde un'equazione del 3°. grado ha tre radici, quella del 4°. quattro radici &c. La ragion è manifesta, poichè un'equazione composta è il prodotto di tante equazioni del primo grado, quante unità vi sono nel più grande esponente dell'incognita dell'equazione composta.

212. In un'equazione ordinata e compita, le radici positive son tante, quante sono le permutazioni de' segni; e le radici negative son tante, quante le successioni de' segni. Così nell'equazione $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, essendo due permutazioni di segni $+$ $-$, e $-$ $+$, ed una successione $-$ $-$, delle tre radici due son positive, ed una negativa.

213. Se nell'equazione manca un termine, è manifesto, che tutte le radici non hanno lo stesso segno;

poichè il coefficiente di questo termine non ha potuto esser distrutto, se non perchè essendo formato della somma di molti prodotti, se ne son trovati de' negativi che han fatto svanir i positivi: il che non ha potuto accadere, se non a causa che le quantità formanti questi prodotti, avean segni differenti.

Equazioni del 3°. Grado.

214. Se l'equazione è compita, come $y^3 - 3y^2 - y + 8 = 0$, convien fare svanire il 2°. termine $- 3y^2$, poichè allora il restante $y^3 - y + 8 = 0$ è più facile a ridursi.

1°. Per fare svanir il 2°. termine, convien servirsi di questa regola generale: *Se in un'equazione superiore, il 2°. termine è positivo, si aumenti la radice y; e se il 2°. termine è negativo, si diminuisca la radice y di una quantità frazionaria, che abbia per numeratore il coefficiente del 2°. termine, e per denominatore l'esponente del 1°. termine dell'equazione data.* In questa guisa si ha un'equazione trasformata, in cui il 2°. termine è svanito.

Così nell'esempio proposto si diminuisca la radice y della quantità $\frac{3}{1}$, cioè sia $y - \frac{3}{1} = x$, ovvero $y = x + \frac{3}{1}$.

2°. Si cerchi il nuovo valore dell'equazione $y^3 - 3y^2 - y + 8 = 0$, supponendo $y = x + \frac{3}{1}$. Le operazioni daranno il seguente risultato.

$$\begin{array}{r}
 y^3 = x^3 + 3x^2 + 64x + 512 \\
 - 3y^2 = - 3x^2 - 128x - 512 \\
 - y = - x - \frac{9}{1} \\
 + 8 = + 8 \\
 \hline
 \text{Somma } y^3 - 3y^2 - y + 8 = x^3 - 67x - \frac{820}{1} \text{ equa-} \\
 \text{zione trasformata.}
 \end{array}$$

3°. Per

3°. Per isciogliere questa *trasformata* $x' = \frac{67x}{880}$
 $\frac{880}{27} = 0$, si faccia $\frac{67}{3} = p$, e $\frac{880}{27} = q$: la
 precedente equazione sarà convertita in quest'altra
 $x' - px - q = 0$; dunque trasportando, sarà $x' = px + q$.

4°. Si faccia indi $x = u + z$; e si cerchi qual sa-
 rà in questa ipotesi il nuovo valore dell'equazione $x' = px + q$. Sarà questo $u' + 3u^2z + 3z^2u + z^3 = pu + pz + q$.

5°. Si faccia $3u^2z + 3z^2u = pu + pz$. Dun-
 que dividendo tutto per $u + z$, si avrà $3uz = p$,
 e $z = \frac{p}{3u}$.

6°. Ma se nell'equazione $u' + 3u^2z + 3z^2u + z^3 = pu + pz + q$ si è fatto $3u^2z + 3z^2u = pu + pz$,
 farà dunque $u' + z^3 = q$. Ma $z = \frac{p}{3u}$, dun-
 que $u' + \frac{p^3}{27u^3} = q$.

Dunque moltiplicando tutto per u^3 , si avrà $u^6 + \frac{p^3}{27} = u^3q$,
 la qual è un'equazione del 3°. grado;
 perchè è la stessa che $u^6 - qu^3 = -\frac{p^3}{27}$
 ed aggiungendo il quadrato della metà del coefficien-
 te q del 2°. termine, sarà $u^6 - qu^3 + \frac{q^2}{4} = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$
 ed estraendo la radice quadrata $u^3 = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$

$$q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2 - \frac{p^3}{27}}$$

H Dun.

Dunque

$$u^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}$$

Ed estraendo la radice cubica, sarà

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}$$

$$7.^{\circ} z = \frac{p}{3u} \text{ (5}^{\circ}\text{)}, \text{ dunque } z = \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}}$$

$$\text{ovvero } z = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}}$$

$$8.^{\circ} \text{ Per provare che } \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}, \text{ eccone il metodo.}$$

$$\text{Il cubo di } \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}} \text{ è}$$

$$\frac{1}{8}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}. \text{ Similmente il cubo di } \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}} \text{ è } \frac{1}{8}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}.$$

$$\text{Il prodotto del cubo } \frac{1}{8}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}} \text{ per il cubo } \frac{1}{8}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}} \text{ è } \frac{1}{8}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}, \text{ perchè } + \frac{1}{8}q \times + \frac{1}{8}q \text{ dà un prodotto che distrugge } + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}} \times -$$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3}$: Onde resta il prodotto di $-\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3}$
 $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3} = \frac{1}{3}p$. Dunque il prodotto
 del cubo $\frac{1}{4}q \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3}$ per il cubo $\frac{1}{4}q -$
 $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3}$ è $\frac{1}{27}p^3$: Dunque $\frac{1}{3}p$ è il pro-
 dotto delle due radici cubiche di quelli due cubi;
 dunque $\frac{1}{3}p$ è il prodotto di $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3}$
 per $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3}$.

Or se si divide il prodotto per il moltiplicando, si
 ha per quoziente il moltiplicatore;

$\frac{1}{3}p$

dunque $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3} =$
 $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3}$; dunque (num. 5°.) $2 =$
 $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3}$.
 9°. $x = u + z$ (num. 4°.) dunque $x =$
 $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}q} -$
 $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3}$.

10°. Per aver in numeri il valore di x , suppongasi
 $q = 40$, e $p = 6$: farà $\frac{1}{4}q = 10$, $\frac{1}{4}q^3 = 400$, $\frac{1}{27}$
 $p = 2$, e $\frac{1}{27}p^3 = 8$. Dunque $\sqrt[3]{\frac{1}{4}q^3 - \frac{1}{27}p^3} =$
 $\sqrt[3]{400 - 8} = \sqrt[3]{392} = 14 \sqrt[3]{2} \text{ (135)}$

Dunque il cubo $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q} \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q} \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p} = 20 +$
 $14 \sqrt{2}$; dunque $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p} =$
 $\sqrt[3]{20 + 14 \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}.$

Dunque $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p} = 2 -$
 $\sqrt{2}.$ Dunque $x = 4.$

11°. Trovato il valore di x , si riprende l'equazione $y' - 8y^2 - y + 8 = 0$, e convien ricordarsi che $y = x + \frac{8}{3}$, e poichè x è cognita, lo farà anche y .

12°. Se si ha bisogno di tutte le radici dell'equazione $y' - 8y^2 - y + 8 = 0$, si abbassi (210) questa equazione di un grado per mezzo della radice trovata, e per ridurla si adoprinò le regole solite a praticarsi nelle operazioni dell'equazioni del 2°. grado.

215. Dunque in un'equazione del 3°. grado, dopo svanito il 2°. termine, la formola generale è $x' - px - q = 0.$

Se si avesse avuta l'equazione $x' + px - q = 0$, si avrebbe trovato collo stesso metodo $x =$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}p} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}p}.$$

Finalmente se si avesse avuta l'equazione $x' - px + q = 0$, si avrebbe avuto colla stessa facilità $x =$

$$= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}.$$

Ma quì è dove s'incontrano de le radici, immaginarie e s'inciampa nel Caso irriduttibile.

Caso Irriduttibile.

216. Questo caso è quello, in cui un'equazione del 3.^o grado ha le sue radici reali, inuguali ed incommensurabili. In questo caso se si risolve l'equazione col metodo ordinario, la radice benchè reale, si presenta sotto una forma che racchiude quantità immaginarie; e non si ha potuto finora dopo duecent'anni di studio ridurre questa espressione ad una forma reale collo scacciar via le immaginarie ch'ella contiene.

Sia $x^3 + qx + r = 0$, in cui è svanito il secondo termine. Per risolverla

1.^o Si faccia $x = y + z$. Si avrà $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$. Ma siccome $3y^2z + 3yz^2 = 3yz \times y + z = x$, farà $3y^2z + 3yz^2 = 3yzx$. Dunque $x^3 = y^3 + 3yzx + z^3$, ovvero $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$.

2.^o Paragonando i termini di questa equazione $x^3 + qx + r = 0$, si avrà $-3yz = q$, ovvero $z = -\frac{q}{3y}$, o sia $y^3 + z^3 = -\frac{r}{27y^3}$, o sia $y^3 + r = -\frac{q^3}{27y^3}$.

3.^o Questa equazione, che si può riguardare come di 2.^o grado (210), risolvendosi nella forma ordinaria,

dà $y^3 = -\frac{r}{27} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$. Dunque a causa di

$x^3 = -\frac{r}{27} - y^3$, si avrà $z^3 = -\frac{r}{27} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$.
Dunq.

Dunque x , o $y + z = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}}$

Tal è la forma del valore x .

Ciò posto, ne siegue.

1.° Se q è positivo, questa forma è reale, e non vi è difficoltà alcuna.

2.° Se q è negativo, e $\frac{r^2}{4} > \frac{q^3}{27}$, non vi è nemmeno difficoltà.

3.° Se q è negativo, e $\frac{r^2}{4} < \frac{q^3}{27}$, neppure vi è difficoltà alcuna.

4.° Ma se q è negativo, e $\frac{r^2}{4} < \frac{q^3}{27}$, allora è la gran difficoltà, perchè $-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}$ è una quantità nega-

tiva, e per conseguenza $\sqrt[3]{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$ è immaginaria.

Come dunque si rappresenterà x ?

M.^r Nicole è stato il primo a risolvere questa difficoltà, col ridurre la quantità $\sqrt[3]{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$ in serie, dove benchè vi sieno dell'immaginarie si contien una quantità reale. Ma la difficoltà consiste a sommar le serie: difficoltà che non è ancora formontata.

L'in-

L'inconveniente del *Caso Irreducibile* vien dal metodo imperfetto ufato finora per risolvere l'equazioni del 3.^o grado. L'imperfezione consiste nel supporre $x = y + z$, e nel paragonare l'equazione $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = 0$, a quell'altra equazione $x^3 + px + r = 0$, dal qual paragone si vuol ricavare che $qx = -3yz$, il che porta al *caso irreducibile*: Mentre che l'equazione $x = y + z$ non dà rigorosamente che questa equazione $qx + r = -3yzx - y^3 - z^3$, ovvero $qy + qz + r = -3y^2z - 3yz^2 - y^3 - z^3$.

Equazioni del 4.^o Grado.

217. Sia questa equazione compita $y^4 + ay^2 + by + cy + d = 0$.

1.^o Si deve fare svanir il 2.^o termine $+ay^2$, facendo $y = z - \frac{1}{4}a$ (214 1.^o) Onde la predetta equazione diviene $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, riflettendosi che li p, q, r son invece degli a, b, c, d alterati dall'operazione.

2.^o Per risolvere la trasformata $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, il più semplice espediente è riguardarla come il prodotto di due equazioni del 2.^o grado. Suppongasi che una delle due equazioni produttrici sia $z^2 + xz + t = 0$. E' evidente, che l'altra dovrà avere per 2.^o termine $-xz$, perchè il prodotto di queste due equazioni deve dar un'equazione priva del 2.^o termine. Sia dunque questa 2.^a equazione $z^2 - xz + s = 0$.

Il loro prodotto farà $z^4 + sz^2 + sxz + ts = 0$.

$$\begin{aligned} & - x^2 - tx \\ & + t \end{aligned}$$

3.^o Or paragonando questa ultima equazione colla trasformata, si avrà $s - x^2 + t = p$; $sx - tx = q$; $ts = r$.

4.^o Per far uso di queste tre equazioni, si moltiplichino per x la prima $s - x^2 + t = p$, si avrà $sx - x^3 + tx = px$, e si unisca questa alla 2.^a $sx - tx = q$; si avrà

avrà $2sx - x^2 = px + q$, ovvero $s = \frac{q + px + x^2}{2x}$.

5.° Questo valore di s si sostituisca alla 3.^a equazione (n.° 3.°) $ts = r$, si avrà $t \times \frac{q + px + x^2}{2x} = r$,

ovvero $t = \frac{2rx}{x^2 + px + q}$.

6.° Or mettendo questi due valori di s e di t nella 2.^a equazione (num. 3.°) $sx - tx = q$, si avrà final-

mente $\frac{x^2 + px + q}{2} - \frac{2rx^2}{x^2 + px + q} = q$; e facendone svanir i denominatori, si avrà $x^4 + 2px^2 + p^2x^2 - q^2 = 0$.

7.° Questa equazione del 6.° grado si abbassa (210) ad una del 3.°, facendo $x^2 = u - \frac{2}{3}p$, e diviene $u^3 + \frac{2}{3}p^2u - 4ru + \frac{8}{3}pr + \frac{1}{3}p^3 + q^2 = 0$.

Dunque tutta la difficoltà dell'equazione del 4.° grado si riduce a quella del 3.°

8.° Risolta l'equazione del 3.° grado $u^3 + \frac{2}{3}p^2u - 4ru + \frac{8}{3}pr + \frac{1}{3}p^3 + q^2 = 0$, e trovato il valore di u o sia di x , si sostituisca nell'equazioni $z^2 - xz + s = 0$, e $z^2 - xz + t = 0$ (n.° 2.°); o piuttosto

nell'equazioni $z^2 - xz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x} = 0$, e z^2

$+ xz + \frac{2r}{x^2 + p + \frac{x}{q}} = 0$.

9.° Risolte queste due ultime equazioni, e sostituito il valore di x nelle radici $z = \frac{1}{2}x +$

$\sqrt{-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$, e $z = -\frac{1}{2}x +$

fi

$$V \frac{2r}{x^2 + p + \frac{q}{x}} + \frac{1}{2} x^2, \text{ si avranno così le quattro}$$

radici cercate dell'equazione $z^4 + pz^3 + qz + r = 0$,
e con ciò quelle dell'equazione proposta $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$.

Applicazione.

218. Sia l'equazione $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 218y + 144 = 0$.

Facendo $y = z - 4$, la predetta equazione si cambierà in quest'altra $z^4 + 3z^3 - 52z + 48 = 0$, in cui è svanito il 2.^o termine.

Ora si paragoni questa 2.^a equazione colla generale $z^4 + pz^3 + qz + r = 0$, e si avrà $p = 3$; $q = -52$; $r = 48$.

Considerandosi questa equazione generale come prodotta dalle due equazioni $z^2 + zx + t = 0$, e $z^2 - zx + s = 0$, e facendo le operazioni indicate (217. num. 4.^o e seg.), si avrà la ridotta $x^6 + 6x^4 - 183x^2 - 2704 = 0$.

Questa ridotta del 6.^o grado si abbassa ad un'equazione del 3.^o, facendo $x^2 = u - 2$; e si avrà $u^3 - 195u - 2322 = 0$.

Risolviendo quest'equazione del 3.^o grado (214), si

$$\text{avrà } u = \sqrt[3]{1161 + \sqrt{1073296}} - \sqrt[3]{-1161 + \sqrt{1073296}} = \sqrt[3]{1161 + 1036} - \sqrt[3]{-1161 + 1036} = \sqrt[3]{2197} + \sqrt[3]{-125}$$

$= 13$. Ma siccome $x^2 = u - 2$, farà $x = \sqrt{u - 2}$, ed

in conseguenza $x = \sqrt{13 - 2} = 4$.

Non resta ora da far altro che sostituire il valore di

$$x \text{ alle radici } z = +\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}x^2 - \frac{p}{2} + \frac{q}{2x}}, \text{ ond' e}$$

farà

farà $z = +2 + \sqrt{-4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Dunque sono le due radici reali di $z = 2 + 1$, cioè 3, 01; e le due radici immaginarie sono $z = -2 + \sqrt{-12}$, o $z = -2 + \sqrt{-12}$.

Sostituendo ora questi quattro valori in $y = z' - 4$, si avrà per le quattro radici dell'equazione proposta $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$, $y = -1$, $y = -3$, $y = -6 + \sqrt{-12}$.

219. Da quanto è stato esposto si vede, che finora non si ha soluzione compita che del secondo grado.

L'equazioni del 3.^o grado cadono spesso nel caso irriducibile; perchè se un'equazione del 3.^o grado ha una radice reale commensurabile, questa radice commensurabile si presenta sotto una forma incommensurabile, e ci vuol della fatica per liberarla da questa forma. L'equazioni del 4.^o grado si riducono al 3.^o, e sono per conseguenza soggette agli stessi inconvenienti. Passato il quarto grado non vi è più metodo nemmeno imperfetto e troncato per ridurre l'equazioni.

Riflessioni.

220. Ora si conosce bene che cosa è Analisi Matematica. Se l'Algebra è la Scienza del calcolo delle grandezze in generale, l'Analisi è il mezzo d'impiegare l'Algebra alla soluzione de' problemi. Tutte due forman un' *Aritmetica Universale*, che può ridursi alle due regole seguenti.

Prima Regola. Proposto un problema geometrico o numerico, si paragonino insieme le quantità cognite ed incognite rinchiuse in questo problema; e senza distinguere le une dall'altre, si esamini come tutte queste quantità dipendono le une dall'altre; e quali son quelle, che essendo cognite, faran conoscere l'altre, procedendo con un metodo sintetico.

Secon-

Seconda Regola. Tra queste quantità che fanno conoscere l'altre, e che perciò si chiaman sintetiche, si cerchino quelle che faran conoscere l'altre più facilmente, e che potrebbero esser trovate più difficilmente se non si supponessero cognite; e si riguardino, e si trattino queste quantità come cognite.

221. Su ciò è fondata la regola de' Geometri, i quali dicono, che per risolvere un problema algebricamente, bisogna supporlo risoluto. Infatti per risolvere un problema, convien rappresentarsi tutte le grandezze sì cognite che incognite come quantità che si hanno avanti gli occhi, e che dipendono tutte le une dall'altre, in maniera che le cognite e le incognite possano reciprocamente ed a vicenda esser trattate, se si vuole, da cognite e da incognite.

222. L'uso che l'*Analisi Matematica* fa dell'*Algebra*, per trovar le incognite per mezzo delle cognite, è che la distingue dall'*Analisi Logica*; la quale non è altro in generale che l'*Arte di scoprire l'incognito per mezzo del cognito*. Ogni Algebrista si serve dell'*Analisi Logica*, per incominciar e condurre il calcolo: ma nello stesso tempo il soccorso dell'*Algebra* facilita estremamente l'applicazione di quest'*Analisi* alla soluzione de' problemi.

223. L'*Analisi* è l'istrumento o il mezzo generale, per cui si son fatte da due secoli in quà sì belle scoperte nelle Matematiche. L'*Analisi* dà gli esempj i più perfetti della maniera come si deve impiegar l'arte del ragionamento; dà allo spirito una maravigliosa prontezza per iscoprire le cose incognite per mezzo d'un picciol numero di date; ed impiegando segni abbreviati e facili per esprimer le idee, ella presenta all'intendimento cose, che altrimenti sembrerebbero esser fuori della sua sfera.

Con questo mezzo le dimostrazioni Geometriche possono esser singolarmente abbreviate. Una lunga serie d'argomenti, dove lo spirito non potrebbe senza l'ultimo sforzo d'attenzione scoprir il legame dell'idee, è convertito in segni sensibili, e le diverse combinazio-
ni

ni che vi son richieste, son effettuate dalla combinazione di questi segni.

Ma quel ch'è ancora più straordinario, si è, che per mezzo di quest'arte un gran numero di verità sono sovente espresse da una sola linea; laddove se si seguitasse la maniera ordinaria di spiegare e di dimostrare, queste verità riempirebbero volumi intieri. Così col solo studio di una linea di calcoplo si posson apprendere in poco tempo scienze intiere da non poterli altrimenti apprendere appena in molti anni.

224. L'Analisi è divisa riguardo al suo oggetto, in *Analisi di quantità finite*, e in *Analisi di quantità infinite*.

Analisi di quantità finite è quella che si chiama comunemente Algebra, di cui si è trattato finora, e di cui i migliori Autori sono: Nevvton *Arithmetica Universalis*; s' Gravesande *Elementa Algebrae*; P. Reyneau *l'Analyse démontrée e la science du calcul*; Saunderson *Elemens d'Algebre*; Clairaut *Elemens d'Algebre*; Paulini *Institutiones Analyticae*; la Signora Agnelli *Instituzioni Analitiche* &c.

Fra questi ed altri Autori ha grandissimo merito l'Abbè de la Caille nella sua bell'Opera *Leçons Elementaires de Mathematiques*, (1) sul di cui chiaro metodo si son formati questi nostri Elementi di Matematiche, servendoci ancora de' lumi, che il chiarissimo M. d' Alembert ha sparso negli articoli Matematici dell'*Encyclopedie*.

L'Analisi di quantità infinite o degl'infiniti, detta anche la *Nuova Analisi*, è quella che calcola i rapporti delle quantità che si prendono per infinite, o
per

(1) Di questo celebre Autore si sono stampate in Venezia presso Tommaso Bettinelli tutte le Opere in lingua latina, cioè *Lectiones elementares Mathematicae*, *Astronomicae*, *Opticae*, & *Mechanicae*.

per infinitamente picciole. Il gran vantaggio de' Matematici moderni sopra gli Antichi vien principalmente dall'uso che si fa di questa *Analisi*, di cui si andrà a trattar in fine di questa Opera.

G A P I T O L O III.

Delle Proporzioni.

225. **R**agione o Rapporto è il risultato della comparazione scambievole di due quantità.

Chiamasi *Ragione Geometrica*, se in quella relazione si considera quanto una quantità contenga l'altra.

Se poi si riguarda l'eccesso d'una quantità sopra l'altra, dicesi *Ragion Aritmetica*.

In qualsivoglia Ragione il primo de' due termini, che si paragonano, chiamasi *Antecedente*, il secondo *Consequente*.

Esponente della Ragion Geometrica dicesi il quoziente nato dall'antecedente diviso per il *consequente*. Come 2 è l'esponente di 6 a 3.

L'esponente della Ragion Aritmetica è la differenza de' termini, cioè la differenza tra l'antecedente e'l consequente. Come 2 è la differenza tra 7 e 5. Quindi la ragione geometrica si scrive a guisa di frazione $\frac{6}{3}$, e l'aritmetica come sottrazione $7 - 5$.

226. L'uguaglianza di due ragioni forma quel che si chiama *Proporzione*; la quale sarà Geometrica o Aritmetica secondo la qualità delle ragioni.

E' dunque evidente, che in ogni proporzione vi devon esser quattro quantità, delle quali la prima dicesi *esser alla seconda, come la terza alla quarta*. Quindi si vede, che non convien confondere la Ragione colla *Proporzione* come si fa comunemente: son due cose differentissime l'una dall'altra.

227. Se tralle due prime quantità, o termini, vi è la stessa differenza, che vi è fralle due ultime, quelle quantità son *aritmeticamente proporzionali*.

Come 9. 5: 7, 3; questa è la maniera d'esprimere
Elem. di Matem. I la

la proporzione aritmetica ; ovvero $a - b = c - d$.

228. La proporzione geometrica si esprime così $3 : 12 :: 2 : 8$, o $3 : 12 = 2 : 8$, o anche $3 \mid 12 \parallel 2 \mid$;

ovvero $a : b = c : d$, o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Il primo e l'ultimo termine d'una proporzione chiamansi gli *estremi*; il secondo ed il terzo i *mezzi*.

229. Se poi uno stesso termine si prende due volte, in maniera che il conseguente della prima ragione sia antecedente alla seconda, si chiama allora proporzione *continua*. Come $6 : 4 :: 4 : 2$ è una *proporzione Aritmetica continua*, e si scrive così $\div 6 . 4 . 2$, o $\div a . b . c$.

La proporzione *Geometrica continua* è $8 : 4 :: 4 : 2$, e si esprime $\div 8 . 4 . 2$, o $\div a . b . c$.

Il secondo termine della proporzione continua si chiama *mezzo proporzionale*.

230. Lorchè si scrivono di seguito più di due ragioni uguali, si forma quel che si chiama una *serie di quantità proporzionali*: come $7 : 3 :: 9 : 5 :: 11 : 7$ è una serie di quantità aritmeticamente proporzionali. E $3 : 12 :: 2 : 8 :: 5 : 20 :: 7 : 28$ è una serie di quantità geometricamente proporzionali.

Ma se e ragioni, che servono a formar queste serie, son tali, che il conseguente di ciascuna serve d'antecedente alla seguente ragione, la serie si chiama una *Progressione*. Come $3 . 6 : 6 . 9 : 9 . 12 : 12 . 15$ è una *progressione aritmetica*, che per brevità si scrive così $\div 3 . 6 . 9 . 12 . 15$.

Nella stessa maniera $32 : 16 :: 16 : 8 :: 8 : 4 :: 4 : 2$ è una *progressione geometrica*, che si esprime così $\div 32 . 16 . 8 . 4 . 2$.

231. Dunque una *progressione aritmetica* è una *serie di termini che presi consecutivamente, han sempre una stessa differenza*.

Ed una *progressione geometrica* è una *serie di termini, che divisi consecutivamente l'un per l'altro han sempre uno stesso quoziente*.

Proprietà delle Ragioni e Proporzioni Aritmetiche.

232. Ogni rapporto aritmetico può ridursi a questa formola generale $a. a + d$. Vale a dire; il conseguente d'una ragion aritmetica è sempre ugual all'antecedente a più o meno la loro differenza d .

Sia a l'antecedente d'una ragione, e d la differenza, che passa tra lui ed il suo conseguente. Se l'antecedente a è maggiore del suo conseguente, è chiaro che detto conseguente sarà $a - d$. E se l'antecedente è minore del suo conseguente, esso conseguente sarà $a + d$. Dunque in ogni rapporto aritmetico il conseguente è ugual all'antecedente più o meno la loro differenza. Dunque ogni rapporto aritmetico può esser espresso per $a. a + d$.

Nella stessa guisa data una quantità b , e la sua differenza d riguardo un'altra quantità, il rapporto aritmetico tra quelle due quantità sarà $b. b + d$.

233. Onde una proporzione aritmetica può esser espressa così $a. a + d : b. b + d$.

234. Dunque in una proporzione aritmetica la somma degli estremi è ugual alla somma de' mezzi.

E' chiaro, che nella proporzione $a. a + d : b. b + d$, la somma degli estremi $a + b + d$ è la stessa che quella de' mezzi $a + d + b$.

Dunque in qualunque proporzione aritmetica espressa da termini differenti $a. b : c. d$, sempre si avrà l'equazione $a + d = b + c$. E reciprocamente la data equazione può ridursi a proporzione aritmetica $a. b : c. d$.

235. In una proporzione aritmetica continua la somma degli estremi è ugual al doppio del mezzo.

Perchè $a. b. c$ è lo stesso che $a. b : b. c$, dunque $a + c = 2b$.

236. In una proporzione aritmetica è facile trovar

un termine incognito. Sia a, b, c, x , farà $a + x = b + c$, e $x = b + c - a$.

Dunque in una proporzione aritmetica il quarto termine è ugual alla differenza, che passa tra la somma de' mezzi ed il primo termine.

237. Se si cerca un mezzo aritmetico proporzionale tra a e b , si faccia $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Sarà $a + b = 2x$; e

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

Dunque il mezzo proporzional aritmetico è ugual alla metà della somma degli estremi.

Della Progressione Aritmetica.

238. Ogni progressione aritmetica, di cui p sia il primo termine, e d la differenza, può esprimersi così $p, p+d, p+2d, p+3d, p+4d$ &c.

Essendo una progressione aritmetica una serie di termini, che presi consecutivamente han sempre una stessa differenza, ed essendo la differenza tra il primo ed il secondo termine $+d$, ne siegue che anche la differenza tra il 2.º ed il 3.º termine farà $+d$. Dunque se il 2.º termine è $p+d$, il 3.º dovrà essere $p+d+d$, cioè $p+2d$ &c.

La predetta Formola generale comprende le due specie di progressioni crescenti e decrescenti. La proporzione crescente è $\frac{p}{p} = \frac{p+d}{p+d} = \frac{p+2d}{p+2d} = \frac{p+3d}{p+3d}$ &c. : la decrescente è $\frac{p}{p} = \frac{p-d}{p-d} = \frac{p-2d}{p-2d} = \frac{p-3d}{p-3d}$ &c.

239. In ogni progressione aritmetica la somma de' termini ugualmente lontani dagli estremi è sempre costante; cioè sempre uguale alla somma degli estremi, o alla somma di due altri termini qualunque ugualmente lontani da questi estremi; o al doppio del termine di mezzo, se la progressione ha un numero impari di termini.

Nella

Nella progressione $\div p. p + d. p + 2d. p + 3d. p + 4d. p + 5d. p + 6d \&c.$ è evidente che la somma degli estremi $p + p + 6d$, è ugal alla somma del 2.^o e 6.^o termine $p + d + p + 5d$; siccome questa è ugal al doppio del termine di mezzo $p + 3d = 2p + 6d$.

240. In una progressione aritmetica, un termine qualunque è ugal alla somma del primo termine e del prodotto della differenza comune per il numero de' termini precedenti.

Nella predetta progressione il 6.^o termine $p + 5d$ è composto del primo p , e del prodotto della differenza d per il numero 5 de' termini che precedon il sesto.

241. In una progressione aritmetica, la differenza tra il primo e l'ultimo termine è ugal al prodotto della differenza comune per il numero de' termini di tutta la progressione meno 1.

La differenza tra il primo termine p e l'ultimo $p + 6d$ è $6d$. Or questo $6d$ non è altro che la differenza comune d moltiplicata per 6, che è il numero de' 7 termini meno 1.

242. La somma di tutti i termini d'una progressione aritmetica è ugal alla metà del prodotto della somma degli estremi moltiplicata per il numero di tutti i termini; ovvero al prodotto del termine di mezzo (se il numero de' termini è impari) per il numero di tutti i termini.

Onde $2p + 6d$ somma degli estremi, moltiplicata per 7 numero di tutti i termini, e divisa per 2, cioè $14p + 42d$

$\frac{14p + 42d}{2}$, o $7p + 21d = p + p + d + p + 2d + p + 3d + p + 4d + p + 5d + p + 6d$, che ridotta diviene $7p + 21d$.

243. Una progressione aritmetica può aver zero per uno de' suoi termini.

Perchè tra zero ed un numero qualunque vi è sempre una differenza ugal a quello numero.

Si può dunque continuar una progressione decrescen-

te quanto si vorrà. Se si ha per esempio, questa progressione $\div 16.12.8.4.0$, si può continuarla così $\div 16.12.8.4.0.4.8.12.16 \&c.$

Ogni progressione dunque ha due braccia, l'uno crescente, l'altro decrescente, che si estendono in senso contrario, e tutti due si perdono nell' infinito: vale a dire, che una progressione non ha nè principio nè fine, nè noi possiamo conoscerne che un punto preso nel mezzo: questa è la figura del tempo paragonato all' eternità. Così $\div 11.6.1$ può continuarsi in $\div 11.6.1.4.9.14.19 \&c.$

Si osservi però, che il zero non può entrar in alcun rapporto geometrico, poichè non può contenere, nè esser contenuto.

244. In ogni progressione aritmetica si possono distinguere cinque principali elementi

il primo termine	_____	p
l'ultimo	_____	u
la differenza	_____	d
il numero de' termini	_____	n
la somma de la progressione	_____	s

Or dati tre di questi cinque elementi, si conosce subito uno degli altri due incogniti.

Se si suppone la progressione crescente, si può convertirla in decrescente, chiamando il suo primo termine u , e l'ultimo p .

Dall'art. 241. risulta l'equazione $u - p = dn - d$, e $pn + un$
dall'articolo 242. risulta quest'altra equazione $s = \frac{pn + un}{2}$.

Or da queste due equazioni ricavansi le 20 formole seguenti che risolvono tutti i casi possibili per trovare in una progression aritmetica una delle due incognite essendo note le tre altre.

Prima Equaz. principale. 2.^a Equazione principale.

$$u - p = dn - d \qquad s = \frac{pn + un}{2}$$

Formole

Formole tratte da questa equazione.

Applicazione delle 20 formole algebriche alla progressione crescente $\div 2$.
4. 6. 8. 10

$$1.^a u = p + dn - d$$

$$1.^a 10 = 2 + 2 \times 5 - 2 = 2 + 10 - 2$$

$$2.^a p = u - dn + d$$

$$2.^a 2 = 10 - 2 \times 5 + 2 = 10 - 10 + 2$$

$$3.^a d = \frac{u - p}{n - 1}$$

$$3.^a 2 = \frac{10 - 2}{5 - 1} = \frac{8}{4}$$

$$4.^a n = \frac{u - p}{d} + 1$$

$$4.^a 5 = \frac{10 - 2}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1$$

2.^a Equazione principale.
 $pn + un$

$$s = \frac{pn + un}{2}, o 2s = pn + un$$

Formole tratte da questa Equazione.

$$5.^a n = \frac{2s}{p + u}$$

$$5.^a 5 = \frac{60}{2 + 10} = \frac{60}{12}$$

$$6.^a p + u = \frac{2s}{n}$$

$$6.^a 2 + 10 = \frac{60}{5}$$

$$7.^a p = \frac{2s}{n} - u$$

$$7.^a 2 = \frac{60}{5} - 10$$

$$8.^a u = \frac{2s}{n} - p$$

$$8.^a 10 = \frac{60}{5} - 2$$

3.^a Equazione principale.

$$2s = 2pn + dn^2 - dn$$

Formole tratte da questa Equazione.

Questa Equazione è formata dalla seconda equazione principale $2s = pn + un$, in cui si fa entrar il valore di $u = p + dn - d$ (prima formola).

$$9.^a s = \frac{2pn + dn^2 - dn}{2}$$

$$10.^a s = pn + \frac{dn^2 - dn}{2}$$

$$11.^a p = \frac{s}{n} + \frac{dn}{2} + \frac{d}{2}$$

$$12.^a d = \frac{2s - 2pn}{n^2 - 2}$$

Quarta Equazione principale.

$$2s = 2un - dn^2 + dn$$

Formole tratte da questa Equazione.

$$13.^a s = \frac{2un - dn^2 + dn}{2}$$

$$14.^a s = un + \frac{dn^2 + dn}{2}$$

$$15.^a u = \frac{s}{n} + \frac{dn}{2} + \frac{d}{2}$$

$$16.^a d = \frac{2un - 2s}{n^2 - n}$$

$$9.^a 30 = \frac{20 + 50 - 10}{2} = \frac{60}{2}$$

$$10.^a 30 = 10 + \frac{50 - 10}{2} = 10$$

$$\frac{40}{2}$$

$$11.^a 2 = \frac{30}{5} + \frac{10}{2} + \frac{2}{2} = 6$$

$$5 + 1$$

$$12.^a 2 = \frac{60 - 20}{25 - 5} = \frac{40}{20}$$

Questa Equazione è formata dalla seconda principale $2s = pn + un$, in cui si fa entrar il valore di $p = u - dn + d$ (formola 2.^a)

$$13.^a 30 = \frac{1000 - 50 + 10}{2} = \frac{60}{2}$$

$$14.^a 30 = 50 + \frac{50 + 10}{2} = 50$$

$$\frac{40}{2}$$

$$15.^a 10 = \frac{30}{5} + \frac{10}{2} + \frac{2}{2} = 6 + 5 + 1$$

$$16.^a 2 = \frac{100 - 60}{25 - 5} = \frac{40}{20}$$

Quin-

Quinta Equazione principale.

$$25pn + n + \frac{u^2 - p^2}{d}$$

Questa Equazione è formata dalla seconda principale $25pn + un$, in cui si fa entrar il valore

$$n = \frac{u-p}{d} + 1 \text{ (formola 4.^a)}$$

Formole tratte da questa Equazione.

$$17.^a 5 = \frac{p+u}{2} + \frac{u^2 - p^2}{2d}$$

$$17.^a 30 = \frac{2+10}{d} + \frac{100-4}{4}$$

$$= 6 + 24$$

$$18.^a 2 = 1 +$$

$$18.^a p = \frac{1}{2} d + \sqrt{\frac{1}{4} d^2 + ud + u^2 - 2ds}$$

$$\sqrt{1+20+100-120} = 1 +$$

$$\sqrt{1} = 1 + 1$$

$$19.^a 10 = -1 +$$

$$19.^a u = -\frac{1}{2} d + \sqrt{\frac{1}{4} d^2 + 2ds + p^2 - pd}$$

$$\sqrt{1+120+4-4} = -1 +$$

$$\sqrt{121} = -1 + 11.$$

$$20.^a 2 = \frac{100-4}{60-10} = \frac{96}{48}$$

$$20.^a d = \frac{u^2 - p^2}{as - p - u}$$

Con queste formole si risolvon tutti i problemi di progressione Arithmetica.

245. Si possono paragonare due progressioni, formarle, e sottrarle per ritolver le quistioni più complicate.

246. Ma nella sottrazione convien osservare che la maggior progressione non è quella che presenta i maggiori termini, ma quella di cui la differenza è più grande.

Problemi sulle Progressioni Aritmetiche.

247. Probl. 1.^a *Inserire un numero m di mezzi proporzionali tra due termini dati p ed u , onde ne risulti una progressione Aritmetica.*

Soluzione. Considerando p ed u come estremi, sarà certamente $m+2$ il numero de' termini della progressione, giacchè m è il numero de' termini da inserirsi fra i due estremi. Son noti dunque tre elementi, il primo e l'ultimo termine, ed il loro numero; non si ha che trovar la differenza, ed il problema è sciolto.

Dunque la 3.^a formola $d = \frac{u-p}{n-1}$ ne dà la soluzione.

Supposto $p=2$, $u=20$, $m=8$, farà $n=m+2$

$=10$, e $d = \frac{u-p}{n-1} = \frac{20-2}{10-1} = \frac{18}{9} = 2$. Dunque si avrà questa progressione $\div 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$.

Probl. 2.^a *Due viaggiatori partono nello stesso istante da due luoghi opposti lontani 135. leghe. Il primo regola il suo cammino per giorno secondo i termini $\div 1, 5, 9$ &c. ed il secondo in quest'altra guisa $\div 4, 7, 10$ &c. In qual giorno s'incontreranno, e quanto ciascuno avrà fatto?*

Sol. Concorrendo le progressioni allo stesso scopo, bisogna sommarle. La somma di queste progressio-

ni, $\div 1, 5, 9$
 $\div 4, 7, 10$
 è $\div 5, 12, 19$,
 di cui essendo noti tre elementi, $p=5$, $d=7$, $s=135$, non si ha da trovar altro ch' n , cioè il numero de' termini, ed il problema è sciolto. Servendosi dunque

que della terza equazione principale $2s = 2pn + dn^2 - dn$, e facendo le operazioni necessarie, si ha $n = 6$. Dunque s'incontreranno al 6.^o giorno.

Per soddisfar poi alla seconda parte del problema, si trovino (formola 9.^a) le somme particolari delle due prime progressioni, la somma di $\div 1.5.9$ è 66
e la somma di $\div 4.7.10$ è 69 } 135

Dunque il primo viaggiatore ha fatto in 6 giorni 66 leghe, e l'altro 69.

Probl. 3.^o Due viaggiatori partono nel medesimo istante da uno stesso luogo verso una stessa parte, regolando il lor cammino per giorno, il primo secondo questa progressione $\div 1.5.9$, e l'altro $\div 3.7.10$. Si domanda, quando il primo raggiungerà il secondo.

Sol. Sottraendo la più piccola progressione (246) che è la seconda, dalla prima,

$$\begin{array}{r} \div 1.5.9 \\ \div 4.7.10 \\ \hline \end{array}$$

la differenziale sarà $\div 3.2.1$. E' chiaro che quando il primo raggiungerà il secondo, avran fatto entrambi lo stesso cammino; dunque le somme delle loro progressioni rispettive saranno uguali, ed in conseguenza la differenziale di tali somme sarà 0.

Sono dunque cognite $p = 3$, $d = 1$, $s = 0$; dunque (per la terza equazione principale $2s = 2pn + dn^2 - dn$) sarà $n = 7$. Vale a dire il primo raggiungerà il 2.^o al 7.^o giorno, e ciascuno avrà fatto 91. leghe.

Probl. 4.^o Una barca di fuggitivi fa 12 leghe al giorno, e tende al rifugiarsi al prossimo porto lontano 50 leghe. Un vascello che la insegue, veleggia in questa progressione $\div 6.11$. &c. Saranno i fuggitivi raggiunti? In qual giorno? E in qual distanza dal porto?

Sol. E' la prima progressione, di cui la differenza è 0, che

o, che si deve sottrarre dalla seconda

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} \quad 6.11 \\ - \frac{1}{2} \quad 12.12 \\ \hline \end{array}$$

Si avrà dunque questa differenziale progressione $\frac{1}{2}, -6, -1$
 Conoscendosi $p = -6$, $d = 5$, $s = 0$, si avrà (per
 la 3.^a equazione principale $2s = 2pn + dn^2 - dn$)

$$n = \frac{2p}{d} + 1 = \frac{12}{5} + 1 = 3 \frac{2}{5}.$$

I fuggiaschi dunque faranno raggiunti ne' $\frac{3}{5}$ del quarto giorno, lungi dal porto leghe $9 \frac{1}{5}$, dopo $40 \frac{4}{5}$ di cammino.

Delle Ragioni e Proporzioni Geometriche.

248. Si è definita (225) la ragione Geometrica *quante volte una quantità contien un' altra*. Dunque la ragione Geometrica consiste nel quoziente della divisione di due quantità. La ragione Geometrica di 4 a 8 sarà $\frac{8}{4} = 2$.

Dunque una frazione è una ragione Geometrica; il suo numeratore n'è il conseguente, ed il suo denominatore è l'antecedente.

249. Lorchè l'antecedente è maggiore del conseguente, il quoziente della ragione Geometrica è una frazione minore dell'unità.

Come la ragione di 8 a 4 $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. E quando l'antecedente è più piccolo, il quoziente è maggiore dell'unità; come 4 e 8 $= \frac{8}{4} = 2$.

250. Si chiama ragione di numero a numero quella, di cui il quoziente non è una quantità inesprimibile, o incommensurabile: come 7 a 11 è $\frac{11}{7}$.

Dicesi ragione irrazionale o sorda quella di cui il quoziente non può esprimersi esattamente nè per interi nè per frazioni.

Come la ragione di 4 a $\sqrt{3}$ è sorda, perchè è impossibile trovar un numero intero o rotto che esprima

il valor esatto di $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Non

Non siegue però da ciò, che due incommensurabili sieno sempre in ragion sorda; perchè l'uno può esser esattamente doppio, triplo &c. dell'altro.

251. Quando l'antecedente contiene due, tre volte &c. esattamente il suo conseguente, si chiama il loro rapporto una ragione *dupla*, *tripla* &c. come la ragione di 48 a 6 è *ottupla*. Se poi l'antecedente è contenuto due, tre volte &c. esattamente nel suo conseguente, dicesi ragione *suddupla*, *suttripla*: come la ragione di 4 a 12 è *suttripla*.

252. Se si moltiplicano per ordine i termini di più ragioni, cioè gli antecedenti per gli antecedenti, ed i conseguenti per i conseguenti, i prodotti formano una *ragion composta* di ciascuna di queste ragioni. Come date queste tre ragioni $a:d$, $b:e$, $c:f$, la *ragion composta* è $abc: def$, e ciascuna di quelle ragioni chiamasi una delle radici della ragion composta.

Una ragion composta di ragioni uguali dicesi una ragione *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata* &c., se ha due, tre, quattro &c. radici: così se si compongono le ragioni uguali $2:4$, $6:12$, $3:6$; si avrà la ragion triplicata $36:288$.

253. Il valore d'una ragione non cambia, se si moltiplicano, o si dividono i suoi due termini per una stessa quantità.

254. Perciò le frazioni, che son lo stesso che ragioni Geometriche, non cambian valore, se i loro termini si moltiplicano, o si dividono per la stessa quantità.

255. Quindi due quantità qualunque son fra loro nella stessa ragione che passa fra i loro doppi, i loro tripli, i loro quadrupli &c, o fralle loro metà, terzi, quarti &c.

Lo stesso è dire, che i valori delle frazioni, le quali hanno gli stessi denominatori, son fra loro come i

numeratori. Così $a:b::\frac{a}{2}:\frac{b}{2}::\frac{a}{3}:\frac{b}{3}::\frac{a}{p}:\frac{b}{p}$ &c.

256. Teorema fondamentale. Ogni ragion Geometrica

ca può esprimersi con questa formola $a : aq$, ovvero $b : bq$. &c.

Il che significa, che il conseguente d'una ragion Geometrica è sempre ugual al prodotto dell' antecedente per il loro quoziente.

Poichè il quoziente d'una ragione è quel che risulta dalla divisione del conseguente per l'antecedente, è chiaro che questo conseguente ch'è il dividendo, deve esser ugual al prodotto del quoziente per l'antecedente ch'è il divisore. Dunque in generale ogni rapporto Geometrico, di cui l'antecedente è a , e l'quoziente è q , può esprimersi per $a : aq$. Ed ogni rapporto Geometrico che ha per antecedente b e per quoziente q , può esprimersi per $b : bq$.

257. Una ragione duplicata è ugual a quella de' quadrati de' termini d'una delle due ragioni qualunque, che ne sono le radici. Ed una ragione triplicata è ugual a quella de' cubi de' termini d'una delle tre ragioni qualunque che ne sono le radici. E così dell'altre potenze.

Dimostrazione. Se queste due ragioni $a : aq$, $b : bq$ son uguali, la ragion duplicata è $ab : abq^2$. Or è evidente che $ab : abq^2 :: a^2 : a^2q^2 :: b^2 : b^2q^2$, perchè queste ragioni hanno lo stesso quoziente q^2 .

Così se le tre ragioni $a : aq$, $b : bq$, $c : cq$ son uguali, la ragione triplicata è $abc : abcq^3$. Or è chiaro che $abc : abcq^3 :: a^3 : a^3q^3 :: b^3 : b^3q^3 :: c^3 : c^3q^3$.

Le ragioni sudduplicate, suttriplicate son quelle delle radici quadrate, cubiche &c.

258. L'uguaglianza di due ragioni geometriche forma la proporzione geometrica (226).

Dunque ogni proporzione geometrica può ridursi a questa formola $a : aq :: b : bq$.

Perchè due ragioni uguali devon avere uno stesso quoziente.

259. Se due ragioni son fra loro in maniera che se una è dupla o tripla &c. anche l'altra è dupla o tripla: allora la prima dicesi esser in ragion diretta semplice dell'altra. Come $8 : 4$, $6 : 3$.

Ma

Ma se la prima cresce nella stessa ragione che l'altra diminuisce, allora quella dicesi in ragion *inversa* o *reciproca* di quella. Come $8:4, 3:6$.

E' palpabile, che quattro termini in ragion inversa, possono ridursi in ragion diretta col mutar un antecedente in conseguente, ed un conseguente in antecedente. Onde la ragion inversa $8:4::3:6$ divien diretta $4:8::3:6$.

Ma senza disordinar i termini si può una ragion inversa ridurre a diretta, se i due termini d'una di queste ragioni si metton in frazione, di cui il numeratore sia 1. Onde la ragion inversa $8:4::3:6$, divien diretta $\frac{1}{8}:\frac{1}{4}::3:6$.

Proprietà delle Proporzioni Geometriche.

260. In ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi è ugual al prodotto de' mezzi.

E' evidente che $a:b::c:d$, $a \times d = b \times c$.

261. Dunque ogni equazione può cambiarsi in proporzione: $ab = cd$ diviene $a:b::c:d$; e $a - b = c - d$ diviene $a - b:c - d::a:c$; come $1 - x^2 = a$ diviene $1 - x:a::1:1+x$; e $x^2 - y^2 = 1$ diviene $x+y:1::1:x-y$ &c.

262. Quattro termini in proporzione geometrica possono disporli in diverse maniere senza cessar d'esser geometricamente proporzionali. Se il primo termine è al 3.^o come il 2.^o al 4.^o, dicesi *alternando*. Se il 2.^o è al primo come il 4.^o è al 3.^o, dicesi *invertendo*. Se la somma del primo e del 2.^o è al 2.^o, come la somma del 3.^o e del 4.^o è al 4.^o, dicesi *componendo*. Se la differenza tra il primo e'l 2.^o è al 2.^o, come la differenza tra il 3.^o e'l 4.^o è al 4.^o, dicesi *dividendo* &c.

$$a:b::c:d$$

$$a:c::b:d$$

$$b:a::d:c$$

$$a+b:b::c+d:d$$

$$a-b:b::c-d:d$$

alternando

invertendo

componendo

dividendo

In

In tutte queste ed altre mutazioni resta sempre la proporzione geometrica, poichè il prodotto degli estremi trovasi sempre ugual al prodotto de' mezzi.

263. Quindi facilmente si ricava, che nè la Composizione, nè la risoluzione delle ragioni cambia punto la proporzione. Onde se $a:b::c:d$, sarà $a^2b^2:b^2c^2::c^2d^2:d^2$, e $\sqrt{a}:\sqrt{b}::\sqrt{c}:\sqrt{d}$, sempre il prodotto degli estremi è ugual a quello de' mezzi.

Problemi sulle Proporzioni Geometriche.

264. Probl. 1.^a *Trovar uno de' quattro termini d'una proporzione, di cui si conoscono gli altri tre.*

Sia x il termine incognito. Si metta questo x in proporzione cogli altri al suo luogo conveniente. Si faccia un'equazione del prodotto degli estremi e di quello de' mezzi. Si troverà x in uno di questi prodotti, e colla divisione si conoscerà il suo valore.

Quindi si trae questa regola generale: In una proporzione, un termine qualunque, se è mezzo, sarà ugual al prodotto degli estremi diviso per l'altromezzo; e se è estremo, sarà ugual al prodotto de' mezzi diviso per l'altro estremo.

$$\text{Come } a:x::b:c, \quad xb=ac, \quad x=\frac{ac}{b}; \quad \text{E } a:b::c:x, \\ ax=bc, \quad x=\frac{bc}{a}.$$

Su questa soluzione è fondata la famosa *regola del tre*, che per il suo grand'uso vien anche detta *regola d'oro*.

265. La *regola del tre* in pratica è distinta in due specie. Dicesi *regola del tre diretta*, lorchè l'incognito deve esser tanto più grande o più piccolo rispetto al 3.^o dato, quanto il 2.^o termine dato è più grande o più piccolo rispetto al primo. In tal caso convien porre x al 4.^o termine della proporzione, e servirsi del-

la formola $x=\frac{bc}{a}$; onde la *regola del tre diretta* si fa

fa col moltiplicar il 2.^o termine per il 3.^o, e col divider il prodotto per il primo termine; il quoziente è il termine cercato.

Probl. 2.^o, 36 tese d'opera han costato 60. scudi, 48 tese quanto costeranno? Questa è una *regola del tre diretta*, poichè la spesa incognita che si cerca, deve esser a 48 tese come la spesa data 60 è a 36 te-

$$48 \times 60$$

se. Dunque $36. 60 :: 48 : x = \frac{48 \times 60}{36} = 80.$

L'altra *regola del tre* diccsi *inversa*, lorchè l'incognito deve esser tanto maggior o minore del 3.^o dato, quanto il 2.^o è minore o maggior rapporto al primo. In tal caso convien collocar x al 2.^o o al 3.^o termine,

e servirsi della formola $x = \frac{ac}{b}$: onde nella *regola del*

tre inversa convien moltiplicar il primo dato per il 3.^o, e divider il prodotto per il 2.^o termine dato; il quoziente sarà il 4.^o termine cercato.

Probl. 3.^o, 20 uomini han fatto in un giorno 45 tese d'opera, per farne 81 tese, quanti uomini ci vorranno?

Questa è una *regola del tre inversa*, perchè il numero degli uomini cercato deve esser ad 81 tese, come reciprocamente 45 tese a 20 uomini. Onde $20 : 45 :: x : 81$, $45x = 81 \times 20$, $x = \frac{81 \times 20}{45}$

$$= 36.$$

La *regola del tre* è *inversa*, quando si son mal disposti i termini della quistione. E' chiaro che la precedente avrebbe dovuto proporsi: Se per fare 45 tese d'opera ci han voluto 20 uomini, per farne 81 quanti uomini ci vorranno?

266. Tutte le *regole di compagnia, di società, di allaggio* ec. per quanto complicate sieno, si riducono a molte proporzioni semplici, delle quali si troveranno i termini incogniti per la *regola del tre diretta*.

Probl. 4.^o , 20 uomini in 15 giorni han fatto 160 tese di opera ; in 12 giorni 30 uomini quante ne faranno ?

Questo problema si riduce a queste due proposizioni
Se 20 uomini han fatto 160 tese d'opera in un certo tempo, 30 uomini nello stesso tempo quante ne faranno ? Risposta 240.

E se in 15 giorni questi uomini han fatto 240 tese, gli stessi uomini in 12 giorni quante ne faranno ? Risposta 192.

uom.	tese	uom.	tese	
1. ^a	20 :	160 ::	30 :	$x = \frac{160 \times 30}{20} = 240.$
	gior.	tese	gior.	tese
2. ^a	15 :	240 ::	12 :	$x = \frac{240 \times 12}{15} = 192.$

Ovvero a queste due altre.

	gior.	tese	gior.	tese	
1. ^a	15 :	160 ::	12 :	$x = \frac{160 \times 12}{15} = 128.$	
	uom.	tese	uom.	tese	
2. ^a	20 :	128 ::	30 :	$x = \frac{128 \times 30}{20} = 192$	

Queste quistioni si risolvon anche senza l'ajuto delle proporzioni . Nel proposto esempio basta cercar da principio quant'opera fa un uomo al giorno , dicendo

160 tese in 15 giorni sono $\frac{160}{15}$ al giorno , di cui la vigesima parte, ovvero $\frac{160}{15 \times 20}$ è l'opera d'un uomo al giorno . Ciò posto 30 uomini faranno al giorno $30 \times \frac{160}{15 \times 20}$

$$\times \frac{160}{15 \times 20} = \frac{30 \times 160}{15 \times 20}, \text{ e per conseguenza in } 12$$

$$\text{giorni eglino faranno } \frac{12 \times 30 \times 160}{15 \times 20} = 192.$$

Probl. 5.^a Nella stessa maniera, se si proponesse questa quistione, che gli Aritmetici chiaman regola del sette: 10 misura di biada, ciascuna del peso di 240 libbre, han nudrito per 4 giorni 525 soldati: con 17 misure pesanti ciascuna 320 libbre, per quanti giorni si potran nudrire 217 soldati?

Si cerchi prima quanto un soldato consuma al giorno, dicendo: 10 volte 240 libbre consumate in 4 giorni fanno $\frac{10 \times 240}{4}$ al giorno, di cui la 525.^a parte,

ovvero $\frac{10 \times 240}{4 \times 525}$ è il consumo giornaliero di ciascun soldato. Ciò posto, 17 volte 320 libbre divise per 217,

o $\frac{17 \times 320}{217}$ esprime quel che ciascun soldato ha per consumare, in maniera che dividendo questa quantità per $\frac{10 \times 240}{4 \times 525}$, la qual esprime il consumo giornaliero

di ciascun soldato, si ha $\frac{17 \times 320 \times 4 \times 525}{10 \times 240 \times 217} = 21 \frac{58}{62}$ sarà il numero de' giorni richiesto.

Probl. 6.^a Tre Mercanti han fatto un fondo di 12000 scudi. Pietro vi ha posto 2000, Giacomo 4000, e Giovanni 6000. Si è guadagnato 2400. Quanto sarà il lucro di ciascuno?

Si faccian tante proporzioni quante sono le incognite, dicendo: il fondo è al lucro totale, come la contribuzione particolare è al lucro particolare.

$$1.^a \quad 12000 : 2400 :: 2000 \text{ Pietro} = \frac{2400 \times 2000}{12000} = 400$$

fuo lucro .

$$2.^a \quad 12000 : 2400 :: 4000 \text{ Giac.} = \frac{2400 \times 4000}{12000} = 800$$

fuo lucro .

$$3.^a \quad 12000 : 2400 :: 6000 \text{ Gio.} = \frac{2400 \times 6000}{12000} = 1200$$

fuo lucro .

Queste regole complicate posson anche risolversi per mezzo della *regola di falsa posizione*. Questa consiste a metter in luogo de' termini incogniti altri termini supposti ad arbitrio, ma proporzionali a questi incogniti, affin di trovare questi incogniti per le regole del tre. Ma son superflue, dacchè si hanno mezzi più brevi.

[Delle Progressioni Geometriche.]

267. Tutta la dottrina delle Progressioni Geometriche dipende da questo principio: *il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' mezzi*.

268. In una serie di termini proporzionali, la somma degli antecedenti è alla somma de' conseguenti, come un antecedente qualunque è al suo conseguente.

Dimostr. Nella serie $a : aq :: b : bq :: c : cq :: d : dq$, è chiaro che $a + b + c + d : aq + bq + cq + dq :: b : bq$, perchè il prodotto degli estremi $bq \times a + b + c + d = b \times aq + bq + cq + dq$ prodotto de' mezzi.

269. In ogni progressione geometrica, come $1, 2, 4, 8$, è da osservarsi, che di due termini consecutivi il secondo non è che il primo moltiplicato per la ragione comune. Come 2 non è altro che 1 moltiplicato per 2 ragione comune della progressione; e 8 non è che 4×2 .

Onde

Onde ogni progressione può ridursi a questa forma
la $\div$ pr. pr². pr³. pr⁴. pr⁵. pr⁶. &c.

270. In ogni progressione, un termine qualunque è ugual al primo moltiplicato per la ragion comune elevata a tanta potenza quanto è il numero de' termini precedenti.

E' palese, che il 7.^o termine pr⁶ è ugual al primo p moltiplicato per la ragion comune r elevata alla sesta potenza. Così $pr^6 = p \times r^6$.

Questo Teorema può esprimersi con questa formola generale $t = pr^{n-1}$, in cui t significa un termine qualunque, e n il numero del luogo che occupa t nella progressione.

271. In ogni progressione i prodotti degli estremi, o quelli de' termini ugualmente lontani dagli estremi son uguali fra loro; o uguali al quadrato del termine di mezzo, se il numero de' termini è dispari. †

Nella progressione $\div$ p. pr. pr². pr³. pr⁴. pr⁵. pr⁶ &c., è chiaro che $p \times pr^6 = pr \times pr^5 = pr^2 \times pr^4 = pr^3 \times pr^3$.

272. In ogni progressione il primo termine è al 3.^o, come il quadrato del primo è al quadrato del 2.^o, il primo termine è al 4.^o, come il cubo del primo è al cubo del 2.^o. E così degli altri.

Dimostr. In questa progressione $\div$ p. pr. pr². pr³. pr⁴. pr⁵ &c., è manifesto che $p : pr^2 :: p^2 : pr^4$, perchè il prodotto degli estremi $p \times pr^4 = pr^2 \times pr^2$ prodotto de' mezzi &c.

273. La somma d'una progressione, non compresa il primo termine, è ugual alla somma di tutti i termini (eccetto l'ultimo) moltiplicata per la ragion comune.

Dimostr. In questa progressione $\div$ p. pr. pr². pr³, è evidente che $pr + pr^2 + pr^3 = p + pr + pr^2 \times r$.

Onde se la somma di tutta la progressione si dica s, ed u l'ultimo termine, farà $s - p = s - u \times r$, ovvero $s - p = sr - ur$, o $sr - s = ur - p$, o $s = \frac{ur - p}{r - 1}$.

Così in questa progressione $\div 3. 9. 27. 81$, sostituen-
dovi la formola antecedente, la sua somma farà $s =$
 $ur - p \quad 81 \times 3 - 3$

$$\frac{81 \times 3 - 3}{3 - 1} = 120.$$

$$r = 1 \quad 3 = 1$$

Dunque in qualunque progressione Geometrica, la
somma è ugual all' ultimo termine moltiplicato per
la ragion comune meno il primo termine, diviso per
la ragion comune meno 1.

274. Se r^+ è l'origine d' una progressione crescente
verso la destra, può esserlo ugualmente d' una decre-
sciente verso la sinistra, dove i suoi esponenti saran ne-
gativi, r^1, r^2 &c.

Dunque ogni progressione Geometrica, come l'Arit-
metica, può concepirsi divisa in due braccia, l' uno
crescente, l' altro decrescente da p , che si estendono
in senso contrario, e tutti due si perdono nell' infini-
to. Ovvero farà un solo braccio crescente o decrescen-
te in tutto il suo corso, secondo il lato da cui si vor-
rà prenderlo, ma che non ha nè principio nè fine.

275. Tralla progressione Aritmetica e la Geometrica,
non vi è altra differenza, se non che quella procede
per addizione e per moltiplicazione, e questa rispetti-
vamente per moltiplicazione e per esaltazione.

276. In ogni progressione Geometrica si posson con-
siderare cinque elementi principali:

il primo termine	_____	p
l' ultimo	_____	u
la differenza	_____	d
il numero de' termini	_____	n
la somma della progressione	_____	s

Or di questi cinque elementi essendone noti tre qua-
lunque, si conosce uno degli altri due incogniti.

Problemi sulla Progressione Geometrica.

277. Probl. 1.^o Dato il primo termine, e la ragion comune d'una progressione, trovar un termine qualunque.

Soluz. $t = pr^{n-1}$ (270). Onde se il termine richiesto è l'undecimo d'una progressione, di cui sia $p = 1$, $r = 4$, farà $t = 1 \times 4^{10} = 1048576$.

278. Probl. 2.^o Trovar la somma s d'una progressione geometrica, di cui si conosce il primo termine p , l'ultimo u , e la ragion comune r .

Soluz. In una progressione tutti i termini son antecedenti eccetto l'ultimo, e tutti i termini son conseguenti eccetto il primo. Dunque la somma degli antecedenti è $s - u$, e la somma de' conseguenti è $s - p$. Ma (273) $s - u : s - p :: p : pr$; dunque $sr - ur = sp - p^2$; ovvero $sr - ur = s - p$, e $sr - s = ur - p$;

$$\text{dunque } s = \frac{ur - p}{r - 1}.$$

279. Probl. 3.^o Dato il primo termine p , il numero n de' termini, e la ragion comune r , trovar la somma s .

Soluz. Poichè $a = pr^{n-1}$ (270), farà come nella soluzione antecedente $s - pr^{n-1} : s - p :: p : pr$; dunque $sr - pr^n = sp - p^2$, ovvero $sr - pr^n = s - p$. Ma $rr^{n-1} = r^{n-1+1} = r^n$; dunque $sr - pr^n = s - p$. Dunque $s = \frac{pr^n - p}{r - 1}$.

$$= s - p. \text{ Dunque } s = \frac{pr^n - p}{r - 1}.$$

280. Probl. 4.^o Data la ragion comune r , il numero de' termini n , e la somma s , trovar tutti i termini d'una progressione.

Soluz. Essendo (273) $s = \frac{pr^n - p}{r - 1}$, farà $p = \frac{sr - s}{r^n - 1}$,

$$\text{ovvero } p = s \frac{r - 1}{r^n - 1}. \text{ Or se il primo termine è } s \frac{r - 1}{r^n - 1},$$

moltiplicando questo primo termine per le potenze successive della ragion comune si avran tutti gli altri termini che faran per conseguenza

$$s \frac{r^2 - r}{r^n - 1}, s \frac{r^3 - r^2}{r^n - 1}, s \frac{r^4 - r^3}{r^n - 1}, \dots, s \frac{r^{n-1} - r^{n-2}}{r^n - 1}, s \frac{r^n - r^{n-1}}{r^n - 1} \&c.$$

281. Probl. 5.^o Dati p, u, n , trovare r .

Soluz. Essendo $u = pr^{n-1}$, farà $r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{p}}$.

282. Probl. 6.^o Dati p, u, r , trovar n .

Soluz. Poichè $r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{p}}$, farà $r^{n-1} = \frac{u}{p}$, e moltiplicando questa equazione per r , farà $r^n = \frac{ur}{p}$.

Sia $p = 5, r = 3, u = 3645$. Sarà $\frac{ur}{p} = \frac{10935}{5} =$

$$2187 = r^n,$$

S'inalzi dunque r ovvero 3 a tal potenza finchè sia uguale a 2187.

Si vede che divien tale alla 7.^a potenza. Dunque $n = 7$.

Si avrebbe anche trovato più facilmente n , se si avesse diviso il Logaritmo di 2187 per 3, come si dirà altrove.

283. Probl. 7.^o Inferire de' mezzi proporzionali tra due termini dati.

1.^o Se tra a e b si vuol inferir un sol termine proporzionale, si avrà $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Dunque $ab = x^2$; dunque $x = \sqrt{ab}$.

2.^o Se tra a e b si voglion inferire due mezzi proporzionali, si avrà $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Dunque $a : b :: a^2 : x^2$;

$$x^1; ax^1 = ba^1, x^1 = \frac{a^1 b}{a} = a^1 b, x = \sqrt[3]{a^1 b}.$$

Avendo ora il primo ed il 2.^o termine, facilmente si trova il 3.^o; perchè farà (272) $a : \sqrt[3]{a^1 b} :: y : b$, e $a^1 b^2 : a^1 b :: y^1 : b^1$. Dunque $a^1 b y^1 = a^1 b^1$. $y^1 = \frac{a^1 b^2}{a^1 b}$

$$= ab^1; \text{ dunque } y = \sqrt[3]{ab^1}.$$

3.^o In generale, se tra a e b si ha da inferire un numero n di mezzi proporzionali, l'intervallo de' termini a e b farà $n + 1$: onde (272) $a^{n+1} : b^{n+1} :: a : b$; dunque $x^{n+1} = \frac{a^{n+1} b}{a^{n+1}}$, e riducendo $x^{n+1} = a n b$, ed

estraendo la radice $x = \sqrt[n+1]{a n b}$, o $x = a^{\frac{n}{n+1}} b^{\frac{1}{n+1}}$: questo è il valore del primo de' mezzi proporzionali richiesti. Con un calcolo consimile si troverà, che il 2.^o è $\sqrt[n+1]{a^{n-1} b^2}$, il 3.^o $\sqrt[n+1]{a^{n-2} b^3}$, il 4.^o $\sqrt[n+1]{a^{n-3} b^4}$; e così di seguito finchè l'esponente di b sia divenuto $= n+1$, nel qual caso quello di a farà $= 0$, ed il termine $\sqrt[n+1]{a^0 b^{n+1}} = b$.

234. Probl. 8.^o Tra ciascun termine d'una progressione geometrica $\therefore pr^0, pr^1, pr^2, pr^3$ &c. inferir un numero qualunque m di mezzi proporzionali.

Soluz. Inferiscasi un numero qualunque m di mezzi proporzionali aritmetici tra gli esponenti consecutivi de' termini della data progressione (247), e si avranno gli esponenti della progressione cercata.

Se, per esempio, $m = 3$, si avrà $\therefore pr^0, pr^{\frac{1}{4}}, pr^{\frac{2}{4}}, pr^{\frac{3}{4}}, pr^1, pr^{\frac{5}{4}}, pr^{\frac{6}{4}}, pr^{\frac{7}{4}}, pr^2$ &c.

235. Probl. 9.^o Da un barile contenente 20 carasse di vino un ladro domestico ne leva una caraffa al giorno,

Or se si suppone che $\frac{a}{b} = \frac{r}{1}$ farà la somma di tutta la progressione infinita $s = \frac{a}{b-1} = \frac{r}{1-1} = 1$.

Onde le progressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \&c. &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \&c. &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \&c. &= 2 \end{aligned}$$

287. Per dar un' idea degli accrescimenti rapidi, che riceve la somma d'una progressione geometrica in capo ad un numero (anche mediocre) di termini, eccone un esempio sulla progressione dupla, di cui per altro il cammino è uno de' più lenti.

L'inventore del giuoco degli scacchi fu pressato dal suo Sovrano a chiedergli una ricompensa proporzionata alla bellezza della sua invenzione. Dopo molte negative, finalmente l'inventore impegnato a mortificar ingegnosamente il Re, disse, che gli si desse un granello di frumento per la prima casa del suo scacchiere, 2 per la 2.^a casa, 4 per la 3.^a, e così raddoppiando fin alla 64.^a.

La domanda sembrò da principio a tutta la Corte un niente, ma fatti i calcoli fu trovata inseguebile, ed eccedente le ricchezze di tutti i Monarchi del Mondo.

1.^o $p = 1, r = 2, n = 64$. Dunque $u = pr^n$, farà $\frac{pr^n - p}{r - 1}$, $u = 1 \times 2^{64}$, e $s = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1}$, farà $s = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$. A

2.^o Un vasetto d' un pollice cubico contiene 450 granelli di frumento. Un moggio contiene 1728 di quelli vasetti, dunque un moggio contiene $1728 \times 450 = 777600$ grani di frumento.

3.^o Supponga un recinto quadrato d' una lega di giro, o di 14400 piedi, convertito in granajo, in cui il

il frumento sia ammassato fin all' altezza di 20 piedi. Ciascun lato d' un tal granajo sarà di 3600 piedi, dunque la sua aja sarà $3600 \times 3600 = 12960000$ piedi quadrati, che moltiplicati per l' altezza 20, daranno 259200000 piedi cubici di capacità.

4.° Ogni moggio è un piè cubico di frumento. Dunque il numero de' grani di frumento necessarij a riempere il supposto granajo è $25920000 \times 777600 = 20155492000000$.

Non resta dunque che divider il primo numero 184 &c. A. per quest' ultimo; il quoziente 91522 è il numero de' granaj necessarij per contener la quantità di frumento richiesta. Vi è inoltre una frazione che qui si trascura, ma che farebbe la fortuna di sei mila oneste famiglie.

Chi si volesse dar la pena di far questi calcoli, si accorgerebbe dell' utilità del Capitolo seguente.

C A P I T O L O IV.

De' Logaritmi.

288. **A**lle Progressioni Geometriche ed Aritmetiche si riferisce la dottrina de' *Logaritmi*.

Per intenderne chiaramente e distintamente la natura, si prendano le due specie di progressioni Geometrica ed Aritmetica, e suppongansi i termini dell' una direttamente posti sotto i termini dell' altra.

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

In questo caso i numeri della progression inferiore, ch'è Aritmetica, sono quel che si chiaman *Logaritmi* della progressione superiore che è Geometrica: vale a dire che 0 è logaritmo di 1; 1 è logaritmo di 2; 2 è logaritmo di 4 &c.

289. Dunque *Logaritmo* è un numero d' una progressione Aritmetica, il quale corrisponde ad un' altro numero d' una progressione Geometrica.

Questi

Questi *Logaritmi* sono stati inventati per render il calcolo più spedito, come or ora si vedrà.

La parola *Logaritmo* è formata da due parole greche significanti *ragione* e *numero*, cioè *ragione de' numeri*.

Per ben intendere la dottrina e l'uso de' *Logaritmi*, convien esser attento alle proposizioni seguenti.

290. Prop. 1.^a *Supponendo o logaritmo di 1, il logaritmo del prodotto di due numeri qualunque, come 4 e 8, sarà sempre ugual alla somma de' logaritmi delle due radici, o producenti.*

Dimostr. Le due proposte progressioni lo rendono evidente. Poichè l_4 (la lettera l significa logaritmo del numero cui ella precede) e l_8 sono 2 e 3: or la somma di $2 + 3 = 5$, ed il prodotto di $4 \times 8 = 32$, infatti 5 è logaritmo di 32.

Deve esser necessariamente così, perchè essendo $4 \times 8 = 32$, si avrà questa proporzione geometrica $1 : 4 :: 8 : 32$, di cui i logaritmi devon esser in proporzione Aritmetica, onde si avrà $l_1 : l_4 :: l_8 : l_{32}$.

Or in una proporzion Aritmetica la somma degli estremi è ugual alla somma de' mezzi; dunque $l_1 + l_{32} = l_4 + l_8$.

Ma $l_1 = 0$, dunque $l_{32} = l_4 + l_8$, cioè $5 = 2 + 3$.

291. Prop. 11. *Il logaritmo del quoziente 16 del numero 64 diviso per 4, è ugual alla differenza che passa fra l_{64} e l_4 , cioè $l_{16} = l_{64} - l_4$.*

Dim. $\frac{64}{4} = 16$, dunque $64 \times 1 = 16 \times 4$, e $1 : 4 :: 16 : 64$; dunque $l_1 + l_{64} = l_4 + l_{16}$. Or $l_1 = 0$, dunque $l_{64} = l_4 + l_{16}$, dunque $l_{64} - l_4 = l_{16}$. In fatti $6 - 2 = 4$.

292. Prop. 111. *Il logaritmo d'un numero è la metà del logaritmo del suo quadrato.*

Dim. Prendasi, per esempio, 8; il suo quadrato è 64;

64. Or $l_8 = \frac{3}{2}$; perchè $8 \times 8 = 64 \times 1$, dunque $1 :$

$8 :: 8 : 64$, onde $l_1 : l_8 :: l_8 : l_{64}$. Dunque $l_1 + l_{64} =$

$18 + 18 = 218$. Ma $11 = 0$, dunque $164 = 218, 0 - \frac{164}{2} =$

18 . Infatti $\frac{8}{3} = 3$.

293. Prop. IV. Il logaritmo d'un numero è il terzo del logaritmo del suo cubo.

Dim. Il cubo di 2 è 8; e poichè $4 \times 2 = 8 \times 1$, si avrà $1:4::2:8$; onde $11:14::12:18$. Ma per la dimostr. precedente $14 = 212$, dunque $11:212::12:18$, onde $11 + 18 = 212 + 12 = 312$. Ma $11 = 0$, dunque $18 = \frac{18}{3}$, $0 - \frac{18}{3} = 12$. In effetto $\frac{3}{3} = 1$.

294. Le proprietà fin quì espòste han servito di fondamento alla costruzione delle Tavole de' Logaritmi, per mezzo delle quali si fanno per addizione e per sottrazione le operazioni, che si sarebbe obbligato fare senza questo soccorso colla moltiplicazione e divisione. Onde con somma facilità si fa la Moltiplicazione, la Divisione, la Regola del tre, l'Elevazione delle potenze, l'Estrazione delle radici, come chiaramente si vede col ripigliare le due progressioni precedenti

$\frac{1}{2}$	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
$\frac{1}{2}$	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7

295. Moltiplicazione. Volendosi moltiplicar 8 per 16, si prendan i logaritmi di questi numeri, che son 3 e 4. La loro somma 7 è il logaritmo corrispondente al numero 128, che è effettivamente il prodotto di 8×16 .

296. Divisione. Volendo divider 128 per 4, si trovino i loro logaritmi 7 e 2. La differenza di questi logaritmi $7 - 2 = 5$ il logaritmo del loro quoziente, che corrisponde a 32. Una frazione dunque, come $\frac{a}{b}$ riducendosi a logaritmi, diviene una sottrazione $a - b$; e l'esponente a^2 si converte in coefficiente 2a.

297. *Proporzione*. Per far una regola del tre per mezzo de' Logaritmi; convien sommar i logaritmi de' termini che si avrebbero dovuto moltiplicare, e dalla somma sottrarre il logaritmo di quel termine per cui si avrebbe dovuto divider il prodotto: il resto è il logaritmo del termine cercato.

Sieno $4:8::64:x$. I loro logaritmi saranno 2. 3. 6. Si sommi 3 e 6, e dalla loro somma si sottragga 2, $3+6-2=7$; 7. sarà il logaritmo di x . Al logaritmo 7 corrisponde 128, dunque $x=128$. Infatti $4:8::64:128$.

Se si vuol trovar un mezzo proporzionale fra due numeri, come fra 4 e 64, si sommino i loro logaritmi 2 e 6, la metà della loro somma $\frac{a+b}{2}$ è il logaritmo del numero proporzionale.

Al logaritmo 4 corrisponde 16, dunque 16 è il mezzo proporzionale tra 4 e 64.

Per trovar più mezzi proporzionali fra due numeri dati, si sottragga il logaritmo del numero minore dal logaritmo del numero maggiore, e di questo residuo il $\frac{1}{2}$ se cercansi due mezzi proporzionali, il $\frac{1}{4}$ se tre il $\frac{1}{8}$ se quattro &c. si aggiunga al logaritmo del numero minore: il logaritmo di questa somma dà il numero mezzo proporzionale che vien dopo il dato numero minore. Per gli altri mezzi, si aggiunga alla somma precedente lo stesso $\frac{1}{2}$, o $\frac{1}{4}$, o $\frac{1}{8}$ &c., la somma darà gli altri mezzi proporzionali. Come tra 4 e 64 i tre mezzi proporzionali sono 13, 14, 15, cioè 8, 16, 32.

298. *Elevazione*. Per elevar una quantità ad una potenza qualunque, bisogna aggiunger il di lei logaritmo a se stesso tante volte quanto si avrebbe dovuto moltiplicar questa quantità; cioè bisogna moltiplicar il suo logaritmo per l'esponente della potenza.

Volendo, per esempio, inalzar 2 alla sua quinta potenza, si moltiplichino 1, che è il logaritmo di 2, per 5, e veggasi 15 a qual numero corrisponde. Egli corris-

risponde a 32; dunque 32 è la 5.^a potenza di 2.

299. *Estrazione*. Per estrar la radice, si divida il logaritmo d'una quantità data per l'esponente della radice: il quoziente sarà l'esponente di questa radice.

Volendo estrar la radice quadrata di 16, prendasi il suo 14, e dividasi per 2; il quoziente 2 sarà il logaritmo della radice cercata. Lz corrisponde a 4, dunque 4 è la radice quadrata di 16.

Se si volesse la radice cubica di 64, dividasi il suo 16 per 3, il quoziente 12 dà 4 per radice cubica di 64.

300. Si farebbero dunque con un'estrema facilità le operazioni più laboriose del calcolo, se si avessero i logaritmi d'una gran quantità di numeri. E questo è quello che si è procurato di fare colla costruzione delle Tav. de' Logaritmi.

Questa utile scoperta è dovuta al Baron Neper Scozese, morto nel 1618. Enrico Briggs, Adriano Ulacq, e molti altri han poi perfezionato questo lavoro. Le tavole de' Logaritmi, che ora son in maggior credito e per l'estensione e per l'esattezza, son quelle di Gardiner in un Volum. in 4.^o

301. Teoria de' Logaritmi

Sia proposto di trovar il logaritmo d'un numero qualunque, e di costruir una tavola o un canone per i numeri naturali.

1.^o Siccome 1, 10, 100, 1000, 10000 &c. costituiscon una progressione Geometrica, posson dunque i logaritmi esser presi in una progression Aritmetica a volontà. Or per poter esprimere con frazioni decimali i logaritmi di tutti i numeri intermedj, si prenda la progressione 0.000000, 1.000000, 2.000000, 3.000000, 4.000000 &c., in maniera che il primo di questi numeri, o vero zero, sia il logaritmo di 1, il secondo sia il logaritmo di 10, il terzo di quello di 100, e così degli altri.

2.^o E' evidente, che non si potran trovare logaritmi esatti per i numeri, che son fuori della predetta serie

Geometrica 1, 10, 100 &c. Ma se ne potranno avere de' così vicini, che in pratica faranno sì buoni come se fossero esatti.

Per render ciò sensibile, suppongasì che sia domandato il logaritmo del numero 9. Converrà introdurre tra 1.0000000 e 10.0000000 un mezzo proporzionale Aritmetico. Il mezzo proporzionale Geometrico farà 3.1622777, e l'Aritmetico farà 0.5000000: quello farà evidentemente il logaritmo di quello. Ma quello

forpassa 3 d'un poco più di $\frac{1622777}{100000000}$, per conseguenza

farà molto lontano da 9. Si cerchi dunque tra

3 $\frac{1622777}{100000000}$ e 10 un altro mezzo proporzionale Geo-

metrico, il quale necessariamente si accosterà a 9 più che il primo: E tra 10 e questo nuovo mezzo proporzionale se ne cerchi ancora un terzo; e così via via, finché se ne trovino due consecutivi, di cui l'uno sia immediatamente al di sotto di 9; e cercando un mezzo proporzionale tra questi due numeri, e poi ancora un altro tra quello e questo de' due ultimi, che avrà 9 tra lui ed il precedente, si giungerà finalmente ad

un mezzo proporzionale che farà ugual a 9 $\frac{00000000}{100000000}$,

il quale non essendo lontano da 9 che d'una diecimilionesima parte d'unità, il suo logaritmo può, senza alcun errore sensibile, esser preso per il logaritmo di 9 stesso.

Si ritorni dunque a tutti questi mezzi proporzionali Geometrici, e prendendo l'un dopo l'altro il logaritmo di ciascun di loro per l'introduzione d'altrettanti mezzi proporzionali Aritmetici, si trova finalmente che 0.9542425 è il logaritmo dell'ultimo mezzo proporzionale Geometrico. Onde si può conchiudere, che questo numero può esser preso, senza error sensibile,

per

per il *logaritmo* di 9 , perchè vi si accosta estremamente.

3.^a Se si trovano de' mezzi proporzionali tra 1. 000000 e 3. 1622777 , e se nello stesso tempo si cerca il *logaritmo* di ciascuno di loro ; si giungerà finalmente ad un *logaritmo* vicinissimo a quello di 2 : e così degli altri .

4.^a Non è pertanto necessario prendersi tanta pena per trovar i *logaritmi* di tutti i numeri ; poichè inumeri che son il prodotto di due numeri , han per *logaritmi* la somma de' *logaritmi* de' loro producenti . E reciprocamente , se si ha il *logaritmo* del prodotto di due numeri , e quello di uno de' suoi producenti , si avrà facilmente il *logaritmo* dell' altro produttore . Nella stessa maniera , avendo il *logaritmo* d' un quadrato , d' un cubo &c , si ha quello della radice , come si è dimostrato nelle proposizioni precedenti : onde se si prende la metà del *logaritmo* di 9 , si avrà il *logaritmo* di 3 , vale a dire 0. 4771212.

302. *Spiegazione delle Tav. Logaritmiche.*

Nelle Tav. de' *Logaritmi* tutti i numeri sotto la lettera N son i numeri intieri ; gli altri a canto son i loro rispettivi *Logaritmi*.

Ne' *Logaritmi* i numeri , che son a sinistra del punto , esprimon intieri ; e quelli che son a destra del punto , esprimon il numeratore d' una frazione , di cui il denominatore è l' unità seguita da tanti zeri quante figure sono nel numeratore .

Agl' intieri de' *Logaritmi* si dà il nome di *esponenti* o di *caratteristiche* , perchè mostrano , aggiungendo loro 1. di quanti caratteri deve essere il numero , cui il *Logaritmo* corrisponde . Onde 0 *caratteristica* significa , che il numero corrispondente deve aver il carattere dell' unità , ch' è d' una sola figura ; perchè aggiungendo 1 alla *caratteristica* 0 , si avrà il numero 1 , che mostra la quantità delle figure del numero corrispondente al *logaritmo* . La *caratteristica* 1 significa , che il numero corrispondente contiene non solo unità , ma

anche decine, ma non però centinaja, contien insomma due figure, e che ha il suo luogo tra 10 e 100. E così degli altri *esponenti o caratteristiche*.

Quindi siegue, che tutti que' numeri, i quali (benchè differenti) hanno ugual quantità di caratteri o di figure, come tutti i numeri compresi tra 1 e 10, tutti quelli compresi tra 10 e 100, tra 100 e 1000 &c, devon aver logaritmi colla stessa caratteristica, il solo divario farà nelle cifre poste a destra del punto.

303. Se si ha una vera frazione decimale con carattere reale dopo il punto, come 0. 256, il suo logaritmo sarà evidentemente negativo; ed inoltre la caratteristica di questo logaritmo negativo mostrerà quanti o vi faranno nel numero avanti la sua prima figura reale a sinistra, compresi il 0 che si stima trovarsi sempre avanti il punto. Onde il logaritmo della frazione decimale 0. 256 è 1. 40824; e quello della frazione decimale 0. 0256. è 2. 40824.

Ciò è una conseguenza della definizione de' Logaritmi: poichè se i numeri intieri 1, 10, 100 &c. hanno per logaritmi 0. 1. 2. &c, le frazioni $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ &c, che forman una progressione Geometrica cogli intieri 1, 10, 100 &c, devon aver per logaritmi i numeri negativi 1, 2 &c. che forman una progression Aritmetica con i numeri 0, 1, 2 &c.

Ciò posto, si faranno sulle frazioni decimali le stesse operazioni, che per mezzo de' logaritmi si son fatte sopra i numeri intieri.

304. Probl. 1.^o Si trovi un Logaritmo d'un numero maggiore di quelli che sono nelle tavole, ma minore di 10000000, come per esempio del numero 92375.

Sol. Si tolgano le quattro prime figure a sinistra, come 9237, e si prenda nelle tavole il logaritmo corrispondente a questo numero tolto, che è 3. 9655309. Si aumenti la caratteristica 3 di tante unità quante figure son rimaste a destra nel numero proposto: qui non ve n'è rimasta che una, che è 5; dunque la caratteristica-

atteristica 3 sarà accresciuta d'una unità, e diverrà 4. 9655309. Si sottragga il logaritmo trovato da quello che lo siegue immediatamente nelle tavole, cioè dal logaritmo.

$$\begin{array}{r} 3. 9655780 \\ 3. 9655309 \\ \hline \end{array}$$

471

Si faccia indi questa proporzione, come 10 differenza fra i numeri 92380 e 92370 corrispondenti a questi due logaritmi consecutivi, è alla differenza trovata 471 de' predetti logaritmi, così 5 resto del numero proposto è alla differenza logaritmica che si cerca.

$$10 : 471 :: 5 : x = 235$$

Si sommi ora insieme il logaritmo del numero 92370, cioè

$$4. 9655309$$

e la differenza logaritmica trovata.

$$235$$

Questa somma 4. 9655544 sarà il valore del logaritmo richiesto.

La ragione di questa operazione è, che le differenze di tre numeri a, b, c, lorchè queste differenze sono picciolissime, son tra loro pressò a poco come le differenze de' loro logaritmi.

Se il numero proposto fosse una frazione, o un intero unito con una frazione, bisognerebbe prima ridurre tutto ad una sola frazione, e cercar separatamente il logaritmo del numeratore e quello del denominatore collo stesso metodo precedente; indi sottrarre un logaritmo dall'altro, e si avrà il logaritmo della frazione proposta.

305. Probl. 2.^o Trovar il numero corrispondente ad un logaritmo maggiore di quelli della tavola, come del logaritmo 7. 7589982.

Sol. Sottraggasi dal logaritmo dato il logaritmo di 10, o quello di 100, o di 1000, o di 10000, il primo insomma

L. 3

di

di quella specie, che darà un resto d' un numero di caratteri tali che si trovan nelle tavole.

Per esempio, il numero 10000 ha per logaritmo 4.
000000 ; sottratto questo logaritmo dal propo-
sto ————— 7. 7589982
4. 000000

il resto è ————— 3. 7589982

Si trovi di questo resto considerato come logaritmo il
numero corrispondente, che è 5741 ————— Si moltiplichi

questo numero per 1000, il prodotto 5741100 sarà il
numero cercato.

Se si proponesse di trovar la frazione corrisponden-
te ad un logaritmo negativo, come a o. 3679767 ;
converrebbe sottrarre questo dato logaritmo dall' ultimo
della tavola, che è

4. 0000000

o. 3679767

di questo resto ————— 3. 6320233
si cerchi nelle tavole il numero corrispondente che è

4285 $\frac{71}{100}$. Di questo numero si faccia una frazione,

cui si dia 10000 per denominatore; diverrà $\frac{428571}{1000000}$,

e quella farà la frazione cercata.

La ragione si è, che essendo ogni frazione il quo-
ziente del suo numeratore per il denominatore, l'uni-
tà deve esser alla frazione come il denominatore è al
numeratore. Ma come l'unità è alla frazione che de-
ve corrispondere al logaritmo negativo dato, così
10000 è al numero corrispondente al logaritmo restan-
te; dunque se si prende 10000 per denominatore, ed
il numero corrispondente per numeratore, si avrà la
frazione richiesta.

Pro-

Proporzione Armonica.

306. La Proporzione *Armonica* o *Musicale* è un' *terza specie* di proporzione formata dalle due precedenti *Geometrica* ed *Aritmetica* in questa guisa: *Se tre numeri son tali, che il primo sia al 3.^o, come la differenza tra il primo e 'l 2.^o è alla differenza tra il 2.^o ed il 3.^o, questi tre numeri son in proporzione armonica.*

Onde 2. 3. 6 son in proporzione armonica, perchè $2:6::1:3$.

307. Anche quattro numeri son in proporzione armonica, se il primo è al 4.^o, come la differenza tra il 1.^o e il 2.^o è alla differenza tra il 3.^o ed il 4.^o

Come 24. 16. 12. 9 son in proporzione armonica, perchè $24:9::8:3$, E 6. 8. 12. 18. sono nella stessa proporzione, perchè $6:18::2:6$.

308. Se tre o quattro numeri in proporzione armonica, son moltiplicati o divisi per lo stesso numero, i prodotti o i quozienti saran in proporzione armonica.

Come 6. 8. 12 che son in proporzione armonica, moltiplicati per 2, i loro prodotti 12. 16. 24 son in proporzione armonica. E divisi per 2, i loro quozienti 3. 4. 6 son ugualmente nella stessa proporzione.

309. Probl. 1.^o *Tra due numeri dati trovar un mezzo proporzional armonico.*

Sol. Sia a. x. b. Sarà (307) $a:b::a-x:x-b$; dunque $2ab$
 que $ax-ab=ab-bx$, e $ax+bx=2ab$, e $x=\frac{2ab}{a+b}$.

Onde se $a=12$, $b=6$, sarà $x=\frac{2 \times 12 \times 6}{12+6}=8$.

310. Probl. 2.^o *Dati due numeri a, b, trovar un terzo proporzional armonico.*

Sol. Sia a. b. x. Sarà (306) $a:x::b-a:x-b$;
 dunque $ax-ab=bx-ax$, e $2ax-bx=ab$, e $x=\frac{ab}{2a-b}$.
 L. 4. Onde

Onde se $a=3$, $b=4$, farà $x = \frac{12}{6-4} = 6$.

311. Probl. 3.^o *A tre numeri dati trovar il quarto proporzional armonico.*

Sol. Sia a, b, c, x . Sarà (307) $a:x:b-a:x-c$;
 dunque $ax-ac=xb-ax$, e $x = \frac{ac}{2a-b}$. Onde se $a=9$,

$b=12$, $c=16$, farà $x = \frac{9 \times 16}{18-12} = 24$.

312. Se si prende un mezzo proporzional Aritmetico tra due numeri dati, ed un mezzo proporzional armonico tra gli stessi due numeri dati, i quattro numeri faranno in proporzione Geometrica. Come tra 2 e 6 il mezzo

proporzional Aritmetico è $\frac{2+6}{2} = 4$, e l'Armoni-

co $\frac{2 \times 2 \times 6}{2 \times 6} = 3$. In fatti $2:3::4:6$.

313. Se si continua la proporzione Armonica in maniera, che la differenza tra il primo ed il 2.^o termine sia alla differenza tra il 2.^o ed il 3.^o, come il primo è al 3.^o termine; si formerà una *progressione o serie armonica*.

314. In queste tre sorti di proporzioni vi è questa rimarchevol differenza, che una progression Aritmetica cominciando da un numero dato, può esser crescente all'infinito, ma non decrescente; una progression armonica può decrescere, ma non crescer all'infinito; e la progression Geometrica può ugualmente crescere e decrescer all'infinito.

Progressioni	{	Aritmetica	$\div 1, 2, 3, 4, 5 \&c.$
		Armonica	$\frac{12}{1}, \frac{8}{3}, \frac{6}{4}, \frac{4}{5} \&c.$
		Geometrica	$\div \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4 \&c.$

315. Dicesi proporzione *Contrarmonica*, lorchè tre numeri son tali, che la differenza tra il primo ed il 2.^o

2.^o è alla differenza tra il 2.^o ed il 3.^o, come il 3.^o è al primo.

Come 3 . 5 . 6 son in proporzione *contrarmonica*, perchè $2:1::6:3$.

Onde per trovar un mezzo proporzionale *contrarmonico* tra due numeri dati a e b è facilissimo. Poichè sia a, x, b . Sarà $x - a : b - x :: b : a$; dunque $ax -$

$$a^2 = b^2 - bx, \text{ e } ax + bx = a^2 + b^2; \text{ dunque } x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

$$\text{Or se } a = 3, \text{ e } b = 6, \text{ sarà } x = \frac{9 + 36}{3 + 6} = 5.$$

C A P I T O L O V.

Proprietà della Grandezza considerata nell' Infinito.

316. **S**I chiama grandezza *finita* quella che ha *limiti*; dicesi numero *finito* qualunque numero, di cui si può assegnar ed esprimer il valore; chiamasi *progressione finita* quella che ha un certo numero di termini.

Noi non abbiamo idee distinte e dirette che delle grandezze finite. L' *Infinito* non ci è noto che per un'astrazione negativa; cioè per un'operazione, per così dire, *negativa* del nostro spirito, il quale non fa attenzione ai *limiti* della cosa, che noi perciò consideriamo come *infinita*. La denominazione stessa d' *Infinito* lo pruova: questa parola significa negazione di *finito*, e dimostra che noi da principio concepimmo il *finito*, e che togliendo poscia o negando i *limiti* del *finito*, concepimmo l' *Infinito*.

Da questa analisi si vede: 1.^o quanto la nozione dell' *Infinito* è vaga ed imperfetta in noi. Si vede, ch'ella non è propriamente che la nozione dell' *Indefinito*; purchè per la parola *Indefinito* s'intenda una *quantità vaga cui non si assegnan limiti*.

2.^o Si vede ancora, che l' *Infinito*, com'è considerato

to dall'Analisi, è propriamente il *limite del finito*; vale a dire è il termine cui il finito tende sempre, senza mai giungervi; ma cui si può supporre ch'egli si avvicini sempre vie più, benchè giammai vi arrivi.

E' in questo aspetto, che la Geometria e l'Analisi ben intese consideran la quantità *infinita*.

I Matematici dicon e provano, per esempio, che la somma di questa serie di numeri $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ &c. = 1.

Cio significa (se si vuol parlar con idee chiare) che il numero 1 è il *limite* della somma di quella serie di numeri; vale a dire che quanto più numeri si prenderanno in quella serie, più la somma di quelli numeri si accosterà ad esser ugual ad 1, e ch'ella potrà accostarvisi quanto più vicino si vuole. Quest'ultima condizione è necessaria, per compire l'idea attaccata alla parola *limite*: Perchè il numero 2 (per esempio) non è il limite della somma di questa serie, per la ragione che qualunque numero di termini vi si metta, la somma si accosterà bensì sempre vie più al numero 2, ma non potrà accostarvisi così da vicino quanto si vorrà, poichè la differenza sarà sempre maggiore dell'unità.

Similmente, lorchè si dice, che questa serie $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ &c. o qualunque altra crescente è *infinita*, s'intende dire, che quanto più termini di questa serie si prenderanno, tanto più grande ne farà la somma, e ch'ella può esser ugual ad un numero quanto grande si vorrà.

Tal'è l'idea, che convien formarli dell'*Infinito* riguardo alle Matematiche. Non appartien dunque ai Matematici esaminare, se in effetto dianzi quantità *infinita* attualmente esistenti, se lo spazio sia realmente *infinito*, se in una porzione finita di materia siavi un numero realmente *infinito* di parti. Tutte queste questioni sono straniere all'*Infinito Matematico*, il quale non è assolutamente che il limite delle quantità finite; limite di cui non è necessario in Matematica supporre l'esistenza reale, basta solo che il finito non vi pervenga giammai.

Si

Si domanda spesso, se vi sieno degl' infiniti gli uni più grandi degli altri, se il quadrato d'un numero infinito sia infinitamente più grande di questo numero. Al Matematico la risposta è facile: per lui un numero *infinito* non è che un'idea astratta, che esprime solamente un limite intellettuale, cui ogni numero finito non perviene giammai.

317. Dunque per quantità *infinitamente grandi* o *infinitamente piccole*, i Matematici non intendono quantità reali attualmente esistenti, ma quantità delle quali nel primo caso posson sempre assegnarsene maggiori, e nel secondo caso posson sempre vie più diminuirsi, abstraendo col pensiero ogni limite determinato.

318. Le quantità o *infinitamente grandi*, o *infinitamente piccole* son soggette a tutte le operazioni del calcolo come le quantità finite.

Il segno dell' infinito è questo ∞ . Onde per rappresentar una serie di numeri crescente all' infinito $1, 2, 3, 4, \dots, \infty$.

Parimente una quantità finita può esser divisa in parti sempre più piccole, finchè si giunga ad una parte infinitamente piccola, e si avrà una serie di numeri decrescente all' infinito; come $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{\infty}$.

319. Una quantità divenuta infinita non può più ricever nè accrescimento nè diminuzione, se non se per mezzo di altre quantità infinite.

E' chiaro, che una quantità finita divenuta infinita, ha preso tutti gli accrescimenti o diminuzioni possibili, e perciò ella non può più esser nè accresciuta, nè diminuita da alcuna quantità finita. Ma questa tal quantità infinita può ricevere da un' altra quantità infinita tutte le alterazioni di aumento, o diminuzione.

Onde $\infty + 1 = \infty$, e $1 + \frac{1}{\infty} = 1$; ma $\infty + \infty = 2\infty$, e $\frac{3}{\infty} \times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3$; $\frac{2}{\infty} : \frac{a}{\infty} = \frac{2}{a}$ &c.

320. Dunque una quantità finita unita o separata da

da una quantità infinitamente grande, può trascurarsi nel calcolo, ed esser supposta $\equiv 0$. Così $a \frac{1}{\infty} \equiv 0$.

Lo stesso è d'una quantità infinitamente piccola rapporto ad una quantità finita. Onde $a \frac{1}{\infty} \equiv 0$.

321. Vi è un' infinità di specie di grandezze infinite. Si può concepire questa progressione Aritmetica $\frac{1}{\infty}, \frac{2}{\infty}, \frac{3}{\infty}, \dots, \frac{\infty}{\infty}$, di cui l'ultimo termine $\frac{\infty}{\infty}$, o ∞^{∞} è un infinitamente più grande del primo infinito. Or $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{\infty}$, e per conseguenza si può concepire quest'altra progressione $\frac{1}{\infty^2}, \frac{2}{\infty^2}, \frac{3}{\infty^2}, \dots, \frac{\infty}{\infty^2}$, o ∞^{∞} , di cui l'ultimo termine è infinitamente più grande del primo.

Con un ragionamento consimile si proverà, che $\frac{1}{\infty^3}, \frac{2}{\infty^3}, \frac{3}{\infty^3}, \frac{4}{\infty^3}, \dots, \frac{\infty}{\infty^3}$, o ∞^{∞} . In generale si può concepire ∞^{∞} , ed anche ∞^{∞} all' infinito.

Lo stesso è della grandezza infinitamente piccola.

Perchè si può concepire $\frac{1}{\infty}, \frac{1}{2\infty}, \frac{1}{3\infty}, \dots, \frac{1}{\infty\infty}$,

o $\frac{1}{\infty^2}$, di cui l'ultimo termine è infinitamente più

piccolo del primo. Similmente $\frac{1}{\infty^2}, \frac{1}{2\infty^2}, \frac{1}{3\infty^2}, \dots$,

$\frac{1}{\infty^3} \equiv \frac{1}{\infty^2}$; ed in generale si può concepire $\frac{1}{\infty^{\infty}}$,

e $\frac{1}{\infty^{\infty}} \&c.$

322. Gli esponenti delle quantità infinite servono a mostrar il loro ordine d'infinito. Per esempio $\infty, 3^{\infty}$ che hanno 1 per esponente e che equivagliano a ∞^1 ,
 $3^{\infty 1}$,

3^∞ , sono grandezze infinitamente grandi del primo ordine, 2^∞ , ab^∞ , son quantità infinitamente grandi del 4.º ordine. E $\frac{4}{\infty}$, $\frac{2}{\infty}$, son infinitamente picco-

le del primo ordine ; come $\frac{1}{2^\infty}$ è un infinitamente piccolo del 2.º ordine &c.

L'espressioni degl' *infinitamente piccoli* son quelle, ove il segno dell'infinito è denominatore della frazione, di cui il numeratore è un finito o un infinito d' un ordine inferiore. Dove poi il segno dell' infinito non è denominatore, son espressioni di quantità *infinitamente grandi*.

Convien però sempre ricordarsi di quel che si è detto (316). Onde per questi infiniti del 2.º e del 3.º ordine, come se si dicesse che una tal linea divien infinita, e tal altra che ne dipende divien infinita del 2.º ordine, altro non si deve intendere, e altro non significano tali espressioni, se non che il rapporto della 2.ª linea alla prima (supponendole tutte due finite) è tanto maggiore quanto questa prima è più grande; e che questo rapporto può esser supposto più grande di qualunque numero finito che si vorrà assegnare.

Lo stesso è per le quantità infinitamente piccole, come più diffusamente si spiegherà altrove.

323. *Gli ordini successivi degl' infiniti son in progressione Geometrica.*

Gli esponenti, ch' esprimon questi ordini, son i termini delle serie naturali de' numeri. Come $\frac{1}{\infty^4}$, $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^1}$, $\frac{1}{\infty^0}$, $\frac{1}{\infty^{-1}}$, $\frac{1}{\infty^{-2}}$, $\frac{1}{\infty^{-3}}$ &c. sono lo stesso che $\frac{1}{\infty^4}$, $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^1}$, $\frac{1}{\infty^0}$, $\frac{1}{\infty^{-1}}$, $\frac{1}{\infty^{-2}}$, $\frac{1}{\infty^{-3}}$ &c.

324. *Un infinito d' un ordine qualunque non può esser aumentato nè diminuito per addizione o per sot-*
tra.

trazione da un numero finito d' infiniti d' un ordine inferiore.

Vale a dire uno o più infiniti d' un ordine inferiore sono $\equiv 0$ riguardo ad un infinito d' un ordine superiore; come $\infty^2 \pm a \infty = \infty^2$; e $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$.

325. Un infinito moltiplicato o diviso per un altro infinito, ha per prodotto o per quoziente una grandezza d' un ordine segnato dall' esponente del prodotto o del quoziente.

Così $\infty \times \infty = \infty^2$; $3 \infty \times 2 \infty = 3 \cdot 2 \infty^2$; $\infty^2 \times \infty^3 = 3 \infty^5$; $3 \infty^4 \times 4 \infty^3 = 12 \infty^7$. Dunque il prodotto di due infinitamente grandi, è un infinitamente grande d' un ordine espresso dalla somma degli esponenti.

$\infty \times a = a \infty$. Dunque un infinitamente grande moltiplicato per un finito, dà un infinitamente grande dello stesso ordine.

$\infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$. Dunque il prodotto d' un infinitamente grande per un infinitamente piccolo dello stesso ordine, è finito.

$\frac{1}{\infty} \times a = \frac{a}{\infty}$; $\frac{1}{4 \infty^3} \times 2c = \frac{c}{2 \infty^3}$. Dunque il prodotto d' un infinitamente piccolo per un finito, è un infinitamente piccolo dello stesso genere.

Nella divisione. $\frac{1}{\infty} = 1$; $\frac{1}{a \infty} = \frac{1}{a}$. Dunque il quoziente d' una quantità infinitamente grande divisa per una quantità infinitamente grande dello stesso ordine, è finito.

$\frac{1}{\infty^2} = \infty$. Dunque il quoziente d' un infinitamente grande diviso per un infinitamente grande d' un ordine

ordine inferiore, è un infinitamente grande a' un ordine ugual alla differenza degli esponenti.

$\frac{\infty^1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Dunque il quoziente d' un infinitamente grande diviso per un infinitamente grande d' un ordine superiore, è un infinitamente piccolo d' un ordine ugual alla differenza degli esponenti.

C A P I T O L O VI.

Delle Serie.

326. SI chiama *Serie* un' unione di termini, che preso consecutivamente crescon o decrescono secondo una certa stessa legge: Tali sono le progressioni Aritmetiche e Geometriche.

327. Dicesi *Serie Finita* quella, di cui il numero de' termini è limitato; e *Serie infinita* quella che si suppone continuata all' infinito.

328. Le serie, delle quali i termini vanno crescendo, si chiamano *Divergenti*; e quelle delle quali i termini diminuiscono, chiamansi *Convergenti*.

Una serie tanto più *converge* o *diverge*, quanto più rapidamente ciascun termine cresce o decresce riguardo a quello che lo precede.

329. Si considerano tre principali Serie di numeri. Quelle de' numeri *figurati* o di differenti ordini; quelle de' numeri *poligoni*; e quelle delle *potenze*.

1.° Le serie de' numeri *figurati* comincian così.

N u m e r i	Costanti del primo ordine ..	1. 1. 1. 1. 1. 1 &c.
	Naturali, o del 2.° ordine ..	1. 2. 3. 4. 5. 6 &c.
	Triangolari o del 3.° ordine ..	1. 3. 6. 10. 15. 21 &c.
	Piramidali o del 4.° ordine ..	1. 4. 10. 20. 35. 56

La legge di ciascuna serie de' numeri figurati è, che ciascuno de' loro termini è la somma de' termini corrispondenti della serie precedente. Onde la seconda serie

rie è formata dall'addizione continua di unità. I termini della 3.^a serie son formati dall'addizione continua di quelli della 2.^a &c.

330. 2.^o I numeri *Poligoni* son formati dalla somma de' termini consecutivi d'una progression Aritmetica, che incomincia da 1.

Progression Aritmetica. Numeri Poligoni.

1. 2. 3. 4. 5 &c. Diff.^a 1... 1. 3. 6. 10. 15 &c. Triangolari
 1. 3. 5. 7. 9 &c. Diff.^a 2... 1. 4. 9. 16. 25 &c. Quadrati
 1. 4. 7. 10. 13 &c. Diff.^a 3... 1. 5. 12. 22. 35 &c. Pentagoni
 1. 5. 9. 13. 17 &c. Diff.^a 4... 1. 6. 15. 28. 45 &c. Esagoni

Si chiaman *Poligoni*, perchè rappresentan il numero de' punti necessarj, per riempire gli spazj de' poligoni regolari, disponendo quelli punti in simetria sopra linee tirate parallelamente ai lati di questo poligono.

331. 3.^o Le serie delle *potenze* de' numeri son quelle de' quadrati, de' cubi &c. de' termini consecutivi della serie de' numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5 &c.

332. Oltre queste serie di numeri (che si posson generalizzare con espressioni Algebriche) se ne trovano spesso dell'altre. Per esempio, una frazione decimale, come 0. 3543, non è altra cosa che la serie

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000} \dots$$

Uno stesso numero diviso successivamente per i termini d'una progression Aritmetica, come $\frac{7}{1}, \frac{7}{4}, \frac{7}{9}, \frac{7}{16}$ &c. forma una serie, che è una *progression armonica*.

Si posson far ancora ad arbitrio quante serie si vogliono composte di molte altre, facendo sopra di loro termine per termine qualcuna delle operazioni Arit-

metiche. Come la serie $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{8}{115}, \frac{16}{945}$ &c.

che si è formata col metter per numeratori i termini d'una

334. Se si propone di ridurre $\sqrt{a^2 - x^2}$ in una serie infinita, seguendo le regole delle radici si avrà a —

$$\frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{5x^6}{128a^5} - \frac{7x^8}{1024a^7} + \frac{21x^{10}}{131072a^9} - \dots \&c.$$

Sia per esempio, $a=5$, $x=3$, farà $a^2 - x^2 = 25 - 9$, e $\sqrt{a^2 - x^2} = 5 - \frac{9}{10} + \frac{1000}{100000} - \dots \&c. = 4.$

335. Quindi si vede, che lorchè si hanno i primi termini d'una serie, che si trova per la scomposizione, bisogna procurar di scoprire la legge del loro cammino, perchè allora si può cessar di operare, e si può continuar la serie osservando questa legge, purchè se ne sia assicurato con un numero sufficiente di termini.

Per esempio, esaminando la serie precedente, che esprime $\sqrt{a^2 - x^2}$, si vede facilmente, ch'ella è ugual ad a più tutti i prodotti de' termini di una progressione geometrica (di cui il primo è $\frac{x^2}{2a}$, ed il quoziente e la ragion comune è $\frac{x^2}{a^2}$) moltiplicati consecutivamente per —

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{5}{128} \&c.$$

Non si tratta dunque che di trovar la legge di questi coefficienti, la quale è $\frac{1}{2}, \frac{1.1}{2.4}, \frac{1.1.3}{2.4.6}, \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \&c.$

I numeratori son i termini della serie naturale de' numeri impari crescenti; ed i denominatori son i termini della serie naturale de' numeri pari crescenti: e questi termini sono moltiplicati per due, tre, quattro &c. insieme successivamente; indi le frazioni, che se ne formano, son ridotte alle espressioni le più semplici.

Som-

Somma delle Serie.

336. Sopra le serie si possono fare tutte le operazioni dell' Aritmetica, ma la più utile e la più difficile è sommarle, cioè ridurre ad una sola espressione finita tutti i termini d'una serie data. E' in questa espressione che consiste la soluzione de' problemi, ne quali entrano le serie.

337. E' chiaro, che se una serie infinita è sempre divergente, la di lei somma non può esser finita.

Ma se è convergente, la somma è spesso finita. Sia

per esempio $\frac{d}{b}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}, \dots, \frac{d}{bq^\infty}$, questa

è una serie divergente, a causa che i denominatori van sempre crescendo (supponendo q maggiore dell'

unità) scrivendola dunque alla rovescia $\frac{d}{bq^\infty}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{b}$, si renderà crescente.

Ora applicandovi la formola (273) $s = \frac{ur-p}{r-1}$, in cui

$$u = \frac{d}{b}, p = \frac{d}{bq^\infty}, r = q; \text{ si avrà } s = \frac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^\infty}}{q-1}$$

trascurando il termine infinitamente piccolo $\frac{d}{bq^\infty}$, sarà $s = \frac{\frac{dq}{b}}{q-1} = \frac{dq}{b(q-1)}$. Questa sarà una formola per

$\frac{dq}{b(q-1)}$

Ma

som-

sommare qualunque progressione Geometrica decrescente all'infinito.

338. Sia ora da sommarli una serie di frazioni, di cui i numeratori sien in progressione Aritmetica, ed i denominatori in progressione Geometrica.

Sia per esempio, $\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3} \&c.$

Mettasi prima questa serie così $\frac{a}{b}, \frac{a}{bq} + \frac{d}{bq}, \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2}, \frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} \&c.$

Da ciò possono dedursi le serie seguenti, che son tutte progressioni Geometriche.

$\therefore \frac{a}{b}, \frac{a}{bq}, \frac{a}{bq^2}, \frac{a}{bq^3} \&c.$ la di cui somma è $= \frac{aq}{bq-b}$

$\therefore \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3} \&c.$ la somma è $= \frac{d}{bq-b}$

$\therefore \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3} \&c.$ la somma è $= \frac{d}{bq^2-bq}$

$\therefore \frac{d}{bq^3} \&c.$ la somma è $= \frac{d}{bq^3-bq^2}$

(Per comprendere, che la somma di $\frac{d}{bq^3-bq^2}$, si compisca la progressione, di cui $\frac{d}{bq^3}$ sia

il primo termine; si avrà $\frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^4}, \frac{d}{bq^5}, \dots, \frac{d}{bq^\infty}$.
Or

Or la somma di questa serie è evidentemente

$$\frac{dq}{bq^1} - \frac{d}{b-q^\infty} = \frac{dq}{bq^1} - \frac{dq}{bq^1 - bq^2} = \frac{d}{bq^1 - bq^2} \cdot \frac{q-1}{q-1}$$

Or quelle somme (eccetto la prima) forman la progressione $\frac{d}{bq-b}, \frac{d}{bq^2-bq}, \frac{d}{bq^3-bq^2}$ &c., delle quali la somma è $\frac{dq}{bq^2-2bq+b}$. Se dunque vi si

aggiunge la prima $\frac{aq}{bq-b}$, si avrà $\frac{aq}{bq-b} + \frac{dq}{bq^2-2bq+b}$

$= \frac{aq^2-aq+dq}{bq^2-2bq+b}$, che risulta dal ridurre le due prime frazioni allo stesso denominatore, ed a divider il numeratore ed il denominatore per $bq-b$.

Dunque $\frac{aq^2-aq+dq}{bq^2-2bq+b}$ sarà la somma delle somme,

vale a dire la somma di tutta la serie proposta. Questa dunque si può riguardare come una formola generale per sommare tutte le serie delle frazioni, delle quali i numeratori son in progression Aritmetica, ed i denominatori in progressione Geometrica.

339. Dunque l'arte di sommar le serie in generale, consiste a trovar un metodo di sommarne alcune, che si prendon in appresso per formole, alle quali convien ridurre (se è possibile) le serie che si vuol sommare. Ovvero conviene scomporre queste serie in molte altre riducibili a qualcuna delle formole, ed in conseguenza sommabili, e poi aggiunger insieme le somme di ciascuna di queste serie parziali.

340. Lorchè non si può sommare in termini finiti

una serie infinita, bisogna procurare di metterla sotto una forma la più convergente che sia possibile; perchè se una somma converge velocissimamente, basta sommare effettivamente alcuni de' suoi primi termini, e gli altri si possono trascurare senza errore sensibile.

Per esempio, nella $\sqrt{a^2+x^2}$, quanto più il valore de x farà piccolo riguardo ad a , tanto più la serie a

$$1 + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^4}{8a^4} + \frac{x^6}{26a^6} \&c.$$

convergerà velocemente, perchè i numeratori divengono picciolissimi riguardo ai denominatori.

Si $a = 10$, e $x = 1$, farà $\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20} + \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000} \&c.$ dove si vede che il 4.^o termine è già

come infinitamente piccolo, e per conseguenza i tre primi termini bastano per aver presso a poco la radice di 101, la qual è $10 \frac{399}{8000}$.

341. Sia proposto trovar delle formole per sommare quanti termini consecutivi si vorrà delle potenze de' termini della serie de' numeri naturali. Per giungervi, convien ragionare così.

Poichè i termini consecutivi de' numeri differiscono sempre di una unità, è chiaro, che se se ne prendon alcuni, come a, b, c, d, e, f , si avrà $f = e + 1$, $e = d + 1$, $d = c + 1$, $c = b + 1$, $b = a + 1$.

Or se s'alzano questi termini alle loro potenze consecutive, si avrà

$f^2 = e^2 + 2e + 1$	$f^3 = e^3 + 3e^2 + 3e + 1$
$e^2 = d^2 + 2d + 1$	$e^3 = d^3 + 3d^2 + 3d + 1$
$d^2 = c^2 + 2c + 1$	$d^3 = c^3 + 3c^2 + 3c + 1$
$c^2 = b^2 + 2b + 1$	$c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$
$b^2 = a^2 + 2a + 1$	$b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \&c.$

E se poi si unisce ciascuna di queste potenze in una sola equazione, si avrà

$$\begin{array}{l|l} f^2 = + 2e + 1 & f^1 = + 3e^2 + 3e + 1 \\ + 2d + 1 & + 3d^2 + 3d + 1 \\ + 2c + 1 & + 3c^2 + 3c + 1 \\ + 2b + 1 & + 3b^2 + 3b + 1 \\ a^2 + 2a + 1 & a^1 + 3a^2 + 3a + 1 \end{array}$$

342. Quindi si deducono questi Teoremi generali, lorchè si hanno molti termini consecutivi della serie de' numeri naturali.

1.º Il quadrato f^2 dell' ultimo di questi termini è ugual al quadrato a^2 del primo, più due volte la somma e $+ d + c + b + a$ de' termini che precedon l' ultimo, più il numero $+ 1 + 1 + 1 + 1$ de' li stessi termini precedenti.

2.º Il cubo f^3 dell' ultimo di questi è ugual al cubo a^3 del primo, più tre volte la somma de' quadrati de' termini precedenti, più tre volte la somma di questi termini, più il loro numero &c.

343. Da ciò siegue, che chiamandosi p il primo termine, ed u l' ultimo, il numero de' termini precedenti l' ultimo sarà $u - p$. Se dunque si chiama s la somma di tutti questi termini, sarà s^2 la somma di tutti i loro quadrati, s^3 la somma di tutti i loro cubi &c.; e sarà $s - u$ la somma di tutti i termini precedenti l' ultimo, $s^2 - u^2$ la somma di tutti i loro quadrati, $s^3 - u^3$ la somma di tutti i loro cubi.

Dunque il primo Teorema precedente sarà espresso da questa formola $u^2 = p^2 + 2s - 2u + u - p$, e riducendo sarà $u^2 = p^2 - p + 2s - u$.

Ed il 2.º Teorema sarà $u^3 = p^3 - p + 3s^2 - 3u^2 + 3s - 2u$ &c.

Dalla prima formola si tira $s = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} p$.

E sostituendo questo valore nella 2.ª formola, si avrà $u^3 = p^3 + 3s^2 - \frac{1}{2} u^3 - \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} p$; e per

confequenza $s^2 = \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{6} u - \frac{1}{3} p^3 + \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{6} p$.

Sostituendo i valori di s^2 e di s nella terza formula, si ha riducendo $u^4 = p^4 + 4s^2 - 2u^3 - u^2 - 2p^3 + p^2$, e per confequenza $s^3 = \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} u^3 + \frac{1}{4} u^2 - \frac{1}{4} p^4 + \frac{1}{2} p^3 - \frac{1}{4} p^2$. Lo stesso è dell'altre potenze.

344. Benchè le somme di molte serie sien infinite, e per confequenza inaffignabili in termini finiti, nondimeno di grand'uso nella Geometria, sopra tutto lorchè si può conoscer il loro rapporto esatto.

Si trova, per esempio, che la somma de' quadrati d' un' infinità di termini consecutivi della serie de' numeri naturali è il $\frac{2}{3}$ del prodotto dell'ultimo quadrato moltiplicato per il loro numero.

Poichè essendo allora l'ultimo termine della serie de' numeri naturali ∞ , sostituendo ∞ ad n nella formula della somma de' quadrati, si avrà $s^2 = \frac{1}{3} \infty^3 + \frac{1}{2} \infty^2 - \frac{1}{6} \infty - \frac{1}{3} p^3 + \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{6} p$, che si riduce a $s^2 = \frac{1}{3} \infty^3$, a causa che tutti gli altri termini son infinitamente piccoli riguardo a $\frac{1}{3} \infty^3$. Or il prodotto dell'ultimo quadrato ∞^2 per il numero de' termini, che è ∞ , è ∞^3 , dunque la somma de' quadrati è il terzo di questo prodotto.

345. Con un simil calcolo si trova, che la somma d' un' infinità di cubi consecutivi è il $\frac{1}{4}$ del prodotto dell'ultimo cubo per il loro numero. Perchè $s^3 = \frac{1}{4} \infty^4$.

In generale la somma delle potenze finite m d' un' infinità di termini consecutivi della serie de' numeri

naturali, è $\frac{1}{m+1}$ del prodotto della potenza ∞^m dell'ultimo termine moltiplicata per il loro numero ∞ ;
ovvero $s = \frac{1}{m+1} \infty^{m+1} = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$.

Questo può applicarsi anche alle somme delle stesse
radi-

radici de' termini consecutivi della serie de' numeri naturali. Perchè se si tratta, per esempio, delle radici quadrate, allora $m = \frac{1}{2}$, e $m + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$;

$$\frac{1}{m + 1} = \frac{2}{3}$$

Dunque $\frac{1}{m + 1} \propto m + 1$ diverrà $\frac{2}{3} \propto \frac{1}{2}$; il che si-

gnifica che la somma delle radici quadrate d' un' infinità di termini della serie de' numeri naturali, è i due terzi del prodotto della radice quadrata dell' ultimo termine moltiplicata per il loro numero. Perchè $\frac{2}{3} \propto \frac{1}{2}$ è lo stesso che $\frac{2}{3} \propto \frac{1}{2} \times \infty$.

CAPITOLO VII.

Della Combinazione.

346. **N**ON dovrebbe dirsi propriamente *Combinazione* che l'unione di molte cose prese a due a due; ma nelle Matematiche si applica a tutte le maniere possibili di prender un numero di quantità date.

347. Una sola quantità non ammette alcuna *combinazione*. Due quantità *a* e *b* danno una *combinazione*. Tre quantità *a*, *b*, *c*, combinate due a due, danno tre *combinazioni* *ab*, *ac*, *bc*. Quattro ne daranno sei, *ab*, *ac*, *bc*, *ad*, *bd*, *cd*. Cinque ne daranno dieci *ab*, *ac*, *bc*, *ad*, *bd*, *cd*, *ae*, *be*, *ce*, *de*.

In generale, la serie de' numeri delle *combinazioni* delle quantità prese due a due, è 1, 3, 6, 10 &c. vale a dire la serie de' numeri triangolari (330). Onde se *q* è il numero della quantità da combinarsi

a due a due, $q - 1 \times q + 0$ farà il numero delle loro

$\frac{1 \times 2}{2}$
combinazioni a due a due.

348. Se si hanno tre quantità a, b, c da combinarsi a tre a tre, non faranno che una sola combinazione abc . Se faran quattro a, b, c, d , da combinarsi a tre a tre, faran le quattro combinazioni abc, abd, bcd, acd . Se faran cinque, si avran le dieci combinazioni $abc, abd, bcd, acd, abe, bde, bce, ace, ade, cde$: Se faran sei, si avran venti combinazioni.

Onde la serie delle Combinazioni a tre a tre sarà quella de' numeri piramidali 1, 4, 10, 20 &c. (329)

Dunque se q esprime il numero delle quantità date,

$$\frac{q-2}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-0}{3}$$
 farà il numero delle loro combinazioni a tre a tre.

Il numero delle combinazioni a quattro a quattro delle stesse quantità, si troverà nella stessa maniera essere

$$\frac{q-3}{1} \times \frac{q-2}{2} \times \frac{q-1}{3} \times \frac{q-0}{4}$$

349. In generale, se n esprime il numero delle lettere, che si vuol far entrar in ciascun termine della

combinazione, la quantità
$$\frac{q-n+1}{1} \times \frac{q-n+2}{2} \times$$

$\frac{q-n+3}{3} \times \frac{q-n+4}{4} \times \dots \times q$ esprimerà il nume-

ro richiesto delle combinazioni. Vale a dire, bisogna continuar la serie, finchè per una continua addizione dell'unità, divenga $n=0$.

Se si domanda, per esempio, in quante maniere sei quantità possan prenderli a quattro a quattro, si farà $q=6, n=4$, e si sostituiranno questi numeri alla formola

mola precedente, la quale diverrà $\frac{6-4+1}{1} \times \frac{6-4+2}{2}$

$$\frac{\frac{6-4+3}{3} \times \frac{6-4+4}{4}}{15} = 15.$$

Onde nel giuoco del Lotto, ch'è composto di 90 numeri, vi sono 4005 ambi, 117480 terni, 2555190 quaterne, e cinquine 43949268. E pure vi son de' matti che vi giuocano.

350. Se si volesse avere tutte le combinazioni possibili d'un numero qualunque di lettere, prese sì a due a due, che a tre a tre, come a quattro a quattro &c. bisognerebbe giunger insieme tutte le formole prece-

depi $q-1 \times q-0;$

$$\frac{q-2}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-0}{3}; \frac{q-3}{1} \times \frac{q-2}{2} \times \frac{q-1}{3} \times \frac{q-0}{4} \&c. c.$$

Vale a dire, il numero di tutte queste combinazioni sarà espresso da $\frac{q \times q-1}{1.2} + \frac{q \times q-1 \times q-2}{2.3} + q$

$$\frac{\frac{q \times q-1 \times q-2 \times q-3}{2.3.4} \&c.$$

351. Se ora si paragona questa serie con quella che presenta l'elevazione d'un binomio qualunque alla potenza q , si vedrà che facendo ugual all'unità ciascun de' termini di questo binomio, le due serie son le stesse, eccettuato i due primi termini 1 e q che mancan alla serie precedente. Onde invece di quella serie, si

si potrà scrivere $2-1-q$, il che dà una maniera ben semplice per aver tutte le combinazioni possibili d'un numero q di lettere. Sia per esempio $q=5$, il numero totale delle sue combinazioni sarà $2^5-5-1=32-6=26$.

Alternazione o Permutazione.

352. L' *Alternazione* è una differente specie di Combinazione, ch' esprime il cambiamento d' ordine che si può dar a molte quantità, collocandole successivamente le une appresso dell' altre, o l' altre dopo le une.

Due lettere ab non hanno che due *alternazioni* ab, ba .

Se si prende una terza lettera c , è evidente che questa terza lettera può esser disposta in tre maniere diverse in ciascuna delle due *alternazioni* precedenti; cioè o alla testa, o in mezzo, o alla fine. Dunque per tre lettere vi faranno due volte tre *alternazioni*, o sei.

Se si prende una quarta lettera, ella potrà occupare quattro luoghi differenti in ciascuna delle sei *alternazioni* delle tre lettere precedenti, il che fa sei volte quattro, o 24. Nella stessa maniera cinque lettere faranno 24×5 , o 120 *alternazioni*: E così dell' altre.

Onde in generale, per trovar tutte le *alternazioni* possibili d'un numero dato di quantità, devonfi prender tutti i numeri dall' 1 fin al numero dato, e moltiplicarli successivamente gli uni per gli altri, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ &c. il prodotto totale farà il numero delle *alternazioni* richiesto.

Per aver un' idea dell' effetto sorprendente delle *alternazioni*, veggasi quante se ne possan fare colle 32 carte del giuoco del Picchetto.

Eccone il gran numero: 263, 130, 836, 933, 693, 530, 167, 218, 012, 160, 000, 000. A

Or si supponga, che sulla superficie della terra sienvi due mila milioni di uomini, che divisi a coppie giuochi.

uochino tutto il giorno a Picchetto: si avranno mille milioni di coppie di giocatori, ovvero 1.000.000.000.

Suppongasì che ciascuna coppia di questi giuocatori faccia 400. colpi al giorno : ne farà per anno 146, 000, per secolo ne farà 14. 600. 000, e per un milione di secoli farà colpi 14. 600. 000. 000. 000.

Dunque tutte le mille milioni di coppie di giocatori faranno in un milione di secoli colpi = 14. 160. 000. 000. 000. 000. 000. 000. B.

Se dunque si divide il primo numero A per questo numero B, il quoziente indicherà quanti milioni di secoli ci vorranno, affinchè tanto numero di giocatori facciano tutte le *permutazioni* possibili, supponendo che niuna mai si sia ripetuta.

Or siccome il numero A ha 36 cifre, e B 23, il quoziente ne avrà $36 - 23 + 1 = 14$, di cui due primi faran 18. Questo quoziente dunque farà 18 milioni di milioni di secoli.

353. Dato un numero qualunque di quantità, trovar il numero delle combinazioni ed alternazioni, che le dette quantità possono ricevere, prendendole in tutte le maniere possibili.

Sol. Supponendo da principio che non vi sieno che due quantità a o b , si avranno 2 alternazioni ab, ba . E siccome ciascuna di queste quantità può anche combinarsi con se stessa, si avrà ancora aa e bb ; vale a dire che il numero delle combinazioni ed alternazioni è in questo caso $2 + 2 = 4$.

Se vi sono tre quantità a, b, c , e che l'esponente della loro variazione sia 2, si avran 3 termini per le loro combinazioni, le quali faranno ab, bc, ac ; a questi 3 termini se ne aggiungeranno ancora 3 altri ba, cb, ca per le alternazioni; e finalmente 3 altri per le combinazioni aa, bb, cc : il che darà $3+3+3=9$.

In generale se il numero delle quantità è n , e l'esponente della variazione è m , n^m sarà quello di tutte le loro combinazioni ed alternazioni possibili.

Se si vuol dunque avere tutte le combinazioni ed alter-

alternazioni d'un numero n di lettere in tutte le varietà possibili, bisognerà prender la somma della serie $n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4}$ &c. finchè l'ultimo termine sia n .

Or siccome tutti i termini di questa serie son in progressione Geometrica, e si ha il primo termine n^n , il secondo n^{n-1} , e l'ultimo n , la somma di questa progressione (273) sarà

$$\frac{n^{n+1} - n}{n - 1}$$

Se per esempio, $n = 4$, il numero di tutte le combinazioni ed *alternazioni* possibili sarà $\frac{4^5 - 1}{4 - 1} =$

$$\frac{1020}{1} = 340.$$

Se $n = 24$, tutte le combinazioni ed *alternazioni* possibili faranno

$$\frac{24^{25} - 24}{24 - 1} = 32009658644406818986777955348272600$$

$\frac{24^{25} - 1}{24 - 1} = 1391724288887252999425128493402200$. Questo è l'enorme numero ch' esprime tutte le combinazioni di tutte le lettere dell' Alfabeto fra loro.

Questa teoria non serve per gl'inutili Anagrammi, ma per la scienza delle probabilità, per i giuochi d'azzardo, per le scommesse, per la certezza, e per l'importantissima Aritmetica Politica.

L I B R O III.

DELLA GEOMETRIA ELEMENTARE.

354. **N**ELLO studio che noi facciamo della natura o per necessità o per piacere, osserviamo che i corpi hanno un gran numero di proprietà, colore, figura, estensione &c. ma talmente unite per lo più nel medesimo soggetto, che affini di studiarle ciascuna più a fondo, siam obbligati a considerarle separatamente. Facendo a poco a poco collo spirito la separazione e l'astrazione di queste differenti proprietà, giungiamo finalmente a considerar i corpi, come se non fossero che semplicemente estesi, figurati, divisibili, penetrabili. Or il corpo così considerato, cioè come una porzione d'estensione terminata da per tutto, è il *Corpo Geometrico*, vale a dire l'oggetto della *Geometria*.

355. Noi consideriamo da principio e generalmente questo *Corpo* colle sue tre dimensioni, lunghezza, larghezza e profondità. Ma indi per determinare più facilmente le proprietà, consideriamo prima una sola dimensione; cioè la lunghezza; poi due dimensioni, cioè la superficie; finalmente le tre dimensioni insieme, cioè la solidità. E' appunto così che si pensa alla lunghezza d'una strada, senza far attenzione alla sua larghezza: si concepisce la superficie d'un campo, senza pensar alla profondità delle terre che lo compongono, quantunque sappiamo che non vi sia corpo senza le tre dimensioni, siccome non vi è corpo senza molte proprietà e qualità sensibili.

356. Una dimensione considerata sola, si chiama *Linea*. Due dimensioni congiunte insieme, fanno una *Superficie*. E tutte tre compongono insieme il *Corpo* o il *Solido*.

Quindi le proprietà delle *Linee*, delle *Superficie*,
e de'

e de' solidi fan l'oggetto e la divisione naturale della Geometria. La Geometria dunque è una Scienza che dimostra le proprietà delle quantità continue, o sia dell'estensione.

C A P I T O L O I.

Della Linea, o della Longimetria.

357. I Geometri soglion concepire la linea formata dal movimento d'un punto.

Se il punto non muta direzione, la linea descritta da questo moto dicesi *Retta*; se poi il punto cambia nel suo moto continuamente direzione, la linea si chiama *Curva*.

Altri definiscon la linea retta la più breve che può trarsi tra due punti.

Ma l'idea, che ciascun ha della linea retta e della curva, è così semplice e chiara, che non si può ben definire.

358. E' per altro evidente, 1.^o che la linea retta è la più corta che possa trarsi fra due termini, e che per conseguenza ella è la misura precisa della loro distanza.

2.^o Che non vi è che una sola specie di linea retta, ma di curve ve n'è un'infinità.

3.^o Che la posizione di due punti basta per determinare quella d'una linea retta; ma che ce ne vogliono più di due per determinare la posizione d'una curva.

Proprietà delle Linee Rette nella posizione d'una retta riguardo ad un'altra.

359. Concepisca una retta immobile AB (che si potrà chiamare la fissa) posta sopra un Piano immobile (fig.^a 1); supponga un'altra retta mobile AB ugual alla prima, e talmente distesavi sopra, che non faccia con essa prima che una stessa linea retta. Concepi-

cepiscasi in mezzo a questa retta un punto E, fu cui giri la mobile AB; in guisa che la sua parte EA avendo descritto sullo stesso Piano la traccia AOB, venga a posarsi esattamente sulla parte EB della fissa; mentre che la parte EB della mobile avendo descritto la traccia BVZA vien a posarsi esattamente sulla parte fissa EA.

Ciò posto, la mobile avrà descritta una figura, alle cui parti si son dati più nomi, ch'è necessario sapere.

360. *Definizioni I.* Tutta la figura descritta dalla mobile, si chiama un *Circolo*. La curva ARBYA che lo termina, dicesi la *Circonferenza del Circolo*, e il punto E intorno a cui la circonferenza è descritta, si chiama il *Centro*.

361. II. Le parti determinate qualunque d'una circonferenza, come AN, ANO, ORT &c. diconsi *Archi* di circoli.

362. III. La linea EA, la quale col suo movimento sul centro E descrive il circolo, si chiama il *Raggio del circolo*. Generalmente diconsi *Raggi* tutte le rette tirate dal centro d'un circolo alla sua circonferenza, come EO, ER, EX &c.

363. *Corollario*. Quindi tutti i raggi d'uno stesso circolo o di due circoli uguali, son uguali tra loro. Onde si può definir il circolo, una figura terminata da una curva, di cui tutti i punti son ugualmente lontani da un punto in dentro, detto *Centro*.

364. IV. La retta AB, che divide il circolo in due parti uguali passando pel suo centro, si chiama il *Diametro del circolo*. E *Diametri* generalmente diconsi tutte le rette, le quali passando pel centro terminano da una parte e l'altra nella circonferenza, come OV, PX, RZ &c.

365. La circonferenza di ciascun circolo si divide in 360 parti uguali dette *gradi*; (80) ciaschedun grado si soddivide in 60 parti uguali dette *minuti*, e ciaschedun minuto in 60 *secondi*, ciascun secondo in 60

terzi &c. Queste parti non sono grandezze assolute, come son le misure de' pesi, piedi &c. ma son grandezze proporzionate alla grandezza del circolo; in maniera che un grado di un gran circolo è maggiore d' un grado d' un piccolo circolo.

366. Si esami ni ora quel che accade pel movimento della mobile. E' chiaro, I. che prima che la mobile avesse incominciato a muoversi, ella non tagliava la fissa, nè l'era inclinata; ma tutti i suoi punti coprivano esattamente tutti i punti corrispondenti della fissa.

367. II. Che la mobile non può girare sopra uno de' suoi punti, per esempio, E, senza che tutti gli altri punti non si muovano nello stesso tempo, e non faccia ciascuno ugual numero di passi.

368. III. Subito che la mobile incomincia a muoversi, tutti i suoi punti si allontanano da una parte e l'altra da' punti corrispondenti della fissa tanto più, quanto più lontani si trovano dal punto E, che resta comune alle due linee; per conseguenza la mobile taglia la fissa nel punto E, e le parti di questa mobile divengon inclinate a quelle della fissa. Per esempio, quando nel suo movimento la mobile è divenuta NET, non l'è rimasto altro di comune colla fissa, che il punto E; il punto N si è scostato dal punto A molto più di qualunque altro punto compreso tra N ed E, come n dal suo corrispondente a nella fissa, benchè questo punto n abbia fatto tanti passi per venire da a in n , quanti il punto N ne ha fatti per venire da A in N. Lo stesso è del punto T riguardo a B. La linea NET ha dunque tagliata la fissa in E, e le sue parti NE, ET son divenute inclinate sulla fissa. Onde l'idea d' *inclinazione di due rette* chiude quella della lor intersezione attuale o possibile col prolungarle.

369. Una retta che è inclinata ad un'altra, e che la taglia, o termina ad incontrarla, fa con essa un *angolo* al punto dell'incontro; così le parti NE, AE fanno in E l'angolo NEA.

370. Un angolo esprime la quantità dell' allontanamento.

mento di una retta rapporto un' altra ch' ella incorra; onde quanto più queste rette sono discossi, tanto maggior è l' angolo, ch' esse fanno.

371. E' chiaro che la misura dell' allontanamento di due rette è il numero de' passi uguali, che ciascun punto della mobile ha fatti per allontanarsi dal punto corrispondente della fissa; perchè se il punto A della mobile ha fatto una volta più passi per venire da A in P, che per venire da A in N, è manifesto ch' essendo in P, si è allontanato del doppio di quel ch' era essendo in N, e per conseguenza l'angolo AEP è doppio dell' angolo AEN. E' anche evidente che il punto *a* della mobile ha fatto tanti passi per venir in *n*, poi in *p*, quanti ne ha fatti il punto A per venir in N, poi in P; onde il punto *a* ha fatto una volta più passi per venir in *p* che per venir in *n*, la linea EP si è slontanata dalla fissa AE una volta più che la linea EN. Donde si segue:

372. Teorema I. Che la misura d' ogni angolo rettilineo è l' arco d' un circolo qualunque che ha il centro alla sommità dell' angolo, e che si trova compreso fra due rette, che formano l' angolo. Onde lorchè si dice che un angolo è di 20 gradi, significa che ha per misura un arco di circolo di 20 gradi.

373. Teor. II. Che tutti gli angoli aventi per misura archi di ugual numero di gradi, son uguali fra loro; e reciprocamente che tutti gli archi descritti in un medesimo angolo o in angoli uguali, avendo il loro centro alla sommità dell' angolo, sono d' uno stesso numero di gradi.

374. Teor. III. Ch' essendo nota la grandezza d' un angolo, si conosce la grandezza d' un arco che può esser intercetto fra suoi lati; e reciprocamente, che nota la quantità de' gradi d' un arco, si sa la grandezza dell' angolo, il qual ha il vertice nel centro dell' arco, e co' suoi lati abbraccia l' arco stesso.

375. Essendo l' angolo una mera inclinazione ed apertura di linee, non può dirsi propriamente estensione o quantità, perchè una mera apertura di linee non

ha parti, e perciò l'angolo non è (rigorosamente parlando) una quantità.

I Geometri per questa ragione han presa la misura dell'angolo dall'arco del circolo. Quando dunque si dice, che un angolo è doppio d'un altro, ciò significa solamente, che l'arco descritto dalla sommità dell'uno è doppio dell'arco descritto dalla sommità dell'altro.

376. Or se si considera con attenzione il movimento circolare della mobile sopra la fissa, si vedrà ch'ella passa per tutte le posizioni possibili riguardo a quella, con cui ella fa ancora tutti gli angoli possibili.

Tutti questi angoli si chiaman *acuti*, come AEN, AEO &c. finchè la mobile inclina più dal lato AE, donde è partita, che dal lato della parte fissa opposta EB.

377. Questi angoli diconsi *retti*, come AEP, PEB, quando la mobile divenuta PE, non inclina più verso AE che verso EB.

378. Una retta che fa un angolo retto con un'altra, le è *perpendicolare*. Così PE è perpendicolare ad AE o ad EB, o anche a tutta la retta AB; reciprocamente EA, EB, o AB, sono perpendicolari ad EP.

379. Gli angoli diconsi *ottusi*, come AEQ, AER &c. quando la mobile è divenuta più inclinata verso la parte fissa EB, che verso la parte fissa AE donde ella è partita.

Tutto ciò si può applicar alla mobile EB, che descrive il semicircolo BVZA.

380. Teor. IV. *Tutti gli angoli acuti son più piccoli de' retti e degli ottusi, e tutti gli angoli retti son minori degli ottusi.*

381. Teor. V. *Vi è un'infinita specie d'angoli acuti e di ottusi, ma l'angolo retto è unico nella sua specie.*

382. Teor. VI. *Gli angoli retti son tutti uguali fra loro; perchè son formati da rette, le quali nel lor incontro non inclinano più, da una parte che dall'altra.*

383. Coroll. I. La misura di due angoli retti è una semicirconferenza di circolo; e per conseguenza, quella d'un angolo retto è un arco di 90. gradi.

384. Coroll. II. Un angolo acuto ha per misura un arco minore di 90°, ed un angolo ottuso ha per misura un arco maggiore di 90° (380).

385. Teor. VII. Per un punto dato in una retta non può passare che una sola perpendicolare a quella retta in un medesimo piano; perchè non può esservi che un caso, in cui la mobile non sia inclinata sia verso la parte fissa EA, che verso la parte fissa EB.

386. Teor. VIII. Tutta la circonferenza d'un circolo non può misurare che quattr' angoli retti; poichè tutta la circonferenza APBXA è occupata da quattr' angoli retti AEP, PEB, BEX, XEA; o pure perchè $4 \times 90^\circ = 360$ gradi.

387. Coroll. Dunque la somma di tutti gli angoli possibili formati in un medesimo punto E, non può eccedere 360.° o il valore di quattr' angoli retti.

388. Teorem. IX. Una retta qualunque, come OE cadendo sopra un' altra AB fa con lei due angoli AEO, OEB, de' quali la somma equivale sempre 180°, o la misura di due angoli retti; poichè i due archi ANO, ORB, che li misurano, formano la semicirconferenza AORB.

389. Coroll. Tutte le rette, FE, NE, OE &c. che terminano nello stesso punto E d' una retta AB, vi fanno degli angoli, de' quali la somma è 180°.

390. Chiamasi angolo di supplemento quello che unito ad un altro, fa con esso 180°. Tal è OEB riguardo ad OEA, o OEA riguardo ad OEB. Angolo di complemento è quello che unito con un altro, fa con esso un angolo retto o di 90 gradi; tal è PEO riguardo ad OEA.

391. Teor. X. De' quattr' angoli AEO, OEB, BEV, VEA, formati dall' intersezione di due rette, AB, OV, i due che son opposti alla sommità, son uguali; onde $OEB = VEA$, $AEO = BEV$.

Dimostraz. La parte EA della mobile AB non può far un passo per accostarsi verso O, se l'altra parte EB non ne fa uno per andar verso V. Dunque EA fa tanti passi per divenir EO, quanti EB per divenire EV: dunque l'arco AO è di tanti gradi, di quanti è l'arco BV. Dunque l'angolo $AEO = BEV$. Nella stessa maniera si dimostra che l'angolo $OEB = VEA$.

Coroll. Se si conosce uno de' quattr' angoli formati dall'intersezione di due rette, si conoscon anche tutti gli altri.

Proprietà delle Linee rette nella posizione di una riguardo a due, o a più altre, senza racchiudere spazio.

392. Concepiscasi prima una retta CD, (fig. 2.) talmente posta riguardo alla fissa AB, che ne sia da per tutto ugualmente distante, come se la retta AB avesse talmente scorso da AB in CD, che la sua parte IC non avesse mai inclinato più verso AE, che ID verso EB; in questo caso la retta CD è detta *parallela* ad AB, ed è chiaro che queste due rette non possono giammai tagliarsi per quanto si prolunghino, ed in conseguenza non han alcuna inclinazione l'una verso l'altra. Facciasi poi girare (come si è fatto avanti) la mobile AB sopra il punto di mezzo E, si vedrà evidentemente.....

393. I. Che la mobile non potrà giammai incontrar la retta CD, finchè rimarrà stesa sulla fissa AB; perchè l'una e l'altra non fanno allora che una sola e stessa linea retta parallela a CD.

394. H. Che subito che la mobile AB avrà fatto il minimo movimento sul punto E, ella potrà incontrar e tagliare CD, se si suppongono prolungate a sufficienza; perchè allora una parte de' punti che compongono la mobile AB, si farà tanto più avvicinata verso la retta CD, e l'altra parte se ne farà tanto più allontanata, quanto più questi punti si son allontanati dal punto E (368).

395. III. Che la mobile passando per tutti i gradi possibili d' inclinazione riguardo alla fissa , acquisterà ancora tutti gli stessi gradi d' inclinazione riguardo alla parallela CD , in guisa ch' ella farà sempre con questa parallela gli stessi angoli che colla fissa .

Poichè suppongasì la mobile restata nella posizione NT , e confusa con AB , venga indi a collocarsi in CD scorrendo parallelamente ad AB , vale a dire non prendendo alcuna inclinazione rapporto ad AB ; è chiaro che NT ed AB essendo restate fisse , la retta GD non ha potuto acquistare altra inclinazione rapporto a NT , che quella che avea nella posizione AB ; onde l' angolo CGN che misura la sua inclinazione rapporto a NT , è ugual all' angolo AEN , il quale misura l' inclinazione di AB rapporto a NT . Per la stessa ragione gli angoli TEB , EGD son uguali , e AET , CGE , NGD , NEB son anche uguali fra loro ; e gli angoli acuti son i supplementi degli angoli ottusi (332) , e reciprocamente gli angoli ottusi sono supplementi degli acuti .

L' angolo TEB si chiama *alternò esterno* riguardo all' angolo CGN , come anche l' angolo TEA riguardo all' angolo NGD . E l' angolo AEG dicesi *alternò interno* riguardo all' angolo EGD , come GEB riguardo a EGC .

Lo stesso si dimostrerà di tutte le rette NT , OV &c. rapporto ad AB ed a CD .

396. Teor. I. Una linea qualunque EG , che taglia due parallele AB , CD , fa con loro gli angoli alterni interni uguali , gli angoli alterni esterni uguali , due angoli interni BEG , EGD supplementi l' uno dell' altro , e due angoli esterni TEB , DGN anche supplementi l' uno dell' altro , cioè uguali a due retti : e reciprocamente , sempre che due rette BE , DG cadendo sopra una retta TN , fanno gli angoli alterni interni uguali , o gli angoli alterni esterni uguali , o due angoli interni BEG , EGD supplementi l' uno dell' altro , o due angoli esterni TEB , DGN , anche supplementi l' uno dell' altro , queste due rette , BE , DG

son parallele. Perchè ciò non può mai accadere, sempre che queste due linee EE , DG non abbian alcuna inclinazione l'una riguardo all'altra.

397. Osservaz. Quel che quì si dice di due rette parallele, deve intendersi di quante rette si voglia, lorchè faran tutte parallele fra loro. Perchè la proprietà della prima parallela riguardo alla seconda, son le stesse che quelle della seconda riguardo alla terza, e quelle della terza son le stesse riguardo alla quarta, e così dell'altre.

398. IV. Se la mobile continua a girare, è chiaro che i punti F , G , H , della sua intersezione con CD , faran tanto più vicini al punto E , quanto più la mobile si approssimerà a divenir perpendicolare alla fissa AE ; in maniera che quand'ella lo farà divenuta, il punto I della sua intersezione con CD sarà vicino al punto E il più ch'è possibile; indi continuando la mobile andare verso EB , i punti d'intersezione K , L , M diverranno tanto più lontani da E , quanto più la mobile inclinerà verso EB .

399. V. Dunque quando la mobile penderà tanto verso la fissa EE , essendo divenuta ER , quanto pendeva verso AE lorchè era EN ; o ciò ch'è lo stesso, quando gli angoli AEN , BER , o NEP , REP faranno uguali, i punti d'intersezione G , L , faranno in ugual distanza dal punto E e dal punto I , vale a dire, sarà $GI = IL$, $GE = LE$.

Per convincersene, convien concepire tutta questa Figura 2 piegata sulla perpendicolare EP ; perchè allora è chiaro, che AE sarà stesa esattamente sopra EB , IG sopra ID , l'arco AN sopra l'arco uguale BR , e l'arco NP sopra il suo uguale PR ; dunque il raggio NE sarà esattamente steso sul raggio ER , e il punto G sul punto L ; onde $GE = LE$, e $GI = IL$.

400. Questo è il famoso principio della *Sopraposizione* sì utile alla Geometria. Da questo principio nasce questo assioma, *Son uguali tutte quelle figure che sopraposte l'una all'altra, perfettamente coincidono.*

Non

Non vale però l'inversa, come han creduto alcuni, e particolarmente il Clavio.

Questo principio di *sopraposizione* non è, come alcuni pensano, un principio meccanico, consistente ad applicar grossolanamente una figura sopra un'altra, per dedurne la lor uguaglianza, come un artefice applica il suo piede sopra una lunghezza per misurarla. Ma questo principio consiste ad immaginarsi una figura trasportata sopra un'altra, ed a conoscerne

1.^a Dall'uguaglianza supposta delle parti date, la coincidenza di queste parti. 2.^a Da questa coincidenza la coincidenza del resto, e per conseguenza l'uguaglianza totale e la similitudine perfetta delle due figure.

Per *sopraposizione* non s'intende solamente l'applicazione di una figura sull'altra, ma quella d'una parte d'una figura sopra un'altra parte della stessa figura, affin di paragonarle fra loro.

Questo principio è chiaro, semplice, ricavato dalla vera natura della cosa, e fa una rigorosa dimostrazione.

Il principio della *sopraposizione*, e quello della *Misura degli Angoli presa da un arco descritto dalla loro sommità*, son i due soli Assiomi necessari alla Geometria, fertilissimi di tutte le sue proposizioni, e dimostrazioni. Gli Assiomi che soglion si ordinariamente premetter alle Geometrie, son puerili e sterili. E che bisogno vi è degli Assiomi che il tutto è maggior della parte, per vedere che la metà della linea è più piccola della linea intiera?

401. Teor. II. Ogni perpendicolare, come EI, tirata da un punto E sopra una retta qualunque CD, è la linea la più corta che si possa tirare da questo punto a questa retta. E reciprocamente, se un retta EI è la più corta che si possa tirare da un punto E ad un'altra retta CD, le è perpendicolare; se ella le fosse inclinata, vi si potrebbe tirar una perpendicolare che sarebbe più corta.

402. Coroll. Dunque una perpendicolare è la vera misura della distanza da un punto ad una linea.

403. Teor. III. Da un punto *E* preso fuori d'una retta *CD*, non si può tirare che una sola perpendicolare *EI* sopra questa retta; perchè non vi è che un sol punto che sia il più vicino al punto *E*; nè vi è che un sol caso in cui una retta tirata da un punto sopra un'altra retta, non le sia inclinata più da una parte che dall'altra.

404. Teor. IV. Una retta, come *EI*, è perpendicolare ad un'altra *CD*, quando due de' suoi punti, per esempio, *E*, *I*, son ciascuno ugualmente lontani da due punti *G*, *L*, qualunque presi in quell'altra linea; vale a dire, se $EG = EI$, e se $IG = IL$. Perchè allora è certo che in questi due punti *E*, *I*, la retta *EI* non pende più verso *G* che verso *L*; e siccome due punti bastano per determinare la posizione d'una retta (358), perciò tutta la retta *EI* non pende più verso *G* che verso *L*.

405. Teor. V. Se due punti *G*, *L*, d'una retta son ugualmente lontani da un punto *I* della stessa retta, ove ella è tagliata da una perpendicolare *EI*, tutti i punti di questa perpendicolare son ugualmente lontani da questi due stessi punti *G*, *L*. Perchè se vi fosse qualche punto in questa perpendicolare che non fosse in ugual distanza dai punti *G*, *L*; in questo punto la perpendicolare inclinerebbe più dal lato ove la distanza sarebbe minore, e per conseguenza non sarebbe perpendicolare.

Compresa queste proprietà, farà facile risolvere i problemi seguenti.

406. Probl. I. Da un punto *C*, (figura 3.) dato fuori d'una retta data *AB*, tirar una parallela a questa linea.

Soluzione. Mettasi la punta del Compasso in *C*, e descritto coll'altra punta, aperta ad arbitrio, un arco qualunque *EK*, si planti la punta in *E*, e descrivasi colla stessa apertura l'arco *GF*, dal punto dato *C* fin

al

al incontro di AB. Prendasi col compasso la grandezza dell'arco CF, e si porti sull'arco EK da E fin a qualche punto come I, e per il punto dato G, e per il punto trovato I, si tiri la retta CID, la quale sarà parallela ad AB.

Dimostraz. Se si tira CE, si conoscerà che a causa degli archi uguali EI, CF, gli angoli CEF, ECI son uguali (373); dunque EC è una retta che taglia le rette AB, CD in maniera che gli angoli alterni interni son uguali; dunque (396) le rette CD, AB son parallele.

407. Probl. II. *Da un punto I dato sopra una retta CD alzarvi una perpendicolare* (figura 4.).

Soluz. Prendansi ad arbitrio sopra CD due punti H, K ugualmente lontani da I; e da' punti H, K come centri descrivansi colla stessa apertura di compasso due archi di circolo OER, AEB, che s'intersecano in un punto E, per cui si tiri EI; questa sarà perpendicolare a CD.

Dim. Tirati i raggi HE, KE, è chiaro che son uguali a motivo della stessa apertura di compasso; di più, $HI = IK$ per la costruzione, dunque EI è una retta, di cui due punti E, I son ugualmente lontani ciascuno dai due altri punti H, K della retta CD; dunque (404) EI è perpendicolare a CD.

408. Probl. III. *Da un punto dato E fuori d'una retta CD, menarvi una perpendicolare EG* (figura 5).

Soluz. Fissata la punta del compasso sul punto dato E, si segnino coll'altra due punti H, K sulla retta CD, che sieno ugualmente distanti da E; indi dai punti H, K come centri descrivansi colla stessa apertura qualunque di compasso gli archi OGR, AGB', che si taglian in un punto G, per cui e per il punto dato, si ritiri EG; questa sarà la perpendicolare.

Dimos. Tirati i raggi HG, KG si vedrà come di sopra (407) che i punti G, E son ugualmente lontani dai punti H, K della data retta CD, e per conseguenza GE le è perpendicolare.

409. Probl. IV. *Divider una data retta HK in due parti uguali HI, IK (figura 6.)*.

Soluz. Dalle due estremità H, K come centri, descrivansi da una parte e l'altra colla stessa apertura di compasso quattr' archi, che si taglian ai punti G, E, per i quali si tiri EG, che dividerà HK in due ugualmente.

Dim. Essendo i punti E, G ugualmente lontani dall'estremità della retta data HK, tutti i punti di questa retta EG faran ugualmente lontani da queste stesse estremità (405), onde anche il punto I ne farà ugualmente lontano.

Di alcune proprietà delle Linee Rette
riguardo al Circolo.

410. Una retta FM (figura 2, o 7) terminata dalla circonferenza d'un circolo, si chiama *Corda*, o *sottesa*; onde si dice l'Arco FPM ha per corda, o è *sotteso* dalla corda FM. La corda IK (figura 7.) sottende l'arco IPK.

411. Una porzione di circolo racchiusa tra un arco e la sua corda, come FPONF, diceasi *segmento* di circolo; ed una porzione PEO o AEF racchiusa tra un arco e due raggi, si chiama *settore* di circolo.

412. Teor. I. *Una perpendicolare EP tirata dal centro E d'un circolo sopra una corda FM, la divide in due ugualmente.*

Dim. Poichè la linea EP viene dal centro del circolo, ella ha un punto E, ch'è ugualmente lontano dalle estremità F, M della corda; e poichè è inoltre perpendicolare alla corda, tutti gli altri punti sono (405) ugualmente lontani da queste stesse estremità F, M. Dunque il punto I n'è ugualmente lontano, dunque $FI = IM$.

413. Teor. II. *Reciprocamente, ogni retta EP, che passando pel centro E d'un circolo, taglia in due ugualmente una corda FM, è perpendicolare a questa corda.*

Dim.

Dim. Poichè EP taglia la corda in due ugualmente, ella ha un punto I ugualmente distante dalle sue estremità F, M; e poichè ella passa per il centro E, ella ha ancora un punto E ugualmente lontano da queste estremità F, M. Dunque EP è una retta, che ha due punti I, E ugualmente lontani dai punti F, M della corda FM; dunque (404) EP è perpendicolare a FM.

414. Teor. III. Similmente, se una retta EP perpendicolare ad una corda FM la taglia in due ugualmente, ella passa pel centro del circolo.

Dim. Se ella taglia la corda in due ugualmente, ella ha un punto I, ugualmente distante dalle estremità F, M; e se ella è perpendicolare, anche tutti gli altri suoi punti son ugualmente distanti dalle estremità F, M (405). Or il centro E è un punto ugualmente distante dalle estremità F, M (363); dunque il centro E è un de' punti, per ove passa la perpendicolare.

415. Se si fa girar la corda FM nel suo circolo, in maniera che le sue estremità F, M sieno sempre nella circonferenza, è chiaro, 1.º che questa corda sottenderà sempre un arco uguale. 2.º Ch'ella sarà sempre ugualmente lontana dal centro. Perchè in questo movimento si può concepire, che la figura FEM giri tutta intiera sul punto E, seguendo i raggi EF, EM sempre la corda. Perciò l'angolo FEM resterà sempre lo stesso, e per conseguenza la sua misura sarà sempre un arco uguale all'arco FPM. Si vede anche che la linea EI rimarrà sempre la stessa in questo movimento. Dunque

416. Teor. IV. In uno stesso circolo, o in circoli uguali, le corde uguali sottendono archi uguali; le corde inuguali sottendono archi inuguali; e nello stesso tempo le corde uguali son in ugual distanza dal centro, e le inuguali ne son inugualmente lontane. Perchè una corda che giri nel suo circolo, si stenderà sempre esattamente sulle corde che le faranno uguali, nè potrà mai spianare su corde che non le faranno uguali.

417. Teor. V. In uno stesso semicircolo, o in semi-circoli

Onde ella non può passare tra la tangente e la circonferenza.

428. Osserv. Ma vi può passar un'infinità di curve; poichè l'estremità di E può esser l'estremità d'infiniti raggi CE (fig. 31.) FE, BE, DE.

Or poichè tra la tangente e'l circolo non può tirarsi alcuna linea retta, siegue che l'angolo formato dall'arco del circolo e dalla tangente è minore di qualunque angolo rettilineo: frattanto tal angolo è diminuibile all'infinito; perchè tra la tangente e un arco possono passar infiniti altri archi.

Ha sembrato questo un paradosso, ed ha eccitato tra i Geometri una strepitosa quistione, *se l'angolo del contatto sia paragonabile all'angolo rettilineo*. Quistione di puro nome, come soglion essere tutte le quistioni Matematiche. Tutto quì dipende dall'idea che si attacca alla parola Angolo.

Se per Angolo s'intende una porzione di spazio compreso tra la curva e la sua tangente, è chiaro che questo spazio è paragonabile ad una porzione finita di quello ch'è racchiuso tra due linee rette che si tagliano.

Ma se per Angolo s'intende l'inclinazione di due linee rette, è evidente che questa nozione non può convenir all'angolo del contatto, il qual è formato da una curva e da una retta. Convien dunque dar a quest'angolo una definizione particolare, e questa definizione (ch'è arbitraria) fissata una volta, cessa ogni quistione. Una prova che tal quistione sia di puro nome, si è, che tutti i Geometri son in tutto il resto d'accordo circa le proprietà ch'eglino dimostrano riguardo all'angolo di contingenza.

429. Teor. X. L'Angolo BAD (figura 9.) formato al punto del contatto A tra una tangente Bb e una corda AD, è misurato dalla metà dell'arco AFD sotteso dalla corda AD.

Dimostraz. Si tiri pel centro C il diametro EG parallelo alla corda AD, il diametro Ff perpendicolare a questa corda, e il raggio CA al punto del contatto.

L'an-

L'angolo BAC è retto (423), come lo è anche l'angolo FCG: dunque tutti due hanno l'arco FG per misura. L'angolo BAD per esser retto, ha bisogno dell'angolo DAC, o del suo uguale ACG (395). Or l'angolo ACG ha per misura l'arco AG, dunque l'arco FA sarà la misura dell'angolo BAD. Ma l'arco FA è la metà dell'arco AFD (418); dunque l'angolo BAD è misurato dalla metà dell'arco AD.

Rileggendo la stessa dimostrazione, e mettendo *b*, *f* in luogo di *B*, *F*, si conchiuderà che $\frac{1}{2}$ AFD è la stessa misura dell'angolo BAD.

430. Teor. XI. L'angolo (figura 10.) formato alla circonferenza d'un circolo, è misurato dalla metà dell'arco CD intercetto tra i suoi lati AC, AD.

Dimostraz. Per la sommità A dell'angolo si tiri (426) una tangente EB, e la somma de' tre angoli BAC + CAD + DAE = 180° (389) = $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CD + $\frac{1}{2}$ DA. Or (429) l'angolo BAC è misurato da $\frac{1}{2}$ AC, e l'angolo EAD da $\frac{1}{2}$ AD; dunque l'angolo CAD è misurato da $\frac{1}{2}$ CD.

431. Coroll. I. L'angolo DFC al centro d'un circolo è doppio dell'angolo DAC alla circonferenza, e appoggiato sullo stesso arco.

432. Coroll. II. Un angolo retto posto nella circonferenza d'un circolo comprende co' suoi lati un semi-circolo, ed è appoggiato sopra un diametro. Un angolo acuto comprende meno d'un diametro, ed è appoggiato per conseguenza sopra una corda. Ed un angolo ottuso comprende più d'un semi-circolo, ed è anche appoggiato sopra una corda.

433. Coroll. III. Tutti gli angoli che mai si vorranno, FNM, FPM, FRM &c. (fig. 8.) descritti in uno stesso segmento, ed appoggiati alla stessa corda FM, son fra loro uguali.

434. Teor. XII. L'angolo BAD (fig. 11. e 12.) formato al di dentro o al di fuori del circolo, ha per misura $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ CE; il segno + è per l'angolo al di dentro (fig. 11), il segno — è per l'angolo al di fuori (fig. 12).

Dimostr. Per A si tiri AD parallela alla corda EF, l'angolo BEF = BAD. Or la misura dell'angolo BEF è $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ DF, e (420) DF = CE. Dunque $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ CE.

435. Coroll. L'angolo bAD (fig. 12) tra una tangente Ab e una retta AD che traversa il circolo, ha per misura $\frac{1}{2}$ Db - $\frac{1}{2}$ bC. Perchè facendo girare AB sul punto A, finchè divenga tangente in b, i punti E, B si confonderanno in b. Per la stessa ragione l'angolo dAb compreso tralle due tangenti Ad, Ab ha per misura $\frac{1}{2}$ dEb - $\frac{1}{2}$ dCb.

436. Osserv. Quindi un angolo, la cui sommità si situi ove si voglia, sarà determinato, se i suoi lati (prolungati se è necessario) taglino o tocchino una circonferenza di circolo in punti determinati.

437. Teor. XIII. Se quattro corde formano un quadrilatero iscritto in un circolo, il prodotto delle due diagonali di questo quadrilatero è ugual alla somma de' due prodotti di ciascun lato per il lato opposto.

Dimostr. Facciasi con BC (fig. 38.) l'angolo BCF = DCA, o, ch'è lo stesso, facciasi con CA l'angolo ACF = DCB; allora a causa degli angoli uguali ABC, CDA (433), i triangoli DAC, BCF son simili, dun-

que $AD:BC::BF:DC$ (264). Similmen-

te a causa degli angoli ACF = BCD, e CDB = CAB, i triangoli DBC, AFC son simili; dunque $DC:AC::$

$BD:AF$

Unendo queste due equazioni, si ha $BF + AF$, ovvero $AB = \frac{AD \times BC + BD \times AC}{DC}$, e per conseguen-

za $DC \times AB = AD \times BC + BD \times AC$.

438. Probl. I. Divider un arco dato in due archi uguali.

Soluz. S'immagini una corda tirata per l'estremità

rà dell' arco , e si tagli in due ugualmente per una perpendicolare (409) , anche l' arco farà tagliato in due parti uguali (418).

439. Probl. II. *Divider un angolo dato in due parti uguali.*

Soluz. Centro il vertice dell' angolo descrivasi un arco qualunque tra i due lati dell' angolo ; dividasi quell' arco (438) in due parti uguali , e pel vertice dell' angolo si tiri una retta nel mezzo dell' arco ; quella dividerà l' angolo dato ugualmente in due.

440. Osserv. Quindi ogni arco e ogni angolo dato può dividersi in 2, 4, 8, 16, 32 &c. parti uguali che son i termini d' una progressione geometrica doppia . Ma non si può divider geometricamente colla regola e col compasso un arco o un angolo qualunque in tre parti uguali. Questo è il famoso problema della *Trisezione dell' Angolo* tanto cercato dagli Antichi. Con più forte ragione non può dividersi un arco in 5, 6, 7, 9 &c. parti uguali per mezzo della Geometria Elementare.

441. Probl. II. *Far passar una circonferenza del circolo per tre punti.*

Soluz. E' evidente che questo problema sarebbe impossibile, se i tre punti fossero in linea retta. Si tirino o s' immaginino due rette che congiungano i tre punti dati : saran queste due corde del circolo cercato.

Si divida ciascuna in due parti uguali (408) per mezzo di due perpendicolari che passeranno (414) pel centro del circolo , il quale per conseguenza sarà nella lor intersezione.

442. Probl. IV. *Trovar il centro d' un circolo , d' un arco dato.*

Soluz. Si tirino due corde qualunque in questo circolo, o arco ; e si cerchi (441) il centro.

443. Probl. V. *Continuar un arco di circolo dato in un circolo intiero.*

Soluz. Si cerchi (442) il centro di quell' arco.

Proprietà delle Linee Rette, che racchiudono uno spazio.

444. *Definizioni.* Le rette che per loro incontro racchiudono uno spazio, compongono una figura rettilinea. Or l'incontro di più rette non può farsi che con angoli, perciò una figura rettilinea si chiama *Poligono*.

445. Un Poligono in generale significa uno spazio rinchiuso tra più rette, che si dicon *lati*, e che unendosi gli uni agli altri per ciascuna estremità, formano in conseguenza *tanti angoli quanti lati*.

446. Finalmente si concepisce, che ci voglion almeno tre linee rette per rinchiuder uno spazio; perciò il primo e il più semplice de' Poligoni è il *Triangolo*; il secondo è il *Quadrilatero* o *Tetragono*, vale a dire una figura di 4 angoli e di 4 lati; il terzo è il *Pentagono*, cioè una figura di 5 angoli e di 5 lati; il quarto è l'*Esagono* di 6, indi l'*Ettagono* di 7, l'*Ottagono* di 8, l'*Enneagono* di 9, il *Decagono* di 10, l'*Endecagono* di 11, il *Dodecagono* di 12. &c. l'*Ecatagono* di 100, il *Chilogono* di 1000, il *Miriogono* di 10000.

Siccome tutte queste figure si riferiscono al *Triangolo*, è ben necessario incominciar da questo.

De' Triangoli.

Delle differenti specie e proprietà de' Triangoli.

447. Il Triangolo prende differenti nomi secondo i differenti rapporti de' suoi lati, e de' suoi angoli.

Rapporto ai suoi lati. Un Triangolo, di cui i tre lati son uguali tra loro, come ABC (fig. 14) si chiama *Equilatero*.

Quello, di cui due lati AC, AB (fig. 15) son uguali, dicesi *Isocele*.

E quel-

E quello, di cui i tre lati son ineguali, come ABC (fig. 10) si chiama *Scaleno*.

448. Rapporto a suoi angoli. Un triangolo, di cui i tre angoli son acuti, come ABC (fig. 14) dicesi *Acutangolo*. Quello che ha un angolo retto A (fig. 15) rettangolo; e quello che ha un angolo ottuso C (fig. 16.) *ottusangolo*.

449. In un triangolo rettangolo ABC (fig. 15.) il lato BC opposto all'angolo retto, si chiama l'*Ipotenusa*.

450. In un triangolo qualunque il lato opposto a un angolo, si chiama la *base* di quest'angolo.

451. Teor. I. Ogni Triangolo può iscriversi in un circolo, vale a dire, si può far passar un circolo per i tre angoli d' un triangolo qualunque; perchè è lo stesso che far passar un circolo per i tre punti dati (441).

452. Teor. II. La somma de' tre angoli di un triangolo qualunque è di 180 gradi, o equivale a due angoli retti.

Dimostr. Avendo iscritto un triangolo qualunque in un circolo, i tre lati ne sono le tre corde; e ciascun angolo ha per misura (430) la metà dell' arco sortelo dal lato opposto; la somma de' tre angoli è dunque uguale alla metà della somma de' tre archi, vale a dire alla metà della circonferenza del circolo, o a 180°.

453. Coroll. I. Un triangolo non può avere che un sol angolo retto, o un sol ottuso, e allora gli altri due son necessariamente acuti.

454. Coroll. II. In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è complemento dell' altro.

455. Coroll. III. Se si conoscono due angoli d' un triangolo qualunque, se ne può conoscer il terzo. Perchè egli è ugual alla differenza tra 180° e la somma de' due angoli noti. E se non se ne conosce che uno, il suo supplemento è ugual alla somma degli altri due.

456. Teor. III. In un triangolo qualunque ABC
O 3 (fig.

(fig. 14) se si prolunga un lato qualunque BC , l'angolo esterno ABI è ugual alla somma de' due angoli interni opposti ACB , CAB .

Dimostr. La somma dell'angolo esterno ABI e dell'interno contiguo ABC è di 180° (383) ; ma (432) la somma de' due angoli ACB , CAB , e dell'angolo ABC è anche di 180° . Dunque l'angolo esterno ABI è ugual alla somma de' due interni opposti ACB , CAB .

457. Teor. IV. Se da un punto qualunque D preso al di dentro d'un triangolo CAB (fig. 15.) si tirano due rette DA , DB sull'estremità d'un lato qualunque AB ; l'angolo ADB compreso da queste rette, è maggiore dell'angolo BCA opposto a questo lato AB .

Dimostr. Iscritto il triangolo ABC in un circolo, la misura dell'angolo ACB è la metà dell'arco sotteso dalla corda BA (430), laddove la misura dell'angolo BDA è questa stessa metà, più la metà dell'arco interdetto dal prolungamento de' lati BD , AD (434).

458. Teor. V. In un triangolo qualunque la somma di due lati qualunque è più grande del terzo lato.

Dimostr. La retta AB (fig. 16) è la più corta per andare da A in B . Dunque se si andasse da A in B passando per C , non si anderebbe pel cammino più corto, e si descriverebbero allora i due lati AC , CB ; dunque la somma de' due lati AC , CB è maggiore del terzo AB .

459. Teor. VI. In qualunque triangolo il più gran lato è opposto al più grand'angolo, e il più piccolo lato al più piccol'angolo. Reciprocamente &c.

Poichè iscritto il triangolo in un circolo, il più grand'angolo è misurato dal più grand'arco, il più grand'arco (417) è sotteso dalla più gran corda; e reciprocamente.

460. Coroll. Se si suppone che l'angolo d'un triangolo si apra sempre più, mentre i due lati che formano quest'angolo, restano della stessa grandezza, il terzo lato opposto all'angolo che cresce, crescerà anche
che

bo vie più. E reciprocamente, diminuirà, lorchè l'angolo opposto diminuirà.

461. Teor. VII. Una perpendicolare tirata da un angolo di qualunque triangolo sulla base, cade al di dentro del triangolo, se i due altri angoli son acuti; al di fuori, o sul prolungamento di questa base, se uno de' due angoli è ottuso.

Dimostr. 1.^a Se nel triangolo GEK (fig. 2.) gli angoli KGE, EKG son acuti, la perpendicolare EI cade tra K e G. Perchè se ella cadesse al di là, per esempio, si supponesse che EL fosse questa perpendicolare, allora il triangolo EKL avrebbe un angolo retto ELK e un angolo ottuso EKL (poichè il supplemento d'un angolo acuto è un angolo ottuso), il che è impossibile (453). Dunque la perpendicolare tirata dall'angolo GEK non può cader altrove che tra G e K.

2.^a Se uno degli angoli del triangolo FEH è ottuso, la perpendicolare tirata dall'angolo FEH sul lato opposto FH non può cadere che verso I, sul prolungamento di questo lato. Perchè se si supponesse che EG fosse questa perpendicolare; allora nel triangolo EGH si avrebbe un angolo retto HGE, e un angolo ottuso EHG, il che è impossibile. Dunque ella non può cadere che dal lato del supplemento dell'angolo ottuso, cioè verso I.

462. Teor. VIII. In un triangolo equilatero tutti gli angoli son uguali fra loro, e ciascuno di, 60° ; e reciprocamente se i tre angoli d'un triangolo son uguali fra loro, o se due son ciascun di 60° , il triangolo è equilatero. Poichè iscritto il triangolo in un circolo, i tre lati uguali sono tre corde uguali, che s'intendono in conseguenza tre archi uguali, i quali misurano tre angoli uguali, de' quali ciascun è il terzo di 180 gradi, &c.

463. Teor. IX. In un triangolo isoscele, gli angoli opposti ai lati uguali son uguali; e reciprocamente, se due angoli d'un triangolo son uguali, il triangolo è isoscele.

Perchè iscritto il triangolo in un circolo, gli angoli uguali intercettano archi uguali, e gli archi uguali sono sottesi da corde uguali (416).

464. Coroll. Se dall'angolo E (fig. 2) formato dai lati uguali EG , EL del triangolo isoscele EGL , si abbassa al lato opposto GL una perpendicolare EI , ella dividerà questo lato in due parti uguali GI , IL ; a causa delle inclinazioni uguali de' due lati uguali GE , LE (399).

465. Teor. X. Ogni triangolo è circoscrivibile al circolo.

Dimostr. Se dividonsi in due ugualmente due angoli qualunque d'un triangolo, per esempio, gli angoli B e A del triangolo ABC (fig. 15) le due rette BD , AD che li divideranno, s'incontreranno in un punto D . Or se da questo punto si abbassano sopra i tre lati le perpendicolari DG , DF , DE , elle saranno uguali fra loro, e per conseguenza potranno esser i raggi d'uno stesso circolo, il quale toccherà i tre lati ai punti G , F , E (425).

Perchè i triangoli rettangoli GBD , BDE son uguali, a causa dell'angolo in B ugual in ciascuno, e del lato comune BD . Dunque $GD = DE$. Per la stessa ragione i triangoli rettangoli uguali DEA , DFA danno $DE = DF$. Dunque $GD = DE = DF$.

466. Coroll. Le tre rette che dividon in due ugualmente i tre angoli d'un triangolo vanno ad incontrarsi in uno stesso punto nel triangolo. Poichè è chiaro che se si divid. se l'angolo C in due ugualmente per una retta, ella incontrerebbe il punto D .

Della comparazione de' Triangoli.

467. I Triangoli e tutte l'altre figure si paragonan in due maniere; o considerando la posizione de' lati, e la grandezza degli angoli e delle figure; o considerando gli spazj che vi son contenuti. Questa seconda maniera appartien all'articolo delle superficie; perciò qui non si parlerà che della prima.

Di-

Diconsi *triangoli uguali* fra loro quelli, de' quali tutti gli angoli, e tutti i lati son uguali fra loro, e l'uno all'altro.

468. Diconsi *triangoli simili*, o *equiangoli* quelli, de' quali tutti gli angoli solamente son uguali, ciascuno a ciascuno. Così i triangoli ABC , DEF (fig. 16) sono simili, perchè l'angolo $A=E$, l'angolo $B=D$, e $C=F$.

469. Quando si paragonan figure fra loro, diconsi *parti omologhe* quelle che sono della stessa denominazione di grandezza in ciascuna figura.

Ne' due triangoli simili, per esempio il più gran lato dell'uno è omologo al più gran lato dell'altro, il mezzano lato dell'uno è omologo al mezzano lato dell'altro ec.

470. Teor. I. Due triangoli che han tutti i loro lati omologhi uguali, son uguali tra loro.

Dimostr. Se $AB=ab$, $AC=ac$, $BC=bc$ (fig. 17.) il triangolo ABC = triangolo abc . Dai punti A e B come centri descrivansi gli archi FCG , DCE che si taglian alla sommità C . Si applichi poi il triangolo abc sul triangolo ABC , mettendo il punto a sul punto A ; a causa di $AB=ab$, il punto b caderà su B : ed a causa di $ac=AC$, la linea ac terminerà in qualche parte nell'arco FCG . Similmente a causa di $bc=BC$, qualche parte della linea bc terminerà nell'arco DCE . Ma perchè le linee ac , bc si uniscon in c , termineran dunque tutte due nel punto C dell'intersezione de' due archi. Dunque ac sarà esattamente distesa su AC , e bc su BC ; e per conseguenza tutto il triangolo abc su tutto il triangolo ABC . Dunque questi due triangoli saran uguali.

471. Teor. II. Due triangoli son uguali fra loro, lorchè tutti gli angoli dell'uno essendo uguali a tutti gli angoli dell'altro, han ciascuno un lato omologo uguale.

Dimostr. Se l'angolo $A=a$, $B=b$, $C=c$ (fig. 13), e $AB=ab$, il triangolo ABC = abc . Si metta il lato ab su AB , ponendo il punto a su A , e b su B ; è
ch'è ro

chiaro ch'essendo l'angolo $a = A$, e $b = B$, il lato ac caderà necessariamente sul lato AC , e bc su BC ; dunque il punto c caderà sul punto C , e il triangolo abc coprirà esattamente il triangolo ABC .

472. Teor. IH. *Due triangoli son uguali, se ciascuno ha due lati omologhi uguali, ed uguale l'angolo compreso tra questi lati.*

Dimostr. Se il lato $AC = ac$, $AB = ab$, e l'angolo $A = a$, i triangoli ABC , abc son uguali. Si applichi ab su AB , e ac su AC ; essendo uguali gli angoli A , a , questi lati caderanno esattamente gli uni sugli altri.

E perchè $AC = ac$, e $AB = ab$, il punto c caderà su C , e il punto B su b . Dunque bc che misura la distanza de' punti b , c , farà uguale e caderà esattamente su BC che misura la distanza de' punti B , C . Dunque il triangolo abc coprirà esattamente tutto il triangolo ABC .

473. Teor. IV. *Se di due triangoli simili e inuguali si mette un angolo dell'uno su l'angolo eguale dell'altro, e i lati che comprendono quest'angolo del primo su i lati omologhi dell'altro; il terzo lato del primo sarà parallelo al terzo lato dell'altro.*

Dimostr. Se si mette l'angolo D (figura 16.) sull'angolo uguale B , il lato DF sul suo omologo BC , e DE sul suo omologo BA ; il lato FE o fe sarà parallelo a AC ; poichè essendo simili i triangoli, sarà l'angolo $feB = CAB$; dunque fe è parallelo a AC (396).

Se si avesse posto l'angolo F sul suo uguale C , DE sarebbe stata parallela a AB ; e se si avesse posto l'angolo E sul suo uguale A , FD sarebbe stata parallela a BC .

474. Teor. V. *Reciprocamente se per un punto espresso ad arbitrio sul lato d'un triangolo si tira una retta fe parallela alla sua base AC , i triangoli Bfe , BAC son simili; perchè gli angoli Bfe , BCA , e Bef , BAC son uguali (396).*

Degli altri Poligoni.

475. Vi sono tre specie di Poligoni, *irregolari*, *simetrici*, *regolari*.

Gli *irregolari* son quelli che hanno angoli, e lati neguali fra loro (fig. 20, 22, 23).

476. I *simetrici* son composti di lati paralleli e uguali (fig. 17, 18, 19, 21, 24, 25, 27). Donde siegue che hanno necessariamente un numero pari di lati.

477. I poligoni *regolari* son composti d' angoli e di lati tutti uguali fra loro, e similmente posti (fig. 26, 27, 28).

478. Un quadrilatero irregolare si chiama *Trapezio* (fig. 20); un quadrilatero regolare dicesi *Quadrato* (fig. 18); e un quadrilatero simetrico chiamasi *Parallelogrammo*. Se tutti i suoi angoli son retti dicesi *Parallelogrammo rettangolo*, o semplicemente *rettangolo* (fig. 21). Se i suoi angoli non sono retti, e se due de' suoi lati contigui son uguali, dicesi *Rombo* (fig. 19). E se due de' suoi lati son inuguali, dicesi *Romboide* (fig. 17).

479. Dicesi angolo *saliente* o *convesso* quello di cui il vertice esce dalla figura, come ABC (fig. 22, 25); e angolo *rientrante* o *concavo* quello di cui il vertice è indentro della figura, come BCD. Donde siegue, che non vi è che il Poligono irregolare e simetrico che possi aver angoli rientranti; poichè tutti quelli del poligono regolare sono similmente posti (477).

480. Una retta che traversa un poligono passando da un angolo all' altro, si chiama *Diagonale*.

Proprietà de' Poligoni in generale.

481. Teor. I. Tutti i poligoni si posson ridurre in tanti triangoli quanti son i lati.

Poichè da un punto C preso ad arbitrio dentro lo spazio si posson tirar delle rette a tutti gli angoli (fig. 20,

20, 23), e ciascun lato divien la base di altrettanti triangoli.

482. Teor. II. *La somma di tutti gli angoli interni d' un poligono è uguale al prodotto di 180° moltiplicato pel numero de' lati meno due lati, o meno 360° .*

Dimostr. Perchè la somma di tutti gli angoli d' un Poligono è uguale alla somma di tutti gli angoli de' triangoli, ai quali il poligono è stato ridotto, eccetto gli angoli che son dentro al punto C', de' quali (387) la somma è 360° . Or vi sono tanti triangoli quanti lati; dunque la somma di tutti gli angoli del Poligono è tante volte 180° quanti son i lati, meno 360° .

Onde se un poligono, per esempio, ha 7 lati, la somma di tutti i suoi angoli $= 180^\circ \times 7 - 2 = 900^\circ$.

483. Teor. III. *La somma di tutti i supplementi degli angoli di qualunque poligono, che non ha angoli rientranti, è di 360° .*

Dimostr. Perchè (388) ciascun angolo, più il suo supplemento $= 180^\circ$; dunque la somma di ciascun angolo d' un poligono, più il suo supplemento, è tante volte 180° , quanti son i lati; ma (482) la somma di tutti gli angoli d' un poligono è tante volte 180° quanti son i lati meno 360° ; dunque la somma di tutti i supplementi è di 360° .

484. Teor. IV. *Se un poligono ha angoli rientranti, la somma di tutti i supplementi degli angoli salienti più gli angoli rientranti, è ugual a 360° più tante volte 180° quanti sono gli angoli rientranti.*

Dimostr. E' chiaro (fig. 22) che la somma di tutti i supplementi degli angoli salienti del Poligono ABDEF, è 360° (483); ma se in questo Poligono si fa un angolo rientrante DCB, allora l'angolo GDB supplemento dell'angolo EDB si aumenta dell'angolo EDC; e l'angolo DBI supplemento di ABD si aumenta dell'angolo CBD. Or (432) gli angoli CDB, CBD sono 180° coll'angolo rientrante DCB. Dunque lorchè si fa un angolo rientrante in un poligono, si aumen-

tano

no i supplementi de' due angoli salienti vicini, d'una quantità che unita all'angolo rientrante fa 180 gradi. dunque &c.

485. Osserv. Si può anche ridurre un poligono in tanti triangoli quanti son i lati meno due, con tirare tante diagonali si può, senza che si taglino (fig. 22); siccome la somma di tutti gli angoli di questi triangoli è evidentemente la stessa che quella di tutti gli angoli interni del poligono, siegue che questa somma è tante volte 180° quanti son i triangoli, o i lati del poligono meno due.

Proprietà de' Poligoni Simetrici.

486. Teor. I. Se da ciascun angolo d' un Poligono simetrico si tirano le diagonali agli angoli opposti . . .

I. I due triangoli opposti alla sommità, e formati da due diagonali vicine, son uguali. Onde (fig. 17, 25) i triangoli BGC, FGE son uguali. Perchè per la natura del poligono simetrico essendo FE uguale a BC, l'angolo BCG = GFE (396), e BG = GE; dunque (471) i triangoli BGC, FGE son uguali; e così è degli altri.

487. II. Tutte queste diagonali si tagliano reciprocamente in due parti uguali. Perchè tutti i triangoli opposti, che esse formano, son uguali.

488. III. Tutte queste diagonali si taglian in uno stesso punto.

Perchè tagliandosi le diagonali BE, AD scambievolmente in due parti uguali, il punto di mezzo della diagonale BE deve esser lo stesso che il punto di mezzo della diagonale AD. Parimenti il punto di mezzo della diagonale AD è lo stesso che il punto di mezzo della diagonale FC &c. Dunque il punto di mezzo di tutte le diagonali è un solo e stesso punto.

489. Teor. II. Una diagonale tirata da un angolo all'altro opposto, divide un poligono simetrico in due figure uguali e simili. Perchè da una parte della diagonale vi son tanti triangoli uguali e posti nella stessa maniera, quanti dall'altra.

490. Si può dunque chiamar il punto ove si tagliano

no le diagonali, il centro del poligono simetrico, a causa della uguaglianza de' raggi che vanno agli angoli opposti.

491. Teor. III. Una retta qualunque IH (fig. 17, 24, 25) che passa pel centro G d' un poligono simetrico, vi è divisa in due parti uguali, e divide il poligono in due figure uguali e simili. Il che si dimostra come sopra (486, 489) per l'uguaglianza de' triangoli BIG , HGE , o di IGC , FGH .

492. Teor. IV. Due rette qualunque che passano pel centro d' un poligono simetrico, vi si tagliano scambievolmente in due parti uguali (491).

493. Non è generalmente vera la reciproca, se due rette qualunque si tagliano scambievolmente in due parti in un poligono simetrico, elle vi si tagliano al centro. Poichè se nel poligono simetrico $ABCD$ (fig. 18) si prende $CE = BF$, e se si tirano CF , EB , elle si taglieranno in due ugualmente in G a causa de' triangoli uguali GEC , GFB (471); frattanto il centro G è lungi dal centro H .

Proprietà de' Poligoni Regolari.

494. Teor. I. Ogni Poligono regolare è iscrivibile al circolo, cioè si può far passar la circonferenza d' un circolo per tutti i suoi angoli.

Dimostr. Per dimostrar questa proposizione, convien far vedere che al di dentro del poligono regolare vi è un punto C (fig. 26, 27) di cui tutte le distanze CA , CB , CD &c. dagli angoli, son uguali fra loro.

Dividansi perciò in due ugualmente tutti gli angoli del poligono per le rette AC , BC , DC , EC &c.

Queste si taglieranno tutte nello stesso punto C , e faran tutte uguali fra loro. Perchè, per esempio, le rette BC , AC incontrandosi in un punto qualunque C fanno un triangolo ABC : e le rette BC , DC incontrandosi in un punto qualunque C , fanno un altro triangolo BCD . Or questi due triangoli son uguali, perchè essendo uguali tutti gli angoli d' un Poligono regolare,

polare, ed essendo quì tagliati in due ugualmente, gli angoli GAB , GBA son uguali fra loro e cogli angoli CBD , CDB ; ed i lati compresi AB , BD son anche uguali; dunque (471) i triangoli ACB , BCD son isoceli e uguali.

Dunque $AC = DC = BC$; e a causa del lato comune BC , il punto C dell'intersezione AC , BC cade sul punto C dell'intersezione delle linee BC , DC . Lo stesso è dell'altre linee EC , FC &c.

495. Coroll. I. I raggi tirati dal centro d'un poligono regolare a tutti i suoi angoli, lo dividon in tanti triangoli isosceli e uguali, quanti son i lati.

496. Coroll. II. Ciascun lato d'un poligono regolare inscritto in un circolo, è la corda d'un arco uguale al quoziente di 360° diviso pel numero de' lati. Onde il lato d'un Decagono è la corda d'un arco di 36° .

497. Coroll. III. Il lato dell'esagono regolare è uguale al raggio del circolo, in cui è inscritto. Perchè se pel centro C dell'esagono (fig. 27) si divide in 6 triangoli, si conoscerà facilmente, che questi triangoli son equilateri, a causa de' raggi uguali CA , CB , e dell'angolo ACB di 60° ; il che fa che ciascun angolo CAB , ABC è anco di 60° (462): dunque $CA = AB$.

498. Osserv. E' per questa proprietà dell'esagono regolare, che si divide il circolo ne' suoi gradi, o almeno in parti uguali d'un noto valore. Così portando il raggio d'un circolo sulla sua circonferenza, si ha un arco di 60° ; se si divide in due ugualmente, si ha un arco di 30° ; se si suddivide in due, si ha un arco di 15° . Il resto della divisione in gradi non si può più fare che a tastoni, per l'impossibilità di divider un arco di 15° in 3, 5, 15 parti uguali (440). Convien dunque che la destrezza supplisca al difetto de' mezzi Geometrici semplici, per divider un istromento in tutti i suoi gradi.

499. Teor. II. Ogni Poligono regolare è circoscrivibile al circolo; cioè si può descriver nel di dentro d'un poligono regolare un circolo, che tocchi tutti i suoi lati nel mezzo.

Di-

Dimostr. Essendo i lati d'un poligono regolare inscritto in un circolo (496) tante corde uguali, questi lati son tutti in ugual distanza dal centro (416).

Se dunque dal centro si tirano delle perpendicolari a questi lati, elle caderanno sul punto di mezzo di essi lati (412), e saran tutte uguali. Dunque si potrà far passar un circolo per tutte le lor estremità, il quale toccherà (426) tutti i lati del poligono nel mezzo (fig. 28).

500. Teor. III. *Ogni Poligono regolare, di cui il numero de' lati è pari, è un poligono simetrico.*

Dimostr. Ridotto un poligono regolare in triangoli per mezzo di raggi tirati dal centro agli angoli, si vede che per l'uguaglianza di questi triangoli e del numero pari de' lati, la metà del numero di questi triangoli è separata dall'altra per un diametro comune AE (fig. 27), il qual è formato da due di questi raggi opposti AC, CE. Or essendo uguali i triangoli AEC, ECF, son ugualigli angoli FEC, CAB. Dunque (396) i lati FE, AB son paralleli e uguali.

501. Probl. I. *Circoscrivere un circolo a un poligono regolare dato.*

Soluz. Non si ha da far altro che cercar il centro (494).

502. Probl. II. *Iscrivere un circolo in un poligono regolare dato.*

Sol. Trovato il centro del Poligono (494) si tira a uno de' suoi lati una perpendicolare; quella sarà il raggio del circolo (499).

503. Probl. III. *Iscrivere in un circolo dato un poligono regolare qualunque.*

Soluz. Si divida 360° pel numero de' lati del poligono richiesto: prendasi sul circolo dato un arco ugual al quoziente; la corda di quell'arco farà (496) un de' lati del poligono. Si porti quella corda intorno alla circonferenza, e si avrà iscritto il poligono richiesto.

Per esempio; per iscrivere un pentagono regolare, si

$$\frac{360}{5} = 72$$
 si prenda con uno strumento esatto un

un arco di 72° sul circolo dato, e se ne tiri la corda per tutta la circonferenza.

304. Osserv. Questa soluzione non è sempre geometrica, ma si siegue nella pratica.

Per la Geometria Elementare non si può iscrivere nel circolo che il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono, il pentadecagono, e tutti i poligoni regolari, che han un numero di lati in progressione geometrica doppia, de' quali quelli quì son i primi. Onde il triangolo equilatero dà i poligoni regolari di 6, 12, 24, 48 &c. lati. Il quadrato quelli di 8, 16, 32, 64 &c. lati. Il pentagono di 10, 20, 40, 80 &c. Il pentadecagono di 30, 60, 120, 240 &c. lati. Gli altri poligoni, come l'Ettagono, l'Enneagono, l'Endecagono &c. non posson descriversi geometricamente che col costruire dell'equazioni proprie a ciascheduno, ma son molte elevate.

305. Probl. IV. *Circoscrivere qualunque poligono regolare a un dato circolo.*

Soluz. Si divida 360° pel doppio del numero de' lati del poligono richiesto, e preso (fig. 28) un arco FG ugual al quoziente, si tiri per le sue estremità F, G un raggio CF, e una retta indeterminata CB. S'inalzi sull'estremità F del raggio una perpendicolare AFB, che incontrerà CB in un punto B; si porti FB in FA: la linea AB sarà un de' lati del poligono richiesto. Nella stessa maniera si posson cercare gli altri lati; ovvero col raggio BC si può descriver un circolo BAHED, e portare per tutta la sua circonferenza la corda AB; così vi s'iscriverà il poligono BAHED, che sarà nello stesso tempo circoscritto al dato circolo.

Dimostr. La costruzione fa veder facilmente, che si formano tante tangenti uguali e divise in due ugualmente pel punto del contatto, quanti son i lati del poligono richiesto.

3.^a Le più lunghe son le due che toccan il circolo.

4.^a Finalmente non posson esservi più di due rette uguali fra loro.

Dimostr. Dal centro C si tirino de' raggi a tutti i punti dell'a circonferenza, ove queste rette terminano. Per dimostrar il Teor. II., si considerino le rette AB, AI, AY, AD, AK, AZ, AE, come terzi lati d'un triangolo, i quali devon crescere (restando costanti gli altri due lati) a proporzione che l'angolo opposto decresce (460). Onde si può riguardar ACB come un triangolo di cui i lati sono AC, CB, AB, l'angolo ACB è infinitamente ottuso, e gli angoli CAB, CBA infinitamente acuti; dunque AB è il più gran lato possibile che possa unire le estremità de' due altri lati costanti CA, CB. Così nel triangolo ACI, ove i lati AC, CI son uguali ai lati AC, CB del triangolo ACB, l'angolo compreso ACI è più piccolo dell'angolo ACB, dunque il lato opposto AI deve esser minore di AB &c. Finalmente se IB = BK, cioè se le distanze di AI, AK son uguali, anche queste due rette son uguali, a causa de' triangoli uguali ACI, ACK; e così degli altri.

Similmente per dimostrar il Teor. III, si considerino le rette AH, AG, AS, AD, AF, AQ, AE, come i terzi lati de' triangoli ACG, ACH, ACS &c. che devono (460) esser tanto più grandi (li due altri lati restando li stessi o uguali) quanto più grandi diventano gli angoli opposti. Onde la retta ACG essendo considerata come un triangolo, di cui l'angolo ACG è infinitamente piccolo, il lato opposto AG sarà il più piccolo che possa unire l'estremità de' lati costanti CA, CG; ma nel triangolo ACH, ove i lati AC, CH, son uguali ai lati AC, CG del triangolo ACG, l'angolo compreso ACH è più grande dell'angolo ACG; dunque il lato AH deve esser maggiore di AG. Si proverà anche, che il lato AF = AH, se passano ad ugual distanza dal centro C, cioè se l'angolo ACF = ACH &c.

311. Se sopra un punto qualunque A (fig. 30) pre-

preso in un circolo GOBLG e che tutt' altro sia che il centro C, si fa girar una linea indeterminata ACB; ella sarà sempre tagliata inegualmente per tutti i punti della circonferenza di esso circolo, e si conchiuderà in generale....

Teor. IV. Che di tutte le rette tirate da un punto al di dentro del circolo (tutt' altro che il centro) fin alla circonferenza,

1.^o La più lunga è quella che passa pel centro, come AB.

2.^o Dell' altre la più corta è quella che passa più lungi dal centro; così che quelle che ne son ugualmente lontane son uguali; nè ve ne son che due che posson esser uguali fra loro.

3.^o La più corta è quella ch' è di ametralmente opposta al centro, come AG.

4. Prolungandosi le due che son uguali fra loro, divengono corde uguali. La Dimostrazion è la stessa che (510).

512. Coroll. Se tre linee tirate da un punto preso nel circolo fin alla circonferenza, son uguali fra loro, questo punto è il centro.

513. Teor. V. Due circoli uguali o inuguali non si posson tagliar più che in due punti.

Dimostr. Se potessero tagliarsi in tre punti; tirando dal centro d' uno di questi due circoli tre rette ai punti d' intersezione, elle come raggi d' uno stesso circolo farebbero uguali; onde da uno stesso punto che non è il centro, alla circonferenza, si potrebbero tirare tre rette uguali; il che è impossibile (50).

514. Coroll. I. Due circoli che han tre punti comuni, hanno lo stesso centro e son confusi.

515. Coroll. II. Due circoli che non hanno che uno o due punti comuni, sono eccentrici, cioè non hanno uno stesso centro.

516. Teor. VI. Due corde che si tagliano in un circolo in tutt' altro punto che nel centro, non posson tagliarsi in due ugualmente.

Dimostr. Se ciò potesse accadere, una corda tirata dal centro alla lor intersezione sarebbe nel tempo stesso

so perpendicolare a queste due corde; poichè (413) ella le dividerebbe ciascuna in due parti uguali; il che è impossibile (403).

517. Coroll. Dunque *se due corde si taglian in due ugualmente in un circolo, vi si taglian al centro, e sono due diametri.*

518. Teor. VII. *Se due circoli si toccano, la retta che passa per il loro centro, passa anche per il loro punto di contatto.*

Dimostr. 1.^o Se si toccan in fuori (fig. 29) il più corto cammino dal centro A al centro C è passare per il punto del contatto G; poichè allora questo cammino è uguale alla somma de' raggi $AG + GC$; ma non passando per G, bisogna descriver oltre questi raggi, uno spazio compreso fra i due circoli.

2.^o Se toccansi in dentro (fig. 30) il punto del contatto G essendo comun ai due circoli, il più corto cammino dal centro A al punto G deve esser la più corta linea che si possa tirar da questo centro al gran circolo GLBOG; or (511) la più corta linea, che si possa tirare da un punto, che non sia il centro, alla circonferenza d'un circolo, è nella direzione del centro di questo circolo. Dunque la GA che passa pel centro A del piccolo circolo, e pel punto del contatto G, è anche nella direzione del centro del gran circolo GLBO.

519. Probl. *Da un punto dato fuori di un circolo tirar una tangente a questo circolo.*

Soluz. Sia dato il punto A (fig. 33.) da dove si abbia da tirar una tangente al circolo dato EBH. Si tiri dal punto A al centro la retta AC, dal cui mezzo G descrivasi un semicerchio AEC, di cui ella sia un diametro; e pel punto E, ove il semicercolo taglia il circolo dato, si tiri la retta AEL; dessa sarà la tangente a questo circolo.

Dimostr. Se si tira il raggio CE, si vedrà (432) che l'angolo AEC è retto, che per conseguenza AE è una retta perpendicolare all'estremità del raggio CE; e che perciò ella tocca il circolo (426.)

Of.

Osserv. Chiaramente si vede che questo problema ha due soluzioni; poichè si avrebbe potuto descriver il semicircolo GEA dal lato di H, e per conseguenza tirar una tangente da quella parte.

Delle Linee Proporzionali.

520. Ipotesi. Se si taglian due rette qualunque AB, AC (fig. 34) che fanno un angolo qualunque BAE, per un numero qualunque di parallele DH, EI, FK, GL &c. ugualmente lontane le une dall'altre.....

1.^o Tutte le parti AH, HI, IK, KL &c. della linea AC saranno uguali fra loro, come altresì le parti AD, DE, EF &c. della linea AB. Perchè se da ciascun punto ove ciascuna parallela taglia le linee AB, AC si abbassano delle perpendicolari AV, DM, EN &c. AV, HQ, IK &c. è chiaro che i triangoli rettangoli ADV, DEM, EFN &c. son uguali fra loro (471), perchè la distanza uguale di queste parallele rende le perpendicolari uguali fra loro, e le loro intersezioni per la linea AB rendon uguali gli angoli ADV, DEM, EFN &c. Per la stessa ragione i triangoli rettangoli AHV, HQI, IRK &c. son uguali. Dunque le ipotenuse AD, DE, EF &c. son uguali fra loro, e AH, HI, IK, DE, EF &c. son anche tra loro eguali.

2.^o Un numero qualunque di parti di AC, sarà al numero delle parti di AB intercette tra le stesse parallele, come un altro numero qualunque delle parti di AC, al numero delle parti di AB contenute tra le stesse parallele. Poichè da una parte $AD = DE = EF$ &c. e dall'altra $AH = HI = IK$ &c. è chiaro che $AD : DE :: AH : HI$, perchè il quoziente di queste due ragioni è 1. Dunque (262) $AD : AH :: DE : HI$. Similmente $DE : EF :: HI : IK$, o $DE : HI :: EF : IK$. Dunque $AD : AH :: DE : HI :: EF : IK$; e si può dir ancora :: $FG : KL :: GB : LG$. Donde siegue (268) che AB

somma di tutti gli antecedenti, è a AC somma di tutti i conseguenti, come AD è a AH, o come un'altra parte qualunque di AB è alla parte corrispondente in AC, o (255) quante parti si vorranno in AB sono allo stesso numero di parti in AC.

Or questo numero di parti è determinato dall'intervallo fra due parallele. Dunque &c.

521. Teor. I. fondamentale. *I triangoli simili han tutti i lati omologhi proporzionali fra loro.*

Dimostr. Poichè (473) due triangoli simili posti l'uno sull'altro, hanno i loro terzi lati paralleli, se si suppone tutto lo spazio del triangolo ABC (fig. 16) ripieno di rette infinitamente prossime e parallele a AC, i lati BA, BC si troveranno nel caso delle rette AB, AC della fig. 34, e se sarà una di queste parallele. Si avrà dunque $BA:BC::Be:Bf$; o sostituendo $AB:BC::DE:DF$; o (262) $BA:DE::BC:DF$. E così degli altri lati.

522. Osserv. E' anche evidente (520) che le parti Ae, Cf son proporzionali ai lati BA, BC; o $Ae:Cf::BA:CB::DE:DF$.

523. Teor. II. *Due Triangoli che hanno i tre lati omologhi proporzionali, son equiangoli e simili.*

Dimostr. Se (fig. 16) $AC:BC::FE:FD$, e $AC:AB::FE:ED$, i triangoli ABC, DEF son equiangoli. Perchè se sopra EF si costruisce un triangolo FEG equiangolo al triangolo ABC, facendo l'angolo $GEF=BAC$, e $GFE=BCA$, si avrà (521) $AC:BC::FE:FG$; ma si ha supposto $AC:BC::FE:FD$, dunque $FE:FG::FE:FD$; dunque (259) $FD=FG$. Similmente per i triangoli simili ABC, FEG si ha (521) $AC:AB::FE:EG$; ma si ha supposto $AC:BA::FE:ED$; dunque $FE:EG::FE:ED$; dunque (259) $EG=ED$. Dunque i triangoli FED, FEG son equiangoli e uguali (470), poichè hanno il lato comune FE, e i lati $FD=FG$, e $EG=ED$. Or per la costruzione il triangolo FEG è equiangolo al triangolo ABC; dunque il triangolo FED gli è anche equiangolo.

524. Teor. III. Due triangoli che han due lati omologhi proporzionali intorno a un angolo uguale, son equiangoli.

Dimostr. Se ne' triangoli ABC, DEF l'angolo $D = B$, e se $DE : DF :: BA : BC$, il triangolo DEF è equiangolo a ABC.

Si prenda su BA la parte $Be = DE$, e si tiri a AC la parallela ef, i triangoli ABC, e Bf son equiangoli, perchè la parallela ef fa l'angolo $feB = A$, $efB = C$, e l'angolo B è comune. Dunque (521) $Be : Bf :: BA : BC$; ma si ha supposto $DE : DF :: BA : BC$; dunque $Be : Bf :: DE : DF$; or $Be = DE$, dunque (255) $Bf = DF$, dunque (472) i due triangoli Bf, DEF son uguali e simili; ma Bf è equiangolo a ABC, dunque DEF è equiangolo a ABC.

525. Teor. IV. Una retta AD, che taglia in due egualmente un angolo BAC (fig. 37) d'un triangolo, taglia il suo lato opposto BC in due parti BD, DC proporzionali ai lati AB, AC, vale a dire $BD : DC :: AB : AC$.

Dimostr. Si prolunghi indefinitamente AC, e per B si tiri BE parallela a AD; i triangoli BCE, DAC faran simili (474); dunque (522) $BD : DC :: AE : AC$; ma per le parallele l'angolo $BEA = DAC = DAB = ABE$; dunque (463) il triangolo BAE è isoscele; dunque $AE = AB$; dunque sostituendo $BD : DC :: AB : AC$.

526. Teor. V. Se dall'angolo retto E (fig. 35) d'un triangolo rettangolo CEL si abbassa sull'ipotenusa CL una perpendicolare EO; 1.° ella dividerà il triangolo in due altri triangoli rettangoli COE, OEL simili tra loro, e al triangolo CEL. 2.° Questa perpendicolare EO sarà media proporzionale tra i segmenti CO, OL dell'ipotenusa. 3.° Ciascun lato del triangolo CEL sarà medio proporzionale tra l'ipotenusa CL e il segmento contiguo a questo lato.

Dimostr. I triangoli COE, OEL son ciascuno simili al triangolo CEL, perchè oltre un angolo retto hanno ciascuno un angolo comune col triangolo CEL, donde

donde siegue che son anche simili fra loro, e per conseguenza

Nel triangolo CEO il piccolo lato CO è al lato medio EO, come nel triangolo EOL il piccolo lato EO è al medio LO, o $\therefore CO:EO:LO$.

Nel triangolo CEO il piccolo lato CO è alla sua ipotenusa EC, come nel triangolo CEL il piccolo lato EC è all'ipotenusa LC; o $\therefore CO:CE:CL$.

Nel triangolo EOL il medio lato LO è alla sua ipotenusa EL, come nel triangolo CEL il medio lato EL è all'ipotenusa LC; o $\therefore LO:LE:LC$.

527. Coroll. I. La somma de' quadrati de' due lati d'un triangolo rettangolo è ugual al quadrato dell'ipotenusa. Poichè essendo $\therefore CO:CE:CL$, si ha (271) $CE^2 = CO \times CL$. Ed essendo $\therefore OL:LE:CL$, si ha $LE^2 = OL \times CL$. Dunque $CE^2 + LE^2 = CO \times CL + OL \times CL = (CO + OL) \times CL = CL \times CL = CL^2$.

528. Coroll. II. Poichè $CE^2 + LE^2 = CL^2$, siegue che $CE^2 = CL^2 - LE^2$, e che $LE^2 = CL^2 - CE^2$; vale a dire, che il quadrato d'un lato qualunque d'un triangolo rettangolo è ugual all'eccesso del quadrato dell'ipotenusa sul quadrato dell'altro lato.

529. Coroll. III. La diagonale d'un quadrato è incommensurabile rapporto al lato del quadrato. Poichè la diagonale essendo l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, di cui i lati son uguali; il quadrato della diagonale è ugual alla somma de' quadrati di questi lati, cioè al doppio del quadrato d'uno di questi lati. Or la radice d'un quadrato doppio d'un altro non si può esprimer in numeri; dunque se il valore del lato del quadrato è espresso in numeri, quello della diagonale non potrà esserlo; e reciprocamente.

530. Teor. VI. La perpendicolare EO (fig. 41) tirata dalla circonferenza d'un circolo a un diametro CL, è media proporzionale tra le parti CO, OL di questo diametro. Ovvero, il suo quadrato $= CO \times OL$.

Di-

Dimostr. Se dal punto E si tirano alle estremità di questo diametro le rette EC, EL, il triangolo CEL è rettangolo in E (432); onde (526) $\therefore CO:EO:OL$, o $EO^2 = CO \times OL$.

531. Teor. VII. Le parti di due corde BA, DC (fig. 38) che si tagliano in un circolo, son reciprocamente proporzionali.

Dimostr. Se si tirano DA, CB, i triangoli REC, DAE son simili, a causa degli angoli uguali in E, degli angoli C ed A appoggiati sullo stesso arco BD, e degli angoli B, e D appoggiati allo stesso arco AC. Dunque $AE:DE::CE:BE$.

532. Teor. VIII. Se due linee EB, EC (fig. 39) partendo da uno stesso punto fuori nel circolo vanno a terminar alla sua circonferenza concava, le loro parti esteriori EA, ED son reciprocamente proporzionali a quelle linee intiere EB, EC; cioè $EA:ED::EC:EB$.

Dimostr. Tirate le corde AC, DB, i triangoli EBD, EAC son simili, perchè hanno l'angolo E comune, e gli angoli B, e C appoggiati sullo stesso arco. Dunque (521) $EA:ED::EC:EB$.

533. Teor. IX. Se due linee EB, Ed (fig. 39) partendo dal punto E fuori del circolo, l'una EB entra dentro, e l'altra è tangente; questa tangente è media proporzionale tra l'altra linea EB intiera e la sua parte esteriore EA; o $\therefore EB:Ed:EA$.

Dimostr. Tirate dB, dA, i triangoli EdB, EdA son simili, per l'angolo comune E, e l'angolo $EBd = AdE$ misurati dalla metà dell'arco Ad (430, 429); onde l'angolo $dAE = EdB$; dunque (521) $EB:Ed:EA$.

534. Teor. X. Le parti di due rette che si tagliano fra due parallele, son proporzionali fra loro.

Dimostr. I triangoli ABE, CED (fig. 40) son simili per l'angolo E ugual in ciascuno (389), per l'angolo $EAB = EDC$ (396), e per l'angolo $EBA = ECD$; dunque (521) $EA:ED::EB:EC$.

535. Probl. I. Trovar una quarta proporzionale a tre rette date EA, EB, ED (fig. 40).

Soluz. Si tirino due rette indefinite AD, BC che si taglino sotto un angolo qualunque. Nel punto E d'intersezione si segnino le rette EA, EB, ED; per l'estremità A, B delle due prime date si tiri AB; e per l'estremità D della terza le si tiri la parallela DH, la quale taglierà BC in maniera che EC sarà la retta cercata (534).

536. Probl. II. Trovar a due rette date CO, OL (fig. 41) una Media proporzionale.

Soluz. Coniungansi in linea retta le due date CO, OL, e centro il loro mezzo F descrivasi un semicircolo CEL; indi dal punto O, ove terminan le date, s'inalzi la perpendicolare OE; dessa sarà (530) media proporzionale tra CO, OL.

537. Probl. III. Trovar a due rette date una terza proporzionale.

Soluz. Questo problema si risolve come il primo, supponendo che la seconda e la terza delle date del Probl. I. non sieno che una stessa linea.

538. Probl. IV. Divider una retta AC nella stessa ragione come è un'altra AB (fig. 42).

Soluz. Si faccia con quelle due rette un angolo qualunque BAC, e unite le lor estremità per la retta BC, le si tiri per tutti i punti di divisione di AB le parallele Gg, Ff &c.; a causa de' triangoli simili ABC, AGg, AFF &c. la linea AC avrà (522) tutte le sue parti proporzionali a quelle della linea AB.

539. Probl. V. Divider una retta in due parti tali, che la più grande sia media proporzionale fra la tutta e l'altra parte.

Soluz. Sia data AB (fig. 42 B); sulla sua estremità s'inalzi la perpendicolare $AE = \frac{1}{2} AB$, e dal punto E raggio EA descritto un circolo DAF, si tiri l'arco DC, il quale taglierà AB, come si cerca, cioè $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$.

Dimostr. Per la tangente BA si ha (533) $\frac{BA}{BD} = \frac{BF}{BA}$; dunque $BF = BA : BA :: BA - BD : BD$.

BD. Or $BF - BA = BD = BC$, perchè $FD = BA$ essendo doppia di EA metà di AB; e $BA = BD = AC$.
 Dunque sostituendo $BC : BA :: AC : BC$, o $\frac{BC}{BA} = \frac{AC}{BC}$.

La soluzione di questo problema si chiama *dividere una retta in media ed estrema ragione*. Si è chiamata anche la *Sezione Divina* per le maravigliose proprietà che se le son attribuite.

Della comparazione delle Figure; o delle proprietà delle Figure simili.

540. Due figure qualunque son simili, lorchè avendo un numero uguale di lati, tutti i lati dell'una son proporzionali ai lati omologhi dell'altra; e tutti gli angoli dell'una compresi tra questi lati omologhi, son uguali a tutti gli angoli dell'altra, ciascuno a ciascuno. Onde siegue:

1.° Che tutti i poligoni regolari della stessa specie, e per conseguenza i circoli, son figure simili, come anche gli archi aventi ugual numero di gradi.

2.° Che due figure simili non differiscono che nella grandezza.

541. Teor. I. Di qualunque maniera due figure simili sion divise in triangoli per le diagonali provenienti da angoli omologhi, i triangoli omologhi son simili.

Dimostr. Se due poligoni ABCDE, FGHK (fig. 43, 44) son tali, che l'angolo $A = F$, $B = G$, $C = H$, $D = I$, $E = K$; e se $AB : FG :: BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: EA : KF$; se si menan le diagonali AC, AD, FH, FI, i triangoli ABC, FGH faran simili, come anche ACD, FHI, e ADE, FIK.

Poichè essendo l'angolo $B = G$, ed essendo compresi tutti due tra lati Proporzionali, i triangoli (523) ABC, FGH son simili, come anche sono ADE, FIK.

Giò posto l'angolo $BAC = GFH$, e $DAE = IFK$; dunque l'angolo $BAE = BAC = DAE = CAD = HFI$.
 Della

Della stessa maniera si prova che gli angoli ACD , FHI son uguali, come lo son anche ADC , FIH . Dunque i triangoli ACD , FHI son anche equiangoli.

542. Teor. II. Reciprocamente. Due figure qualunque son simili, se posson ridurre in altrettanti triangoli equiangoli.

Dimostr. Gli angoli uguali de' triangoli equiangoli rendono uguali gli angoli omologhi di ciascuna figura; e i lati delle figure essendo anche lati di triangoli equiangoli, sono (521) proporzionali. Dunque le figure son simili (540).

543. Teor. III. Se in due poligoni simili si tiran delle linee qualunque della stessa maniera, cioè che dividan i lati omologhi o gli angoli omologhi nella stessa ragione; 1.^o queste linee son proporzionali fra loro e ai lati omologhi qualunque di questi poligoni; 2.^o le dividon in parti, di cui le omologhe son porzioni simili de' due poligoni.

Dimostr. 1.^o Avendo diviso BC in L (fig. 43, 44), e il suo omologo GH in M nella stessa ragione, cioè in maniera che $BC:GH::LC:MH$: o ch'è lo stesso, avendo preso sopra BC e GM i punti corrispondenti, o similmente posti L , M , se si menan due rette a volontà LN , MO , che facciano gli angoli CLN , HMO uguali nello stesso modo, e che dividan i lati omologhi ED , KI nella stessa ragione, in maniera che $ED:KI::DN:IO$; farà $LN:MO::CD:HI::BC:GH$.

Perchè se si menano NC , OH , i triangoli NCD , OHI son simil (524), avendo gli angoli uguali D , I compresi tra i lati proporzionali ND , DC ; OI , IH ; dunque (520) $CD:HI::CN:HO$, e l'angolo $DCN=IHO$. Se dunque questi si tolgono dagli angoli uguali DCL , IHM , restaranno gli angoli NCL , OHM ; dunque anche (523) i triangoli NCL , OHM son simili: dunque $LN:MO::LC:MH::BC:GH::CD:HI$ &c.

2.^o Se si tirau anche della stessa maniera due altre
ret.

rette in queste due figure; si proverà che son fra loro come due lati omologhi qualunque, ed in conseguenza elle son anche proporzionali alle linee LN, MO.

3.^o Finalmente è evidente, che le linee LN, MO dividon le due figure in quattro, di cui le omologhe ABLNE, FGMOK son figure simili, e nello stesso tempo porzioni simili de' due poligoni, poichè i lor angoli omologhi son uguali, i loro lati omologhi proporzionali, e perciò non devon differir fra loro se non che l'una è più grande dell'altra, a proporzione che uno de' poligoni è più grande dell'altro. Lo stesso è delle porzioni LNDC, MOJH.

544. Posson dirsi *dimensioni omologhe* due linee come LN, MO, tirate nella stessa maniera in due figure simili; così due lati omologhi di due figure simili, i raggi di due circoli, i loro diametri, o anche due corde, che si sottendono un arco d'ugual numero di gradi, sono dimensioni omologhe: e la proprietà generale delle figure simili è di aver tutte le loro *dimensioni omologhe proporzionali fra loro*.

CAPITOLO H.

Delle superficie, o della Planimetria.

Del contorno delle superficie, e della loro comparazione.

545. **T**EOREMA I. Il contorno, o perimetro d'una figura qualunque, è ugual alla somma de' suoi lati.

546. TEOR. II. I contorni di due figure simili son tra loro come un lato, o come una dimensione omologa qualunque in ciascuna figura.

Dimostr. Il contorno della prima figura è al contorno della seconda, come la somma de' lati della prima è alla somma de' lati della seconda; e poichè le figure son supposte simili, hanno (540) tutti i loro lati

lati omologhi proporzionali, così che i lati della prima sono gli antecedenti, e i lati omologhi della seconda i conseguenti. Or la somma degli antecedenti è alla somma de' loro conseguenti, come un sol antecedente qualunque è al suo conseguente (268); dunque il contorno della prima figura è al contorno della seconda, come un lato qualunque della prima è al lato omologo della seconda, o (543) come una dimensione qualunque della prima alla dimensione omologa nella seconda.

547. Coroll. *Le circonferenze de' circoli, o le lunghezze di due archi d'uno stesso numero di gradi in circoli inuguali, son fra loro come i raggi di questi circoli, o come i loro diametri, o come due corde sottendenti in ciascun circolo o arco un ugual numero di gradi.* Perchè (540) i circoli o gli archi di ugual numero di gradi, son figure simili; e i raggi, i diametri &c. ne sono dimensioni omologhe (544).

Delle Misure proprie per determinare la grandezza delle Superficie.

548. Si chiama *soprafaccia, aja, o superficie* d'una figura la quantità ch' esprime lo spazio rinchiuso fra i lati della figura.

549. Una superficie è un' estensione in cui si considerano due dimensioni per volta (356). La misura precisa di ciascuna di queste dimensioni in particolare è la linea retta; ma ella non può esser la misura della superficie. Onde non si avrebbe l'idea della superficie d'un terreno, se si dicesse solamente che ha 100 piedi di lunghezza; ma se si aggiunge ch' egli ha da per tutto 20 piedi di larghezza, subito se ne concepisce tutta l' estensione, supposto che si sappia qual sia la lunghezza assoluta di un piede; ma indipendentemente da questa cognizione, si avrebbe una idea chiara della figura di questo terreno, che si concepirebbe come un parallelogrammo, di cui la lunghezza è quintupla della larghezza.

550. Le

550. Le misure delle superficie devon esser superficie, come le misure delle linee son linee. Se si vuol misurar una superficie in piedi o in tese, bisogna impiegar delle superficie ciascuna d' un piede o d' una tesa. Or non si concepisce naturalmente un piede in superficie che immaginando uno spazio (e per conseguenza una figura terminata da lati) che abbia da per tutto un piede di lunghezza e un piede di larghezza: questa lunghezza deve esser misurata (402) da una perpendicolare ai due lati terminanti la lunghezza della figura; e la larghezza deve essere misurata da una perpendicolare ai due lati terminanti la lunghezza. Dunque lo spazio d' un piede di superficie deve esser una figura, di cui ciascun lato e ciascuna perpendicolare tirata tra i lati opposti, sia d' un piede, dunque questa figura deve esser un quadrato. Io stesso è delle altre specie di misure.

551. Donde si può conchiuder in generale, che il quadrato è la misura comune della superficie.

Onde per disegnare la grandezza della superficie d' una figura qualunque, si dice, ch' ella ha tanti pollici, piedi, tese &c. quadrati; il che significa che si può coprire tutto lo spazio rinchiuso con tanti quadrati ciascuno d' un pollice, d' un piede, d' una tesa &c.

552. E' chiaro che il numero delle parti d' una misura in superficie, è ugual al quadrato delle parti della stessa misura in lunghezza, e in larghezza.

Per esempio, un piede quadrato deve contenere 144 quadrati d' un pollice l' uno.

Perchè un piede quadrato contiene 12 file di 12 pollici quadrati, e ciascun pollice in larghezza corrisponde in lunghezza. Così una tesa quadrata contiene 6 file ciascuna di 6 piedi quadrati.

Del Metodo generale di Misurare la Superficie.

553. Se si suppone che la linea AB (fig. 19, 21) si muova parallelamente a se stessa finchè sia venuta

in DC; si concepisce ch'ella avrà ricoperto tutta la superficie del parallelogrammo ABCD; perchè a ciascun passo ch'ella avrà fatto, avrà coperto una parte della superficie uguale alla sua lunghezza AB. Dunque la superficie intiera è uguale a questa lunghezza AB presa tante volte, quanti passi ha fatto la retta AB per venire da AB in CD. Or questo numero di passi è misurato dal numero de' punti della retta, che misura la distanza delle due parallele AB, CD, la quale retta deve essere (402) una perpendicolare tirata da un punto qualunque di DC sopra AB (prolungata s'è necessario), com'è EF, o DG. Dunque la superficie del parallelogrammo ABCD è ugual al numero de' punti di AB, preso tante volte quanti punti son in EF; o ch'è lo stesso, è ugual al prodotto della linea AB moltiplicata per la linea EF.

554. La perpendicolare EF o DG che misura la distanza tra i due lati paralleli, si chiama l'*altezza* del parallelogrammo; ed uno di questi due lati si chiama la *base*. Dunque

555. Teor. I. *La superficie d'un parallelogrammo qualunque è ugual al prodotto della sua base per la sua altezza.*

556. Oss. I. Che cosa vuol dir il prodotto della base per l'altezza? Le linee non si moltiplicano per linee. In ogni moltiplicazione una delle due quantità almeno deve esser un numero astratto; moltiplicare è prender un certo numero di volte una certa cosa o un certo numero di cose. Si può moltiplicar una linea per un numero, per esempio, per 3; il che significa che si prenderà questa linea 3 volte; ma non si moltiplica già una linea per una linea: questa operazione non presenta alcun idea netta. Quando si dice, che *la misura del parallelogrammo è il prodotto della sua base per la sua altezza*, significa che se si suppone la base divisa in un certo numero di parti uguali, per esempio, di piedi, di polici &c. e l'altezza parimenti divisa in un certo numero delle stesse parti uguali, piedi, o pollici &c, il rapporto
del

del parallelogrammo al quadrato di ciascuna delle sue parti, sarà uguale al rapporto che il prodotto de' due numeri di divisione della base e dell' altezza avrà coll' unità: Supponendo per esempio la base divisa in 100 pollici, e l' altezza in 25, il prodotto di questi due numeri 2500, cioè il rapporto di questo numero all' unità, esprimerà il rapporto del parallelogrammo al quadrato fatto di un pollice; infatti questo parallelogrammo contiene 2500 piccoli quadrati ciascuno d' un pollice. Onde il dire che *un parallelogrammo è il prodotto della sua base per la sua altezza*, è una maniera compendiosa d' esprimer quella proposizione, di cui l' enunciato rigoroso e sviluppato avrebbe richiesto troppo estensione e circonlocuzione. Le scienze han bisogno di queste espressioni ristrette, ma poichè son poco esatte, vi è bisogno ancora di fissar il senso preciso, che vi deve esser attaccato.

557. Osserv. II. Ciascuna delle tracce della retta AB (di cui la somma uguaglia la superficie del parallelogrammo ABCD) è realmente un piccolo parallelogrammo, che ha per larghezza l' estensione di ciascun passo di AB. Ma siccome quest' estensione è infinitamente piccola, si può confondere ciascuna traccia colla linea AB, attribuendo a questa linea AB una larghezza infinitamente piccola.

Si può dunque dir in generale, che *la superficie d' una figura qualunque è ugual alla somma di tutte le linee, che si posson tirar in questa figura parallele a un de' lati*.

558. Teor. II. La superficie d' un triangolo qualunque è ugual alla metà del prodotto d' uno de' suoi lati qualunque moltiplicato per la perpendicolare menata dall' angolo opposto sopra questo lato (prolungato se bisogna). Perchè un parallelogrammo è diviso da una diagonale in due triangoli uguali; si può dunque riguardare un triangolo qualunque come la metà d' un parallelogrammo, o di cui l' altezza è la perpendicolare abbassata dall' angolo sopra il lato opposto.

Questo Teorema può dimostrarsi in quest' altra guisa.

La superficie d' un triangolo qualunque ABC (fig. 34) è ugual alla somma di tutte le linee parallele BC , GL , FK &c. che posson tirarsi dalla sua base BC fin al suo vertice; or tutte queste parallele crescon in progressione aritmetica, cioè han sempre una stessa differenza; perchè GL differisce da BC della quantità $BP + TC$, e FK differisce da GL di $GO + SL$ &c. Quelle differenze son tutte uguali fra loro, poichè tutti i piccoli triangoli GBP , FGO &c. son tutti fra loro uguali (520), come anche i triangoli LTC , KSL &c.; dunque $PB + TC = GO + SL$.

Si posson dunque riguardare tutte queste parallele, che riempion la superficie del triangolo, come una serie di quantità in progression aritmetica, di cui la perpendicolare AX esprime il numero, BC è l' ultimo termine, e A ch' è una parallela infinitamente piccola, è il primo termine. E (242) la somma è ugual a $BC + A \times \frac{1}{2} AX$; o perchè A è una linea infinitamente piccola, la somma di tutte queste parallele $= BC \times \frac{1}{2} AX$, o alla metà del prodotto di $BC \times AX$.

559. Coroll. *Un numero qualunque di triangoli (e per conseguenza di parallelogrammi) che son tra due parallele, e che hanno una stessa base, o basi uguali han ugual superficie. Perchè hanno anche la istessa altezza, ch' è la distanza di queste due parallele.*

560. Teor. III. *Le superficie de' triangoli son tra loro in ragion composta delle basi e delle loro altezze.*

Dimostr. Le superficie de' triangoli son la metà del prodotto delle loro basi per le loro altezze; or le metà son tra loro come i tutti; dunque le superficie de' triangoli son come i prodotti delle loro basi per le loro altezze.

Ma una ragione de' prodotti è una ragion composta

sta delle loro radici ; dunque le superficie de' triangoli son in ragion composta delle loro basi e delle loro altezze.

561. Coroll. La superficie di due triangoli inuguali che han basi uguali , son tra loro come le lor altezze ; e le superficie de' triangoli inuguali che han altezze uguali , son tra loro come le loro basi .

Dimostr. Perchè allora le superficie son tra loro come i prodotti d'una stessa quantità moltiplicata per due quantità inuguali ; dunque son come queste quantità inuguali .

562. Teor. IV. Se le altezze di questi due triangoli son in ragion inversa delle loro basi , le superficie son uguali .

Dimostr. Allora le altezze del primo essendo all' altezza del secondo , come la base del secondo alla base del primo ; il prodotto dell' altezza del primo per la sua base è ugual al prodotto dell' altezza del secondo per la sua base .

563. Teor. V. Reciprocamente ; se due triangoli che non sono simili , hanno superficie uguali , le loro dimensioni son in ragion inversa .

Dimostr. Allora le dimensioni del primo triangolo fanno un prodotto ugual a quello delle dimensioni del secondo , Dunque le dimensioni d' uno di questi triangoli sono gli estremi d' una proporzione , e le dimensioni dell' altro son i mezzi . Per esempio , l' altezza del primo triangolo è all' altezza del secondo , come la base del secondo è alla base del primo . Dunque queste dimensioni son in ragion inversa .

564. Teor. VI. Le superficie de' triangoli simili son tra loro in ragion duplicata , o come i quadrati d' una delle loro dimensioni omologhe presa in ciascuno .

Dimostr. Avendo (544) le figure simili tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali , le superficie di due triangoli simili son fra loro come due prodotti di due quantità proporzionali . Or (252) una ragione di prodotti di due quantità proporzionali è una

ragion duplicata; dunque le superficie di due triangoli simili son tra loro in ragion duplicata. Ma una ragion duplicata è (257) la ragione del quadrato d' un antecedente qualunque preso in una delle due ragioni che servono di radice alla ragion duplicata, al quadrato del suo conseguente. Dunque le superficie di due triangoli simili son tra loro come il quadrato d' una dimensione qualunque presa nell' uno, al quadrato della dimensione omologa presa nell' altro. Il che si esprime in generale dicendo, che son in ragion duplicata delle loro dimensioni omologhe qualunque.

565. Teor. VII. *La superficie d' una figura qualunque è ugual alla somma delle superficie de' triangoli, ai quali ella è ridotta.*

566. Teor. VIII. *Per aver la superficie d' un poligono irregolare, convien dividerlo in triangoli, prender la superficie di ciascuno (558); la somma di tutte queste superficie sarà ugual a quella del poligono.*

567. Teor. IX. *La superficie d' un poligono regolare è ugual al prodotto della perpendicolare tirata dal centro a uno de' suoi lati, moltiplicata per la metà del suo contorno.*

Dimostr. Poichè tutti i triangoli, ne' quali si è ridotto un poligono regolare per mezzo de' raggi, son uguali fra loro (495), e hanno in conseguenza una stessa altezza $\equiv CI$ (fig. 26); la superficie del poligono regolare è ugual a $CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE + CI \times \frac{1}{2} EF + CI \times \frac{1}{2} GF + CI \times \frac{1}{2} GH + CI \times \frac{1}{2} HA$, Or tutto questo prodotto è ugual a CI moltiplicato per $\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} DE + \frac{1}{2} EF + \frac{1}{2} FG + \frac{1}{2} GH + \frac{1}{2} HA$, vale a dire per la metà del contorno del poligono.

568. Coroll. I. *La superficie d' un circolo è ugual al prodotto del suo raggio per la sua semicirconferenza*

569. Coroll. II. *La superficie d' un circolo è ugual a quel.*

a quella di un quadrato, di cui il lato è una media proporzionale geometrica tra il raggio di questo circolo e una linea della stessa lunghezza della semicirconferenza.

570. Coroll. III. La superficie di un settore di circolo è ugual al prodotto del raggio di questo circolo, per una linea retta ugual alla metà della lunghezza dell'arco, che termina questo settore. Perchè la superficie d' un settore di circolo è una porzione di poligono regolare, come HCDBAH (fig. 26); or è chiaro che la superficie di questa porzione è ugual al prodotto di CI per la metà del contorno HABD.

571. Teor. X. Un poligono qualunque A B C D E (fig. 26) può ridursi in un triangolo AEG d' una stessa superficie.

Dimostr. Si tiri una diagonale BD che tagli il triangolo DBC; pel suo vertice C si tiri a questa diagonale la parallela CF terminata al lato AB (prolungato se bisogna); si congiunga DF, e si avrà un poligono AFDE ugual in superficie al poligono proposto, e che avrà un angolo di meno. Perchè se da' triangoli DBC, DBF uguali in superficie (559) si toglie il triangolo comune DBH, resterà il triangolo DHC ugual in superficie al triangolo BHF. Or per la costruzione il triangolo DHC è escluso dal nuovo poligono, e' il triangolo BHF vi è entrato, dunque questo poligono è ancora uguale in superficie al poligono proposto. Operando nella stessa maniera, si può ridurre il nuovo poligono AFDE in un altro della stessa superficie, e che abbia un angolo di meno, e così successivamente finchè sia ridotto ad un triangolo.

572. Coroll. La superficie d' una figura qualunque è un sol prodotto di due dimensioni, o vi si può ridurre.

573. Teor. XI. Le superficie di due figure simili son tra loro in ragion duplicata, o come i quadrati d' una delle loro dimensioni omologhe, presa in ciascuna.

Dimostr. Poichè (543) due figure simili si riducon

ciascuna in tanti triangoli simili, de' quali le superficie sono (364) come i quadrati delle loro dimensioni omologhe; ed essendo (344) tutte le dimensioni omologhe di due figure simili proporzionali fra loro, segue che tutte le superficie di tutti i triangoli omologhi di due figure simili sono nella stessa ragione de' quadrati di due dimensioni omologhe qualunque delle due figure, e per conseguenza son tutte proporzionali fra loro. Ciò posto, è evidente che la superficie della prima figura è alla superficie della seconda figura, come la somma delle superficie de' triangoli ai quali la prima figura è stata ridotta, è alla somma delle superficie de' triangoli ai quali la seconda figura è stata ridotta; e per conseguenza come la superficie d'un triangolo qualunque della prima figura è alla superficie del triangolo omologo nella seconda; o finalmente come il quadrato d'una dimensione qualunque presa nella prima figura, al quadrato della dimensione omologa presa nella seconda.

574. Coroll. I. *Le superficie de' circoli son tra loro come i quadrati de' loro raggi, o de' loro diametri.*

575. Coroll. II. Quando dunque si vuol aumentare o diminuire la superficie d'un poligono, conservandone la sua figura, convien fare questa proporzione, per trovarne ciascun lato. *Come la superficie del poligono dato è alla superficie del poligono cercato, così il quadrato d'un de' lati del poligono dato è al quadrato del lato omologo cercato.* Ovvero avendo trovato un de' lati per questa proporzione, si avrà ciascun altro per quest'altra: *Come il lato del poligono dato è al suo lato omologo trovato per la prima proporzione, così ciascun altro lato del poligono dato è a ciascun lato omologo del poligono cercato.*

Si vuole, per esempio, far un parallelogrammo A di cui la superficie sia tripla, o sia come 3 a 1 rapporto a quella del parallelogrammo B, di cui il gran lato è di 6 piedi, e il piccolo di 4. Si farà dunque come 1 è a 3, così 36 quadrato di 6 piedi è a 108 qua-

quadrato del gran lato del parallelogrammo A; la radice è 10, 392 piedi. Indi come 6 è a 10, 392, così 4 è a 6, 928; questo è il piccolo lato del parallelogrammo A. Bisogna dar 10 piedi 4 pollici 8 linee al gran lato, e 6 piedi 11 pollici 1 linea $\frac{1}{2}$ al piccolo lato, per aver il parallelogrammo A triplo in superficie riguardo al parallelogrammo B.

576. Teor. XII. Se in ciascun de' tre poligoni simili si prende una dimensione omologa, e se questa tre dimensioni trovansi tali, che essendo disposte in triangolo questo triangolo sia rettangolo; la superficie del poligono, di cui la dimensione sarà l'ipotenusa di questo triangolo, sarà uguale alla somma delle superficie de' due altri poligoni; e la superficie d'uno de' due poligoni, di cui la dimensione sarà uno de' lati del triangolo, sarà ugual alla differenza tra la superficie del poligono, di cui la dimensione sarà l'ipotenusa, e la superficie dell'altro poligono.

Dimostr. Le superficie di questi tre poligoni sono tra loro come i quadrati de' tre lati del triangolo rettangolo. Or il quadrato dell'ipotenusa è uguale (257) alla somma de' due lati del quadrato del triangolo, e il quadrato d'uno de' lati è ugual alla differenza tra il quadrato dell'ipotenusa e il quadrato dell'altro lato; lo stesso è dunque delle superficie de' tre poligoni.

577. Oss. Quindi si trae un metodo facile per costruire geometricamente de' poligoni, che sieno la somma o la differenza di due altri poligoni simili. Per aver la somma di due, bisogna disporre ad angolo retto uno de' lati dell'uno col lato omologo dell'altro, tirar l'ipotenusa, e farne il lato omologo del poligono cercato. Per aver un poligono uguale alla differenza fra due altri, sopra un lato qualunque del maggiore, descrivasi un semicircolo, si metta il lato omologo del minore in maniera che una delle sue estremità cada sopra un' estremità del diametro, e l'altra estremità sia in qualche punto della circonferenza. Da questo punto si tiri all'altra estremità del diametro

tro una retta; quella sarà il lato omologo del poligono che si cerca,

Osservazioni sulla Quadratura del Circolo.

578. Benchè dalle proposizioni precedenti si conosca in qual rapporto le circonferenze e le superficie di due circoli sieno co' loro raggi o diametri, pure non si ha ancora potuto determinare precisamente il rapporto ch'è tra il diametro di un circolo e la sua circonferenza; così che data la grandezza di un diametro in numeri, non si può assegnar in numeri la grandezza precisa della sua circonferenza; nè in conseguenza quella della sua superficie, che è (368) il prodotto del semi-diametro per la semi-circonferenza. Questo è quel che si deve intendere lorchè si dice che non si è trovata ancora la *Quadratura del Circolo*; la parola *Quadratura* viene del quadrato, ch'è la comune misura d'ogni superficie (551).

579. Tutti gli sforzi de' più gran Matematici si son ridotti a dimostrare, ch'è impossibile trovarla per certe vie, ma ch'è facile approssimarvisi all'infinito. E la giustezza, con cui vi si è approssimato, è più che sufficiente per l'applicazione della Geometria alla pratica la più scrupolosa. Così che gli abili Geometri non riguardano ora la Quadratura assoluta del Circolo che come una cosa di pura curiosità, e stiman meglio impiegar il loro tempo a ricerche più utili; tanto più ch'è certissimo, che se il rapporto esatto del diametro del circolo alla sua circonferenza può esser espresso da numeri, questi numeri devon esser sì grandi, che non se ne potrebbe far uso ne' calcoli, e ch'è bisognerebbe nella pratica appigliarsi ai numeri, de' quali ci serviamo attualmente. Ma la maggior parte di coloro, che non hanno che una superficialissima cognizione delle Matematiche, intraprendono con confidenza questo famoso Problema, senza neppur intendere troppo bene lo stato della quistione, e accade spesso di persuadersi che l'han trovata.

580. Si son trovati de' metodi per quadrar assolutamente certi spazj rinchiusi tra porzioni di circoli, o anche tra porzioni di circoli e linee rette. Per esempio, un antico Geometra Greco chiamato Ippocrate da Chio ha provato, che se sopra l'ipotenusa e su i lati d' un triangolo rettangolo si descrivono de' semicircoli (fig. 45) si avran due spazj curvilinei AECGA, CFBHC, de' quali la somma delle superficie sarà ugual a quella del triangolo rettangolo ACB. Questi due spazj si chiaman le *Lunule* d' Ippocrate.

Dimostr. Poichè (574) le superficie de' circoli son fra loro come i quadrati de' loro diametri, le somme delle loro superficie son fra loro come le somme de' quadrati de' loro diametri. Or (527) il quadrato del diametro AB è ugual alla somma de' quadrati de' diametri AC, BC, dunque la superficie del semicircolo ACHB è ugual alla somma delle superficie de' semicircoli AEC, CFB. Dunque se dal semicircolo ACHB si toglie la parte CHB comune col semicircolo CFB, e la parte AGC comune col semicircolo AEC, resteranno le *Lunule* CFBHC + AECGA uguali in superficie al triangolo ABC.

Se il triangolo rettangolo fosse isoscele, abbassando una perpendicolare dall'angolo retto all'ipotenusa, ella lo dividerà in due triangoli uguali, che sarebbero ciascuno uguali alla loro *Lunula*.

Si posson ancora vedere differenti porzioni di circoli quadrabili nelle *Memoires de l'Academie des Sciences*, anni 1701, 1703. Vedi ancora nella fig. 45 B, uno spazio CDHAI BKC terminato da quarti di circolo, e ugual al quadrato CDAB.

581. Il rapporto del diametro alla circonferenza del circolo può esser a un dipresso determinato in due maniere; o meccanicamente, paragonando (per esempio) al diametro di un circolo la lunghezza d' un filo, che fosse stato piegato esattamente sulla sua circonferenza; o geometricamente, calcolando il contorno e le dimensioni d' un poligono regolare d' un grandissimo numero di lati,

Si concepisca il circolo diviso in 4 parti uguali, in 8, 16, 32, 64, 128 &c. e si concepisca per questi Punti delle divisioni tirate le rispettive corde e tangenti. Si avran due poligoni, uno circoscritto, e l'altro iscritto al circolo, tutti due composti di triangoli uguali. In questi triangoli si po'ton aver le basi, le quali per il poligono iscritto son le corde del circolo, e per il poligono circoscritto son le tangenti di esso circolo. Onde sarà nota la somma di tutte le corde e di tutte le tangenti; cioè il perimetro del poligono iscritto che di poco è minore della circonferenza del circolo, ed il perimetro del poligono circoscritto di poco maggiore della circonferenza di esso circolo. Questo difetto o eccesso si può render tenue quanto si vuole, e ristringer in angustissimi limiti. E' così che Archimede trovò questo rapporto presso a poco come 7 a 22. Altri l'han posto come 1 a 3, 13159265 &c. aggiungendo fin 127 decimali; il che fa un'approssimazione quasi infinita. Mezio l'ha determinato di 113 a 355, un altro di 1250 a 3927. Questi son i più piccoli numeri che danno il rapporto più prossimo al vero.

582. Onde dato il diametro d'un circolo, per calcolar il suo contorno, convien fare questa regola di proporzione, 113 : 355 :: il diametro del circolo dato : sua circonferenza. E se si vuol sapere la superficie di questo circolo, bisogna (568) moltiplicar la metà del diametro per la metà della circonferenza così trovata.

Delle Figure Isoperimetre.

583. *Figure Isoperimetre* son quelle che hanno circonferenze uguali.

584. Teor. I. *Di tutti i poligoni regolari, il circolo ha la più grande superficie.*

Dimostr. Suppongasi, per esempio, un circolo ed un ottagono regolare, i quali abbiano contorni uguali.

Il circolo sarà al poligono come il raggio del circolo è all'apotema del poligono. Or l'apotema del poli-

poligono è necessariamente più piccolo del raggio del circolo; perchè se fosse ugual o più grande, mettendolo allora il centro dell'ottagono su quello del circolo, l'ottagono rinchiuderebbe intieramente il circolo, e il contorno dell'ottagono sarebbe più grande di quello del circolo; il che è contro la supposizione.

Dunque di tutte le figure *Ifoperimetre* il circolo è quello che ha maggior capacità.

585. Coroll. E siccome il circolo è una figura composta d'infiniti lati e d'infiniti angoli, siegue che delle figure *Ifoperimetre* la più grande è quella che ha più lati o angoli. Onde un pentagono sarà maggiore d'un quadrato, un quadrato maggiore d'un triangolo.

586. Teor. II. Di due triangoli *isoperimetri* aventi la stessa base, de' quali uno è *isoscele* e l'altro *scaleno*, l'*isoscele* è più grande. Ciò è bastantemente chiaro considerando che l'altezza del triangolo *isoscele* è maggiore di quella dello *scaleno*.

587. Coroll. I. De' triangoli *isoperimetri*, il triangolo equilatero è più grande.

588. Coroll. II. Delle figure *isoperimetre* che hanno uno stesso numero di lati, la più grande è quella che è equilatera ed equiangola.

589. Coroll. III. Di tutti i parallelogrammi *isoperimetri* aventi la stessa base, il maggiore sarà il rettangolo; e gli altri saran tanto minori, quanto più acuti son i loro angoli.

590. Coroll. IV. Il maggiore di tutti i rettangoli *isoperimetri* sarà il quadrato; e gli altri saran tanto minori, quanto più disuguali saranno i loro lati.

591. Probl. Fara che la circonferenza, la quale racchiude un dato numero di misure di terreno, ne racchiuda un maggior numero.

Soluz. Sia, per esempio un parallelogrammo, di cui uno de' lati sia di 20 pertiche, e l'altro di 40; l'area di questo parallelogrammo = 800 pertiche. Si cambi ora questo parallelogrammo in un quadrato della stessa circonferenza; cioè sia ciascun lato = 30 per.

pertiche; la sua aja farà di 900 pertiche; maggiore di quella del predetto parallelogrammo.

Della Geodesia, o Agrimensura.

592. La *Geodesia*, che significa divisione della terra, è propriamente l'arte di divider una figura qualunque in un certo numero di parti: arte importantissima per il partaggio e divisione de' terreni.

Questa operazione è sempre possibile o esattamente o almeno per approssimazione. Se la figura è rettilinea, si dividerà prima in triangoli, che avranno un vertice comune preso ove si voglia, o nel di dentro della figura, o nella circonferenza.

Si calcolerà poi co' metodi noti l'aja di ciascuno di questi triangoli; e per conseguenza si avrà il valore di ciascuna parte della superficie; e con ciò si conoscerà in qual maniera si ha da dividere la figura. Tutta la difficoltà si ridurrà in ogni caso a divider un triangolo in ragion data.

593. Probl. *Divider un Esagono per mezzo d'una linea tirata da uno de' suoi angoli, in due parti che sieno tra loro come m a n.* Soluz. 1.° Dividasi l'Esagono in 4 triangoli per linee tratte dal punto dato.

2.° Sia A l'aja dell'esagono, e pA, qA, rA, sA l'aja di ciascuno de' triangoli. Siccome le aje delle sue parti richieste devon esser mA e nA; suppongasi,

che $\frac{p+q}{r+s}$ sia $> \frac{m}{n}$; siegue che bisognerà prendere nel triangolo qA una parte xA tale, che sia $\frac{p+q}{r+s}$

$\frac{m}{n}$; ovvero $(p+q)n - (r+s)m = mx + nx$; e per conseguenza $x = \frac{(p+q)n - (r+s)m}{m+n}$.

Si tratta ora dunque di divider il triangolo qA in due

due parti xA e $(q-x)A$, che sieno tra loro come x è a $q-x$; e per conseguenza in ragion data, poichè x è già nota per l'equazione che si è trovata. Or per far ciò, basta divider il lato dell'Esagono ch'è la base di questo triangolo qA in due parti, che sien tra loro come x è a $q-x$; operazione facilissima (538).

Il problema non avrebbe maggior difficoltà, se il punto dato invece d'esser alla sommità degli angoli, fosse sopra qualunque de' lati della figura.

594. Se la figura da dividerli è curvilinea, si può talvolta dividerla geometricamente in ragion data, ma ciò è raro. Il metodo generale e più semplice in pratica consiste in divider la circonferenza della figura in parti sensibilmente rettilinee, e riguardar per conseguenza la figura come rettilinea, e dividerla poi secondo il metodo precedente.

595. Se il punto per cui passa la linea, che deve divider una figura qualunque in ragion data, è situato dentro o fuori della figura; allora è evidente, che il problema può aver molte soluzioni, almen in un gran numero di casi, e talvolta può esser impossibile.

Se in una figura, per esempio, regolare e d'un numero pari di lati, il punto dato è al centro, e si chiegga di dividerla in due parti uguali: il problema è indeterminato, poichè ogni linea retta tirata dal centro risolverà il problema.

Se le due parti si vogliono inuguali, il problema è impossibile; e se in quest'ultimo caso il punto è situato fuori della figura regolare o irregolare che sia, il problema ha sempre due soluzioni, di cui l'una si eseguirà per una linea tirata a destra, e l'altra a sinistra, tutte due partendo dal punto dato.

Or menando dal punto dato a tutti gli angoli della figura linee che (prolungate s'è necessario al di dentro della figura) dividon questa figura in quadrilateri (il che è sempre possibile), si vede evidentemente, che siccome la quistione si è ridotta nel primo caso a divider un triangolo in ragion data per

una

una linea, che parta da un punto dato; così la questione quì si riduce, dopo aver calcolato separatamente le superficie di tutti questi quadrilateri, a divider un di loro in ragion data per una linea tirata dal punto dato. Vi son dunque quì da trovar tre cose.

1.^o Qual è il quadrilatero che si ha da dividere.

2.^o Qual è la ragione, secondo cui si ha da dividerlo.

3.^o Come si divide un quadrilatero in ragion data per una linea tirata da un punto dato, il quale si trova al concorso de' due lati del quadrilatero.

I due primi problemi si risolvono con un metodo esattamente simile a quello dato di sopra per la divisione della figura triangolare (593): Il terzo problema richiede un calcolo analitico differente.

596. Probl. *Divider un quadrilatero in ragion data per una linea tirata da un punto dato, il quale è al concorso di due lati del quadrilatero.*

Soluz. Si prolunghino i due lati del quadrilatero, che non concorrano al punto dato, e si avrà un triangolo esteriore al quadrilatero, il qual triangolo avrà uno degli altri lati del quadrilatero per base, e sarà col quadrilatero in ragion data di K a 1 , essendo K un numero qualunque intero o rotto.

Ciò posto, sieno pA , qA le due parti, nelle quali si ha da divider il quadrilatero. E' evidente che il quadrilatero totale sarà $pA + qA$, che il triangolo sarà $K(pA + qA)$, e che il triangolo unito al quadrilatero (il che formerà un nuovo triangolo, che avrà il quarto lato del quadrilatero per base) sarà $(K + 1)(pA + qA)$. Si tratta dunque, tirando una linea pel punto dato, di divider questo triangolo in due parti, di cui l'una sia $K(pA + qA) + pA$, e l'altra qA ; vale a dire, il problema si riduce a divider un triangolo noto e dato in due parti, le quali sieno fra loro come $K(p + q) + p$ a q , per una linea, che passa per un punto dato fuori del triangolo. Or come ciò si risolva, si è detto (593).

597. Se il punto dato è posto nella figura, si tireranno

ranno per questo punto a tutti gli angoli delle linee terminate da una parte e l'altra a questa figura; e con questo mezzo si dividerà la figura in triangoli, de' quali ciascuno avrà il suo opposto alla sommità. Ciò posto, si cercheran le aje di quei triangoli, e si avran le aje di ciascuna parte della figura terminate da una delle linee tirate dal punto dato; linee, che si posson chiamare, benchè impropriamente, *diametri della figura*. Conoscendo queste aje, si cercherà quali con i due diametri vicini che dividon la figura, l'uno in ragion maggiore, l'altro in ragion minore della ragion data; e con ciò si saprà che la linea cercata deve passare nell'angolo formato da questi due diametri. E siccome vi posson essere molti diametri vicini, che dividon così la figura, l'uno in maggiore l'altro in minor ragion data, siegue che il problema avrà tante soluzioni possibili, quanti saranno tali diametri.

Ciò posto; sia A l'aja della figura totale; pA l'aja d'uno de' triangoli formato d'uno de' due diametri vicini; qA l'aja del triangolo opposto alla sommità; mA l'aja della parte della figura ch'è a destra di questi due triangoli; nA l'aja della parte ch'è a sinistra: sarà $mA + pA + nA + qA$ l'aja della figura intera, così che sarà $m + p + n + q = 1$; e si tratterà di menare tra i due diametri dati e dal punto dato ove questi diametri si segano, una linea che divida i due triangoli opposti alla sommità in due parti; cioè xA e $pA - xA$ da una parte, e dall'altra zA e $qA - zA$, e che sien tali, che $mA + pA - xA + zA$ sia a $nA + qA - zA + xA$ in ragion data, per esempio, di s a 1 . Si avrà dunque $m + p - x + z : n + q - z + x :: s : 1$; il che darà una prima equazione tra x e z . Or siccome i triangoli xA e zA son opposti alla sommità, e son parte de' triangoli dati e anche opposti alla sommità pA e qA , si troverà facilmente un'altra equazione generale tra x e z , poichè xA essendo nota, zA lo sarà necessariamente; perciò si avran due equazioni in x e in z , per mezzo delle quali si troverà x ,

nè si tratterà d'altro che di divider la base del triangolo pA in ragione di xap ; il che darà la soluzione compita del problema,

598. Se si avesse da divider una figura in ragion data, per una linea che non passasse per un punto dato, ma che fosse parallela ad una linea; bisognerebbe divider prima la figura in trapezoidi, per linee tratte da tutti gli angoli di questa figura parallelamente alla linea data.

Indi non si avrebbe da far altro che divider in ragion data uno di questi trapezoidi; il che, sarebbe facilissimo.

599. Gli esempj di questo metodo generale possono vederli nel *Clerc Geometrie sur le Terrain*.

600. L'Armentura o sia l'Arpentaggio ha tre parti. La 1^a. consiste a prender le misure, e a far le osservazioni necessarie sul terreno stesso. La 2^a. a metter sulla carta queste misure e queste osservazioni. La 3^a. a trovar l'aja del terreno.

Riguardo alla prima parte, per le osservazioni degli angoli si adopra il Grafometro, la Tavoletta, la Bussola.

1^o. *Grafometro o Semi-circolo* (fig. 135.). Il limbo di questo semi-circolo è diviso in 180 gradi, e talvolta suddiviso in minuti diagonalmente o altrimenti.

Questo limbo ha per sortendente il diametro FG , alle di cui estremità son elevate due *pinnule* o *traguardi*.

Nel centro è un perno ed uno stile con una regola mobile guarnita di due altri traguardi H, I . Per un angolo col semi circolo, si metta lo strumento in maniera che il raggio CG corrisponda direttamente e parallelamente ad un lato dell'angolo da misurarsi, e il centro C sulla sommità di esso angolo. Indi si giri la regola mobile HI sul suo centro verso l'altro lato dell'angolo, finchè per mezzo de' traguardi si possa scoprir un segno piantato all'estremità del lato. Allora il grado tagliato dalla regola sul limbo, è la quantità dell'angolo proposto.

Invece del Semicircolo si usa un Circolo intiero diviso in 360 Gradi. Si serve anche d'un quarto di Circolo per le osservazioni più esatte.

2^a. La *Tavoletta* (fig. 136.) consiste in un parallelogrammo di legno, lungo circa 15 pollici, e largo 12, circondato da una cornicetta, per mezzo di cui si attacca un foglio di carta ben distesa, su cui si tiran esattamente tutte le linee che abbisognano. Sopra ciascun lato della cornice, e verso il labro interno, vi sono delle scale di pollici suddivise. Sopra un lato son disegnati i 360 gradi d'un circolo, incominciando da un centro di metallo ch'è nel mezzo della *Tavoletta*; ogni grado è diviso in due parti uguali, e ad ogni decimo grado son segnati due numeri, de' quali l'uno esprime il grado, e l'altro il suo complemento a 360°, a fin di non esser obbligato di far la sottrazione. Sull'altro lato son disegnati 180 gradi d'un semicircolo incominciando da un centro di metallo ch'è nel mezzo della lunghezza della *Tavoletta*, ed un quarto distante dalla sua larghezza: ciascun grado è diviso in due, e ad ogni decimo grado son segnati due numeri, cioè il grado col suo complemento a 180°.

Da un lato della *Tavoletta* è una *Bussola* che serve a situare lo strumento; e nel mezzo gira una regola guarnita di traguardi, e di scale.

Si usa parimenti una *Tavoletta* rotonda (fig. 137 in al di sotto di cui son attaccati due piccioli sostegno), b sostenenti un asse, sopra il quale è un telescopio, due lenti, rinchiuso in un tubo di rame per iscoprir di gli oggetti lontani, e un consimile telescopio è ire a, a.

Il più semplice ed accurato strumento per prender gli angoli, è quello dato da Tobia Mayer negli Atti di Gottinga (fig. 139).

Consiste questo in due regole ben consistenti, lunghe 12 pollici, larghe 1: mobili intorno al mezzo con un asse che le unisce: quella di sopra portando un canocchiale con un sottil filo teso verticalmente nel fo-

co comune delle due lenti convesse, E' situato sopra un forte piede con un anello, onde possa girar e fermarsi con una vite.

Aperte quelle regole comunque, si conoscerà l'angolo, prendendo col compasso l'intervallo ab , cioè la corda dell'angolo, la quale si trasferirà nella scala già preparata.

Per operare si procede così. Si aprano le regole comunque, come in dCb , e si assicuri della data quantità di quest'angolo. Poi si diriga il tutto (fermo l'angolo verso il primo oggetto A) finchè il filo lo tagli per mezzo. Poi fermata la regola inferiore, si rivolga pian piano (con una vite perpetua praticata sotto il perno C) all'oggetto B. Preso col compasso l'intervallo Db , si avrà la corda dell'angolo totale Bcb , da cui sottraendo l'angolo noto ACb , resterà BCA cercato.

Per diminuire l'errore, se ve ne fosse, si ripeta l'operazione così. Ferma l'apertura tutta Bcb , si collimi di nuovo in A; poi aprasi maggiormente lo strumento per mirar in B. Prendasi tutto questo nuovo angolo, e di nuovo con questa terza apertura si collimi in A, indi in B; e così di seguito, fin a far un intiero giro, o più giri se si vuole, notando solamente il numero delle operazioni.

In fine si ha un somma di gradi, che contiene tante volte l'angolo cercato quante operazioni si son fatte, più il primo angolo finto dCb . Dunque dalla somma totale si sottragga il valore di quest'angolo, il resto si divida per il numero delle operazioni: il quoziente sarà l'angolo cercato ACB molto più esatto.

Per l'esattezza convien badar ancora, che i punti sulle regole sieno sottilissimi, rotondi, ed in ugual distanza dal centro, specialmente i punti a, b . Si usi ancora un compasso di acutissima punta; e con prontezza d'occhio e di mano si sfuggirà l'errore, il quale, benchè piccolo, nelle gran distanze, riesce grave.

3°. La *Buffola* (fig. 138.) guarnita di due traguardi fa lo stesso ufficio del Grafometro, qualora si situa

no i traguardi direttamente sopra un lato d'un angolo, che si vuol prendere, e poi si v'è a situarli sopra un altro lato di esso angolo. Si osservino gli angoli che farà l'Ago con questi lati; se l'Ago della Bussole si allontana dalla stessa parte della meridiana di essa Bussole, la differenza di questi angoli sarà il valore dell'angolo cercato; se poi l'Ago si allontana dalla sua meridiana in senso contrario, il valore dell'angolo richiesto sarà la somma degli angoli osservati.

Per misurar le distanze si adopra la Catena, e l'Odometro.

1°. La *Catena* è una misura composta di molti pezzi di fil di ferro ben grosso, o anche di ottone, ricurvi alle due estremità. Ciascun pezzo è lungo un piede, compresi i piccioli anelli, che li uniscono insieme.

Queste Catene son ordinariamente della lunghezza della pertica del luogo, ove si adoprano; ovvero son lunghe 4 o 5 pertiche, e fin a 8, o 10, se si han da fare grandi stazioni.

Queste Catene son preferibili alle funi, che son soggette a molti inconvenienti, sì per l'umidità, come per la forza con cui si tendono.

2°. L'*Odometro* (fig. 140.) è uno strumento per misurare speditamente le distanze camminando.

La sua costruzione è tale che si attacca ad una ruota di Carro o di Carrozza, o si tira a mano, e misura il cammino senza cagionar alcun imbarazzo. Consiste in una ruota di 2 piedi e $7\frac{1}{2}$ pollici di diametro, della quale la circonferenza è di circa 8 piedi e 3 pollici. Ad un'estremità dell'asse è un *pignone* del diametro di $\frac{1}{2}$ di pollice, diviso in 8 denti che al girar della ruota s'ingranano ne' denti d'un altro pignone C fisso all'estremità d'una verga di ferro, così che questa verga giri una volta mentre la ruota fa una rivoluzione. Questa verga ch'è collocata lungo una scanalatura posta sul lato del sostegno B di questo strumento, ha all'altra sua estremità un foro quadrato, in cui è posta la punta *b* del piccolo cilindro *p*. Questo cilindro è disposto sotto un quadrante all'estre-

mità del sostegno *Q* in tal maniera che può muoversi intorno al suo asse. La sua estremità *a* è fatta a vite perpetua, e s'ingrana in una ruota di 32 denti, che gli è perpendicolare. Quando lo strumento è tirato avanti, la ruota fa una rivoluzione ad ogni sessa pertica. Sull'asse di questa ruota è un *pignone* di 6 denti, che incontra un'altra ruota di 60 denti, e le fa far un giro ogni 160 pertiche, o sia ad ogni mezzo miglio. Quest'ultima ruota ha un indice che può girare sulla superficie del quadrante, di cui il limbo esteriore è diviso in 160 parti corrispondenti alle 160 pertiche, e così l'indice mostra il numero delle pertiche fatte.

Di più sull'asse di quest'ultima ruota è un *pignone* di 20 denti, che s'ingrana in una terza ruota di 40 denti, e le fa far un giro di 320 pertiche o di un miglio. Sull'asse di questa ruota è un pignone il quale s'ingrana in un'altra ruota di 72 denti, e le fa far un giro di 12 miglia. Questa quarta ruota ha un altro indice, che corrisponde al limbo interiore del quadrante, diviso in 12 parti per miglio, e ciascun miglio diviso in metà, in quarti, e serve a mostrare le rivoluzioni dell'altro indice, come a conoscer il mezzo miglio, il miglio, e fin a 12 miglia, che si sono percorse. Hist. Accad. 1742.

La 2.^a Parte dell' Agrimensura si eseguisce colla Scala, e col Rapportatore.

1.^o. La *Scala* (fig. 142) è una linea, come *A B*, divisa in un numero qualunque di parti uguali, una delle quali è suddivisa in un più gran numero di parti uguali più piccole. Se una delle più gran divisioni rappresenta 10 d'una misura qualunque, per esempio, 10 miglia; ciascuna delle piccole divisioni rappresenterà un miglio &c.

2.^o. Il *Rapportatore* (fig. 141.) è un strumento con cui gli Agrimenfiori riferiscono e delineano sulla carta gli angoli, che han preso sul terreno col Grafometro &c. Consiste in un limbo semicircolare *BGA* di metallo, o di osso, diviso in 180 gradi, e termina-

to dal diametro AB , in mezzo di cui vi è un intacco o labro chiamato *il centro del rapportatore*.

Talvolta sul limbo del *rapportatore* vi son i numeri disegnanti gli angoli al centro de' poligoni regolari; onde rimpetto al numero 5 denotante il lato del pentagono si trova 72 ch'è l'angolo al centro del pentagono.

Per l'uso di questi principj e di questi stromenti vedi Trigonometria.

Finalmente riguardo alla 3^a. parte dell' Arpentaggio, ch'è di trovar l'aja del terreno, si eseguisce col ridurre i terreni in triangoli, in quadrati, in parallelogrammi, in trapezj, e se ne determina l'aja secondo i principj stabiliti.

Proprietà delle Superficie Piane, o de' Piani.

Si è supposto fin qui che tutte le linee e figure fossero poste sopra un piano, e gli spazj fra esse rinchiusi fossero descritti dal movimento de' punti o delle linee sopra un piano; ora si va a mostrar l'origine e la formazione geometrica del Piano.

601. Concepiscasi una retta AB (fig. 46) posta in aria, alla quale sia perpendicolare una retta indefinita ED . Si concepisca, che la retta AB giri sopra se stessa senza uscir dal suo luogo; si vedrà evidentemente che la retta ED descriverà una superficie piana CCD ; questa superficie sarà un piano perpendicolare alla linea AB .

Il Piano è dunque una superficie tale che tutti i punti d' una retta postale sopra, e girata per ogni verso, la toccano sempre.

602. Se le due linee non fossero perpendicolari l'una all'altra, la figura descritta non sarebbe un piano.

Per esempio, se si facesse girare sopra se stessa la retta MB (fig. 54) la quale fa in M l'angolo acuto NMB , è evidente che questa retta MB descriverà una superficie rotonda, convessa in punta da una parte, e

concava al di dentro, nella quale per conseguenza non sarà possibile situar in alcuna maniera delle rette, delle quali tutti i punti tocchino questa superficie.

603. Teor. I. *Una retta posta sopra un piano non può esser in parte su questo piano, e in parte elevata al di sopra, o abbassata al di sotto.*

604. Coroll. I. *Se due punti d'una retta son in un piano, la retta vi è tutta intiera.*

605. Coroll. II. *Uno stesso piano A non può esser in parte stesso esattamente sopra un piano B, e in parte elevato al di sopra o abbassato al di sotto.*

Perchè allora una retta posta sopra il piano A potrebbe esser in parte sul piano B, e in parte elevata in su o bassata in giù; il che è impossibile.

606. Teor. II. *Tre punti che non son in linea retta, fissano, o determinano la posizione d'un piano.*

Dimostr. Si metta un piano su quanti punti si voglia in linea retta, si vede facilmente che tutti questi punti formeranno al più un appoggio, intorno a cui questo piano potrà girare liberamente. Ma si metta un piano sopra tre punti che non son linea retta, questi tre punti formeranno un appoggio, su cui il piano non potrà più girare, ma sarà ritenuto in una posizione costante: Dunque tre punti, che non son in linea retta determinano la posizione d'un piano.

607. Coroll. *Un triangolo determina un piano e la sua posizione.*

608. Teor. III. *Una retta perpendicolare a un piano, è anche perpendicolare a tutte le rette, che posse su questo piano passano per l'estremità di questa retta. Onde (fig. 46) AE è perpendicolare su tutte le rette CED, CED &c.*

609. Teor. IV. *Due rette perpendicolari o ugualmente inclinate per lo stesso verso sopra uno stesso piano, son parallele fra loro, e reciprocamente.*

610. Teor. V. *Due rette che s'intersecano, son tutte due in un medesimo piano; o ch'è lo stesso, si può sem-*

sempre disporre un piano in maniera, che due rette, che s'intersecano, vi sieno distese.

Dimostr. Il punto d'intersezione e un altro punto preso ad arbitrio in ciascuna, son tre punti che non son in linea retta, e per conseguenza (606) determinano la situazione d'un piano, su cui ciascuna di queste due linee ha due punti. Dunque (604) queste due linee son tutte intiere in questo piano.

611. Teor. VI. *Se due rette che son in un piano, son tagliate da una terza fuori del punto di loro intersezione; questa retta, che le taglia è anche nello stesso piano.* Perchè ella ha due de' suoi punti in questo piano, cioè i due punti d'intersezione colle due rette.

612. Teor. VII. *Tra punti non posson esser comuni a due piani differenti, se non son in linea retta.*

Dimostr. Tre punti che non son in linea retta determinan un piano. Or se tre punti non in linea retta potessero esser comuni a due piani differenti, la superficie rinchiusa tra questi tre punti sarebbe una parte comune a ciascuno de' due piani.

Dunque l'uno di questi due piani avrebbe una delle sue parti distesa esattamente sopra un altro piano, e il resto in su o in giù; il che è impossibile (605).

613. Corol. *L'intersezione di due piani non può esser che una linea retta.* Perchè l'intersezione di due piani è una linea, di cui tutti i punti son comuni ai due piani.

614. Suppongasi ora un piano immobile A; su cui sia steso un altro piano B terminato da linee rette, come un poligono regolare. Questi due piani non avendo alcuna profondità, non posson formare, che un solo e stesso piano. Ma se si fa girar il piano B sopra uno de' suoi lati, che resta sempre situato sul piano A, si concepisce facilmente; 1.^o che dal primo istante del movimento non rimarrà più altro di comune ai due piani, che la retta, sulla quale il piano B girerà; 2.^o che questo piano passerà per tutti i gradi possibili d'in-

d'inclinazione, se si fa girarlo finche si posi sul piano A dall'altro lato: 3.^o che diverrà perpendicolare al piano A, quando non sarà inclinato più da una parte che dall'altra: 4.^o che i differenti gradi d'inclinazione saran misurati dal numero de' passi, che ciascun punto avrà descritto dacchè avrà lasciato il suo punto corrispondente nel piano A. Questo sarà dunque un arco di circolo, di cui il centro sarà nella linea retta, che forma il piano di quest' arco nel girare. Or (603) una retta, che gira non può formar un piano, se ella non è perpendicolare alla linea su cui gira. Dunque *il centro dell' arco che misura i gradi d'inclinazione d'un piano riguardo a un altro, è in una perpendicolare tirata da un punto qualunque di quest' arco alla linea dell' incontro de' due piani.* Se dunque si descrive un semicircolo, di cui il centro sia nella linea comune ai due piani, e di cui il piano sia perpendicolare alla loro linea d'intersezione, tutti i gradi di questo semicircolo misureranno tutte le inclinazioni possibili del piano mobile.

Si concepisce anche, che se una parte del piano mobile B avendo traversato il piano A, girasse sopra la linea d'intersezione, l'altra parte girerebbe nello stesso tempo, e farebbe col piano mobile gli stessi angoli dall'altra parte.

Donde siegue in generale, che due piani, che s'inclinano l'uno sull' altro, hanno le stesse proprietà, che due rette, che s'inclinano l'una sull'altra. Dunque . . .

615. Teor. VIII. *Un piano, che incontra un altro piano, fa con lui due angoli retti, o uguali insieme a due retti.*

616. Teor. IX. *Nell' intersezione di due piani gli angoli opposti al vertice son uguali.*

617. Teor. X. *La somma degli angoli di quanti piani si voglia aventi una stessa linea d'intersezione, è di 360 gradi.*

618. Teor. XI. *Non vi è, che una linea che passando*

fando per un punto d'un piano, possa essergli perpendicolare; e da un punto fuori d'un piano non si può abbassargli, che una perpendicolare.

619. Teor. XII. La distanza da un punto a un piano è una perpendicolare tirata dal punto sul piano.

620. Teor. XIII. Un piano, che taglia due o più piani paralleli fra loro, forma con loro degli angoli alterni esterni uguali, degli angoli alterni interni uguali, degli angoli interni supplementi l'uno dell'altro, e degli angoli esterni anche supplementi l'uno dell'altro; e reciprocamente.

621. Teor. XIV. Le intersezioni di due o più piani paralleli son rette parallele. Perchè se non fossero parallele potrebbero incontrarsi; dunque i piani ove esse sono, si potrebbero incontrare; dunque questi piani non sarebbero paralleli.

C A P I T O L O III.

De' Solidi, o della Stereometria.

622. **S**I chiama *Corpo* o *Solido* ogni quantità continua, e ogni spazio, che ha le tre dimensioni dell'estensione, cioè lunghezza, larghezza, e profondità.

Si consideran ordinariamente i solidi in due maniere: come prodotti dal movimento de' piani, nella stessa guisa, che il piano è formato dal movimento della linea retta, e che la linea è prodotta dal movimento del punto.

Seguendo questa idea, un solido non è altra cosa, che un composto di vestigi d'un piano, o piuttosto un ammasso di piani d'una grossezza infinitamente piccola, de' quali il numero infinito è ugual al numero de' punti della linea, che misura il cammino del piano, che ha formato il solido; ciascuno di questi piani si chiama uno degli *Elementi* del solido.

623. Questi solidi son prodotti o da un movimento rettilineo d'un piano parallelamente a se stesso, o dalla

la rivoluzione circolare d'una figura sopra una retta immobile, che si chiama l'*asse* del solido.

624. 11.^o Si può anche riguardar un solido come composto d'altri solidi simili, o no, applicati gli uni incontro agli altri, e de' quali si suppone ordinariamente, che due delle loro tre dimensioni sien infinitamente piccole: queste specie di piccoli solidi si chiamano anche *Elementi* del solido ch'essi compongono.

625. I solidi, de' quali le facce son piane, chiamansi in generale *Poliedri*, e prendon il nome di *Tetraedro*, *Pentaedro*, *Esaedro* &c. quando hanno 4, 5, 6 &c. facce. Si dicon *Poliedri regolari*, se i loro angoli son tutti uguali, e se le loro facce son poligoni regolari uguali, e della stessa specie.

626. Se s'immagina un piano, che passi a traverso d'un solido, come per tagliarlo in due parti, la figura formata sulla superficie del solido dal rincontro delle sue facce col piano secante, si chiama *sezione* di questo solido. E' chiaro che questa sezione è un Poligono, che ha tanti lati quante facce ha incontrato il piano secante.

Origine e proprietà de' solidi prodotti da un movimento rettilineo.

627. Sia (fig. 47, 48) una figura piana qualunque ABCDE, che posta sopra un piano scorra parallelamente a se stessa lungo la retta MN, e si fermi in FGHIK. Questa figura avrà prodotto col le sue tracce un solido, che si chiama *Prisma*.

In questo movimento è chiaro, 1.^o i lati AB, BC, CD &c. avran descritto i parallelogrammi ABGF, BCHG, CDIH &c. 2.^o che ciascuna traccia o elemento del Prisma, e ciascuna base, son tanti poligoni uguali, e similmente posti. Dunque in generale . . .

Il *Prisma* è un corpo terminato da basi, che sono figure uguali e parallele, e da facce che sono parallelogrammi.

628. Il *Prisma* è retto o obliquo, secondo che la
linea

linea MN, lungo di cui si muove il poligono generatore, è perpendicolare o inclinata al piano colla base del Prisma.

629. La retta PQ (fig. 48), o Pq (fig. 47) che passa per il mezzo di tutti gli elementi del solido, si chiama l'asse del Prisma; quest'asse è ugual e parallelo a tutti i lati AF, BG, CH &c. del prisma, poichè rappresenta la traccia del centro del Poligono generatore.

630. Una perpendicolare FQ (fig. 47) tirata da un de' punti qualunque d'una delle basi sul piano dell'altra base (prolungato s'è necessario) si chiama l'altezza del Prisma.

631. Coroll. I. L'altezza d'un Prisma retto è ugual al suo asse; e l'altezza d'un Prisma obliquo è tanto più piccola dell'asse, quanto questo solido è più inclinato al piano della sua base.

632. Coroll. II. L'altezza d'un solido qualunque composto d'elementi che son piani paralleli, esprime il numero di questi elementi. Perchè ella esprime la distanza de' piani delle due estremità del solido. Or non posson esservi tra questi due piani più elementidi quel che non vi son punti nella linea, che misura la loro distanza. Dunque l'altezza d'un solido esprime il numero de' suoi elementi, lorchè si posson prender questi elementi per piani paralleli.

633. Il Prisma prende differenti nomi secondo la specie del poligono generatore. Se questo è un triangolo, il Prisma si chiama *Triangolare*; s'è un Quadrilatero, diceasi *Quadrangolare*; s'è un Pentagono, si chiama *Pentagonale*, &c. s'è un circolo, e se il suo movimento si fa per una linea perpendicolare al piano di questo circolo, il Prisma si chiama un *Cilindro retto* (fig. 49).

634. Se il Poligono generatore del Prisma è un Parallelogrammo, il Prisma si chiama *Parallelopipedo*: se il Parallelogrammo è un rettangolo, e se il Prisma prodotto da questo rettangolo è retto, si chiama *Parallelopipedo rettangolo* (fig. 50). Se il Poligono gene-

generatore è un quadrato, e se il prisma formato da questo quadrato è retto, e ha il suo asse ugual al lato del quadrato, si chiama *Cubo*, o *Esaedro regolare* (fig. 51.).

635. Sia una figura piana qualunque (fig. 52, 53) ABCDE, che posta sopra un piano si avvanzi per una linea qualunque MN (perpendicolare o inclinata al piano della figura) così che a ciascun lato della figura decresca in progressione Aritmetica. Per esempio, che dopo il primo passo infinitamente piccolo ciascun lato perda $\frac{1}{n}$ della sua lunghezza; dopo il secondo passo ciascun lato perda ancora $\frac{1}{n}$ della sua prima lunghezza &c. in maniera che la figura essendo arrivata in M; non abbia più che lati infinitamente piccoli, o sia ridotta a non esser più che un punto. Il Solido così formato si chiama *Piramide*; il punto M diceasi la *sommità*, e il Poligono ABCDE è la *base*.

E' chiaro che in questa formazione ciascun lato AB, BC, CD &c. della figura, avrà descritto i triangoli ARM, BCM, CDM &c. poichè (553) lo spazio racchiuso in un triangolo, è ripieno d'un infinità di parallele, che vanno in progression Aritmetica da zero, ch'è la sommità del triangolo, fin alla sua base. Dunque

636. 1.^o Una *Piramide* è un *solido*, che ha per base un poligono, e che è terminato da facce triangolari.

637. 2.^o La linea NM, che va dalla sommità M al punto N del mezzo della base, si chiama l'asse della *Piramide*; la sua altezza (fig. 52) è la perpendicolare MN, o (fig. 53) Mn; la qual altezza è ugual o più corta del suo asse, secondo che la *Piramide* è retta o inclinata.

638. La *Piramide* prende anche differenti nomi secondo la specie del Poligono della sua base. Se questo è un triangolo, la *Piramide* si chiama *triangolare*; se questo è un triangolo equilatero, e se l'asse essendo perpendicolare le facce son anche triangoli equilateri, la *Piramide* si chiama *regolare*, o *Tetraedro regolare*.

re. Se è un Quadrilatero, la Piramide dicesi *Quadrangolare* o a quattro facce; se è un Pentagono, ella si chiama *Pentagonale* &c.; finalmente s'è un circolo; e se l'asse è perpendicolare al piano in questo circolo, si chiama *Cono retto*; e se l'asse è inclinato al piano, si chiama *Conoide*.

639. Se nella formazione della Piramide si concepisce, che il Poligono generatore si fermi prima d'esser divenuto infinitamente piccolo, la Piramide o il Cono formati in questa maniera, si chiaman *Piramidi* o *Coni troncati* (fig. 55), perchè posson riguardarsi come Piramidi o Coni, di cui siasi tagliata una parte per mezzo d'un piano parallelo alla base.

Origine e proprietà de' Solidi formati da un movimento circolare.

640. 1.^a Si può concepir il Cilindro retto formato da un movimento circolare in due maniere; o col far girar un rettangolo MABN (fig. 49) sopra uno de' suoi lati immobili MN, il quale divenga l'asse del Cilindro; o supponendo due circoli immobili AC, DB uguali e paralleli, de' quali i centri M, N, sieno in una stessa retta perpendicolare ai loro piani, e facendo girare una retta AB intorno alla circonferenza di questi circoli.

641. Si può finalmente concepire il Cilindro formato da un fascio di prismi retti infinitamente delicati, di basi uguali, e della stessa altezza, e rinchiusi in circoli uguali, de' quali riempian esattamente lo spazio, e de' quali il numero sia ugual a quello de' punti della superficie di questi circoli.

642. 2.^a Si può concepir il Cono retto formato da un movimento circolare, 1.^o facendo girar un triangolo (54) MNB sopra uno de' suoi lati MN che farà l'asse del Cono; l'ipotenusa MB descriverà la superficie, e l'altro lato NB farà il raggio della base. 2.^o Supponendo che all'estremità M d'una retta MN elevata perpendicolarmente sul piano d'un circolo ED, e passa

e passando pel suo centro, sia fissata all' estremità M d' un'altra retta MB , e che l'altra punta B giri intorno al circolo BD . Donde si vede, che tutti i punti formanti il contorno della base del Cono retto son ad ugual distanza dalla sua sommità M .

643. Il Cono troncato è formato dal movimento d' un Trapezio $ABND$ (fig. 55) di cui due lati AB , ND son inuguali, paralleli fra loro, e perpendicolari alla retta AN , su cui questo Trapezio gira.

644. 3°. Se si fa far una rivoluzione a un semicircolo sopra il suo diametro, il solido prodotto da questo movimento, si chiama un *Globo* o una *Sfera*.

Dunque la *Sfera* è un solido, di cui tutti i punti della superficie presi in qualunque maniera, son ugualmente lontani da un punto al di dentro, che n' è il centro.

645. Se s'immagini (fig. 64. n°. 2.) che per tutti i punti consecutivi P , P &c. che compongono il diametro Ss del semi-circolo generatore, s'abbian fatto passare delle perpendicolari MP , MP &c. terminate alla circonferenza, è chiaro che pel movimento del semi-circolo generatore SMs sul diametro Ss , tutte queste perpendicolari faranno i raggi di tanti circoli quanti se ne posson contenere tra S e s ; e si posson riguardare tutti questi circoli come Cilindri infinitamente sottili di ugual grossezza, che formano gli elementi della Sfera, di cui i semidiametri crescon e decrescon nella stessa ragione di tutte le corde parallele Mm , Mm , che si posson tirare consecutivamente in un circolo.

Ma se si riguarda il semi-circolo generatore come una metà di Poligono regolare (58) d' un' infinità di lati, e si suppongon abbassate da tutti i suoi angoli consecutivi le rette DT , EX , GC &c, perpendicolari al diametro di rotazione dL ; è evidente che queste rette prese consecutivamente due a due formano de' trapezj $dFDT$, $TDEX$, $XEGC$ &c. e per conseguenza nel movimento di rotazione del semicircolo dGL sul diametro dL , questi trapezj formano tanti Coni troncati $OFDB$, $BDEA$, $AEGP$ &c.

Si

Si può dunque in questa ipotesi riguardar la Sfera come composta d'una infinità di Coni troncati d'una grossezza inuguale, ma infinitamente piccola.

Finalmente se si suppongono descritti al di dentro del semi-circolo generatore tanti semi circoli concentrici, quanti punti vi sono nel raggio di questo circolo; è chiaro che in virtù di questo movimento di rotazione, tutti questi semi-circoli formeranno tante superficie sferiche. Dunque si può in questa ipotesi riguardar la Sfera come composta d'un'infinità di superficie d'una grossezza infinitamente piccola, ma uguale, e incastrate le une entro l'altre.

646. Si chiama *Asse* della Sfera ogni retta che passando pel centro, è terminata da una parte e l'altra alla sua superficie.

647. Dunque tutti gli *Assi* della Sfera son uguali fra loro; perchè sono la somma di due raggi.

648. Formata così la Sfera, è chiaro che a causa della regolarità della sua figura, si può prendere uno de' suoi assi qualunque per l'asse del semi circolo generatore. Donde siegue:

649. 1.^o Che in qualunque maniera si tagli con un piano la Sfera, la sezione sarà un circolo. Poichè se pel centro della Sfera si fa passar un asse perpendicolar al piano di questa sezione, si potrà (648) prender quest'asse pel diametro del semi-circolo generatore; e per conseguenza il piano secante incontrando il diametro perpendicolarmente, taglierà la sfera in uno de' suoi elementi, che son tutti circoli (645).

650. 2.^o Che le sezioni della sfera per un piano qualunque, son circoli tanto più grandi, quanto il piano secante passa più vicino al centro della sfera; e reciprocamente; così che la più gran sezione possibile è quella che passa pel centro.

Poichè queste sezioni hanno per diametri corde, che sono (417) tanto più grandi, quanto più son vicine al centro, e delle quali la maggiore è il diametro stesso.

651. 3.^o Perciò si chiama *gran Circolo della Sfera* quello
Elem. di Matem. S

quello che ha lo stesso centro della Sfera; e si chiama *piccolo Circolo della sfera* quello, di cui il piano non passa pel centro della sfera.

652. 4.^o Finalmente si può considerer la sfera come composta d'un' infinità di Piramidi uguali infinitamente sottili, delle quali ciascun de' punti della superficie della Sfera è la base, e delle quali tutte le sommità concorrono al centro della sfera.

Si può supporre a causa della regolarità della figura della sfera, che ciascuno di questi punti, che servono di base, sieno Poligoni regolari infinitamente piccoli, e uguali fra loro; e che perciò sieno o triangoli equilateri, o quadrati, o esagoni; perchè non vi sono che queste tre sorti di poligoni regolari, che possano aver due a due i loro lati comuni senza lasciare spazio vuoto.

De' Poliedri, e de' loro Rapporti.

653. Chiamasi *Angolo Solido* un angolo formato dal concorso delle sommità di più angoli piani, i quali essendo inclinati gli uni sugli altri si riuniscono due a due co' loro lati per formar una sola punta.

Tali sono le sommità delle Piramidi, le punte de' Prismi &c. Diconsi *angoli solidi uguali* quelli che son composti d' uno stesso numero d' angoli piani, de' quali gli omologhi son uguali e similmente posti.

La Sfera serve di misura ad un angolo solido, come il Circolo ad un angolo piano. Bisogna dunque concepire, che la sommità d'un angolo solido sia al centro d'una sfera; allora ciascuno degli angoli piani componenti l'angolo solido è nel piano d'uno de' gran cerchi di questa sfera (651). Ciascun angolo piano ha dunque per misura l' arco (di questo gran circolo) che si trova intercetto tra i suoi lati, e di cui la corda serve di base a quest'angolo, così che la misura dell'angolo solido è la somma de' gradi sottesi da queste corde.

Poichè ciascuno degli angoli piani, che forman un ang.

angolo solido, deve aver un lato comune coll' angolo piano che gli è contiguo, è chiaro che gli archi de' gran cerchi, che misurano questi angoli piani, si terminano gli uni gli altri, come le corde, le quali formano in conseguenza una specie di Poligono chiuso, che serve di base all' angolo solido. Donde siegue

654. Teor. I. *Ci vogliono almeno tre angoli piani per formar un angolo solido.* Poichè il più semplice de' Poligoni, che quest' angolo solido possa aver per base, è un triangolo.

655. Teor. II. *Di tutti gli angoli piani formanti un angolo solido, il più grande deve esser minore della somma di tutti gli altri.*

Poichè se si trovasse ugual alla somma degli altri, l'arco della sfera, che lo misurerebbe, sarebbe ugual alla somma degli archi che misurerebbero tutti gli altri angoli. Dunque tutti questi altri archi non potrebbero esser l'uno contiguo all' altro, ed unirsi alle estremità del più grand' arco, senza esser esattamente distesi sopra di esso, e per conseguenza tutti questi archi e le loro corde farebbero in un solo e stesso piano; il che non può convenir alla misura d'un angolo solido.

Peggio sarebbe ancora, se si volesse, che il più grand' angolo piano eccedesse la somma di tutti gli altri; perchè allora sarebbe impossibile, che tutti gli archi fossero contigui.

656. Teor. III. *La somma di tutti gli angoli piani componenti un angolo solido è sempre minore di 360 gradi; purchè quest' angolo solido non sia composto d' angoli salienti e rientranti.*

Se si prendono 4 angoli piani ciascuno di 90 gradi, non formeranno mai un angolo solido, se non quando se ne rende uno rientrante. Perchè se un angolo solido valesse 360 gradi, gli angoli piani, che lo formano, si appoggerebbero sulla circonferenza intiera d'un gran circolo della sfera, cioè d'un circolo, che avrebbe per centro il centro stesso della sfera, poichè si conosce il valore d'un angolo solido col concepire, che

la sua sommità sia al centro della sfera, che gli serve di misura. Non vi è gran circolo, che non sia nel piano del centro della sfera; dunque la sommità dell'angolo solido sarebbe nel piano della circonferenza, che lo misura. Ma ciò è impossibile; dunque è impossibile che la somma di tutti gli angoli piani componenti un angolo solido non sia minore di 360° , purchè quest'angolo non sia composto di angoli salienti e rientranti.

657. Teor. IV. *Due angoli solidi A, a composti ciascuno di due angoli piani, son uguali fra loro, se si fa, che due angoli piani B, D del primo angolo solido A son uguali ciascuno a due angoli piani b, d, dell'angolo solido a, e che l'inclinazione de' piani B, D è ugual all'inclinazione de' piani b, d.*

Dimostr. Supponendo uguale la lunghezza di tutti i lati di questi angoli piani (com'ella è quando termina alla superficie d'una sfera), è chiaro, che per l'uguaglianza dell'inclinazione, e per l'uguaglianza degli angoli corrispondenti, si può concepire, che i due angoli piani B, D (considerati indipendentemente dal terzo che compisce l'angolo solido) fanno una specie d'angolo cavo, in cui si può incassare esattamente l'angolo cavo formato dagli angoli piani b, d, poichè tutto è uguale da una parte e l'altra. Dunque ciascun cavo non può esser coperto, che da un angolo piano uguale da una e l'altra parte; il che fa vedere (653) che i due angoli solidi A, a son uguali.

658. Osserv. Può dimostrarsi ancora, che se due angoli solidi son composti di quattro angoli piani, e se si è sicuro d'una perfetta uguaglianza da una parte e l'altra in tre di questi angoli piani, e nella loro inclinazione scambievole, il quarto angolo piano deve esser uguale da una parte e l'altra, e i due angoli solidi composti ciascuno di cinque, sei &c. angoli piani.

659. Teor. V. *Un Poliedro ha d'aver almeno quattro facce.* Perchè ci voglion almeno tre piani per formar uno degli angoli solidi di un Poliedro; or un angolo così formato lascia un vuoto in dentro, dunque

ci vuol ancora almen un altro piano per chiuder il vuoto, e affm che il Poliedro abbia le sue tre dimensioni.

660. Teor. VI. *Un Poliedro deve aver almeno quattro angoli.* Perchè il vuoto che lascian tre piani formanti un angolo solido, è terminato da una figura che ha almeno tre angoli; or non si posson formare gli angoli di questa figura, senza formar altrettanti angoli; dunque un Poliedro deve aver almeno quattro angoli.

661. Teor. VII. *Non posson esservi che cinque Poliedri regolari; cioè tre di cui le facce sien triangoli equilateri; uno, le cui facce sien quadrati; e uno, le cui facce sieno Pentagoni regolari.*

Poichè (654) volendoci almeno tre angoli piani per formar un angolo solido, nè potendo un angolo solido essere di 360 gradi (656), è chiaro che non vi sono che cinque casi, nei quali si possa far un angolo solido con piani di Poligoni regolari. 1.° L'angolo d'un triangolo equilatero essendo di 60 gradi, tre uniti insieme fanno un angolo solido di 180 gradi; e per conseguenza quattro triangoli di questa specie posson far un Tetraedro. 2.° Quattro triangoli equilateri uniti insieme, posson far un angolo solido di 240 gradi, e formar un corpo regolare di otto facce, chiamato Ottaedro. 3.° Cinque di questi triangoli uniti insieme, posson formar un angolo di 300°, e per conseguenza se ne può comporre un corpo regolare di 20 facce detto Icosaedro. 4.° Ciascun angolo d'un quadrato valendo 90°, tre uniti insieme faranno un angolo solido di 270°, e in conseguenza se ne potrà comporre un corpo regolare di sei facce detto Esaedro; ma quattro di questi angoli faranno 360°, onde non posson far un angolo solido. 5.° Ciascun angolo del Pentagono regolare valendo 108°, tre uniti insieme potran far un angolo solido di 324°; e se ne potrà far un corpo regolare di dodici facce, chiamato Dodecaedro; ma se si uniscon quattro di questi angoli, si avranno 432°, angolo solido impossibile. Finalmente l'angolo dell'

Esagono regolare essendo di 120° , se se ne uniscono insieme, la somma 360° mostra che non si possono far angoli solidi, nè in conseguenza corpi regolari con Esagoni, molto meno con *Esagoni*, *Ottagoni* &c. Dunque non possono darsi che cinque corpi regolari.

Per maggior intelligenza di ciò, giova farsi col cartone o con altra materia Poligoni regolari, per costruire questi Poliedri.

Del la Comparazione de' Solidi.

662. Si chiaman *Solidi simili* quelli, de' quali tutti gli angoli omologhi son uguali, e de' quali le facce sono figure simili; onde (540) possono ridursi in triangoli simili, ed hanno tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali.

663. Coroll. Due Poliedri regolari qualunque della stessa specie, e in conseguenza due sfere, sono solidi simili.

664. Per aver un'idea chiara di due Solidi simili, convien concepirli come composti tutti due d'un ugual numero di piani simili e similmente posti, così che la loro inuguaglianza consista in ciò, che ciascun piano elementare del più gran solido ha una superficie ed una profondità più grande della superficie e della profondità del piano omologo del più piccolo solido, ma che questi piani omologhi conservino sempre lo stesso rapporto. Per esempio, due Sfere sono due Solidi simili, 1.^o perchè elle son composte di piani circolari, i qual son figure simili, poichè sono Poligoni simmetrici e regolari (506) d'un medesimo numero infinito di lati. 2.^o Questi piani son similmente posti in ciascuna sfera; perchè son tutti posti perpendicolarmente all'asse, che passa per i loro centri, e son disposti in maniera che i loro diametri seguitan il rapporto di tutte le corde successive del circolo. 3.^o Son in ugual numero in ciascuna sfera; perchè tutti i cerchi immaginabili non hanno che uno stesso numero di lati infinitamente piccoli, e per conseguenza hen ciascuna-

scano ugual numero di corde; perchè le corde son linee rette che uniscon tutti gli angoli o tutti i lati, posti nella stessa maniera, e a ugual distanza dall'una e l'altra parte dell'asse.

665. La differenza tra una grande e una picciola Sfera consiste: 1.^o che ciascun diametro di tutti i piani elementari della Sfera grande è maggiore (ma in un rapporto costante) di quello di ciascun piano omologo della piccola. 2.^o Che i lati de' piani elementari della Sfera grande essendo (benchè infinitamente piccoli) maggiori di quelli della Sfera piccola; le corde che li uniscono da una parte e l'altra dell'asse, sono men ristrette, e in conseguenza la grossezza de' piani, ch'è misurata dall'intervallo di queste corde, è maggiore nella Sfera grande che nella piccola, il tutto nella stessa proporzione.

666. Secondo l'idea data di due Solidi simili, è evidente che non vi è punto preso in una delle facce d'uno di questi solidi, che non abbia il suo punto corrispondente, e similmente posto nella faccia omologa dell'altro solido (540). Si deve anche conchiudere, che non vi è punto nell'interiore di questi solidi, che non abbia il suo punto corrispondente, o similmente posto nell'altro; poichè questi due solidi son composti dello stesso numero d'elementi, di cui i corrispondenti in ciascun solido sono figure simili, e similmente collocate.

667. Teor. I. Avendo tirato (fig. 57.) a traverso d'un solido qualunque una retta PQ che termini a due punti qualunque P, Q delle facce KG, EG ; se si fa passar a traverso d'un solido simile una retta pq (fig. 56) che termini ai due altri punti p, q similmente posti; queste due rette saranno dimensioni omologhe de' sue solidi; o ch'è lo stesso, saran tra loro come un lato qualunque preso nel primo solido, al lato omologo preso nel secondo. Per esempio, si avrà $PQ: pq :: GA:ga$.

Dimostr. Se per due angoli omologhi qualunque D, d , e per i punti $P, Q; p, q$ s'imagini un piano, che

$$\begin{matrix} S & A \end{matrix}$$

che tagli ciascun solido; i triangoli DQP , dqp giacenti sul piano di queste sezioni faran simili. Perchè 1.^o i punti similmente posti $Q, q; P, p$ danno questa proporzione (543) $DP:dp::DQ:dq$, e inoltre fanno gli angoli PDF, FDQ uguali agli angoli corrispondenti pdf, fdq . 2.^o per la rassomiglianza de' solidi, le facce FA, FC son inclinate tra loro quanto lo sono le facce corrispondenti fa, fc . Dunque (657) l'angolo solido formato in D dagli angoli piani PDF, FDQ , PDQ è ugual all'angolo solido formato in d dagli angoli piani corrispondenti. Dunque l'angolo piano $QDF = qdf$, e i triangoli QDF, qdf han ciascuno un angolo uguale rinchiuso tra due lati omologhi proporzionali; dunque (524) questi triangoli son simili, e si ha $QP:qp::DQ:dq::AG:ag$. &c.

668. Corol. Tutti i punti componenti la superficie del Triangolo QDF sono nello stesso numero e similmente posti riguardo a quelli che compongono la superficie del triangolo qdf ; donde siegue che i piani secanti, ove son situati i triangoli PDQ, pdq , passano per punti che son tutti similmente posti ne' due solidi e in conseguenza le parti de' due solidi che son tolte da questi piani secanti, son due porzioni simili di questi solidi, come lo son anche le due parti che restano; così che si può dire che se per tre punti omologhi presi (non in linea retta) sulla superficie di due solidi simili, si fa passar un piano a traverso a ciascun solido, ciascun solido sarà tagliato in due parti, di cui gli omologhi saranno anche solidi simili.

669. Teor. II. Se dagli angoli omologhi qualunque C, c si tirano su i piani omologhi vicini o opposti, prolungati o no, le perpendicolari Cr, cr , che misurano l'altezza degli angoli C, c su questi piani; elle saranno proporzionali ai lati, o alle linee omologhe qualunque. Per esempio, $CR:cr::CE:ce::PQ:pq$ &c.

Dimostr. Per i punti, E, e (ove terminan i lati CE, ce sopra i piani delle facce o delle basi FH, fh)

fb) si tirino ai punti *R, r*, ove terminano le perpendicolari *CR, cr* su gli stessi piani prolungati, le rette *ER, er* le quali saran distese su questi medesimi piani prolungati, e faranno (608) perpendicolari alle rette *CR, cr*. I triangoli *CER, cer* saran dunque rettangoli in *R, r*, e simili fra loro, a causa della rassomiglianza de' solidi che rendon i lati omologhi *CE, ce* ugualmente inclinati su i piani omologhi *GHEF, ghef*, e per conseguenza gli angoli *CER, cer* uguali fra loro. Dunque $CR : cr :: CE : ce :: PQ : pq$, &c.

670. Osserv. Dunque la proprietà generale de' solidi simili consiste in aver tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali fra loro.

Della Misura delle Superficie di ciascuna Specie di Solidi.

671. Si chiamerà d'ora avanti *la Superficie d' un Solido* quella delle sue facce solamente senza comprendervi la di lui base, se ne ha. E si chiamerà *superficie totale d' un solido* quella delle sue facce e delle sue basi insieme.

672. Teor. I. *La superficie totale d' un solido, o un Poliedro qualunque, è ugal alla somma delle superficie delle figure, che compongono le sue facce e le sue basi.*

673. Teor. II. *La superficie d' un Prisma qualunque è ugal al prodotto d' uno de' suoi lati qualunque moltiplicato pel contorno del Prisma misurato in un piano perpendicolare a questo lato.*

Dim. Tutti i lati d' un Prisma son linee rette uguali e parallele.

Se dunque per un punto preso ad arbitrio sopra un de' lati del prisma, s'immagini un piano, che tagli il prisma perpendicolarmente a questo lato, questo piano taglierà anche (397) tutti gli altri lati perpendicolarmente, e la sezione sarà un Poligono di cui ciascun lato sarà perpendicolare ai due lati paralleli terminanti ciascuna faccia del Prisma. Dunque (554) la superficie di ciascuna faccia sarà ugal al prodotto di cia-

scun

scun lato della sezione per un de' lati qualunque del Prisma (poichè son tutti uguali): Dunque la superficie del Prisma sarà ugual al prodotto di tutti i lati della sezione, vale a dire, al prodotto del suo contorno moltiplicato per un de' lati qualunque del Prisma.

674. Coroll. La superficie d'un Prisma retto, e quella di un Cilindro retto, è ugual al prodotto del suo asse pel contorno d'una delle sue basi. Perchè la superficie d'un Cilindro retto è l'unione delle circonferenze del circolo tra loro uguali, e poste le une sull'altre. Dunque se la circonferenza del circolo, che serve di base al cilindro, si moltiplica per la sua altezza, o sia pel suo asse, si avrà la superficie del cilindro. Lo stesso è del Prisma.

675. Teor. III. La superficie d'una Piramide retta, la di cui base è un Poligono regolare, è ugual al prodotto della metà del contorno della sua base, moltiplicata per una perpendicolare tirata dalla sommità a uno de' lati della sua base. Questa perpendicolare si chiama l'Apotema della Piramide.

Dimostr. Perchè la superficie (672) è ugual alla somma delle superficie de' triangoli che compongono le sue facce. Or tutti questi triangoli essendo uguali, la somma delle loro superficie è ugual al prodotto dell'altezza d'uno di questi triangoli (cioè dell'Apotema) per la metà della somma delle loro basi, vale a dire, per la metà del contorno del piede della Piramide.

676. Osserv. Se la Piramide non fosse retta, o se la base non fosse un Poligono regolare, non se ne potrebbe aver la superficie, che col prendere successivamente la superficie di ciascuno de' triangoli formanti le facce.

677. Coroll. La superficie d'un Cono retto è uguale alla metà del prodotto della circonferenza della sua base per la lunghezza de' suoi lati, o per uno de' suoi apotemi.

678. Teor. IV. La superficie di ciascuna faccia d'una Piramide qualunque troncata da un piano paral-

parallelo alla sua base, è ugual alla metà del prodotto di quel che resta dell'apotema su questa faccia, per la somma della base e della sezione, o della retta che termina la parte tagliata. O, ch'è lo stesso, è ugual al prodotto del resto dell'apotema per una parallela alla base tirata su questa faccia dal punto di mezzo del resto dell'apotema.

Dimostr. Ciascuna faccia d'una Piramide è (635) un triangolo, di cui la superficie è (558) una serie infinita di rette parallele alla base, le quali son in progression Aritmetica, di cui il primo termine è la sommità di questo triangolo, l'ultimo è la base stessa, e il numero de' termini è disegnato dalla perpendicolare abbassata dalla sommità alla base. Or la superficie d'una faccia di Piramide troncata parallelamente alla sua base, è la stessa serie di cui si son tolti de' termini verso il principio, di cui il primo termine è la retta, che limita la parte tagliata, l'ultimo è ancora la base, e il loro numero è determinato dal restante delle perpendicolare o apotema. Dunque questa superficie è ugual alla metà del prodotto della somma della sezione e della base pel restante dell'apotema; o al prodotto della retta media tra la sezione e la base pel restante dell'apotema, cioè per una perpendicolare alla base tirata da un punto preso nella sezione.

679. Coroll. I. Se la Piramide è retta, e ha base regolare, tutte le sue facce restanti son uguali, e le rette medie tra la sezione e la base fanno il contorno dell'elemento della Piramide medio fra le due estremità. Dunque la superficie d'una Piramide retta con base regolare, è ugual al prodotto d'una retta tirata sopra una faccia da un punto preso nella linea della sezione perpendicolarmente alla base di questa faccia, pel contorno dell'elemento medio tra le due estremità della Piramide.

680. Coroll. II. La superficie d'un Cono retto troncato da un piano parallelo alla sua base, è ugual
al

al prodotto d'uno de' suoi lati pel contorno del circolo medio tra le sue due estremità.

681. Teor. V. La superficie della sfera è ugual al prodotto della circonferenza del suo gran circolo, moltiplicata pel suo asse.

Dimostr. Se si dimostra che la superficie di ciascuno de' Coni troncati, che formano (645) gli elementi della sfera, è ugual al prodotto dell'asse, o sia alla grossezza di questo Cono troncato, per la circonferenza d'uno de' gran circoli della sfera; si avrà dimostrato, che la somma di tutte le superficie di questi coni troncati, e in conseguenza la superficie della sfera, è ugual al prodotto della somma di tutti gli assi de' coni, cioè dell'asse intiero della sfera, moltiplicata per la circonferenza del suo gran circolo.

Onde per Y (fig. 58) mezzo del lato, o apotema AB del cono troncato ABDE preso ad arbitrio, si tiri YR parallela ai piani BD, AE; e YS perpendicolare, che passerà (423) pel centro della sfera, e ne farà un asse.

Per B si tiri BZ perpendicolare all'asse AE, e si avrà BZ ugual all'asse TX del cono troncato. Si tiri RS; i triangoli rettangoli ABZ, YRS faranno simili, avendo oltre l'angolo retto, l'angolo BAZ = RSY.

Perchè a causa delle parallele YR, AE, l'angolo BAZ = BYR. Or l'angolo BYR ha per misura (429) la metà dell'arco YdR, come anche l'angolo RSY; dunque l'angolo RSY = BAZ; onde anche ABZ = RYS. Dunque (521) BZ o TX: AB :: YR: YS. Ma (546) le circonferenze de' circoli son fra loro come i loro diametri: dunque TX è a AB come la circonferenza del circolo di cui YR farebbe il diametro, alla circonferenza di cui YS è il diametro, cioè a quella d'un gran circolo della sfera. Dunque il prodotto di TX per la circonferenza d'un gran circolo della sfera è ugual al prodotto di AB per la circonferenza di cui il diametro è YR, e

in conseguenza (680) alla superficie del Cono troncato $BAED$. Dunque la superficie di questo Cono troncato è anche ugual al prodotto del suo asse TX per la circonferenza d'uno de' gran cerchi della sfera.

682. Coroll. I. La superficie della sfera è quadrupla di quella del suo gran circolo. Perchè la superficie del gran circolo della sfera è uguale al prodotto del suo semidiametro $\frac{1}{2}d$ per la sua semicirconferenza $\frac{1}{2}p$ (568), il quale è $\frac{1}{4}pd$; mentre che la superficie della sfera $\equiv pd$, prodotto del suo asse d per la circonferenza p del suo gran circolo.

683. Coroll. II. La superficie della sfera è ugual a quella d'un Cilindro, di cui l'asse è ugual a quello della sfera, e la base ugual al gran circolo della sfera. Se vi si vuol comprendere le basi del Cilindro, la sua superficie totale è a quella della sfera come 3 a 2.

Perchè allora la superficie della sfera è 4 volte quella della base del Cilindro, e la superficie totale del Cilindro è 6 volte quella della sua base.

684. Coroll. III. La superficie convessa d'una zona o d'una porzione qualunque di sfera determinata dalla sezione d'un piano o di due piani paralleli, è ugual alla superficie d'un Cilindro, che avesse alla sua base un diametro ugual a quello della sfera, e un'altezza uguale alla grossezza di questa zona. Ovvero ella è ugual al prodotto della grossezza di essa zona pel contorno del gran circolo della sfera, di cui questa zona è una porzione.

Comparazione delle Superficie de' Solidi.

Si è fin quì veduto che se si eccettuano le basi de' solidi, le loro superficie son sempre uguali al prodotto di due dimensioni. Donde siegue

685. Teor. I. Che le superficie di due solidi qualunque della stessa specie, son in ragion composta di due loro dimensioni dello stesso nome.

686. Coroll. I. Se due solidi della stessa specie hanno

no ciascuno una dimensioz uguale, le loro superficie faran fra loro come l'altra dimensioz. Cioè se due Prismi retti, due Cilindri retti hanno una stessa altezza; o se due Piramidi rette con basi regolari, due Coni &c. hanno uno stesso apotema, le loro superficie son come il contorno delle loro basi. E se due Prismi retti, due Cilindri retti, due Piramidi rette con basi regolari, due Coni &c. hanno uguali i contorni delle basi, le loro superficie son fra loro come i loro apotemi. Perchè allora son come i prodotti di due quantità inuguali per una stessa quantità.

687. Coroll. II. Se le due dimensioni dello stesso nome di due solidi della stessa specie, son in ragion inversa, le superficie son uguali; e reciprocamente.

Onde la superficie d'un Cilindro retto è uguale a quella d'un altro Cilindro retto, o anche d'un Prisma retto, lorchè l'altezza del primo, è al contorno della base, come il contorno della base del secondo è alla sua altezza; e reciprocamente (562) e 563).

688. Teor. II. Le superficie totali di due solidi simili son fra loro come il quadrato d'una dimensioz qualunque dell'uno, è al quadrato della dimensioz omologa dell'altro; o in ragion duplicata delle loro dimensioni omologhe.

Dimostr. Due solidi simili han tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali (679); dunque le loro superficie son fra loro come i prodotti di quantità proporzionali; e per conseguenza in ragion duplicata di quelle dimensioni.

689. Coroll. Le superficie delle sfere son fra loro come i quadrati de' loro assi, o de' loro raggi. Poichè (663) le sfere son solidi simili, e i loro assi e raggi ne sono dimensioni omologhe.

Della Misura delle Solidità di ciascuna specie di Solidi.

690. Si chiama Solidità o Volume uno spazio determinato, vuoto o pieno che sia di materia: perchè l'idea

idea d'ogni spazio determinato riunisce le tre dimensioni dell'estensione. Perciò quando si tratta d'un corpo reale, bisogna ben distinguere la sua *solidità* dalla sua *massa* e dalla sua *densità*. La *Solidità* è lo spazio dell'Universo racchiuso tralle superficie delle faccie di questo corpo. La sua *Massa* è la quantità assoluta della materia di cui egli è composto; e la sua *Densità* è il rapporto del suo volume alla sua massa, così che un corpo è tanto più denso, quanta più materia egli contiene in un piccolo spazio.

691. Il volume d'uno spazio, o la solidità d'un corpo, è ugual alla somma degli elementi, de' quali si stima composto. La linea è prodotta dal moto continuo del punto, ma non è già composta di punti, ella è composta di piccole linee; così la superficie, ch'è prodotta dal moto continuo della linea, è composta non di linee, ma di piccole superficie; e finalmente il Solido, ch'è prodotto dal moto continuo della superficie, non è composto di superficie, ma di spaziolli solidi. Onde quando si dice, che i Prismi e le Piramidi uguali son composti di sezioni uguali, non s'intende che i Prismi e le Piramidi sien composte di sezioni piane, ma di sezioni infinitamente prossime, delle quali la distanza o la grossezza sia la stessa; e poichè quella grossezza è minima, si trascura, e si considera una sezione piana.

692. Ragionando su i solidi come si è ragionato sulle superficie (552 &c.), si vedrà chiaramente, 1.^a che i Cubi son le misure comuni delle Solidità, o de' volumi. Per esempio, un solido di 100 piedi, deve occupar uno spazio tale da poter esser esattamente riempito da 100 cubi ciascuno d'un piede. 2.^a Che il numero delle parti d'una misura in solidità è ugual alla terza potenza delle parti della stessa misura in lunghezza. Onde un piede solido contiene 1728 piccoli cubi d'un pollice l'uno; perchè è composto di dodici strati, ciascuno de' quali ha un pollice di grossezza, e un piede o 144 pollici di superficie. Co-

sì una tela solida contiene 216 piedi cubici .

693. Teor. I. *La solidità d'un Prisma qualunque , e di qualunque Cilindro , è ugual al prodotto della sua altezza per la superficie della sua base .*

Dimostr. Poichè (622) il Prisma , e per conseguenza il Cilindro , è composto di tanti elementi , o tracce d'un poligono , quanti punti vi sono nella perpendicolare , che misura la distanza delle due basi del Prisma ; siegue che per aver la solidità , bisogna aggunder a se stessa tante volte la superficie del Poligono generatore , quanti son i punti in questa perpendicolare , vale a dire , bisogna moltiplicare la superficie d'una delle basi per l'altezza del Prisma . E' indifferente , che egli sia retto o inclinato .

694. Teor. II. *La solidità d'una Piramide qualunque , o d'un Cono , è ugual al terzo del prodotto delle superficie della sua base per la sua altezza .*

Dimostr. Una Piramide è composta d'un'infinità di Poligoni o di superficie simili , di cui i lati consecutivi crescon uniformemente di $\frac{x}{\infty}$ dalla sommità fin alla base , o come la serie de' numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. ∞ . Or (573) le superficie simili son fra loro come i quadrati de' lati omologhi . Dunque se si fa la superficie del primo elemento $= 1$, quella del secondo sarà 4 , quel del terzo 9 &c , e quella dell'ultimo , ch'è la base , sarà ∞^2 . La solidità della Piramide essendo ugual alla somma di tutti i suoi elementi , ella è dunque rappresentata dalla somma della serie infinita de' quadrati 1. 4. 9. 16. ∞^2 . Or (344) questa somma è il terzo del prodotto dell'ultimo quadrato moltiplicato per il loro numero . Dunque la solidità della Piramide è ugual al terzo del prodotto della superficie della sua base pel numero de' suoi elementi , cioè per la sua altezza (632) . Lo stesso è del Cono .

695. Coroll. *Una Piramide ha il terzo della solidità di un Prisma d' ugual base e altezza . Onde colla stessa materia che si compone un prisma , si posson formare*

mare tre Piramidi della stessa base e altezzache il Prisma.
 696. Teor. III. *La solidità d'una Sfera è uguale ai due terzi del prodotto del suo asse per la superficie del suo gran circolo.*

Dimostr. Una Sfera essendo composta (645) di tanti strati o superficie sferiche, quanti punti sono nel suo semi asse, la sua solidità è uguale alla somma di tutte queste superficie. Or le lunghezze de' semi-assi consecutivi di queste superficie formano dal centro la serie infinita $1. 2. 3. 4. 5. \dots \&c.$ e le superficie stesse (573) la serie $1. 4. 9. 16. 25. \dots \&c.$ Dunque la solidità della Sfera è rappresentata dalla somma della serie infinita de' quadrati consecutivi, la qual somma è (344) il terzo del prodotto dell'ultimo quadrato per il loro numero. Dunque la solidità della sfera è il terzo del prodotto della sua superficie esteriore s pel suo semi-asse $\frac{1}{2} d$, ovvero $= \frac{1}{3} s \times \frac{1}{2} d$. Or la superficie esteriore della sfera (682) è uguale a 4 volte la superficie p del suo gran circolo, o $s = 4 p$. Dunque la solidità della sfera è $\frac{1}{3} \times 4. p \times \frac{1}{2} d = \frac{2}{3} pd$.

697. Coroll. *Se in un Cilindro, il diametro della cui base è uguale all'asse, s'iscrive una sfera, o un cono retto, le loro solidità faranno rispettivamente come $1. \frac{2}{3}. \frac{\pi}{3}$; o come 3. 2. 1.*

698. Osserv. Per aver la solidità degli altri corpi, come di Poliedri irregolari, convien ridurli a Prismi o Piramidi; siccome per aver la superficie delle figure irregolari, convien ridurle a triangoli: bisogna prender la solidità di ciascuno di questi Prismi o di queste Piramidi, la somma farà la solidità del Poliedro.

Ma lorchè il poliedro è piccolo e troppo irregolare; come se si avesse a misurare la solidità d'un ciottolo grezzo, d'un rilievo di metallo &c., si farà meccanicamente così. Si metta il corpo in un vaso cilindrico o prismatico, che si riempirà d'acqua o d'altro fluido; trattone indi il corpo, si misuri esattamente il volume della parte del vaso che rimarrà vuota; questa sarà a un dipresso uguale a quella del corpo, che vi si era immerso.

Comparazione delle Solidità de' Solidi.

699. Si è veduto nell'articolo precedente che la solidità d'un corpo è un prodotto d'una superficie per un asse o per un'altezza; e siccome una superficie è sempre (573) ugual a un prodotto di due dimensioni, siegue che ogni solidità è un prodotto di tre dimensioni. Dunque

700. Teor. I. *Le solidità di due solidi son fra loro in ragion composta delle loro tre dimensioni dello stesso nome.*

701. Teor. II. *Le solidità di due solidi simili son fra loro in ragion triplicata, o come i cubi d'una dimensione omologa qualunque presa in ciascuno di questi solidi.*

Dimostr. I solidi simili han tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali (670); dunque le loro solidità son i prodotti di tre quantità proporzionali, e per conseguenza son in ragione triplicata d'una di queste dimensioni qualunque presa in ciascuno di questi solidi.

702. Coroll. I. *Le solidità delle sfere son in ragione triplicata de' loro raggi, o de' loro diametri.* Onde se una sfera A ha un diametro doppio, triplo, quadruplo &c. di quello d'un'altra sfera B, la sua superficie sarà ugual a 4, 9, 16 volte la superficie della sfera B, e la sua solidità sarà uguale a 8, 27, 64 volte la solidità della sfera B. In generale un vaso, di cui tutte le dimensioni son duple, triple, quadruplex &c. delle dimensioni d'un altro, contiene 8, 27, 64 &c. volte più dell'altro.

703. Coroll. II. Per costruir un solido simile a un altro, che abbia una capacità o un volume doppio, triplo &c. bisogna che tutte le sue dimensioni sieno a tutte quelle dell'altro, come $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ &c. a 1.

Dalla proporzione delle linee dipende tutta la Trigonometria, e l'uso importante del Compasso di Proporzione.

APPENDICE PRIMA.

Della Trigonometria.

704. La Trigonometria è l'arte d'applicar il calcolo aritmetico alla Geometria. Questa è una scienza assolutamente necessaria per passare dalla Teoria alla Pratica. Si chiama così, perchè ella insegna a calcolare tutte le parti de' Triangoli, e in effetto tutte le figure si misurano per i triangoli, ai quali si riducono.

705. Un triangolo ha sei parti, tre angoli e tre lati. L'oggetto della Trigonometria è di dare delle regole per risolvere questo problema in tutti i casi: *Data la grandezza di tre delle sei parti d'un Triangolo, trovar quella delle tre altre.*

706. Queste regole consistono a far delle tre date i tre primi termini d'una proporzione o d'un'analogia; quel che si cerca è il quarto. Ma perchè i lati de' triangoli non han rapporti semplici cogli angoli, de' quali le misure son archi di circolo d'un raggio indeterminato, ha bisognato sostituire agli angoli o agli archi, che li misurano, differenti linee rette, che rappresentassero questi archi, e che fossero in proporzione ai lati de' Triangoli. Queste linee rette son note sotto il nome di *Seni*, *Tangenti* &c. e tutta la Trigonometria consiste a sapere la proprietà di queste linee, e i casi ove bisogna sostituir le une o l'altre agli angoli, per aver la proporzione, che può servir a calcolar il termine cercato.

707. Sia un angolo qualunque (fig. 59) ACB . Descrivasi dal vertice C con un raggio preso ad arbitrio un circolo $AHaG$. Si prolunghi AC in a , e vi s'innalzi in C la perpendicolare CH . E' chiaro che l'angolo BCH , o l'arco HB è il complemento dell'angolo ACB o dell'arco AB , e anche dell'angolo BCa , o dell'arco BHa ; è l'angolo BCa o il suo arco Ba è il supplemento dell'angolo ACB o

del suo arco AB . Reciprocamente BA è il complemento di HB , e il supplemento di aB .

708. La perpendicolare BD tirata da una delle estremità B del raggio dell'arco AB , che misura l'angolo ACB sull'altro raggio CA , si chiama il *Seno* dell'arco AB o dell'angolo ACB . La perpendicolare AE elevata all'estremità A d'uno de' due raggi fin al rincontro dell'altro prolungato quanto è necessario, si chiama la *Tangente* di questo stesso arco AB ; e la retta CE si chiama la *Segante* di questo arco. La parte AD del raggio compresa tra l'arco e il seno, dicefi il *Seno verso* dell'arco AB . La perpendicolare HK ne è la *tangente del complemento*; CK è la *segante del complemento*, e HI il *seno verso del complemento* dell'arco AB .

Per abbreviare, si dice *Coseno*, *Cotangente*, *Cosegante*, *Coseno verso*, invece di seno del complemento, tangente del complemento &c.

E per più abbreviare, si adopra R per raggio; *sen.* per seno; *tang.* per tangente; *cos.* per coseno; *cot.* per cotangente; *sen. v.* per seno verso. Non si fa molto uso delle seganti, nè de' seni versi ne' calcoli della Trigonometria.

Siegue da queste definizioni

709. 1.^o Che il seno, il coseno, la tangente, e la cotangente &c. d'un angolo ottuso BCA son le stesse, che per l'angolo acuto ACD , ch'è il suo supplemento. Perchè da una delle estremità B o a d'uno de' raggi non si può abbassare le perpendicolari BD , ad che sul prolungamento dell'altro.

Similmente la tangente non può essere che ae . Or a causa de' triangoli uguali aCd , BCD , e CAe , CAE , si ha $ad = BD$, $ae = AE$. E l'arco BH essendo il complemento di aB come anche di AB , è chiaro che BI è il coseno di aB , e HK è la sua cotangente.

710. 11.^o Che il seno BD d'un arco AB è la metà della corda BC che sottende l'arco BAG doppio di AB (412).

711. III.^o Che il più grande di tutti i seni è quello dell'angolo retto HCA ; perchè allora è il raggio stesso; il che fa che si chiami Seno totale.

712. IV.^o Che i seni crescono a misura che gli angoli crescono da 0 fin a 90° ; e indi decrescono nella stessa maniera da 90° fin a 180° .

713. V.^o Che il seno d'un arco di 30° è ugual alla metà del raggio. Perchè il raggio è (497) la corda d'un arco di 60° , e un seno (710) e la metà della corda d'un arco doppio. Onde il lato opposto a un angolo di 30° in un triangolo rettangolo, è la metà dell'ipotenusa di questo triangolo; perchè se ACB fosse di 30° , BG farebbe ugual a BC , e BD ne farebbe la metà.

714. VI.^o Che le tangenti e le secanti crescon a misura, che gli angoli crescono da 0 fin a 90° , in maniera che la tangente e la secante, che corrispondon a 90° son infinite. Perchè il raggio dell'angolo retto HCA non può rincontrar la tangente AE per terminarla, se queste due rette non si prolungan all'infinito.

715. VII.^o Che la tangente di 45° è ugual al raggio. Perchè se l'angolo ACB fosse di 45° , il triangolo rettangolo CAE farebbe isoscele, e AE farebbe ugual a AC .

716. VIII.^o Che il seno verso AD d'un arco AE minore di 90° è ugual alla differenza tra il raggio CA e il coseno $CD = BI$; che il suo coseno verso HI è la differenza tra il raggio CH e il seno $CI = BD$; e che il seno verso del supplemento, ch'è Da , è ugual alla somma del raggio e del coseno.

717. IX.^o Che a causa de' triangoli rettangoli simili CDB , CAE , CIB , CHK ; si ha $CA : CD$ o $BI :: AE : BD$; ovvero $R : \text{cosen} :: \text{tang} : \text{sen}$. Indi $CH : CI$ o $BD :: HK : IB$; ovvero $R : \text{sen} :: \text{cotang} : \text{cosen}$. Finalmente $AE : CA :: CH$ o $CA : HK$; o sia $tan : R : cotang$.

Da queste proporzioni si deducen le formole seguenti per sostituir i seni alle tangenti &c. e reciprocamente.

Sia $R = 1$, si ha

$$718. \text{Sen} = \text{Cos} \times \text{tang} = \frac{\text{Cos}}{\text{Cot}}.$$

$$719. \text{Cos} = \text{Sen} \times \text{Cot} = \frac{\text{Sen}}{\text{Tang}}.$$

$$720. \text{Tang} = \frac{\text{Sen}}{\text{Cosen}} = \frac{1}{\text{Cotang}}.$$

$$721. \text{Cot} = \frac{\text{cos}}{\text{sen}} = \frac{1}{\text{tang}}.$$

$$722. \text{Cot. A} \times \text{Tang. A} = 1 = \text{Cot. B} \times \text{Tang. B}.$$

L'intelligenza di queste formole dipende tutta dall'articolo 717. Per comprender la formola 718, si osservi, che per la prima proporzione del 717 si ha $R : \text{cosen} : : \text{tang} : \text{sen}$; dunque $R \times \text{sen} = \text{cosen} \times \text{tang}$; ma $R = 1$, dunque $1 \times \text{sen} = \text{cosen} \times \text{tang}$, ovvero $\text{sen} = \text{cosen} \times \text{tang}$. Nello stesso articolo 717 la seconda proporzione è $R : \text{sen} : : \text{cot} : \text{cos}$; dunque $\text{sen} \times \text{cot} = R \times \text{cos} = 1 \times \text{cos}$. Dunque

$$\text{sen} \times \text{cot} = \text{cos}; \text{dunque } \text{sen} = \frac{\text{cos}}{\text{cot}}.$$

Lo stesso è dell'altre formole ricavate tutte dall'articolo 717.

723. Per sostituir i seni, tangenti &c. agli archi o agli angoli de' triangoli, ha bisognato ordinar delle tavole di calcoli fatti per trovar in un'occhiata il valore del seno, del coseno, della tangente, della cotangente di ciascun grado e minuto di tutti gli angoli acuti possibili, perchè in quanto a quelli degli angoli ottusi si conoscono per i loro supplementi. Queste tavole son note sotto il nome di *Tavole de' Seni*. Vi si suppone che il raggio del circolo, che misura ciascun angolo, è $= 1$, e vi si ha posto dirimpetto a ciascun grado e minuto il valore, in frazioni decimali, del suo

fuo seno, e della sua tangente, del suo coseno, e della sua cotangente.

Ecco su quali principj si costruiscono queste tavole.

Principj per la Costruzione delle Tavole de' Seni.

724. Teor. I. *Conoscendo per mezzo d'un arco qualunque AB (fig. 59) una di queste quattro cose, il suo seno, il suo coseno, il suo seno verso, il suo coseno verso, si ha quella delle tre altre, che si vuole.*

Perchè si vede (528) che $CD = \sqrt{CB^2 - BD^2}$ ovvero $\text{cosen} = \sqrt{RR - \text{sen}^2}$. Che $DA = CA - CD$, ovvero $\text{sen } v. = R - \text{cosen}$. Che $HI = CH - CI$, o $\cos v. = R - \text{sen} \&c.$

725. Teor. II. *I calcoli fatti per un arco servono per trovare quel che ci vuole per la sua metà.*

Spiegazione. Dato l' arco AEB (fig. 60), la sua corda AB, il suo seno retto BD, il suo centro C, i suoi raggi CA, CB &c. dico che tutte queste date cose mi condurranno a trovar facilmente il valore del seno della metà dell' arco AEB. Si tiri dal centro C il reggio CE perpendicolare alla corda BA, la quale rimarrà divisa in F in due parti uguali, come l' arco AEB in E. Si cerchi (724) il valore del $\text{sen } v.$ DA, e quello di CD *cos* dell' arco AEB, di cui si conosce il seno retto BD.

Dim. Nel triangolo rettangolo BDA, $BA^2 = BD^2 + DA^2$; dunque $BA = \sqrt{BD^2 + DA^2}$;

$$\frac{BA}{\sqrt{BD^2 + DA^2}} = \frac{BA}{BA}$$
 dunque $\frac{BA}{\sqrt{BD^2 + DA^2}} = 1$; Ma $\frac{BA}{\sqrt{BD^2 + DA^2}} =$

FA, e FA è il seno retto dell' arco AE metà dell' arco dato AEB; dunque il seno retto della metà dell' arco dato AEB, o $\text{sen } \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{D^2 + DA^2}}{2}$

Dunque i calcoli fatti per un arco servono a trovare quel che ci vuole per la sua metà.

726. Teor. III. *I calcoli fatti per un arco servono a trovare quel che ci vuole per il suo doppio.*

Quì le quantità cognite sono l'arco AE , e il suo seno retto FA , l'arco AEB doppio dell'arco AE , e la sua corda AB , di cui il valor è doppio di quello del seno retto FA , i raggi AC , EC , BC , e finalmente il *cofen*. CF dell'arco AE . Si tratta dunque di trovare per mezzo di queste cognite il valore di BD seno fetto dell'arco AEB .

Dim. I due triangoli rettangoli CFA , BDA che han l'angolo A comune, son equiangoli; dunque $CA:CF::BA:BD$; ma i tre primi termini di questa proporzione son noti (724), dunque lo sarà anche il quarto &c.

727. Teor. IV. *Essendo dati i seni BD , KL di due archi AB , KB , si ha il seno KM della loro somma (fig. 61), o della loro differenza (fig. 62).* Perchè si ha (724) CD e CL . Or $CB:CL::$
 $\text{sen } AB \times \text{cof } KB$

$BD:LP \text{ o } OM$; dunque $OM = \frac{BD \times \text{sen } AB \times \text{cof } KB}{R}$;

e a causa de' triangoli rettangoli simili KOL , CMQ , OLG , GBD (fig. 61); e KOL , KMQ ; CQL , GBD (fig. 62); ne' triangoli KOL , GBD (fig. 61 62) si ha $CB:CD::KL:KO$; dunque $KO = \frac{KL \times \text{sen } CA \times \text{cof } AB}{R}$

$\frac{BD \times \text{sen } AB \times \text{cof } KB}{R}$; dunque facendo $R = 1$, K

$M \text{ o } \text{sen } (BK \pm AB) = \text{sen } BK \times \text{cof } AB \pm \text{sen } AB \times \text{cof } KB$.

728. Teor. V. *La somma del seno KM (fig. 63) d'un arco KA minore di 30° e del prodotto di $\sqrt{3}$ pel seno KI della differenza tra quest'arco e 30° , è uguale al seno FN d'un arco FA che eccede tanto 30° , quanto l'arco KA è minore.*

Sia l'arco AB di 30° , e $BF = BK$; a causa de' triangoli rettangoli simili SIF , SQG , l'angolo $IFS = GQS = BCA = 30^\circ$. Dunque l'angolo $KFG = 30^\circ$; dunque (713) $GK = \frac{1}{2} FK = IK$. Or
 FK

$FK^2 GK^2 = FG^2$, o $41 K^2 - 1 K^2 = FG^2$ Dunque $3 K^2$, o $1 K^2 \times 3 = FG^2$. Dunque estraendo le radici, $1 K \times \sqrt{3} = FG$, e $1 K \times \sqrt{3} + KM = FN$.

729. Teor. VI. *La somma del seno FT d'un arco HF minore di 60° , e del seno FI della differenza con 60° , è uguale al seno KO d'un arco HK, che eccede tanto 60° , quanto HF n'è minore.*

$FI = IK = GH$ (728). Dunque $FT + FI = KO$. Onde per esempio, $\text{sen } 55^\circ + \text{sen } 5^\circ = \text{sen } 65^\circ$.

730. Si possono trovar tutti i seni per mezzo di questi teoremi. Perchè il seno di 30° essendo noto (713), pel Teor. I e II si può aver il seno di 15° , poi di $7^\circ \frac{1}{2}$, indi di $3^\circ \frac{3}{4}$, e così via via andando per metà fin alla duodecima operazione, che dà il seno di $5'' \frac{1}{4}$, il qual è confuso senza errore sensibile col suo arco. E perchè tali seni così confusi co' loro archi sono loro proporzionali, si farà, come quest'arco è al suo seno, così l'arco di $1'$ è al suo seno; avendo il seno di $1'$ si avrà (726) quello di $2'$, poi (727) quello di $3'$, quello di $4'$ &c. fin a 30° . Indi (728) da 30° fin a 60° , finalmente (729) da 60° fin a 90° . Dopo di che il calcolo delle tangenti è facile per mezzo di qualche formola dell'articolo precedente.

Principj per la Teoria del Calcolo Trigonometrico.

731. Teor. I. *In ogni triangolo i seni degli angoli son come i lati opposti.*

Dim. Iscrivasi (fig. 65) nel circolo O il triangolo ABC, e da O si abbassino sopra i lati AB, AC, BC, i raggi perpendicolari OF, OI, OE, che divideranno per metà i predetti lati e gli archi, de' quali questi lati son le corde. AD metà del lato AB è il seno retto dell'arco AF, o dell'angolo C misurato da quest'arco; AL metà di AC, è il seno retto dell'arco AI misura dell'angolo B; così BG metà di BC, è seno retto dell'arco BE misura dell'angolo A. Dunque in ogni triangolo la metà di ciascun lato è il seno retto dell'

dell'angolo opposto . Ma le metà son come i tutti ; dunque in ogni triangolo i seni retti degli angoli son come i lati opposti .

732. Coroll. I. *In un triangolo rettangolo il raggio è all'ipotenusa , come il seno d' uno degli angoli acuti è al lato opposto a quest' angolo .*

Dim. Centro B (fig. 66) raggio BC descrivasi il circolo CDF , e il circolo BEH ; si prolunghi il lato CA in E , e BA in D . E' chiaro che CB è nel tempo stesso raggio e ipotenusà . Dunque CB considerato come raggio : CB considerato come ipotenusà : : CA considerato come seno retto dell'angolo acuto B : CA considerato come lato opposto a quest'angolo . Similmente CB considerato come raggio : CB come ipotenusà : : BA come seno retto dell'angolo acuto C : BA come lato opposto a questo medesimo angolo . Dunque &c.

733. Coroll. II. *In un triangolo rettangolo il coseno d' uno degli angoli acuti è il seno dell' altro ; dunque (731) il seno d' uno degli angoli acuti è al suo coseno , come il lato opposto a quest'angolo è all'altro lato . Ma (717) il seno è al coseno , come la tangente è al raggio . Dunque nel triangolo rettangolo la tangente d' uno degli angoli acuti è al raggio , come il lato opposto a quest'angolo acuto è all' altro lato .*

734. Coroll. III. *Conosciuti tre angoli d' un triangolo , si può conoscer il rapporto de' lati , ma non già i valori assoluti di essi lati .* Perchè tutto quel che si può dedurre dalla cognizione di questi angoli , è che i tre lati opposti sono nel rapporto de' seni di questi angoli . Nè si può determinar la grandezza di questi lati , perchè si può costruir un'infinità di triangoli inuguali , che sieno simili , e che abbian in conseguenza i loro angoli omologhi uguali .

735. Teor. II. *In un triangolo qualunque (fig. 64) ABC si ha questa analogia : il più gran lato AC è a $AB + BC$ somma de' due altri , come $AB - BC$ loro differenza è alla differenza de' segmenti AE , CE del maggior lato , formati pel rincontro della perpendico.*

dicolare BE tirata dal maggior angolo B al maggior lato AC.

Dim. Se dall' angolo B come centro coll' intervallo del minor lato BC si descrive un circolo GCD, e si prolunga AB in G; è chiaro che $AG = AB + BC$, e $AP = AB - BC$; e perchè (412) $CE = ED$, si ha $EA = CE = AD$. Or (532) $AC : AG :: AP : AD$.

736. Teor. III. In ogni triangolo rettilineo scaleno ABC (fig. 67) la somma di due lati qualunque $AB + BC$ è alla loro differenza $AB - BC$, come la tangente della semi-somma de' due angoli A, C opposti a questi lati è alla semi-differenza di questi angoli.

Per comprender facilmente questa proposizione bisogna ricordarsi:

- 1.° Dell' articolo (193)
- 2.° Che l'angolo esterno (456) BAF è uguale a' due interni B, C; onde l'angolo BAF rappresenta la somma de' due angoli opposti ai due lati noti AC, AB del triangolo BAC.
- 3.° Che la somma degli angoli B, C è nota, dacchè si conosce il valore di A (452)
- 4.° L'angolo BEF alla circonferenza è la metà dell'angolo BAF al centro (431). Dunque l'angolo BEF, o BEA rappresenta la metà della somma degli angoli B, C del triangolo BAC.
- 5.° Nel triangolo isoscele BAE, l'angolo BEA = ABE (463). Onde l'angolo ABE rappresenta la metà della somma degli angoli B e C del triangolo BAC.
- 6.° Le due parallele BE, GC son tagliate dalla linea FC; dunque (396) l'angolo BEF = BEA = FCG. Onde anche l'angolo FCG rappresenta la metà della somma degli angoli B e C.
- 7.° La linea BC taglia obliquamente le due parallele BE, GC; dunque (396) l'angolo EBC = BCG.
- 8.° La linea FG taglia le due parallele BE, CG; dunque (396) l'angolo FBE = FGC; ma l'angolo FBE è ret-

è retto (432) , dunque FGC è anche retto.

9.° L'angolo BCG rappresenta la metà della differenza degli angoli B e C del triangolo BAC; perchè l'angolo ABE è la metà della somma degli angoli B e C (5°): lo stesso è anche dell'angolo FCG (6°) . Or si unisca all'angolo ABE il piccol angolo EBC o BCG, e si avrà il più grande de' due angoli B e C , cioè l'angolo B . Si tolga dall'angolo FCG l'angolo BCG, e si avrà il più piccolo, cioè l'angolo C . Dunque il lato $AC > AB$ (459) .

10.° (fig. 68) Se nel triangolo ABC rettangolo in B, si prende AC per raggio del circolo, o per seno totale, CB diverrà la tangente dell'angolo opposto A .

11.° La linea FC è la somma de' due lati AC e AB; il segmento EC è la loro differenza; l'angolo FCG la metà della somma degli angoli B e C del triangolo BAC; l'angolo BCG la metà della differenza de' predetti angoli; CG il seno totale, FG la tangente dell'angolo FCG o della metà della somma degli angoli B e C; BG tangente dell'angolo BCG o della metà della loro differenza. Premesse tutte queste cose.

Dim. A causa delle parallele BE, GC, sarà (520) $FE : EC :: FB : BG$. Dunque componendo, $FE + EC = FC : EC :: FB + BG = FG : BG$. Dunque &c.

737. Osserv. Quest'analogia si può ridurre a queste due, Come il minor lato BC è al maggior BA, così il raggio è alla tangente d'un angolo, da cui bisogna togliere 45°. Indi Come il raggio è alla tangente del residuo, così la tangente della semi somma degli angoli A e C, è alla tangente della loro semi-differenza,

Dim. Avendo preso (fig. 64) $BP = PT = BC$, poi $PM = BA$, sarà $TM = AB - BC$. Si tiri BN che faccia l'angolo NBA di 45°, e dai punti T, M si abbassino sopra BN le perpendicolari TK, MN, e si congiunga KP. Allora i triangoli BKP, BKT, BNM son rettangoli, isosceli, e simili: dunque $BK = KT$,

$\text{KT}, \text{BP} \text{ --- } \text{PK} \text{ --- } \text{PT} \text{ --- } \text{BC}, \text{ e } \text{BN} \text{ --- } \text{NM}.$
 Ciò posto, nel triangolo rettangolo PKM si ha (733)
 $\text{PK} \text{ o } \text{BC} : \text{PM} \text{ o } \text{AB} :: \text{R} : \text{tang PKM}.$ Da quest'
 angolo togliendo 45° , resta $\text{TKM} \text{ --- } \text{KMN}.$ Or (733)
 $\text{R} : \text{tang KMN} :: \text{MN} \text{ o } \text{BN} : \text{KN} :: \text{BM} \text{ o } \text{AB}$
 $\text{--- } \frac{\text{A} + \text{C}}{2} : \text{tang } \frac{\text{A} - \text{C}}{2} :$
 $\frac{\text{A} - \text{C}}{2} \text{ (736).}$

Uti della Teoria precedente per i Calcoli
Trigonometrici.

738. Ne' calcoli Trigonometrici non si fa ora uso che de' Logaritmi sì de' Seni, Tangenti, e Cotangenti, come de' numeri, ch'esprimon il valore de' lati. Perciò le tavole de' seni che son in uso, contengon i Logaritmi de' seni, coseni &c., e una tavola de' Logaritmi de' numeri naturali da 1 fin a 10000, ovvero 20000; il che è sufficiente per la pratica.

739. Nelle tavole de' seni si suppone il raggio, o il seno totale $\text{---} 10000000000$, così che la caratteristica del logaritmo del raggio è 10, donde si vede, 1.^o che per aggiunger il logaritmo del raggio a un altro logaritmo, basta metter 1 avanti la Caratteristica di questo logaritmo, se ella è al di sotto di 10, come lo è ordinariamente: o aggiunger 1 alle decine di questa Caratteristica, se ella eccede 10. Al contrario, dato un logaritmo, per toglierne il logaritmo del raggio, bisogna togliere 1 dalle decine della sua Caratteristica.

740. 2.^a Che i calcoli de' triangoli rettangoli , ove entra il raggio (come accade quasi in tutti i casi , come si vedrà) , si riducon a una semplice addizione di due logaritmi , se il raggio è nel primo termine dell' analogia: o a una semplice sottrazione di due logaritmi , se il raggio è nel secondo termine . Il che rende

rende quelli calcoli molto più corti di quelli degli altri triangoli; perchè l'addizione, o la sottrazione di 1 non deve contarli per un'operazione.

Calcoli de' Triangoli Rettangoli.

741. Per facilitare la pratica del calcolo de' triangoli rettangoli, suppongasi che si chiami A l'angolo retto (che si stima sempre uno de' tre dati), B uno degli angoli acuti, e C l'altro angolo. Nella tavola seguente si troverà l'analogia o il calcolo, che bisogna far in tutti i casi.

Per maggior intelligenza della tavola seguente, si dimostra il risultato del primo Problema, da cui si conosceranno tutti gli altri.

Probl. 1.^o *Dati i lati AB, AC, e l'angolo retto A del triangolo rettangolo BAC (fig. 66), trovar l'ipotenusa BC.*

Sol. $BC^2 = AC^2 + AB^2$, dunque $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$. Ma siccome il calcolo de' quadrati è lungo, meglio è conoscere l'angolo B per l'analogia seguente. Il lato AB : lato AC :: raggio : tangente dell'angolo B (733). Conosciuto l'angolo B, farà (731) il seno dell'angolo B : seno dell'angolo retto A o raggio :: lato AC : BC.

E' d'avvertirsi ancora, che dal problema 10 fin al 21 son noti tutti gli angoli del triangolo rettangolo, poichè si è supposto conoscere uno de' due angoli acuti.

Essendo dati		Tro- var	Analogie, o Regole del Calcolo.
1	AB, AC	BC	$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$ $AB: AC :: R: \text{tang } B$, poi $\text{sen } B:$ $R :: AC: BC$.
2		B	$AB: AC :: R: \text{tang } B$.
3		C	$AC: AB :: R: \text{tang } C$.
4	AB, BC	AC	$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$ $\log AC = \frac{1}{2} \log (BC + AB) + \frac{1}{2}$ $\log (BC - AB)$
5		B	$BC: AB :: R: \text{cosen } B$.
6		C	$BC: AB :: R: \text{sen } C$.
7	AC, BC	AB	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$ $\log AB = \frac{1}{2} \log (BC + AC) + \frac{1}{2}$ $\log (BC - AC)$
8		B	$BC: AC :: R: \text{sen } B$.
9		C	$BC: AC :: R: \text{cosen } C$.
10	AB, B	AC	$R: \text{tang } B :: AB: AC$
11		BC	$\text{Cosin } B: R :: AB: BC$.
12	AB, C	AC	$R: \text{Cotang } C :: AB: AC$
13		BC	$\text{Sen } C: R :: AB: BC$.
14	AC, B	AB	$R: \text{cotang } B :: AC: AB$
15		BC	$\text{Seno } B: R :: AC: BC$.
16	AC, C	AB	$R: \text{tang } C :: AC: AB$
17		BC	$\text{Cosin } C: R :: AC: BC$.
18	BC, B	AB	$R: \text{cosen } B :: BC: AB$
19		AC	$R: \text{sen } B :: BC: AC$.
20	BC, C	AB	$R: \text{sen } C :: BC: AB$
21		AC	$R: \text{cosen } C :: BC: AC$.

742. Tutte queste analogie, non son altro, che l'applicazione de' Corollarj I. e II. (732, 733) a tutti casi de' triangoli rettangoli.

Calcoli de' Triangoli Obliquangoli.

743. I. *Dati due angoli e un lato, trovar gli altri lati.*

Come il seno dell' angolo opposto al lato noto è a questo lato, così il seno dell' angolo opposto al lato cercato è a questo lato. (731)

744. II. *Essendo dati due lati e un angolo opposto a uno de' due, trovar l'angolo opposto all' altro: purchè si sappia se è acuto o ottuso.*

Senza questa precauzione si esporrebbe all' errore di prender l' uno per l' altro ; perchè (709) un angolo acuto di qualunque triangolo ha lo stesso seno retto che l' angolo ottuso, il quale gli serve di supplemento.

Sia (fig. 67) l' angolo C di 30° , il lato AB di 25 piedi, il lato BC di 40; qual' è il valore dell' angolo A del triangolo ABC?

(731) Logaritmo del lato AB : logaritmo dell' angolo C :: logaritmo del lato BC : logaritmo dell' angolo A. Vale a dire 1, 3979400. 9, 6989700 : 1, 6020600. 9, 9030900. Quest' ultimo logaritmo corrisponde nelle tavole a un angolo di $53^\circ 8'$, e a un angolo di $126^\circ 52'$. Era ben dunque necessario avvertire, se l' angolo richiesto sia acuto o ottuso.

745. III. *Dati due lati e l'angolo compreso, trovar gli altri angoli.*

Come la somma de' lati dati,

Alla loro differenza:

Così la tangente della semi-somma degli angoli incogniti.

Alla tangente della loro semi-differenza. (736)

Sia (fig. 64) $AB = 865$ piedi, $CB = 517$, e l' angolo $ABC = 96^\circ 36'$. Per i logaritmi si farà

AB. 365 ABC... $96^{\circ} 36'$
BC. 517 Supl.... $83^{\circ} 24'$

Som. 1382 Semi.Som. $41^{\circ} 42'$
Diff. 348 .. Log... 2, 54158
Tang $41^{\circ} 42'$ 9, 94986

12, 49144
Long. 1382. . . 3, 14052

9, 35093 Log. Tang. $12^{\circ} 39'$
femi-diff.
La femi-somma $41^{\circ} 42'$

Il mag. angolo . . . $54^{\circ} 21'$

Il minor angolo . . . $29^{\circ} 3'$

L'angolo ACE opposto al più gran lato AB, è il maggiore, e per conseguenza è di $54^{\circ} 21'$; l'altro angolo BAC è $29^{\circ} 3'$.

746. IV. Dati due lati, e l'angolo compreso, trovar il terzo lato.

Convien cercar gli angoli per la regola precedente, e il terzo lato per (743).

747. V. Dati i tre lati, trovar i tre angoli.

Se si hanno (fig. 64) i tre lati AC, AB, BC, per trovar un angolo qualunque A, bisogna prima fare questa analogia.

Come il maggiore de' tre lati AC,

E' alla somma de' due altri AB + BC:

Così la differenza de' due altri lati AB—BC,

E' alla differenza AD de' segmenti CE, EA del maggior lato, fatti per una perpendicolare BE menata dal suo angolo opposto B.

Essendo dunque AC la somma de' segmenti CE, EA; e AD essendo la loro differenza, CE farà (193) ugual alla metà di AC—AD; e EA farà ugual alla metà di AC+AD. Perciò ne' triangoli rettangoli CEB, BEA si conosceranno i due lati BC, CE, e AB, AE, si potrà dunque trovar il valore degli angoli (741).

Applicazione alla Trigonometria.

La Trigonometria come l' Aritmetica , esige non men teoria che pratica , per esercitarsi nella quale si son aggiunti i problemi seguenti.

Si son premesse ancora le due seguenti tavole , le quali son un compendio di tutte le Regole precedenti per tutti i casi di ogni specie di Triangoli *Rettilinei Rettangoli*, e *Rettilinei Obbliquangoli*; colla distinzione di *Dati* , *Questiti* , *Soluzioni* , o *Analogie* in termini generali applicabili ad ogni triangolo , o figura comunque segnata.

R. significa raggio o seno totale ; L. lato : LL. lati ; A. angolo ; D. dato ; DD. dati : Q. quesito ; Adiac. adiacente ; Op. opposto ; S. seno ; Cos. coseno ; Tang. tangente ; Cot. cotangente ; Ipot. ipotenusa ; B. base ; Segm. segmento ; Vert. verticale .

TAVOLA I.

Regole de' Triangoli Rettilinei Rettangoli.

Dati	Questiti	Soluzioni.
Ipoten. e un Angolo	I. L'altr' Ang.	Complemento del Dato
	II. Lato oppof.	$R : \text{Ipot.} :: S. A. D. : L. Q.$
	III. Lato adjac.	$R : \text{Ipot.} :: \text{Cof. A. D.} : L. Q.$
Ipoten. e un Lato	IV Ang. oppof.	$\text{Ipot.} : R :: L. D. : S. A. Q.$
	V. Ang. adiac.	Complemento del trovato n. IV
	VI. L'altr. Lato	Si trov. gli Ang. n. IV e V, indi il L. n. II.
Angolo e lato oppofito	VII. L'al. Ang.	Complemento del Dato
	VIII. L'Ipoten.	$S. A. D. : L. D. :: R : \text{Ipot.}$
	IX. Lato adiac.	$S. A. D. : L. D. :: \text{Cof. A. D.} : L. Q.$
Angolo e lato adjac.	X. L'altr' Ang.	Complemento del Dato
	XI. Lato opp.	$\text{Cof. A. D.} : L. D. :: S. A. D. : L. Q.$
	XII. Ipotenusa	$\text{Cof. A. D.} : L. D. :: R : \text{Ipot.}$
Due Lati	XIII. Un Ang.	$L. I : L. D. Q. :: R : \text{Tang. A. Q.}$
	XIV. Ipoten.	Si trovi un Angolo n. XIII. Indi $S. A. \text{ trovato} :: R : L. \text{ Op: Ipot.}$
Due Ang.	XV. Proporz. de' Lati	Per seni, o per Tangenti.

TAVOLA II.

Regole de' Triangoli Rettilinei Obbliquantoli.

Dati	Questiti	Soluzioni.
Due Angoli e un Lato opposto	I. Terzo Ang.	Supplemento de' Dati a 180°
	II. L. op. all' A. 2	$S. A. D : L. Op. :: S. A. 2 : L. Q.$
	III. Terzo Lat.	Per il num. I. e II.
Due Ang. e lato intercet.	IV. Terzo Ang.	Supplemento
	V. Un altro Lato	$S. A. 3 (n. IV.) L. D :: S. A. Op. Q : L. Q.$
Due Lati e un Ang. opposto	VI. L'alt. Ang. opposto	$L. Op. A. D : S. A. D :: 2. L. D : S. A. D.$
	VII. Il $3.^\circ$ Ang.	Per il num. VI. e I.
	VIII. Il $3.^\circ$ Lat.	Per il num. VI. VII. II.
Due Lati e l' Ang. interc.	IX. Un Ang.	Som. LL. DD: Differ.: Tang $\frac{1}{2}$ Ang. ignoti Supplem. A. D: Tang $\frac{1}{2}$ Diff.
	X. Il $3.^\circ$ Lato	Per il num. precedente, e n. II.
Tre Lati	XI. Un Ang.	L. mag. som. degli altri LL: : diff. de' LL: diff. segm.
Tre Angoli	Proporz. de' Lati	Per i seni degli Angoli dati.

748. Probl. I. *Trovar una distanza inaccessibile* CD (fig. 69.).

Sol. Si formi la base DA almen di 20 tese. Si misurino col Grafometro gli angoli D, A formati dalle visuali DC, AC, e dalla base DA, supposto che l'angolo A sia 80° , e l'angolo D di 70° , sarà l'angolo C di 30° . Resta ora da conoscer il lato CD. Per conoscerlo si faccia (743) questa analogia.

Il seno dell'ang. C di 30° : al lato AD di 20 tese :: il seno dell'ang. A di 80° : al lato CD. Cioè
 $9,69897000. 1,3010300 : 9,9933515. 1,5954115$
 Dunque CD o sia la distanza richiesta sarà di 39 tese, e 2 piedi.

749. La grandezza della base deve esser proporzionata alla distanza che passa tra il luogo dell'operazione, ed il luogo che si ha misurare; affinchè l'angolo formato delle visuali al punto inaccessibile non sia troppo acuto.

L'inuguaglianza e gli ostacoli del terreno impediscono spesso di aver una base, abbastanza grande, come di mille pertiche per misurar luoghi inaccessibili distanti 5 in 6 miglia. In tali casi bisogna prender da principio una piccola base, per mezzo di cui se ne può aver un'altra tre o quattro volte più grande, e con questa seconda se ne avrà una terza ancora più grande per fare l'operazione.

750. Probl. II. *Trovar la distanza inaccessibile tra i due luoghi C, D* (fig. 70.).

Sol. Si fissi la base AB = 100 tese. Si misurino gli angoli ABC = 92° , e ABD = 45° , formati all'estremità B della base AB e delle visuali BC, BD. Nella stessa maniera si misurino gli angoli DAB = 98° , DAC = 50° , formati all'estremità A della base BA e dalle visuali AD, AC.

Noti questi angoli, è facile conoscer il valore de' lati AC e BC del triangolo ABC, perchè si conosce il lato AB = 100 tese, l'angolo B = 92 gradi, e l'angolo CAB = 48 gr., e per conseguenza l'angolo ACB = 40 gr. Dunque per aver il valore del lato

V 3

BC 6

BC si ha da fare questa analogia; Il seno dell'angolo $ACB = 40$: $AB = 100$ tese :: il seno dell'angolo $CAB = 48$: CB ; cioè $9, 8080675 . 2, 0000000$: $9, 8710735 . 2, 0630060$; dunque $CB = 116$ tese.

Per trovar il lato AC , bisogna dir ancor il seno dell'angolo $ACB = 40$ gr.: $BA = 100$ tese :: angolo $ABC = 92$ gr.: AC , farà il lato $AC = 155$ tese.

Nella stessa maniera si conoscerà il valore del lato DA , facendo il seno dell'angolo $ADB = 37$ gr.: $AB = 100$ tese :: il seno dell'angolo $ACD = 45$: AD ; farà il lato $AD = 118$ tese.

Essendo ora noti i lati $AD = 118$ tese, $AC = 155$ tese, e l'angolo $DAC = 45$ gr., conosceremo il lato DC del triangolo ACD ; poichè cercando da principio gli angoli in D ed in C , la somma de' due lati AC , AD è alla loro differenza, come la tangente della metà della somma degli angoli in D ed in C è alla tangente della metà della differenza. L'angolo C farà circa 8 gr. . Avendo così l'angolo C , che si supporrà il più grande, per aver il lato CD , si farà questa Proporzione, il seno dell'angolo C è al lato AD noto, come il seno dell'angolo A è al lato DC , che è la distanza richiesta, la quale sarà di 651 tese.

751. Probl. III. *Tirare dal punto C una linea parallela ad un'altra AB inaccessibile (fig. 71).*

Sol. Prendasi la base CD di 150 tese proporzionata alla distanza dell'oggetto.

Già si sa, che se due parallele son tagliate da un'altra linea, gli angoli alterni son uguali: reciprocamente se gli angoli alterni son uguali, le linee son parallele. Dunque se si conosce l'angolo ABC formato dalla parallela AB , e dal raggio visuale CB , non si avrà che far l'angolo BCE ugual al precedente, affinchè la linea CE sia parallela all' AB ; onde tutto si riduce a trovar il valore dell'angolo ABC .

Per conoscerlo, s'incominci dal punto C a prender il valore dell'angolo $ACB = 40$ gr. Indi dal punto D si prenda il valore dell'angolo $CDB = 86$ gr. Si prenda ancora il valore dell'angolo $ADB = 60$ gr.

Nota

Note tutte queste cose, si trovi il valore de' lati CA, CB.

Perciò si cerchi nel triangolo CDB il valore del lato CB, facendo il seno dell'angolo CBD = 14 gr.: al lato CD = 150 :: il seno dell'angolo CDB = 86 gr.: CB. Sarà il lato CB = 619 tese.

Per trovar il lato CA, si avverta che essendo l'angolo CDB = 86 gr., ed ADB = 60 gr., farà l'angolo CDA = 26 gr.; ed essendo l'angolo CDB = 86, CDB = 14, farà l'angolo BCD = 80, ed in conseguenza l'angolo ACD = 120, dunque farà CAD = 34 gr. Ciò posto, il seno dell'angolo CAD = 34: 150 tese CD :: il seno dell'angolo CDA = 26: lato CA; farà dunque CA = 118 tese.

Conoscendo ora i lati CA = 118 tese, CB = 619 tese, e l'angolo ACB = 40 gr., si conoscerà subito l'angolo CBA, che farà = 62 gr. 23 min., cui si faccia uguale l'angolo BCE; la linea CE farà la richiesta parallela alla BA.

752. Probl. IV. Misurar l'altezza AB di una Fabbrica accessibile (fig. 73).

Si misuri esattamente la base EB dal punto di mezzo B della fabbrica fin al luogo E, dov'è piantato il Grafometro. Sia questa base = 25 tese.

Sia l'angolo ACD = 35 gr. formato da due raggi visuali, di cui il primo CD è parallelo all'Orizzonte, e l'altro CA termini alla sommità dell'edifizio.

In questo triangolo CAD è noto il lato CD = 25 tese, l'angolo in C = 35 gr., l'angolo retto in D = 90, dunque sarà l'angolo in A = 55 gr.

Dunque (741) il seno totale: alla tangente dell'angolo C = 35 :: il lato CD = 25 tese: al lato DA. Sarà dunque AD = 17 tese e 3 piedi; al qual lato aggiungendo l'altezza DB, o sia CE del picciol istromento, che è ordinariamente di 4 piedi, si troverà l'altezza totale AB della fabbrica di 18 tese ed un piede.

753. Probl. V. Misurar un'altezza inaccessibile AB. (fig. 72).

Sol. Nel luogo F si misuri l'angolo ADG formato dalla visuale parallela DG, e dalla visuale DA terminante alla cima della Torre. Sia quest'angolo $ADG = 50$ gr.

Indi si passi in E per aver la base EF d'una lunghezza sufficiente, affinchè l'angolo CAD non riesca troppo acuto. Sia questa base $EF = 40$ tese. E si misuri l'angolo visuale $ACG = 30$ gr.

Or essendo l'angolo esterno $ADG = 50$ ugual ai due interni opposti $ACD + DAC$, farà l'angolo $DAC = 20$ gr.

Dunque il seno dell'angolo $CAD = 20$ gr. : al lato $CD = 40$ tese :: il seno dell'angolo $ACD = 30$ gr. : al lato AD , il quale farà $= 63$ tese e 2 piedi.

Dunque la secante dell'angolo $ADG = 50$ gr. : alla sua tangente :: il lato $DA = 63$ tese e 2 piedi : al lato AG , che farà $= 48$ tese e 3 piedi; onde aggiungendogli 4 piedi dell'altezza dello stromento, l'altezza totale AB della Torre farà 49 tese e 1 piede.

754. Probl. VI. *Levar la carta generale d'un Paese.*

Sol. Per levar la carta de' luoghi segnati dalle lettere della (fig. 74), l'oggetto proposto non è altro che di collocar sulla carta i differenti luoghi che vi sono, in maniera che la distanza da un luogo all'altro abbia lo stesso rapporto sulla carta, come sopra il terreno : è dunque far una riduzione dal grande in piccolo. E siccome queste riduzioni non posson farsi che per mezzo di triangoli simili, siegue che per levar la carta d'un Paese per mezzo della Trigonometria, convien trovar il valore degli angoli e de' lati formati dalle distanze de' luoghi. Ciò posto

Si stabilisca una base più grande che si può, affinchè i luoghi che devon riferirvisi, sien levati colla maggior esattezza; perciò bisogna evitare gli angoli troppo acuti e troppo ottusi.

Scelti i punti di stazione A e B, se ne cerchi la distanza; ed avendola trovata, situandosi in B si misuri-

furino (facendo uso della Tavoletta) gli angoli ABC , ABD , ABE , formati dalla base AB , e da' raggi visuali corrispondenti a varj luoghi che si voglion levare. Si tralasci il luogo F , perchè l'angolo che formerebbe colla base farebbe troppo ottuso. Si continui a misurar gli angoli ABG , ABH , e ABK . Si tralasci anche il punto L per la ragione poco fa addotta.

Per aver ora la posizione de' luoghi segnati, convien tagliar i raggi che si son tirati. Fissandosi dunque in A si misuri l'angolo BAE , e si avrà il punto E , perchè nel triangolo ABE essendo noti gli angoli EAB , ABE , ed il lato AB , si conosceranno anche le distanze AE , ed EB .

Così per gli altri punti, si misureranno gli angoli BAD , BAC , BAG , BAH , BAI , BAK , e si avranno tutte le distanze.

Restan solo da trovar i punti omessi F ed L . Si scelga il lato BE per base già nota, e si misurino gli angoli EBF , BEF , e si avran le distanze BF , EF . Nella stessa maniera si avranno i punti L ed M col prender la base nota AC .

Trovato il valore di tutti i lati di questi triangoli, convien rapportarli sulla carta, col dar a ciascuna linea il valore ch'ella deve avere; il che si fa facilmente per mezzo d'una scala. Rapportate esattamente tutte queste posizioni; si potrà continuar a levar altri luoghi ulteriori con tutta facilità, perchè da tutte le parti si hanno basi note.

Quando però si vuole levar una carta particolare e ben dettagliata, bisogna che i Direttori inviino persone intese ne' Villaggi, per levar le loro situazioni, e figure, la forma delle principali fabbriche, la posizione delle strade, delle cave, delle montagne, colline, valloni &c. che possion esser ne' contorni. Ciascun villaggio si riduce alla scala della carta, e si procura che la parte più cospicua, come il campanile della Chiesa, sia positivamente al punto segnato sulla carta.

Per le Città, se ne forman le piante, che si riducon alla scala della carta.

Per

Per i boschi e foreste, s'incomincia dal levar esattamente i Villaggi e le Capanne le più vicine per aver delle basi, delle quali si forma una specie di poligono che circonda il bosco. A questo poligono si rapportano molti punti segnanti i limiti del bosco, per delinearne la figura esterna. Indi si entra nel bosco per considerarne i principali cammini, i ruscelli, le fontane, le case, i castelli, che vi posson essere. Perciò si scelgono nel bosco alcuni punti di posizione i più eminenti, come campanili, case, alberi eccedenti gli altri, e si fanno le operazioni rispetto a qualche eminenza fuori del bosco. Trovati alcuni di questi punti, si può facilmente orientare i differenti luoghi del bosco per mezzo delle note polizioni.

La formazione delle Carte Geografiche è differente; se ne tratterà nelle Matematiche Miste.

A P P E N D I C E II.

Del Compasso di Proporzione.

755. **I**l *Compasso di Proporzione* è un istromento Matematico, dagl' Inglese chiamato *Settore*, di grandissimo uso per trovar le proporzioni tra quantità della stessa specie, come tra linee e linee, superficie e superficie, solidi e solidi &c., perciò vien comunemente detto *Compasso di Proporzione*.

756. *Descrizione del Compasso di Proporzione* (fig. 134.). Questo istromento è composto di due righe uguali di metallo o d'altra materia, congiunte insieme con un perno, in guisa che aperte formano una riga, e chiuse si combaciano esattamente. Ciascuna di queste righe è ordinariamente lunga 6 pollici, larga 6 in 7 linee, e grossa circa 2 linee.

In questo istromento son delineate sei principali specie di linee, tre delle quali son in una faccia, cioè 1. la linea delle parti uguali, 2. quella de' piani, 3. quella de' poligoni; e nell'altra faccia sono le tre altre linee, 4. quella delle corde, 5. quella de' solidi, 6. quella de' metalli.

Si mette ancora full'orlo di un lato una linea, per conoscer il calibro de' cannoni; e all'altro lato un'altra linea per conoscer il diametro e il peso delle palle di ferro da $\frac{1}{4}$ fin a 64 libbre.

Uso della linea delle parti uguali.

757. Probl. I. *Dividere una data linea in qualunque numero di parti uguali, per esempio, in 7.*

Si prenda la data linea col compasso ordinario, di cui una punta si metta sopra una divisione della linea delle parti uguali, in maniera che questa lunghezza possa esser esattamente divisa per 7; si metta dunque su 70, di cui la settima parte è 10. Si apra indi il *Compasso di Proporzioni*, finchè l'altra punta del compasso ordinario cada sul numero 70 della stessa linea delle parti uguali delineata sull'altra gamba. In questa situazione, se col compasso ordinario si misura la distanza che passa dal numero 10 della stessa linea delle parti uguali d'una gamba, all'altro numero 10 della stessa linea di parti uguali dell'altra gamba; questa misura sarà la settima parte della linea data.

Il *Compasso di Proporzione* è fondato sulla proposizione di Geometria, ove è dimostrato, che i triangoli simili hanno i loro lati omologhi proporzionali.

Seno (fig. 75) AB, AC le gambe del *Compasso*; AD, AE rappresentino due sezioni uguali che passino pel centro. Se si congiungon i punti CB, DE, le linee CB, DE faran parallele. Onde i triangoli ADE, le linee CC, DE faran parallele. Onde i triangoli ADE, ACB son simili; dunque i lati AD, DE, AB, BC, son proporzionali, cioè $AD : DE :: AB : BC$. Dunque se AD è il doppio, il triplo, o il quadruplo di AB, farà anche DE il doppio, il triplo, o il quadruplo di BC.

Avvertasi, che se la linea da dividersi è troppo lunga da non poter esser applicata alle gambe del *compasso di proporzione*, se ne dividerà solamente una metà o una quarta parte per 7, e il doppio o il quadruplo.

druplo di questa linea farà la settima parte della linea totale.

Probl. II. *Misurar le linee del perimetro d'un poligono, di cui uno de' lati contien un numero dato di parti uguali.*

Prendasi la linea data col compasso ordinario, e si apra il compasso di proporzione, finchè la data linea sia sopra due numeri della *linea delle parti uguali* ugualmente distanti dal centro. Restando in questo stato il compasso di proporzione, si metta la lunghezza di ciascuna dell'altre linee parallelamente alla prima; i numeri, ove ciascuna di loro caderà, esprimeranno la lunghezza di queste linee.

Probl. III. *Da una data retta contenente, per esempio, 120 parti uguali, sottrarne una minore contenente 25 delle stesse parti uguali.*

Si apra il compasso di proporzione, finchè le due punte del compasso ordinario misurante la data linea 120, cadano sopra i numeri 120 di ciascun lato. Allora la distanza da 25 a 25 darà la linea richiesta.

Probl. IV. *Date due linee, trovar la terza proporzionale.*

Prendasi col compasso ordinario la lunghezza della prima linea data, e si metta sulla *linea delle parti uguali* dal centro fin al numero ove ella termina.

Si apra indi il compasso di proporzione, finchè la lunghezza della seconda linea data sia rinchiusa nell'apertura compresa tralle estremità della prima. Restando così aperto il compasso di proporzione, si metta la lunghezza della seconda data linea sopra una delle gambe dello strumento, incominciando dal centro, e si osservi ov'ella termina: La distanza compresa tra questo numero e lo stesso che gli corrisponde all'altra gamba, dà la terza proporzionale.

Se a tre date linee si vuol una quarta proporzionale.

Si prenda la seconda data col compasso ordinario, ed aprendo il compasso di proporzione, si applichi questa lun.

lunghezza all'estremità della prima, che si è già portata sulle gambe dello stromento dal centro. Restando così aperto il compasso di proporzione, si porti la terza linea data su la linea delle parti uguali incominciando dal centro: l'estensione ch'è tra il numero ov'ella termina sulle due gambe, è la quarta proporzionale.

Probl. V. *Divider una linea in qualunque data ragione; per esempio, in due parti, che sien l'una all'altra come 40 a 70.*

Si unifichino i due numeri dati; la loro somma è 110. Prendasi col compasso ordinario la data linea sopposta = 165. Si apra lo stromento finchè questa lunghezza 165 sia da 110 a 110 sulle due gambe. Restando così aperto lo stromento, si prenda la distanza da 40 a 40, come anche quella da 70 a 70: la prima darà 60, la 2.^a 105, che saran le parti, che si è proposto di trovare; perchè $40 : 70 :: 60 : 105$.

Probl. VI. *Aprire il compasso di proporzione in maniera, che le due linee delle parti uguali facciano un angolo retto.*

Si trovino tre numeri, come 3, 4, 5, o i loro equimultipli 60, 80, 100, che possan esprimer i lati d'un triangolo rettangolo. Si prenda col compasso ordinario la distanza sullo stromento dal centro a 100, e si apra lo stromento finchè una delle punte del compasso positi sopra 80, l'altra punta cada sopra 60 dell'altra gamba; allora le due linee delle parti uguali rinchiodon un angolo retto.

Probl. VII. *Trovare una linea retta ugual alla circonferenza d'un circolo.*

Siccome il diametro d'un circolo è alla sua circonferenza presso a poco come 50 a 157, si prenda col compasso ordinario il diametro e si metta sulle gambe dello stromento da 50 a 50; lasciandolo così aperto, si prenda la distanza da 157 a 157, questa sarà la circonferenza richiesta.

Uso delle Linee del'e Corde.

753. Probl. I. *Aprir lo stromento in maniera, che le due linee delle corde faccian un angolo d' un numero qualunque di gradi, per esempio 40.*

Prendasi sulla linee delle corde la distanza dalla cerniera fin a 40, numero de' gradi proposti. Si apra lo stromento finchè la distanza da 60 a 60 su ciascuna gamba sia uguale alla suddetta distanza di 40; allora la linea delle corde fa l'angolo richiesto.

Probl. II. *Aperto così lo stromento, trovar i gradi della sua apertura.*

Si prenda l'estensione da 60 a 60, e si metta sulla linea delle corde incominciando dal centro; il numero ove ella terminerà, farà veder i gradi della sua apertura.

Mettendo de' *Traguardi* sulla linea delle corde, il compasso di *proporzione* può servire a misurar gli angoli sul terreno, come la squadra d' *Agrimensore*, il *Semi circolo*, o il *Grafometro*.

Probl. III. *Far un angolo di qualunque numero dato di gradi sopra una data linea.*

Descrivasi sulla data linea un arco di circolo, di cui il centro è il punto ove deve esser la sommità dell'angolo. Si metta il raggio da 60 a 60. Restando in questa situazione lo stromento, si prenda sopra ciascuna gamba la distanza di due numeri, che espriman i gradi proposti. Si porti questa distanza sull'arco descritto. Finalmente si tiri una linea dal centro all'estremità dell'arco, questa linea farà l'angolo proposto.

Probl. IV. *Trovar i gradi, che contien un angolo dato.*

Intorno alla sommità descrivasi un arco, e si apra lo stromento, finchè la distanza da 60 a 60 sopra ciascuna gamba sia ugual al raggio del circolo. Si prenda poi col compasso ordinario la corda dell'arco, e portandola sulle gambe dello stromento, si vegga a qual medesimo numero di gradi su ciascuna gamba cadono

le punte del compasso : questo numero è quello de' gradi contenuto dall'angolo dato.

Probl. V. *Dalla circonferenza d'un circolo sottrarre un arco d'una grandezza qualunque.*

Aprasi lo stromento, finchè la distanza da 60 a 60 sia ugual al raggio del circolo dato. Si prenda l'estensione della corda del numero dato de' gradi su ciascuna gamba dello stromento, e si metta sulla circonferenza del circolo dato.

Per questo mezzo si può iscrivere in un dato circolo un poligono regolare qualunque.

Uso della linea de' Poligoni.

759. Probl. I. *Iscrivere un poligono regolare in un dato circolo.*

Col compasso ordinario si prenda il raggio del circolo dato, e si aggiusti al numero 6 della linea de' poligoni sopra ciascuna gamba dello stromento. Lasciandolo così aperto, si prenda la distanza de' due stessi numeri ch'esprimon il numero de' lati, che deve aver il poligono. Per esempio, da 5 a 5 per un pentagono, da 7 a 7 per un ettagono &c. Queste distanze portate intorno alla circonferenza del dato circolo lo divideranno in un consimil numero di parti uguali.

Probl. II. *Descrivere un poligono regolare, per esempio un pentagono sopra una data linea.*

Col compasso ordinario prendasi la lunghezza della data linea, e si applichi allo stromento aperto, finchè cada ne' numeri 5 e 5 sulle linee de' poligoni. Prendasi poscia sulle stesse l'intervallo da 6 a 6 : questa distanza farà il raggio del circolo, in cui il poligono deve esser iscritto. Se allora dalle estremità della linea data si descrivono con questo raggio due archi di circolo, la loro intersezione farà il centro del circolo cercato.

Probl. III. *Sopra una data retta descrivere un triangolo isoscele, di cui ciascun degli angoli alla base sia doppio dell'angolo alla sommità.*

Si

Si apra lo stromento, finchè le estremità della linea data cadan su i punti 10 e 10 di ciascuna gamba. Prendasi allora la distanza da 6 a 6; questa farà la lunghezza di ciascuno de' due lati uguali del triangolo cercato.

Uso delle Linee de' Piani.

760. Probl. I. *Costruir un triangolo ABC simile al triangolo dato ebc, e triplo in superficie* (fig. 76).

Col compasso comune si prenda la lunghezza del lato *eb*, e si porti sulla *linea de' piani* all'apertura del primo piano. Restando così aperto lo stromento, si prenda l'apertura del terzo piano, e si avrà la lunghezza del lato omologo al lato *eb*. Nella stessa maniera si troveranno i lati omologhi ai due altri lati del triangolo proposto, e di questi tre lati si formerà il triangolo ABC, che farà simile, e triplo del triangolo dato *ebc*.

Se il piano proposto ha più di tre lati, si ridurrà a triangoli per una o più diagonali. E se è un circolo che si voglia diminuir o aumentare, si farà sul suo diametro l'operazione descritta.

Probl. II. *Date due figure piane simili, trovar il rapporto, che hanno fra loro* (fig. 77).

Prendasi qualsivoglia de' lati d'una di queste figure, e si porti all'apertura di qualche piano. Si prenda poi il lato omologo dell'altra figura, e si vegga all'apertura di qual piano convenga. I due numeri, ai quali convengon i due lati omologi, esprimon la ragione, che i lati proposti hanno fra loro. Se il lato *ab*, per esempio, della più piccola convien al quarto piano, ed il lato omologo AB dell'altra figura convien al sesto piano, i due piani proposti son tra loro come 4 a 6, o come 2 a 3.

Se posto il lato d'una figura all'apertura d'un piano, il lato omologo non può aggiustarsi all'apertura d'alcun altro numero intiero; bisogna metter il detto lato della prima figura all'apertura di qualche altro piano

piano, finchè si trovi un numero intiero, di cui l'apertura convenga alla lunghezza di questo lato omologo dell'altra figura, affin d'evitare le frazioni.

Se le figure proposte sono sì grandi, che niuno de' loro lati possa applicarsi all'apertura delle gambe dello strumento, si prendano le metà, i terzi, o i quarti de' due lati omologhi di dette figure, e paragonandoli insieme si avrà la proporzione de' piani.

Probl. III. *Tra due date rette trovar una media proporzionale.*

Si porti ciascuna delle due date sulla *linea delle parti uguali dello strumento*, per saper il numero che ciascuna ne contiene. Supposto che la minore = 20 parti uguali, e la maggiore = 45, si porti questa maggiore all'apertura del 45^{mo} piano, che denota il numero delle sue parti. Restando l'istromento così aperto, si prenda l'apertura del 20^{mo} piano, che denota il numero delle parti uguali della più piccola. Questa apertura che deve contenere 30 delle stesse parti, darà la media proporzionale, perchè $\frac{20}{30} = \frac{30}{45}$.

Ma poichè il più gran numero della *linea de' piani* è 64, se qualcuna delle linee proposte contenesse maggior numero di parti uguali, si potrà fare la detta operazione sulle loro metà, terzi, o quarti &c. in questa maniera; Supposta la minore = 32, e la maggiore = 72, si porti la metà della maggiore all'apertura del 36^{mo} piano, e si prenda l'apertura del 6°; quest'apertura raddoppiata darà la media proporzionale richiesta.

Uso della Linea de' Solidi.

761. Probl. I. *Aumentare, o diminuire i Solidi simili secondo una ragione data.*

Si cerchi, per esempio, un cubo doppio in solidità d'un altro.

Si porti il lato del cubo dato sulla *linea de' solidi* all'apertura di qualsivis numero, per esempio, da 20 a 20. Prendasi poscia l'apertura d'un numero doppio,

Elem. di Matem.

X

come

Come di 40: quell'apertura è il lato del cubo doppio del proposto.

Se si propone un globo, o sfera, e se ne vuol far un'altra 3 volte più grossa, si porti il diametro della sfera proposta all'apertura di quel numero che si vorrà, per esempio, da 20 a 20, si prenda poi l'apertura di 60, questo sarà il diametro di un'altra sfera tripla in solidità.

Se le linee son troppo grandi d'applicarsi all'apertura dello stromento, se ne prenda la metà, il terzo, o il quarto; quel che ne proverrà dopo l'operazione, farà la metà, il terzo, o il quarto delle dimensioni richieste.

Probl. II. Dati due corpi simili, trovar il rapporto che hanno fra loro.

Prendasi uno de' lati de' dati corpi, ed avendolo portato all'apertura di qualche solido, prendasi il lato omologo dell'altro corpo, e veggasi a qual numero de' solidi conviene. I numeri, ai quali questi due lati omologhi convengono, indicano il rapporto de' due corpi simili proposti.

Se il primo fosse stato posto all'apertura di qualche solido, ed il lato omologo del secondo non può accomodarsi all'apertura d'alcun numero, si porti il lato del primo corpo all'apertura di qualche altro solido; finchè il lato omologo del secondo si accomodi all'apertura di qualche numero de' solidi.

Uso della linea de' Metalli.

762. *Probl. I. Dato il diametro d'un globo, o d'alcuno de' sei metalli, trovar il diametro d'un altro globo dello stesso peso, e di qualunque altro de' suddetti metalli.*

Si porti il dato diametro all'apertura de' due punti della linea de' metalli. Aperto così lo stromento, si prenda l'apertura de' punti corrispondenti al metallo di cui si vuol fare la palla; quell'apertura sarà il suo diametro.

Se invece di globi si volesse far corpi simili a più facce, convien fare la stessa suddetta operazione, per trovare ciascuno de' lati omologhi l' un dopo l' altro, affin di avere le lunghezze, larghezze, e grossezze de' corpi che si voglion costruire.

In molti *Compassi di Proporzione*, specialmente in quelli costrutti in Inghilterra, son delineate le linee de' Seni, delle Tangenti, e delle Seganti.

Uso delle Linee da' Seni, delle Tangenti,
e delle Seganti.

763. Probl. 1. Trovar la corda, il seno, o la tangente di dieci gradi per un raggio di 3 pollici.

Dienfi tre pollici d'apertura allo stromento da 60 a 60 nelle linee delle corde delle due gambe. Allora la tangente si estenderà da 45 a 45 sulla linea delle tangenti; e da 90 a 90 sulla linea de' seni; in maniera che la linea delle corde essendoposta ad un raggio qualunque, tutte le altre si trovàn poste allo stesso raggio. Perciò se in questa disposizione, si prende col compasso ordinario l'apertura tra 10 e 10 sulla linea delle corde, si avrà la corda di 10 gradi; se si prende l'apertura da 10 a 10 sulla linea de' seni, si avrà il seno di 10 gradi; e se finalmente si prende l'apertura da 10 a 10 sulla linea delle tangenti, si avrà la tangente di 10 gradi.

Dunque per mezzo di queste linee si hanno delle scale per differenti raggi; di maniera che avendo un raggio che non ecceda la più grand' estensione dello stromento, si trovàn le corde, i seni &c.

Se si vuole la corda, o la tangente di 70 gradi, si può per la corda prender l'apertura della metà di quest' arco, vale a dire 35; questa distanza presa due volte dà la corda di 70 gr.

Per trovar la tangente di 70 gr. per lo stesso raggio, si deve far uso della piccola linea delle tangenti, poichè l'altra si estende solamente fin a 45 gr.; perciò dando tre pollici all' apertura tra 45 e 45 su que-

sta piccola linea, la distanza tra 70 e 70 gr. sulla stessa linea, farà la tangente di 70 gr. per un raggio di tre pollici.

Probl. II. *Trovar la segante d' un arco.*

Il raggio dato sia l'apertura dello strumento tra 0 e 0 sulla *linea delle seganti*; allora l'apertura da 10 a 10, o da 70 a 70 sulle dette linee, darà la tangente di 10, o di 70 gr.

Probl. III. *Dato il seno, o la tangente, o la segante, trovar il raggio.*

Se la data linea è una corda, sia l'apertura della linea delle corde tra 10 e 10; allora lo strumento sarà aperto al raggio richiesto, cioè farà l'apertura tra 60 e 60 sulla detta linea. Se la linea data è un seno, una tangente, o una segante, sia ella l'apertura del numero dato de' gradi; la distanza da 90 a 90 su i seni, da 45 a 45 sulle tangenti, da 0 a 0 sulle seganti, darà il raggio.

Uso del Compasso di Proporzione per la Trigonometria.

764. Probl. I. *Data la base, e la perpendicolare d' un triangolo rettangolo, trovar l'ipotenusa (fig. 78).*

Supposta la base $AC = 40$ miglia, e la perpendicolare $AB = 30$; si apra lo strumento, finchè le due linee delle parti uguali facciano un angolo retto. Poi per la base prendasi 40 della *linea delle parti uguali* sopra una gamba, e per la perpendicolare 30 della stessa linea sull'altra gamba; allora la distanza dal numero 40 sull'una delle gambe al numero 30 sull'altra gamba, farà la lunghezza dell'ipotenusa, la quale sarà $= 50$ miglia.

Probl. II. *Data la perpendicolare AB del triangolo rettangolo $ABC = 30$, e l'angolo $BCA = 37$ gr., trovar l'ipotenusa BC.*

Si prenda il lato dato AB, e si metta da ogni parte sul seno dell'angolo dato ACB; la distanza parallela del raggio, o da 90 a 90, farà l'ipotenusa BC, la quale misurerà 50 sulla *linea de' seni*.

Probl.

Probl. III. *Data l'ipotenusa e la base, trovar la perpendicolare.*

Si apra lo stromento finchè le *date linee delle parti uguali* sieno ad angolo retto. Si metta indi la base data sopra una di queste linee dal centro. Si prenda l'ipotenusa, e mettendo una delle sue estremità al punto della base, l'altra estremità cada sulla linea delle parti uguali dell'altra gamba: la distanza dal centro fin a questo punto sarà la lunghezza della perpendicolare.

Probl. IV. *Data l'ipotenusa, e l'angolo ACB trovar la perpendicolare.*

La data ipotenusa sia un raggio parallelo, cioè sia estesa da 90 a 90 sulle linee delle parti uguali; il seno parallelo dell'angolo ACB sarà la lunghezza del lato AB.

Probl. V. *Data la base e la perpendicolare AB, trovar l'angolo BCA.*

Si metta il lato AC sulle due facce dello stromento dal centro, e si osservi la sua estensione. Si prenda la perpendicolare data, e si apra lo stromento all'estensione di questa perpendicolare posta alle estremità della base; il raggio parallelo sarà la tangente dell'angolo BCA.

Probl. VI. *In ogni triangolo rettilineo dati due lati coll'angolo compreso tra questi due lati, trovar il terzo lato.*

Sia $AC = 20$, $BC = 30$, $ACB = 110$ gr. Si apra lo stromento, finchè le due linee delle parti uguali facciano un angolo uguale all'angolo dato, cioè di 110 gr.; si mettano i lati dati del triangolo dal centro dello stromento sopra ciascuna delle linee delle parti uguali; l'estensione tralle loro estremità è la lunghezza del lato chiesto AB.

Probl. VII. *Dati gli angoli CAB, ACB, ed il lato CB, trovar la base AB.*

Si prenda il lato CB dato, e si riguardi come il seno parallelo del suo angolo opposto CAB; il seno parallelo

parallelo dell' angolo ACB farà la lunghezza della base AB.

Probl. VIII. *Dati i tre angoli d' un triangolo, trovar la proporzione de' suoi lati.*

Prendansi i seni laterali di questi differenti angoli, e si misurino sulla *linea delle parti uguali*; i numeri che vi corrisponderanno, daran le proporzioni de' lati.

Probl. IX. *Dati tre lati, trovar l'angolo ACB.*

Si mettano i lati AC, CB lungo la *linea delle parti uguali* dal centro, e si metta il lato AB alle loro estremità: l'apertura di queste linee è la grandezza dell'angolo ACB.

Probl. X. *Data l'ipotenusa AC d' un triangolo rettangolo sferico ABC, per esempio, di 43 gr., e l'angolo CAB di 20 gr., trovar il lato CB (fig. 79)*

Facciasi questa proporzione, il raggio: al seno dell'ipotenusa $\equiv 43$ gr.: il seno dell'angolo $\equiv 20$ gr.: al seno della perpendicolare CB. Si metta poi 20 gr. sulla *linea de' seni* dal centro, e questa stessa estensione si metta da 90 a 90 sulle due gambe dello strumento; il seno parallelo di 43 gradi, che è la data ipotenusa, essendo misurato dal centro sulla *linea de' seni*, darà 13 gr. 30 m. per il lato richiesto.

Probl. XI. *Data la perpendicolare BC, e l'ipotenusa AC, trovar la base AB.*

Facciasi quest' analogia, il seno del compimento della perpendicolare BC: al raggio:: il seno del compimento dell'ipotenusa: al seno del compimento della base. Dunque il raggio sia un seno parallelo della data perpendicolare, per esempio, di $76^{\circ} 30'$, allora il seno parallelo del compimento dell'ipotenusa, per esempio, di 47 gr., misurato sulla *linea de' seni*, farà di $49^{\circ} 25'$, che è il compimento della base cercata, e per conseguenza la base farà di $40^{\circ} 35'$.

Uso particolare del Compasso di Proporzione
in Geometria.

765. Probl. I. *Far un poligono regolare d' un' aja uguale a qualunque data.*

Suppongasì un pentagono, di cui l'aja $\equiv 125$ piedi. Si estrarra la radice quadrata dal $\frac{1}{5}$ di 125, che farà $\equiv 5$. Facciasì un quadrato, di cui un lato $\equiv 5$ piedi, e per la *linea de' poligoni* si faccia (fig. 80,) il triangolo Ifofcele CGD tale che CD possa effer il lato d' un pentagono regolare iscritto in questo circolo, e si abbassi la perpendicolare GE. Continuando le linee EG, EC, si faccia EF ugal al lato del quadrato suddetto, e dal punto F si tiri FH parallela a GC. Ora una media proporzionale tra GE e EF, farà ugal alla metà del lato del poligono richiesto. Raddoppiandola dunque si avrà il lato intiero. Determinato così il lato del pentagono, è facile descriverlo.

Probl. II. *Far un quadrato ugal ad un dato circolo.*

Dividasì il diametro in 14 parti uguali, servendosi della *linea delle parti uguali*. Allora 12. 4 di queste parti trovate per la stessa *linea*, faranno il lato del quadrato richiesto.

Probl. III. *Trovar il diametro d' un circolo ugal ad un dato quadrato,*

Dividasì il lato del quadrato in 11 parti uguali, e si continui questo lato fin a 12. 4 parti; questo sarà il diametro del circolo richiesto.

Probl. IV. *Trovar il lato d' un quadrato ugal ad un' Elissi, di cui sien dati i diametri traversi, e conjugati.*

Si trovi una media proporzionale tra il diametro traverso e'l conjugato, e si divida in 14 parti uguali; 12 $\frac{4}{5}$ di queste parti saran il lato del quadrato richiesto.

Probl. V. *Descriver un' Elissi, di cui i diametri abbian un rapporto qualunque, e di cui la superficie sia ugal ad un quadrato dato.*

Sia il rapporto del diametro traverso al conjugato, come 2 ad 1. Dividasi il lato del quadrato dato in 11 parti; allora $2 : 1 :: 11 \times 14 = 154 : \text{ad un quarto proporzionale, di cui il quadrato è il diametro conjugato richiesto. Poi } 1 : 2 :: \text{il diametro conjugato : al diametro traverso.}$

Sieno (fig. 81) AB ed ED i diametri dati. Si apra lo stromento finchè la distanza da 90 a 90 sulle *linee de' seni* sia $\text{—} AC$. Si divida la linea AC in *linee de' seni* da 10 in 10, e da ciascuno di questi seni s'inalzino a due parti le perpendicolari. Si apra lo stromento finchè la sua apertura da 90 a 90 sulla *linea de' seni* sia uguale al diametro conjugato CE: Si prendan i seni paralleli di ciascun grado delle *linee de' seni*, e si mettano su queste perpendicolari tirate da loro complementi nelle *linee de' seni* AC. Così si avran due punti in ciascuna perpendicolare, per i quali deve passare l'Elissi.

Restando lo stromento da 80 ad 80 sulle *linee de' seni*, e mettendo una punta di questo compasso in 10 sulla linea AC, coll'altra punta si segnino i punti *a*, *m* sulle perpendicolari che passano per questi; *a* ed *m* faran due punti nella perpendicolare, per i quali l'Elissi deve passare &c.

Uso del Compasso di Proporzione nell'Agrimensura.

766. Probl. *Data la posizione rispettiva di tre luoghi (fig. 82), A, B, C, e le distanze di ciascuno di questi luoghi ad un quarto D, trovar le distanze rispettive fra loro.*

Fatto il triangolo EFG simile ad ACB, si divida EG in H in maniera che $EH : HG :: AD : DC$. Nella stessa guisa EF si divida in I, che $EI : IF :: AD : DB$. Continuando i lati EG, EF, sia $EH - HG : HG :: EH + HG : GK$, e $EI - IF :: IF :: EI + IF : FM$; queste proporzioni trovansi facilmente per mezzo della *linea delle parti uguali*. Si tagli poi HK ed IM ai punti L, N, e da questi punti, come
da

da centri colle distanze LH ed IN, si descrivano due cerchi intersecantisi in O, dove dalla sommità degli angoli EFG si tirino le rette EO, FO, OG, che avranno fra loro la stessa proporzione che le linee AD, BD, DC. Or se le linee EO, FO, GO son uguali alle linee date AD, BD, DC, le distanze EF, FG, EG faran le distanze richieste de' luoghi. Ma se EO, OF, OG son più piccole di AD, DB, DC, si prolunghino finchè PO, OR, OQ sien loro uguali. Allora se si uniscon i punti P, Q, R, le distanze PR, RQ, PQ faran le distanze de' luoghi richiesti. Finalmente se le linee EO, OF, OG son più grandi delle AD, DB, DC, si sottraggano delle parti uguali a AD, DB, DC, e si uniscan i punti di sezione per tre linee rette; le lunghezze di queste rette daranno le distanze certate. Se $EH = HG$, o $EI = IF$, i centri L, N faranno infinitamente distanti da H, e da I, cioè ai punti H ed I devon esservi delle perpendicolari elevate su i lati EF, FG, invece di cerchi, finchè s'intersechino. Ma se $EH < HG$, il centro L caderà sull'altro lato della base prolungata; e lo stesso deve intendersi di EI ed IF.

La mirabil invenzione di questo sì utile strumento, che facilita particolarmente la *Proiezione ortografica, e stereografica*, è dovuta a quel raro genio di Galileo, autore della maggior parte delle più interessanti scoperte.

Osservazioni sulla Geometria.

767. La voce *Geometria* composta di due parole Greche, significa *Misura della Terra*. Questa etimologia indica quel che ha fatto nascere la Geometria. Impensetta ed oscura nella sua origine, come le altre Scienze, ella ha incominciato dall'andar a tastoni con misure ed operazioni grossolane, ed a poco a poco si è elevata a quel grado di esattezza, e di sublimità, ove ora è giunta.

768. Le figure, che si considerano in Geometria son forse assolutamente ipotetiche, e non han modello esistente nella natura. Le linee nella natura non
sono

sono nè perfettamente rette, nè perfettamente curve; le superficie non sono nè esattamente piane, nè esattamente curvilinee, nè vi è naturalmente un circolo perfetto. Or se in natura non vi è niente di questa esattezza immaginaria Geometrica, a che serve dunque la Geometria? Ecco a che serve. Se i Teoremi Geometrici non hanno esattamente luogo nella natura, questi Teoremi servono almeno a trovar con una precisione sufficiente per la pratica la distanza inaccessibile d'un luogo all'altro, la misura d'una superficie, e d'un solido; servono a calcolare il movimento, e la distanza degli Astri, ed a predire i Fenomeni celesti. Per dimostrar la verità con tutto il rigore, si è obbligato a considerar i corpi in uno stato di perfezione astratta, che realmente non hanno. Se non si riguardasse, per esempio, il circolo come perfetto, ci vorrebbero tanti teoremi differenti sul circolo, quante figure differenti si posson immaginar accostarsi più o meno al Circolo perfetto. Quanto più le figure, e le linee naturali si approssimeranno all'esattezza delle Geometriche, più si accosteranno alle proprietà dimostrate nella Geometria. Ciò basta per risponder a due specie di censori della Geometria: gli uni sono gli Scettici, che accusan la Geometria di falsità, perchè suppone quel che realmente non esiste, linee senza larghezza, superficie senza profondità &c. Gli altri son gl'ignoranti delle Matematiche, che disprezzano quel che non fanno, e stiman inutili, e come giuochi di spirito inapplicabili alla Fisica le verità Geometriche. E' una specie di consolazione tassar d'inutile quel che non si sa.

769. L'utile della Geometria non è solo ristretto alle Scienze ed alle Arti, ma si estende principalmente a formar la retta ragione, ed a preparar la pubblica felicità. Poichè assuefacendosi la mente a stabilire principj veri e chiari, a dedurne immediatamente conseguenze incontrastabili, a dimostrar tutto con rigore, si abitua in tutto alla metodica ricerca del vero, e diffondendosi questo spirito geometrico nella società, si
con-

converte ben presto in Filosofico, e da per tutto si va ad investigare il vero, il giusto, l'utile, e l'onello.

Non è però da lusingarsi, che la Geometria raddrizzi gli spiriti naturalmente storti: uno spirito senza giustizia, non è per questo studio. La Geometria non raddrizza che gli spiriti dritti, e gli spiriti dritti son fatti per la Geometria.

770. Si è già veduto, che la Geometria Elementare non considera che le proprietà delle linee rette, delle linee circolari, delle figure, e de' solidi più semplici, cioè delle figure rettilinee o circolari, e de' solidi terminati da queste figure. Il circolo è la sola figura curvilinea di cui si parla negli elementi della Geometria; la semplicità della sua descrizione, la facilità con cui le proprietà del circolo si deducono, e la necessità di servirsi del circolo per differenti operazioni semplicissime, come per inalzar una perpendicolare, per misurare un angolo &c.; tutte queste ragioni han determinato a far entrar il circolo, ed il circolo solo negli elementi di Geometria.

771. Le proposizioni della Geometria Elementare si son trattate *sinteticamente*, e senza calcolo algebratico, perchè di questi due metodi si deve impiegar quello, che facilita più le dimostrazioni: Or la *Sintesi* rende più facile la Geometria Elementare, siccome l'*Analisi* facilita più la Scienza dell'altre Curve.

Tutte le altre Curve differenti dal Circolo, le quali sono di grandissimo uso nelle Scienze, e nelle Arti, trattate analiticamente, o per mezzo del Calcolo Infinitesimale, forman la *Geometria Trascedente*. Il Calcolo Integrale poi applicato alla quadratura, e alla rettificazione delle Curve, fa la *Geometria Sublime*.

Cartesio è stato il primo ad applicar alla Geometria il Calcolo Algebratico, per cui d' allora in poi fece questa Scienza gran progressi ignoti all' Antichità; e questi nuovi progressi han prodotto il Calcolo Infinitesimale, che ha portato la Geometria al maggior grado di elevazione.

LIBRO IV.

DELLA GEOMETRIA TRASCENDENTE

CAPITOLO I.

Delle Curve in Generale.

772. **S**I chiama *Funzione di una quantità* ciò che la rende composta, o ciò che impedisce di considerarla come semplice.

Per esempio, chiamasi in generale *Funzione di a* , una delle potenze qualunque a , una radice qualunque, una somma, una differenza, un prodotto, un quoziente &c. della quantità a .

773. Per determinare la posizione d' un punto sopra un piano, la maniera la più comoda, e la più usitata tra i Geometri, è di rapportarlo a due rette differentemente situate su questo piano; il che si fa facilmente, lorchè si conosce la sua distanza da ciascuna di queste rette, e da qual parte egli è situato riguardo a loro.

Se il punto M (fig. 84) dovesse esser posto al di sotto della retta AS data di posizione, ed esserne lontano d'una quantità uguale a DE , e a sinistra della retta SF in una distanza uguale a BC ; allora tirando al di sotto di AS una retta GH , che le sia parallela, e tale che tutte le perpendicolari tirate fra loro sien uguali a DE , è chiaro che il punto M deve esser in qualche parte di questa retta. Tirando similmente a sinistra di SF una parallela KI in maniera, che tutte le perpendicolari tirate fra loro sien uguali a BC , e sulla quale per conseguenza il punto M deve ancora trovarsi; è chiaro che questo punto deve esser nell' intersezione delle due rette KI , GH .

774. Se nel dare la distanza dal punto M alle due rette AS , SF , non si dicesse da qual parte questo pun-

to debba esser posto riguardo a loro, la sua posizione sarebbe indeterminata; perchè si troverebbe ugualmente ai quattro punti M, m, n, K . Per evitare questa ambiguità, i Geometri son convenuti di disegnare le posizioni opposte per i segni $+$ e $-$. Per esempio, la retta AS servendo di termine, per rapportarvi le rette che son al di sopra o al di sotto, si chiameran le une *positive*, e l'altre *negative*; e la retta SF servendo di termine per distinguer le linee che son a sinistra, da quelle che son a destra, si chiameranno le une *positive*, e le altre *negative*. La scelta è da principio arbitraria, ma fatta una volta, non si deve più variarla in tutti i calcoli algebratici applicati alla stessa figura.

775. Se dal punto M , come di sopra si è determinato, si abbassano le perpendicolari MT, MR , i triangoli rettangoli MTV, MPR sono simili; perchè se dagli angoli retti TMP, VMR si toglie l'angolo comune TMR , resta $TMV = PMR$. Si ha dunque $MV : MP :: MT$ o $DE : MR$ o BC . Dunque alle perpendicolari MT, MR , che misurano le distanze date, si avrebbe potuto sostituire le parallele MV, MP , e determinar il punto M con queste condizioni, ch'egli debba esser al di sotto di AS , e a sinistra di SF ; e che le parallele a AS , e a SF tirate da questo punto debban esser uguali l'una a MP , e l'altra a MV . Perchè avendo preso sopra SP al di sotto di A una parte $SP = MV$, e per P avendo tirato a AS la parallela GH , non resterebbe da far altro che tirarvi di P una retta uguale a PM ; il punto M sarebbe determinato come sopra.

776. Si considera ordinariamente una curva piana, come una serie di passi uguali fatti da un punto mobile sopra un piano; e per poter ragionare sulla natura, e proprietà di questa curva, bisogna che questa serie di passi sia una serie di punti M, M (fig. 85) determinati d'una maniera uniforme riguardo alle due rette AS, SF differentemente poste su questo piano; o che qualche stessa funzione di ciascuna retta MP sia a qual.

qualche stessa funzione della retta SP corrispondente, in un certo rapporto costante. Bisogna dunque perciò che il punto mobile, che descrive la curva, si muova seguendo sempre una stessa certa legge negli angoli infinitamente piccoli de' suoi traviamenti.

L'Equazione Algebrica, che esprime questa legge, o il rapporto costante delle funzioni di ciascuna MP a ciascuna SP , si chiama *Equazione della Curva*. La retta SF , cui terminano tutte le parallele MP , MP , si chiama la *Linea delle Ascisse*, perchè diconsi *Ascisse*, o *tagliate* le parti SP , SP &c. di questa linea, comprese dal punto determinato S (che si chiama l'*Origine delle Ascisse*) per cui passa la retta AS , alla quale tutte le rette (che si chiaman *Ordinate* o *applicate*) devon esser parallele. Donde si vede, che purchè si sappia la posizione d' una delle ordinate, e l'origine delle ascisse, la retta AS è inutile.

777. Per maggior dilucidazione, suppongasi che MS (fig. 64 n. 2) sia un semicircolo, di cui Ss sia il diametro. Si sa (529) che se da un punto qualunque M vi si abbassa la perpendicolare MP , si ha $PM^2 = SP \times Ps$. Se dunque si prende Ss per la linea delle ascisse, il punto S per la loro origine, l'equazione del circolo deve esprimere che il quadrato di ciascuna ordinata MP è ugual al prodotto di ciascuna ascissa SP per il resto Ps del diametro. Onde facendo $Ss = a$, $MP = y$, $SP = x$, (si osservi che ordinariamente si disegnano le ordinate delle curve per y , e le loro ascisse per x , così che nel discorso familiare si dice le x e le y d'una curva, per dire le ascisse e le ordinate) si ha $Ps = a - x$; e $y^2 = ax - x^2$ e l'equazione del circolo, perchè ella esprime l'uguaglianza costante tra una stessa funzione di ciascuna ordinata (ch'è il suo quadrato) e una stessa funzione d'una ascissa corrispondente (ch'è il suo prodotto pel resto del diametro).

778. Quindi si vede, che ciascuna ordinata d'una curva, e ciascuna ascissa corrispondente, devon esser due

due quantità indeterminate o variabili, ma deducibili l'una dall'altra per le diverse supposizioni di grandezza, che si fa all'una de' due, e per le grandezze determinate o costanti che son contenute nell'equazione, onde si può facilmente descriver la curva.

Per esempio, nell'equazione del Circolo, a deve esser una quantità costante o invariabile. Se dunque $a = 10$, e se sopra Ss si prendon quante ascisse SP si vuole (per maggior comodità si prendon in progressione aritmetica, o in maniera che gl' intervalli PP sien uguali), come se si facesse SP o x successivamente $= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, si troverà per l'equazione $y^2 = ax - x^2$, che le ordinate corrispondenti MP o y , sono successivamente, $0, 3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}, 5, \sqrt{24}, \sqrt{21}, 4, 3, 0$; così che inalzando da ciascun punto P delle perpendicolari a Ss , e facendole successivamente uguali a $3, 4, \sqrt{21}$ &c., si avran tanti punti M , per i quali si potrà delinear una curva, che sarà un semicircolo descritto con tanta maggior esattezza, quanto men lontane saran fra loro le ordinate MP .

Per maggior chiarezza di ciò, si osservi.

1.^o Che facendo $x = 0$, sarà $y = 0$; perchè essendo $y^2 = ax - x^2$, e $x = 0$, sarà $ax - x^2 = 0$, dunque $y = 0$. Dunque al punto del circolo, dove non abbia luogo alcuna ascissa, non avrà luogo neppure un'ordinata. Ma al punto S non ha luogo alcuna ascissa, dunque non vi ha nemmeno luogo alcun'ordinata.

2.^o Lorchè $x = 1$, sarà $y = 3$; perchè se $y^2 = ax - x^2$, sarà $y^2 = 10 - 1 = 9$; dunque $y = 3$.

3.^o Quando $x = 2$, sarà $y = 4$; perchè essendo $y^2 = ax - x^2$, sarà $y^2 = 20 - 4 = 16$; dunque $y = 4$. E così degli altri.

E poichè l'equazione $y^2 = ax - x^2$ dà anche le radici negative $-3, -4, -\sqrt{21}, -\sqrt{24}$ &c., ben si vede che se sul prolungamento di ciascuna MP si pren-

si prendono (774) a destra di Ss tante $Pm = PM$, si avrà il circolo intero $SMsm$.

Si vede ancora che se si avesse voluto prendere SP più grande di Ss , o $x > a$, l'ordinata corrispondente farebbe divenuta immaginaria, o impossibile; perchè $ax - x^2$ farebbe divenuta una quantità negativa, di cui la radice quadrata è impossibile. Onde il semicircolo è assolutamente terminato in s , e il ramo SMM non può discendere più basso.

779. Reciprocamente. Poichè tutte le soluzioni possibili di un problema indeterminato (188) son rinchiusse in un'equazione contenente due incognite, si può supporre che tutti i valori possibili d'una di queste incognite sieno rappresentate successivamente da una serie d'ascisse d'una curva, e tutti i valori corrispondenti dell'altra incognita dalle ordinate della stessa curva; così che ciascun punto della curva sia tale, che la sua ordinata e la sua ascissa rappresentan una delle soluzioni esatte del problema indeterminato espresso da questa equazione.

780. I differenti gradi dell'equazioni servono a stabilir i differenti generi o ordini di linee. Ciascuna combinazione di funzioni delle due indeterminate d'un'equazione d'un certo grado serve a distinguere tante specie di linee rinchiusse nel genere indicato dal grado; il numero di queste combinazioni possibili e realmente differente determina il numero di queste specie. Così si chiaman *Linee del primo genere* o del *primo ordine* quelle che son prodotte da un'equazione del primo grado; *linee del secondo genere* o del *secondo ordine* quelle che risultano da un'equazione del secondo grado: e così delle altre.

Non vi è che la linea retta che sia del primo genere; non vi sono che le quattro Sezioni Coniche che sieno del secondo; ve ne sono pressò 80 del terzo ordine, e a proporzione un maggior numero del quarto &c. Questo numero di specie non si deve intendere che delle Curve, che si chiamano *piane*, e *geometriche*.

che. Curve Geometriche o Algebriche diconsi tutte quelle, delle quali il rapporto delle ascisse alle ordinate è, o può esser espresso da un'equazione algebrica. Quelle Curve poi che non posson determinarsi per mezzo di equazione algebrica, chiamansi Curve Meccaniche, o Trascendenti: Tali son quelle Curve, ove le ordinate, e le ascisse non essendo rette, o essendo rette, si è obbligato far entrare nella loro espressione lunghezze d'archi di circolo; e se la Curva non è piana, vale a dire se il punto che l' ha formata, non si è mosso in uno stesso piano, la Curva si chiama Curva a doppia Curvatura.

781. Se la curva piana (fig. 85) MSm geometrica o meccanica, è tale, che le ordinate, essendo prolungate al di là della linea SF delle ascisse fin alla curva m , si ha sempre $Pm = PM$; questa linea SF si chiama un diametro; il punto S della curva per dove ella passa, si chiama l'origine del diametro; questo punto è ordinariamente l'origine delle ascisse. E se le ordinate son perpendicolari a questo diametro, si chiama allora l'asse della curva.

782. Tutte le curve che hanno un diametro, e che per conseguenza hanno riguardo a quello due rami SMM , Smm che si estendono da una parte e l' altra nella stessa maniera, han questa proprietà, che la parallela SA alle ordinate tirata dall'origine S del diametro passa sempre in mezzo tra le due porzioni della doppia ordinata terminata da una parte e l'altra alla curva; se s'immagini che Mm scorra parallelamente a se stessa, fin che arrivi in S , allora il punto S sarà nel mezzo tra le due parti infinitamente piccole di Mm , che saranno terminate alla curva, e perchè Mm entra infinitamente poco nella curva, le sue parti terminate alla curva, faran le due metà del lato infinitamente piccolo della curva che è in S . Dunque Mm sarà allora confusa con questo lato. Ora una tangente non è altro che il prolungamento finito del lato infinitamente piccolo, ch'è in S ; Dunque ella è tangente alla curva in questo punto.

783. Quando un diametro, o un asse SP (fig. 129, 130) è rincontrato da una tangente MT , la parte TP di questo diametro compresa tra il punto di rincontro T , e l'ordinata MP a questo diametro tirata dal punto del contatto M , si chiama *sottangente*. E se dallo stesso punto del contatto M s'innalza alla tangente MT una perpendicolare o *normale* MN , la parte PN compresa tra l'incontro dell'ordinata a quello della normale, si chiama la *superpendicolare*, o *fun-normale*.

784. Quando una curva non è rientrante rapporto al suo diametro, vale a dire, quando i suoi rami se ne allontanano sempre, allora si può menare da tutti i suoi punti M , M &c. (fig. 85) le rette MQ , MQ parallele al diametro SP , fin al rincontro della retta SQ tirata dall'origine S delle ascisse parallelamente alle ordinate, cosicchè queste rette MQ , MQ sieno tutte al di fuori della curva. In questo caso è chiaro, ch'esse formano de' parallelogrammi simili PQ , PQ &c., e si posson prendere le rette MQ , MQ per le ascisse SP , SP ; e le rette SQ , SQ per le ordinate. Queste sorti d'ordinate si chiaman *coordinate*, il parallelogrammo PQ si chiama il *parallelogrammo delle coordinate*, e l'angolo QSP si chiama l'*angolo delle coordinate*.

785. Poichè si suppone che le curve non sono che passi uguali d'uno stesso punto che devia a ciascun passo, seguendo una certa legge costante nella variazione degli angoli infinitamente piccoli de' suoi deviamenti, siegue:

1.º Che non si può considerare in Geometria linea mista, cioè in parte retta, e in parte curva; poichè allora non vi sarebbe legge costante del cammino del punto che la descriverebbe.

786. 2.º Che il contatto d'una curva con una retta non può farsi che in un sol punto, ovvero che una retta non può toccar una curva in due o tre punti contigui; perchè se ciò fosse possibile, il punto descrivente avrebbe fatto due o tre passi senza devia-

re, il che avrebbe interrotta la legge de' suoi deviamenti.

787. 3.^o Che la curvatura d' una curva è tanto maggiore, quanto gli angoli de' suoi deviamenti son più grandi a proporzione della grandezza de' passi del punto mobile che l'ha descritta.

Per esempio, un circolo è una curva descritta da un punto, che ha deviato ugualmente a ciascun passo uguale; e perchè un grande e un piccolo circolo son due poligoni regolari d'uno stesso numero di lati e di angoli, ma de' quali quelli del più piccolo circolo son più piccoli di quelli del più grande in ragione de' loro raggi; gli angoli de' deviamenti, o i supplementi degli angoli interni formati dai lati del circolo più grande, son uguali agli angoli de' deviamenti de' lati del più piccolo; è dunque evidente che ciascuno de' lati del circolo grande è tanto meno discosto dalla linea retta, quanto egli è più grande, o quanto più grande è il raggio del circolo, poichè il punto che descrive il circolo grande, fa de' passi in linea retta tanto più grandi. Dunque la curvatura d' un circolo è tanto più piccola, quanto più grande è il suo raggio, ovvero ella è in ragion inversa del suo diametro. Donde siegue che la grandezza del raggio d' un circolo è una quantità propria da dar un' idea della sua curvatura.

788. I principali problemi da proporsi, lorchè si ha una curva da esaminare, consistono: 1.^o A cercare in qual maniera si deve descriverla, se se ne conosce l'equazione; o reciprocamente, qual equazione si deve dedurre dalla sua costruzione nota. 2.^o Come vi si può menar una tangente in un punto dato. Ciò è lo stesso che cercare, qual'è la posizione del lato infinitamente piccolo, ove questo punto è situato; ovvero qual'era la direzione del cammino del punto mobile nel descrivere questo lato infinitamente piccolo. Questa ricerca conduce naturalmente a quella del punto del contatto, che si determina facilmente dai valori della sottangente, o della normale, o della subnormale,

le. 3.^o Qual' è la curvatura della curva in un piccolo arco. Perciò si suppone che per i tre punti infinitamente prossimi formanti quest' arco, si abbia fatto passare la circonferenza d'un circolo, nella quale per conseguenza l'arco della curva è confuso, e il raggio di questo circolo determinato per mezzo dell'equazione, o delle proprietà della curva, dà la curvatura di quest'arco. Questo raggio si chiama *raggio di curvatura*, *raggio osculatore*, *raggio della sviluppata*. 4.^o Si cerca qual' è la Quadratura della curva, cioè qual' sia o superficie è rinchiusa nella curva intiera, s'è chiusa, o in una delle sue parti date; come se si domandasse la superficie compresa tra l'arco LM (fig. 86) d'una curva, una parte CP del suo diametro, e le due sue ordinate MP, CL, delle quali l'una come CL parte dall'origine C delle x dell'equazione della curva. Perciò si suppone che da questa origine sienvi disposti parallelamente all'ordinata CL o MP tanti parallelogrammi $pqmn$ terminati alla curva da una parte, e dall'altra alla linea delle ascisse GP, quanti punti vi sono da C fin a P; tutti questi parallelogrammi, che son d'un numero infinito, son dunque sì stretti, che le rette pm , qn son confuse, e posson esser presi per semplici ordinate al diametro CP. Or CP, essendo l'ultima x , tutte le x comprese tra l'origine C, e che corrispondono a ciascuna di tutte queste ordinate comprese tra CL, PM, crescono secondo que-

sta serie o progressione aritmetica $1 \frac{x}{\infty}, 2 \frac{x}{\infty}, 3 \frac{x}{\infty},$

$4 \frac{x}{\infty} \dots \infty \frac{x}{\infty} = x$. Perchè la prima y infinitamente prossima a CL ha per suo x una parte in-

finitamente piccola di GP, cioè, $1 \frac{x}{\infty}$; la seconda ha

il suo x doppio del precedente, poichè ella corrisponde al secondo punto compreso tra C e P, e contatto da

da C; questo x è dunque $2 \frac{x}{\infty}$; la terza y ha il suo

x triplo, o $3 \frac{x}{\infty}$; e così delle altre. Ond'è eviden-

te, che si posson rappresentare tutte queste x per la serie infinita $\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \dots + \frac{x}{\infty}$. Or l'equazione della curva non racchiudendo altre indeterminate che x e y , si posson trarne tanti valori d' y , quanti se ne posson supporre a x , cioè quanti son i termini di questa serie. Si avrà dunque con questo mezzo una serie infinita d'ordinate comprese tra CL e PM; e se si può sommare questa serie, si avrà la quadratura esatta dell'aja CLMP; se non si può sommare, e se questa serie è abbastanza convergente, non si avrà la quadratura che a un dì presso, e tanto più esattamente, quanti più termini consecutivi di questa serie di ordinate effettivamente si sommeranno.

Per riuscire in tutte queste ricerche, s'impiegan ordinariamente due specie di calcoli, l'uno è il calcolo Analitico ordinario, e l'altro è l'Infinitesimale, di cui si daranno i principj in appresso.

CAPITOLO II.

DELLE SEZIONI CONICHE.

Della Natura, e delle Proprietà principali delle Sezioni Coniche descritte sopra un piano, e considerate rapporto ai loro assi.

729. **L**A Sezione Conica è una linea curva nata dall'intersezione d'un piano con un Cono. Un piano non può tagliar un Cono, che nelle cinque maniere seguenti.

1.° Se lo taglia per la sua punta, perpendicolarmente.

te alla sua base, si avrà un *Triangolo*. Questa sezione che non è curva, non si considera fra le Coniche.

1.° Se lo taglia parallelamente alla sua base, si avrà un *Circolo*, il quale nemmeno si considera fra le Sezioni Coniche, poichè se n'è trattato nella Geometria Elementare.

3.° Se lo taglia obliquamente alla sua base, e parallelamente a uno de' lati del Cono, si avrà una *Parabola* (fig. 101.)

4.° Se lo taglia obliquamente alla sua base, ed ai suoi lati, in maniera che la sezione tagli i due lati del Cono, si avrà un' *Elissi*. (fig. 102.)

5.° Finalmente se lo taglia obliquamente alla base, ed ai lati del Cono, in maniera che la sezione prolungata in alto vada a tagliar un altro Cono opposto, la sezione di ciascun Cono si chiama *Iperbole*, e queste due curve insieme diconsi *Iperboli opposte*. (fig. 103.)

Queste tre Curve son quelle che propriamente fanno l'oggetto delle Sezioni Coniche.

Si chiama Sezione Conica ogni linea, in cui sieno sempre nella stessa ragione le due distanze di ciascuno de' suoi punti, l'una MG (fig. 88, 89, 90) dalla stessa retta AG (che si chiama la *direttrice della sezione*); e l'altra MF da uno stesso punto F posto fuori di questa retta AG (questo punto F si dice il *foco della sezione*.)

790. La sezione è un' *Elissi*, se MG è maggiore di MF ; e *Iperbole* se MG è minore di MF ; *Parabola* se $MG = MF$; *Circolo* se MG è infinita rapporto a MF ; e *retta* se MG è infinitamente piccola rapporto a MF .

Non si considerano qui che i tre primi rapporti, che dan le Curve propriamente dette *Sezioni Coniche*.

791. Una retta FA che passa pel foco F , e che è perpendicolare alla direzione AG , si chiama l'*asse principale* della sezione. Il punto S compreso tra F e A ,
e che

e che è tale che SA sia a SF nel rapporto costante proprio alla sezione, si chiama il *vertice* della sezione, o l'*origine*, l'*estremità* dell'asse principale.

792. Donde siegue, che una Sezione Conica è un' *Elissi*, un' *Iperbole*, o una *Parabola*, secondo che il suo vertice è più vicino, lontano, o tanto lontano dal foco quanto la direttrice.

793. La direttrice AG essendo data di posizione, col foco F, e col vertice S, per trovare quanti punti si vuole della sezione, ed in conseguenza per descrivere la curva, bisogna dal vertice S inalzare perpendicolarmente all'asse una retta SB = SF, tirar la retta indefinita ABD, e menate tante rette PD, FD, PD &c. quante perpendicolari si vorranno all'asse, e se si vuole tante di quà quante di là del vertice S, bisogna segnare su ciascuna di queste rette, sempre ch'è possibile, un punto M tale, che ciascuna FM = PD; bisogna prender dall'altra parte dell'asse sul prolungamento di ciascuna PD un punto m, tale che sia P M = P m, e far passar una curva per tutti i punti M, M, m, m, la quale farà la sezione determinata. Perchè se da uno di questi punti si abbassa sulla direttrice la perpendicolare MG, a causa de' triangoli simili ASB, APD, si ha DP o FM: PA o MG :: SB o SF: SA.

E perchè i punti m, m, son posti sulle stesse rette, e nelle stesse distanze dall'asse, come i punti M, M; quel che si dirà del ramo SMM, deve intenderli anche del ramo Smm, che gli è uguale e simile, e che ha per conseguenza tutte le stesse proprietà. Da questa costruzione si deducon facilmente le proprietà seguenti.

794. I. Nella parabola l'angolo SAB è di 45 gradi, nell'Elissi è più piccolo, e nell'iperbole è più grande.

795. II. Sarà sempre possibile determinare sulle PD i punti M della curva, finchè le FP faran minori delle PD; perchè le PD devono (793) esser uguali alle FM, le quali devon esser le ipotenuse de' triangoli ret.

tangoli FPM, e per conseguenza maggiori de' lati FP. Donde si vede, che se una retta FP fosse uguale alla retta PD corrispondente, il punto M caderebbe sul punto P ch'è nell'asse, e che se le FP, son maggiori delle loro PD, è impossibile determinar i punti M. Ciò posto ...

Nell'Elissi (fig. 88) le rette AP crescono più rapidamente che le loro PD, a causa che AS è maggiore di SB (793); dunque le rette FP che son al di là del foco F riguardo al vertice S, devon ben presto uguagliare, poi sorpassare le loro corrispondenti DP. Sia $FP^{III} = P^{III} D^{III}$, allora il punto M^{III} cade sull'asse, e vi chiude la curva. Perchè se si prendesse una PD al di là di $P^{III} D^{III}$, o anche tra A e SB, ella farebbe ormai troppo corta per potervi segnare un punto M tale che $FM = PD$. Dunque l'Elissi è una curva, di cui i rami SMM, Smm vanno da principio scostandosi da una parte e l'altra dell'asse, poi si accostano, e si raggiungon in s, così che il suo asse principale è terminato in questo punto, che divien un altro vertice dell'Elissi.

796. Nell'Iperbole (fig. 89) a causa di AS più piccolo di SB, le rette AP crescon meno delle loro corrispondenti PD; onde veruna FP presa al di là di F rapporto alla direttrice, non può divenir uguale alla sua PD, cosicchè i rami SMM, Smm dell'Iperbole si allontanan all'infinito da una parte e l'altra dell'asse SP. Se avendo prolungato BA verso H, si prendono delle FP di là della direttrice, elle son da principio più grandi delle loro PD; ma siccome queste PD crescono più rapidamente delle loro FP, si giungerà presto ad averne una come $FP^{III} = P^{III} D^{III}$, indi si avranno delle FP minori delle loro PD. Or a causa di $FP^{III} = P^{III} D^{III}$, il punto P appartiene all'Iperbole, poichè allora i triangoli rettangoli simili $D^{III} P^{III} A$, ASB danno questa proporzione $P^{III} A : P^{III} F$, o $P^{III} D^{III} :: AS : SB$. E a causa che le PD che son al di là di $P^{III} D^{III}$ crescon sempre, e divengono vieppiù grandi riguardo alle loro FP, si posson
fe.

segnarvi i punti M , tali che le FM sien uguali a queste PD : il che form^a da una parte e l'altra dell'asse due nuovi rami Iperbolici infiniti, che appartengon al foco F , e alla direttrice AG , e la retta SP^{III} , o Ss divien un asse comune e determinato di lunghezza tra i vertici S , s di queste due Iperboli opposte.

797. Nella Parabola (fig. 90) a causa di $AS=SB$, e per conseguenza di $AP=PD$, le FP prese di qua del punto S rapporto alla direttrice, son necessariamente più lunghe delle loro PD , e le FP che sono al di là, son sempre più corte. Dunque si può aver un'infinità di punti M sopra tante PD , che son al di là del vertice S : E la Parabola è una curva composta solamente di due rami uguali, che hanno un corso infinito allontanandosi sempre più dall'asse. E' facile il metodo meccanico di descriver la Parabola per mezzo del moto continuo.

Si collochi sopra un piano (fig. 92) la riga BC , ed una squadra GDO in maniera che uno de' suoi lati possa scorrere liberamente sulla riga. Si prenda poscia un filo ugual al lato DO della squadra, ed uno de' suoi capi si fissi in O , cioè al fine del lato DO di essa squadra; e l'altro capo del filo si fissi in qualche punto immobile F del piano, su cui si vuol descrivere la parabola. Ciò posto, si faccia scorrer il lato DG della squadra lungo la riga, tenendo sempre una porzione del filo fermamente unito alla squadra per mezzo d'uno stile M . La curva AMX descritta nel suo movimento dallo stile, sarà un ramo della Parabola. Si faccia poi lo stesso dall'altra parte, e si avrà l'altro ramo. In fatti essendo la lunghezza del filo $= DO$, è chiaro che la distanza del punto immobile F da qualunque punto M della curva, cioè la porzione del filo che si è sviluppata dalla squadra, sarà $= MD = AP + AE = AP + AF$. Sarà dunque il punto F il foco, e la curva descritta una Parabola, che avrà il Parametro $= 4AF$.

798. III. Data (fig. 88, 89, 90) la direttrice AG , il foco F , e il vertice S d'una sezione conica, per
la.

sapere s' ella deve aver un asse determinato, e per conseguenza un altro vertice s : conviene pel foco F far passare una retta indefinita FH , che faccia coll' asse un angolo di 45 gradi; e dal punto H , ove ella incontra la retta AB (prolungata se bisogna) abbassare sull'asse la perpendicolare Hs , che terminerà l' asse in s , e darà l'altro vertice della sezione. Perchè allora il triangolo rettangolo FsH è isoscele; dunque $Fs = sH$, e si ha $sA : sH$ o $sF :: SA : SB$ o SF . Dunque il punto s è un punto della curva, che è nel suo asse; dunque è il vertice della sezione.

799. Donde si vede che l' *Elissi*, e l' *Iperbole* han sempre un asse Ss determinato di grandezza. Quest' asse termina nell' *Elissi* al di là del foco F rapporto alla sommità S , perchè l'angolo SAB è minore di 45 gradi (794). E nell' *Iperbole* termina all' opposto, perchè l'angolo SAB è maggiore di 45°. Ma nella *Parabola* l' asse è infinito, perchè FH è parallela a AB , nè può rincontrarla che ad una distanza infinita da una parte o l' altra verso A , o verso D .

800. IV. Se sul prolungamento dell' asse Ss si prende $sa = SA$ (fig. 88. 89.), e se su quello li P^{111} D^{111} si prende $sb = SB$, la retta indefinita ad sarà parallela a ABD a causa degli angoli alterni uguali SAB , sab ; e le parallele Dd , Dd &c. saranno tutte uguali all' asse principale Ss . Perchè nell' *Elissi* (fig. 88.) l' asse $Ss = sF + FS = sH + sb = bH$; e nell' *Iperbole* (fig. 89.) l' asse $Ss = sF - FS = sH - sb = bH$. Or tutte le dD son uguali a bH .

801. Si può dir anche che prendendo due PD ugualmente lontane dai vertici S, s , si ha $Ss = PD + Pd$.

Cioè nell' *Elissi* l' asse principale Ss è ugual alla somma delle due PD , che son ugualmente lontane dalle due sommità S, s ; perchè le PD che sono tra SB , sH , e ad ugual distanza, son in proporzion aritmetica. E nell' *Iperbole* l' asse principale Ss è uguale alla differenza delle due PD , che son ad ugual distanza dai vertici S, s .

802. V. Donde siegue, che le *Ordinate* ugualmente lontane dai *Vertici* S, s , son uguali, a causa de' triangoli rettangoli aPm , APM , che son allora uguali, avendo gli angoli uguali in A, a , e i lati AP, aP anche uguali.

803. VI. Siegue ancora che se si tira ay parallela a AG , e se si prende su Ss un punto f , tale che $sf = SF$, l'Elissi, e l'Iperbole avran potuto esser descritte per mezzo del punto f , come foco, e della direttrice ay , nella stessa maniera come lo sono state per il foco F , e per la direttrice AG .

804. VII. Siegue di più, che $Ss = FM + fM$ (il segno $+$ è per l'Elissi, e il $-$ per l'Iperbole)? Perchè ciascuna $FM = PD$, e ciascuna $Mf = PD$, la quale è tanto lontana dal vertice S , quanto la PD fu cui il punto M è posto, è lontana dal vertice s . Or in questo caso (801) $PD + PD = Ss$; dunque $MF + Mf = Ss$.

805. VIII. Si può dunque dire, l'Elissi è una curva di cui la somma delle due distanze di ciascuno de' suoi punti da due punti fissi, è sempre costante, o uguale al suo asse principale. E l'Iperbole è una curva di cui la differenza delle due distanze di ciascuno de' suoi punti da due punti fissi è costante, o uguale al suo asse principale.

806. Quindi si trae una maniera semplicissima da descriver una grand' Elissi sul terreno. Si piantano due picche Ff (fig. 88) nel luogo ove devon esser i due fochi; vi si avvolga una corda $FfMF$, di cui i due capi sien uniti; si faccia girar intorno a queste picche un punto M , che tenga sempre la corda tesa: questo punto delinea un' Elissi. Poichè sia il punto in S ; allora è chiaro che la corda $= 2Ff + 2SF$, o $= 2Ff + SF + sf = Ss + Ff$. Or per tutto il movimento la parte Ff della corda non misura che la distanza de' fochi, dunque il resto che è $= Ss$, misura la distanza di ciascun punto della traccia da ciascuno de' due fochi; Dunque ciascun punto è in una Elissi.

807. IX. Da quel che si è detto (802) siegue ancora che si ha $Ss : Ff :: SA : SB$. Perchè $SA : SF :: SA : SB$. Dunque $SA + SA$ o $Ss : SF + SB$ o $Ff :: SA : SB$ (il segno $-$ è per l' Elissi, e $+$ per l' Iperbole).

808. X. Siegue ancora che le doppie ordinate mM dell' Elissi (fig. 88) vanno crescendo da ciascun vertice S, s , fin a quella ch'è nel mezzo fra l' asse, la quale è per conseguenza la più grande di tutte, e misura la maggior larghezza dell' Elissi (come Ss ne misura la lunghezza) : perciò ella si chiama il *piccolo asse*, o il *secondo asse* dell' Elissi, il quale qui è la retta $m''CM''$; il punto C ove ella incontra il grand' asse Ss , si chiama il *centro* dell' Elissi. Donde facilmente si vede :

1°. Che il piccolo asse taglia in due ugualmente tutto lo spazio racchiuso nell' Elissi, come fa anche il grand' asse; e così l' Elissi resta per mezzo de' suoi due assi divisa in 4 parti uguali.

2°. Che dato il grand' asse Ss , e i due fochi F, f , per determinar il piccolo asse, convien tagliare Ss in due ugualmente per una perpendicolare $d''D''$, e terminarla da una parte e l'altra in m'' e M'' , tirando vi da uno de' due fochi una retta come FM'' ugual alla metà del grand' asse. Perchè allora $M''F = M''f$, a causa de' triangoli rettangoli uguali FCM'' , fCM'' , e si ha $M''F + M''f = Ss$.

3°. Reciprocamente essendo dati i due assi, per trovar i fochi bisogna dall' estremità del piccol asse tirare da una parte e l'altra sul grand' asse una retta ugual alla metà del grand' asse.

809. Nell' Iperbole (fig. 89.) le doppie ordinate vanno anche crescendo da ciascun vertice S, s all' infinito: e per conservar l' analogia tra l' Elissi e l' Iperbole, si chiama centro dell' Iperbole il punto C che è nel mezzo tra i vertici S, s ; l' asse Ss si chiama il *primo asse*, *asse principale*, *asse traverso*; e si chiama *secondo asse*, *asse retto* la retta CL perpendicola-

Te al primo asse, e terminata in L, l , tirandovi da uno de' vertici $S, o s$ una retta SL ugual alla metà FG dell'intervallo Ef de' fochi. Donde si vede facilmente quel che convien fare per determinar i due fochi, lorchè si hanno i due assi.

810. La doppia ordinata che passa pel foco d'una sezione conica si chiama il *Parametro* dell' asse principale di questa sezione.

811. Dalla costruzione generale delle Sezioni Coniche siegue ancora, che tutte quelle della stessa specie, per esempio, tutte le Ellissi che saranno costruite in maniera che le distanze AS da' loro vertici alle loro direttrici sieno proporzionali alle distanze SF da questi stessi vertici al foco più vicino, tutte queste sezioni, dico, saranno figure simili. Perchè allora tutte le AP , le PD o le FM d'una sezione saranno proporzionali alle AP , alle PD , o alle FM omologhe nell'altra, e per conseguenza tutte le dimensioni omologhe di queste due sezioni saran proporzionali; il che le renderà figure simili.

812. Corol. I. *Due Ellissi, o due Iperbole sono simili, lorchè gli assi dell' una son proporzionali agli assi dell'altra, o quando le distanze dai vertici son proporzionali agli intervalli de' fochi.*

813. Corol. II. *Tutte le Parabole son figure simili; poichè si ha sempre $AS = SF$ (fig. 90).*

314. Probl. I. *Far passar una tangente per un punto M dato sopra una Sezione Conica.*

Sol. Per i due fochi F, f d'una sezione (fig. 95 e 96) e pel punto dato M si facciano passare due rette indefinite fM, FM . Si tiri una retta TM che divida in due ugualmente l'angolo FMm in cui la curva si trova compresa: questa retta sarà la tangente cercata.

Dim. Dal punto M come centro col raggio FM descrivasi l'arco Fm che misura l'angolo FMm . E' chiaro che $fm = Ss$, poichè $fm = Mf + MF$. Or se da un punto qualunque A preso su TM tutto altro

che

che il punto M, si tira Af , AF , Am , si avrà (405) $AF = Am$; dunque $Af + AF = Af + Am$. Or nell'Elissi (fig. 95) $Af + Am$ eccede fm ; il che fa vedere che il punto A è fuori della curva (804). E nell'Iperbole (fig. 96) se si avesse $Af - Am = fm$, il che è necessario (804) affinchè il punto A appartenga all'Iperbole, si avrebbe $Af = Am + fm$, il che è impossibile. Dunque non vi è che il punto M della retta FM che sia nella sezione.

815. Osserv. Si può applicar la soluzione precedente alla Parabola, facendo passar per il punto dato M (fig. 97) una retta MF, e una retta Mm parallela all'asse, e per conseguenza stimata parte dell'altro fuoco, che è a una distanza infinita dal fuoco F, e dividendo in due ugualmente l'angolo FMm.

816. Corol. I. L'angolo bMf al punto del contatto (fig. 95, 97) tra la tangente Mb, e una retta Mf diretta a uno de' fochi, è sempre ugual all'angolo FMT tra la stessa tangente, e la retta MF tirata all'altro fuoco. Nell'Iperbole (fig. 96) $bMf = bMF$; il che ritorna sempre alla stessa espressione. Perchè l'angolo KMm $= bMf$ per esser opposti al vertice; ma l'angolo KMm $= FMT$; dunque $FMT = bMf$.

817. Corol. II. La corda FM è sempre divisa perpendicolarmente dalla tangente in due parti uguali KF, Km.

818. Osserv. In tutto questo Trattato si chiameranno *Ascisse* d'un ordinata a un asse, o in generale a un diametro, la distanza da ciascuna estremità di questo diametro al punto, ove l'ordinata incontra questo diametro o il suo prolungamento. Così l'Elissi, il Circolo, l'Iperbole, han sempre due ascisse per ciascuna ordinata. Ma siccome non posson disegnarsi per x queste due differenti ascisse, si disegnerà per x , e si chiamerà *Ascissa* una parte del diametro compresa tra l'ordinata e un punto determinato su questo diametro, il qual punto si chiamerà l'origine delle *Ascisse*.

319. Probl. II. Determinar l'equazione che racchiude il rapporto tralle funzioni delle ordinate, e quella delle loro ascisse, contando le ascisse da un vertice.

Sol. Sia nell'Elissi (fig. 95) $Ss = 2a$, $Ll = 2b$, SF o $sf = c$, $SP = x$, $PM = y$; dunque $Ps = 2a - x$, $PG = a - x$, $PF = x - c$, $CF = a - c$, $Ff = 2a - 2c$, e $Pf = 2a - c - x$.

Nel triangolo rettangolo F/G si ha (527) $Fl^2 = FG^2 + lG^2$, o $aa = aa - 2ac + cc + bb$; donde si trae $cc = 2ac - bb$. Giò posto, nel triangolo FMf si ha (735) $fM + MF (2a) : Ff (2a - 2c) :: fP - PF (2a - 2x) : fM - MF = 2a - 2x -$

$\frac{2cx}{a}$. Dunque $MF = a - a + x + c - \frac{cx}{a}$

$= x + c - \frac{cx}{a}$. Or nel triangolo rettangolo PMF

si ha $PM^2 = FM^2 - PF^2$, o $yy = xx + 2cx + cc - \frac{2cxx}{a} - \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa} - xx + 2cx - cc$, e

riducendo $yy = 4cx - \frac{2cxx}{a} - \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$; e

mettendo $2ac - bb$ invece di cc , si avrà $yy = 4cx - \frac{2cxx}{a} - \frac{4acx}{a} + \frac{2bbx}{a} + \frac{2acxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa}$. Ma $\frac{2acxx}{aa} = \frac{2cxx}{a}$

$\frac{2cxx}{aa} = \frac{2cxx}{a}$; dunque $yy = 4cx - \frac{2cxx}{a} - \frac{4acx}{a} + \frac{2bbx}{a} + \frac{2cxx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$

$\frac{2cxx}{a} - \frac{4acx}{a} + \frac{2bbx}{a} + \frac{2cxx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$; dunque togliendo

le quantità che si distruggono, sarà $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$

bbxx

— Questa è l'equazione che racchiude il rapporto
 aa
 fra le funzioni delle ordinate e quelle delle loro ascisse prese da un vertice.

Nell'Iperbole (fig. 96) facendo similmente $Ss = 2a$, $Ll = 2b$, SF o $sf = c$, $SP = x$, e $PM = y$; si ha $Ps = 2a + x$, $PC = a + x$, $PF = x - c$, $Pf = x + 2a + c$, CF o $Sf = a + c$ (809). E nel triangolo rettangolo SCl , si ha $Sl^2 = Cl^2 + SC^2$, o $aa + 2ac + cc = bb + aa$. Dunque $cc = bb - 2ac$. Avendo poi supposta una retta $M^p = MF$, e tirata da M dall'altra parte dell'ordinata MP , si avrà $P^o = PF$; nel triangolo ϕMF si ha $Mf = M^p$ o $fM = FM(2a) : f^o(2a + 2x) :: Tf = T^o$

$$(2a + 2c) : FM + fM = 2a + 2c + 2x + \frac{2cx}{a}$$

$$\text{Dunque } FMc + x + \frac{cx}{a} = a. \text{ Dunque essendo } PM^2 = FM^2 - PF^2, \text{ ed essendo } PM = y, FM =$$

$$c + x - \frac{cx}{a}, PF = x - c; \text{ sarà } y^2 = cc + 2cx + xx -$$

$$+ \frac{2ccx}{a} + \frac{2cxc}{a} + \frac{ccxx}{aa} - cc + 2cx - xx =$$

$$4cx + \frac{2ccx}{a} + \frac{2cxc}{a} + \frac{ccxx}{aa}. \text{ Ma } cc = bb - 2ac;$$

$$\text{dunque } yy = 4cx + \frac{2bbx}{a} - \frac{4acx}{a} + \frac{2cxc}{a} +$$

$$\frac{bbxx}{aa} - \frac{2acxx}{aa} = 4cx + \frac{2bbx}{a} - 4cx + \frac{2cxc}{a} -$$

$$+ \frac{bbxx}{aa} - \frac{2cxc}{a}. \text{ Dunque togliendo le quantità}$$

che

che si distruggono, si avrà $yy = \frac{2bbx}{a} + \frac{bbxx}{aa}$ per l'equazione agli assi dell'Iperbole.

§20. II. I calcoli dell'Elissi, e dell'Iperbole si fanno nella stessa maniera, ed i loro risultati non differiscono ordinariamente che ne' segni; perciò lorchè si faranno in appresso de' calcoli che saran comuni alle due sezioni, e che avran solamente alcuni termini preceduti da $+$ o da $-$, il segno superiore sarà sempre per l'Elissi, e l'inferiore per l'Iperbole. Così le due equazioni precedenti si riducon a questa $yy = \frac{2bbx}{a} + \frac{bbxx}{aa}$.

§21. Nella Parabola, ove $a = \infty$, l'espressione $yy = \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$ si riduce a $yy = 4cx$. Questa è dunque l'equazione della Parabola.

§22. Coroll. Poichè $cc = +2ac + bb$, si ha $bb = 2ac + cc = c \times (2a + c) = SF \times Fs$, siegue che la metà del secondo asse è media proporzionale tra le distanze d'un foco dai due vertici.

§23. Probl. III. Trovar l'espressione del parametro dell'asse principale d'una Sezione Conica.

Sol. Se nell'espressione $yy + 4cx + \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$, si fa $x = c$, si avrà $yy = 4cc + \frac{4c^2}{a} + \frac{c^4}{aa}$; estraendo le radici, $y = 2c + \frac{cc}{a}$; questo è il valore della ordinata che passa pel foco F; il suo doppio è (§10) il valore del parametro p ; si ha dunque $p = 4c + \frac{2cc}{a}$.

824. Corol. I. Nella Parabola, a causa di $a = \infty$, si ha $p = 4c$.

825. Coroll. II. Il parametro dell'asse principale d'una sezione Conica è quadruplo della distanza del vertice al foco nella Parabola; più del quadruplo nell'Iperbole, e meno del quadruplo nell'Elissi.

826. Coroll. III. Se nell'equazione $p = 4c + \frac{2cc}{a}$ si sostituisce a c il suo valore $+\frac{2ac}{2a} + \frac{bb}{4bb}$, si avrà $p = \frac{2a}{2a}$; il che dà questa proporzione $2a : 2b :: 2b : p$.

Vale a dire, il parametro dell'asse principale è una terza proporzionale a quest'asse, e al secondo asse.

827. Probl. IV. Trovar un'equazione che contenga il rapporto del parametro dell'asse principale alle funzioni delle ascisse e delle ordinate d'una sezione conica.

Sol. Poichè $p = \frac{2bb}{a}$, dunque $\frac{1}{2}ap = bb$; dunque sostituendo nell'equazione generale $yy = \frac{2bbx}{a} + \frac{bbxx}{2a}$, si avrà $yy = px + \frac{pxx}{2a}$.

828. Corol. I. Nella Parabola a causa di $a = \infty$, si ha $yy = px$, e questa è l'equazione della parabola, la stessa che la precedente (821).

829. Corol. II. L'equazione generale $yy = px + \frac{pxx}{2a}$, o $2a yy = 2apx + pxx$, si riduce a questa proporzione $yy : 2ax + xx :: p : 2a$. Or $2ax + xx = (2a + x) \times x = PS \times PS$. Dunque in generale, i quadrati delle ordinate all'asse principale delle Elissi e delle Iperbole sono ai prodotti delle ascisse corrispondenti, come il parametro è all'asse principale. E perchè il rapporto del parametro al suo asse è costante in una stessa

stella lezione conica, si può di e in generale, che i quadrati delle ordinate son tra loro come i prodotti delle loro ascisse.

Mettendo anche in proporzione l'equazione degli assi $yy = \frac{bbx}{a} + \frac{bbxx}{aa}$, si ha $yy : 2ax + xx :: bb : aa$,

vale a dire, nell'Elissi, e nell'Iperbole i quadrati delle ordinate all'asse principale son ai prodotti delle loro ascisse, come il quadrato del secondo semi-asse è al quadrato del semi-asse principale.

§30. Coroll. III. Nella Parabola a causa del parametro costante p , il rapporto di yy a x è costante. Dunque nella parabola i quadrati delle ordinate son fra loro come le ascisse.

Essendo un'ordinata y , e la sua ascissa x , ed una seconda ordinata Y e la sua ascissa X , e p il parametro della Parabola, sarà $yy = px$, e $YY = pX$ (§28); dunque $yy : YY :: px : pX$; ma p è una quantità costante, dunque $yy : YY :: x : X$. Dunque nella parabola i quadrati delle ordinate son tra loro come le ascisse corrispondenti.

E poichè $yy = px$, siegue che crescendo x , deve crescer y , o p deve diminuire; ma p essendo costante non può diminuire, dunque crescendo x deve crescer anche y . Ma anche nella Parabola l'ascissa cresce all'infinito, perchè l'asse $= \infty$; dunque anche le ordinate posson crescer all'infinito; dunque la Parabola anderà sempre crescendo senza chiudersi mai.

§31. Probl. V. Trovar l'espressione della superpendicolare, o sunnormale PN. (fig. 95, 96).

Sol. Fm essendo (§17) perpendicolare a MT, è parallela alla normale MN, e i triangoli fMN,

fMF sono simili. Dunque $fm(2a) : fF(2a + 2c) ::$
 $\frac{cx}{a} : \frac{cc + 2cx}{a}$
 Mm o $FM(x + c + \frac{cx}{a}) : FN = x + c + \frac{cc + 2cx}{a}$
 $\frac{ccx}{2a}$. Or $PN = FN - FP$, e $FP = x - c$; dunque
 $\frac{2a}{2} \quad \quad \quad \frac{Z}{2} \quad \quad \quad \frac{PN}{2}$

$$PN = 2c + \frac{cc}{a} + \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}. \text{ Sostituendo } + 2ac +$$

$\frac{1}{2} ap$ in luogo di cc (823), e riducendo, $PN = \frac{1}{2} p$

$-\frac{px}{2bb}$. E se si mette $\frac{bb}{a}$ in luogo di p (826) si

avrà $PN = -\frac{bb}{a} + \frac{bbx}{aa}$.

832. Corol. I. Nella Parabola la funnormale è la metà del parametro, e per conseguenza sempre costante, a causa di $a = \infty$; il che fa $PN \frac{1}{2} p = FA$ (fig. 97).

833. Corol. II. In una Sezione Conica la funnormale è riguardo al semi-parametro dell'asse principale, uguale nella Parabola: più piccola nell'Elissi; più grande nell'iperbole.

834. Probl. VI. Trovar l'espressione della sottangente PT.

Sol. Nel triangolo rettangolo NMT si ha (526) $\frac{PM^2}{PN} =$

$\frac{PN \cdot PM \cdot PT}{PN}$. Dunque $PT = \frac{PM^2}{PN}$; dunque

$$px = \frac{pxx}{2a} = \frac{2apx - pxx}{2a}.$$

$$\frac{1}{2} p = \frac{px}{2a} = \frac{2ap - 2px}{4a}.$$

$$\frac{2apx - pxx}{2a} \text{ diviso per } \frac{2ap - 2px}{4a} = \frac{8a^2px - 4apxx}{4a^2p - 4apx} =$$

$$\frac{8apx - 4p^2x}{4ap - 4px}.$$

Dividendo per $4p$ il numeratore e il denominatore di quest'ultima frazione, si avrà $\frac{2ax - xx}{a - x}$. Dunque

nell'Elissi la sottangente $PT = \frac{2ax - xx}{a - x}$.

Con

Con un calcolo simile si avrà per l'Iperbole la (or-
tangente $PT = \frac{2ax + xx}{a+x}$. Onde l'equazione comune

all'Elissi, e all'Iperbole sarà $PT = \frac{2ax + xx}{a+x}$.

835. Corol. I. Nella Parabola $PT = \frac{a+x}{2x}$, perchè ef-
fendo $a = \infty$, si ha $PT = \frac{2\infty x + xx}{\infty + x} = \frac{2\infty x}{\infty} = 2x$.

836. Corol. II. In una Sezione Conica la sottan-
gente è riguardo al doppio dell'ascissa, uguale nella
Parabola, più grande nell'Elissi, più piccola nell'I-
perbole. Perchè mettendo la formola in proporzione,
si ha per l'Elissi $PT : 2a - x :: x : a - x$, e multipli-
cando la seconda ragione per 2, si ha $PT : 2a - x ::$
 $2x : 2a - 2x$; or $2a - x$ è più grande di $2a - 2x$; dun-
que PT è più grande di $2x$. E nell'Iperbole $PT : 2a$
 $+ x :: 2x : 2a + 2x$; or $2a + x$ è minore di $2a + 2x$,
dunque PT è minore di $2x$.

837. Corol. III. $PT - SP = ST$, dunque $ST = \frac{2x}{a+x}$,
e nella Parabola $ST = x$. Si vede dunque che ST ri-
guardo all'ascissa è uguale nella Parabola, più gran-
de nell'Elissi, più piccola nell'Iperbole.

838. Osservaz. La Parabola e l'Iperbole avendo due
tami infiniti, x può divenire $= \infty$; or nella Parabola
a causa di $ST = x$, ST diverrebbe anche infinita.
Ma nell'Iperbole facendo $x = \infty$ nell'equazione $ST =$
 $\frac{2x}{a+x}$, ella si riduce a $ST = a$; il che fa vedere. 1.
 $\frac{2x}{a+x}$

Che il punto di rincontro T di tutte le tangenti pos-
sibili dell'Iperbole col suo asse principale, è sempre
Z 3 com-

compreso tra il vertice e il centro. 2.^a Che pel centro dell'Iperbole si può menare da ciascun lato dell'asse una retta che vada a toccare ciascun ramo alla sua estremità infinita. Queste due tangenti si chiaman gli *Asintoti* dell'Iperbole.

§39. Corol. IV. $CP + PT = CT$. Dunque $CT =$

$\frac{aa}{a+x}$; il che essendo posto in proporzione, dà $a+x:$

$a+x:$

$a::a:CT$. Dunque CP, CS, CT son in proporzione continua, e per questa proporzione si trova facilmente il punto T sull'asse principale, per ove deve passar una tangente che si propone di menare da un punto dato M .

§40. Probl. VII. Trovar l'espressione della perpendicolare SB (fig. 95, 96) all'asse principale della sezione conica, elevata dal vertice S fin alla tangente TM .

Sol. I triangoli TPM, TSB essendo simili, si ha TP

$\frac{(2ax+xx)}{(a+x)} : TS = \frac{(ax)}{(a+x)} :: PM : SB$; o a causa dello

stesso denominatore $a+x$, si ha $2ax+xx:ax::PM:SB$, o finalmente $2a+x::a::PM:SB$. Elevando al quadrato, e mettendo per PM^2 il suo valore (§21) si

ha $4aa+4ax+xx:aa::\frac{2abbx+bbxx}{aa}:SB^2$. Dun-

que $SB^2 = \frac{2abbx+bbxx}{4aa+4ax+xx}$, ovvero mettendo $\frac{1}{2}p$ in

luogo di bb (§29), si avrà $SB^2 = \frac{aapx+\frac{1}{2}apxx}{4aa+4ax+xx}$.

841. Corol. I. Nella Parabola $SB = \frac{1}{2} PM \frac{1}{2} p$; per-
 $\infty^2 px$
 chè $a = \infty$, dunque $SB^2 = \frac{1}{4} px = \frac{1}{4} p^2$;
 $4 \infty^2$
 dunque $SB = \frac{1}{2} p$.

842. Coroll. II. Nell'Iperbole facendo $x = \infty$, la pri-
 $bb \infty^2$
 ma formola di SB^2 si riduce a $SB^2 = \frac{1}{4} bb$.

Dunque $SB = b$. Dunque facendo $SB, S\beta$ (fig. 93)
 uguali alla metà del secondo asse, e facendo passare
 pel centro C le rette $\epsilon\beta, bB$, elle faranno gli Asin-
 toti dell'Iperbole MSm, OSo .

843. Probl. VIII. Trovar l'espressione della norma-
 le NM .

Sol. Nel triangolo rettangolo NPM , si ha da NM^2
 $= PM^2 + PN^2$. Dunque $NM^2 =$

$2a^2bbx + 2abbxx + 2ab^2 + 2ab^2x + b^2xx$
 a^4
 e facendovi entrar
 il parametro. $NM^2 =$

$4a^2px + 2apxx + 2appx + 2appx + ppxx$.

844. Corol. I. Nella Parabola, dove $a = \infty$, si ha
 $NM^2 = px + \frac{1}{4} pp$.

845. Corol. II. Se si fa $x = 0$ nella seconda formo-
 la, ella si riduce a $NM^2 = \frac{1}{4} pp$; dunque $NM =$
 $\frac{1}{2} p$. E se si fa $x = a$ nella prima, si avrà per l'
 Ellissi $NM = b$. Il che fa vedere:

1.° Che in ogni Sezione Conica la normale è almen
 uguale alla metà del parametro, o all'ordinata che
 passa pel foco. Poichè se si prende il punto M sì
 presso al vertice S , che l'ascissa corrispondente all'or-
 dinata MP sia infinitamente piccola o nulla, la normale
 $= \frac{1}{2} p$.

2.° Che nell'Ellissi la normale non può eccedere la
 metà del piccol asse.

846. Probl. IX. Trovar l'espressione di SN, cioè della distanza del vertice S dal rincontro della normale MN.

$$\text{Sol. } SN = SP + PN = \frac{abb + bbx + aax}{2a} = \frac{ap + px + aax}{2a};$$

e nella Parabola $SN = \frac{1}{2}p + x$.

847. Corol. Se si fa $x = 0$, si ha $SN = \frac{1}{2}p$; e perchè le quantità a e p son additive e costanti nelle formole della Parabola e dell'Iperbole, è chiaro che quanto più grande sarà x , più sarà grande SN in queste due sezioni. Donde si vede che la normale cade al di là del foco riguardo al vertice, e giammai tra il vertice e il foco più vicino.

848. Probl. X. Trovar l'espressione della tangente TM.

$$\text{Sol. } PM^2 + PT^2 = TM^2, \text{ dunque } TM^2 = \frac{2abbx + bbx}{2a} + \frac{4aaxx + 4ax^2 + x^4}{4a^2 + 2ax + xx}.$$

Ovvero $TM^2 = \frac{pxx}{2a} + \frac{4aaxx + 4ax^2 + x^4}{4a^2 + 2ax + xx}$. E nella Parabola $TM^2 = px + 4xx = 4AS \times SP + 4SP^2$.

849. Probl. XI. Trovar un'equazione agli assi dell'Elissi, e dell'Iperbole contando le ascisse dal centro (fig. 95 e 96).

Sol. Ritenendo le stesse denominazioni de' problemi precedenti, all'infuori di $CP = x$, il che fa l'ascissa $SP = \pm a + x$, e $SP = a + x$, si ha (829) $yy : \pm aa + xx :: bb : aa :: p : 2a$. Dunque l'equazione agli

$$\text{assi è } yy = \pm \frac{bb}{a}x + \frac{bbx^2}{aa}.$$

E l'equazione al parametro, $yy = \pm \frac{p}{2a}x + \frac{pxx}{2a}$.

850. Coroll. I. Per l'Elissi, L'Ordinata MH al piccolo

col asse dell'Elissi (fig. 95) essendo $\text{CP} = x$, e
 $\text{CH} = \text{PM} = y$, si hanno le ascisse $\text{LH} = b - y$, e
 $\text{HI} = b + y$; dunque $\text{LH} \times \text{HI} = bb - yy$. Or l'

equazione $yy = \frac{bb - \frac{bbxx}{aa}}{aa}$ si riduce a questa propor-

zione $xx : bb - yy :: aa : bb$. Dunque i quadrati delle
 ordinate al piccol asse di una Elissi son ai prodotti
 delle loro ascisse, come il quadrato del grand' asse al
 quadrato del piccolo. E per conseguenza se si fa $\frac{2aa}{2aa}$

$2b. 2a. q$, o se si fa $q = \frac{2aa}{b}$ (q è il parametro

di piccol asse) sostituendo nella proporzione, si avrà
 $xx : bb - yy :: q : 2b$; cioè i quadrati delle ordinate
 al piccol asse son ai prodotti delle loro ascisse, come
 il parametro del piccolo asse è al piccolo asse. E in
 generale, i quadrati delle ordinate al piccol asse son
 fra loro, come i prodotti delle loro ascisse.

851. Corol. II. Le ordinate al piccol asse dell'Elissi
 han precisamente le stesse proprietà che quelle del
 grand' asse.

852. Coroll. III. Se si descrive un circolo SNQ
 (fig. 100) di cui il diametro Ss sia il grande o il
 piccol asse d'una Elissi, e se vi si tirano NP, np or-
 dinate a questo diametro, i loro quadrati son fra loro
 (777) come i prodotti delle loro ascisse SPXSP ,
 sPxps . Or i quadrati di MP, mp sono nello stesso
 rapporto, dunque i quadrati delle ordinate ai circoli
 son come i quadrati delle ordinate corrispondenti all'
 Elissi, e per conseguenza le ordinate al circolo son
 fra loro come le ordinate all'Elissi, o son fra loro
 come OC o CS a LC , vale a dire, come l'asse su cui
 il circolo è stato descritto è all'altr' asse.

853. Osserv. I. Il rapporto delle ordinate al secon-
 do asse dell'Iperbole non può esser ridotto alla stessa
 proporzione: perchè se si mette in proporzione l'equa-

zione all'Iperbole $yy = \frac{bb - \frac{bbxx}{aa}}{aa}$, si ha $xx :$
 yy

$yy + bb :: aa : bb$. di cui il secondo termine $yy + bb$ (prime la somma de' quadrati di CH e di CL, (fig. 96), e non il prodotto delle ascisse HL, H', il quale a cau'a di $HL = y - b$, e di $H' = y + b$, è $yy - bb$. Ma indipendentemente da questa proporzio-

ne, si ha la formola generale $xx = aa \mp \frac{aayy}{bb}$ per l'equazione al secondo asse dell'Elissi e dell'Iperbole, contando le ascisse dal centro, e chiamando la ordinata x e l'ascissa y .

854. Osserv. II. A imitazione di questa soluzione si possono trovare delle equazioni contando le ascisse dal foco, o anche da un punto qualunque preso nell'asse.

855. Corol. IV. Calcolando su l'equazioni di questo Problema gli stessi triangoli che ne' Probl. V, VI, VII, VIII, IX, e X, si trovano formole seguenti; $PN =$

$$\frac{bbx}{aa} = \frac{px}{2a}, \quad PT = \frac{+aa - xx}{a}, \quad CT = \frac{aa}{2a}, \quad ST = \frac{+aa + ax}{2a}$$

$$\frac{+aa + ax}{x}, \quad SB^2 =$$

$$\frac{+a^4bb + 2a^3bbx + 2abbx^2 + b^2bx^3}{a^4 - 2a^2xx + x^4},$$

$$\text{ovvero } \frac{+a^4p + 2a^3px + 2aapx^2 + apx^3}{2a^4 - 4a^2xx + 2x^4}, \quad NM^2 =$$

$$\frac{+a^4bb + 2abbxx + b^2xx + 2a^3p + 2apxx + ppxx}{a^4 - 4a^2x + 4a^2a};$$

SN

$$\begin{aligned}
 &+ a' + 2ax + bbx + 2a + 2ax + px \\
 SN = & \frac{\quad}{aa} = \frac{\quad}{2a}; \\
 &a^2 - 2a'xx + 2ax^2 + aabbxx + bbx^2 \\
 MT^2 = & \frac{\quad}{2axx}, 0 \\
 &2a5 - 4a'xx + 2ax^2 + aapxx + px^2 \\
 MT^2 = & \frac{\quad}{2axx}
 \end{aligned}$$

356. Corol. V Poichè c non entra in alcuna delle formole de' Problemi precedenti, siegue che queste formole convengon anche al secondo asse dell'Elissi e dell'Iperbole, e che n'esprimono le proprietà, col far i necessarij cambiamenti nelle lettere.

357. Corol. VI. Poichè il secondo asse Ll delle Iperbole opposte MSm , Oso (fig. 93) è stato determinato tirando CF o Cf da S in L e in l ; e gli Asintoti (342) facendo SB , $S\beta$ uguali a CL o Cf ; siegue che se si prende $C\phi$, $C\phi$ uguali a LS o ls , e se si tirass, $B\beta$, elle passeranno per i punti L , l , e si avrà Lb , $L\beta$; IB , $I\beta$, uguali a CS o CS ; donde si vede che con i punti ϕ , ϕ come fochi, e Ll come asse principale, si possono descrivere due Iperboli opposte dLD , N/n , di cui Ss sarà il secondo asse, e di cui Bb , $\beta\beta$ saranno gli asintoti. Queste due Iperboli si chiamano *Conjugate* alle due MSm , Oso ; e reciprocamente queste si dicono *Conjugate* a quelle.

358. E' evidente che tutte le equazioni, formole e proprietà che convengon alle Iperboli MSm , Oso , convengon anche alle loro *Conjugate*, facendovi i cambiamenti necessarij; per esempio, chiamando Ll l'asse principale, e Ss il secondo asse &c.

359. E' chiaro ancora che gli otto rami delle quattro Iperboli conjugate devon congiungersi, senza tagliarsi, ai punti ove gli asintoti toccano le loro estremità; e in questa maniera elle formano una figura chiusa.

chiusa da quattro punti di riunione infinitamente lontani dal centro. Questa figura è un poligono simmetrico, composta d'una infinità d'angoli rientranti infinitamente ottusi e di quattro angoli infinitamente acuti; così che si può considerar lo spazio compreso tra queste quattro Iperboli, come si considera quello che è racchiuso in una Ellissi. Perciò si parlerà in appresso di questo spazio, come se fosse terminato da una sola curva.

Proprietà delle Sezioni Coniche riguardo a' loro Diametri.

860. Dicesi *Diametro* d'una Sezione Conica ogni retta che passa pel suo centro; perchè si farà vedere che la loro proprietà è di tagliar in due ugualmente le rette che divengono le loro doppie ordinate.

861. Un diametro è determinato di grandezza dai due punti, ove incontra la Sezione da una parte e l'altra; e questi punti son chiamati l'origine di questo diametro. Così OM, ND (fig. 93, 94) sono diametri determinati, de' quali le origini sono i punti O, M, e N, D.

862. Quindi siegue che il diametro di una Parabola è una retta indefinita, tirata da un punto della Parabola, il qual è la sua origine, parallelamente all'asse; poichè il centro della Parabola è infinitamente lontano del vertice; tal è Mf (fig. 97).

863. Si chiama *diametro conjugato* a un altro diametro quello ch'è parallelo alle ordinate di questo, o alla tangente che passa per la sua origine. Così (fig. 93, 94) ND è un diametro conjugato al diametro MO, perchè ND è parallela alla tangente che passa pel punto M. Reciprocamente MO dicesi diametro conjugato al diametro ND.

864. Donde si vede, che la Parabola non ha diametri conjugati.

865. Teor. I. Un diametro qualunque NC (fig. 93, 94) è diviso in due ugualmente al centro C.

Dim.

Dim. Per N si tiri NQ ordinata a uno degli assi, e facendo $CE = CQ$, s'inalzi allo stesso asse le perpendicolare ED; questa incontrerà il diametro ND in un punto D che farà nella sezione. Perchè per la costruzione i triangoli CQN, CED son uguali, dunque $CD = CN$, e $DE = NQ$. Or (302) le ordinate ugualmente lontane dal centro son uguali, dunque NQ essendo un'ordinata, la sua uguale DE anche ne è una, dunque la sua estremità D è nella sezione.

866. Teor. II. Se dalle estremità M, N di due diametri conjugati, si tirano MP, NQ ordinate all'asse principale Ss, il quadrato CQ^2 dell'ascissa compreso tra il centro C e il rincontro d'una delle ordinate, è ugual al prodotto $SP \times PS$ delle ascisse dell'altra ordinata.

Eim. Retinendo tutte le stesse denominazioni del Probl. XI., facendo di più $CQ = u$, si ha (fig. 94) $SQ = a - u$, e $SP = a + u$. Nell'Elissi si ha (329) $SP \times PS (aa - xx) : SQ \times QS (aa - uu) :: PM^2 : NQ^2$. E nell'Iperbole (353) $SP \times PS (-aa + xx) : CS^2 + CQ^2 (aa + uu) :: PM^2 : NQ^2$. Dunque $+aa + xx : aa + uu :: PM^2 : NQ^2$. Or a causa de' triangoli simili TPM, CNQ, si

$$(+aa + xx)^2$$

$$\text{ha } PM^2 : NQ^2 :: TP^2 \frac{(+aa + xx)^2}{xx} : CQ^2 (uu);$$

$$\text{dunque } uu = +a + xx, \text{ o } CQ^2 = SP \times PS.$$

867. Corol. I. Nell'Elissi niuna delle ascisse può esser al di là del vertice riguardo al centro; onde si ha sempre CE^2 o $CQ^2 = SP \times PS$, e $CP^2 = SQ \times QS$. Questa ultima uguaglianza non si trova nell'Iperbole, ove $CP^2 = CS^2 + CQ^2$, a causa di $xx = aa + uu$.

868. Coroll. II. Per l'Elissi, $aa : bb :: SQ \times QS$ o CP^2

$CP^2 (xx) : NQ^2 = \frac{bbxx}{aa}$. Or ne' triangoli rettan-

goli CPM, CNQ, si ha $CM^2 = CP^2 + PM^2$;

dunque $CM^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$, e $CN^2 =$

$CQ^2 + NQ^2$; dunque $CN^2 = aa - xx + \frac{bbxx}{aa}$.

Dunque $CM^2 + CN^2 = bb + aa$. Dunque la somma de' quadrati di due diametri conjugati qualunque d'un' Elissi, è ugal alla somma de' quadrati di due assi, e per conseguenza alla somma de' quadrati de' due altri diametri conjugati. O ch'è lo stesso, nell' Elissi la somma de' quadrati di due diametri conjugati qualunque è costante,

869. Corol. III. Per l' Iperbole, $aa : bb :: CS^2 + CQ^2$, ovvero $CP^2 (xx) : NQ^2 = \frac{bbxx}{aa}$. Or $CM^2 = CP^2 + PM^2$, dunque $CM^2 = xx - bb + \frac{bbxx}{aa}$, e $CN^2 = CQ^2 + NQ^2$. Dunque $CN^2 =$

$xx - aa + \frac{bbxx}{aa}$. Dunque $CN^2 - CM^2 = bb$

$- aa$. Dunque la differenza de' quadrati di due diametri conjugati qualunque d'un' Iperbole è costante.

870. Teor. III. Il quadrato d'una retta IH tirata nel di dentro d'una sezione conica, e ordinata a un diametro MO qualunque, è ai prodotti MH x HO delle sue ascisse, come CN^2 il quadrato del semi-diametro conjugato è al quadrato CM^2 del semidiametro, cui IH è ordinata. Ovvero $IH^2 : MH \times HO :: CN^2 : CM^2$ (fig. 24).

Dim. Si tratti prima dell' Elissi.

1.^o Tirata IG ordinata all'asse Sr o 2a, e tirate per H le perpendicolari HR, HK; e facendo GK o HR = r, CK = t, CM = d, si ha SG = r + a - t, e sG = a - r + t. In fatti SG + sG = Sr = 2a. Ma r + a - t + a - r + t = 2a. Dunque SG = r + a - t, e sG = a - r + t.

2.^o I due triangoli CPM, CHK son simili a causa dell'angolo comune G e delle parallele KH, PM; dunque CP (x): CM (d) :: CK (t): CH = $\frac{dt}{x}$; dunque

$$MH = CM - CH = d - \frac{dt}{x}; \text{ dunque } OH =$$

$$OG + CH = d + \frac{dt}{x}; \text{ dunque } MH \times OH = dd - \frac{d^2t}{x}$$

$$= \frac{ddt}{x}. \text{ Si ha ancora } CP (x): PM (y) :: CK (t):$$

$$KH \text{ o } RG = \frac{ty}{x}.$$

3.^o I triangoli TPM, HIR son simili, perchè i lati omologhi son paralleli fra loro; dunque TP:PM::

$$HR:RI. \text{ Dunque } (355) \frac{aa-xx}{rxy} : y :: r:RI.$$

$$\text{Dunque } RI = \frac{rxy}{aa-xx}.$$

$$4.^o IG^2 = RI^2 + GR^2 + (GR \times RI) + (RI \times GR). \text{ Dunque } IG^2 = \frac{rrxxyy}{(aa-xx)^2} + \frac{ttyy}{xx} +$$

$$\frac{2rtyy}{aa-xx}.$$

$$5.^o (329) sP \times SP : sG \times sG :: PM^2 : IG^2; \text{ dunque } aa - xx : 2rt + aa - rr = II :: yy : IG^2; \text{ dunque } IG^2$$

$$IG^2 = \frac{2rtyy + aayy - rryy - tty}{aa - xx} \text{. Ma } IG^2 = (n^2$$

$$4.^{\circ}) \frac{rrxxyy}{(aa - xx)^2} + \frac{2rtyy}{aa - xx} + \frac{ttyy}{xx} ; \text{ dunque}$$

$$\frac{2rtyy}{aa - xx} + \frac{aayy - rryy - ttyy}{(aa - xx)^2} = \frac{rrxxyy}{(aa - xx)^2} +$$

$$\frac{2rtyy}{aa - xx} + \frac{ttyy}{xx} \text{.}$$

$$6.^{\circ} \text{ Togliendo da una parte e l'altra } \frac{2rtyy}{aa - xx}, \text{ si avr\`a}$$

$$\frac{aayy - rryy - ttyy}{aa - xx} = \frac{rrxxyy}{(aa - xx)^2} + \frac{ttyy}{xx} \text{.}$$

$$7.^{\circ} \text{ Dividendo tutto per } yy, \text{ si avr\`a } \frac{aa - rr - tt}{aa - xx} =$$

$$\frac{rrxx}{(aa - xx)^2} + \frac{tt}{xx} \text{.}$$

$$8.^{\circ} \text{ E moltiplicando per } aa - xx, \text{ si avr\`a } aa -$$

$$rr - tt = \frac{rrxx}{aa - xx} + \frac{aatt}{xx} - \frac{ttxx}{xx}, \text{ Dunque } aa$$

$$- rr - tt = \frac{rrxx}{aa - xx} + \frac{aatt}{xx} - tt, \text{ perch\`e } - tt$$

$$= \frac{rrxx}{aa - xx} + \frac{aatt}{xx} - \frac{ttxx}{xx} \text{.}$$

$$9.^{\circ} \text{ Togliendo da una parte e l'altra } - tt, \text{ resterà}$$

$$aa - rr = \frac{rrxx}{aa - xx} + \frac{aatt}{xx} = \frac{rrxx}{aa - xx} + rr ;$$

$$\text{dunque } aaxx - aatt = \frac{rrx^4}{aa - xx} + rrxx \text{.}$$

10.^o Moltiplicando per $aa - xx$, si avrà $a^4 xx - a^4 tt - aax^4 + aattxx = rrx^4 + aarrxx - rrx^4$; dunque $a^4 xx - a^4 tt - aax^4 + aattxx = aarrxx$; dunque dividendo tutto per aa , si avrà $aaxx - aatt$
 $- x^4 + txx = rrx$, ovvero $aa - \frac{aatt}{xx} - xx$
 $+ tt = rr$.

$$11.^o $dd - \frac{ddte}{xx} : dd :: aa - xx + tt - \frac{aatt}{xx}$$$

$$\frac{aatt}{xx} : aa - xx$$

$$12.^o $MHXHO = dd - \frac{ddte}{xx} . CM^2 = dd .$$$

$$HR^2 = rr = aa - xx + tt - \frac{aatt}{xx} . CQ^2 = aa - xx (366) ; \text{dunque } MHXHO : CM^2 :: HR^2 : CQ^2 .$$

13.^o I triangoli HIR, CNQ son simili; dunque $IH : CN :: HR : CQ$; dunque $IH^2 : CN^2 :: HR^2 : CQ^2$; Ma $HR^2 : CQ^2 :: MHXHO : CM^2$; dunque $MHXHO : CM^2 :: IH^2 : CN^2$; dunque $MHXHO : IH^2 :: CM^2 : CN^2$; dunque $IH^2 : MHXHO :: CN^2 : CM^2$; ch'è quel, che si dovrà dimostrare.

Lo stesso calcolo nella stessa maniera si applica all'Iperbole (fig. 93).

371. Corol. Le ordinate a un diametro qualunque dell'Elissi non potendo cadere al di fuori della sezione, questo Teor. è vero riguardo a un diametro qualunque dell'Elissi; e si vede facilmente che in tutte le Sezioni Coniche le proprietà degli assi che non dipendono necessariamente da quelle de' fochi, convengono anche ai diametri conjugati.

Non vi è differenza, se non in quanto che le ordinate agli assi sono loro perpendicolari, mentre che le ordinate ai diametri son loro oblique. Onde se dal

punto I si mena Ib ordinata al diametro DN ; si dimostrerà come (850) che nell' Ellissi $Ib^2 : Db \times bN :: CM^2 : CD^2$, e che nell' Iperbole (853) $Ib^2 : Cb^2 + CD^2 :: CM^2 : CD^2$; cosicchè può servirsi delle stesse equazioni per i diametri che per gli assi conjugati, di cui i parametri saranno terze proporzionali, come (826). Ma riguardo a quello d' un diametro Mf (fig. 97) della Parabola, farà sempre il quadruplo della distanza Mm dalla sua origine M alla direttrice Am o al foco dell' asse. Perchè (848) $MT^2 = 4AS \times SP + 4SP^2$. Or se pel vertice S si tira SO ordinata al diametro Mf , si ha $SO = MT$; e la sua ascissa $MO = ST = SP$ (837). Ma perchè le ordinate ai diametri hanno le stesse proprietà che quelle dell' asse, $SO^2 = MO \times p$ (828) o $4AS \times SP = 4SP^2 = SP \times p$, o dividendo per SP , $4AS + 4SP = p$. Or $4AS + 4SP = 4AP = 4Mm = 4MF$. Dunque $p = 4Mm = 4MF$.

872. Teor. IV. Se dall' estremità M d' un diametro qualunque GM (fig. 98, 99) si abbassa sul suo conjugato la perpendicolare MR , si ha questa proporzione $MR : GL :: CS : CD$.

Dim. $CD^2 + CM^2 = bb + aa$, perchè (868) $CM^2 + CN^2 = bb + aa$. Ma $CN^2 = CD^2$, dunque $CD^2 + CM^2 = bb + aa$; dunque $CD^2 = \frac{bb + aa - CM^2}{1}$

CM^2 ; ma $CM^2 = xx + bb - \frac{aa}{2}$

$\frac{aaxx + aabb - bbxx}{aa}$ (868); dunque $CD^2 = bb +$

$\frac{aa - aaxx - aabb + bbxx}{aa} = \frac{aabb + a^4 - aaxx - aabb + bbxx}{aa}$;

dunque $CD^2 = \frac{a^4 - aaxx + bbxx}{aa}$.

Dal centro C tirando sulla tangente la perpendicolare Cl , continuata fin al suo incontro in X , i tri.

triangoli simili C/X , MNP danno CL o $MR : CX :: MP$ o $CV : NM$. Dunque $MR \times NM = CX \times CV$. Ma (839, 856) $CX \times CV = CL^2$. Dunque $MR \times$

$$NM = CL^2. \text{ Dunque } NM^2 = \frac{b^2xx + a^2bb + aab^2xx}{a^4 + a^2bb} :$$

$$CL^2 (bb) :: CL^2 (bb) : MR^2 = \frac{bbxx + a^4 + a^2xx}{bbxx + a^4 + a^2xx}.$$

Dunque $MR^2 \times CD^2 = aabb = CS^2 \times CL^2$. Dunque $MR^2 : CL^2 :: CS^2 : CD^2$; o $MR : CL :: CS : CD$.

873. Corol. La superficie d'un parallelogrammo formato su i diametri conjugati CM , CD sarebbe uguale a quella di un rettangolo formato su i semi-assi CS , CL ; perchè l'una sarebbe misurata da $CD \times MR$, e l'altra da $CS \times CL$. Lo stesso è de' diametri intieri, e degli archi intieri. Dunque la superficie d'un parallelogrammo formato intorno a due diametri conjugati qualunque, è ugual a quella del rettangolo formato intorno agli assi, e per conseguenza ugual anche a quella d'un altro parallelogrammo formato intorno a due altri diametri conjugati qualunque.

Proprietà dell'Iperbole riguardo ai suoi Asintoti.

874. Poichè per tirare gli Asintoti $\beta\beta$, bB (fig. 93) si è fatto SB , $S\beta$ uguali a CL (842), siegue che l'angolo degli asintoti βCB deve esser acuto, retto o ottuso, secondo che il primo semi-asse CS è maggiore, uguale, o minore del suo conjugato CL . Perchè l'angolo SCB che n'è la metà, è minore, uguale, o maggiore di 45° , secondo che SB è minore, uguale, o maggiore di CS .

875. Le diagonali SL , $C\beta$ del rettangolo $CL\beta S$ formato su semi-assi, essendo uguali, e tagliandosi in due ugualmente in Y , si ha $SY = CY$, e CY^2 o $SY^2 = \frac{1}{4} CS^2 + \frac{1}{4} CL^2 = \frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} bb$. Nel

876. Quando l'angolo degli asintoti è retto, l'Iperbole si chiama *equilatera*; donde apparisce:

1.^a Che il parametro d'un' Iperbole equilatera è egual a ciascuno degli assi, che son allora uguali.

2.^a Che contando le ascisse dal vertice, l'equazione d' l' asse principale d'un Iperbole equilatera è $yy = 2ax + xx$; e contando le ascisse dal centro, $yy = -aa + xx$; a causa di $a = b$ e di $p = 2a = 2b$, che bisogna sostituire nelle equazioni agli assi dell' Iperbole.

3.^a Che l'equazioni al circolo essendo $yy = 2ax - xx$, e $yy = aa - xx$, secondo che le ascisse son contate dal vertice o dal centro, il circolo è all' Iperbole equilatera, quel che l'Elissi è all' Iperbole ordinaria.

877. Teor. V. Prolungando da una parte e l'altra un' ordinata qualunque PM all' asse principale fin agli asintoti in A, a, si ha $AM \times Ma = CL^2$, o $AM : CL :: CL : Ma$.

Dim. Dall'equazione $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$ (849)

si trae bb o $CL^2 = \frac{bbxx}{aa} - yy = \left(\frac{bx}{x} - y \right) \times \left(\frac{bx}{a} + y \right)$. Or a causa de' triangoli simili CSL,

CAP, si ha $CS : CL :: CP : PA = \frac{bx}{a}$; dunque AM

$= \frac{bx}{a} - y$, e $Ma = \frac{bx}{a} + y$; dunque $AM \times Ma = CL^2$.

878. Corol. Dunque si ha anche $IV \times lu = CL^2 = AM \times Ma = am \times mA \times iu \times iV$.

879. Teor. VI. Se per un punto M d'un' iperbole si tira all' asintoto vicino CA una retta MR parallela

lata all'altro asintoto CB, si ha $MR \times RC = CY^2 = SY^2$, o $MR : SY :: SY : RC$.

Dim. Si tiri MX parallela ad AC per aver $MX = RC$. Per i triangoli simili MAR, $S^{\beta}Y$, si ha $MX : SY :: MA : S^{\beta}$ o CL. Or (877) $MA : CL :: CL : Ma$. E per i triangoli simili $S^{\beta}Y$ MaX, si ha S^{β} o CL : Ma :: βY o SY : MX o RC. Dunque $MR : SY :: SY : RC$.

880. Corol. I. Ogni retta, come MR, tirata da uno de' punti dell' Iperbole all' asintoto CB, può riguardarsi come un'ordinata, di cui l'asintoto CA è la linea delle ascisse. Perchè l' asintoto CB essendo una tangente all' Iperbole, la sua posizione determina (781) quella delle ordinate; l' origine delle ascisse è in C, onde CR è l'ascissa di questa ordinata MR. Se dunque si fa $CR = x$, $MR = y$, CY o $SV = d$, si avrà $xy = dd$, o $xy^{\frac{1}{2}} aa^{\frac{1}{2}} bb^{\frac{1}{2}}$ per l' equazione dell' Iperbole rapporto ai suoi asintoti.

881. Coroll. II. Se si prolunga MR fin all' Iperbole conjugata dLD, si avrà $DR = RM$. Perchè $DR \times CR = CY^2 = MR \times CR$.

882. Teor. VII. Le due parti EG, FI (fig. 104) di una retta qualunque FE tirata a traverso un' Iperbole, e intercette tratta curva e gli asintoti, son uguali fra loro.

Dim. Per i punti G, I faccianli passare DT, BQ perpendicolari all' asse; si ha (878) $DR \times RT$ o $GT \times GD = B/ \times I/Q$; dunque $I/Q : GT :: GD : B/$. Ma per le parallele DT, BQ, i triangoli GTE, EIQ son simili, come anche FBI, FGD, dunque $GD : B/ :: GF : IF$. E $I/Q : TG :: IE : GE$. Dunque $GT : IF :: IE : GE$. $EGF = IF : IF :: IE - EG$. Dunque $IG : IF :: IG : GE$. Dunque $IF = GE$.

883. Corol. I. Quindi si ricava una maniera di descriver un' Iperbole fra due asintoti dati, e che passi per un dato punto I. Poichè se per questo punto I si fan passare quante rette si vuole AP, BQ, FE &c., prendendo $PH = A/$, $QK = B/$, $GE = F/$ &c., si avranno i punti H, K, G &c. per ove l' Iperbole de-

ve passare; indi un de' punti trovati può servire come il punto dato I , per determinarne degli altri.

884. Coroll. II. Se diverso dal punto I se ne prende un altro al di dentro o al di fuori dell' Iperbole RSB già descritta, se ne potrà descriver un' altra che avrà gli stessi asintoti, e che non incontrerà l' Iperbole RSH che all' estremità de' suoi rami infiniti.

885. Corol. III. Una tangente se terminata agli asintoti è divisa in due ugualmente dal punto del contatto c . Perchè se la retta FE tirata ad arbitrio non entrasse che infinitamente poco nell' Iperbole, i punti G , I sarebbero confusi al punto del contatto, e tanto si avrebbe $FI = GE$.

886. Corol. IV. Una tangente eg terminata agli asintoti (fig. 93) è ugual al diametro DN conjugato al diametro MO che passa pel punto M del contatto. Perchè se per M si tira MD parallela all' asintoto CB , si ha (881) $MR = RD$; e per i triangoli simili eMR , eCg , si ha $eR = RC$. Dunque i triangoli eRM , DRC son uguali. Dunque DC è parallela e uguale a eM ; dunque il punto D della retta MD cade sull' Iperbole DL al punto per ove passa il diametro DN conjugato al diametro MO .

887. Teor. VIII. Se da due punti qualunque I , R (fig. 104) presi sopra un' iperbole, si tiran ad arbitrio due parallele IA , RX terminate all' asintoto vicino, e due altre parallele IE , RY terminate all' altro asintoto, si ha $IA \times IE = RX \times RY$.

Dim. Le perpendicolari a l' asse EQ , DT terminate agli asintoti, e tirate per i punti I , R , forman i triangoli simili BIA , DRX , e IQE , TRY . Dunque $IB:IA::DR:RX$. E $IQ:IE::RT:RY$. Dunque $IB \times IQ:IA \times IE::DR \times RT:RX \times RY$. Or $IB \times IQ = DR \times RT$ (878); dunque $IA \times IE = RX \times RY$.

888. Corol. I. Se a traverso d' un' iperbole si tiran due rette ad arbitrio FE , ZY parallele fra loro e terminate agli asintoti, si avrà sempre $FI \times IE = ZR \times RY$.

889. Coroll. II. Se una di queste parallele è tangente in t , si avrà $ft^2 = F/x!E$, &c.

Problemi sopra le Sezioni Coniche.

890. Probl. I. *Data una porzione di Sezione Conica, determinarne la specie e la posizione degli assi.*

Sol. Si tirino due parallele terminate dall' una e l' altra parte alla sezione, si facci passar una retta per i punti de' loro mezzi, questa farà un diametro della sezione. Si tirino anche due altre parallele, ma oblique alle due precedenti, e pel loro mezzo si tiri un altro diametro. Se questi due diametri son paralleli, la sezione è una Parabola; se si tagliano nel di dentro della sezione, è un' Elissi; se tagliansi al di fuori, è un' Iperbole. Il punto d' intersezione ne farà il centro. Perciò se da questo centro si descrive un arco di circolo che tagli la sezione data in due punti, la retta che passerà per questo centro e pel mezzo tra i due punti, farà l' asse. Se la sezione è una Parabola, si tirerà una retta qualunque perpendicolare ai diametri trovati, e terminata da una parte e l' altra alla sezione, si taglierà in due ugualmente e perpendicolarmente da una retta, che farà l' asse.

891. Probl. II. *Dati di posizione tre punti M, m, u, non in linea retta, e il foco F (fig. 91) farvi passare una sezione conica, e determinarne la specie e gli assi.*

Sol. Tirate le Mm, mu, facciasi $FM : Fm :: ME : mE$, e $Fm : Fu :: mH : uH$.

Dalla prima proporzione $FM : Fm :: ME : mE$
 convertendo si ha $Fm : FM :: mE : ME$
 e dividendo. $Fm - FM : Fm :: mE - ME : mE$
 ma, $mE - ME = Mm$
 dunque $Fm - FM : Fm :: Mm : mE$
 $Fm \times Mm$
 dunque $mE = \frac{Fm \times Mm}{Fm - FM}$

Nella stessa guisa dalla seconda proporzione Fm :

$$Fu :: mH : uH \text{ si cava } mH = \frac{Fm \times um}{Fu - Fm}.$$

Per i punti trovati E , H si tiri la retta indefinita EH , la quale sarà la direttrice della sezione. Poichè abbassate le perpendicolari MG , mg , uy , essendo simili i triangoli gme , GME , si ha $MG : mg :: ME : mE :: FM : Fm$. Dunque $FM : MG :: Fm : mg$. Dunque la linea che passa per i punti dati M , m , u , è (790) una vera sezione conica. Nella stessa maniera si prova che $Fm : Fu :: mg : uy$, perchè i triangoli mHg , uHg , uHy sono simili.

Così se si fa passare per F le retta PA perpendicolare alla direttrice, questa sarà l'asse della sezione. E se si fa $MG : FM :: AS : SF$, si avrà componendo

$$MG + FM : FM :: AS + SF : SF, \text{ ma}$$

$$AS + SF = FA, \text{ dunque}$$

$$MG + FM : FM :: FA : SF; \text{ dunque}$$

$$SF = \frac{FA \times FM}{MG + FM}.$$

$$SF = \frac{FA \times FM}{MG + FM}.$$

Onde S sarà un de' vertici dell'asse.

$$\text{Se poi si fa } MG : FM :: AS : SF, \text{ si avrà } SF = \frac{FA \times FM}{GM - FM};$$

così si avrà l'altro vertice s dell'asse.

892. Probl. III. Trovar gli asintoti d' un' Iperbole di cui si hanno solamente i due diametri conjugati MO , DN (fig. 93)

I. Sol. Per l'estremità M del primo diametro MO si tiri eg parallelamente al conjugato DN ; si facciano Mg , Me uguali a CD o CN , e si avranno i punti g , e , per ove gli asintoti devon passare.

893. II. Si congiungano le estremità M , D de' due diametri, e pel centro C , e pel punto R nel mezzo di MD si tiri CR , che sarà uno degli asintoti; l'altro

altro sarà la parallela a DM tirata dal centro C.

894. Osserv. Reciprocamente essendoti gli asintoti e un punto M dell'iperbole, se ne trovan due diametri coniugati, tirando indefinitamente MD parallela all'asintoto CB, e facendo $DR=MR$ e le rette MC, DC saran due semi-diametri coniugati. Ovvero tirando per M la tangente eg terminata agli asintoti, e facendo passare per C la retta CD parallela e uguale a Me o a Mg.

895. Probl. IV. Determinare il raggio di curvatura in un punto qualunque M d'una sezione conica (fig. 98, 99).

Sol. Tirato per il punto dato il diametro MO, e il suo coniugato DN cogli assi Ss, Ll; supposto che il punto K preso su MO sia un punto della circonferenza del circolo che passa per i tre punti infinitamente vicini m, M, u; allora si ha (531) $uH \times Hm = MH \times HK$, o $mH^2 = MH \times HK$. Or (829) $mH^2 : MH \times HO : CD^2 : CM^2$; dunque: $MH \times HK : MH \times HO : CD^2 : CM^2$. Ovvero $HK : HO :: CD^2 : CM^2$. E perchè MH è infinitamente piccolo anche rapporto a mH, si ha $MK : MO$ o $2CM :: CD^2 : CM^2$. Dunque $MK = 2CD^2$.

———. Sia ora MA il diametro del circolo osculatore, o che passi per mM u, tirata la corda AK, il triangolo AKM è rettangolo in K, e simile al triangolo MCR rettangolo in R a causa che MA è perpendicolare all'arco mu o alla sua tangente MX, e per conseguenza al diametro coniugato ND. Si ha dunque

$$MR : MC :: MK \text{ o } \frac{2CD^2}{CM} : MA = \frac{2CD^2}{MR}; \text{ dunque } \frac{1}{2}$$

$$MA = \frac{CD^2}{MR}, \text{ vale a dire}$$

1.º Il raggio della curvatura in un punto qualunque M d'una Sezione Conica è ugual al quadrato del semi diametro coniugato a quello che passa pel punto dato.

dato, diviso per la perpendicolare tirata da questo punto sul diametro conjugato. Ma (872)

$$MA = \frac{CLXC'S}{DC}, \text{ Dunque } \frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{CLXC'S}, \text{ vale a dire}$$

2.º Il raggio della curvatura in un punto qualunque M d'una Sezione Conica è ugual al cubo del semi-diametro conjugato a quello che passa pel punto dato, diviso per il prodotto de' due semi-assi.

896. Dal foco F e dal centro C si abbassino sulla tangente M le perpendicolari CI, FG; si ha (872)

$$MR^2 : CS^2 :: CL^2, \text{ o } MR \times MN : CD^2 = \frac{CS^2 \times MN}{MR}. \text{ Or}$$

$$\frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{MR}, \text{ dunque } \frac{1}{2} MA = \frac{CS^2 \times MN}{MK^2}. \text{ Ma il pa-}$$

$$\text{rametro } p \text{ dell'asse } Ss \text{ è } p = \frac{2CL^2}{CS}, \text{ e } \frac{1}{2} p = \frac{CL^2}{CS};$$

$$\text{dunque } \frac{1}{2} p \times CS = CL^2 = MR \times MN, \text{ dunque } MR = \frac{p \times CS}{2MN}, \text{ e } MR^2 = \frac{pp \times S^2}{4MN^2}.$$

$$\text{Dunque sostituendo } \frac{1}{2} MA = \frac{pp \times S^2}{4MN^2}.$$

$$\frac{pp}{4MN^2} = \frac{1}{4} pp. \text{ Vale a dire}$$

3.º Il raggio della curvatura in un punto qualunque M d'una sezione conica, è uguale al cubo della normale diviso pel quarto del quadrato del parametro dell'asse principale.

Nella Parabola la formola del raggio di curvatura è

$$\frac{(4px + pp) \sqrt{(4px + pp)}}{2pp}. \text{ Perchè (844) } NM^2 = px +$$

$$\frac{1}{4} pp. \text{ Dunque } 4NM^2 = 4px + pp, \text{ e } 4NM^3 = (4px + pp) \sqrt{(px + \frac{1}{4} pp)}. \text{ Or facendo entrar 4 nel radicale } \sqrt{(px + \frac{1}{4} pp)}, \text{ senza cambiarne il valore, si ha } \sqrt{(px$$

$$(\frac{1}{4} pp)$$

$$(px + \frac{1}{4}pp) = \frac{1}{2} \sqrt{(4px + pp)}, \text{ perchè } \frac{1}{2} \sqrt{(4px + pp)} = \sqrt{(\frac{1}{4}px + \frac{1}{4}pp)} = \sqrt{(px + \frac{1}{4}pp)}. \text{ Dunque } 4NM^2 = (4px + pp) \frac{1}{2} \sqrt{(px + \frac{1}{4}pp)}, \text{ e } \frac{(4px + pp) \sqrt{(4px + pp)}}{2pp}.$$

Nelle altre sezioni le forme sono molto più complicate.

897. Probl. V. Trovar la quadratura delle Sezioni Coniche.

Sol. Per la Parabola. Sia proposto di quadrar lo spazio $SMMP$ (fig. 97); l'origine delle ascisse essendo

al vertice S , si ha $PM = y = \sqrt{px}$; sia $p = 1$, dunque $y = \sqrt{x}$, o $y = x^{\frac{1}{2}}$. Dunque per aver la somma delle ordinate comprese tra S e MP , non si

ha da far altro che sommar la serie $1, 2, 3, 4, \dots$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\dots x^{\frac{1}{2}},$ di cui la somma è $(345) \frac{x}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$

$x = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} = (138) \frac{2}{3} x \sqrt{x}$; ovvero perchè $y = \sqrt{x}$, $= \frac{2}{3} xy$. Dunque lo spazio parabolico SMP è $\frac{2}{3}$ del prodotto dell'ascissa per l'ordinata, o sia dell'aja del parallelogrammo $SPML$.

898. Corol. I. Se si tira la retta SM , il segmento parabolico SMn è $\frac{1}{6} xy$; perchè la sua aja è uguale all'aja $SPMn$ meno l'aja del triangolo rettangolo SPM , cioè $= \frac{2}{3} xy - \frac{1}{3} xy = \frac{1}{6} xy$.

899. Corol. II. L'aja del segmento SMn è la metà dell'aja del trilineo $MnSL$, perchè questo trilineo $= \frac{1}{3} xy$.

900. Corol. III. Se il punto P fosse nel foco, si avrebbe $x = \frac{1}{2} p$, e $y = \frac{1}{2} p$; dunque $\frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} p \times \frac{1}{2} p = \frac{1}{12} pp$. Cioè l'aja sarebbe $\frac{1}{12}$ del quadrato del parametro.

901. Sol. Per l'Elissi . Contando le ascisse dal cen-
tro , l' equazioni all' Elissi e $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$; o

$yy = \frac{bb}{aa} \times (aa - xx)$; dunque $y = \frac{a}{b} \times \sqrt{aa - xx}$. Dun-

que (788) ciascuna di tutte le ordinate possibili tra

CL, e PM (fig. 100) è $\frac{b}{a} \times a - \frac{b}{a} \times \frac{xx}{2a} - \frac{b}{a} \times \frac{x^4}{8a^3}$

$-\frac{b}{a} \times \frac{x^6}{16a^5} - \frac{b}{a} \times \frac{5x^8}{128a^7} , \&c.$ Ovvero $b - \frac{bxx}{2aa}$

$-\frac{bx^4}{8a^4} - \frac{5bx^8}{128a^8} , \&c.$ Dunque questa serie som-

mata tante volte , quante sono le ascisse possibili dal
centro C fin a P, darà la somma di tutte queste or-
dinate, o l'aja CLMP. Dunque supponendo per tutte
queste ascisse la serie infinita 1. 2. 3. 4. 5 x , si ve-

de 1.° Che bxx , o bx esprime la somma di tutti i
primi termini b della serie $b - \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4} \&c.$

2.° Che la somma di tutti i secondi termini $-\frac{bxx}{2aa}$ è
ugual a $-\frac{b}{2aa}$ moltiplicato per la somma di tutti i

quadrati de' termini della serie infinita 1. 2. 3. 4.

x, la quale è $(344) = \frac{x^3}{3}$: dunque la somma di tut-

ti i secondi termini è $-\frac{bx^3}{6aa}$.

3.° Che la somma di tutti i terzi termini $-\frac{bx^4}{8a^4}$ è uguale a
 $-\frac{bx^4}{8a^4}$ mol-

b
 ————— moltiplicato per la somma di tutte le quarte po-
 $8a^4$
 tenze de' termini della serie 1.2.3.4.... x , la quale è
 x^5
 — ; dunque la somma di tutti i terzi termini è —
 5
 bx^5
 — . Nella stessa maniera si trova che la somma di
 $40a^4$

tutti i quarti termini — $\frac{bx^6}{16a^5}$ è — $\frac{b}{16a^5} \times \frac{x^7}{7} = \frac{bx^7}{112a^5}$;
 che quella di tutti i quinti termini è — $\frac{5bx^8}{1152a^8}$ &c.

Così che lo spazio CLMP è espresso dalla serie infi-
 bx^1 bx^5 bx^7 $5bx^9$ $7bx^{11}$
 nita, bx — — — — —
 $21bx^{11}$ $62a$ $40a^4$ $112a^5$ $1152a^8$ $2816a^{10}$
 — — — — — &c. la quale non ha potuto finora esser
 $13312a^{12}$
 formata in termini finiti. il che dimostra che la qua-
 dratura assoluta dell' Elissi è incognita.

902. Coroll. I. Se si fa $x=a$, allora sostituendo si
 avrà ab — $\frac{1}{6}ab$ — $\frac{1}{40}ab$ — $\frac{1}{112}ab$ — &c. per lo spa-
 zio compreso nel quarto d' Elissi CLMS . E se a e b
 esprimon i due assi intieri dell' Elissi, questa serie da-
 rà l'aja intiera dell' Elissi.

903. Coroll. II. Se $a=b$, allora l' Elissi è un Cir-
 colo , e la serie aa — $\frac{1}{6}aa$ — $\frac{1}{40}aa$ — $\frac{1}{112}aa$ dà la
 quadratura d' un quarto di circolo, o d' un circolo in-
 tiero, se a esprime il diametro.

904. Coroll. III. Quindi siegue che l' aja d' un' Elissi
 è a quella di un circolo descritto sul suo grand' asse,
 come

come $ab = \frac{1}{6} ab = \frac{1}{40} ab$ &c. ad $aa = \frac{1}{6} aa = \frac{1}{40} aa$ &c.

vale a dire, come ab ad aa , ovvero come b ad a , e per conseguenza come il piccolo asse è al grand' asse. E se il circolo avesse il piccol asse per diametro, la sua aja sarebbe a quella dell' Elissi, come il piccol asse al grand' asse.

905. Similmente la porzione CPNO del circolo è alla porzione GPML dell' Elissi, come il grand' asse è al piccol asse, o come a a b . Perchè l'una è espressa

da $ax = \frac{ax^3}{6aa} - \frac{ax^5}{40a^3}$, &c., e l' altra da $bx = \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^3}$, &c.

Lo stesso si può dire delle aja PNS, PMS. Tutto ciò è d'altronde evidente, perchè queste sorte di aja circolari non sono che somme di ordinate, le quali sono (352) tutte alle ordinate corrispondenti dell' Elissi (di cui le somme son le aja Elittiche) come il grand' asse è al piccol' asse.

906. Corol. IV. Se da un punto A qualunque preso sull' asse d' un' Elissi inscritta o circoscritta a un circolo, si tiran alle estremità M, N d' un' ordinata comune PN le rette AM, AN, l' aja del settore circolare SAN è a quella del settore elittico SAM, come l' asse cb è il diametro del circolo, è all' altro asse.

Perchè l' aja circolare SPN è in questo rapporto coll' aja elittica SMP; e l' aja del triangolo rettangolo PAN è a quella del triangolo PAM che ha una stessa base PA, come PN a PM, o (352) come CO a CL, cioè come l' asse che serve di diametro al circolo è all' altro asse. Dunque l' aja totali SAN, SAM son in questo rapporto.

907. Corol. V. L' aja d' un' Elissi è ugual a quella d' un

d'un circolo, il di cui diametro è medio proporzionale tra gli assi dell'Elissi.

Sia d il diametro di questo circolo, farà (271) $dd = \frac{1}{6} ab + \frac{1}{40} ab + \frac{1}{40} ab + \dots$
 ab . L'aja del circolo è (358) $dd = \frac{1}{6} dd + \frac{1}{40} dd + \frac{1}{40} dd + \dots$
 $ab = \frac{1}{6} ab + \frac{1}{40} ab + \frac{1}{40} ab + \dots$ &c.

908. Corol. V. Le superficie di due Elissi qualunque son fra loro come i prodotti de' loro assi. Perchè sieno a, b gli assi dell'una; c, d gli assi dell'altra; faranno le loro aje $ab = \frac{1}{6} ab + \frac{1}{40} ab + \frac{1}{40} ab + \dots$ &c. $cd = \frac{1}{6} cd + \frac{1}{40} cd + \frac{1}{40} cd + \dots$ &c.: queste due serie son evidentemente fra loro come ab a cd .

Sol. Per l'Iperbole. Facendo il primo semi-asse $SC = b$ (fig. 96) e $Cl = a$, l'ascissa $CH = x$, l'ordinata $MH = y$; si ha (349) $yy = \frac{aabb + bbxx}{aa}$, o $yy = \frac{b}{a} (aa + xx)$; dunque $y = \frac{b}{a} \sqrt{aa + xx}$; dunque ciascu-

na ordinata compresa tra CS e HM , è $b + \frac{bx^2}{2aa} + \frac{bx^4}{8a^3} + \frac{5bx^6}{16a^5} + \frac{128a^8}{128a^8} + \dots$ &c.

E siccome questa serie non differisce da quella dell'Elissi, che ne' segni de' termini pari, seguitando lo stesso ragionamento fatto per l'Elissi, si trova:

1.º Che l'aja iperbolica $SCHM$ deve esser espressa dalla serie $bx + \frac{bx^3}{6aa} + \frac{bx^5}{40a^3} + \frac{bx^7}{112a^5} + \frac{5bx^9}{1152a^7} + \dots$ &c.

2.º Che se si toglie l'aja del rettangolo $SCHI = bx$, resta l'aja del trilineo iperbolico $SIM = \frac{bx^3}{6aa} + \frac{bx^5}{40a^3} + \frac{bx^7}{112a^5} + \dots$ &c.

3.º Che

3°. Che nell' Iperbole equilatera, ove $b = a$, se
 $a = x$, si ha $aa + \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa + \frac{1}{112}aa - \dots$, &c.

E la stessa analogia si può seguire tra l' Iperbole equilatera e un' Iperbole qualunque, come si è fatta quella ch'è tra il Circolo e l' Elissi.

909. Per l' Iperbole tra i suoi asintoti. Sia proposto di quadrare lo spazio ARMZ (fig. 93.) compreso dalle due ordinate AZ, RM. Prendendo l'origine delle Ascisse in R, sia $CY^2 = a$, $CR = b$, $RA = x$, $AZ = y$; si ha (879) $CAXAZ = CY^2$, ovvero $by + xy = aa$.

$$\text{Dunque } y = \frac{aa}{b+x} = \frac{aa}{b} - \frac{aax}{bb} + \frac{aaxx}{b^3} - \frac{aaxx^2}{b^4} + \dots$$

La somma di ciascuno de' termini di questa serie preso tante volte, quanti termini vi sono nella serie infinita 1. 2. 3. 4. 5. x farà quella serie infinita

$$aax - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^2}{3b^3} - \frac{aax^3}{4b^4} + \dots \text{ ugual all' aja}$$

ARMZ. Questa serie sarà tanto più convergente, quanto x sarà più piccolo di b .

910. Corol. Se si fa $b = a$, vale a dire se l'origine delle ascisse fosse in Y, lo spazio SYAZ sarebbe

$$ax - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots \text{ &c. E se si fa } a = 1, \text{ si avrà } x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4, \text{ &c.}$$

911. Osserv. I. Se fatto $CY = 1$, si prendono le ascisse CR, CA, Ct in progressione geometrica: sia $CA = f$, $At = z$, si avrà dunque $f = b + x$, $Ct = f + z$. Dunque la progressione darà $b : b + x :: f : f$

$$+ z, \text{ e per conseguenza } \frac{x}{b} = \frac{z}{f}; \text{ donde apparisce,}$$

che

che l'aja RMZA, la quale è $\frac{x}{b} - \frac{x^2}{2b^2} + \frac{x^3}{3b^3} -$

$\frac{x^4}{4b^4} \&c.$ è ugual all'aja AZKt, che è $\frac{z}{f} - \frac{z^2}{2f^2} +$

$\frac{z^3}{3f^3} - \frac{z^4}{4f^4} \&c.$

Dunque le aje iperboliche che han per basi le differenze della ascisse in progressione geometrica, son fra loro uguali.

Donde si vede, che se CY, CR, CA, Ct son ascisse tali, che rappresentino la serie delle quantità in progressione geometrica $\frac{1}{q}, q, q^2, q^3, q^4$, le aje, di cui YR, RA, At sono le basi, essendo uguali, le aje, di cui YR, YA, Yt sono le basi, son tra loro come la serie de' numeri 1, 2, 3. Dunque son come gli esponenti delle quantità CR, CA, Ct; e per conseguenza come i logaritmi di queste stesse quantità. Dunque si posson calcolar i logaritmi per mezzo delle aje iperboliche: e reciprocamente.

912. Osserv. II. Se si volesse l'espressione dell'aja compresa tra l'asintoto BC, la parte CR dell'altro asintoto, l'ordinata MR, e il ramo infinito MSi; a causa dell'equazione $ax = xy$ (330), sia CY o $a =$

1; dunque $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

Ora (345) la somma di tutti li $x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + \dots$ è $\frac{x^{-1}}{-1 + 1} = \frac{x^{-1}}{0}$.

Dunque perchè il quoziente di 1 diviso per 0 è infinito, quello spazio è infinito.

913. Se con un piano si vuol tagliar un Cono retto in due parti, non si potrà farlo che nelle cinque maniere espresse (789), delle quali le tre ultime Sezio-

ni danno le tre equazioni alla Parabola, all' Elissi, all' Iperbole.

Dim. Per la Parabola. Si faccia passare (fig. 101) un piano parallelo a quello della base, la sezione farà un circolo EMD, perchè farà uno degli elementi del Cono. Or siccome i due circoli EMD, BmC son tagliati in MM, e in *mm* dalla sezione; poi in ED e in BC dal piano del triangolo ABC, che si suppone tra tutti i piani triangolari traversanti il Cono lungo l'asse, esser quello che sia perpendicolare al piano tagliante; è chiaro (621) che le rette MM, *mm* son parallele fra loro, come anche i diametri ED, BC. Or a causa che il piano ABC è perpendicolare al piano tagliante, *mm* è perpendicolare a BC, dunque MM è perpendicolare a ED. Di più, essendo i diametri ED, BC tagliati in P, e in *p* dall'asse Sp della sezione, questo asse è (1611) nel piano di questi diametri o del triangolo ABC; dunque MM, *mm* son anche perpendicolari a Sp. Onde le rette *pm*², PM son ordinate comuni ai circoli BmC, EMD, e alla sezione mSm. Ma (530) $pm^2 = Bp \times pC$, e $PM^2 = EP \times PD$. Dunque $pm^2 : PM^2 :: Bp \times pC : Ep \times PD$. Ma a causa delle parallele AB, Sp, si ha $EP = Bp$; dunque $pm^2 : PM^2 :: pC : PD$. E a causa de' triangoli simili SPD, SpC, si ha $pC : PD :: Sp : SP$. Dunque la curva mSm è tale che i quadrati delle sue ordinate son tra loro come le loro ascisse; dunque (830) questa curva è una Parabola.

914. Dim. per l' Elissi (fig. 102). Avendo fatto passare due piani paralleli alla base del Cono, si avranno due circoli EmF, GMH, che taglieranno il piano della sezione, e si vedrà come sopra, che *mp*, MP son ordinate comuni al circolo e alla sezione: e che per la proprietà de' circoli si ha $mp^2 : MP^2 :: Ep \times pF : GP \times PH$. Ma per i triangoli simili SPH, SpF, e SpE, GP, si ha $pF : PH :: Sp : SP$; e $Ep : GP :: sp : SP$. Dunque $Ep \times pF : GP \times PH :: sp \times Sp : SP \times SP$. Dunque $pm^2 : PM^2 :: sp \times Sp : SP \times SP$. Dunque la sezione mMS è una curva tale, che i quadrati delle sue ordi-

nate

nate son tra loro come i prodotti delle ascisse. Dunque ella è un'Elissi (829) La dimostrazione sarebbe la stessa, se il solido ABC fosse un cilindro retto.

915. Dimost. per l'Iperbole (fig. 103) A causa de' circoli EMD, BMC, si ha $pm^2 : PM^2 :: Bp \times pC : EP \times PD$. Or a causa de' triangoli simili DPS, Cps, e psB , psE , si ha $pC : PD :: ps : PS$, e $pB : PE :: ps : pP$. Dunque $pC \times pB : PD \times EP :: ps \times ps : PS \times pP$. Dunque sostituendo $pm^2 : PM^2 :: ps \times ps : PS \times pP$: e questa è la proprietà dell'Iperbole (829).

916. Corol. E' chiaro che se si fa passare pel vertice del Cono un piano parallelo a quello della sezione, questo piano toccherà il Cono nel caso della Parabola. Egli sarà totalmente al di fuori nel caso dell'Elissi; e entrerà nel Cono nel caso dell'Iperbole. E se si applican due piani che tocchino l'Iperbole lungo le linee rette, secondo le quali questo piano che passa pel vertice taglia la superficie del Cono, le intersezioni di questi due piani col piano delle Iperboli ne saranno gli asintoti. Or poichè questi due piani toccano ciascun elemento del Cono in quello de' loro punti, che è in un piano parallelo a quello della sezione, non potranno più toccare alcuno di questi elementi in un altro punto; dunque non potranno incontrare l'Iperbole, perchè il suo piano è parallelo a quello, in cui son tutti i punti di contingenza.

CAPITOLO III.

Di varie Curve Principali.

917. **Q**U non si tratta di quelle linee curve, che si posson delinear a caso, ed irregolarmente sulla carta. Non avendo tali linee altra legge che la mano che le forma, non posson esser l'oggetto della Geometria; posson esserlo solamente dell'arte di scrivere.

918. Si è già veduto (780) che vi sono due generi di Curve, alcune *Geometriche* o *Algebraiche*, che son quelle, nelle quali la relazione delle Ascisse alle Ordinate è, o può esser espressa da un'equazione algebraica. E l'altre Curve Meccaniche e Trascendenti, l'equazione delle quali tral'e coordinate non è, nè può esser algebraica, vale a dire finita. Tra questi due generi di Curve si può metter, 1°. le *Curve Esponenziali*, nell'equazione delle quali una delle incognite o tutte due entrano in esponente, come se una Curva dasse per equazione $y = ax$, ovvero $yx = ay$ &c. 2°. Le *Curve interscendenti*, nell'equazione delle quali gli esponenti sono radicali, come $x = y \sqrt{2}$. Queste due specie di Curve non sono propriamente nè geometriche, nè meccaniche, perchè la loro equazione è finita senza esser algebraica.

919. Gli antichi non han conosciuto altre Curve Geometriche, che il Circolo, le Sezioni Coniche, la Concoide, e la Cissoide, perchè poco conoscevan l'Algebra, senza di cui poco si può trattare di Curve.

920. *Curve algebraiche dello stesso genere* diconsi quelle, l'equazioni delle quali montan ad una stessa dimensione.

Famiglia delle Curve chiamasi l'unione di più Curve di diverso genere, le quali si definiscon tutte per la stessa equazione di un grado indeterminato, ma diverso secondo la diversità del genere. Sia per esempio l'equa-

l'equazione d'un grado indeterminato a $x^m = y^m$;
 se $m=2$, farà $ax = y^2$; se $m=3$, farà $ax^3 = y^3$; se
 $m=4$, farà $ax^4 = y^4$. Tutte queste Curve diconsi
 della stessa famiglia.

Perciò tutte le Curve Algebraiche fanno una certa
 famiglia composta d'innnumerabili altre, ciascuna del-
 le quali abbraccia infiniti generi.

Delle Curve Algebraiche se ne son vedute già quat-
 tro che sono le Sezioni Coniche, resta di vederne al-
 cune altre principali.

Concoide di Nicomede.

921. Tratte due linee BD, AG perpendicolari (fi-
 gura 105) l'una all'altra, e posti sulla linea AEG
 tre punti A, F, G, de' quali i due primi sien in
 ugual distanza da E; se dal punto G si tiran le ret-
 te GFEA, GOM, GQM, e quante altre si vorran-
 no; e se sopra queste linee, tanto al di sopra di BD
 come al di sotto, si fanno le parti QM, QN, QM
 &c. tutte uguali ad AE: Ciò fatto, le due linee
 MMAM, NFN terminate dalle estremità di queste
 linee rette, faranno le due parti d'una stessa curva
 geometrica, detta *Concoide* di Nicomede, perchè
 questi ne fu l'Inventore. Il punto G dicesi il polo
 della *Concoide*; la linea BD il suo *asintoto*; e la par-
 te costante AE la sua *regola*.

Questa curva può anche descriversi con uno stro-
 mento (fig. 106) composto della squadra AEDKG,
 nel di cui braccio AD è un canale rappresentante l'
 asintoto della curva, e nell'altro braccio un perno
 K, che farà il polo della *Concoide*. Alla riga CFKB
 è attaccato un chiodo F che passa nel canale AD,
 dove ha la libertà di scorrere. C, e sono due filetti
 o lapis attaccati alla stessa riga ugualmente distanti
 dal chiodo F. Nella stessa riga è un canaletto OK,
 il di cui principio O è tanto distante da F, quanto
 K da E.

Ciò posto, se si fa muover la riga CD in maniera che il chiodo F non esca mai dal canale AD, e che il canale OB passi sempre nel perno K, i due lapis posti in C e m descriveranno le due braccia CH, ch della *Concoide*. Si è detto, che la linea AD è l'asintoto di questa curva, cioè ella vi si avvicinerà sempre senza mai incontrarla; perchè la linea CF costante inclinandosi sempre senza giammai stendersi sopra AD, il punto C deve sempre accollarsi alla retta AD, senza mai arrivarci.

922. Trovar l'equazione per la *Concoide*:

Sia $a = QM = AE$, $b = EC$, $x = MR = EP$, $y = ER = PM$; farà $CP = b + x$, e $PE(x) : MQ$

$(a) :: EC(b) : CQ = \frac{ab}{x}$. Onde $CM = a +$

$\frac{ab}{x} = \frac{ax + ab}{x}$, E poichè $PM^2 + PC^2 = CM^2$, fa-

rà $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = \frac{a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2}{x^2}$, dunque

$x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + a^2bx + a^2x^2$. Questa è l'equazione d'una parte della *Concoide*.

Se poi si fa $b = CE$, $a = QN$, $x = EG = ON$, $y = EO = GN$, seguendo il metodo di sopra si avrà $x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 + x^2y^2 = a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2$. Ch'è l'equazione dell'altra parte della *Concoide*. Onde si vede che la *Concoide* è una linea del terzo genere.

923. Si possion formar altre *Concoidi* analoghe a questa.

Se per esempio, QM (fig. 105) non fosse più costante, ma di tal grandezza, che $GE^m : GQ^m :: QM^m : AE^m$, ne nascerebbe una curva, che avrebbe ancora BD per asintoto, e si potrebbe chiamar anche *Concoide*.

Onde se $b = GE$, $a = AE$, $x = EQ$, $y = QM$,
 $\quad \quad \quad nm \quad \quad mn$
 sarà

farà $ab = xy$, e per infinite Concoide a $b = x y$.

924. Lo spazio Concoideale, cioè lo spazio racchiuso tra la Concoide ed il suo asintoto, è infinito. Poichè

$AEQM >$ di ab ($\log. x + \sqrt{x^2 + b^2} - \log. b$). Or questa quantità è ∞ , lorchè $x = \infty$. Dunque &c.

Cissoide di Diocle.

925. Sul diametro (fig. 107) AB del semicircolo AOB si tiri una perpendicolare indefinita BC, e dall'estremità A si tirino le rette AH, AC ne' due quarti di circolo OB, AO: si faccia $Am = IH$, e nell'altro quarto di circolo $AN = LC$. I due punti m , L apparterranno ad una curva AmOL chiamata Cissoide, inventata da Diocle.

926. Dalla generazione di questa curva risultano le proprietà seguenti.

1.° Tirate le rette KI, PN perpendicolari ad AB, si avrà $AP:KB::Am:IH$, ma $Am = IH$, dunque $AK = KB$, dunque $AK = PB$, e $PN = IK$.

2.° La Cissoide AmO taglia la semicirconferenza AOB in due parti uguali nel punto O.

3.° Essendo $AK:KI::KI:KB$, cioè $AK:PN::PN:AP$; ed inoltre $AK:PN::AP:PM$, farà dunque $PN:AP::AP:Pm$, e per conseguenza AK, PN, AP, Pm, son quattro linee in proporzione continua. Nella stessa guisa si proverà, che AP, Pm, AK, KL son in proporzione continua.

927. Trovar l'equazione della Cissoide.

Sia $AB = a$, $AP = x$, $Pm = y$; farà $AK = PB = a - x$, e $KI^2 = PN^2 = ax - x^2$. Dunque $AK^2 (a^2 - 2ax + x^2) : PN^2 (ax - x^2) :: AP^2 (x^2) : Pm^2 (y^2)$. Dunque $a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 = ax^3 - x^4$; ovvero dividendo tutto per $a - x$, farà $ay^2 - xy^2 = x^3$, cioè $(a - x)y^2 = x^3$.

Quindi si vede che nella Cissoide il cubo dell'ascissa AP è ugual ad un solido formato dal quadrato della

femiordinata Pm , e del compimento PB al diametro del circolo generatore.

Onde lorchè il punto P casca in B , sarà $PB = 0$, e $y^2 = \frac{a^2}{0}$, dunque $0 : 1 :: a^2 : y^2$, vale a dire il va-

lore di y divien infinito. Perciò la Cissoide $AmOL$ benchè si accosti continuamente alla retta BC , non la incontra però giammai.

Dunque BC è l'asintoto della Cissoide, la qual è una linea del secondo genere.

Gli Antichi facevan uso della Cissoide, per trovare due mezze proporzionali tra due rette date. Supponendo infatti, che si cercano due mezze proporzionali tralle due date AK , Pm , suppongasì delineata la Cissoide; prendendo poi sull'asse AB una porzione $= AK$, e tirando l'ordinata della Cissoide $= Pm$, si troveranno le mezze proporzionali PN , AP .

Curve Meccaniche, o Trascendenti.

928. Tralle Curve Meccaniche o Trascendenti che son quelle che non hanno tralle coordinate equazione algebrica o finita, gli Antichi non conoscevano, che la Quadratrice di Dinostrate, e la Spirale d' Archimede.

Quadratrice di Dinostrate.

929. Dividasi il quarto del circolo ANB (fig. 108) in qualunque numero di parti uguali in N , n , n &c. Dividasi il raggio AC in ugual numero di parti uguali in P , p , p &c. Si tirino i raggi CN , Cn &c., e sopra i punti P , p , &c. s'inalzino le perpendicolari PM , pm &c. Si congiungano queste linee, la curva $AMmmD$ è la Quadratrice di Dinostrate.

Dalla costruzione apparisce, che $AB : AN :: AC : AP$. Onde se si fa $AB = a$, $AC = b$, $AN = x$,
AP

$AP = y$, farà $ay = bx$. Per mezzo di questa curva cercava Dinoftrate meccanicamente la quadratura del circolo.

Quadratrice di Tschirnhausen.

930. Dividasi il quarto di circolo ANB (fig. 109), e'l suo raggio AC in ugal numero di parti come nel primo caso. Dai punti P, p &c. si tirino le rette PM, pm &c. parallele a CB, e dai punti N, n &c. le NM, nm &c. parallele ad AC; si uniscan i punti A, M, m &c., e si ha la curva AMmmB, che è la *Quadratrice* inventata da Tschirnhausen anche per la quadratura del circolo.

Poichè $AB : AN :: AC : AP$, anche questa curva avrà l'equazione $ay = bx$.

Spirale di Archimede.

931. La periferia del circolo (fig. 110.) Appa dividasi in quante parti uguali si vuole; ed in altrettante si divida il raggio CA. Si faccia indi $CM =$ ad una parte del raggio, $Cm = 2$ parti del raggio, a 3 &c. La curva Mmm è la *Spirale* inventata da Archimede.

Anche questa curva serve per la quadratura meccanica del circolo. Poichè essendo AP : alla periferia:: CM : al raggio; se le periferia $= p$, $AC = r$, $AP = x$, $PM = y$; farà $CM = r - y$, dunque $p:r::x:r - y$, dunque $pr = py = rx$. E se $CM = y$, si avrà $rx = py$, equazione comune alle *Quadratrici*.

Logaritmica.

932. Se la retta AX (fig. 111) si divide in un numero qualunque di parti uguali, e se per i punti A, P, p &c. di divisione si tirino le parallele fra loro, e continuamente proporzionali; le estremità N, M, m &c.

&c. di queste ultime linee, formeranno la *Logaritmica*, o sia *Logistica*.

Le ascisse AP , Ap &c. son i logaritmi delle Ordinate PM , pm &c.

Onde se $AP = x$, $Ap = u$, $PM = y$, $pm = z$, ed i logaritmi di y e z sien ly , lz , sarà $x = ly$, $u = lz$; e per conseguenza $x : u :: ly : lz$, cioè i denominatori delle ragioni $AN : PM$, e $AN : pm$ son fra loro come le ascisse AP o Ap .

Perciò si posson far infinite altre *Logaritmiche*, se si fa $x : u :: ly : lz$.

E poichè le semiordinate pm decrescono continuamente in ragione che AN continuamente cresce rapporto a pm , la *Logaritmica* continuamente più si avvicina all'asse AX . E se si suppone $pm = 0$, la ragione di AN sarà cresciuta all'infinito. Onde la *Logaritmica* non può toccar l'asse, che ad una distanza infinita, perciò AX è il suo Asintoto.

Logaritmica Spirale.

933. Dividasi il quarto di circolo in qualunque numero di parti uguali ai punti (fig. 108) N , n , n &c. e dai raggi CN , Cn , Cn &c., si tolgano delle parti continuamente proporzionali CM , Cm , Cm &c.; i punti M , m , m &c. formeranno la *Logaritmica Spirale*. Onde gli Archi AN , An &c. son i logaritmi delle ordinate o de' raggi CM , Cm &c.

Cicloide.

934. La *Cicloide*, o *Trocoide* (fig. 112) è una curva descritta dal movimento d' un punto A della circonferenza d' un circolo, mentre che il circolo fa una rivoluzione sopra la retta AP . Lorchè una ruota di carrozza gira, un de' chiodi della sua circonferenza descrive nell'aria una *cicloide*.

935. Dalla generazione di questa curva si deducono facilmente queste proprietà.

1.° La linea retta $AP \equiv$ alla circonferenza del circolo $AB\ CD$, ed $AE \equiv$ alla semicirconferenza dello stesso circolo.

2.° In qualunque situazione sia il circolo generatore, $Ad \equiv$ all'arco ad ; e siccome $ad \equiv de$, farà $ad \equiv$ all'arco del circolo generatore dF .

3.° La lunghezza della *cicloide* intiera è ugal a quattro volte il diametro del circolo generatore.

4.° Lo spazio *Cicloideale* ΔFP è triplo dell'aja del circolo generatore.

5.° Una porzione qualunque FI della curva presa dalla sommità, è sempre ugal al doppio della corda corrispondente Fb del circolo. E la tangente GI all'estremità I è sempre parallela alla stessa corda Fb .

Se il circolo gira, e nel tempo stesso avanza in maniera, che il suo movimento rettilineo sia più grande del suo movimento circolare; allora si avrà una *Cicloide allungata*, e la base AP è più grande della circonferenza del circolo generatore.

Al contrario, se il movimento rettilineo del circolo è minore del movimento circolare; si ha allora una *Cicloide accorciata*, e la sua base è minore della circonferenza del circolo.

Lo spazio *Cicloideale* è lo spazio rinchiuso dalla *Cicloide* e dalla sua base. Questo spazio è triplo del Circolo generatore. La dimostrazione n'è facile per mezzo del calcolo Integrale. Si può dunque saltarla, per ritornarvi dopo che si avrà appreso quel calcolo.

Dimost. Sia x l'ascissa del circolo generatore presa alla sommità della *Cicloide*, y l'ordinata del semicircolo, e z quella della *Cicloide*. L'arco corrispondente del circolo sarà $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$, a essendo il raggio del

circolo, e per la proprietà della *Cicloide* si avrà $z = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}} = \sqrt{2ax-xx} + \int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$. Multipli-

can.

candosi quella quantita per dx , darà per l' elemento adx

dell'aja della Cicloide $dx \sqrt{2ax-x^2} + dx \frac{\int \sqrt{2ax-xx}}{adx}$,

di cui l' integrale è $\int dx \sqrt{2ax-x^2} + x \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-xx}}$

$\int \frac{axdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$; D' onde è facile conchiudere, che la

metà dello spazio Cicloidale = 1.º al semicircolo, 2.º al diametro moltiplicato per la semicirconferenza, vale a dire al doppio del circolo intiero, da dove bisogna sottrarre il prodotto del raggio per questa semicirconferenza, cioè il circolo intiero; onde la metà dello spazio Cicloidale è ugual a tre volte il semicircolo. Dunque lo spazio Cicloidale = tre volte il circolo generatore.

Si può dimostrare ancora con un metodo semplicissimo, che lo spazio racchiuso tra il semicircolo e la semicicloide è ugual al circolo generatore. Si prendono due ordinate della Cicloide terminate al Circolo e ad ugual distanza dal centro; la somma di queste ordinate sarà ugual al semicircolo. Donde è facile dimostrare, dividendo lo spazio Cicloidale in piccoli trapezi, che l'aja di due trapezi presi insieme è ugual al prodotto della semicirconferenza per il raggio, cioè ugual al circolo.

Epicycloide.

936. L' *Epicycloide* è una curva generata dalla rivoluzione d'un punto della circonferenza d'un circolo, il quale si muove girando sulla parte convessa o concava d'un altro circolo.

Se il circolo generatore si muove sulla convessità della circonferenza, diceli *epicycloide superiore ed esteriore*; se si muove sulla concavità, l' *epicycloide* si chiama *inferiore o interna*. Vedi de l' *Hopital Infinitement*

ment petits . Accad. Royal des Scien. anno 1728
1732.

937. Tutte queste ed altre curve Trascendenti non hanno equazione algebrica; e benchè per alcune si sia posta qualche equazione, si è però potuto accorgere, che si son presi degli archi circolari nel numero delle indeterminate, e con ciò non si fan certe equazioni algebriche. Onde l'equazione delle Curve Trascendenti o Meccaniche non può esser espressa che dall'equazione differenziale tralle dy e le dx .

Sviluppata.

938. La *sviluppata* è una curva che si dà da sviluppare, e che sviluppandosi descrive un'altra curva.

Supponghasi (fig. 105 num. 2) un filo esattamente disteso sopra una curva $ABCG$; e supponghasi il filo fissato in G e per tutto altrove libero come in A . Se si fa mover l'estremità A del filo da A verso F , sviluppandolo, e procurando che la parte sviluppata HD tocchi sempre nella sua estremità H la curva AHG ; quando il filo sarà divenuto intieramente dritto, e che non sarà più che una tangente FG al punto G della curva, è chiaro che l'estremità A nel suo moto da A in F avrà descritto la curva $ADEF$. La prima curva $ABCG$ si chiama la *Sviluppata*; ciascuna delle sue tangenti BD , CE &c. comprese tra essa e la curva $ADEF$, dicasi *raggio della sviluppata*, o *raggio osculatore della curva ADEF* ne' punti rispettivi D , E &c.; e i cerchi, de' quali gli osculatori BD , CE son raggi, diconsi *cerchi osculatori della curva ADEF* in D , E &c.; e finalmente la nuova curva risultante dallo sviluppamento della prima curva cominciato da A si chiama la *curva sviluppante* o *curva descritta dallo sviluppamento*.

Ogni curva può concepirsi come formata dallo sviluppamento d'un'altra; e si può proporre di trovar la curva, dal cui sviluppamento un'altra è formata, ch'è lo stesso che trovar il raggio della *sviluppata* in tut-
ti

ti i punti della *svilupante*; perchè trovata una volta la lunghezza del raggio, l'estremità di questo raggio sarà un punto della *svilupata*. Così si avran quanti punti si vorranno della *svilupata*, la quale effettivamente non è altro che la serie de' lati infinitamente piccoli formati dal concorso de' raggi della *svilupata* infinitamente vicini.

La Teoria della *svilupata* è di grandissimo uso per la misura delle curve, e per le Forze Centrali.

939. E' innumerabil il numero delle altre curve sì Algebriche come Trascendenti, che si posson inventare da' Geometri.

Di altre curve utili per gli Artisti, e particolarmente per gli Architetti per la costruzione delle volte, se ne parlerà altrove nelle Matematiche Miste.

CAPITOLO IV.

De' Luoghi Geometrici.

940. **L**uogo Geometrico significa una linea per mezzo di cui si risolve un problema geometrico.

941. Un *Luogo* è una linea, di cui ciascun punto può ugualmente risolvere un problema indeterminato. Se non ci vuol una retta per costruir l'equazione del problema, il luogo si chiama allora *Luogo alla linea retta*; se ci vuol un circolo, dicesi *luogo al circolo*; se una parabola, *luogo alla parabola*; se un' Elissi, *luogo all' Elissi*.

942. Per ben concepire la natura de' *Luoghi geometrici*, suppongansi due rette incognite variabili (Fig. 113, e 114) AP, PM, che facciano fra loro un angolo dato qualunque APM, di cui un lato, per esempio, AP (che ha la sua origine fissa in A, e che si estende indefinitamente in una direzione data) dicasi x, e l'altro lato PM (che cambia continuamente di po-
sizio-

fizione e di grandezza, ma che resta sempre parallelo a se stesso) dicasi y .

Suppongasì di più un'equazione, che non contenga altre incognite che queste due quantità x , y , unite con quantità cognite, e che questa equazione esprima il rapporto della variabile AP o sia x , al valore di PM, o dell' y corrispondente.

Finalmente s'immagini, che all'estremità di ciascun valore possibile di x si abbia in effetto delineata la y corrispondente secondo è stato determinato da questa equazione. La linea retta o curva, che passerà per l'estremità di tutte le y così delineate, o per tutti i punti M, sarà generalmente nominata *Luogo Geometrico*, e luogo dell'equazione proposta in particolare.

943. I *Luoghi* sono di differenti ordini secondo il numero delle dimensioni, alle quali la quantità indeterminata s'inalza nell'equazione. Onde sarà un *luogo del primo ordine*, se l'equazione è $x = \frac{ay}{c}$; *luogo del secondo ordine*, se l'equazione è $y^2 = ax$, o $y^2 = a^2 - x^2$ &c.; *luogo del terzo ordine*, se $y^3 = a^3x$, o $y^3 = ax^2 - x^3$ &c.

944. Tutte l'equazioni, delle quali i *Luoghi* sono del primo ordine possono ridursi a qualcuna delle quattro formole seguenti.

$$1.^{\circ} y = \frac{bx}{a}$$

$$2.^{\circ} y = \frac{bx}{a} + c$$

$$3.^{\circ} y = \frac{bx}{a} - c$$

$$4.^{\circ} y = c - \frac{bx}{a}$$

In queste formole si suppone sempre, che la quantità incognita y si sia liberata dalle frazioni; che la frazione, che moltiplica l'altra incognita x , sia ridotta a questa espressione $\frac{b}{a}$; e che tutti gli altri termini sieno ridotti a questo $+c$.

Il luogo della prima formola è subito determinato, poichè è evidente, che egli è una retta, che taglia l'asse nella sua origine A , e che fa con lui un angolo tale che le due incognite x , y sieno sempre fra loro come a a b .

Or supponendo questo primo luogo cognito, bisognerà per trovar il calcolo della seconda formola $y =$

$\frac{bx}{a} + c$, prender prima sulla linea AP una parte $AB =$

a (fig. 115), e tirare $BE = b$, $AD = c$, parallele tutte a PM . Si tiri poscia dallo stesso lato $A|P$ e verso E la linea AE d'una lunghezza indefinita, e la linea retta indefinita DM parallela ad AE . Sarà la linea DM il luogo dell'equazione, o la formola che si vuol costruire. Perchè se per il punto qualunque M di questa linea si tira MP parallela ad AQ , i triangoli ABE , APF faran simili; onde si avrà

$AB (a) : BE (b) :: AP (x) : PF = \frac{bx}{a}$, e per conseguenza $PM (y) = PF \frac{bx}{a} + FM (c)$. Se si fa $c =$

0 , vale a dire, se i punti D , A cadono l'uno sull'altro, e DM sopra AF , la linea AF farà allora il luogo dell'equazione $y = \frac{bx}{a}$.

Per trovar il luogo della terza formola, bisognerà far in questa maniera. Facciasi $AB = a$ (fig. 116), e si tirino le rette $BE = b$, $AD = c$, parallele a PM , una da una parte di AP , l'altra dall'altra parte:

te: e per i punti A, E si tiri la retta AE, prolungata indefinitamente verso E, e per il punto D si tiri la linea DM parallela ad AE: La retta indefinita GM sarà il luogo cercato. Perchè si avrà sempre

$$PM(\gamma) = PF \frac{(bx)}{(a)} - FM(c).$$

Finalmente per trovar il luogo della quarta formola, si faccia sopra AP (fig. 117.) $AB = a$, e $BE = b$, $AD = c$, l'una di qua di AP, l'altra di là; e per i punti A, E si tiri AE prolungata indefinitamente verso E, e per il punto D la linea DM parallela ad AE; Sarà DG il luogo cercato. Perchè se per uno de' suoi punti qualunque M si tira la linea MP parallela ad AQ, si avrà sempre $PM(\gamma) = FM(c) - PF$
(bx)

(a)

945. Da ciò siegue, che i luoghi del primo grado non hanno che le sole linee rette, poichè tutte l'equazioni possibili del primo grado si riducono a qualcuna delle formole precedenti.

946. Tutti i luoghi del secondo grado non possono essere che Sezioni Coniche, cioè Parabola, Ellissi, o Circolo, che è una specie d'Ellissi, ed Iperbole, che in certi casi divien equilatera.

Se si suppone dunque data un'equazione indeterminata, di cui il luogo sia del secondo grado, e se si cerca descrivere la Sezione Conica che ne è il luogo; bisognerà prima di tutto considerar una Parabola, un'Ellissi, o un'Iperbole qualunque rapportandola a rette o a coordinate tali, che l'equazione, che n' esprimerà la natura, si trovi esser perciò la più composta e la più generale che sia possibile. Scoperte quelle equazioni le più generali, o quelle formole delle tre Sezioni Coniche e delle loro suddivisioni, ed esaminati i loro caratteri, sarà facile conchiudere a qual di loro si riferirà l'equazione proposta, vale a dire si troverà qual'è la Sezione Conica, che questa equazione avrà per

luogo. Per conseguire ciò, non si avrà dunque da far altro che paragonare tutti i termini dell' equazione proposta con quelli dell' equazione generale del *luogo*, al quale si avrà trovato che quella equazione si riferisca: ciò determinerà i coefficienti di questa equazione generale, ovvero le rette che devon esser date di proporzione e di grandezza per descriver il *luogo*; e determinati una volta questi coefficienti, o queste rette, si descriverà facilmente il luogo coll' ajuto de' Teoremi noti delle Sezioni Coniche.

947. Sieno, per esempio, $AP(x)$, $PM(y)$ (fig. 118.) due rette incognite variabili; e m, p, r, s , sieno rette date. Sulla linea AP prendasi la porzione $AB = m$, e si tiri $BE = n$, $AD = r$; e per il punto A si tiri $AE = e$, e per il punto D la linea indefinita DG parallela ad AE : sopra DG si prenda $DC = s$, e prendendo CG per diametro, le ordinate parallele a PM , e la linea $CH = p$ per parametro, descrivasi la Parabola CM .

Questa parabola farà il luogo della formola generale seguente.

$$y^2 - \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2}x^2 = 0$$

$$- 2ry + \frac{2nr}{m}x$$

$$- \frac{ep}{m}x$$

$$+ r^2$$

$$+ p^2$$

Perchè se da uno de' suoi punti qualunque M si tira l'ordinata PM , i triangoli ABE , APF faran simili, e per conseguenza

$$AB(m) : AE(e) :: AP(x) ; AF \text{ o } DG = \frac{en}{m}, e$$

$$AB$$

$AB(m) : BE(n) :: AP(x) PF = \frac{n^2}{m}$, e per conseguen-
 za GM o $PM - PF - FG = y - \frac{n^2}{m} = r$, e CG o
 $DG - DC = \frac{en}{m}$. Ma per la natura della parabola

$GM = CG \times CH$. Quest' ultima equazione diverrà
 la stessa formola generale, se vi si sostituiscono invece
 delle rette che son impiegate, i loro valori sopra se-
 gnati.

Quest' equazione è la più generale che possa appar-
 tener alla parabola, poichè racchiude 1.º il quadrato
 di ciascuna delle incognite x, y , 2.º il prodotto di x, y
 dell' una per l' altra, 3.º le incognite lineari x, y , ed
 un termine tutto costante. Un' equazione del secondo
 grado, in cui si trovano miste le indeterminate x, y ,
 non può contenere un più gran numero di termini.

943. Per il punto fisso A si tiri la retta indefinita
 AQ (fig. 119) parallela a PM ; prendasi $AB = m$,
 si tiri $BE = n$ parallela ad AP , e per i punti deter-
 minati A, E si tiri $AE = e$: sopra AP prendasi $AD =$
 r , si tiri l' indefinita DG parallela ad AE , e prendasi
 la porzione $DC = s$. Finalmente prendendo per dia-
 metro CG , e supponendo le ordinate parallele ad AP ,
 e per parametro la linea $CH = p$, descrivasi una pa-
 rabola GM . Questa parabola sarà il luogo di questa
 seconda equazione o formola,

$$\begin{aligned}
 x^2 - \frac{2n}{m}yx + \frac{n^2}{m^2}y^2 &= 0 \\
 &= 2rx - \frac{ep}{m}y \\
 &\quad + \frac{r^2}{p}y
 \end{aligned}$$

Cc 2

Per

Perchè se da un punto qualunque M si tira la retta MQ parallela ad AP, si avrà $AB(m):AE(e)::$

$$AQ \text{ o } PM(y):AF \text{ o } DG = \frac{ey}{ny}, \text{ e } AB(m):BE(n)::AQ(y):QF = \frac{ny}{mny}, \text{ e per conseguenza } Gm \text{ o } QM - QF - FG = x - \frac{ey}{m} - r; \text{ e } CG \text{ o } DG - DG =$$

$\frac{ey}{m} - s$. E così per mezzo della proprietà della parabola, si troverà ancora la seconda dell'equazioni generali o delle formole precedenti. Nella stessa maniera si troveranno l'equazioni generali o le formole delle altre Sezioni Coniche.

949. Se ora si cerca di descrivere la parabola, che deve esser il luogo dell'equazione seguente, che si supporrà data $y^2 - 2ay - bx + c^2 = 0$; siccome y^2 si trova qui senza frazione, come nella prima formola, sarà meglio paragonare la proposta colla prima formola che coll'altra.

E primieramente poichè il rettangolo xy non si trova nella proposta, o può supporfi moltiplicato per o , si conchiuderà che la frazione $\frac{2n}{m}$ debba esser $= 0$, e

per conseguenza farà anche x , o $BE = 0$; in maniera che i punti B, E devon essere coincidenti, e la retta AE deve cadere sopra AB, ed esserle uguale, vale a dire che $m = e$. Distruggendo dunque nelle

formole tutti i termini affetti di $\frac{n}{m}$, o di n , e sostituendo per tutto m invece di e , si cambierà in $y^2 -$

$2ry - px + r^2 + ps = 0$. E paragonando ancora i termini corrispondenti $-2ry$, e $-2ay$, $-px$, e $-bx$, finalmente $r^2 + ps$, e c^2 , si avrà $r = a$, $p = b$, e sostituendo questi valori nell'ultima equazione di compar-

parazione, $a^2 + bs = c^2$, ovvero $s = \frac{c^2 - a^2}{b}$, che per

conseguenza farà una quantità negativa, se a è più grande di c , come si è qui supposta. Non servirebbe a niente paragonar i due primi termini, perchè essendo gli stessi dall'una e l'altra parte, cioè y^2 , quella comparazione non potrebbe far scoprir niente.

Or trovati così i valori di m , n , r , p , s , si costruirà il luogo cercato per i mezzi che han servito alla costruzione della formola, e nella maniera seguente.

Siccome $BE(n) = 0$, ed i punti B, E (fig. 120.) coincidono, ovvero AE calca sopra AP, bisognerà per questa ragione tirare dal punto A la retta AD (r) parallela a PM $= a$, e la retta DG parallela ad AP,

in cui si segnerà DC (s) $= \frac{a^2 - c^2}{b}$, la quale deve esser presa al di là dell'origine in un senso opposto a DG o AP, perchè la frazione $\frac{a^2 - c^2}{b}$ è negativa

per supposizione. Riguardando poi DC come diametro, e prendendo le ordinate parallele a PM, e la retta CH (p) $= b$ per parametro, si descriverà una parabola; la quale sarà il luogo dell'equazione data, com'è facile a dimostrarsi.

950. Se il quadrato x^2 si fosse trovato senza frazione nella proposta, in tal caso sarebbe più naturale servirsi della seconda formola.

Del resto è chiaro, che per mezzo d'una divisione facilissima si può liberare dalle frazioni quel quadrato che si vorrà; e se si vedesse che la comparazione de' termini ne divenisse più semplice, bisognerebbe incominciare da questa divisione.

951. Ecco un'idea del metodo per costruir i luoghi dell'equazioni, lorchè devon esser Sezioni Coniche, cioè lorchè l'equazioni non passan il secondo grado;

poichè collo stesso metodo si determinan i luoghi all' Elissi ed all' Iperbole.

952. Ma data un' equazione , invece di domandare , come finora si è fatto , di costruirne il *luogo* ; si potrebbe domandar ancora di quale specie debba essere la Sezione Conica che ne è il *luogo* ; se è una Parabola, un' Elissi, un Circolo, un' Iperbole equilatera o non equilatera.

Per far questo esame , bisogna prima far passare da una parte tutti i termini dell' equazione , in maniera che resti zero dall' altra parte . Ciò fatto posson presentarsi due casi differenti .

Primo caso . Supposto che il rettangolo xy non si trovi nell' equazione ; allora 1.^o se non vi è che uno de' due quadrati y^2 , o x^2 , il *luogo* sarà una parabola . 2.^o Se vi si trovan tutti e due i quadrati in una volta, e collo stesso segno, il *luogo* sarà un' Elissi ; ed in particolar un Circolo, lorchè niuno de' due quadrati avrà coefficiente , ovvero se avessero gli stessi coefficienti, e di più l' angolo delle coordinate fosse retto . 3.^o Se i due quadrati si trovano nell' equazione, e con segni differenti , il *luogo* sarà un' Iperbole , la quale diverrà equilatera nelle stesse supposizioni che fanno dell' Elissi un circolo .

Secondo caso . Quando il rettangolo xy si trova nell' equazione , allora 1.^o Se non si trova alcuno de' due quadrati, o se ne trova un solo , e tutti due con segni differenti, o finalmente tutti due cogli stessi segni, e se il quadrato del coefficiente che moltiplica xy è maggiore del quadruplo del rettangolo de' coefficienti di xx , e di yy ; in tutte queste supposizioni il *luogo* sarà un' Iperbole . 2.^o Se i due quadrati vi si trovan sempre, e collo stesso segno, e se il quadrato del coefficiente xy è più piccolo del quadruplo del rettangolo de' coefficienti di xx , yy ; il *luogo* sarà allora un' Elissi . 3.^o Finalmente se nella stessa supposizione questo quadrato ed il quadruplo del rettangolo precedente son uguali fra loro, il *luogo* sarà una Parabola .

CAPITOLO V.

Del Calcolo Infinitesimale.

953. **O**gni grandezza può considerarsi come prodotta o ridotta ad un certo stato per mezzo d'un accrescimento o decrescimento continuo. Questo accrescimento o decrescimento può immaginarsi cagionato da una quantità, che agisce per gradi uguali ed infinitamente piccoli, determinati però da una stessa legge. Quelli gradi *infinitamente piccoli* si chiaman le *Differenze*, o le *Differenziali* della grandezza.

Quel calcolo, in cui si fanno entrar l'espressioni di quelli gradi *infinitamente piccoli*, chiamasi *Calcolo Infinitesimale*.

954. Per comprender l'essenza di questo Calcolo, convien ben ricordarsi di quel che si è detto dell'*Infinito* (316). 1°. L'idea che si ha dell'*Infinito*, è un'idea astratta. Si concepisce prima un'estensione *finita*, indi se ne tolgon i *limiti*, e così si concepisce *infinita*. 2°. L'*infinito* è il *limite del finito*; cioè il termine, cui il finito tende sempre senza giammai arrivarvi, ma vi si accosta sempre vieppiù, benchè giammai vi arrivi. Quando si dice, per esempio, che una *curva è un poligono d'infiniti lati*, s'intende dire, che questa curva è il *limite de' poligoni* che si posson iscriverle e circoscriverle, cioè che questi poligoni quanti più lati avranno, più si accosteranno ad esser uguali alla curva, da cui si può supporre che differiscano quanto poco si vuole, aumentando a volontà il numero de' loro lati (506). Onde queste comuni espressioni poco esatte dell'*Infinito*, devon riguardarsi come maniere abbreviate d'esprimersi, inventate per enunciare una verità, di cui lo sviluppo e l'enunciazione esatto avrebbero richiesto molte più parole.

955. Così per quantità *infinitamente piccole* non si devon già intendere quantità d'una picciolezza *infinita*.

ra reale ed esistente, ma d'una tal picciolezza che sia sempre minore di qualunque quantità assegnabile.

956. Il *Calcolo Infinitesimale* si divide in *Differenziale* ed in *Integrale*. Il calcolo *Differenziale* (chiamato da Nevvton e dagli Inglesi *Metodo delle Flussioni*, perchè han considerato gli aumenti momentanei della quantità come generati dal *flusso* o sia scorrimento del punto per formar la linea, del *flusso* della linea per la superficie, del *flusso* della superficie per il solido) consiste a trovar una quantità infinitamente piccola, la quale presa un numero infinito di volte, sia uguale ad una quantità data. Il *Calcolo Integrale* al contrario consiste a trovar la quantità, alla qual appartiene la data differenza infinitamente piccola. In quello si conosce la somma, e si cerca la differenza infinitamente piccola; in questo si conosce la differenza infinitamente piccola, e si cerca la somma.

957. Per ben comprendere la *Differenziale*, o sia una *quantità infinitamente piccola*, si consideri la Curva CAB , in cui si voglia trovar la tangente al punto (fig. 121.) A . Si prendan ad arbitrio su questa curva due punti A, B , per i quali si tiri una retta AB prolungata indefinitamente verso Z ed X , la quale taglia la curva, e perciò la XZ si chiama secante. S'immagini poscia una linea fissa CE posta a volontà nel piano su cui è delineata la curva, e per i due punti A, B si tirino le ordinate AD, BE perpendicolari alla fissa CE , ch'è l'asse della curva. E' evidente che la posizione della secante è determinata dalla distanza DE delle due ordinate e dalla loro differenza BO ; in maniera che se si conoscesse questa distanza e questa differenza, o anche il rapporto della distanza delle ordinate alla loro differenza, si avrebbe la posizione della secante. S'immagini ora, che de' due punti A, B supposti sulla curva, ve ne sia uno, per esempio, B , che si avvicini continuamente all'altro A , e che per quest'altro punto A supposto fisso si abbia tirata una tangente AP alla curva: E' facile vedere, che la secante AB tirata per questi due
punti

punti A, B, de' quali uno è supposto accostarsi sempre più all' altro, si accosterà continuamente alla tangente, e finalmente diverrà la tangente stessa, lorchè i due punti si saran confusi in un solo. La tangente è dunque il *limite* delle secanti, il termine cui ella si accostano sempre più, senza pertanto giammai arrivarvi finchè sono secanti, ma cui elle posson accostarvi quanto vicino si vorrà. Già si è visto, che la posizione della secante è determinata dal rapporto della differenza BO delle ordinate alla loro distanza DE. Dunque se si cerca il limite di questo rapporto, vale a dire il valore con cui questo rapporto si accosta sempre viepiù a misura che una dell' ordinate si accosta all' altra, questo *limite* darà la posizione della tangente, poichè la tangente è il limite delle secanti.

958. Il *Calcolo Differenziale* dunque consiste a trovare il limite del rapporto tralla differenza finita di due quantità e la differenza finita di due altre quantità, che hanno colle due prime un' analogia d' una legge nota.

E' evidente, che quanto più ciascuna di queste differenze è piccola, più il loro rapporto si approssima al termine che si cerca. E' inoltre evidente, che finchè queste differenze non son assolutamente nulle, il rapporto non è esattamente ugual a questo limite; e che quando son nulle, non vi è più vero rapporto, perchè non si dà rapporto fra due cose che non esistono punto. Ma il *limite* del rapporto, che queste differenze avean tra loro quand' eran ancora qualche cosa, è un limite tuttavia reale, ed è il valore di questo limite, che conduce a determinare (come si è detto) il valore della tangente.

Se, per esempio, $A = 2b + b^2$, è chiaro, 1.^o che il rapporto di A a b sarà sempre maggiore del numero 2, finchè A e b avran qualche valore. 2.^o che il rapporto di A a b si approssimerà più ad esser ugual a 2, quanto più piccola sarà b ; e che questo rapporto potrà approssimarsi a 2 quanto più si vorrà, prendendo b sempre più piccola. Donde siegue, che il numero

ro α è il limite del rapporto di queste quantità; e lorchè una di queste due quantità divien nulla, divien nulla anche l'altra, ed allora non vi è fra loro alcun rapporto; ma finchè elle son qualche cosa, α è il limite del loro rapporto.

959. Dicesi *costante* ogni quantità, che si considera come giunta ad un stato fisso.

Variabile chiamasi quella quantità che si riguarda come attualmente suscettibile d'accrescimento o di diminuzione. In un dato circolo, il diametro è una *costante*, una corda è una *variabile*. Le *costanti* si esprimon ordinariamente colle prime lettere dell'alfabeto, e le *variabili* coll'ultime.

960. La differenziale d'una variabile si esprime per mezzo della lettera d ; onde adx significa il prodotto della *costante* a per l'accrescimento infinitamente piccolo della *variabile* x , cosichè d non esprime alcuna funzione della quantità, ma serve soltanto di *caratteristica* per denotare un infinitamente piccolo.

961. Quanto si è detto (316) degl'infiniti di differenti ordini, si applica ugualmente ai differenti ordini d'*infinitamente piccoli*. Onde lorchè si dice che una *quantità è infinitamente piccola del secondo ordine*, cioè infinitamente piccola rapporto ad una quantità che è già infinitamente piccola, ciò significa, che il rapporto della prima di queste quantità alla seconda è sempre tanto più piccolo, quanto più piccola è supposta questa seconda quantità; e che il rapporto può supporli quanto piccolo si vuole, supponendo perciò la seconda quantità abbastanza piccola.

Così una quantità infinitamente piccola del 3.^o ordine è quella, di cui il prodotto per una quantità finita è tanto più piccolo rapporto al quadrato d'un'altra quantità, quanto quest'ultima è supposta più piccola; in maniera che questo rapporto può supporli quanto piccolo si vuole.

962. Da questi principj è facile dedurre l'utilità del Calcolo Differenziale per iscoprire la natura e le proprietà delle curve. Perchè consistendo il principio di questo

questo calcolo a riguardar le curve come il *limite* de' poligoni, è chiaro, che le quantità finite, il rapporto delle quali determinerebbe le proprietà di questi poligoni, divengon nulle nelle curve; e che invece del rapporto di quelle quantità, è il *limite* del loro rapporto che vien determinato dal *calcolo differenziale*, a fin di trovar con questo mezzo le proprietà delle curve, considerate come *limite* de' poligoni.

963. Quindi si vede, che il *Calcolo differenziale* non dà (per così dire) le proprietà d' una curva che a ciascun punto, poichè si restringe a dare a ciascun punto il *limite* del rapporto di certe quantità, che svaniscono nella curva, e che son finite nel poligono.

694. Lorchè nel *Calcolo Infinitesimale* si fa entrar l' espressione dell' accrescimento o del decrescimento infinitamente piccolo d' una o di più variabili, il calcolo si chiama *Differenziale*, che è il primo ramo del *Calcolo Infinitesimale*. Onde *differenziare* un' equazione o una formola, è cercare l' espressione Algebraica delle quantità che forman il grado infinitamente piccolo d' accrescimento o di decrescimento per ciascuna delle variabili, che sono nell' equazione o nella formola proposta.

Il *Calcolo Integrale*, ch' è l' altro ramo del *Calcolo Infinitesimale*, dà la maniera di rimontare (lorchè si può) dal *limite* del rapporto, che è fralle *differenze* delle quantità finite, al rapporto stesso di quelle quantità. Egli assegna quest' ultimo rapporto, e conduce (per quanto è possibile) alla cognizione della curva in quell' estensione finita, che si giudica a proposito, dando il mezzo d' iscrivere in questa curva qual poligono si vorrà, ovvero di conoscer la proprietà di questo poligono e la porzione de' suoi lati.

Onde *Integrare* un' equazione o una formola *differenziale*, è lo stesso che ricercare quale ha dovuto essere l' equazione o la formola prima d' essere stata *differenziata*; cioè cercar il risultato di tutti gli accrescimenti, de' quali l' espressione differenziata non conteneva che un grado infinitamente piccolo per ciascuna variabile.

CAPITOLO VI.

Del Calcolo Differenziale.

Regole di Differenziare.

965. **L**A differenza di ax è adx .

Dim. E' chiaro, che DF essendo l' accrescimento (fig. 122.) del lato variabile AD , mentre che il lato BD è costante, il parallelogrammo $ED = axdx$ è l'accrescimento del parallelogrammo $CD = ax$.

966. *Corol.* La differenziale di $ax + by - cx = adx + bdy - cdx$; quella di $ab + b^2 - cy = bdy + 2bdy - cdy$; quella di $a^2 - bcz = -bcdz$. Così $d(x + y + z) = dx + dy + dz$.

Onde I. Regola: la differenza della somma di molte quantità è ugual alla somma delle loro differenze.

967. La differenza di $xy = xdy + ydx$.

Dim. Per gli accrescimenti dx , dy , il rettangolo (fig. 123) CD è stato aumentato di tre rettangoli infinitamente piccoli $x dy$, $y dx$, $dx dy$. Quest' ultimo deve esser negletto, perchè è un infinitamente piccolo del secondo ordine (320); dunque l' accrescimento infinitamente piccolo del rettangolo $xy = xdy + ydx$.
Onde

II. Regola: la differenza è un prodotto composto di due quantità variabili, sarà sempre la prima quantità moltiplicata per la differenza della seconda, + la seconda quantità moltiplicata per la differenza della prima.

968. *Corol.* 1.^a La differenza del quadrato $xx = xdx + xdx = 2xdx$. E quella di $axx = axdx + axdx = 2axdx$.

969. *Coroll.* II. La differenza di $xyz = yzdx + xzdy + xydz$. Onde

III. Regola: la differenza d' un prodotto composto di tre quantità variabili, sarà sempre il prodotto delle quantità poste due a due per la differenza della terza.

970. Coroll. III. La differenza del cubo $xxx = xdx + xdx + xdx = 3x^2dx = 3x^3 - 1dx$. Quella di $x^4 = 4x^3dx$. In generale, la differenza di $x^m = mx^{m-1}dx$.

971. La differenza di $\sqrt[n]{x} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$

Dim. $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{m}{n}}$ (148): La differenza di $x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$

$dx = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$; dunque &c.

972. La differenza di $\frac{1}{x^m} = -mx^{m-1}dx$.

Dim. $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$ (155); ma la differenza di $x^{-m} = -mx^{m-1}dx$ (971); dunque &c.

973. La differenza di $\sqrt{xy+yy} = \frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$.

Dim. Sia $\sqrt{xy+yy} = u$, sarà $xy+yy = uu$, e $ydx + xdy + 2ydy = 2udu$. Dunque $du = \frac{ydx + xdy + 2ydy}{2u}$; ma $2u = 2\sqrt{xy+yy}$, dunque $du = \frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$; ma du è differenza di u o sia

$\sqrt{xy+yy}$

di

di $\sqrt{xv+xy}$, dunque &c.

974. La differenza di $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{m dx}{n \sqrt{x}}$

Dim. $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{n-m}{n \sqrt{x}} \quad (155) = \frac{m}{n} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (148) = \frac{m}{n} \frac{1}{\sqrt{x}}$

$dx \quad (971) = \frac{m}{n} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad dx, \text{ Ma } \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$

$\frac{1}{x^{1/2}} \quad (155) = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{1/2}} \quad (148)$

Dunque $\frac{m}{n} \frac{1}{x^{1/2}} dx = \frac{m}{n} \frac{1}{x^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{m}{n} \frac{1}{x} dx = \frac{m}{n} \frac{1}{x}$

(ax^{m+1})
975. $d \frac{1}{(m+1)} = ax^{m+1} dx$

Dim. $d \frac{1}{(m+1)} = \frac{m+1}{m+1} \frac{1}{m+1} dx = \frac{1}{m+1} dx = ax^{m+1}$

dx; dunque &c.

976. $d \frac{(x)}{(y)} = \frac{y dx - x dy}{y^2}$

Dim.

Dim. Sia $\frac{x}{y} = t$.

$$x = ty$$

$$dx = ydt + tdy$$

$$ydt = dx - tdy$$

$$dt = \frac{dx - tdy}{y}$$

$$dt = \frac{dx}{y} - tdy$$

$$dt = \frac{y}{dx} - \frac{xd}{y}$$

$$dt = \frac{y^2}{ydx} - \frac{y^2}{xdy}$$

$$dt = \frac{y^2}{ydx} - \frac{y^2}{xdy}$$

$$dt = \frac{y^2}{ydx} - \frac{y^2}{xdy}$$

977. Corol. I. IV. Regola. La differenza d'una frazione è ugual al prodotto della differenza del numeratore per il denominatore, — al prodotto della differenza del denominatore per il numeratore, il tutto diviso per il quadrato del denominatore.

978. Corol. II. $d \frac{(y)}{(a)} = \frac{dy}{a}$. Perchè il denomi-

natore a non avendo differenza, siegue che $d \frac{(y)}{(a)} =$

$$\frac{ady}{a^2} = \frac{dy}{a}$$

979. Corol. III. $d \frac{(a)}{(x)} = \frac{-adx}{x^2}$,

$$980. \text{ Corol. IV. } d \frac{(ay)}{(x)} = \frac{axy - aydx}{xx}.$$

981. Fin quì delle *differenze prime*, cioè degl' infinitamente piccoli del primo ordine. Siccome il carattere d'una differenziale è la lettera d , così quello della differenziale di dx è ddx : e la differenziale di ddx è ddd , ovvero d^2x , d^3x &c., o anche x'' , x''' &c. in vece di ddx , d^2x &c.

La differenziale d'una quantità finita, come dx si chiama *differenziale del primo grado* o *del primo ordine*, o anche *differenza prima*.

La parte poi infinitamente piccola d'una quantità differenziale del primo grado, come ddx , $dx dx$ &c. dicesi *differenzio-differenziale*, o *differenza del secondo grado*, o anche *differenza seconda*.

Differenziale del terzo grado, o *del terzo ordine*, ovvero *differenza terza*, è la parte infinitamente piccola d'una quantità differenziale del secondo grado.

Delle Differenze Seconde.

982. La differenza seconda di ax , o sia la differenza di $adx = addx$.

Dim. La differenza seconda di ax è ax moltiplicato per il quadrato di d , dunque la differenza seconda di $ax = addx$.

983. La differenza seconda di x^m , o la differenza di $m-1$ $dx = m^{m-1}x - m^{m-2}x dx + m^{m-1}ddx$.

Dim. Sia $x^m = y$, e $dx = z$. Convien osservare, che il quadrato di dx non è nè $ddxx$, nè $dx dx$, ma dx^2 , perchè dx è una quantità semplice, e non il prodotto di d per x , poichè d è un semplice segno. Ciò posto, si ragioni così.

1.° Poi.

1.° Poichè $x^{m-1} = y$, farà $m-1 x^{m-2} dx = dy$.

2.° Essendo $dx = x$, e $x^{m-1} = y$, farà $m x^{m-2} dx = myz$.

3.° La differenza di $myz = mxdy + mydz$.

4.° Sostituiscasi a x il suo valore dx , ed a dy il suo valore $m-1 x^{m-2} dx$, e a y il suo valore x^{m-1} ; si avrà $mxdy + mydz = m \times dx \times (m-1) x^{m-2} dx + m \times x^{m-2} \times ddx$.

5.° $m \times dx \times (m-1) x^{m-2} dx = (mm - m) x^{m-2} dx^2$, perchè m coefficiente di dx deve moltiplicare $m-1$ coefficiente di $x^{m-2} dx$; e dx che ha m per coefficiente, deve moltiplicare dx , di cui il coefficiente è $m-1$.

6.° $m \times x^{m-2} \times ddx = m x^{m-2} ddx$; dunque $mxdy + mydz = (mm - m) x^{m-2} dx^2 + m x^{m-2} ddx$.

7.° La differenza di myz è la stessa che quella di $m x^{m-2} dx$ (2.°), dunque la differenza di $m x^{m-2} dx = (mm - m) x^{m-2} dx^2 + m x^{m-2} ddx$.

984. Corol. I. La differenza seconda di $x^2 = 2dx^2 + 2xdx$; perchè se $m=2$, la formola precedente diviene $(4-2) x^{2-2} dx^2 + 2 x^{2-1} ddx = 2dx^2 + 2xdx$.

985. Corol. II. La differenza seconda di $x^3 = 6xdx^2 + 3x^2 ddx$. Perchè se $m=3$, la predetta formola diviene $(9-3) x^{3-2} dx^2 + 3 x^{3-1} ddx = 6xdx^2 + 3x^2 ddx$.

986. La differenza seconda di xy , o la differenza di $ydx + xdy = yddx + xddx + 2dx dx$.

Dim. La differenza di $ydx = dx dy + yddx$ (969). La differenza di $x dy = dy dx + xddy$ (969). Dunque la differenza di $ydx + xdy = dx dy + yddx + dx dy + xddy = yddx + xddy + 2dx dy$.

987. La differenza seconda di $\frac{a}{y}$, o la differenza di $\frac{ady}{y^2} = \frac{-ayddy + 2ady^2}{y^3}$.

Dim. La differenza del numeratore $-ady = -addy$, e quella del denominatore $y^2 = 2ydy$. Poichè (977) la differenza di una frazione è composta della differenza del numeratore moltiplicata per il denominatore, — la differenza del denominatore moltiplicata per il numeratore, il tutto diviso per il quadrato del denominatore; sarà dunque la differenza di $\frac{-ady}{y^2} = \frac{-addy - ady \times 2ydy - ayyddy + 2aydy^2}{y^3} = \frac{-ayddy + 2ady^2}{y^3}$.

988. La differenza già differenziata $\frac{ydy}{dx}$, prendendo dx per una quantità costante ed invariabile, è $\frac{dyy + yddy}{dx}$.

Dim. La differenza di $ydy = dy \times dy = dy^2 + yddy$. Dunque (977) la differenza di $\frac{ydy}{dx} = \frac{dy^2 + yddy}{dx \times dx} = \frac{dy^2 + yddy}{dx^2}$.

Diffe-

Differenziando una quantità già differenziata, accade quasi sempre che la differenza prima d'una delle variabili sia diventata una quantità costante, o almeno che debba prendersi come costante.

Uso del Calcolo Differenziale per trovar le Tangenti, Sottragenti, Normali, e Sunnormali.

989. E' evidente, che per tirar una tangente in un punto dato sopra una curva, bisogna determinare sopra l'asse, sul diametro, o su qualche linea data di posizione, un punto per dove la tangente deve passare, affin d'avere due punti che ne determinino la posizione; ovvero bisogna trovaranche un punto per cui deve passare la normale al punto dato sulla curva, per poter dal dato punto inalzarvi una perpendicolare.

Sia SR la tangente che passa per la solidità dell'asse (fig. 129 e 130) o del diametro, e sia MP l'ordinata al punto dato M, e *pm* sia un'altra ordinata infinitamente vicina terminata alla tangente TM. Per M si tiri Rr parallela al diametro o all'asse, e dallo stesso punto M si tiri MN perpendicolare alla tangente o alla curva. Allora poichè il triangolo *infinitesimo* rMm rettangolo in r, è simile al triangolo (fig. 130) MRB rettangolo in R; al triangolo TSB rettangolo in S; al triangolo TPM rettangolo in P; ed al triangolo MPN rettangolo in P: Come altresì il triangolo (fig. 129) Mrm essendo simile al triangolo MRB a causa degli angoli in M opposti al vertice, e delle parallele *pm*, SR che danno gli angoli alterni r ed R uguali, onde i triangoli MRB e BST son equiangoli, e lo sono anche i triangoli BST e MPT a causa dell'angolo comune T e delle parallele SR e PM: premesse tutte queste cose, si avranno le formole seguenti

$$990. PT = \frac{ydx}{dy}, \text{ Perchè } rm : rM :: MP : PT.$$

$$991. ST = \frac{ydx - xdy}{xdy \cdot dy}. \text{ Perchè } ST = PT - PS, \text{ e } PS = x = \frac{ydy}{dy}.$$

$$992. SB = \frac{ydx - xdy}{dx}. \text{ Perchè } PT : TS :: PM : SB; \text{ ovvero } Mr : mr :: TS : SB.$$

Queste non convengono che alla figura 130.

$$993. Mm = \sqrt{dy^2 + dx^2}, \text{ e se si fa } Mm = ds, \text{ sarà } ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}. \quad ydy$$

$$994. PN = \frac{ydy}{dx}. \text{ Perchè } rm : Mr :: PM : PN.$$

$$995. TM = \frac{y\sqrt{dy^2 + dx^2}}{dy} = \frac{ydr}{dy}; \text{ perchè } rm : Mm :: PM : TM.$$

$$996. TB = \frac{\sqrt{(dy^2 + dx^2)}(ydx - xdy)}{dx dy} \text{ perchè } rm : Mm :: SB : TB.$$

$$997. MB = \frac{x\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dx}; \text{ perchè } Mr : Mm :: SP : MB.$$

$$998. MN = \frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dx}; \text{ perchè } Mr : Mm :: PM : MN.$$

$$999. TN = \frac{ydx}{dy} + \frac{ydy}{dx}; \text{ perchè } TN = TP + PN.$$

1000. Per applicare queste formole generali alle Curve, bisogna differenziarne l'equazione, e combinarne li dx e li dy , in maniera che ne risulti un'equazione

ne, di cui un membro contenga qualcuna delle formole precedenti, e l'altro racchiuda solamente quantità finite.

Sia, per esempio, l'equazione alla parabola $y^2 = x$, facendo il parametro $= 1$. La differenziale $2y dy = dx$; dunque $2y = \frac{dx}{dy}$; dunque $2y^2 = \frac{y dx}{dy}$:

ma $y^2 = x$, dunque $dx = \frac{y dx}{dy}$. Questo secondo

membro (990) è il valore di PT; dunque nella parabola $PT = 2x$, come si è veduto (835).

1001. Sia ancora l'equazione all'Elissi (819) $aayy = 2abbx - bbxx$; dunque differenziando si ha $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$, e dividendo per 2, e moltiplicando per y, si avrà $aay^2dy = abbydx - bbxydx$; ovvero

$\frac{aay^2dy}{y} = \frac{abbydx - bbxydx}{y}$; e dividendo tutto per dy, si ha

$$\frac{aayy}{y} = \frac{ydx}{dy}$$

Ma $aayy = 2abbx - bbxx$, dunque $\frac{2abbx - bbxx}{abb - bbx} =$

$$\frac{dx}{dy}, \text{ ovvero } \frac{2ax - xx}{a - x} = \frac{ydx}{dy} = PT (990), \text{ e co-}$$

me 834.

$$\text{Or } \frac{ydx}{dy} = x, \text{ dunque } \frac{2ax - xx}{a - x} = x = \frac{ydx}{dy} - \frac{xdy}{dy},$$

$$\text{dunque } \frac{2ax - x^2 - ax + x^2}{a - x} = \frac{ydx - xdy}{dy}, \text{ e ridu-}$$

$$\text{cendo farà } \frac{ax}{a - x} = \frac{ydx - xdy}{dy} = ST (991), \text{ e co-}$$

me (837).

Lo flesso è per i valori analitici d'altre linee appartenenti al punto del contatto in tutte le Sezioni Coniche, ed in altre Curve.

Per trovar i raggi della Curvatura delle Curve,

1002. Sia una curva qualunque SMK, ed il suo asse (fig. 131) SN. Qual è la sua curvatura al punto M, o nell'arco infinitesimo Mm?

Sol. Per i tre punti che formano l'arco Mm s'immagini che passi un circolo, di cui il centro sia C. Sarà MC o mC il raggio della curvatura richiesta.

Dim. Si tirino le ordinate MP, mp; la normale del punto M farà MN, e la subnormale PN. Ciò

posto, Mm, o $ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$ (993), $MN = \frac{yds}{ydy}$ (998, e 993), $PN = \frac{ydy}{dx}$ (994). Dunque $SN = x + \frac{ydy}{dx}$. Or Nn è una differenziale di SN, convien

dunque differenziare $x + \frac{ydy}{dx}$, e facendo dx costante

si ha $Nn = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{dx}$

$\frac{ds + ydd}{dx}$. Si tiri MB parallela all'asse, i triangoli

rettangoli simili MmB, Ntn danno $Mm : MB$ o $Pp ::$

$Nn : Nt$, ovvero $ds : dx :: \frac{ds^2 + yddy}{dx} : Nt = ds + \frac{yddy}{ds}$.

Dal punto N si tiri a CM la parallela NI, che dà

Nt

$$Nt = \frac{Im}{yddy}, \text{ e per conseguenza } IM = Mm - \frac{Im}{yddy} = \frac{ds - ds}{ds} = \frac{ds}{ds}.$$

Finalmente i triangoli rettangoli simili IMN, MmC, danno $IM : MN :: Mm : MC$, o $\frac{yddy}{ds} : \frac{yds}{dx} :: ds :$

$$MC = \frac{ds^2}{-dxddy} = \frac{ds^2 ds}{-dxddy}. \text{ E mettendo } dy^2 + dx^2 \text{ in luogo di } ds, \text{ si ha la formola generale del raggio della curvatura per tutte le curve rapportate ad un asse, } MC = \frac{(dy^2 + dx^2) \sqrt{dy^2 + dx^2}}{-dxddy}.$$

1003. Per applicar questa formola alle curve date, bisogna vedere per mezzo dell'equazione della curva, i valori di dx , dx^2 , dy^2 , $-ddy$, in maniera che nell'espressione di ciascuno di questi valori, non vi entri che y e delle costanti. E così sostituendo, la formola generale si troverà ridotta a quantità finite.

Nella parabola, per esempio, ove $y^2 = px$, si ha $2ydy = p dx$, dunque $dx = \frac{2ydy}{p}$, e $dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{p^2}$.

Differenziando $dx = \frac{2ydy}{p}$, ove dx deve esser una costante, poichè si è preso così nel calcolo della formola generale, si ha $0 = \frac{2ydy^2 + 2yddy}{p}$; E perchè il

primo membro di questa equazione è 0, si toglie la frazione e diviene $0 = 2dy^2 + 2yddy$; dunque $-2yddy = 2dy^2$, e $-ddy = \frac{y}{dy^2}$.

Sostituendo dunque, si ha il denominatore della

Formola generale del (1002) che è $\frac{dx^2 + dy^2}{2ydy^2} = \frac{p}{2dy^2}$.

Il numeratore poi della predetta formola generale $\frac{dx^2 + dy^2}{2ydy^2} = \frac{p}{2dy^2}$ $\frac{4yydy^2}{p^2} + dy^2 = \frac{4y^2dy^2 + p^2dy^2}{p^2}$ $\frac{dy^2}{p^2} \times 4y^2 + p^2$.

Finalmente l'altro resto del denominatore della formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{p} \sqrt{4y^2 + p^2}$.

Dunque la predetta formola generale diverrà $\frac{dy^2}{p^2} \sqrt{4y^2 + p^2}$.

$(4y^2 + p^2) \frac{dy^2}{p^2} \sqrt{4y^2 + p^2}$, il tutto diviso per $\frac{p}{2dy^2}$,

ovvero moltiplicato per $\frac{p}{2dy^2}$: ma $\frac{dy^2}{p^2} \times \frac{dy}{p} \times \frac{p}{2dy^2} =$

$\frac{dy^2 p}{2p^2 dy^2} = \frac{dy^2}{2p^2 dy^2} = \frac{1}{2p^2}$; dunque la predetta formola

la farà convertita in quest'altra $\frac{(4y^2 + p^2) \sqrt{4y^2 + p^2}}{2p^2}$.

Per trovar i Massimi, ed i Minimi.

1004. Lorchè la legge, secondo la quale una quantità è prodotta, esige, che questa quantità, o una funzione di questa quantità cresca fin ad un certo punto, e poi decresca; si può domandare qual'è stato il suo valore, lorchè ella era la più grande. Ovvero se la quantità deve scemare fin ad un certo punto, e poi andare crescendo; si può chiedere qual'è stato il suo valor, lorch'ella era la più piccola, e quando o

Ma qual luogo ella vi si è trovata. Questo è quel che si chiama cercar il *Massimo*, o il *Minimo*; ed il metodo, che vi s'impiega, diceasi il metodo de' *Massimi* e de' *Minimi*.

1005. È evidente, che nel punto, ove la quantità è divenuta la più grande, il suo accrescimento è divenuto nullo. Donde siegue, che avendo differenziata l'equazione, ch'esprime la quantità di cui si tratta, bisogna far $= 0$ la differenziale della variabile che va crescendo e poi scemando, o scemando e poi crescendo: con questo mezzo l'equazione differenziata potendo esser ridotta a termini finiti, esprimerà il *Massimo* o il *Minimo* che si cerca.

1006. Probl. Trovar la più grande ordinata al grand'asse d'un'Elissi.

Sol. La più grande ordinata al grand'asse dell'Elissi è la metà del piccolo asse.

Dim. 1.^o Il grand'asse d'un'Elissi qualunque sia $= 2a$; il piccolo asse $= 2b$; un'ordinata qualunque $= y$; un'ascissa corrispondente $= x$.

2.^o Nel punto ove l'ordinata y è divenuta la più grande, il suo accrescimento è divenuto nullo, o sia $= 0$, e la sua differenziale dy è in quel punto $= 0$.

3.^o L'equazione all'Elissi è (§ 19) $aayy = 2abbx - bbxx$, la quale differenziata diviene $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$.

4.^o Siccome l'ordinata che si cerca, si suppone giunta al suo *Massimo*, avrà in quel punto la sua differenziale $dy = 0$. Dunque $2aaydy = 2aay + dy = 2aayX + 0 = 0$. Dunque l'equazione (3.^o) diviene $2abbdx - 2bbxdx = 0$; dunque $2abbdx = 2bbxdx$; dunque $a = x$. Dunque lorchè $x = a$, l'ordinata dell'Elissi è giunta al suo *Massimo*.

Ma a è la metà del grand'asse d'un'Elissi qualunque; ed x un'ascissa qualunque; dunque quando l'ordinata ha per ascissa corrispondente la metà del grand'asse, allora ella è giunta al suo *Massimo*. Ma la metà del piccolo asse è un'ordinata, che ha per ascissa corrispondente la metà del grand'asse; dunque la metà del

del piccolo asse è la più grand'ordinata al grand' asse d'una Elissi.

1007. Per aver un'idea ben chiara di questo importante metodo de' *Massimi* e de' *Minimi*, suppongasi una Curva geometrica, in cui tutti i valori possibili d'una variabile x camminino secondo questa legge, $0, 1125x^4 - 0, 725x^3 + 0, 9735x^2 + 0, 875x$. Convien prima supporre che questa formola sia il primo membro dell'equazione d'una curva geometrica, e che il secondo membro sia y . Si avrà dunque quest'equazione $0, 1125x^4 - 0, 725x^3 + 0, 9735x^2 + 0, 875x = y$.

Si cerchi poi quali faranno i valori delle ordinate y , supponendo le ascisse x successivamente uguali a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Supponendo l'ascisse $x = 1$, il valore dell'ordinata y nella predetta equazione $0, 1125x^4 - 0, 725x^3 + 0, 9735x^2 + 0, 875x = y$, sarà $y = 1, 2360$.

Dim. Supponendo $x = 1$, l'equazione data diventa $0, 1125 \times 1 - 0, 725 \times 1 + 0, 9735 \times 1 + 0, 875 \times 1 = y$, perchè la prima, seconda, terza, e quarta potenza di 1 è 1; dunque $y = 0, 1125 - 0, 725 + 0, 9735 + 0, 875$; dunque $y = 1, 9610 - 0, 725$; dunque $y = 1, 2360$.

Lo stesso si faccia nelle altre supposizioni di $x = 2$, $x = 3$ &c., e sostituendo questi numeri nell'equazione, si troveranno i valori d' y , come si vede nella Tavola seguente.

x	y
1.	1, 2360
2.	1, 6440
3.	0, 9240
4.	1, 4760
5.	3, 4000
6.	29, 5960
7.	75, 2640

Si tiri una linea indefinita PE (fig. 133) per farla linea delle ascisse; e preso ad arbitrio il punto S per origine delle ascisse, si segneranno le parti uguali ai punti A, B, C, D, E &c. Si alzeranno le perpendicolari Aa, Bb, Cc, Dd &c., e si faranno successivamente uguali alla lunghezza delle ordinate che sono nella Tavola: onde $Aa = 1, 2360$; $Bb = 1, 6440$; $Cc = 0, 9240$ &c.

Si farà finalmente passar una curva per i punti S, a, b, c &c.

Ciò posto, la sola ispezione di questa curva mostra, che le ordinate van crescendo fin verso r, poi decrescendo fin verso t, indi crescendo rapidamente verso e. Appareisce ancora, che nel Massimo la curva volta la sua concavità verso l'asse, e nel Minimo la sua convessità. Si posson dunque proporre questi due Problemi.

1.^o Dov'è il punto R, cui corrisponde il Massimo Rr? cioè qual'è il valore del Massimo Rr?

2.^o Dov'è il punto T, cui corrisponde il Minimo Tt? cioè qual'è il valore del Minimo Tt?

Sol. Si differenzj l'equazione della curva $0, 1125x^4 - 0, 725x^3 + 0, 9735x^2 + 0, 875x = y$. Questa equazione differenziata è $0, 45x^3 dx = 2, 175x^2 dx + 1, 947x dx + 0, 875 dx = dy$; perchè se l'equazione proposta fosse $x^4 - x^3 + x^2 + x = y$, differenziandosi ella diverrebbe $4x^3 dx - 3x^2 dx + 2x dx + dx = dy$. Dunque l'equazione proposta differenziata sarà $0, 1125 \times 4x^3 dx - 0, 725 \times 3x^2 dx + 0, 9735 \times 2x dx + 0, 875 \times dx = dy$, cioè riducendo $0, 45x^3 dx = 2, 175x^2 dx + 1, 947x dx + 0, 875 dx = dy$.

Questa equazione (poichè trattandosi di Massimo o di Minimo $dy = 0$) diviene, $0, 45x^3 dx = 2, 175x^2 dx + 1, 947x dx + 0, 875 dx$, ovvero $0, 45x^3 = 2, 175x^2 + 1, 947x + 0, 875 = 0$; vale a dire è un'equazione del terzo grado, che dà presso a poco queste tre radici, $x = 1, 7$; $x = 3, 16$; $x = -3, 891$.

Sostituendo successivamente quelli valori di x nell'equazione primitiva della curva, si troverà a un di presso

presso $y = 1$, 399; $y = 0$, 826; $y = 0$, 675.

Se dunque (nella fig. 133) si fa $SR = x = 1$, 7 incirca, e $Rr = y = 1$, 399 incirca, si avrà il luogo e la grandezza del *Massimo* richiesto.

E se si fa $ST = x = 3$, 16 incirca, e $Tr = y = 0$, 826 incirca, si avrà il punto e l' valore del *Minimo*.

1008. Riguardo alla radice negativa $x = -3$, 891, ed alla sua ordinata corrispondente $y = 0$, 675, è chiaro che se a sinistra del punto S si prende $SP = 3$, 891; e $Pp = 0$, 675, si avrà un punto p , che appartiene ad una porzione della curva situata verso la sinistra del punto S , e che si avrebbe descritta col prendere le ascisse $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ &c. Questo punto p è anche un *Massimo* o un *Minimo* in questa posizione.

1009. Se poi l' equazione del *Massimo* o un *Minimo* che risulta dalla differenziazione non ha che radici immaginarie, è un segno evidente, che non vi è nè *Massimo* nè *Minimo* nell' espressione di cui si tratta.

1010. Osserv. I. Poichè le dx si prendono sopra una stessa retta, le dy corrispondenti non possono terminar ad una curva, e nel tempo stesso conservar un rapporto costante con queste dx ; perchè allora le ordinate sarebbero alle ascisse sempre in questo rapporto costante, poichè le ordinate sarebbero una somma d' antecedenti, e le ascisse una somma di conseguenti sempre nella stessa ragione. In tal caso la linea, cui le ordinate terminerebbero, non potrebbe esser che una retta qual è l'ipotenusa d'un triangolo (fig. 132). Donde siegue, che in una curva il rapporto di dy a dx deve sempre variare, e che prendendosi le dx sopra una stessa retta, è naturale farle costanti, per paragonarle più facilmente alle dy , le quali devono per conseguenza variare continuamente.

1011. Osserv. II. Dalla natura del *Massimo* o del *Minimo* rappresentato da una curva geometrica, si vede, che le tangenti ai punti r , t , devono esser parallele alla linea delle ascisse SD , poichè in questi punti la d_r reazio-

reazione del punto descrivente non l'avvicinerebbe nè l'allontanerebbe dall'asse SD . Dunque in questi punti r , t , le sottotangenti son infinite, le normali son uguali alle ordinate rR , tT , e le sottormali son nulle. Onde si può trovar il Massimo e il Minimo per mezzo delle formole differenziali per la tangenti. Si vede ancora, che nel passaggio per il Massimo e l'Minimo, la sottotangente, e la normale tendon a prender una situazione opposta a quelle che avean prima di questo passaggio; si può anche da questo cambiamento decidere, se il valore trovato per l'applicazione della regola de' Massimi e Minimi, è il valore d'un Massimo o quello d'un Minimo. Poichè la semplice ispezione della figura 133 fa chiaramente conoscere, che se l'espressione della sottotangente da positiva deve divenire negativa, il valor dato dal calcolo è un Massimo: e se la sottotangente da negativa deve divenir positiva, il valor trovato è un Minimo.

1012. Osserv. III. Può accadere, che nel passaggio dell'accrescimento o decrescimento dy divenga infinito rapporto a dx , perchè se, per esempio, si esamina il cammino d'un punto che descrive le quattro Iperboli conjugate, che non sono propriamente che una sola e stessa curva chiusa (859), è chiaro che lungo uno de' rami, incominciando dalla sommità, il punto descrivente è alla sommità d'un' ordinata y , di cui la dy va sempre crescendo, in maniera che all'estremità infinita di questo ramo, ed al passaggio nel ramo conjugato, dy è infinitamente grande rapporto a dx ; ma deve indi decrescere continuamente, finchè il punto descrivente sia giunto alla sommità di questo ramo conjugato; e così in appresso. Donde si vede, che vi son de' casi, dove per aver un Massimo o un Minimo, non bisogna fare $dy = 0$, ma $dy = \infty$.

1013. Osserv. IV. Trovar un Massimo o un Minimo non è propriamente far la differenza di dy ugual a zero o all'infinito; ma per parlare più esattamente, non è altro che cercare la quantità $\frac{dy}{dx}$ — che esprime il limi-

te del rapporto di dy finito a dx finito, e far poi quella quantità nulla o infinità. Questo è tutto il mistero de' Massimi, e Minimi. Non è dunque dy che si fa all'infinito, ciò sarebbe assurdo, perchè dy preso per infinitamente piccolo, non può esser infinito; ma è dy —; vale a dire si cerca il valore di x che rende in dx

finito il limite del rapporto di dy finito a dx finito.

1014. Osserv. V. Da quanto si è esposto sul Calcolo Differenziale, ben si comprende, che la supposizione che si fa di quantità infinitamente piccole, non è che per abbreviare e per semplificare i ragionamenti; ma che nel fondo questo Calcolo non suppone punto necessariamente l'esistenza di quelle quantità. Onde il *Calcolo Differenziale* non consiste che a *determinare algebricamente il limite d'un rapporto, di cui si ha già l'espressione in linee, e ad uguagliare questi due limiti; il che fa trovare uno de' limiti che si cerca*. Questa definizione è forse la più precisa e la più netta che si possa dare del *Calcolo Differenziale*; ma non può esser ben compresa che quando si farà reso questo Calcolo familiare; poichè spesso la vera definizione d'una scienza non si comprende bene se non da chi ha studiata la scienza.

Questo è il famoso Calcolo Differenziale. La gloria di tanta invenzione è certamente di Newton, ma non può togliersi nemmeno a Leibnitz: e forse entrambi la devon a Barrov. *Encycl. art. Differentiel*: Anche Fra Paolo Sarpi n'ebbe qualche lume.

Tra gli Autori dell'Analisi degl'Infiniti, i più metodici sono il Marchese de l'Hopital *Analyse des Infiniments Petits*, Agnesi *Istituzioni Analitiche*, Manfredi, Riccati &c.

CAPITOLO VII.

Del Calcolo Integrale.

1015. **I**L *Calcolo Integrale* è l'inverso del *Calcolo Differenziale*. Egli consiste a trovar la quantità finita, di cui una quantità infinitamente piccola proposta è la differenziale. Supponendo che siasi trovata la differenziale di x^m , che è $mx^{m-1} dx$; se poi si propone di trovar la quantità, di cui $mx^{m-1} dx$ è la differenziale, che è x^m , questa operazione forma il *Calcolo Integrale*, da Nevvton e dagl' Inglese chiamato *Metodo inverso delle Fluxioni*.

1016. La Lettera $\int$ (iniziale della parola somma) serve di caratteristica per indicare una *integrazione* da farsi; onde $\int adx$, significa, che bisogna integrare adx , e si pronuncia *somma adx*.

1017. Si possono prendere per formole integrali le quantità differenziate da 965 fin 986. Onde $\int adx = ax$; $\int (x dy + y dx) = xy$ &c.

1018. Lorchè non vi è che una variabile in un' espressione differenziata, o lorchè una differenziale è composta d'un sol termine, se ne trova facilmente l'*integrale* per mezzo della formola (968), secondo la

quale $\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$; Onde si può stabilire questa

regola. Si cancelli la differenziale, si aumenti d' un' unità l'esponente della variabile, e si divida tutto per questo esponente così aumentato.

1019. Quasi tutta l'arte del *Calcolo Integrale* consiste ad applicar questa regola all'espressioni differenziate, e farvi delle preparazioni necessarie, per metterle in istato d'esser integrate per mezzo di questa regola. E lorchè un' espressione differenziata non è suscettibile di preparazioni proprie per farne un' integrazione compiuta, si procura trasformarla in qualch' altra, di cui l'
inter-

integrale sia la stessa che quella che darebbe la quadratura o la rettificazione d'una Sezione Conica, o anche d'una curva di un ordine più elevato, o la stessa che quella, ch'esprimerebbe il logaritmo d'un numero, o d'un seno. Or siccome la quadratura e la rettificazione della maggior parte di queste curve non han potuto ancora esser determinate in rigore geometrico, e che la maggior parte de' seni son incommensurabili rapporto al seno totale; siegue, che in questi casi queste sorti d'integrazioni non sono determinate che per approssimazione, o che non si posson ridurre in numero che a un dipresso. Finalmente per ultimo spediente, si cerca la serie infinita, di cui la somma farebbe ugual all'integrale cercata.

Da quest'esposto facilmente si vede, che il Calcolo Integrale è un' arte non solo incompleta, ma ancora estremamente complicata, e che non arriva sovente che ad approssimazioni.

Ricorra all' Opere di M. Bougainville il giovane, e de' PP. le Seur e Jaquier, chi desidera una piena cognizione di questa parte importante delle Matematiche. Qui non se ne dà che una leggiera idea, portando alcuni esempj dell'uso di questo calcolo nella Geometria, e sopra tutto nella parte più facile, ch'è quella delle serie, per far vedere la corrispondenza di quelle, che si trarranno dal calcolo integrale, con quelle dedotte già nelle Sezioni Coniche per mezzo dell'Analisi comune.

1020. L'uso del *Calcolo Integrale* nella Geometria sublime consiste principalmente a trovar le quadrature delle superficie piane e curve; le cubature o solidità de' corpi; la rettificazione delle curve, vale a dire la lunghezza d'una linea retta uguale ad un arco di curva data; la natura o l'equazione d'una curva per l'espressione algebrica data della sua tangente o sottangente, o della sua normale, o sunnormale &c. E' quasi impossibile penetrar a fondo e con successo in alcuna delle Scienze Fisico-Matematiche senza il continuo soccorso di questo Calcolo.

Per

Per le Quadrature delle Superficie Piane e Curve.

1011. E' evidente, che la quadratura d' uno spazio (fig. 36) CPML è la somma de' piccoli parallelogrammi $pqmn$, de' quali l' espressione differenziale è ydx . Dunque la formola per le quadrature degli spazi rinchiusi tra un arco di curva, due ordinate e la porzione dell' asse, cui terminano le ordinate, è $\int ydx$.

1022. Nella Parabola, ove $px = y^2$, si ha $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, e $p^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$; dunque $ydx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$. mte-

grado per la regola generale (1018) si avrà $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1}$

$\frac{1}{2} \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = p \times \frac{1}{2} \times x^{\frac{3}{2}}$. Ma $p^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$; dunque p

$\times \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \times \frac{2yx}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} yx$

$= \frac{2}{1} yx$. E questa è la quadratura esatta della Parabola (897).

1023. Nell' Ellissi si è trovato (901) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$; e perchè $\sqrt{a^2 - x^2}$ è un' incommensurabile, si può togliere il segno radicale, e ridurre $\sqrt{a^2 - x^2}$ in una serie infinita (334). Si avrà dunque $y = \frac{b}{a} (a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \&c.)$

$= \frac{b}{a} (a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \&c.)$

$\frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \&c. = b - \frac{bx^2}{2a} - \frac{bx^4}{8a^3} - \frac{bx^6}{16a^5} - \frac{5bx^8}{128a^7} \&c.$

$$\begin{aligned}
 & \frac{ba^6}{26a^6} - \frac{5bx^3}{128a^6} \&c.; \text{ per conseguenza } ydx = bdx \\
 & \frac{bx^4 dx}{26a^6} - \frac{bx^4 dx}{128a^6} - \frac{bx^5 dx}{16a^6} - \frac{5bx^6 dx}{128a^6} \&c. \text{ Dunque pren-} \\
 & \text{dendo le integrali di ciascun di quelli termini (1018)} \\
 & \text{si avrà la quadratura dell'Elissi } bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} \\
 & \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^6} \&c. \text{ come (901).} \\
 & \frac{112a^6}{1152a^6}
 \end{aligned}$$

Nella stessa maniera si calcolerà la Quadratura del Circolo e dell'Iperbole.

1024. Probl. I. *Trovare la quadratura della superficie d'un Fuso Parabolico.*

Spiegazione. Nella parabola mMS il parametro $= a$, (fig. 130) l'ascissa $= x$, l'ordinata y , un lato infi-

nitamente piccolo $mM = \sqrt{dy^2 + dx^2}$ (947). Suppon-
gasi che questa parabola giri sul suo asse; in questa ro-
tazione ciascuno de' suoi lati infinitamente piccoli de-
scriverà un cono retto troncato infinitamente sottile,
ch'è uno degli elementi del solido generato. La su-
perficie di questo cono troncato o Fuso parabolico è
ugual (680) al prodotto della lunghezza $\sqrt{dx^2 + dy^2}$
di questo lato moltiplicato per la circonferenza descrit-
ta dall'estremità dell'ordinata y . Se dunque si fa co-
me un raggio qualunque r : alla sua circonferenza c ::
così l'ordinata y : alla circonferenza descritta per l'
estremità di questa ordinata $= \frac{cy}{r}$, si avrà $\sqrt{dx^2 + dy^2}$

$\times \frac{cy}{r}$ per la superficie d'un Fuso qualunque Parabolico.

co. Ora si domanda l'integrazione di questa quantità.

Sol. La superficie curva d'un Fuso Parabolico è

$$c(a^2$$

$$c(a^2 + 4y^2) \sqrt{(a^2 + 4y^2)} \longrightarrow a^2 c$$

Dim. 1.° $ax = yy$ (828); dunque $adx = 2ydy$,
 e $a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2$, dunque $dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{a^2}$.

2.° Un elemento qualunque della superficie del foli-
 do, di cui si tratta, è $\frac{cy}{r} \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{cy}{r}$
 $\sqrt{(dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{a^2})} = \frac{cy}{r} \sqrt{(\frac{a^2 dy^2 + 4y^2 dy^2}{a^2})} = \frac{cy}{r}$
 $\sqrt{a^2 + 4y^2} \times \frac{dy^2}{a^2}$. Ma $\sqrt{\frac{dy^2}{a^2}} = \frac{dy}{a}$; dunque
 $\sqrt{a^2 + 4y^2} \times \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4y^2}$; dunque $\frac{cy}{r}$
 $\sqrt{a^2 + 4y^2} \times \frac{dy}{a} = \frac{cydy}{ar} \times \sqrt{(a^2 + y^2)} =$
 $\frac{(cydy (\sqrt{a^2 + 4y^2}))}{ar}$.

3.° per ridurre questa espressione in un'altra, cui la
 regola generale dell'integrazione sia applicabile, sia
 $\sqrt{a^2 + 4y^2} = z$, dunque $a^2 + 4y^2 = z^2$, dunque
 $8ydy = 2zdz$, e $ydy = \frac{zdz}{4}$, e $ydy = \frac{zdz}{4}$. Or
 se $ydy = \frac{zdz}{4}$, e $\sqrt{a^2 + 4y^2} = z$, dunque
 $\frac{cydy \sqrt{(a^2 + 4y^2)}}{ar} = \frac{cz^2 dz}{4ar}$.

E c z

4.° L.

4.° L'integrale di $\frac{cz^2 dz}{4ar} = \frac{cz^2 + 1}{3 \times 4ar} = \frac{cz^2}{12ar}$; ma
 essendo $z = \sqrt{a^2 + 4y^2}$, e $z^2 = a^2 + 4y^2$, dunque

$$\frac{cz^2}{12ar} = \frac{c(a^2 + 4y^2) \sqrt{a^2 + 4y^2}}{12ar}.$$

5.° Ma per esaminare, se in quest'ultima espressione vi sia qualche costante da aggiunger o da sottrarre, bisogna vedere se facendo $y = 0$, la predetta espressione

diviene $= 0$; or la formola $\frac{c(a^2 + 4y^2) \sqrt{a^2 + 4y^2}}{12ar}$

diviene $\frac{a^2 c \sqrt{a^2}}{12ar} = \frac{a^3 c}{12ar} = \frac{a^2 c}{12r}$; Dunque bisogna sottrarre questa costante, e far la formola che dà la vera superficie della curva cercata

$$\frac{c(a^2 + 4y^2) \sqrt{a^2 + 4y^2}}{12ar} - \frac{a^2 c}{12r} = \frac{c(a^2 + 4y^2) \sqrt{a^2 + 4y^2} - a^3 c}{12ar}.$$

Per la Rettificazione delle Curve.

1025. La Rettificazione delle curve riferite ad un asse si fa per mezzo dell'integrazione della formola

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} \quad (993). \text{ Si è già veduto } 957, \text{ che nella}$$

$$\text{Parabola } \sqrt{dy^2 + dx^2} = dy \sqrt{p^2 + 4y^2} = dy \sqrt{1 + 4y^2},$$

facendo $p = 1$. Questo radicale cambiato in serie (334) diviene $1 + 2y^2 - 2y^4 + 4y^6 - 10y^8 \&c.$ Dunque $\sqrt{dy^2}$

$$\sqrt{dy^2 + dx^2} = dy + 2y^2 dy - 2y^4 dy + 4y^6 dy - 10y^8 dy \text{ \&c.}$$

L'integrale è $y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^5 + \frac{4}{7}y^7 - \frac{10}{7}y^9 \text{ \&c.}$
 che dà la lunghezza d'una linea retta, che farebbe
 stata ripiegata sulla parabola, dalla sommità fin all' in-
 contro dell'ordinata y .

1016. Nel circolo, ove si suppone il raggio $= 1$, si
 ha $y^2 = 2x - x^2$, e per conseguenza $2y dy = 2dx -$
 $2x dx$, ovvero $dx = \frac{y dy}{1-x}$, e $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{1-2x+x^2}$. Ma poi

chè $2x - x^2 = y^2$, e $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{1-y^2}$; dunque $dx^2 + dy^2$

$= \frac{y^2 dy^2}{1-y^2} + dy^2$, o mettendo tutto in frazione

$$\frac{y^2 dy^2 + dy^2 - y^2 dy^2}{1-y^2} = \frac{dy^2}{1-y^2}; \text{ e } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$= dy \times (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$. Or l'espressione $(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 +$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6 + \frac{35}{128}y^8 \text{ \&c. dunque } \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= dy + \frac{1}{2}y^2 dy + \frac{3}{8}y^4 dy + \frac{5}{16}y^6 dy + \frac{35}{128}y^8 dy \text{ \&c.}$$

di cui l'integrale è $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 +$

$\frac{35}{1152}y^9$, che può essere rappresentata sotto questa for-

$$\text{mola } y + \frac{1}{2.3} y' + \frac{1.4.}{2.4.5.} y'' + \frac{1.3.5.}{2.4.6.7} y''' + \frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.9.} y^{(4)} \\ \&c.$$

1047. Un'ordinata al circolo è il seno dell'arco compreso tra l'origine delle ascisse e l'ordinata. Si può dunque coll'ajuto di questa serie calcolar la lunghezza d'un arco di circolo, di cui il seno è noto; e questa serie convergerà tanto più velocemente, quanto il seno corrisponderà ad un arco d'un più piccolo numero di gradi, perchè sarà una frazione del raggio, la quale sarà ancora altrettanto più piccola. Onde si può calcolare con molta facilità la lunghezza dell'arco di 30 gradi, per mezzo del suo seno, che è $\frac{1}{2}$ o, 5; indi moltiplicando questa lunghezza per 6, si avrà quella della semi-circonferenza, e perciò il rapporto del diametro del circolo al suo contorno, il che darà la quadratura del circolo. Si avrà, per esempio, $0,5 + 0,020833 + 0,002344 + 0,000349 + 0,000059$: La somma è $\frac{1}{2}$ o, 523585; il suo prodotto per 6 $\frac{1}{2}$ 3, 14151, come (581). Per la maggior esattezza convien calcolare più termini, e più decimali.

Per la Cubatura de' Solidi.

1028. La cubatura o solidità de' Solidi si trova per mezzo dell'integrazione dell'espressione differenziale della solidità d'uno degli elementi, de' quali il corpo è composto. Lorchè, per esempio, il solido è prodotto dalla rotazione d'una curva sul suo asse, ciascun elemento è un cono retto troncato, di cui la solidità deve esser uguale al prodotto del suo asse, o grossezza dx per la superficie del circolo descritto dall'ordinata y , che passa per il mezzo del lato infinitamente piccolo, che forma la superficie di quello cono. Or (1024)

il circolo descritto dall'ordinata y , ha $\frac{\pi y^2}{2}$ per l'espressione

sione della sua circonferenza, e per conseguenza (568)

$$\frac{cy}{2r} \times y, \text{ o } \frac{cy^2}{2r} \text{ è l'espressione della sua superficie.}$$

Dunque l'espressione generale della cubatura d'un elemento qualunque d'un solido di rivoluzione è $\frac{cy^2 dx}{2r}$,

e la formola d'integrazione che dà la solidità di questo solido, è $\frac{cy^2 dx}{2r}$, in cui bisogna sostituire il valore

d' y^2 tirato dall' equazione della curva, per aver poi per mezzo dell' integrazione la cubatura del solido.

1029. Così il raggio del circolo generatore d' una sfera essendo $\equiv r$, l' equazione del circolo è $y^2 \equiv 2rx - x^2$; dunque la formola differenziale della cubatura diviene $cx dx - \frac{cx^2 dx}{2r}$, di cui l' integrale $\frac{1}{2} cx^2$

$\frac{cx^3}{6r}$ esprime la solidità d'un segmento di sfera, di cui il raggio $\equiv r$, e la grossezza $\equiv x$. Se dunque

si fa $x \equiv 2r$, si avrà $2cr^2 - \frac{4cr^3}{3} = \frac{6cr^2 - 4cr^3}{3}$

$\equiv \frac{2}{3} cr^2 \equiv \frac{2}{3} \times 2r \times \frac{1}{2} cr$; vale a dire la solidità di tutta la sfera è ugual ai due terzi del prodotto dell' asse per la superficie del suo gran circolo.

Per il Metodo inverso delle Tangenti.

1030. Si chiama *Metodo inverso delle Tangenti* quello per cui si scuopre la natura o l' equazione d' una curva, essendo data solamente l' espressione algebrica della sua tangente, o della sua sottangente, o della sua normale, o funnormale. Dicesi ancora, che un Proble-

ma appartien al metodo inverfo delle tangenti, lorchè fi cerca l'equazione d'una curva per mezzo dell' espressione algebrica della fua rettificazione, della fua quadratura &c.

Data dunque l'espressione Algebraica d'una linea che appartiene alla tangente, bisogna farne un' equazione coll'espressione differenziale della fteffa linea; e fe fi può integrare quell' equazione, fi avrà quella della curva che fi cerca.

1031. Si domanda, per efempio, qual è la curva, di cui la fottangente è $\frac{y^2}{a}$. Si avrà dunque (990) $\frac{ydx}{dy}$

$= \frac{y^2}{a}$, o $aydx = y^2dy$, o $adx = ydy$; ed integrando farà $ax = \frac{1}{2}y^2$, o $2ax = y^2$, equazione della parabola, di cui il parametro è $2a$.

1032. Qual'è la curva, di cui la funnormale è $a - x^2$. Si ha (994) $\frac{ydy}{dx} = a - x^2$, o $ydy = adx - xdx$. Integrando farà $\frac{1}{2}y^2 = ax - \frac{1}{2}x^2$, o $y^2 = 2ax - x^2$, che è l'equazione del Circolo.

1033. Qual'è la curva, di cui la funnormale è costante, ovvero $= 1$? Si ha $\frac{ydy}{dx} = 1$, dunque $ydy = dx$; e integrando $\frac{1}{2}y^2 = x$, e $y^2 = 2x$: equazione della parabola, di cui il parametro $= 2$.

1034. Si applica ancora nella Geometria il Calcolo Infinitesimale all'espressioni algebriche, che hanno esponenti variabili, come ax , e xy , ed all'equazioni delle curve, che han termini affetti di fimili esponenti. Quelle Curve fi chiaman *esponenziali*, ed il Calcolo, che fe ne fa, fi chiama anche il *Calcolo Esponenziale*.

TRIGONOMETRIA SFERICA

DEL PADRE

RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH.

1. **L**A Trigonometria sferica è l'arte di risolvere i triangoli sferici, cioè quelli, che nella superficie della sfera sono contenuti dagli archi de' Circoli detti massimi, i piani de' quali passano pel centro della sfera. Sei cose in questi triangoli, come ne' triangoli piani, si devono considerare; cioè tre lati, e tre angoli. La Trigonometria Sferica insegna, in qual maniera date tre di queste sei cose, le altre si possino ritrovare. Premetteremo tre Lemmi, il primo de' quali spetta agli elementi di Geometria; gli altri poi, che possono essere di uso anche nella Trigonometria piana, appartengono alla dottrina de' seni, e delle tangenti: indi dimostreremo ciò che dalla dottrina delle sfere si ricava di necessario a questa nostra Trigonometria: e finalmente giunti a parlare della Trigonometria, tratteremo primieramente degli angoli rettangoli, indi degli obliquangoli.

LEMMA PRIMO.

2. Se la linea AD (fig. 143.) si tagli in qualunque modo in E, e per metà in I, sarà AI ovvero ID la semisomma, e IE la semidifferenza de' segmenti AE, ED.

La prima parte è chiara, essendo AD la somma, e AI sua metà, la semisomma. La seconda parte si dimostra in questo modo. Si faccia AO verso D eguale a DE;

a DE; sarà IO eguale ad IE. Ma OE farà la differenza delle stesse AE, AO, e perciò delle stesse AE, ED. Dunque IE farà la semidifferenza. Lo stesso pure farà, se il punto e si prenda fuori di AD, e si consideri De come negativa, presa pure Ao, ma alle parti opposte. Imperciocchè se De si consideri come positiva; diventa ID la semidifferenza, le la semisomma delle medesime Ae, eD.

3. Corollar. Se alla semisomma verrà aggiunta la semidifferenza, si avrà il segmento maggiore; se sottratta, il minore. Se la semidifferenza sarà maggiore della semisomma, l'altro segmento sarà negativo, e cadrà alle parti opposte.

L E M M A II.

4. Nel triangolo rettangolo il lato è il seno dell'angolo a se opposto, e il coseno dell'angolo contiguo, se la base si prenda pel raggio: sarà poi la tangente di quello, e la cotangente di questo, se l'altro lato si prenda pel raggio.

Imperciocchè presa per raggio la base BC (fig. 144.) del triangolo BAC rettangolo in A, si descriva il circolo che s'incontra col lato BA prolungato in D, farà il lato CA la perpendicolare che discende dall'altro estremo C dell'arco DC nel raggio BD condotto per l'altro estremo, che è la stessa definizione del seno dell'arco DC o sia dell'angolo B opposto al lato AC. Perchè poi a motivo dell'angolo retto A, gli angoli ACB, ABC insieme compiono (lib. 1. prop. 32) l'angolo retto, farà AC insieme il seno del complemento dell'angolo ACB a se contiguo, che dicesi suo coseno.

Ma se il circolo descrivasi, preso per raggio il lato BA; parimenti dalla stessa nozione della tangente apparirà, che l'altro lato AC farà la tangente dell'angolo C a se opposto; e però sarà la tangente del complemento dell'angolo ACB a se contiguo, che dicesi sua cotangente.

5. Co-

3. Corollar. Il rettangolo della tangente nella cotangente, è eguale al quadrato del raggio.

Imperocchè preso AB per raggio, sia AC la tangente dell'angolo a se opposto, e preso CA per raggio, AB sia cotangente dell'istesso angolo B a se contiguo; farà come AC ad AB: così tanto la tangente dell'angolo B al raggio, come il raggio alla cotangente: e però (lib. 6. prop. 16.) il prodotto della tangente nella cotangente, è eguale al quadrato del raggio.

L E M M A III.

6. La somma de' seni di due archi è alla differenza, come la tangente della semisomma degli stessi archi alla tangente della semidifferenza.

Siano gli archi AE, ED (fig. 145.), i cui seni AF, DG siano perpendicolari al raggio CE, tagliato dalla corda AD in P, la qual corda sia tagliata per metà, e ad angoli retti (3. lib. 1.) in H dal raggio CL, il quale ancora taglierà per metà l'arco AD in L. (30. lib. 3.) Sarà AL (n. 4.) la semisomma, LE la semidifferenza de' loro archi, AH la semisomma, HP la semidifferenza delle rette AP, PD: e a motivo degli angoli retti in H, se prendasi CH per raggio, farà HA la tangente dell'angolo ACH (n. 4.) e però dell'arco LA, il quale è la sua misura, e HP farà la tangente dell'angolo HCP, e però dell'arco LE. I triangoli poi AFP, DGP, i cui angoli in F e in G sono retti, e gli angoli in P opposti al vertice sono uguali, sono equiangoli; e però (lib. 4. 6.) stà il seno AF al seno DG come AP a PD. Per laqualcosa la somma de' loro seni alla differenza è come la somma delle rette AP, PD alla differenza, e come la loro semisomma AH alla semidifferenza HP; ovvero come la tangente della semisomma AL alla tangente della semidifferenza LE.

7. Corollar. La somma de' coseni ovvero seni de' complementi alla differenza, è come la cotangente
ovve.

ovvero tangente del complemento della semisomma alla tangente della semidifferenza.

Infatti si produca AC fino alla periferia del circolo in M, e si prendano i quadranti LN, EO. Levato il comune EN, sarà NO eguale ad LE: sarà pure DO il complemento di DE; e giacchè levato dal semicircolo ADM il quadrante EO, gli archi AE, OM insieme uguagliano il quadrante, OM sarà il complemento di EA. Parimenti DN è complemento di LD, e NM è complemento di LA, il qual arco NM sarà uguale all'istesso BN a motivo di AL, LD eguali. Ma la somma (n. 6.) de' seni DO, OM è alla differenza, come la tangente della loro semisomma DN alla tangente della semidifferenza ON. Dunque la somma de' coseni degli archi ED, EA sarà alla differenza, come la cotangente della semisomma LD alla tangente della semidifferenza LE.

DELLA DOTTRINA DE' SFERICI

DEFINIZIONE I.

8. **L**A Sfera è un solido compreso da una sola superficie, entro la quale è un punto che chiamasi Centro, dal qual punto tutte le rette che son condotte alla sua superficie, sono tra se eguali, e chiamansi raggi della sfera, ovvero semidiametri; e la retta condotta pel centro della sfera e terminata alla superficie da ambe le parti, chiamasi diametro della sfera.

Vien generata la sfera dalla rotazione del semicircolo circa il proprio diametro immobile, finchè ritorni d'onde è partito: perchè tutte le linee rette condotte dal centro immobile del semicircolo alla sua periferia essendo tra di se eguali, anche tutte le rette condotte dall'istesso punto alla superficie del solido generato, saranno eguali. La figura 146. rappresenta sol-

tanto

tanto la metà d' una sfera , per non cagionar confusione ; il cui centro è C , i raggi eguali sono CP , CA , GF ec. il diametro è Pp , ovvero AD .

9. Corollar. 1. *Se la sfera in qualunque modo si tagli con un piano, la sezione sarà un circolo.*

Si tagli primieramente la sfera col piano ABD , il quale passi per il centro C , tutte le rette , che dal centro della sfera C si conducono all' intersezione del suo piano con la superficie della stessa sfera , come CA , CB , CD , saranno eguali al raggio dell' istessa sfera (*n. 8.*) ; perciò tutti i punti , A , B , D cadranno nella periferia del circolo , il cui centro è C .

Si tagli secondariamente la sfera col piano EFH , che non passi per il centro , e per il centro della sfera C si conduca la retta CG perpendicolare all' istesso piano (*lib. 11. 11.*) e a due punti qualunque del perimetro della sezione , come F , H si conducano da C e G le rette CF , CH , GF , GH . Saranno gli angoli CGF , CGH retti a motivo di CG perpendicolare a tutto il piano FGH . Per la qual cosa i quadrati CG , GF (*lib. 1. 47.*) insieme saranno eguali al quadrato CF , e però al quadrato CH , o sia ai due quadrati CG , GH insieme (*n. 8.*) , e levato il comune CG , i quadrati GF , GH , e le stesse rette GF , GH saranno eguali. Accadendo ciò rimanendo il punto H , e variato in qualunque modo il punto F ; sarà il perimetro della sezione la periferia del circolo , il cui centro è G , il raggio GH .

10. Corollar. 2. *I circoli , i cui piani passano per il centro della sfera , sono tra di se eguali , e maggiori di tutti quelli , i cui piani non passano pel centro della sfera .*

Infatti se ABD sia qualunque de' circoli , i cui piani passano pel centro C , sarà il suo raggio CD eguale al raggio della sfera ; e però i raggi di tutti i circoli di simil natura , sono eguali tra di se , e gli stessi circoli sono eguali.

Ma in qualunque circolo EFH , il cui piano non passa pel centro , il raggio GH è minore del raggio della

la sfera CH, perchè il suo quadrato è eguale ai quadrati CG, GH insieme presi, e però è maggiore del solo quadrato GH.

DEFINIZIONE II.

11. Quindi i cerchi, i cui piani passano per il centro della sfera, si chiamano cerchi massimi della sfera.

12. Corollar. 1. Tutti i cerchi massimi si tagliano scambievolmente per metà, e la comune intersezione de' loro piani, è il diametro della sfera.

Infatti passando i piani di tutti i Cerchi pel centro, s'incontrano nello stesso centro, e però non sono paralleli, quindi (lib. 3. 11.) si tagliano scambievolmente in qualche retta, la quale passando pel centro della sfera ad essi comune, farà l'intersezione e il diametro de' loro cerchi, i quali perciò taglierà per metà, e farà il diametro della sfera.

13. Corollar. 2. Per due qualunque punti presi nella superficie della sfera si può condurre un cerchio massimo, e per qualunque punto si può condurre un cerchio massimo perpendicolare al cerchio massimo già dato.

E' chiara la prima parte, perchè se i due punti dati si congiungano col centro, e tra di sé, il triangolo giacerà tutto sullo stesso piano, (lib. 2. 11.) col qual piano se si taglierà la sfera, la sezione farà il cerchio massimo, e passerà per i due dati punti.

E' chiara la seconda parte, perchè da quel dato punto si può abbassare una perpendicolare sul piano del dato cerchio massimo, (lib. 11. 11.) e congiunti gli estremi suoi punti sul centro, si fa un triangolo che tutto parimenti giace sull'istesso piano, col quale se si tagli la sfera, la sezione farà un cerchio massimo, e perpendicolare (lib. 18. 11.) al dato cerchio massimo.

DEFINIZIONE III.

14. Il diametro della sfera perpendicolare al piano del circolo nato dalla sezione della sfera, si chiama il suo asse; e gli estremi punti dell' asse, si chiamano i suoi poli.

Così Pp è l' asse de' circoli EFH, ABD, e i punti Pp sono i suoi poli.

15. Corollar. 1. Tutti i punti della periferia di qualunque circolo nella superficie della sfera, sono lontani per archi eguali de' circoli massimi dall' istesso lor polo.

Se difatti si prendano due di questi punti qualunque, H, e F, e per essi, e per il polo P si conducano (n. 13.) i circoli massimi PHp, PFp, e i raggi HC, FC, HG, FG; ne' triangoli CGF, CGH a motivo di tutti i lati eguali, faranno eguali gli angoli in C (lib. 8. 1.) e però anche gli archi PH, PF faranno eguali. (lib. 26. 3.)

16. Corollar. 2. Il circolo massimo da ambi i suoi poli per ogni parte è lontano un quadrante di circolo massimo; e quel circolo, di cui un qualche punto è lontano un quadrante di circolo massimo dal suo polo, è massimo.

Imperciocchè se il circolo sarà massimo, come ABD, passerà per il centro C, e i raggi CB, CD, che faranno la sua intersezione coi piani PFp, PHp, faranno perpendicolari all' asse PCp, il quale infatti per la sua stessa definizione è perpendicolare a tutto il piano ABD; e però tanto gli archi PB, PD, quanto gli archi pB, pD saranno quadranti.

Se poi il circolo non sarà massimo, come EFH, il suo piano non passerà pel centro; e però tagliata la sfera pel centro col piano ABD parallelo all' istesso EFH, faranno PB, PD, pB, pD quadranti, e però PF, PH saranno minori di quelli, e pF, pH maggiori. Dunque quel circolo, di cui un qualche punto è lon-

ontano un quadrante dal polo, non farà non massimo, e però farà massimo.

DEFINIZIONE IV.

17. L'angolo sferico è quello, il quale nella superficie della sfera vien contenuto da due archi de' circoli massimi, concorrenti in qualche punto: Per la cui misura si considera l'angolo rettilineo contenuto dalle rette le quali giacciono coi medesimi archi nei medesimi piani, e alle medesime parti, e li toccano nello stesso concorso.

Così FPH è un angolo sferico, a cui si sostituisce un angolo rettilineo fPh, contenuto dalle tangenti Pf, Ph.

18. Corollar. 1. Se un arco cade sopra un arco, fa due angoli, o retti, o eguali a due retti.

Imperciocchè la tangente fP, con la tangente ePh fa due angoli (lib. 13. 1.) o retti, o eguali a due retti.

19. Corollar. 2. Se due lati di un angolo si prolunghino oltre il vertice, conterranno angoli eguali opposti al vertice.

Imperocchè se le tangenti fP, HP si prolungheranno oltre il vertice P, conterranno angoli eguali al vertice P. (lib. 15. 1.)

20. Corollar. 3. Se i piani dei lati saranno tra di se scambievolmente perpendicolari, l'angolo sarà retto: e se l'angolo sarà retto, i piani saranno tra se stessi scambievolmente perpendicolari.

Imperocchè se il piano FPP farà perpendicolare al piano HPP, la tangente fP, che è perpendicolare al diametro Pp (lib. 16. 3.) comune intersezione de' loro piani (n. 12.) farà perpendicolare (definiz. 4. lib. 11.) a tutto il piano HPP, e però anche alla tangente Ph.

Se poi la tangente fP farà perpendicolare alla tangente Ph, essendo ancora perpendicolare al diametro Pp; farà (4. l. 11.) perpendicolare a tutto il piano

no HPp , e perciò (11. l. 11.) anche il piano FpP sarà perpendicolare ad esso.

21. Corollar. 4. Se da qualunque punto del diametro della sfera che passa pel vertice dell' angolo, escano ne' piani degli stessi archi due rette ad esso perpendicolari, conterranno un angolo rettilineo eguale ad uno sferico.

Imperocchè se queste rette faranno GF , GH , queste faranno parallele alle rette Pf , Ph (28. l. 1.) che sono perpendicolari allo stesso diametro Pp . (13. l. 3.) E però l'angolo FGH sarà eguale (10. l. 11.) all'angolo sPh .

22. Corollar. 5. La misura d'un angolo sferico sarà l'arco di qualunque circolo che abbia il polo nel suo vertice intercetto tra suoi lati.

Imperciocchè tagliata la sfera in qualsivoglia piano ABD , o EFH perpendicolare al diametro Pp che è la comune intersezione de' piani degli archi PF , PH , la sezione sarà un circolo che ha il polo P (n. 14.) il cui arco BD , o FH intercetto da lati PF , PH , farà la misura dell'angolo BCD , o FGH , il quale essendo contenuto da raggi BC , CD , o FG , GH perpendicolari al diametro Pp perpendicolare al piano ABD , o EFH , è eguale all'angolo sferico FPH . (n. 21.)

23. Corollar. 6. Se i lati di un angolo sferico si prolunghino, di nuovo così s'incontrano, che compiono un semicircolo, e contengono un angolo sferico eguale al primo.

Infatti essendo PCp il diametro di ambedue gli archi PF , PH , prolungandosi amendue, debbono passare per p ; e faranno PfP , PHp i semicircoli, e la misura comune degli angoli FpH , FPH sarà l'arco BD , ovvero FH . (n. 22.)

24. Corollar. 7. Un circolo massimo perpendicolare ad un circolo massimo, passa per i suoi poli; e se un circolo massimo passa per i poli di un circolo massimo, è ad esso perpendicolare.

Sia il circolo massimo PBp perpendicolare al circolo massimo ABD , sarà il piano PBp perpendicolare al piano ABD . (n. 20.) Per la qual cosa se si tagli la sfera con un altro piano $APDp$ per il centro C perpendicolare all'istesso piano ABD ; anche l'intersezione PCp sarà ad esso perpendicolare (19. l. 11.); e però (n. 14.) i punti P, p , che giacciono nel circolo PBp , faranno i poli del circolo ABD .

Se poi il circolo massimo PBp passi pel polo P del circolo massimo ABD , passerà per il suo asse PCp ad esso perpendicolare; e però (18. l. 11.) sarà ad esso perpendicolare.

DE' TRIANGOLI SFERICI

DEFINIZIONE.

25. **I**l triangolo sferico dicesi quello, che vien contenuto nella superficie della sfera sotto tre archi de' circoli massimi, che chiamansi suoi lati.

26. Corollar. 1. Se in un triangolo sferico due angoli saranno retti; i lati ad essi opposti saranno quadranti: E se due lati saranno quadranti, gli angoli ad essi opposti saranno retti; e in amendue questi casi il terzo lato sarà la misura del terzo angolo.

Se infatti i due angoli PBD , PDB saranno retti, il punto P , che è la comune intersezione de' circoli BP , DP sarà (n. 24.) il polo del circolo BD , e PB , PD saranno i quadranti. (n. 16.)

Se poi gli archi PB , PD saranno quadranti, gli angoli BCP , DCP saranno retti, e però (4. l. 11.) la retta CP sarà perpendicolare a tutto il piano BCD ; e quindi (18. l. 11.) i piani degli archi PB , PD saranno perpendicolari al piano dell'arco BD , e gli angoli PBD , PDB saranno retti. (n. 20.)

Ma in amendue questi casi essendo P il polo del circolo BD , l'arco BD è (n. 22.) la misura dell'angolo PBD .

27. Co-

27. Corollar. 2. Se tutti gli angoli saranno retti, tutti i lati saranno quadranti; e se tutti i lati saranno quadranti, tutti gli angoli saranno retti.

Imperciocchè nel primo caso due angoli opposti a due lati qualunque, essendo retti, que' due lati saranno quadranti; e parimenti nel secondo caso due lati opposti a due angoli qualunque essendo quadranti, quelli due angoli saranno retti.

Quindi è chiara la risoluzione de' triangoli di simil natura, per cui non ci è bisogno della Trigonometria. Resta ora che trattiamo di que' triangoli, in cui un angolo è retto, e chiamansi rettangoli; e di quelli, in cui nessun angolo è retto, e si chiamano obliquangoli. In quelli il lato opposto all' angolo retto dicesi base; in questi poi qualunque lato può prenderfi per base.



D E L L A
TRIGONOMETRIA
S F E R I C A
P A R T E P R I M A.

De' triangoli rettangoli.

28. **S**ia il triangolo DAB (Fig. 147.) rettangolo in A. Il circolo del lato AD sia ADEF, a cui se si prolunghino il lato AB, e la base DB, così si incontreranno in qualche luogo in E, e F, che (n. 13.) ABE, DBF siano semicircoli, e ACE, VDF diametri. Conducafì BC, poi BI perpendicolare al piano ADE (11. l. 11.) la quale s' incontrerà in qualche luogo (38. l.) in I col diametro AE ad angoli retti: dipoi IG perpendicolare al diametro DCF, e BG, che farà perpendicolare allo stesso diametro; perchè il piano BIG farà (18. l. 11.) perpendicolare al piano GIC; e però (def. 4. l. 11.) CG farà perpendicolare al piano BGI, essendo perpendicolare all'intersezione IG de' piani IGB, IGC tra se stessi vicendevolmente perpendicolari. Finalmente tagliati i semicircoli DAF, DBF per metà in L, H, conducafì per L, H (n. 13.) l' arco del circolo massimo che s' incontra col semicircolo ABE in qualche luogo in P, e faranno gli angoli DHL, DLH retti; (n. 26.) e perciò D farà il polo del circolo LPH, (n. 24.) e LH (n. 22.) la misura dell' angolo ADB; e a motivo pure dell' angolo retto LAP, faranno (n. 24.) P il polo del circolo AL, PA, PL i quadranti, (n. 16.) AL la misura dell' angolo BPH, (n. 22.)

29. Tutta la soluzione de' triangoli rettangoli nasce dalla considerazione della piramide, il cui vertice è C, e la base BIG; e dal paragone del triangolo sferico BAD rettangolo in A, con BHP rettangolo in H. Tutte le faccie della piramide sono triangoli rettangoli; imperciocchè gli angoli BIG, BIC sono retti a motivo di BI perpendicolare a tutto il piano GIC, l'angolo IGC a motivo della costruzione, BGC a motivo del numero superiore. Ma il lato BH del triangolo sferico PHB sarà il complemento della base DB del triangolo DAB: la base BP sarà il complemento del lato AB: il lato HP sarà il complemento dell'arco HL, che misura l'angolo BDA: l'angolo BPH, la cui misura è l'arco AL, farà il complemento del lato AD: gli angoli B opposti al vertice saranno eguali. (n. 19.) Dalla considerazione della piramide, paragonando due faccie tra se e con la base, si ricaveranno tre canoni; e dal paragone de' triangoli DAB, BHP altri tre, coll'ajuto de' quali si risolveranno tutti i triangoli rettangoli. Mentre però se ne ricavano i primi tre Canoni, abbiassi avanti gli occhi il secondo lemma; (n. 3.) e mentre se ne ricavano gli altri tre, abbiassi avanti gli occhi ciò che si è detto nel paragone di ogni parte di que' triangoli.

30. A motivo degli angoli retti BGC, BIC, stanno BG, BI seni degli angoli BCI, BCG, o sia della base BD, e del lato BA al raggio BC, come a motivo dell'angolo retto BIG, sta BG a BI, come sta il raggio al seno dell'angolo rettilineo BCI, o sferico D, il quale si oppone al lato AB. Per la qual cosa

I. Il raggio è al seno dell'angolo, come il seno della base al seno del lato opposto.

A motivo degli angoli retti BGC, IGC, stanno BG, GI tangenti degli angoli BCG, ICG, o sia degli archi BD, AD al raggio CG; e a motivo dell'angolo retto BIG, sta BG a GI, come il raggio al seno dell'angolo GBI, o sia al coseno dell'angolo rettilineo G, ovvero sferico D, che è contiguo al lato AP. Per la qual cosa

II. *Il raggio è al coseno dell'angolo, come la tangente della base alla tangente del lato contiguo.*

A motivo degli angoli retti CGI, CIB, stà IG seno dell'angolo ICG, o sia dell'arco AD, e IB tangente dell'angolo ICB, o sia dell'arco AB al raggio CI; e a motivo dell'angolo retto BIG stà GI ad IB, come il raggio alla tangente dell'angolo rettilineo BGI, ovvero sferico D, a cui è contiguo DA, e si oppone AB. Per la qual cosa

III. *Il raggio stà alla tangente dell'angolo, come il seno del lato contiguo alla tangente dell'opposto.*

Dal Can. 1. il raggio stà al seno dell'angolo P, o dell'arco AL, ovvero al coseno del lato AD, come il seno BP, o sia coseno del lato AB al seno BH, ovvero coseno della base BD. Per la qual cosa

IV. *Il raggio stà al coseno di un lato, come il coseno dell'altro lato al coseno della base.*

Dallo stesso 1. Canone. Il raggio stà al seno dell'angolo PBH, o sia ABD, come il seno BP, o sia coseno del lato AB. contiguo all'istesso angolo, stà al seno PH, ovvero coseno HL, ovvero dell'angolo D, che si oppone all'istesso AB. Per la qual cosa

V. *Il raggio stà al seno dell'angolo contiguo, come il coseno del lato al coseno dell'angolo opposto.*

Dal Can. 3. Il raggio stà alla tangente dell'angolo B, come il seno BH, ovvero il coseno della base BD alla tangente HP, o sia cotangente dell'arco LH, ovvero dell'angolo D. Per la qual cosa

VI. *Il raggio stà alla tangente di un angolo, come il coseno della base alla cotangente dell'altro.*

31. Prima d'insegnare l'uso di questi Canoni, conviene premetter due regole, colle quali si scoprirà di quale specie esser debbano i lati e gli angoli ritrovati. Si chiamano della stessa specie quelli che insieme oltrepassano i gradi novanta, oppure insieme ad essi non arrivano: di specie diversa si chiamano quelli, uno de' quali non arriva a novanta gradi, e l'altro gli oltrepassa.

Rimanendo le cose come prima, si conduca (fig. 148.)

118.) per il polo P, e punto D (n. 13.) l'arco del circolo massimo, che farà (n. 24.) perpendicolare ad ADE; e tagliato il semicircolo ADE per metà in I, si conduca (n. 13.) l'arco BI, il quale farà quadrante, poichè il polo del circolo ABE (n. 24.) è nel circolo ADE a se perpendicolare; e taglia quello (n. 16.) per metà, e però è in I. (n. 16.) Si conduca pure l'arco Bd per qualunque punto d che giaccia rispetto ad I alle parti opposte D (n. 13.) e vi sia l'arco del Circolo massimo FIf che abbia il polo in B, e che s'incontri cogli archi BD, Bd in F, ed f, il quale a cagione di Bf quadrante (n. 16.) farà circolo massimo, e taglierà BF, Bf quadranti, e formerà gli angoli retti BIF, BIf. (n. 24.)

32. Se il lato AB in minore del quadrante AP; l'angolo ADB sarà sempre minore del retto ADP, di cui farà una parte. Se poi il lato sarà maggiore, anche l'angolo sarà maggiore, in qualunque modo stia l'altro lato AD. Per la qual cosa

Reg. 1. I lati sono della stessa specie con gl'angoli opposti.

Se il lato AB sia minore del quadrante AP, l'angolo AIB sarà minore per la regola 1. del retto, e però minore dell'angolo FIB; ma l'angolo BId sarà maggiore del retto BIf; e perciò la base BD sarà minore del quadrante BF, e Bd maggiore del quadrante Bf; quindi nelli triangoli BAD, BED, ove i lati sono della stessa specie, la base è minore del quadrante; ne' triangoli AdB, EdB, ove sono di specie diversa, è maggiore del quadrante. Perchè poi per la reg. 1. gli angoli sono della stessa specie con i lati opposti, possono sostituirsi in vece di quelli. Per la qual cosa

Reg. 2. Se due lati, o due angoli, o un lato coll'angolo contiguo saranno della stessa specie, la base sarà minor del quadrante; se di specie diversa, sarà maggiore; e viceversa.

33. Qualunque volta vien proposto da risolvere un triangolo rettangolo, de' due lati, due angoli, e la ba-

Ff 4 se,

e, due cose si danno fuor dell'angolo retto, e si cerca la terza. Per ritrovarla è necessario primieramente ritrovare qualche sua funzione, cioè il seno, la tangente, il coseno, o la cotangente. In secondo luogo è necessario conoscere di quale specie debba essere; imperocchè i complementi al semicircolo hanno le funzioni comuni. La prima cosa sempre si rende manifesta per mezzo de' Canoni; l'altra per le regole, fuor del caso, in cui diasi il lato con l'angolo opposto; imperocchè allora il rimanente potrà essere minore o maggiore di novanta gradi. Così ne' triangoli BAD, BAF, il lato BA è comune, gli angoli in D ed F sono eguali (n. 23.), l'altro lato, la base, e l'altro angolo in uno sono complementi ai gradi 180. di quelli che sono nell'altro: e perciò questo caso in se è indeterminato ed ambiguo.

34. In sei Canoni ci sono tutte le combinazioni di quelle cinque parti dell'angolo che possono darsi e cercarsi oltre l'angolo retto, quando tre se ne prendono: e in qualunque modo se ne diano due di queste tre che sono nell'istesso Canone, si darà qualche funzione della terza: imperciocchè dei quattro termini proporzionali che si pongono in quel canone, uno sarà il raggio, due saranno le date funzioni, e l'altra sarà la funzione ricercata: e in qualunque proporzione, dati tre termini qualunque, apparisce anche l'altro. Imperocchè il prodotto degli estremi eguagliandosi al prodotto dei medj (16. l. 6.), se quel restante sarà estremo si avrà, dividendo il prodotto de' medj per l'altro estremo; e se sarà medio si avrà, dividendo il prodotto degli estremi per l'altro medio. La specie poi facilmente si farà palese coll'altra regola.

35. Porremo quì con ordine le combinazioni, e a ciascuna apporremo il canone al quale appartiene, e la regola.

1. La base con amendue i lati. Can. 4. Reg. 2. part. 1.

2. La base con amendue gli angoli. Can. 6. Reg. 2. part. 2.

3. La

3. La base col lato e angolo contiguo. Can. 2. Reg. 2. part. 3.

4. La base col lato e angolo opposto. Can. 1. Reg. o nessuna in caso ambiguo.

5. Amendue i lati con un angolo. Can. 3. Reg. 1. o nessuna in caso ambiguo.

6. Amendue gli angoli con un lato. Can. 5. Reg. 1. o nessuna in caso ambiguo.

36. Dasi e.gr. la base (gr. 57. 25.) col lato (gr. 41. 16.) e cerchi l'angolo, contiguo al lato. Le tre cose che qui si combinano, sono la base col lato e l'angolo contiguo. A questa combinazione, che è la terza, corrisponde il Canone 2. reg. 2. part. 3. Dal Canone 2. si ha, che *il raggio è al coseno dell'angolo, come la tangente della base alla tangente del lato contiguo*. Si dà il primo termine (10000000) il terzo (15646590) il quarto (8774912). Dunque ne ricaverai il secondo, cioè il coseno dell'angolo

$$\frac{8774912 \times 10000000}{15646590} = 5608194$$
, che è il seno di

gr. 34. 6. 49. ", cosen. grad. 55. 53. 11. ", ovvero gr. 124. 6. 49. "). Dalla seconda parte reg. 2. avrai invertendo, che se la base sarà minor del quadrante (come è qui) il lato, e l'angolo contiguo saranno della stessa specie; se maggiore, di specie diversa. Hai già conosciuta la specie della base e del lato (qui cioè minor del quadrante). Dunque ritroverai anche la specie dell'angolo (qui cioè acuto). Dunque anche l'angolo (gr. 55. 53. 11. "). Opera all'istesso modo negli altri.

37. Ogni combinazione contiene tre problemi, perchè cioè qualsivoglia di queste tre cose si può cercare, date le altre due. Per la qual cosa tutti insieme farebbero dieciotto. Ma nella prima e nella seconda sono solamente due diversi. Imperciocchè quando data la base e il lato, o l'angolo si cerca l'altro lato o l'altro angolo, sarà l'istesso il problema, qualunque de' lati e degli angoli si dia, per ritrovare da quello

l'altro. Quindi que' problemi si riducono a sedici, ne quali si racchiude ogni risoluzione de' triangoli rettangoli. Nelle ultime tre combinazioni si contengono tre problemi indeterminati circa la specie della parte ricercata; quando cioè dato il lato, e l'angolo opposto, si cerca la base, o l'altro lato, o l'altro angolo, ne quali casi restiamo abbandonati da quelle regole, le quali per altro abbracciano gli altri casi tutti, che sono in se determinati.



PARTE SECONDA.

Degli obliquangoli.

38. **G** Li obliquangoli si riducono ai rettangoli coll' ajuto di una perpendicolare calata (n. 13.) sopra uno de' lati considerato come base. Contiene sei Casi; potendosi cercare il rimanente, primo dati due lati con un angolo intercetto. 2. con un angolo opposto ad uno de' due lati. 3. dati due angoli con un lato intercetto. 4. con un lato ad uno de' due angoli opposto. 5. dati tre lati. 6. dati tre angoli.

39. Il primo e il terzo caso saranno sempre possibili e determinati, purché ogni lato ed angolo dato non oltrepassi i gradi 180. Imperciocchè fatto a piacere l'angolo A (fig. 149.), e presi a piacere i lati AD, AB, si potrà per B, e D condurre (n. 13.) un circolo massimo, il quale è determinato dal piano che passa per B, D, e pel centro della sfera. Preso poi a piacere il lato AD, e fatti parimenti a piacere gli angoli A, D, si incontreranno in qualche luogo i semicircoli A Ba, DBd nell'unico punto B, dovendosi tutti i circoli tagliare vicendevolmente (n. 12.) in due punti diametralmente opposti, e dovendo perciò una intersezione rimanere nell'opposto emisfero.

40. Il secondo e quarto caso possono avere o due soluzioni, o una, o nessuna. Imperciocchè si concepisca compirsi il circolo del lato AD del triangolo ABD, e rimanendo l'angolo A col lato AB, sia il semicircolo EBe perpendicolare al circolo ADa, il quale continuamente percorso sia dal punto D, variato il lato BD, e l'angolo D, e i semicircoli EAe, Eae si taglino per metà in i e in l.

41. Per il Canone 4. il raggio sta al coseno EB, come il coseno ED al coseno BD. Quindi rimanendo
il

il raggio e il coseno BE farà il coseno BD, come il coseno ED. Il coseno ED è massimo, passando il punto D in E, ove si eguaglia al raggio, e svanisce ED: si sminuisce da qualunque parte fino ad I ed i, ove diventa nullo; non essendovi cioè complemento del quadrante EI, ed Ei. Allora divien negativo, e cresce fino ad e, ove di nuovo eguagliasi al raggio. Per la qual cosa il coseno BD, e il suo complemento BD faranno massimi in E, ed in e: e da E fino ad I, i si sminuiranno, ove diverran nulli: dipoi cresceranno fino ad e, ed in eguali distanze dal punto E ovvero e, faranno della medesima grandezza.

42. Per il Canone .3. il raggio è alla tangente dell'angolo D, come il seno ED alla tangente BE. Dunque dati il raggio e la tangente BE, farà la tangente dell'angolo D in ragione inversa del seno ED. Per la qual cosa gli Angoli in D, i quali passando il punto D in F, sono per ogni parte retti, da E in I ovvero i si variano in modo, che l'acuto decresca, l'ottuso cresca, sminuendosi la tangente, e però anche la loro semidifferenza; la quale siccome si ottiene (n. 3.) togliendo la minore dalla semisomma o sia dal quadrante, ovvero togliendo il quadrante dalla maggiore; è complemento dell'uno e dell'altro, e cresce fino ad I ovvero i; ove ED divien quadrante; e però D diventa polo del circolo EBe, (n. 16.) e gli angoli stessi vengono misurati dagli archi FB, Be; (n. 22.) di poi accresciuta di nuovo la tangente, decresce il complemento, che in e divien nullo, ove gli stessi angoli di nuovo divengon retti.

43. Quindi se nel secondo caso il complemento del lato BD, opposto all'angolo dato A; e nel quarto caso il complemento dell'angolo D opposto al lato dato AB, farà maggiore del complemento BE, il qual arco dai dati AB, ed A si dà per la combinazione prima, allora il caso sarà impossibile. Se sarà minore del complemento EB ma ancora maggiore del complemento, ivi del lato AB contiguo al dato angolo, què dell'

angolo A contiguo al dato lato; allora la soluzione sarà doppia, ivi circa E, quì circa I, ovvero nulla, secondo che sarà della stessa specie ivi il lato BD col lato AB, quì l'angolo D coll'angolo A, ovvero di specie diversa. Negli altri casi sarà unica, e unica sarà parimenti, se il punto D passi ivi in E, e il lato dato BD si eguagli a BE, quì in I, e l'arco BE misuri l'angolo D. Queste cose per altro più facilmente si manifestano dalla stessa soluzione; e quando occorrerà doppia soluzione, converrà pria conoscere la specie dell'altro angolo nel secondo caso, o la specie dell'altro lato nel quarto caso, e allora si potrà determinare il problema.

44. Gli ultimi due casi sempre faranno determinati, come sia manifesto dalla stessa soluzione; e se involgeranno impossibilità, si conoscerà, come negli altri casi, da questo, che il seno, o il coseno di qualche arco diverrà maggiore del raggio.

45. Si consideri qualsivoglia lato AD come la base, sulla quale cada l'arco perpendicolare BE, prodotta la base o entro il triangolo, o fuori di esso. Dicanli AE, DE segmenti della base, il primo contiguo al lato AB e all'angolo A, e opposto al lato BD, e all'angolo D; il secondo contiguo al lato BD, e all'angolo D, e opposto al lato AB, e all'angolo A; e quello si consideri come positivo quando cade verso D, come negativo, quando cadendo il punto E oltre A, passa alle parti opposte: questo poi si consideri positivo verso A, e negativo alla parte opposta. Gli angoli ABE, DBE si chiamino segmenti del vertice: il primo contiguo al lato AB, al segmento della base AE, e all'angolo D, opposto al lato BD, al segmento della base BE e all'angolo D: viceversa il secondo, e nell'istesso modo si considerino il positivo e il negativo.

46. Da primi sei Canoni ne dedurremo altri sette, coll'ajuto de' quali, e della terza regola didotta dalla prima, scioglieremo tutti i casi degli obliquangoli trian-

triangoli . Applicaremo cioè i Canoni e le regole già esposte ai triangoli rettangoli AEB , DEB ; e ciò che si dirà delle lettere maggiori , s' intenda ancora delle minori .

47. Per il Canone 1. il raggio è al seno dell'angolo A , come il seno AB al seno BE , e il raggio è al seno dell'angolo D , come il seno BD al seno BE . Dunque il seno dell'angolo A è al seno D , come il seno BD al seno AB . Per la qual cosa

VII. *I seni degli angoli sono come i seni de' lati opposti .*

Per il Canone 2. Il raggio è al coseno dell'angolo ABE , come la tangente AB alla tangente BE , e il raggio al coseno dell'angolo DBE , come la tangente BD alla tangente BE . Dunque il coseno dell'angolo ABE al coseno DBE , come la tangente DB alla tangente BA . Per la qual cosa

VIII. *I coseni de' segmenti del vertice sono come le tangenti de' lati opposti .*

48. Per il Canone 3. Il raggio alla tangente dell'angolo A , come il seno AE alla tangente BE ; e il raggio è alla tangente dell'angolo D , come il seno DE alla tangente BE . Dunque la tangente dell'angolo A alla tangente D sta come il seno DE al seno AE . Per la qual cosa

IX. *I seni de' segmenti della base , sono come le tangenti degli angoli opposti .*

Per il Canone 4. Il raggio è al coseno BE , come il coseno AE al coseno AB , e come il coseno DE al coseno DB . Dunque alternando il coseno AE al coseno DE , è come il coseno AB al coseno DB . Per la qual cosa

X. *I coseni de' segmenti della base sono come i coseni de' lati contigui .*

Per il Canone 5. Alternando il raggio è al coseno BE , come il seno ABE al coseno A , e come il seno DBE al coseno D . Dunque alternando , il seno ABE al seno DBE , come il coseno A al coseno D . Per la qual cosa

XI.

XI. I seni de' segmenti del vertice sono come il coseno degli angoli contigui.

Coll'ajuto di questi cinque Canoni da segmenti dati, ovvero da se vicendevolmente si ritroveranno i lati, o gli angoli, come più sotto fia manifesto. Quindi si combinano.

7. I lati e gli angoli fra di se Can. 7.

8. I lati e i segmenti del vertice Can. 8.

9. I lati e i segmenti della base Can. 10.

10. Gli angoli e i segmenti del vertice Can. 11.

11. Gli angoli e i segmenti della base Can. 9.

49. Gli stessi segmenti facilmente si ritroveranno ne' primi quattro casi col mezzo de' primi sei Canoni, come or ora apparirà. I due ultimi si ritroveranno per i due seguenti, che si ricavano dal Canone 10. e 11. e dal terzo Lemma premesso.

50. Per il Canone 10. prendendo le somme e le differenze de' termini farà la somma de' coseni de' segmenti della base alla differenza, come la somma de' coseni de' lati alla differenza. Per la qual cosa (n. 7.)

XII. La cotangente della semisomma de' segmenti della base, o sia la cotangente della metà della base alla tangente della semidifferenza sta come la cotangente della semisomma de' lati alla tangente della semidifferenza.

Per il Canone 11. Parimenti la somma de' seni de' segmenti del vertice è alla differenza, come la somma de' coseni degli angoli alla differenza. Per la qual cosa (n. 7.)

XIII. La tangente della semisomma de' segmenti del vertice, o sia la tangente della metà dell'angolo verticale alla tangente della semidifferenza sta come la cotangente della semisomma degli angoli alla base sta alla tangente della semidifferenza.

51. Nepero in vece del Canone 12. propone questo: La tangente della metà della base sta alla tangente della semisomma de' lati, come la tangente della

della semidifferenza degli stessi sta alla tangente della semidifferenza de' segmenti della base: e lo dimostra co' principj Conici. Si deduce dal Canone 12. primo alternando, dipoi ponendo per la ragione della cotangente della metà della base alla cotangente della semisomma de' lati, la ragione della tangente di questa alla tangente di quella. Imperciocchè (n. 5.) il prodotto sotto la tangente e cotangente di ciascun arco essendo eguale al quadrato del raggio, saranno le tangenti in ragione inversa delle cotangenti. Ma per la pratica vale egualmente questo nostro Canone che immediatamente se ne deduce.

52. Per la regola prima, tanto l'angolo BAE, quanto l'angolo BDE sone della stessa specie che l'arco BE. Dunque se gli angoli BAD, BDA saranno della stessa specie, giacerà il punto E entro la base AD, combaciandosi gli angoli BDA, BDE; se faranno di specie diversa, cadrà fuori. Per la qual cosa

Reg. III. *Se due angoli alla base saranno della stessa specie, la perpendicolare cadrà entro la base; se saranno di specie diversa, cadrà fuori di essa.*

53. Caso I. Si diano i lati AB, AD con l'angolo intercetto A. Due cose si possono cercare. Primieramente si cerchi il terzo lato BD. Forma la base di due lati a piacere, come per esempio AD. Dai dati AB, ed A cerca AE per la combinazione terza: avrai ED per il dato AD. Coi segmenti AE, ED, e col lato AB ritroverai il coseno BD per la nona combinazione del Canone decimo. Dal dato A hai la specie B per la regola prima. Da essa, e dalla specie ED hai la specie BD per la regola seconda.

Si cerchi in secondo luogo l'altro angolo D. Poni per base il lato dato ad essa contiguo AD. Cerca i segmenti AE, ED, come prima: con essi, e coll'angolo A per la undecima combinazione Canone 9. ritroverai la tangente D. Se AE sarà oltrepassato da AD, la specie D sarà la medesima che A; se oltrepasserà, sarà diversa per la regola terza.

54. Caso II. Si diano i lati AB , BD , con l'angolo A opposto all'altro, come BD . Tre cose si possono ricercare.

Primieramente si cerchi il lato AD . Fa di esso la base: ritroverai AE , e la specie BE , come nel primo caso: dipoi coi dati lati AB , BD , e col segmento AE ritroverai per la combinazione nona, Can. 10. il coseno ED . Colla specie BE , e BD ritroverai la sua specie per la regola seconda. Ma poichè alcune volte si potrà avere doppia soluzione da ambe le parti di E leva ED da EA , e avrai la prima; aggiungi, e avrai la seconda. Se a caso AD per la sottrazione sarà divenuta negativa a motivo di AE minore della stessa ED , ovvero per l'addizione avrà oltrepassato il semicircolo, allora rigetta quella soluzione.

Si cerchi in secondo luogo l'angolo ABD intercetto. Dai dati AB , ed A cerca il segmento del vertice ABE per la combinazione seconda. Coi lati AB , BD , e col segmento del vertice ABE ritroverai per la combinazione 3. Canone 8. il coseno EBD . Col dato EB , e ritrovata la specie BE , come prima, ritroverai la specie DBE per la regola seconda. Leva EBD dall'istesso EBA , e avrai la prima soluzione; aggiungi, e avrai la seconda. Se l'angolo ABD per la sottrazione diverrà negativo, o per l'addizione maggior di due retti, rigetta quella soluzione.

Si cerchi in terzo luogo l'angolo D opposto al lato AB . Coi lati AB , BD , e coll'angolo A ritroverai per la combinazione 7. Canone 7. il seno D . La specie nella seconda soluzione sarà la stessa che A , nella prima sarà diversa per la regola terza.

55. Caso III. Si diano gli angoli A , e B col lato intercetto AB . Due cose si possono ricercare. Primieramente si cerchi qualsivoglia lato BD . Poni l'altro AD per base. Cerca l'angolo ABE , come nella seconda parte del primo caso. Avrai EBD per il dato ABD . Con questi dati, e col lato AB ritroverai per la combinazione 2. Can. 2. la tangente BD . Dalla specie

cie A avrai la specie BE per la regola prima. Da essa, e dalla specie EBD avrai la specie BD per la regola seconda.

Si cerchi in secondo luogo l'angolo D. Prendi per base qualunque de' lati già dati, come AD. Cerca i segmenti del vertice, come prima. Da essi e dall'angolo A ritroverai per la combinazione 10. Can. 11. il seno D. Questo sarà della stessa specie con A, se ABE sarà minore di ABD; sarà di specie diversa, se sarà maggiore, per la regola terza.

56. Caso IV. Si diano gli angoli A, e D col lato AB opposto all'altro, come D. Tre cose si possono cercare.

Primieramente si cerchi il lato AD intercetto. Fa di esso la base. Dai dati AB, ed A cerca AB per la terza combinazione. Dagli Angoli A, D, ed AE segmento della base, ritroverai per la combinazione prima Canone 9. il seno ED. La specie sarà indeterminata, e potrà essere doppia la soluzione circa I, presa qualsivoglia sua specie. Aggiungi all'istesso AE l'uno e l'altro ED, e gli angoli A, e D saranno della stessa specie; levali se saranno di specie diversa per la regola terza, e avrai l'una e l'altra soluzione. Se AE in forza della sottrazione diverrà negativa, o in forza dell'addizione diverrà maggiore del semicircolo, rigetta quella soluzione.

Si cerchi in secondo luogo il terzo angolo ABD. Coi dati AB, ed A cerca ABE per la combinazione seconda. Dagli angoli A, D, ed ABE segmento del vertice ritroverai per la combinazione 10. Canone 11. il seno EBD. Sarà parimenti EBD di ambigua specie; e l'uno e l'altro dovrà aggiungersi all'istesso ABE, se gli angoli A, e D saranno dell'istessa specie; dovrà levarsi se saranno di specie diversa, per la regola 3. Se l'angolo ABD per la sottrazione diverrà negativo, o per l'addizione maggior di due retti, rigetta quella soluzione.

Si cerchi in terzo luogo il lato BD. Dagli angoli dati A, D, e dal lato AB ritroverai il seno BD per la

la combinazione 7. Can. 7. Eſſo arco farà di ſpezie ambigua. Se inoltre ſi darà la ſua ſpecie, con eſſa, e colla ſpecie BE già tante volte ritrovata, determinerai la ſpecie ED, ed EBD per la regola ſeconda.

57. Caſo V. Si diano tre lati, e ſi cerchi qualſivoglia angolo, come A. Poni per baſe l' altro de' lati a ſe contigui, come AD. Coi dati AB, BD, e colla metà della baſe AD ritroverai per il Can. 12. la tangente della ſemidifferenza de' ſegmenti AE, ED, la quale aſſumerai non maggiore del quadrante. Aggiungì quella alla metà della baſe AD, e fatta la ſottrazione, ritroverai i ſegmenti AE, ED. (n. 3.) Prendi in vece di AE contiguo all' iſteſſo AB, il ſegmento che più o meno è lontano dal quadrante, ſecondo che il lato contiguo AB farà più o meno lontano che non l' oppoſto BD. Imperciocchè per il Can. 10. *I coſeni de' ſegmenti della baſe ſono, come i coſeni de' lati contigui*; e il coſeno dell' arco più vicino al quadrante, è minore. Da AB, ed AE ritroverai l' angolo A per la combinazione terza. Ma ſe AE riſulterà dalla ſottrazione, e diverrà negativo cadendo il punto E dentro A, l' angolo BAD giacerà alle parti oppoſte all' angolo BAE, e perciò farà di ſpecie diverſa.

58. Caſo VI. Si diano tre angoli, e ſi cerchi qualſivoglia lato, come AB. Poni per baſe uno degli altri, come AD. Coi dati A, e D, e colla metà ABD ritroverai per il Can. 13. la tangente della ſemidifferenza de' ſegmenti ABE, DBE, la quale aſſumerai non maggiore del quadrante. Aggiungì quella alla metà dell' angolo ABE, e fatta la ſottrazione, ritroverai i ſegmenti del vertice ABE, DBE (n. 3.). Prendi invece di ABE contiguo all' iſteſſo A, il ſegmento, che più o meno ſia lontano dall' angolo retto, ſecondo che per il contrario l' Angolo A contiguo più o meno farà lontano dall' iſteſſo che non l' oppoſto D. Imperciocchè per il Can. 11. *I ſeni de' ſegmenti del vertice ſono, come i coſeni degli angoli contigui*; ed è maggiore il ſeno, e minore il coſeno dell' arco più vicino

cino al quadrante. Cogli angoli A , ed ABE ritroverai il lato AB per la combinazione seconda. Ma se ABE risulterà per la sottrazione, e diverrà negativo, cadendo il punto E dentro A , l'angolo BAE , dal qual e da ABE si stima la specie AB , giacerà alle parti opposte, e farà di specie diversa dal dato BAD .

59. Se nel quinto caso avuta la tangente della semidifferenza de' segmenti della base, fosse stato preso l'arco maggior del quadrante, l'istessa soluzione sarebbe avuta. Infatti sia l'arco AD tagliato per metà in L , cosicchè siano (*n. 2.*) AL , LD le semisomme, LE la semidifferenza, AE il segmento fatto per l'addizione della semisomma e della semidifferenza, DE il segmento fatto per la sottrazione. Se invece di LE fosse stato preso l'arco LAe ; il segmento fatto per l'addizione sarebbe stato $DLAe$ (ovvero De , giacchè supera il semicircolo), per la sottrazione Ae negativo, e perciò cadente da A verso d . Essendo poi l'istesso il suo complemento, che AE , esso sarebbe stato contiguo all'angolo A , e in vece del triangolo BAE sarebbe stato da risolvere il triangolo BAe , e l'angolo BAD sempre l'istesso sarebbe risultato, per le funzioni comuni degli archi AE , Ae . Giova però prendere per semidifferenza l'arco non maggior del quadrante; sì perchè senza nuova sottrazione immediatamente s'incontra nelle tavole; sì perchè in questo modo non si oltrepassa il semicircolo nell'addizione, a motivo di AD minore del semicircolo, e quindi di AL , DL minori del quadrante. L'istesso accade nel caso sesto. Però resta chiaro, che l'uno e l'altro è determinato, e ammette una sola soluzione.

60. Se nel triangolo ABD , o i due lati AB , BD , o i due angoli A , D si eguagliassero, diverrebbe più breve la soluzione, prendendo per base il lato AD intercetto da lati o angoli eguali. Imperciocchè la perpendicolare BE dividerà per metà e l'istessa base, e l'angolo opposto alla base. Infatti ne' triangoli ABE , DBE dalla data base AB , e dal lato BE provenendo nel Can. 4. l'istesso Coseno del lato AE , e dal Can.

2. il Coseno dell' angolo ABE ; e dalle base eguale BD , e dall' istesso lato BE il Coseno del lato BEe dell'angolo DBE; e a motivo della stessa specie delle basi BD, BA, e del lato BE, essendo per la reg. 3. istessa la loro specie; sarà sempre AE eguale ad ED, e l'angolo ABE eguale all'angolo DBE; e simile è la dimostrazione per il caso degli angoli eguali A, D. Quindi poi nel triangolo rettangolo AEB, oltre il lato AB, o l'angolo A, si renderà palese il segmento AE, ovvero ABE, secondo che sarà data la base AD, ovvero l'angolo ABD.

61. Se diasi solamente un lato eguale al quadrante, come AB, preso AE quadrante, si conduca per E e B l'arco EB; (n. 13.) e gli angoli ABE, AEB saranno retti, (n. 26.) e il lato BE sarà misura dell'angolo A; (n. 22.) e perciò l'arco ED, e l'angolo EBD saranno complementi del lato AE, e dell'angolo ABD. Date dunque le parti del triangolo ABD, si danno le parti del triangolo rettangolo BED, e sciolto questo, si risolve anche quello.

62. Tutti questi Canoni, e tutta la pratica sono abbastanza atti per adoperare i logaritmi, sì perchè non si adopera mai la somma o la differenza de' seni o coseni, che non si ha immediatamente per mezzo de' logaritmi; sì perchè si sono tralasciate le secanti, i cui logaritmi in molte tavole non si trovano, appunto perchè facilmente si ricavano da logaritmi de' coseni, e non mai occorre l'uso de' seni-versi, i quali più difficilmente si ricavano dalle tavole. Questo metodo poi sembra migliore d'altri molti, sì per la brevità, e per un certo ordine, e connessione di dimostrazioni; non essendovi mestieri della dottrina delle sezioni coniche, nè di una certa molesta trasformazione di un triangolo di angoli dati in un triangolo di lati dati, e gli altri teoremi spontaneamente derivano da altri; sì perchè subito si rende chiaro per regole spedite, ogni qual volta la specie della parte cercata, è determinata in se stessa.

63. Ac-

63. Acciocchè poi in una sola occhiata si veggano tutte le cose che appartengono all'uso, porremo qui sotto i Canoni con le combinazioni, e le regole.

Per i Triangoli rettangoli.

I. Il raggio è al seno dell'angolo, come il seno della base al seno del lato opposto.

II. Il raggio è al coseno dell'angolo, come la tangente della base alla tangente del lato contiguo.

III. Il raggio è alla tangente dell'angolo, come il seno del lato contiguo alla tangente dell'opposto.

IV. Il raggio è al coseno di un lato, come il coseno di un altro al coseno della base.

V. Il raggio è al seno dell'angolo contiguo, come il coseno del lato al coseno dell'angolo opposto.

VI. Il raggio è alla tangente di un angolo, come il coseno della base alla cotangente dell'altro.

Reg. I. I lati sono della stessa specie con gli angoli opposti.

Reg. II. Se due lati, o due angoli, o un lato con l'angolo contiguo saranno della stessa specie; la base sarà minore del quadrante; se di specie diversa, sarà maggiore; e viceversa.

Combinaz. 1. La base con amendue i lati Can. 4. reg. 2. part. 1.

2. La base con amendue gli angoli Can. 6. reg. 2. part. 2.

3. la base col lato e l'angolo contiguo Can. 2. reg. 2. part. 3.

4. La base col lato e l'angolo opposto

5. Amendue i lati con un angolo

6. Amendue gli angoli con un lato

Reg. I. ovvero nessuna in caso ambiguo.

Per

Per gli Obliquangoli.

VII. I seni degli angoli sono come i seni de' lati opposti.

VIII. I coseni de' segmenti del vertice sono come le tangenti de' lati opposti.

IX. I seni de' segmenti della base sono come le tangenti degli angoli opposti.

X. I coseni de' segmenti della base sono come i coseni de' lati contigui.

XI. I seni de' segmenti del vertice sono come i coseni degli angoli contigui.

XII. Se due angoli faranno della stessa specie colla base, la perpendicolare cadrà entro la base; se di specie diversa cadrà fuori d'essa.

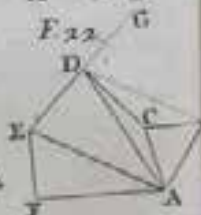
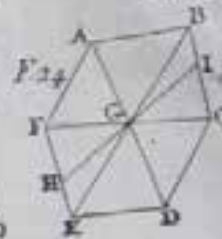
Combinaz.	7. I lati e gli angoli	Can. 7.
	8. I lati e i segmenti del vertice	Can. 8.
	9. I lati e i segmenti della base	Can. 10.
	10. Gli angoli e i segmenti del vertice	Can. 11.
	11. Gli angoli e i segmenti della base	Can. 9.

Per ritrovare i segmenti in caso dei lati , e degli angoli già dati.

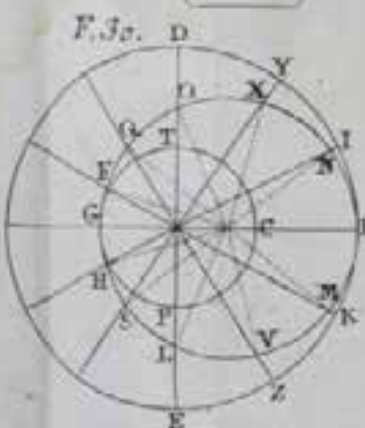
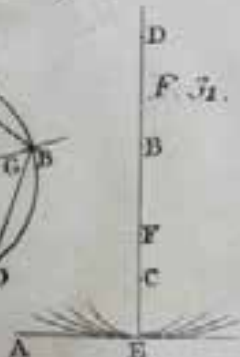
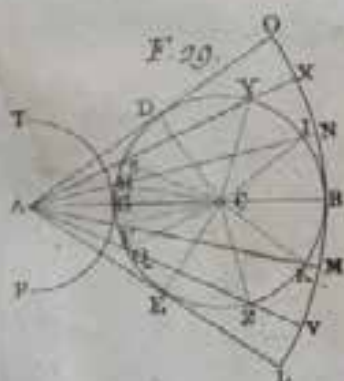
XII. *La cotangente della metà della base stà alla tangente della semidifferenza de' segmenti , come la cotangente della semisomma de' lati alla tangente della semidifferenza .*

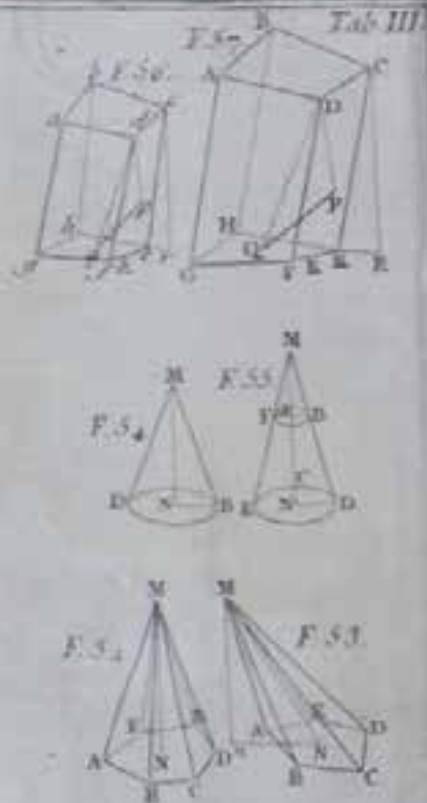
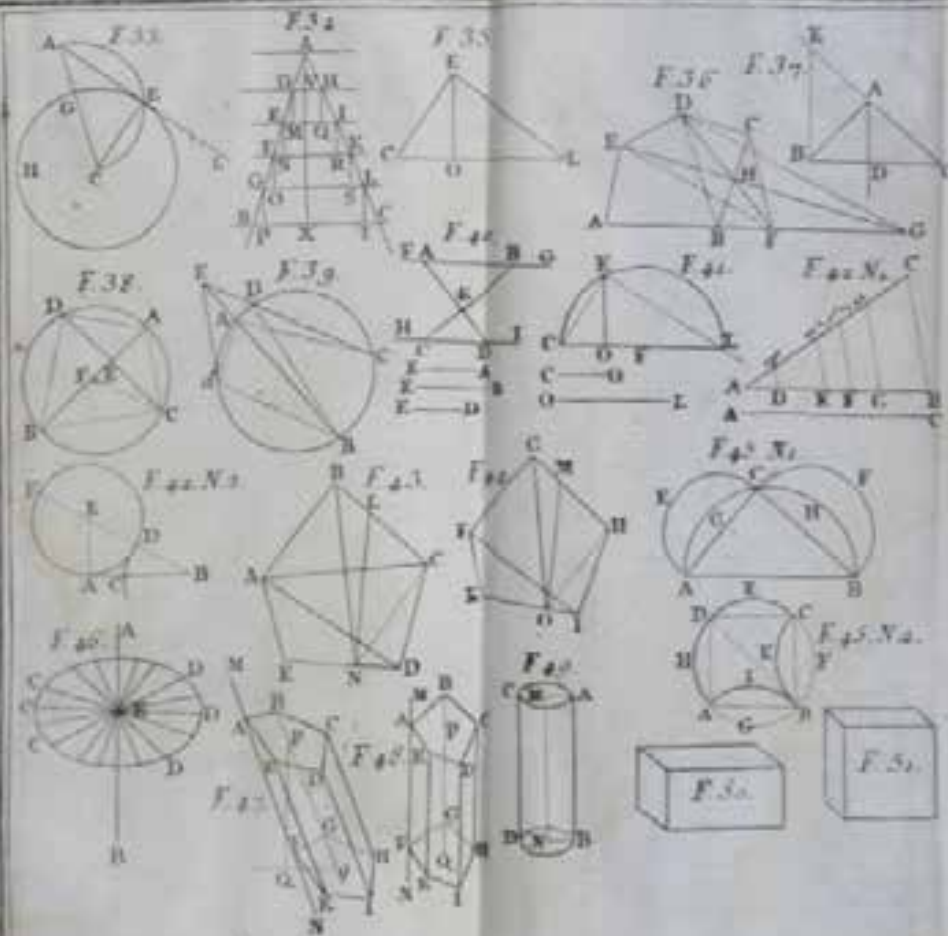
XIII. *La tangente della metà dell' angolo verticale stà alla tangente della semidifferenza de' segmenti , come la cotangente della semisomma degli angoli alla base stà alla tangente della semidifferenza .*

F I N E.



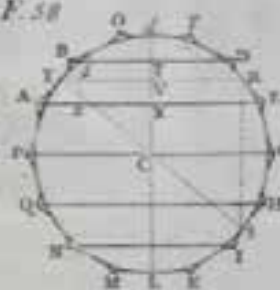
F.31.





Tab IV

F. 58



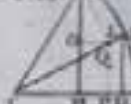
F. 59



F. 60



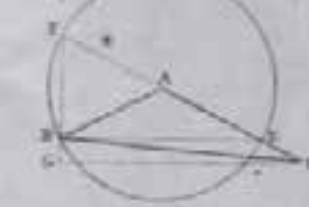
F. 61



F. 62



F. 63



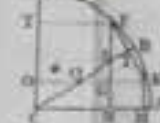
F. 64



F. 65



F. 66



F. 67



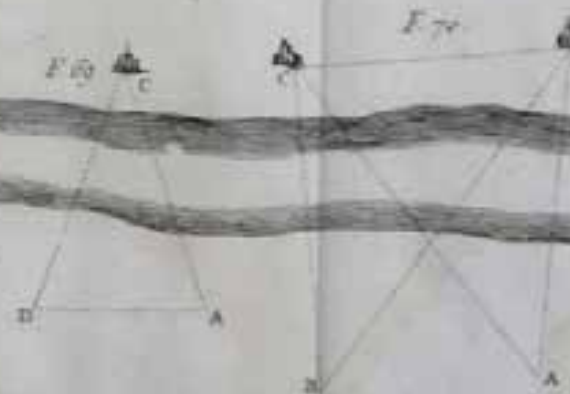
F. 68



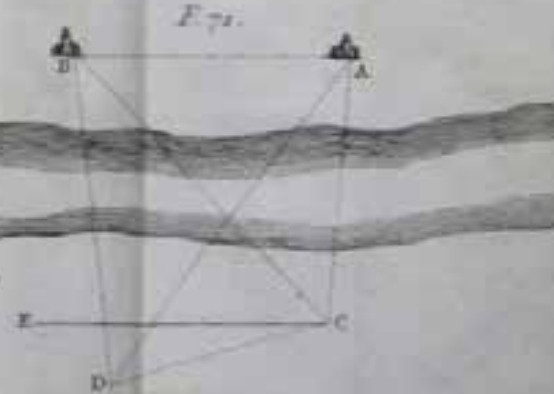
F. 69



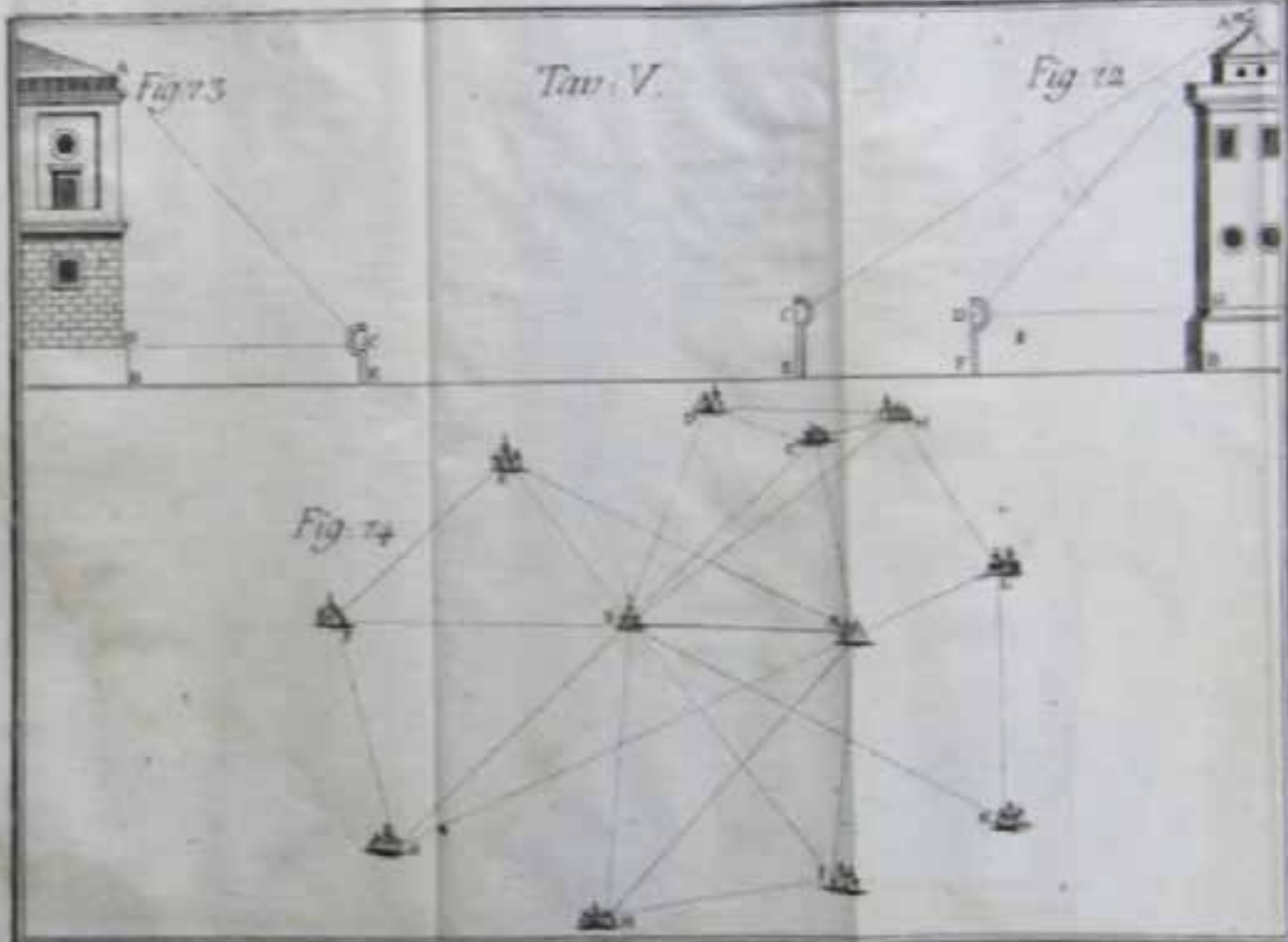
F. 70



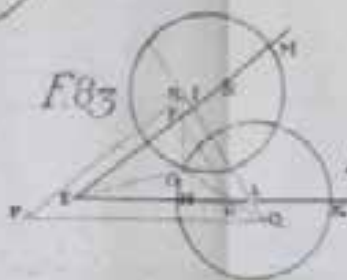
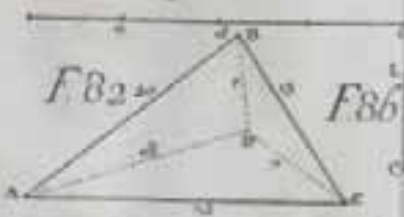
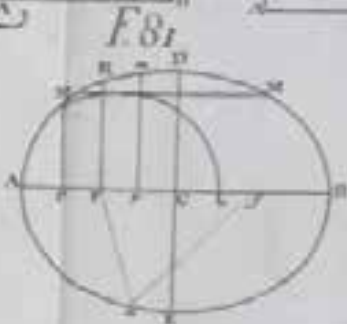
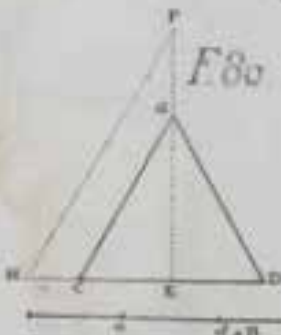
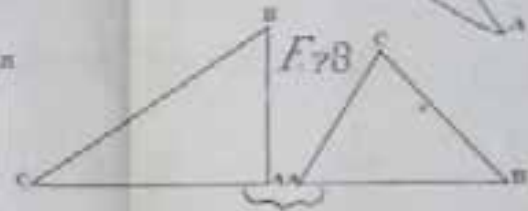
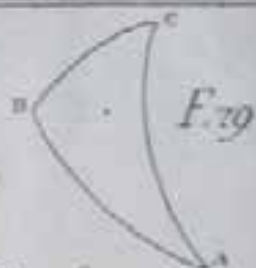
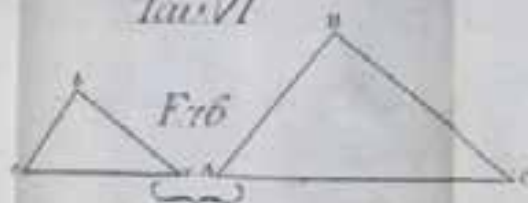
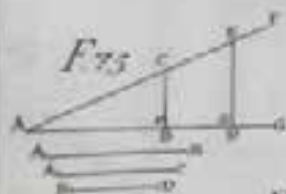
F. 71

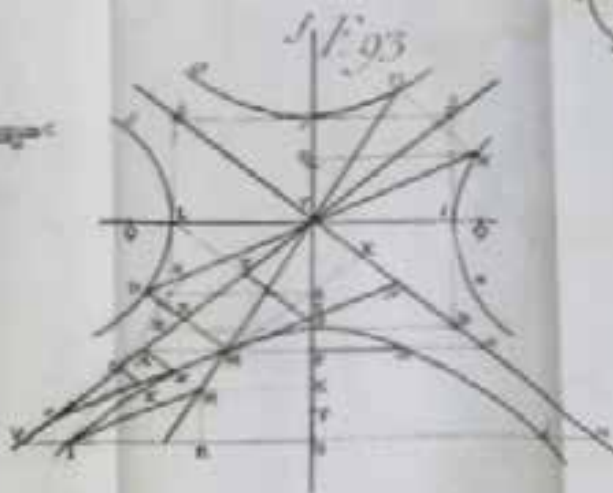
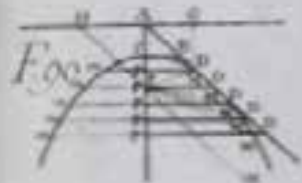
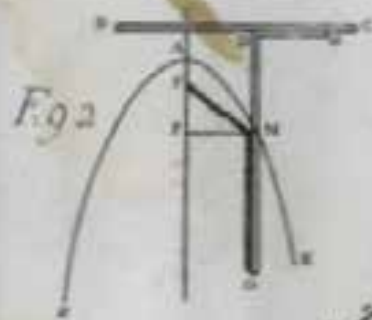
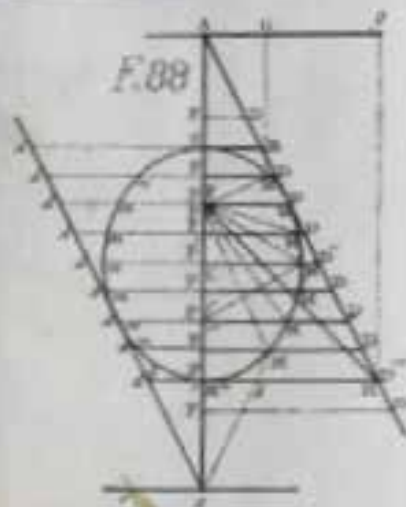


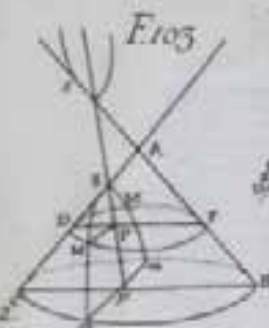
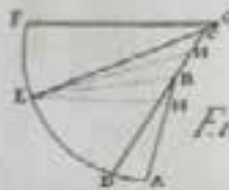
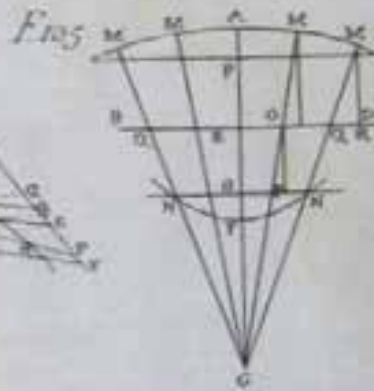
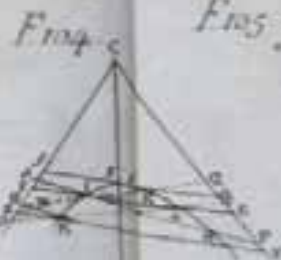
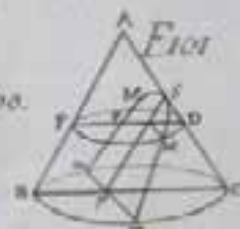
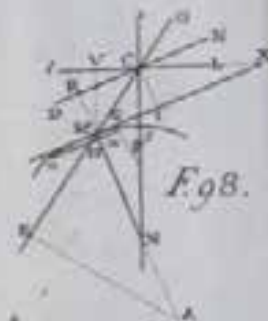
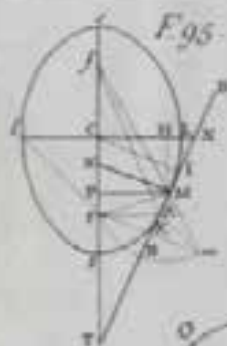
Tab. V.

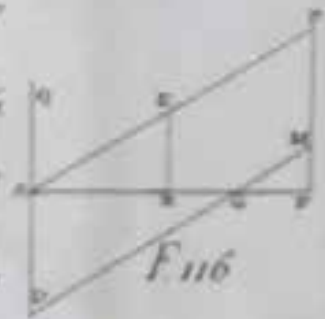
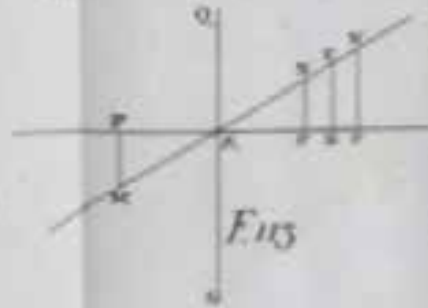
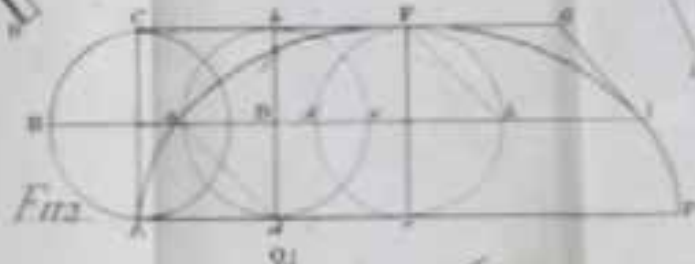
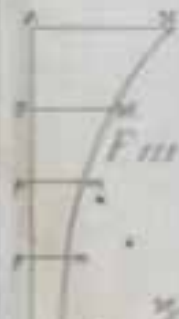
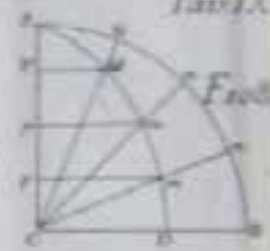
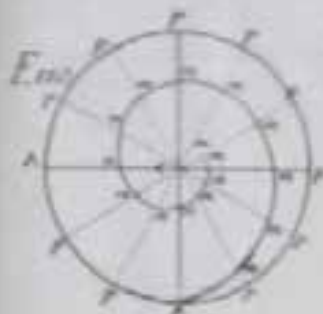
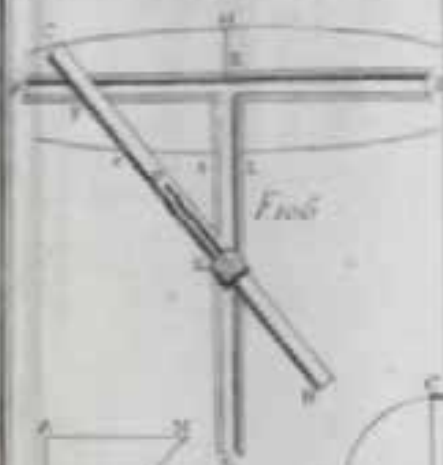


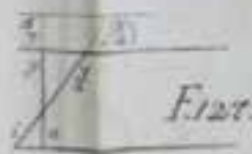
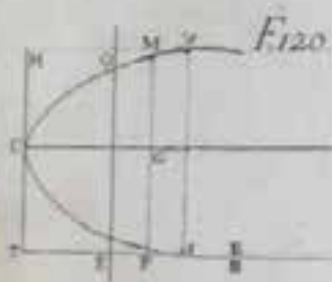
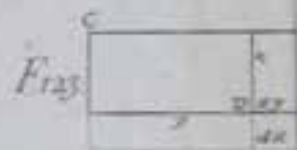
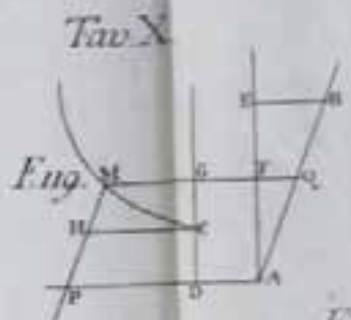
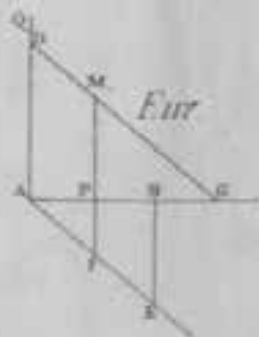
Tau VI





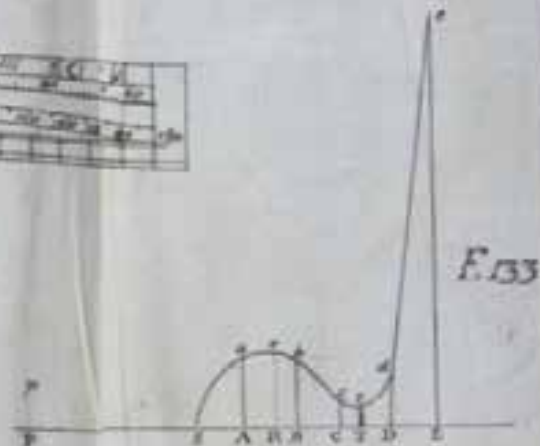
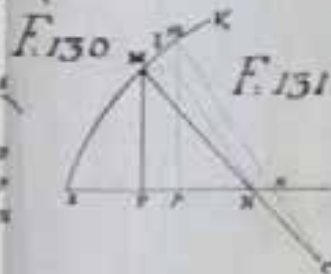








F.134



Tab. XII

F. 133

F. 136

F. 137

F. 144

F. 143

F. 143

2 5 0 1 0 0 5

