matematički vidici 5

Marica i Slaviša PREŠIĆ

Uvod u matematičku logiku

TEORIJA I ZADACI

DRUGO DOPUNJENO IZDANJE

matematički institut
BEOGRAD, 1984.

U sastavu izdavačke delatnosti Matematičkog instituta nalazi se i ova edicija MATEMATIČKI VIDICI.

MATEMATIČKI VIDICI objavljuju posebne knjige-monografije iz različitih grana matematičkih i mehaničkih nauka. Ove knjige su namenjene širem krugu čitalaca što ediciji — MATEMATIČKI VIDICI daje poseban značaj i obavezu.

Ova publikacija nije periodična.

MATEMATIČKI VIDICI

Knjiga

5

Rukopise opremljene za štampu slati na adresu: Matematički institut, 11 001 Beograd, Knez Mihailova 35/I.

MATEMATIČKI VIDICI 5

Marica i Slaviša PREŠIĆ

UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU

TEORIJA I ZADACI

(DRUGO DOPUNJENO IZDANJE)

MATEMATIČKI INSTITUT
BEOGRAD. 1984.

Recenzenti:

Kurepa dr Djuro, redovni profesor Prirodno–matematičkog fakulteta u Beogradu
Stojaković dr Mirko, redovni profesor Prirodno–matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Alimpić dr Branka, vanredni profesor Prirodno–matematičkog fakulteta u Beogradu

Primljeno za štamu na 131. sednici Naučnog veća Matematičkog instituta od 2.marta 1983. godine

Tehnički urednik
Milan Čavčić

Izdaje: Matematički institut – Beograd, Knez Mihailova 35
Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije
Prema mišljenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije, ova publikacija je oslobodjena poreza na promet.

Štampa: Grafičko preduzeće Radiša Timotić, Beograd, Jakšićeva br.9

S A D R Ž A J

Strana

Marica i Slaviša Prešić

UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU – TEORIJA I ZADACI
(Drugo dopunjeno izdanje)

„Matematički vidici" knjiga 5 (1984), str. 399

Korekturu izvršila . . . *Prešić dr Marica*
Nacrt za korice . . . . . *Čavčić Milan*
Rukopis kucala . . . . . *Jandrič Milosava*

Tiraž: 1000 primeraka

PREDGOVOR

Svedoci smo sve snažnijeg i plodnijeg razvoja matematičke logike. Literatura iz te oblasti matematike veoma je bogata, i skoro svakog dana izlaze nove i nove knjige. Medjutim, mali je broj knjiga u kojima je sadržaj izložen postupno i koje su prilagodjene studentima. Takodje se nedovoljno ističe mogućnost korišćenja matematičke logike u ostaloj matematici. Ova knjiga, pisana i kao udžbenik i kao zbirka zadataka, predstavlja pokušaj postupnog uvođenja u izvesne značajne delove matematičke logike, sa naglaskom na njene primene (u matematici i drugde). U skladu sa tim, jedna od odlika ove knjige je uzlaznost u izlaganju, u početku sa manjim isticanjem sintaksnih sredstava (jezik i sl.).

U knjizi se izlaže klasični iskazni račun (istinitosne tablice, tautologije), predikatski račun I reda (glavna interpretacija, valjane formule, Hilbertov ε–operator), počeci teorije modela (stav kompaktnosti, iskazni i predikatski, sa primenama), formalne teorije, jednakosna logika (opšta svojstva jednakosti, algebra realnih brojeva, univerzalne algebre, problem reči), kratko o Bulovim algebrama, aksiomatskim teorijama skupova i elementarnoj teoriji brojeva, kao i nešto opširnije o definicijama.

Učenicima srednjih škola koje više zanima matematika preporučujemo poglavlja I do VI, kao i početne delove poglavlja VII do XII i poglavlja XVIII. Studentima prve godine matematike preporučujemo poglavlja I do XII, XVIII kao i početke poglavlja XIII do XVII, a studentima viših godina sva poglavlja.

Zahvaljujemo na svesrdnoj pomoći kolegama *dr Branki Alimpić, mr Miroslavu Ašiću, mr Draganu Blagojeviću, mr Milanu Božiću, dr Nataši Božović, mr Aleksandru Krapežu* i *dr Žarku Mijajloviću* koji su rukopis pročitali.

Dr Žarko Mijajlović pomogao nam je i nizom stručnih primedbi.

Beograd, maja 1978. *Pisci*

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

U drugom izdanju izvršene su izmene onih delova teksta u kojima su uočeni nedostaci, i ispravljene su primećene štamparske greške.

Pisci

U Beogradu,
Februar 1984.

I SLOVA I REČI

♦ Pored govornog jezika u matematici se koriste i razni matematički znaci (simboli) kao:

$$1,\ x,\ a+b,\ p\parallel q,\ >,\ x=y \Rightarrow y=x,\ (\exists x)\ x=1 \quad \text{i sl.}$$

♦ Za znak $a+b$ obično se kaže da je dobijen od znakova a, $+$, b operacijom *dopisivanje*. Kaže se i: znak $a+b$ je *reč* sagradjena od *slova* a, $+$, b. Pri tom je a prvo, $+$ drugo, dok je b treće slovo te reči.

♦ U matematici se sa prilično slobode shvataju pojmovi slovo, reč. Naime, neka je A neki skup znakova. Nazovimo dogovorno elemente tog skupa *slova*, a sam skup *azbuka* ili *abeceda* ili *alfabet.*[1)]

Pod *rečima azbuke* A se tada smatraju:

Prvo: Slova,

Drugo: Svi znaci dobijeni dopisivanjem (izvesnog broja) slova. Na primer, ako azbuku čine slova 1, $+$, x, onda su neke reči (od tih slova): 1, $+$, x, $++$, $x+1$, $xx11++$.

♦ Broj slova (računajući svako slovo onoliko puta koliko se pojavljuje) reči W naziva se *dužina* te reči i označava $d(W)$. Recimo:

$$d(x)=1, \quad d(x+1)=3, \quad d(xx11++)=6 \quad \text{i sl.}$$

♦ Dve reči (iste azbuke) su *jednake* ako i samo ako su im sva slova po redu jednaka.

♦ Koristeći se operacijom dopisivanje kao osnovnim pojmom, *reč azbuke* A može se strogo ovako uvesti

(i) *Svako slovo je reč;*

(ii) *Ako su U, V reči, onda je i UV[2)] reč;*

(iii) *Reči se dobijaju jedino konačnom primenom prethodnih dvaju pravila.*

---

1) Za azbuku A zahtevamo da zadovoljava ovakav uslov:
Za svaku reč nad tom azbukom jednoznačno je odredjeno od kojih slova (po redu) je sagradjena.

Tako, na primer, ne bi se uzelo da je A sastavljena od znakova a, aa, jer se tada za razne reči kao aa, aaa, aaaaa ne može jednoznačno odgovoriti na pitanje od kojih su slova sagradjene. Slično vredi i za znake aa, aaa.

2) Pri tom je UV dobijena dopisivanjem reči V na reč U.

ZADACI

1. Azbuku A čine slova α, ☆. To ćemo i ovako označiti $A = \{\alpha, ☆\}$[1]. Navesti sve je jedno–, dvo– i troslovne reči te azbuke.

Rešenje. Jednoslovne reči su: α, ☆

Dvoslovne su: $\alpha\alpha$, α☆, ☆α, ☆☆

Troslovne su: $\alpha\alpha\alpha$, $\alpha\alpha$☆, α☆α, α☆☆, ☆$\alpha\alpha$, ☆α☆, ☆☆α, ☆☆☆.

2. Azbuka je $\{a, A, x\}$. Navesti sve jedno–, dvo– i troslovne reči te azbuke.

3. Obrazovati sve reči azbuke $\{a, b, c\}$ koje imaju ovo svojstvo

(a) Dužina reči je 4, susedna slova su uvek različita;

(b) Dužina reči je 2, sva slova su medjusobno različita;

(c) Dužina reči je 3, sva slova su medjusobno različita.

Rešenje.

(a) *abab, abac, abca, abcb, acab, acac, acba, acbc, baba, babc, baca, bacb, bcab, bcac, bcba, bcbc, caba, cabc, caca, cacb, cbab, cbac, cbca, cbcb;*

(b) *ab, ba, ac, ca, bc, cb;*[2]

(c) *abc, acb, bac, bca, cab, cba.*[3]

4. Obrazovati sve reči azbuke $\{a, \alpha, A, B\}$ koje imaju svojstvo:

(a) Dužina reči je 3, sva slova su medjusobno različita;

(b) Dužina reči je 4, sva slova su medjusobno različita;

(c) Dužina reči je 4, slovo date azbuke se ili uopšte ne pojavljuje ili se pojavljuje paran broj puta;

(b) Dužina reči je 3, i ukoliko se u reči pojavljuju različita slova, onda: a je ispred α, α je ispred A, A je ispred B.

5. Dati su znaci (slova) a, $+$, A. Smatrajući da je a prvo, $+$ drugo, a A treće slovo, sastaviti rečnik svih jedno–, dvo– i troslovnih reči.

Rešenje. Traženi rečnik je (po redu pisanja):

a, aa, a+, aA, aaa, aa+, aaA, a+a, a++, a+A, aAa, aA+, aAA, +, +a, ++, +A, +aa, +a+, +aA, ++a, +++, ++A, +Aa, +A+, +AA, A, Aa, A+, AA, Aaa, Aa+, AaA, A+a, A++, A+A, AAa, AA+, AAA.

---

[1] $\{\alpha, ☆\}$ je uobičajena oznaka za skup čiji su elementi α, ☆.

[2] Dobijene reči pod (b) su tzv. varijacije druge klase bez ponavljanja.

[3] Reči pod (c) su permutacije skupa $\{a, b, c\}$.

6. Azbuka je $\{\Delta, X, =, 1\}$. Obrazovati rečnik svih jedno–, dvo– i troslovnih reči, uz dogovor da je 1 prvo, X drugo, Δ treće, = četvrto slovo.

7. Neka su A, X, Y reči neke azbuke. Da li važe ovi tzv. *zakoni skraćivanja*[1]

$$AX = AY \Rightarrow X = Y, \quad XA = YA \Rightarrow X = Y$$

Odgovor. Važe. Strog dokaz se može izvesti indukcijom po dužini reči A.

8. Da li se može odrediti neka reč azbuke $\{a, b, c\}$ za koju vredi data jednakost

(a) $Xa = abca$, (b) $Xa = aX$, (c) $aXb = X$

Rešenje. (a) X je abc; (b) X je svaka reč obrazovana jedino od slova a; (c) Nijedna reč X ne zadovoljava uslov $aXb = X$. Razlog: Jednake reči su istih dužina, što sa rečima aXb, X nije slučaj.

9. Da li postoji neka reč X azbuke $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ za koju vredi data jednakost

(a) $\alpha X\beta = \alpha\beta\gamma\delta\beta$, (b) $X\alpha\beta X = \beta\gamma\delta\alpha\beta\beta\gamma\delta$, (c) $\beta X\beta = XX$

Primedba. U matematici se često za dokazivanje tvrdjenja koriste razni principi matematičke indukcije. Princip koji najpre opisujemo zvaćemo *osnovni oblik matematičke indukcije.*

Pretpostavimo da treba dokazati tačnost beskonačno mnogo iskaza:

$$I_0, I_1, \dots, I_n, \dots$$

odnosno, drugačije izrečeno, dokazati da

Za svaki prirodan broj n vredi I_n.

Prema osnovnom principu matematičke inducije za to je dovoljno dokazati

Prvo: I_0 je tačan iskaz.

Drugo: Tačnost beskonačno mnogo implikacija $I_0 \Rightarrow I_1, I_1 \Rightarrow I_2, \dots, I_n \Rightarrow I_{n+1}, \dots$ što se obično ovako sažeto iskazuje

Za svaki prirodan broj n vredi $I_n \Rightarrow I_{n+1}$.

U dokazivanju tog tvrdjenja obično se ovako postupa:

Polazi se od pretpostavke I_n *(n* je prirodan broj*)*, tzv. *indukcijske pretpostavke*, pa se dokazuje da vredi i I_{n+1}.

Princip matematičke inducije može se kratko zapisati[2] i u obliku (tzv. pravila zaključivanja);

$$\frac{I_0, \quad (\forall n \in N)(I_n \Rightarrow I_{n+1})}{(\forall n \in N) I_n}$$

[1] Znak $\Rightarrow$ zamenjuje reči A k o ... o n d a. To je znak i m p l i k a c i j e – važne logičke operacije. Njome se od dve date rečenice p, q obrazuje nova rečenica A k o p, o n d a q, u kraćoj oznaci p $\Rightarrow$ q. O tome videti više u tački IV O s n o v n e l o g i č k e o p e r a c i j e. I s t i n i t o s n e t a b l i c e.

[2] $\forall$ je zamena za reč s v a k i. To je znak tzv. univerzalnog (opšteg) kvantora. Recimo, rečenica oblika:

Z a s v a k i x i z s k u p a A v r e d i f o r m u l a F(x)

može se upotrebom tog kvantora kratko zapisati: $(\forall x \in A) F(x)$.

Rečima: Iz I_0 i $(\forall n \in N)\ (I_n \Rightarrow I_{n+1})$ proističe $(\forall n \in N) I_n$.

Pored navedenog oblika indukcije koriste se i razni drugi.[1] Opisujemo još i tzv. *princip potpune indukcije* (za prirodne brojeve):

$$\frac{I_0,\ (\forall n \in N)\ (I_0 \text{ i } I_1 \text{ i } \dots \text{ i } I_{n-1}) \Rightarrow I_n)}{(\forall n \in N) I_n}$$

Znači, smatramo da je istinitost rečenice (formule) $(\forall n \in N) I_n$ dokazana, ukoliko je

(i) Dokazano da je I_0 istinito

(ii) Iz pretpostavke da su, za ma koji prirodan broj n, za sve prethodnike tog broja (tj. za brojeve $0, 1, \dots, n-1$) sve rečenice I_0, $I_1 \dots, I_{n-1}$ istinite, proizlazi da je istinita i rečenica I_n.

10. Dokazati da ne postoji nijedna reč X azbuke $\{a, b\}$ za koju vredi jednakost

$$(\star) \qquad Xa = bX$$

Rešenje. Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po dužini reči X.

Ako je dužina reči X jednaka 1, onda: X je ili a ili b. U prvom slučaju jednakost ($\star$) glasi $aa = ba$, a u drugom $ba = bb$. Obe te jednakosti su netačne, pa ni a ni b nisu rešenja jednačine ($\star$).

Pretpostavimo, dalje (to je indukcijska pretpostavka) da jednačina ($\star$) nema nijedno rešenje čija je dužina manja od n (gde $n > 1$).

Ako postoji neka reč X dužine n koja zadovoljava jednakost ($\star$), onda X mora počinjati sa b, a završavati se sa a, tj. X je oblika bYa, pri čemu je dužina reči Y manja od n. Kako, po pretpostavci, X zadovoljava jednakost ($\star$), to otuda važi:

$$bYaa = bbYa$$

odakle se posle skraćivanja sa b, odnosno sa a dobija jednakost

$$Ya = bY \qquad (Y \text{ je reč dužine manje od } n)$$

To je u suprotnosti sa indukcijskom pretpostavkom da jednačina ($\star$) nema nijedno rešenje čija je dužina manja od n. Odatle sledi da je pretpostavka da postoji rešenje jednačine ($\star$) dužine n nemoguća.

Zaključak: Na osnovu principa potpune indukcije proizlazi da jednačina ($\star$) nema nijedno rešenje.

11. Dokazati da ne postoji reč azbuke $\{a, b\}$ za koju vredi jednakost

$$XabX = bXXa$$

Uputstvo. Koristiti ovaj uslovni zakon skraćivanja

$$XAY = X'AY' \Rightarrow XY = X'Y' \quad (\text{uz uslov } d(X) = d(X'),\ d(Y) = d(Y'))$$

[1] Sasvim malom izmenom osnovnog oblika indukcije, koji smo formulisali „počev od 0", dolazi se do indukcije „počev od 1" i uopšte „počev od k", gde je k neki dati prirodan broj. Slična napomena se odnosi i na potpunu indukciju. Podrobnije o indukcijama izlaže se u tački XV.

12. Data je azbuka $A = \{a, \ldots\}$. Rešiti po X jednačinu:

(☆) $\qquad aX = Xa \qquad$ (X je reč azbuke A)

Uputstvo. Sva rešenja su oblika[1] a^n $(n = 1, 2, \ldots)$. Provera da a^n jesu rešenja je jednostavna. Radi dokaza da su to i jedina rešenja, X prikazati u obliku $x_1 \, x_2 \ldots x_n$. Tada se zamenom u (☆) najpre zaključuje $x_1 = a$, $x_n = a$ a potom, postupnim skraćivanjem, da i sva ostala slova reči X moraju biti a.

13. U skupu svih reči obrazovanih od slova a, b izdvojene su reči pod nazivom „istaknute" ovom induktivnom definicijom .

1° Reči *ab*, *ba* su istaknute

2° Ako je reč *Xa* istaknuta, onda je i *Xab* istaknuta

3° Ako je *Xb* istaknuta, onda je i *Xba* istaknuta

4° Istaknute reči se dobijaju jedino primenom prethodnih triju pravila konačan broj puta.

Da li je reč *abab* istaknuta? Na koji se još način mogu opisati istaknute reči?

Rešenje. Reč *abab* jeste istaknuta. To se zaključuje na ovaj način

(1) *ab* je istaknuta, prema 1°

(2) *aba* je istaknuta, jer se dobija iz *ab* pomoću 3°

(3) *abab* se dobija iz *aba* pomoću 2°. Dakle i ona je istaknuta.

Uopšte, polazeći od istaknute reči *ab* naizmeničnom primenom pravila 3° i 2° dobijaju se istaknute reči: *ab, aba, abab, ababa, ababab* itd. Slično, od istaknute reči *ba* naizmeničnom primenom pravila 2° i 3° dobijaju se istaknute reči: *ba, bab, baba, babab, bababa* itd. Nije teško zaključiti da se svaka istaknuta reč može dobiti na jedan od ta dva načina i da je karakteristično svojstvo istaknutih reči *naizmenično* redjanje slova a, b.

14. Da li se iz skupa svih reči od slova a, b mogu, na način sličan onom u prethodnom zadatku, izdvojiti sve one reči kod kojih se naizmenično redjaju slovo b, i reč *aa*? Takve reči su, na primer, *baa, aab, baab, baabaa, aabaab* i sl.

15. Reči obrazovane od slova a, $+$ kao što su: *a, +, aa, ++, a+a, +a+, a++a, +aa+, ++++, a++a++a, +++a++a+++, aa+++a+a++a+a+++aa* nazivamo *simetrične*[2]. Definisati skup svih simetričnih reči induktivnom definicijom sličnom onoj u zadatku 13.

Rešenje. Jedna mogućnost je:

---

[1] a^n je oznaka za $\underbrace{a\,a \ldots a}_{n-\text{puta}}$. Slično se uvodi R^n, gde je R data reč.

[2] Recimo, reč +++a+⁝+a+++ je simetrična u odnosu na osu simetrije označenu isprekidanom crtom.

1° Reči a, $+$, aa, $++$ su simetrične;

2° Ako je X simetrična reč, onda su i reči aXa, $+X+$ simetrične;

3° Simetrične reči se dobijaju jedino primenom pravila 1° i 2° konačan broj puta.

16. Izdvojiti, induktivnom definicijom, iz skupa svih reči od slova a sve one reči u kojima se to slovo pojavljuje neparan broj puta.

17. Iz skupa svih reči od slova a izdvojiti induktivnom definicijom sve one reči u kojima se a pojavljuje $3k+2$ puta ($k = 0,1,2, \ldots$).

18. Iz svih reči azbuke $\{a, b\}$ izdvojiti induktivnom definicijom reči kao što su: *abb, bab, bba, abbaa, abbbb, abaabbaba,* odnosno sve one reči u kojima se slovo a pojavljuje neparan broj puta, a slovo b paran broj puta.

19. Medju svim rečima obrazovanim od slova a, b, $+$, $($, $)$ izdvojene su reči pod nazivom *dobre* na ovaj način:

1° a, b su dobre;

2° Ako su X, Y dobre reči, onda je i $(X+Y)$ dobra;

3° Dobre su tačno one reči koje se dobijaju primenom prethodnih dvaju pravila konačan broj puta.

(1) Koje od narednih reči jesu dobre

$$(a + b), \quad a + b, \quad +ab, \quad ((a + b) + b)$$

(2) Neka je X dobra reč i k broj pojavljivanja znaka + u njoj. Koliko se puta u toj reči pojavljuje znak $($ a koliko znak $)$?

Rešenje. (1) Reči $a+b$, $+ab$ nisu dobre. Razlog je, recimo, što po definiciji sve dobre reči koje nisu slova počinju znakom $($, a to kod prethodnih dveju nije slučaj. Reč $(a+b)$ je dobra jer se dobija primenom pravila 2° na dobre reči a, b. Slično, dobra je i reč $((a+b) + b)$ jer se i ona može dobiti pomoću istog pravila primenjenog na dobre reči $(a+b)$, b.

(2) Po definiciji dobrih reči svakom znaku + (tj. svakom pojavljivanju tog znaka) odgovara po jedan par zagrada $($, $)$. Prema tome u dobroj reči X sva tri znaka +, $($, $)$ imaju isti broj pojavljivanja, dakle k.

Primedba. Reči izdvojene u prethodnom zadatku pod nazivom dobre su, očigledno, razni *algebarski izrazi* sagradjeni od slova a, b i operacijskog znaka +, uz dodatni dogovor da svakom pojavljivanju operacijskog znaka odgovara po jedan par zagrada $($, $)$.

20. Medju rečima azbuke $\{a, b\}$ izdvojene su dve vrste reči – jedne pod nazivom *dobre* i druge *istaknute* ovom definicijom

(i) a je dobra reč;

(ii) b je istaknuta;

(iii) Ako je X dobra a Y istaknuta, onda je XY dobra;
(iv) Ako je X dobra a Y istaknuta, onda je YX istaknuta;
(v) Dobre i istaknute reči su tačne one koje se dobijaju primenom prethodnih pravila konačan broj puta.

(1) Koje od reči

$$ab, abba, ba, bba, aabba$$

su dobre a koje su istaknute?

(2) Da li svaka dobra reč počinje slovom a, a svaka istaknuta slovom b?
(3) Dokazati da su medju rečima koje počinju slovom a *dobre* one i samo reči koje na početku imaju *tačno jedno* slovo a.
(4) Medju rečima koje počinju sa b *istaknute* su upravo one koje na početku imaju *tačno jedno* slovo b. Dokazati.

21. Dokazati tzv. *Levievu*[1] *lemu:*

Jednakost

(☆) $AB = CD$ (A, B, C, D su reči nad datom azbukom)

važi tačno u ova tri slučaja

(i) $A = C, B = D$
(ii) *Za neku reč X (nad uočenom azbukom) vredi:* $A = CX$, $D = XB$
(iii) *Za neku reč Y vredi:* $C = AY$, $B = YD$.

Dokaz. Neposredno se proverava da uočena jednakost vredi u sva tri slučaja. Recimo, ako za neku reč X važi

$$C = AY, \qquad B = YD$$

onda zamenom reči AY, YD umesto C, B jednakost (☆) postaje

$$AYD = AYD$$

što je očigledno tačno.

Pretpostavimo sada obratno, da je jednakost (☆) ispunjena. Pošto su dve reči jednake ukoliko su im slova po redu jednaka, to za reči A, C mogu nastupiti tri slučaja

Prvi: $A = C$
Drugi: C je „početni komad" od A, tj. postoji reč X takva da $A = CX$.
Treći: A je „početni komad" od C, tj. $C = AY$ za neku reč Y.

Tako smo došli do prvonavedenih jednakosti u slučajevima (i), (ii), (iii). Zamenom u jednakosti (☆) dobijamo:

$$AB = AD, \text{ odnosno } CXB = CD, \text{ odnosno } AB = AYD$$

odakle skraćivanjem sa A, odnosno sa C slede jednakosti

[1] F.W. L e v i, lema potiče iz 1944. godine.

$$B = D, \text{ odnosno } XB = D, \text{ odnosno } B = YD$$

a to su upravo drugonavedene jednakosti u (i), (ii), (iii).

22. Rešiti po X, Y jednačinu

(☆) $$AX = BY \qquad (A, B \text{ su date reči})$$

Pri tome su A, B, X, Y (a takodje i reči Z_1, Z_2, Δ koje se javljaju u rešenju) reči nad datom azbukom.

Rešenje. Prema Levievoj lemi jednakost (☆) važi u tri slučaja:

(i) $A = B,\ A = Y$;

(ii) $A = BZ_1,\ Y = Z_1X$ (Z_1 je neka reč);

(iii) $B = AZ_2,\ X = Z_2Y$ (Z_2 je neka reč).

Odatle zaključujemo:

– Ako je $A = B$, onda su rešenja jednačine (☆) odredjena sa: $X = \Delta$, $Y = \Delta$, gde je Δ proizvoljna reč.

– Ako $A = BZ_1$, onda su rešenja: $X = \Delta$, $Y = Z_1\Delta$, gde je Δ proizvoljna reč.

– Ako $B = AZ_2$, onda $Y = \Delta$, $X = Z_2\Delta$ za proizvoljnu reč Δ.

– Najzad, ako nijedan od uslova

$$A = B,\quad A = BZ_1,\quad B = AZ_2$$

nije ispunjen, jednačina (☆) je nemoguća.

23. Dokazati da su sva rešenja jednačine po X, Y

(☆) $$XY = YX \qquad (X, Y \text{ su reči nad azbukom } A)$$

oblika:

(Δ) $$X = \Pi^m,\quad Y = \Pi^n \qquad (m, n = 1, 2, \ldots)$$

gde je Π proizvoljna reč azbuke A.

Uputstvo. Prema Levievoj lemi jednakost (☆) može nastupiti u tri slučaja

(1) $X = Y$, (2) $X = YX'$ (za neku reč X'), (3) $Y = XY'$ (za neku reč Y')

U prvom slučaju su sva rešenja odredjena sa $X = \Pi$, $Y = \Pi$. U drugom i trećem slučaju jednačina se svodi na

$$X'Y = YX', \text{ odnosno na } XY' = Y'X$$

Dakle, svodi se na jednačinu iste vrste kod koje su nepoznata reč X', odnosno Y' kraće od odgovarajućih reči X, odnosno Y. Stoga se strog dokaz *jedinstvenosti*, odnosno dokaz da su rešenja jednačine (☆) jedino oblika (Δ), može izvesti indukcijom po dužini reči XY.

24. Neka azbuku čine izvesni tzv. znaci konstanata (kao a, b, c i sl.), izvesne pro-

menljive (kao x, y, z i sl.), operacijski znak $\star$ dužine 2 i pomoćni znaci zagrada $)$, $($. Medju rečima nad tom azbukom su i izrazi[1]. To su, na primer, reči a, b, $(a \star x)$, $((x \star x) \star a)$. Uopšte, ako su U, V izrazi, onda je izraz i reč $(U \star V)$. Dokazati tvrdjenje:

Ako je T izraz a R reč, onda TR (a slično i RT) nije izraz.

Rešenje. Dokaz izvodimo indukcijom po $o(T)$ – broju znakova $\star$ u izrazu T. Ako je taj broj 0, onda je T oblika u (gde je u znak konstante ili promenljiva). Tada iz pretpostavke da važi jednakost oblika

$$uR = (A \star B) \qquad (A, B \text{ su izrazi})$$

zaključujemo $u = ($ što je nemoguće. Pretpostavimo, dalje, da je iskaz zadatka tačan za sve izraze koji imaju manje od n $(n > 0)$ znakova $\star$ i neka je T neki izraz za koji $o(T) = n$. Tada je T oblika $(T' \star T'')$, gde su T', T'' izrazi, pa je otuda TR oblika $(T' \star T'')R$. Pretpostavimo da to jeste izraz, tj. da vredi jednakost

(1) $(T' \star T'')R = (A \star B)$ $\qquad (A, B$ su neki izrazi)

Odatle skraćivanjem sa $($ dobijamo:

(2) $T' \star T''\ )R = A \star B)$

R je, prema toj jednakosti, oblika $R')$ gde R' može biti i tzv. *prazna reč* (u stvari, to znači da R može biti i sama desna zagrada). Tada skraćivanjem sa) dobijamo:

(3) $\underbrace{T'}\underbrace{\star T'')R'} = \underbrace{A}\underbrace{\star B}$

Dalje primenjujemo Levievu lemu (po naznačenim podrečima). Mogu nastupiti tri slučaja:

(i) $T' = A, \qquad \star T'')R' = \star B$

Iz druge jednakosti skraćivanjem sa $\star$ sledi $T'')R' = B$, tj. dopisivanjem reči $)R'$ na izraz T'' dobija se izraz B, a to je, prema indukcijskoj hipotezi[2] nemoguće.

(ii) $T' = AX, \qquad \star B = X \star T'')R'$

gde je X neka reč. Prva jednakost je nemoguća (na osnovu indukcijske pretpostavke).

(iii) $A = T'Y, \qquad \star T'')R' = Y \star B$

a prva jednakost je opet nemoguća.

Kako su to i jedini mogući slučajevi važenja jednakosti (3), to zaključujemo da je (3) nemoguća, a samim tim nemoguća je i jednakost (1). Kraj dokaza.

25. Produžetak prethodnog zadatka. Dokazati da se svaki izraz (koji ima bar jedan

[1] O izrazima se podrobno izlaže u narednoj tački. Za sada primetimo samo da je stroga definicija izraza u ovom slučaju sasvim slična definiciji iz zadatka 19.

[2] Naime, pošto $T = (T' \star T'')$, to oba izraza T', T'' imaju manje od n znakova $\star$.

znak ☆) na tačno jedan način prikazuje pomoću svojih podizraza. Drugim rečima, dokazati ekvivalenciju[1)]

$$(A \star B) = (C \star D) \Longleftrightarrow A = C \wedge B = D,$$

gde su A, B, C, D izrazi.

Uputstvo. Primeniti Levievu lemu i tvrdjenje prethodnog zadatka.

Napomena. Tvrdjenja zadataka 24, 25 važe za ma koje izraze obrazovane od izvesnih znakova konstanata, promenljivih i izvesnih operacijskih znakova datih dužina. Naravno, tada u slučaju prethodnog zadatka, izraz može biti prikazan (ali ponovo na tačno jedan način) i u obliku $f(t_1, ..., t_n)$, gde je f operacijski znak dužine n, a $t_1, ..., t_n$ su izrazi.

26. Neka su $t_1, ..., t_n$, t izrazi obrazovani od izvesnih znakova konstanata, promenljivih i operacijskih znakova medju kojima se nalazi i operacijski znak f dužine n. Dokazati tvrdjenje:

Ako je t podizraz od $f(t_1, ..., t_n)$ onda je t ili podizraz tačno jednog od izraza $t_1, ..., t_n$ ili je t jednak $f(t_1, ..., t_n)$.

[1)] Znak $\Longleftrightarrow$ zamenjuje reči a k o i s a m o a k o. To je znak logičke operacije e k v i v a l e n c i j e (videti tačku VI O s n o v n e l o g i č k e o p e r a c i j e ...).

II OPERACIJE. IZRAZI

♦ *Operacijama* se, u naše doba, najviše bavi algebra. Uopštavanjem pojmova brojevnih operacija (sabiranje, oduzimanje, množenje, deljenje) dolazi se do pojma operacije kako se to danas u algebri uzima. Zajedničko za pomenute brojevne operacije je:

Od dva broja x, y prelazi se na treći broj z – rezultat (ishod) operacije. Rezultat operacije u opštem slučaju zavisi od redosleda brojeva x, y, jer, na primer, nije uvek isto $x-y$ i $y-x$.

U duhu te misli, opštije, ako je S bilo koji skup matematičkih predmeta, tada pod *operacijom skupa S* (označimo je dogovorno recimo sa ☆) smatramo svaki *propis (zakon, dogovor)* kojim se za svaka dva elementa x, y (u navedenom poretku) odredjuje po tačno jedan treći element $x☆y$ istog skupa; to je tzv. *dvojična (dvomesna, binarna)* operacija.

♦ Operacija skupa S može se definisati pomoću pojmova preslikavanje i uredjena dvojka. Ta tzv. *skupovna definicija* operacije ovako glasi

Dvojična operacija skupa S je svako preslikavanje ☆ skupa $S \times S$[1]) u skup S.

Pri tom se usvaja ovakav odgovor: Ako je dvojci (x, y) pridružen element z, piše se: $x☆y = z$ i kaže se da je z rezultat (ishod) operacije ☆ izvršene nad x, y u navedenom redu.

♦ Postoje razna upštenja pojma dvojične operacije. Navodimo najvažnija:

(i) Uvodi se pojam *operacije dužine n* (n–arne operacije) skupa S, pri čemu n može[2]) biti $1, 2, 3, 4$ itd.

Operacija dužine n skupa S je svaki dogovor, propis, zakon kojim se od n elemenata $x_1, \ldots, x_n$ (u navedenom redu) skupa S prelazi na po jedan element istog skupa – rezultat operacije. Ako se slovo f upotrebi kao oznaka operacije, onda se obično piše:

---

[1]) $S_1 \times S_2$ je oznaka Dekartovog (direktnog) proizvoda skupa S_1 sa skupom S_2. Elemente tog skupa čine sve uredjene dvojke (a_1, a_2), gde je $a_1 \in S_1$, a $a_2 \in S_2$. Slično je $S_1 \times \ldots \times S_n$ skup svih uredjenih n–torki $(a_1, \ldots a_n)$, gde je $a_1 \in S_1, \ldots, a_n \in S_n$. Pri tome, ukoliko su svi skupovi $S_1, \ldots, S_n$ medjusobno jednaki, umesto $\underbrace{S \times \ldots \times S}_{n \text{ puta}}$ pišemo S^n

[2])U stvari uvodi se i pojam operacije dužine 0 – to je svaki utvrdjeni element skupa S.

$$y = f(x_1, \ldots, x_n)$$

izuzev u slučaju $n = 2$, kada se umesto $y = f(x_1, x_2)$ piše najčešće $y = x_1 f x_2$, tj. znak operacije dolazi „u sredinu".

Odgovarajuća skupovna definicija glasi:

Operacija dužine n skupa S jeste svako preslikavanje skupa S^n u skup S.

(ii) Novo uopštenje pojma operacije nastaje ako u jednakosti

$$y = f(x_1, \ldots, x_n)$$

ne zahtevamo da su svi $x_1, \ldots, x_n, y$ iz istog skupa već da je:

$$x_1 \in S_1, \ldots, x_n \in S_n, y \in S$$

gde su $S_1, \ldots, S_n, S$ ma koji skupovi.

Skupovno, takve se operacije definišu kao preslikavanja skupa $S_1 \times \ldots \times S_n$ u skup S.

Primer operacije takve vrste je množenje vektora (orijentisane duži) skalarom.

(iii) Najzad u mnogim se prilikama pojavljuju tzv. *uslovne operacije*. Rezultat operacije

$$y = f(x_1, \ldots, x_n)$$

definisan je jedino ukoliko $x_1, \ldots, x_n$ zadovoljavaju izvestan uslov.

Oduzimanje prirodnih brojeva je primer takve operacije. Rezultat operacije, tj. $x-y$ je prirodan broj pod uslovom da je x veći od y. Slično, deljenje, recimo racionalnih brojeva, je uslovna operacija, jer je količnik $\frac{x}{y}$ definisan ukoliko je zadovoljen uslov: $y \neq 0$.

Uslovna operacija se može skupovno definisati kao preslikavanje nekog *podskupa* skupa $S_1 \times \ldots \times S_n$ u skup S.

♦ U najopštijem slučaju predmeti nad kojima se vrši neka operacija, kao i sami rezultati operacije, *ne moraju biti okupljeni u skupove,* već jedino biti karakterisani izvesnim svojstvima [1] kao: „biti tačka", „biti skup", „biti paran prirodan broj" i sl.

U operacije (dužine 1) takve vrste spada propis kojim se svakom skupu pridružuje njegov kardinalni broj – „broj" elemenata tog skupa, skupovne operacije $\cup, \cap$

[1] U mnogo slučajeva, ali ne i uvek, svojstvu S se može pridružiti skup S svih onih predmeta koji imaju to svojstvo. To su tzv. kolektivizirajuća svojstva. Takvo je, recimo, „biti paran prirodan broj", dok svojstvo „biti skup" nije kolektivizirajuće. Naime, u teoriji skupova se dokazuje da ne postoji skup svih skupova.

ZADACI

1. Operacija $\star$ skupa $\{a, b, c, d\}$ odredjena je tablicom – tzv. Kejlijevom[1] tablicom.

$\star$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	b	a	c
c	a	b	c	d
d	a	d	a	a

(1) Šta je rezultat primene te operacije na elemente a, b, odnosno na b, a?

(2) Izračunati: $(b\star a)\star(c\star d)$, $((c\star c)\star c)\star c$

(3) Rešiti po x jednačine

$$b\star x = c, \quad b\star x = d, \quad d\star x = a, \quad x\star d = d$$

Rešenje. (1) $a\star b = c$, $\quad b\star a = b$;

(2) $(b\star a)\star(c\star d) = b\star(c\star d) = b\star d = c$ $\qquad ((c\star c)\star c)\star c = (c\star c)\star c = c\star c = c$

Dakle: $(b\star a)\star(c\star d) = c$, $((c\star c)\star c)\star c = c$.

(3) Jedino rešenje prve jednačije je d. Druga jednačina nema rešenja. Rešenja treće su: a, c, d. Četvrta jednačina ima jedinstveno rešenje c.

2. Operacija $\star$ odredjena je datom tablicom

$\star$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	3	2	1	1	1
3	2	2	3	5	1
4	5	1	3	4	2
5	3	2	2	4	5

(a) Izračunati:

$$((1\star 2)\star 1)\star 2, \quad (5\star(3\star 4)), \quad (2\star 3)\star(2\star(1\star 1))$$

(b) Rešiti po x jednačine:

$$1\star x = 1, \quad x\star 2 = 3, \quad x\star 5 = x, \quad x\star x = x$$

(c) Rešiti sistem jednačina po x

$$1\star x = 1, \quad x\star 2 = 3$$

3. Neka su $\star$, $\circ$, $\triangle$, $\square$ operacije skupa N prirodnih brojeva uvedene ovim definicijama

$$x\star y \overset{\text{def}}{=} \text{NZS}\,(x,y), \quad x\circ y \overset{\text{def}}{=} \text{NZD}\,(x,y), \quad x\triangle y \overset{\text{def}}{=} x+y+xy$$ [2]

$x\square y \overset{\text{def}}{=} \overline{xy}$, gde je $\overline{xy}$ desetični zapis dobijen dopisivanjem desetičnog zapisa broja y iza desetičnog zapisa za x

(a) Izračunati: $14\star 21$, $14\circ 21$, $5\triangle 3$, $2\square 2$, $2\square(5\triangle(6\star 9))$

(b) Rešiti po x jednačine

$$2\triangle x = 26, \quad 2\square x = 234, \quad x\star 2 = 6$$

[1] A. Cayley (1821–1895).

[2] $\overset{\text{def}}{=}$ je zamena za reči: j e d n a k o p o d e f i n i c i j i. Znači NZS, NZD zamenjuju reči n a j m a n j i z a j e d n i č k i s a d r ž a l a c, n a j v e ć i z a j e d n i č k i d e l i l a c.

4. Odrediti sve binarne operacije skupa $\{a, b\}$.

Rešenje. Traženih operacija ima 16. Njihove **Kejlijeve** tablice su:

$$
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & a \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & b \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & a \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & a & a \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & a & b \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & a \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & a \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & b \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & b & a \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & b & b \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & a & a \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & a & b \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & a \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & b \end{array}
$$

Pošto rezultat operacije mora biti element skupa $\{a,b\}$ to se problem svodi na odredjivanje svih mogućih popunjavanja 4 polja tablice dvama elementima, tj. na odredjivanje varijacija četvrte klase (sa ponavljanjem) od dva elementa. Njihov broj je 2^4 odnosno 16.

5. Dokazati da binarnih operacija skupa S koji ima n elemenata ima ukupno n^{n^2}. Taj broj je, u stvari, broj varijacija sa ponavljanjem klase n^2 (broj polja Kejlijeve tablice) od n elemenata.

6. Dokazati da je operacija $\star$ asocijativna, tj. da za svaki x, y, z iz skupa $\{a, b\}$ važi jednakost:

$$
\begin{array}{c|cc} \star & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & b \end{array}
$$

$$(x\star y)\star z = x\star(y\star z)$$

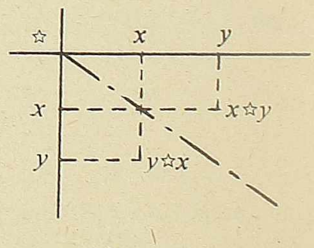
Uputstvo. Problem se svodi na utvrdjivanje tačnosti ovih 8 jednakosti

$(a\star a)\star a = a\star(a\star a)$, $(a\star a)\star b = a\star(a\star b)$, $(a\star b)\star a = a\star(b\star a)$, $(a\star b)\star b = a\star(b\star b)$

$(b\star a)\star a = b\star(a\star a)$, $(b\star a)\star b = b\star(a\star b)$, $(b\star b)\star a = b\star(b\star a)$, $(b\star b)\star b = b\star(b\star b)$

7. Dokazati da je operacija $\star$ iz prethodnog zadatka komutativna, tj. da za svaki x,y iz skupa $\{a, b\}$ važi jednakost:

$$x\star y = y\star x$$



Uputstvo. Kejlijeva tablica komutativne operacije je simetrična u odnosu na tzv. glavnu dijagonalu tablice (videti crtež).

8. Odrediti sve komutativne operacije skupa $\{a,b\}$.

9. Za datu operaciju $\star$ skupa S utvrditi da li je a) komutativna, b) asocijativna:

(1) S je skup svih prirodnih brojeva, a $\star$ je definisana jednom od jednakosti

$$x\star y = 2(x+y), \quad x\star y = x+y+1, \quad x\star y = max(x,y), \quad x\star y = min(x,y)$$

(2) S je skup $\{a, b\}$, a $\star$ je definisana jednakostima:

$a☆a = a, \quad a☆b = b, \quad b☆a = b, \quad b☆b = b$

(3) S je skup $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, a ☆ je $+_5$, tzv. sabiranje po modulu pet.[1]

10. Sa dvojkama $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0), (2,1), (1,2), (2,2)$ definisana je operacija ☆ jednakošću:

$(a,b)☆(A,B) = (a\cdot_3 A,\ b\cdot_3 B)$ ($\cdot_3$ je množenje po modulu 3).

Obrazovati njenu tablicu.

11. Neka je ∘ operacija odredjena tablicom i neka su aa, ab, ba, bb sve dvoslovne reči azbuke $\{a, b\}$. Sa tim rečima definisana je operacija ☆ na ovaj način

∘	a	b
a	a	a
b	b	a

$uv☆UV = (u\circ U)(v\circ V)$

Na primer: $ab☆aa = (a\circ a)(b\circ a) = ab$.

Obrazovati tablicu te operacije.

12. Neka je S skup svih reči obrazovanih od slova x, $+$, 1 i neka je δ operacija dopisivanje (konkatenacija).

(1) Izračunati: $x\delta+$, $x+\delta+$, $(x\delta+)\delta 1$, $x\delta(+\delta 1)$, $(x11+\delta 11)\delta(1+\delta x)$

(2) Rešiti po X jednačine: $x11+\delta X = x11{+}{+}1$, $X\delta 1{+}{+}1 = x11{+}{+}1$

Rešenje. (1) $x\delta+ = x+$, $x+\delta+ = x{+}{+}$, $(x\delta+)\delta 1 = x+\delta 1 = x+1$, $x\delta(+\delta 1) = x\delta+1 = x+1$, $(x11+\delta 11)\delta(1+\delta x) = x11+11\delta(1+\delta x) = x11+11\delta 1+x = x11+111+x$

Dakle: $x\delta+ = x+$, $x+\delta+ = x{+}{+}$, $(x\delta+)\delta 1 = x+1$, $x\delta(+\delta 1) = x+1$, $(x11+\delta 11)\delta(1+\delta x) = x11+111+x$.

(2) Rešenja datih jednačina su redom reči: $+1$, $x1$.

13. Sa rečima a, b, aa, ab, ba, bb definisana je operacija ∘ dogovorom: Rezultat $X\circ Y$ se dobija odstranjivanjem (brisanjem) u reči XY svih slova počev od trećeg pa nadalje. Tako: $a\circ bb = ab$, $bb\circ ab = bb$ i sl.

(1) Obrazovati tablicu te operacije,

(2) Izračunati: $a\circ(ba\circ ab)$, $(a\circ b)\circ(bb\circ aa)$, $((ab\circ a)\circ ba)\circ(a\circ aa)$

(3) Rešiti po X jednačine: $ab\circ X = ab$, $a\circ X = ab$, $X\circ a = bb$

14. Sa rečima (izrazima) a, $(a☆a)$, $((a☆a)☆a)$, $(a☆(a☆a))$ definisana je operacija ⊛ dogovorom:

$X⊛Y$ je izraz $(X☆Y)$, ukoliko je ta reč neka od polaznih. U drugom slučaju $X⊛Y$ je jednako X.

Obrazovati Kejlijevu tablicu operacije ⊛.

[1] Rezultat operacije $x+_5 y$ je ostatak pri deobi običnog zbira $x+y$ sa 5. Slično se definišu i sabiranje po modulu 2, 3, 4 itd. kao i množenje po nekom modulu.

Rešenje. Tražena Kejlijeva tablica izgleda:

$\star$	a	$(a\star a)$	$((a\star a)\star a)$	$(a\star(a\star a))$
a	$(a\star a)$	$(a\star(a\star a))$	a	a
$(a\star a)$	$((a\star a)\star a)$	$(a\star a)$	$(a\star a)$	$(a\star a)$
$((a\star a)\star a)$	$((a\star a)\star a)$	$((a\star a)\star a)$	$((a\star a)\star a)$	$((a\star a)\star a)$
$(a\star(a\star a))$	$(a\star(a\star a))$	$(a\star(a\star a))$	$(a\star(a\star a))$	$(a\star(a\star a))$

15. Dogovorno trojci tačaka A, B, C pridružuje se trougao $\triangle ABC$. Koje je dužine ta operacija i pod kojim je uslovom definisana?

Odgovor. Operacija je dužine 3, a uslov je: Tačke A, B, C ne pripadaju jednoj pravoj.

16. Dogovor: $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ (x, y su realni brojevi) definiše jednu operaciju. Da li je to uslovna operacija?

17. **Dvojična** skupovna operacija $\cup$ (unija) se ovako definiše

$$A\cup B = \{x|x\in A \text{ ili } x\in B\}\ ^{1)}$$

(1) Odrediti $A\cup B$ ako:

$$A = \{a, b\},\ B = \{b, c, d\}, \text{ odnosno } A = \{a\},\ B = \{a, \{a\}\}$$

(2) Da li postoji skup S takav da se operacija $\cup$ može definisati kao preslikavanje S^2 u S?

18. Jednakošću: $S' = S\cup\{S\}$ definisana je jedna skupovna operacija dužine 1. Odrediti: ϕ', ϕ'', ϕ''' (ϕ je oznaka praznog skupa).

Rešenje. Prema definiciji **operacije** $'$ važe ove jednakosti

$$\phi' = \phi\cup\{\phi\} = \{\phi\},\quad \phi''=\phi'\cup\{\phi'\}= \{\phi\}\cup\{\{\phi\}\}= \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$\phi'''=\phi''\cup\{\phi''\}= \{\phi, \{\phi\}\}\cup\{\{\phi,\{\phi\}\}\} = \{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$$

Dakle: $\phi'= \{\phi\}$, $\phi''= \{\phi, \{\phi\}\}$, $\phi'''= \{\phi, \{\phi\}, \{\phi,\{\phi\}\}\}\ ^{2)}$.

19. Operacija dužine 1 definisana je dogovorom:

Svojstvu $\mathcal{S}$ pridružuje se skup S svih onih predmeta koji imaju to svojstvo, tj. za svaki x važi:

$$x\in S \Longleftrightarrow x \text{ ima svojstvo } \mathcal{S}$$

gde je znak $\Longleftrightarrow$ zamena za reči *ako i samo ako*

(1) Da li je ta operacija uslovna?

(2) Šta je rezultat te operacije primenjene na svojstvo odredjeno formulom $x\notin x$?

---

1) $\{x|x$ ima svojstvo $\mathcal{S}\}$ je uobičajena oznaka za skup svih predmeta x koji imaju svojstvo $\mathcal{S}$.

2) Dobijeni skupovi su u vezi sa definicijom prirodnih brojeva pomoću skupova. Naime, u tom slučaju se uzima da su brojevi 0,1,2,3 itd. redom skupovi $\phi, \phi', \phi'', \phi'''$ itd. Pri tome je $'$ operacija „naslednik”.

Rešenje. (1) Operacija jeste uslovna. Uslov je: Svojstvo $\mathcal{S}$ je kolektivizirajuće.
(2) Svojstvo $x \notin x$ nije kolektivizirajuće. Obrazloženje: Pretpostavimo da postoji skup U čiji su elementi svi skupovi x koji imaju uočeno svojstvo, tj.

$$x \in U \Longleftrightarrow x \notin x$$

Odatle zamenjujući U umesto x (jer prethodna ekvivalencija važi za svaki x) dobijamo kotradikciju:

$$U \in U \Longleftrightarrow U \notin U$$

Prema tome ne postoji skup koji odgovara svojstvu $x \notin x$, pa uočena operacija nije za to svojstvo definisana.

Napomenimo da je navedenu činjenicu (da $x \notin x$ nije kolektivizirajuće svojstvo) 1902 godine otkrio B.Rasel. To je, onda, bilo otkriće paradoksa u teoriji skupova.

♦ *Izrazi (termi)* služe, uopšteno rečeno, za označavanje matematičkih predmeta.
♦ Izrazi su, recimo, reči:

$$1,\ x,\ 2+x,\ 1+(x\cdot x),\ (\frac{1}{2}-x)\cdot(1+y^2)$$

Tu su, 1, 2, $\frac{1}{2}$ znaci potpuno odredjenih matematičkih predmeta – tzv. *znaci konstanata.* Slova x, y su *promenljive.* Uopšte, promenljive su oznake izvesnih konstanata (u prethodnim primerima oznake brojeva) koje se onda nazivaju *vrednostima promenljivih.*

Znaci +, –, · su tzv. *operacijski znaci,* tj. oznake operacija. Svaki operacijski znak ima svoju dužinu koja je 1, 2, 3 i sl. Recimo, sva tri prethodna operacijska znaka imaju dužinu 2, kaže se i da su *dvomesni.*

Najzad u izrazima učestvuju i pomoćni znaci zagrada *(,)*.

♦ *Stroga definicija izraza* obrazovanih od izvesnih znakova konstanata (recimo: a,b,c), promenljivih (recimo: x, y) i operacijskog znaka ☆ dužine 2 glasi:

(i) *Promenljive i znaci konstanata su izrazi.*
(ii) *Ako su t_1, t_2 izrazi, onda je i reč $(t_1 ☆ t_2)$ izraz.*
(iii) *Izrazi se dobijaju jedino konačnom primenom pravila (i) i (ii).*

Prema toj definiciji[1] izrazi su reči:

a, b, c, x, y (a☆x), (a☆y), ((b☆a)☆x), ((a☆x)☆(a☆(x☆x))) i sl.

Pri tome se usvajaju razna dopunska pravila o nepisanju (brisanju) izvesnih zagrada. Tako, umesto *(x☆y), (a☆(a☆x))* pišemo: *x☆y, a☆(a☆x)* – spoljašnje zagrade izraza se ne pišu.

---

[1] Na prvi pogled može izgledati da je ta definicija kružna, jer u delu (ii) „o izrazu se govori pomoću izraza". U stvari, nije tako, jer pravilom (i) odredjeni su najkraći izrazi (odnosno dužine 1), a pravilom (ii) opisuje se gradjenje dužih izraza pomoću kraćih. Strože rečeno, tom definicijom, koja je primer tzv. i n d u k t i v n e (povratne) definicije definiše se pojam: i z r a z d u ž i n e n (n je prirodan broj). Napomenimo da se u logici, a i drugde, često koriste slične (induktivne) definicije.

Izrazi se mogu graditi i sa raznim drugim operacijskim znacima (datih dužina). Definicija je slična prethodnoj s tim što deo (ii) u opštem slučaju glasi:

Ako je f operacijski znak dužine n i ako su $t_1, \ldots, t_n$ izrazi, onda je i reč $f(t_1, \ldots, t_n)$ izraz.

Primećuje se da je definicija izraza takva da uz svaki operacijski znak f dužine n dolazi po jedan par zagrada kao i $n-1$ zarez.

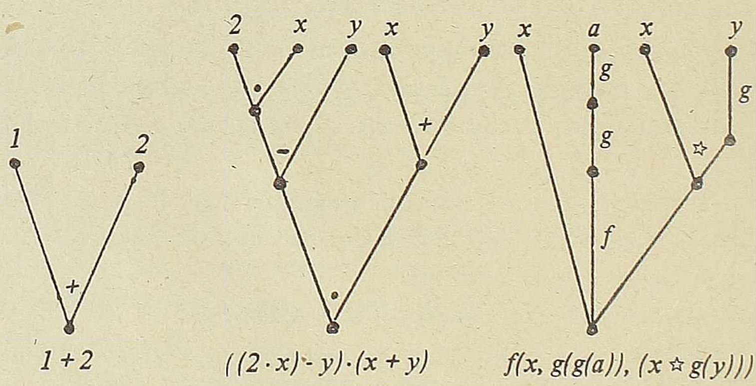
♦ Dokazuje se (to ćemo tvrdjenje zvati[1] *lema o jednoznačnosti izgradnje izraza*) da se svaki izraz može na tačno jedan način prikazati pomoću izvesnih svojih podizraza. Recimo, ako je reč o izrazu t dužine veće od 1 obrazovanom pomoću operacijskog znaka ☆ (dužine 2), tada postoji tačno jedan par izraza t_1, t_2 takav da je

$$t = (t_1 \star t_2).$$

♦ Izrazi se prikazuju posebnim crtežima, tzv. *drvetima izraza.* Recimo drveta izraza:

$$1+2,\ ((2\cdot x)-y)\cdot(x+y),\ f(x, g(g(a)), (x \star g(y)))$$

izgledaju ovako



♦ Tumačenjem (interpretacijom) na odredjen način znakova koji grade neki izraz njemu može odgovarati izvestan predmet – tzv. vrednost izraza (videti zadatak 16)

♦ Neka je I skup izraza sagradjenih od izvesnih promenljivih, znakova konstanata i operacijskih znakova. Svakom operacijskom znaku dodeluje se po jedna operacija skupa I – tzv. *izrazovska operacija.* Recimo, ako je ☆ operacijski znak dužine 2, njemu dodeljujemo operaciju $\bar{\star}$ ovako definisanu

$$t_1 \bar{\star}\, t_2 \overset{\text{def}}{=} (t_1 \star t_2)$$

Znači, od izraza t_1, t_2 primenom operacije $\bar{\star}$ kao rezultat dobija se izraz: $(t_1 \star t_2)$. Slično, ako je f operacijski znak dužine n, njemu se dodeljuje operacija $\bar{f}$:

[1] Videti zadatak 24 prethodne tačke.

$$\bar{f}(t_1, \ldots, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} f(t_1, \ldots, t_n) \quad (t_1, \ldots, t_n \text{ ma koji izrazi})$$

ZADACI (nastavak)

20. Koji medju narednim matematičkim znacima (uobičajeno) jesu promenljive, a koji oznake za matematičke konstante

$$1, \frac{1}{2}, \phi, x, A$$

Odgovor. Prva tri znaka su uobičajene oznake za konstante: „broj jedan", „broj jedna polovina", „prazan skup". Promenljive su: x, A.

21. Datim rečima govornog matematičkog jezika pridružiti uobičajene znake konstanata ili neku promenljivu.

prirodan broj, broj dva, prazan skup, skup, tačka, prava, ravan, skup prirodnih brojeva, skup čiji je jedini element broj jedan

Rešenje. Medju navedenim predmetima opisanim rečima govornog matematičkog jezika konstante su: broj dva, prazan skup, skup prirodnih brojeva, skup čiji je jedini element broj jedan. Njihove uobičajene oznake su redom: $2, \phi, N, \{1\}$. Rečima *prirodan broj* ne opisuje se jedan odredjen matematički predmet. To je ustvari jezički opis bilo kog prirodnog broja. Otuda se tim rečima može, kao kraća oznaka, pridružiti neka promenljiva kao: x, α, A, n i sl. Vrednosti te promenljive su prirodni brojevi 1, 2, 3 itd. Slično, svaki od znakova koji se pridružuje rečima *tačka, prava, ravan* jeste promenljiva. U geometriji je čest slučaj da se za oznake tačaka koriste slova A, B, C i sl., za prave a, b, c i sl., a za ravni α, β, γ i sl.

22. Neka je x dogovorno zajednička oznaka za brojeve $1, 2, 3, 4, 5$. Koliko vrednosti ima ta promenljiva?

23. Neka su x, y dogovorno zajedničke oznake za brojeve $1, 2, 3$. Koliko vrednosti imaju te dve promenljive?

Rešenje. Svaka od tih promenljivih ima po tri vrednosti, a njih dve zajedno imaju ukupno $3 \cdot 3$, tj. 9 vrednosti. Sve mogućnosti za vrednosti tih promenljivih prikazane su u ovoj tablici

x	1	2	3	1	2	3	1	2	3
y	1	1	1	2	2	2	3	3	3

24. Neka promenljive $x_1, \ldots, x_n$ uzimaju vrednosti iz skupa S koji ima s elemenata. Koliko vrednosti imaju te promenljive?

Odgovor. Broj vrednosti je s^n, to je u stvari, broj varijacija sa ponavljanjem n-te klase od s elemenata.

25. Medju datim rečima azbuke $\{☆, a, x, y, (,), f\}$ izdvojiti one koje jesu izrazi (na-

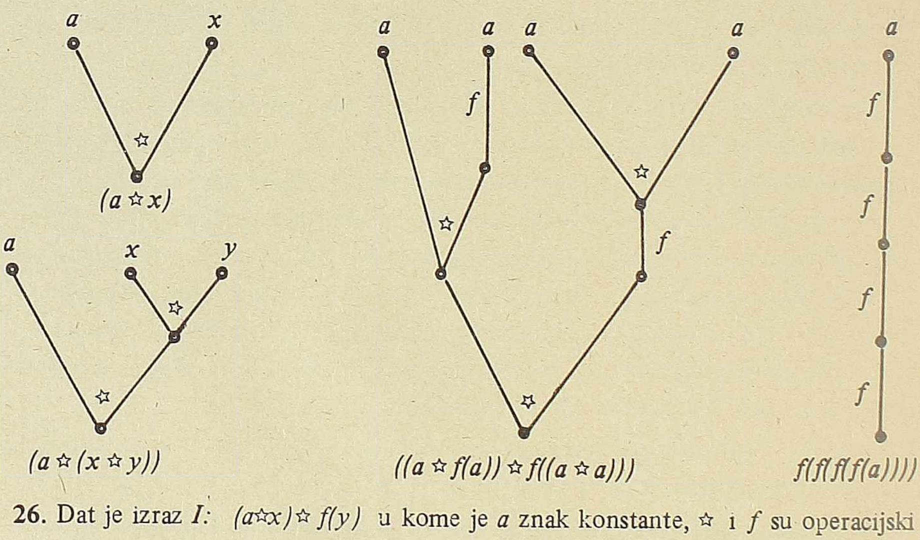
pisani sa svim zagradama) obrazovani od predmetnih oznaka a, x, y (a je, recimo znak konstante, a x, y su promenljive) i operacijskih znakova $\star$ (dužine 2), f (dužine 1)

$$x\star y,\quad a\star y\star x,\quad (a\star x),\quad (a\star(x\star y)),\quad (\star a\star),\quad (xfa),\quad f(f(a(\star y),$$
$$((a\star f(a))\star f((a\star a))),\quad f(f(f(f(a)))),\quad \star\star(x\star y))fa,\quad ((a\star x))$$
$$aaf\star((ffx)),yf(a\star y)\star f((x)),\quad (((\star(x\star a))\star afff,\quad fffff(a)$$

Odgor. Izrazi su ove reči

$$(a\star x),\quad (a\star(x\star y)),\quad ((a\star f(a))\star f((a\star a))),\quad f(f(f(f(a))))$$

Njima odgovaraju redom naredna drveta



26. Dat je izraz I: $(a\star x)\star f(y)$ u kome je a znak konstante, $\star$ i f su operacijski znaci dužina 2 i 1; x, y su promenljive. Odrediti vrednost tog izraza u slučajevima (1) $\star$ je sabiranje skupa N, f se tumači kao operacija naslednik (tj. $f(x) = x + 1$), a ima vrednost 1. Promenljive x, y imaju vrednosti

a) $2,3$ b) $4,6$ c) $1,1$

(2) $\star$ je deljenje skupa R, f je odredjeno jednakošću $f(x) = x^2$, a je 2. Promenljive x, y imaju vrednosti

a) $1,1$ b) $2,1$ c) $2,0$

Odgovor. U prvom slučaju izraz I se prevodi u izraz $(1+x)+(y+1)$. Njegove vrednosti za naznačene vrednosti promenljivih iznose redom: $7, 12, 4$. U drugom slučaju I se preobraća u izraz $(2:x):y^2$. Njegova vrednost iznosi 2, odnosno 1 ukoliko promenljive x,y redom imaju vrednosti $1, 1$, odnosno $2, 1$. U slučaju c) vrednost izraza ne postoji (nije definisana).

27. Odrediti vrednost izraza $(x\star y)\star z$ ako:

a) $\star$ je množenje skupa Z, x,y,z su redom $2,3,5$;

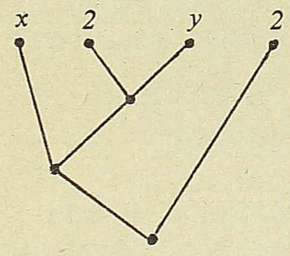
b) $\star$ je sabiranje skupa Q, x,y,z su redom $\frac{1}{2}$, -2, 3;

c) $\star$ je operacija dopisivanja, x,y,z su redom reči ab, bc, ca (od slova a,b,c)

28. Neka je f operacijski znak dužine 3, a $\star$ operacijski znak dužine 2. Odrediti vrednost izraza $f(x\star y,\ y\star z,\ z\star x)$ u slučaju: $\star$ je sabiranje skupa Q, f se tumači kao operacija

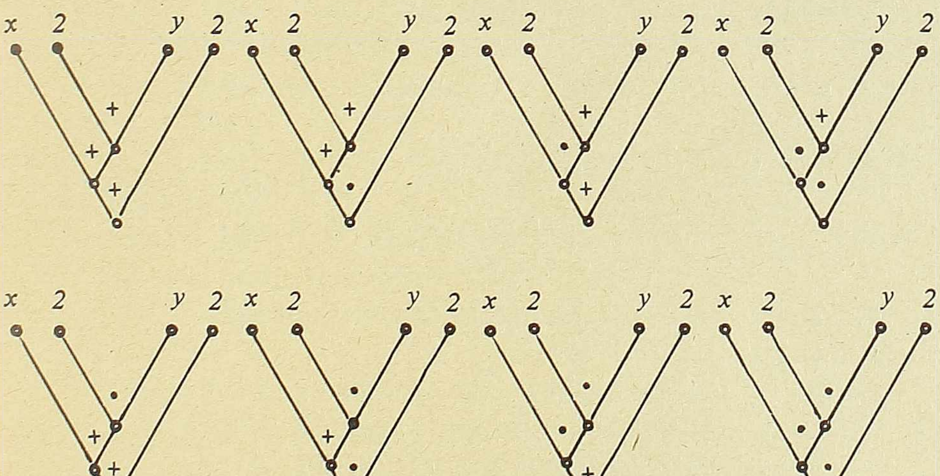
$$f(p,\ q,\ r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p+q+r}{3} \quad (p,\ q,\ r \in Q)$$

a promenljive x, y, z imaju redom vrednosti $1, 2, 3$.



29. Dato nedovršeno drvo dopuniti operacijskim znacima $+$, $\cdot$ i obrazovati sve moguće izraze koji odgovaraju tako dobijenim drvetima.

Rešenje. Traženih izraza ima onoliko na koliko se načina mogu rasporediti dva znaka $+$, $\cdot$ na tri prazna mesta. Dakle, reč je o varijacijama sa ponavljanjem treće klase od dva elementa. Njihov broj je 2^3, odnosno 8. Dovršena drveta izgledaju:



Odgovarajući izrazi su: $((x+(2+y))+2)$, $((x+(2+y))\cdot 2)$, $((x\cdot(2+y))+2)$, $((x\cdot(2+y))\cdot 2)$, $((x+(2\cdot y))+2)$, $((x+(2\cdot y))\cdot 2)$, $((x\cdot(2\cdot y))+2)$, $((x\cdot(2\cdot y))\cdot 2)$.

Ili posle uobičajenog brisanja nekih zagrada:

$(x+(2+y))+2$, $(x+(2+y))\cdot 2$, $(x\cdot(2+y))+2$, $x\cdot(2+y))\cdot 2$, $(x+2\cdot y)+2$, $(x+2\cdot y)\cdot 2$, $x\cdot(2\cdot y)+2$, $(x\cdot(2\cdot y))\cdot 2$.

30. Za koje vrednosti promenljive k izrazi $2k$, $2k+1$ predstavljaju zajednički zapis parnih, odnosno neparnih brojeva.

Napomena. Parni brojevi su $0, 2, -2, 4, -4, \ldots$

31. Naći zajednički zapis svih prirodnih brojeva koji su potpuni kvadrati.

Uputstvo. Neko slovo, recimo n, koristiti kao oznaku (zajednički zapis) svih prirodnih brojeva.

32. Da li izraz $n^2+(n+1)^2$, gde je n oznaka prirodnih brojeva, predstavlja zajednički zapis svih prirodnih brojeva koji su zbirovi kvadrata dva susedna prirodna broja?

33. Da li izraz $6z-1$ (z je oznaka celih brojeva) predstavlja zajednički zapis svih celih brojeva koji su neparni i koji pri deljenju sa 3 imaju ostatak 2?

34. Koristeći promenljive sažeto zapisati tvrdjenja o prirodnim brojevima

1°	$1+1 = 2\cdot 1$	2°	$1\cdot 2$ je paran, $2\cdot 3$ je paran,
	$2+2 = 2\cdot 2$		$3\cdot 4$ je paran, $4\cdot 5$ je paran,
	$3+3 = 2\cdot 3$		$5\cdot 6$ je paran, ...
	$4+4 = 2\cdot 4$		
	....		

Odgovor. 1° $x+x = 2\cdot x$, 2° $x\cdot(x+1)$ je paran.

35. Koristeći promenljive sažeto zapisati data tvrdjenja o celim brojevima

1° $1+(-1) = 0,\ 2+(-2) = 0,\ 3+(-3) = 0,\ 4+(-4) = 0, \ldots$
$(-1)+1 = 0,\ (-2)+2 = 0,\ (-3)+3 = 0,\ (-4)+4 = 0, \ldots$

2° $1^2 + 1^2 \geqslant 2\cdot 1\cdot 1,\ 1^2+2^2 \geqslant 2\cdot 1\cdot 2,\ 1^2+3^2 \geqslant 2\cdot 1\cdot 3,\ 1^2+4^2 \geqslant 2\cdot 1\cdot 4, \ldots$
$2^2 + 1^2 \geqslant 2\cdot 2\cdot 1,\ 2^2+2^2 \geqslant 2\cdot 2\cdot 2,\ 2^2+3^2 \geqslant 2\cdot 2\cdot 3,\ 2^2+4^2 \geqslant 2\cdot 2\cdot 4, \ldots$
$3^2 + 1^2 \geqslant 2\cdot 3\cdot 1,\ 3^2+2^2 \geqslant 2\cdot 3\cdot 2,\ 3^2+3^2 \geqslant 2\cdot 3\cdot 3,\ 3^2+4^2 \geqslant 2\cdot 2\cdot 4, \ldots$
$4^2 + 1^2 \geqslant 2\cdot 4\cdot 1, \ldots$

36. Koristeći promenljive sažeto zapisati date brojevne izraze

(a) $1+1,\ 2+1,\ 3+1,\ 4+1,\ 5+1, \ldots$

(b) $2\cdot(1-1),\ 2\cdot(1-2),\ 2\cdot(1-3),\ 2\cdot(1-4),\ 2\cdot(1-5), \ldots..$
$2\cdot(2-1),\ 2\cdot(2-2),\ 2\cdot(2-3),\ 2\cdot(2-4),\ 2\cdot(2-5), \ldots..$
$2\cdot(3-1),\ 2\cdot(3-2),\ 2\cdot(3-3),\ 2\cdot(3-4),\ 2\cdot(3-5), \ldots..$
$2\cdot(5-1),\ 2\cdot(5-2),\ 2\cdot(5-3),\ 2\cdot(5-4),\ 2\cdot(5-5), \ldots..$
....

37. Definisati skup svih izraza gradjenih od znakova celih brojeva, 0, 1, −1, 2, −2, itd. i operacijskih znakova + i ·

Rešenje. Tražena definicija glasi:

(i) 0, 1, −1, 2. −2 itd. su izrazi

(ii) Ako su U i V izrazi, onda su i $(U+V)$, $(U\cdot V)$ izrazi

(iii) Izrazi se dobijaju jedino primenom pravila (i) i (ii) konačan broj puta.

38. Definisati skup svih izraza gradjenih od znakova brojevnih konstanata 0, 1, 2, 3, 4 itd. i operacijskih znakova + i $'$ (naslednik).

39. Definisati skup svih izraza gradjenih od znakova konstanta a, b, promenljivih x, y, z i operacijskih znakova $\circ$ (dužine 2), f (dužine 3), i g (dužine 1).

40. Da li, ako se izrazi (operacijski znak je jedino ☆ – dužine 2) ovako definišu

(i) *Znaci konstanata i promenljive su izrazi,*

(ii) *Ako su U, V izrazi , onda je izraz i reč $U☆V$,*

(iii) *Izrazi se dobijaju jedino primenom pravila (i) i (ii) konačan broj puta.*

važi lema o jednoznačnosti *izgradnje* izraza pomoću podizraza?

Odgovor. Ne važi. Recimo izraz $x☆y☆z$ može biti izgradjen na dva načina: (1) od $x☆y$ *i* z, (2) od x i $y☆z$. Znači, zagrade u definiciji izraza koju smo usvojili imaju bitnu ulogu.

Primedba. Izrazi se mogu definisati i bez upotrebe zagrada. To je tzv. *poljska definicija* izraza. Glasi ovako:

(i.) Promenljive i konstante su izrazi,

(ii) Ako su U, V izrazi onda je izraz i reč ☆UV (jedini operacijski znak je ☆ –dužine 2)

Dalje sledi uobičajeni deo (iii) definicije. Znači, da bi se izbegla upotreba zagrada, dosta je operacijski znak „pomeriti napred”. I za tako definisane izraze važi lema o jednoznačnosti *izgradnje* izraza pomoču podizraza.

41. U skupu $\{a, (a☆a), (a☆(a☆a)),\dots\}$ svih izraza sagradjenih od a i ☆ uočena je izrazovska operacija $\overline{☆}$.

1° Izračunati $a\overline{☆}a$, $a\overline{☆}(a\overline{☆}a)$; 2° Rešiti jednačinu (po x): $a\overline{☆}X = (a☆a)$; 3° Dokazati da $\overline{☆}$ nije ni komutativna ni asocijativna operacija.

III RELACIJE (ODNOSI)

♦ Jednakost je primer (dvojične) matematičke relacije. Ako su x, y, recimo neki brojevi, postoji tačno jedna od ovih dveju mogućnosti

Jeste $x = y$, *Nije* $x = y$

Dvojične relacije su i $<$ (biti manji, recimo za prirodne brojeve), $\parallel$ (paralelnost pravih), $\cong$ (podudarnost trouglova) i druge. Nije teško zaključiti da za svaku od tih relacija, označimo ih sve zajedno, recimo, sa ρ, postoji tačno jedna od mogućnosti:

(☆) *Jeste x u relaciji* ρ *sa y*, *Nije x u relaciji* ρ *sa y*

(x,y su brojevi, prave, trouglovi i dr.)

Pri tome je poredak x, y bitan, jer, na primer, jeste $1 < 3$, dok nije $3 < 1$.

♦ I u najopštijem slučaju smatra se da je *dvojična relacija* (binarna, relacija dužine 2) medju nekakvim matematičkim predmetima odredjena, ukoliko je za svaka dva takva predmeta x, y (u navedenom poretku) propisano da li *jesu ili nisu u toj relaciji*. Pri tome postoji tačno jedna od mogućnosti (☆).ti (☆).

♦ Često je podesno relacije prikazivati tablicama. Na primer relaciji $\mid$ (biti činilac) za brojeve *1, 2, 3, 4* odgovara ovakva tablica:

$\mid$	*1*	*2*	*3*	*4*
1	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
3	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

Kako je obrazovana? Pa, recimo *2 jeste činilac od 4*, otuda u preseku vrste za *2* i stupca za *4* stoji $\top$. Slično, pošto *3 nije činilac od 4*, na odgovarajućem polju tablice stoji $\perp$[1])

I za proizvoljnu drugu relaciju može se na sličan način obrazovati njena tablica.

♦ U mnogo slučajeva proučavaju se relacije medju elementima koji čine neki skup S. Za takav slučaj, relacija se može ovako strogo definisati (tzv. skupovna definicija relacije):

Dvojična relacija skupa S je svako preslikavanje skupa S^2 *u skup* $\{\top,\perp\}$

Pri tome se obično umesto $\rho(x,y) = \top$ piše $x\rho y$ i kaže se da x *jeste u relaciji* ρ *sa* y. Slično, ukoliko $\rho(x, y) = \perp$, *kaže* se: x *nije u relaciji* ρ *sa* y.

---

[1]) $\top$, $\perp$ čitati: t e, n e–t e. To su zamene za reči t a č a n (istinit), n e t a č a n (neistinit, lažan).

♦ Pojam dvojične relacije uopštava se na razne načine. Navodimo neke od njih
(i) *Relacija dužine n* (n–arna relacija) skupa S je odredjena, ukoliko je za svakih n elemenata $x_1, \ldots, x_n$ (u redu navodjenja) propisano da li *jesu ili nisu u toj relaciji.*

Skupovno, relacija dužine n skupa S je svako preslikavanje ρ skupa S^n u $\{\top, \bot\}$. Pri tom, ukoliko $x_1, \ldots, x_n$ jesu u relaciji ρ (tj. $\rho(x_1, \ldots, x_n) =$), pišemo $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ sem u slučaju $n=2$ kada relacijski znak obično dolazi „u sredinu".

Jedna relacija dužine 3 (ternarna relacija) je „izmedju" , za tačke jedne prave.
(ii) Elementi x, y koji jesu ili nisu u izvesnoj dvojičnoj relaciji ρ ne moraju pripadati istom skupu, već može biti $x \in A$, $y \in B$. Za ρ tada kažemo da je *relacija skupa A sa skupom B.* Strogo (skupovno) definisano, takva relacija je svako preslikavanje skupa $A \times B$ u $\{\top, \bot\}$.

Na primer, dogovorom: *x je slovo reči X,* odredjena je jedna dvojična relacija azbuke $\{a, b\}$ sa skupom reči $\{a, b, aa, ab, ba, bb\}$. Tablica te relacije izgleda:

	a	b	aa	ab	ba	bb
a	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
b	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

(iii) Novo uopštenje je *n–arna relacija skupova* $S_1, \ldots, S_n$ (u navedenom poretku). U tom slučaju elementi $x_1, \ldots, x_n$ koji jesu ili nisu u relaciji zadovoljavaju uslov: $x_1 \in S_1, \ldots, x_n \in S_n$. Skupovno, takva relacija je svako preslikavanje skupa $S_1 \times \ldots \times S_n$ u $\{\top, \bot\}$.

♦ Pored slučaja relacija medju elementima nekog skupa, u matematici se sreću i opštiji slučajevi relacija medju predmetima odredjenim jedino izvesnim svojstvima.[1] Takve su, recimo, jednakost uopšte[2], skupovna jednakost, relacija $\in$ (biti element) i sl.

U takvom slučaju smatra se da je, recimo, dvojična relacija u oznaci ρ medju nekim matematičkim predmetima opisanim datim svojstvom odredjena, ukoliko je za svaka dva takva predmeta x, y opredeljena tačno jedna od mogućnosti:

x jeste u relaciji ρ sa y, *x nije u relaciji ρ sa y.*

ZADACI

1. Odrediti tablice relacija = (jednakost), $<$ (biti manji), $|$ (biti činilac) skupa $\{1,2,3,4\}$

[1] Što ne mora uvek povlačiti da takvi predmeti moraju biti članovi nekog skupa. Drugačije rečeno, postoje svojstva koja nisu okupljajuća (kolektivizirajuća).

[2] Jednakost se najopštije može razmatrati medju ma kakvim predmetima, a oni mogu ali ne moraju činiti skup.

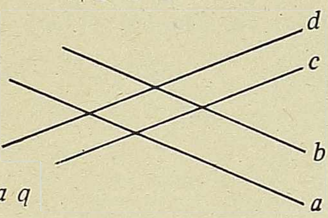
Rešenje. Tražene tablice izgledaju:

$=$	1	2	3	4
1	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
2	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

$<$	1	2	3	4
1	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$\mid$	1	2	3	4
1	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
3	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

2. Medju pravama a, b, c, d jedne ravni prikazanim slikom uočene su relacije $\parallel$ (paralelnost), $\times$ (seći se) definisane na uobičajeni način:



$p \parallel q$ akko[1] $p = q$ *ili* p *nema zajedničkih tačaka sa* q

$p \times q$ akko p *ima tačno jednu zajedničku tačku sa* q

Obrazovati tablice tih relacija.

3. Medju realnim brojevima uočena je relacija ρ :

$$x \rho y \quad \text{akko} \; x + y = 3 \quad i \quad x - y = 1$$

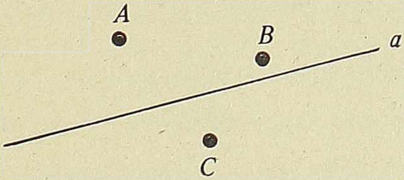
Opisati tablicu te relacije.

4. U skupu prirodnih brojeva $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ uvedena je relacija ρ dužine 1 rečima: „biti prost broj”. Odrediti tablicu te relacije.

Odgovor.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ρ	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

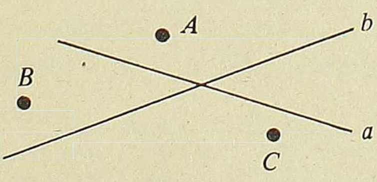
5. Medju tačkama A, B, C prikazanim crtežom uočena je dvojična relacija opisana rečima „biti sa iste strane prave a”.
Obrazovati tablicu te relacije.



Odgovor.

	A	B	C
A	$\top$	$\top$	$\perp$
B	$\top$	$\top$	$\perp$
C	$\perp$	$\perp$	$\top$

6. Medju tačkama A, B, C i pravama a, b (prikazanim crtežom) uvedena je relacija ρ dužine 3 dogovorom:
$\rho(X, Y, z)$ akko *tačke* X, Y *su sa iste strane prave* z



[1] akko stoji kao zamena za reči a k o i s a m o a k o.

Utvrditi da li važi : $\rho(A,B,a)$, $\rho(A,B,b)$, Nije $\rho(A,C,a)$, $\rho(B,C,d)$ Nije $\rho(B,C,a)$, $\rho(A,C,b)$, $\rho(A,A,a)$, Nije $\rho(B,B,a)$

7. Relacije se u matematici često sreću u ovakvom vidu: Neka je $C(x_1, ..., x_n)$ neki kriterijum (uslov) po $x_1, ..., x_n$. Tada se njemu dodeljuje relacija ρ dužine n:

$$\rho(x_1, ..., x_n) \text{ akko vredi } C(x_1, ..., x_n)$$

Odrediti sve trojke (x,y,z) realnih brojeva koje zadovoljavaju dati uslov (tj. koje su u odgovarajućoj relaciji):

(a) $x=1$ i $y=2$ i $z=3$; (b) $x+y+z = 3$ i $y-z = 1$;

(c) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2$; (d) $\frac{x}{x} = \frac{y}{y} = \frac{z}{z}$

8. U skupu reči $\{a, b, ab, ba, aba, bab\}$ uvedena je relacija ρ dogovorom:

$X\rho Y$ akko *X je početni deo reči Y*

Obrazovati tablicu relacije ρ.

9. Medju rečima *a, b, aa, ab, ba, bb* uvedena je relacija ρ:

$X\rho Y$ akko *skup slova reči X je jednak skupu slova reči Y*

Obrazovati tablicu te relacije.

10. Da li se relacije ρ, σ odredjene tablicama

ρ	1	2	3	4	5
1	⊥	⊥	⊥	T	⊥
2	⊥	⊥	T	⊥	⊥
3	⊥	T	⊥	⊥	⊥
4	T	⊥	⊥	⊥	⊥
5	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

σ	1	2	3	4	5
1	T	T	T	⊥	⊥
2	T	T	⊥	⊥	⊥
3	T	⊥	⊥	⊥	⊥
4	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
5	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

mogu opisati i na ovaj način

$x\rho y$ akko $x+y = 5$, $x\sigma y$ akko $x+y \leqslant 4$ (x,y su $1,2,3,4,5$)

11. Relacije ρ, σ su date formulama:

$x\rho y$ akko $x+y=x\cdot y$, $x\sigma y$ akko $x^2+y^2 = 2xy$ (x,y su prirodni brojevi)

Opisati njihove tablice.

12. Naći sve dvojične relacije skupa $\{a, b\}$.

Odgovor. Tablice traženih relacija su:

	a	b
a	T	T
b	T	T

	a	b
a	T	T
b	T	⊥

	a	b
a	T	T
b	⊥	T

	a	b
a	T	T
b	⊥	⊥

	a	b
a	T	⊥
b	T	T

	a	b
a	T	⊥
b	T	⊥

	a	b
a	T	⊥
b	⊥	T

	a	b
a	T	⊥
b	⊥	⊥

$$
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & \bot & \top \\ b & \top & \top \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & \bot & \top \\ b & \top & \bot \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & \bot & \top \\ b & \bot & \top \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & \bot & \top \\ b & \bot & \bot \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & \bot & \bot \\ b & \top & \top \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & \bot & \bot \\ b & \top & \bot \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & \bot & \bot \\ b & \bot & \top \end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & \bot & \bot \\ b & \bot & \bot \end{array}
$$

Primedba. Prilikom odredjivanja dvojičnih relacija jedino je značajno svakoj dvojci (x,y) pripisati $\top$, odnosno $\bot$. Svako takvo pripisivanje odredjuje po jednu relaciju.

13. Naći sve relacije dužine 1 (unarne relacije) skupa $\{a, b\}$.

14. Koliko ima dvojičnih relacija skupa S sa n elemenata?

15. Odrediti sve dvojične relacije skupa A sa skupom B, gde

(1) $A = \{a\}$, $B = \{1,2,3,4\}$; (2) $A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,3\}$

Uputstvo. Problem se svodi na popunjavanje na sve moguće načine praznih polja tablica:

	1	2	3	4
a				

	1	2	3
a			
b			

elementima $\top$, $\bot$.

16. Relacija α skupa $\{a,b,c,d\}$ odredjena je tablicom:

α	a	b	c	d
a	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
b	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
c	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
d	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

Uočimo skup $\bar{\alpha}$ ovako definisan

$$(x,y) \in \bar{\alpha} \quad \text{akko} \quad x\alpha y$$

Šta su elementi skupa $\bar{\alpha}$?

Primedba. Prethodno odredjen skup $\bar{\alpha}$ potpuno opisuje relaciju α. Otuda se on može uzeti za definiciju te relacije. Na tom primeru se primećuje još jedna mogućnost definisanja dvojične relacije nekog skupa A: *Dvojična relacija skupa A je svaki podskup α skupa A^2*. Slično vredi i za relacije drugih dužina 1,3,4,5,... .

17. Dokazati da je relacija $\parallel$ (paralelnost pravih) *relacija ekvivalencije*, tj. da za bilo koje prave p, q, r važi:

(R)	$p \parallel p$	(Refleksivnost)
(S)	$p \parallel q \Rightarrow q \parallel p$	(Simetričnost)
(T)	$(p \parallel q \ i \ q \parallel r) \Rightarrow p \parallel r$	(Tranzitivnost)

18. Dokazati da su relacije (za trouglove):

$$\cong \text{ (podudarnost)}, \qquad \sim \text{ (sličnost)}$$

relacije ekvivalencije.

19. Dokazati da je relacija $\mid$ (biti činilac) za prirodne brojeve *relacija poretka*, tj. da za sve prirodne brojeve x, y, z važi:

(R)	$x \mid x$	(Reflektivnost)
(A)	$(x \mid y$ i $y \mid x) \Rightarrow x = y$	(Antisimetričnost)
(T)	$(x \mid y$ i $y \mid z) \Rightarrow x \mid z$	(Tranzitivnost)

20. Da li je relacija $\mid$ skupa Z svih celih brojeva relacija poretka?

21. Dokazati da je relacija $\leqslant$ skupa R realnih brojeva relacija poretka koja zadovoljava uslov

$$x \leqslant y \text{ ili } y \leqslant x \quad (x,y \text{ su realni brojevi})$$

To je primer tzv. *relacije totalnog poretka.*

22. Za relaciju ρ skupa $\{a, b, c\}$ se zna

Prvo: ρ je simetrična i refleksivna, drugo: $a\rho b$, $c\rho a$, nije $b\rho c$

Odrediti tablicu te relacije.

23. Neka je $S = \{X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots\}$ skup čiji su elementi skupovi $X_0, X_1, X_2, \ldots$ ovako uvedeni

$$X_0 = \phi, \; X_1 = \{\phi\}, \; X_2 = \{\phi, \{\phi\}\}, \; X_3 = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\} \ldots$$

Uopšte: $X_{n+1} \overset{\text{def}}{=} X_n \cup \{X_n\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Dokazati da je relacija $\in$ (biti element) skupa S tranzitivna, tj. da za sve X_k, X_s, X_m iz S važi:

$$(\star) \qquad (X_k \in X_s \text{ i } X_s \in X_m) \Rightarrow X_k \in X_m$$

Uputstvo. Dokazati najpre ovu ekvivalenciju

$$X_m \in X_n \iff m < n \quad (m,n = 0,1,2,\ldots)$$

Dokaz „zdesna na levo" izvesti indukcijom po n $(n > m)$. Naime, za $n = m+1$ tvrdjenje je istinito jer je po definiciji: $X_{m+1} = X_m \cup \{X_m\}$. Dalje, ako jeste $X_m \in X_{m+k}$ (indukcijska pretpostavka za $n = m+k$), onda pošto

$$X_{m+k+1} = X_{m+k} \cup \{X_{m+k}\}$$

jeste i: $X_m \in X_{m+k+1}$. Dakle istinita je implikacija:

$$m < n \Rightarrow X_m \in X_n \quad (X_m, X_n \text{ ma koji skupovi})$$

Obratna implikacija sledi na osnovu činjenice što ne može biti:

$$X \in Y \text{ i } Y \in X \qquad (X, Y \text{ ma koji skupovi})$$

Najzad, istinitost formule $(\star)$ proizlazi iz tranzitivnosti relacije $<$ skupa prirodnih brojeva.

24. Neka je ρ dvojična relacija skupa S. Takozvana *obratna* (inverzna) relacija za ρ, u oznaci ρ^{-1}, uvodi se na ovaj način

$$x \rho^{-1} y \quad \text{akko} \quad y \rho x$$

Odrediti obratne relacije relacija:

(1) $<$ (manje) skupa prirodnih brojeva

(2) ρ odredjene propisom:

$$x\rho y \text{ akko } y = 2x-1 \quad (x, y \text{ su realni brojevi})$$

Odgovor. (1) Obratna relacija za $<$ je $>$.
(2) ρ^{-1} je odredjena uslovom: $x\rho^{-1}\ y$ akko $x = 2y-1$.

25. Da li vredi jednakost:

$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$, gde je ρ proizvoljna relacija skupa S?

26. Dokazati tvrdjenje:

ρ je simetrična relacija akko $\rho = \rho^{-1}$, gde je ρ proizvoljna relacija skupa S.

27. Relacija p (dužine 1) skupa prirodnih brojeva odredjena je uslovima:

1° Jeste $p(2)$,
2° Ako $p(n)$, onda $p(n+2)$.
Opisati tablicu te relacije.

Odgovor. U relaciji p su svi parni brojevi. Taj zaključak proizlazi iz ovih činjenica: *2 je paran broj, Ako je n paran, onda je n+2 paran, Ako je n+2 paran, onda je n paran.*

28. Medju prirodnim brojevima neki su nazvani „dobri". Odrediti sve dobre prirodne brojeve, ako se zna:

1° 2 je dobar
2° Ako su x, y dobri, onda je i $x \cdot y$ dobar
3° Ako su x, $x+y$ dobri, dobar je i y

Uputstvo. Dokazati „dobrotu" brojeva:

$$2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots\ldots,\ 2^n,\ \ldots\ldots$$

a potom iskoristiti očiglednu činjenicu:

Ako je x+2 dobar, onda je i x dobar.

29. Medju prirodnim brojevima neki su istaknuti kao „dobri" definicijom istom kao u prethodnom zadatku, s tim što je deo 1° zamenjen sa:

1' Brojevi 6 i 9 su dobri

Odrediti sve dobre prirodne brojeve.

30. Neka je W skup svih reči azbuke $\{a, b, +,), (\}$ a i relacija dužine 1 skupa W odredjena ovim uslovima

1° Jeste $i(a)$, $i(b)$
2° Ako za neke reči U, V jeste $i(U)$, $i(V)$, onda jeste i $i(U+V)$
(1) Koje od reči: $a+$, $a+b$, $(a+b)$, $((a+a)+a)$, $++aa(a+b+a)$ jesu u relaciji i ?
(2) Da li se relacija i može i ovako odrediti

Reč U je u relaciji i akko *U je izraz obrazovan od znakova konstanata a, b, operacijskog znaka +, uz upotrebu pomoćnih znakova),(?*

IV OSNOVNE LOGIČKE OPERACIJE. ISTINITOSNE TABLICE

♦ Reči *i, ili, Ako ..... onda, Nije* u vezi su sa tzv. *osnovnim logičkim operacijama: konjunkcijom, disjunkcijom, implikacijom, ekvivalencijom, negacijom* pomoću kojih se polazeći od izvesnih rečenica grade nove, složene rečenice.

♦ Neka su p, q neke rečenice. Osnovne logičke operacije definišu se ovako:

Konjunkcija (sastav) rečenice p sa rečenicom q je rečenica: *p i q;*

Disjunkcija (rastav) je rečenica: *p ili q;*

Implikacija (sled) je: *Ako p, onda q;*

Ekvivalencija (ravnosled) je: *Ako p, onda q i ako q, onda p;*

Negacija (odricanje) rečenice p je rečenica: *Nije p.*

♦ Za logičke operacije koriste se i posebni znaci. To su redom[1]

$$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow, \neg .$$

te se rečenice *p i q, p ili q, Ako p onda q, Ako p onda q i ako q onda p, Nije p* zapisuju po redu i ovako

$$p\wedge q,\ p\vee q,\ p\Rightarrow q,\ p\Longleftrightarrow q,\ \neg p,$$

♦ Osnovne logičke operacije učestvuju, na primer, u definicijama osnovnih *skupovnih operacija* $\cup$ (unije), $\cap$ (preseka), $\setminus$ (razlike):

$$A\cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x\in A\vee x\in B\},\quad A\cap B \overset{\text{def}}{=} \{x\mid x\in A\wedge x\in B\},$$

$$A\setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x\mid x\in A\wedge \neg\, x\in B\},$$

i *skupovnih relacija* = (jednakosti), $\subseteq$ (inkluzije, tj. relacije „biti podskup"):

$$A=B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)(x\in A \Longleftrightarrow x\in B),\ A\subseteq B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)\,(x\in A \Rightarrow x\in B)$$

Dalje, u definiciji *sistema jednačina* pojavljuje se konjunkcija. Naime, sistem izvesnih jednačina je, u stvari, konjunkcija tih jednačina.

♦ U logici, pa i u matematici najveći značaj imaju rečenice (formule) za koje postoji tačno jedna od mogućnosti: *istinita, lažna* - drugačije se kaže koje imaju odre-

---

[1] Znak $\vee$ je stilizovano slovo v, prvo slovo latinske reči VEL (ili). Znak $\wedge$ je obrnut znak $\vee$. Pored navedenih znakova za osnovne logičke operacije koriste se i razni drugi.

djenu istinitosnu vrednost. Takve rečenice se nazivaju *iskazi*. Primeri iskaza su: *2=1, 2 je paran broj* – prvi je lažan, drugi istinit.

Istinitosne vrednosti: *istinit (tačan), neistinit (lažan, netačan)* označavaćemo sa $\top$, $\bot$[1], a istinitosnu vrednost iskaza p sa τp. Dalje, umesto *p je istinit iskaz, p je neistinit iskaz* pišemo $\tau p = \top$, odnosno $\tau p = \bot$.

♦ *Iz rečenice (formule) sa promenljivom*, recimo x (koja je, inače, oznaka za elemente izvesnog skupa S) dobijaju se za svaku vrednost te promenljive posebne rečenice, tj. iskazi (o elementima skupa S). Ako svi ti iskazi imaju istu istinitosnu vrednost, i takvu rečenicu, dogovorno, smatramo iskazom. Tako, uzima se da je rečenica $n \geqslant 0$ *(n* je prirodan broj) istinit iskaz, pošto su istiniti svi posebni iskazi: $0 \geqslant 0,\ 1 \geqslant 0,\ 2 \geqslant 0,\ 3 \geqslant 0, \ldots$.

♦ Iskazi u matematici su ili u vezi sa *opštevažećim zakonima* ljudskog mišljenja kakav je recimo tzv. zakon isključenja trećeg $p \vee \neg p$[2]), ili su *uslovno istiniti (lažni)*, tj. to su rečenice čija se istinitost razmatra u okviru neke matematičke teorije. Takva vrsta iskaza su *aksiome* (neke matematičke teorije) – dogovorno istiniti iskazi, i *teoreme* – logičke posledice aksioma.

♦ Istinitosne vrednosti konjunkcije, disjunkcije, implikacije, ekvivalencije, negacije, u zavisnosti od istinitosnih vrednosti polaznih rečenica, utvrdjuju se tzv. *istinitosnim tablicama:*

τp	τq	$\tau(p \wedge q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

τp	τq	$\tau(p \vee q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

τp	τq	$\tau(p \Rightarrow q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

τp	τq	$\tau(p \Leftrightarrow q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

τp	$\tau(\neg p)$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

♦ Istinitosne tablice se kraće zapisuju i na ovaj način

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

	$\neg$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

[1]) Osim znakova $\top$, $\bot$ koriste se i 1,0, zatim, u engleskoj literaturi gde–gde t, f (prva slova reči t r u e, f a l s e), i drugi.

[2]) $p \vee \neg p$ je primer t a u t o l o g i j e koje se razmatraju u tački VII I s k a z n e f o r m u l e. T a u t o l o g i j e.

U stvari, tim tablicama je definisano pet operacija skupa $\{\top,\bot\}$ imajući pri tom kao uzor prethodne istinitosne tablice. Na osnovu tih tablica (kaže se i tablica $\{\top,\bot\}$ – *algebre*) imamo, recimo: $\top\wedge\top=\top$, $\bot\vee\top=\top$, $\top\Rightarrow\bot=\bot$, $\neg\top=\bot$ i sl. što je u skladu sa : *konjunkcija dve istinite rečenice je istinita* i dr.

♦ Usvojene istinitosne tablice za implikaciju i ekvivalenciju su tablice tzv. *materijalne implikacije*, odnosno *ekvivalencije.*

Dok tablica ekvivalencije (kao uostalom i tablice konjunkcije, disjunkcije i negacije) izgleda sasvim prirodno, dotle tablica implikacije traži izvesno obrazloženje – izvesnu „odbranu". Jer zašto smo, recimo, usvojili $\bot\Rightarrow\top=\top$, $\bot\Rightarrow\bot=\top$? Razlog se može uočiti na ovom primeru. Implikacija (o prirodnim brojevima):

$$I(x) \qquad\qquad x\geqslant 2\Rightarrow x\geqslant 1$$

je, kao što znamo, istinita. Sledstveno tome treba kao istinite uzeti implikacije $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, ... odnosno

$$0\geqslant 2\Rightarrow 0\geqslant 1,\quad 1\geqslant 2\Rightarrow 1\geqslant 1,\quad 2\geqslant 2\Rightarrow 2\geqslant 1,\ \ldots$$

u kojima se pojavljuju redom slučajevi

$$\bot\Rightarrow\bot,\quad \bot\Rightarrow\top,\quad \top\Rightarrow\top,\ \ldots,$$

upravo svi slučajevi istinitosti materijalne implikacije.

♦ U tvrdjenju o prirodnim brojevima

ili je n paran broj ili je n neparan broj

i raznim drugim matematičkim tvrdjenjima pojavljuje se sveza *ili* ... *ili* koju treba razlikovati od *ili*. Prva je tzv. *isključna,* dok je druga *uključna.*

Naime, rečenica *p ili q* je istinita i u slučaju $\tau p=\top$, $\tau q=\top$, dok je *ili p ili q* u tom slučaju neistinita. Istinitosna tablica isključne disjunkcije (za koju koristimo znak $\underline{\vee}$) izgleda kao što je prikazano. Uočava se da je $p\,\underline{\vee}\,q$ istinita rečenica ako i samo ako je *tačno jedna* od rečenica p,q istinita.

τp	τq	$\tau(p\,\underline{\vee}\,q)$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

ZADACI

1. Za date rečenice (formule)[1)] utvrditi da li su iskazi a) $2+2=4, 2+2=5$; b) $x=1$, $x=x$ (x je realan broj), c) *Neki ceo broj je paran*; d) *Svaki kvadrat je pravougaonik.*

[1)] $2+2=4$ je matematička formula, ali kada se ona pročita običnim rečima dolazi se do rečenice. Slično vredi uopšte: formulama u običnom jeziku odgovaraju rečenice. Iz takvog razloga često ćemo termine r e č e n i c a, f o r m u l a jedan drugim zamenjivati.

Rešenje. a) Obe formule su iskazi – prvi je istinit (to će biti dokazano u tački VI) a drugi je lažan.

b) Formule $x=1$, $x=x$ su rečenice sa promenljivom x. Medjutim, dok $x=1$ menja istinitosnu vrednost u zavisnosti od vrednosti promenljive x (recimo $\tau(1=1) = \top$, $\tau(2=1) = \perp$), formula $x=x$ ima vrednost $\top$ za svaku vrednost promenljive. Znači $x=1$ nije iskaz a $x=x$ jeste, i to istinit. Istaknimo još da je $x=x$ primer dogovorno tačnog iskaza – aksiome, jer se to, kao što ćemo videti, uzima za jednu od aksioma jednakosti.

Obe rečenice pod c) i d) su istiniti iskazi.

2. Da li su iskazi rečenice o prirodnim brojevima:

a) $3<3,\ 3\leqslant 3,\ x<x,\ x\leqslant x$; b) $1|x,\ x|x,\ x|(x+1)$;

c) *1 je prost broj* ; d) *$x(x+1)$ je paran?*

3. Naredne rečenice o realnim brojevima zapisati korišćenjem znakova osnovnih logičkih operacija

1) Najmanje jedan od brojeva a, b je pozitivan,

2) Oba broja a, b su pozitivna,

3) Najmanje jedan od brojeva a, b nije pozitivan,

4) Nijedan od brojeva a,b nije pozitivan,

5) Tačno jedan od brojeva a,b je pozitivan.

Rešenje. Date rečenice po redu isto znače kao ove:

a je pozitivan *ili* b je pozitivan,

a je pozitivan *i* b je pozitivan,

a nije pozitivan *ili* b nije pozitivan,

a nije pozitivan i b nije pozitivan,

a je pozitivan *i* b nije pozitivan, *ili* a nije pozitivan *i* b jeste pozitivan

Korišćenjem sveze *ili* ... *ili* poslednja rečenica se može i ovako iskazati

(☆) *ili* je a pozitivan *ili* je b pozitivan

Pomoću znakova osnovnih logičkih operacija, kao i uobičajene oznake >0 za svojstvo „biti pozitivan", te se rečenice ovako zapisuju

$$1)\ a>0 \vee b>0\ ;\quad 2)\ a>0 \wedge b>0;\quad 3)\ \neg(a>0)\vee\neg(b>0),$$

$$4)\ \neg(a>0)\wedge\neg(b>0),\quad 5)\ (a>o \wedge \neg(b>0)) \vee (\neg(a>0) \wedge b>0).$$

Naravno, rečenicu 5) možemo zapisati i korišćenjem znaka isključne disjunkcije $\underline{\vee}$: $a>0 \veebar b>0$, što neposredno sledi na osnovu oblika (☆) te rečenice.

4. Data tvrdjenja o realnim brojevima zapisati korišćenjem znakova osnovnih logičkih operacija.

1) Proizvod dva broja je jednak nuli ako i samo ako je najmanje jedan od tih bro-

jeva jednak nuli;

2) Proizvod dva broja je različit od nule ako i samo ako su oba broja različita od nule;

3) Proizvod dva broja je pozitivan ako i samo ako su oba broja pozitivna ili su oba negativna.

Odgovor. Označimo brojeve koji se pominju u tvrdjenjima sa a i b. Tada traženi zapisi izgledaju:

1) $a \cdot b=0 \Longleftrightarrow a=0 \vee b=0$, 2) $a \cdot b \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$, 3) $a \cdot b>0 \Longleftrightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$.

5. Data su tvrdjenja o brojevima $2, 4, 6$:

a) Svaki od brojeva $2, 4, 6$ je paran,

b) Neki od brojeva $2, 4, 6$ je manji od 6,

c) Neki od brojeva $2, 4, 6$ nije deljiv sa 3,

d) Nijedan od brojeva $2, 4, 6$ nije veći od 6.

Zapisati ih korišćenjem znakova osnovnih logičkih operacija.

Odgovor.[1] a) $2\;2 \wedge 2\;4 \wedge 2|6$, b) $2<6 \vee 4<6 \vee 6<6$, c) $\neg(3|2) \vee \neg(3|3) \vee \neg(3|6)$,
d) $\neg(2>6) \wedge \neg(4>6) \wedge \neg(6>6)$.

6. Neka su x, y prirodni brojevi i neka je a njihov najmanji zajednički sadržalac. To znači:

(i) x, y se sadrže u a,

(ii) Ako se x, y sadrže i u broju b, onda se a sadrži u b.

Zapisati uslove (i) i (ii) korišćenjem znakova logičkih operacija.

Odgovor. (i) $x|a \wedge y|a$, (ii) $x|b \wedge y|b \Rightarrow a|b$.

7. Neka je $\leqslant$ relacija poretka skupa S i x, y, a elementi iz S. Za a kažemo da je *supremum* za x, y (oznaka: $sup\,(x, y)=a$), ukoliko je to najmanje gornje ograničenje za x, y, tj. ukoliko su ispunjeni uslovi

(i) a je gornje ograničenje za x, y, tj. $x \leqslant a$ i $y \leqslant a$,

(ii) Ako je b neko gornje ograničenje za x, y onda $a \leqslant b$.

Uslove (i) i (ii) zapisati korišćenjem znakova logičkih operacija.

Odgovor. (i) $x \leqslant a \wedge y \leqslant a$, (ii) $x \leqslant b \wedge y \leqslant b \Rightarrow a \leqslant b$.

8. Izračunati istinitosnu vrednost iskaza:

a) $2=1 \wedge 2=2$; b) $2=1 \vee 2=2$; c) $2=1 \Rightarrow 2=2$; d) $2=2 \Rightarrow 2=1$; e) $2=1 \Longleftrightarrow 2=2$.

Rešenje. Pošto $\tau(2=1)=\perp$, $\tau(2=2)=\top$, to „račun” glasi:

---

[1] Obično umesto $(p \vee q) \vee r$ pišemo kraće $p \vee q \vee r$. Slično važi i za konjunkciju.

a) $\tau(2=1=2=2) = \bot\wedge\top = \bot$; b) $\tau(2=1\vee 2=2) = \bot\vee\top = \top$; c) $\tau(2=1\Rightarrow 2=2) = \bot\Rightarrow\top = \top$;

d) $\tau(2=2\Rightarrow 2=1) = \top\Rightarrow\bot = \bot$; e) $\tau(2=1\Leftrightarrow 2=2) = \bot\Leftrightarrow\top = \bot$.

9. Izračunati istinitosnu vrednost iskaza:

a) $(1=1\wedge 2\neq 1)\Rightarrow(2=2\vee 3=2)$,, b) $(\neg 1>1\Leftrightarrow 1>2)\wedge 2>1)\vee 2>2$.

10. Rešiti formule (tj. odrediti sve vrednosti nepoznatih koje je zadovoljavaju) po nepoznatoj x iz skupa $\{1, 2, 3\}$

a) $x=1$, b) $x\neq 1$, c) $x=1\vee x=2$, d) $x\neq 1\vee x\neq 2$, e) $x=1\wedge x=2$, f) $x\neq 1\wedge x\neq 2$, g) $x=1\wedge x\neq 2$,

h) $x=1\vee x=2\vee x=3$, i) $(x\neq 1\wedge x\neq 2)\vee(x\neq 2\wedge x\neq 3)$.

Odgovor. a) *1*; b) *2,3*; c) *1,2*; d) *1,2,3*; e) nema rešenja; f) *3*; g) *1*; h) *1*, 2,3; i) 1,3. 1,3.

11. **Nastavak prethodnog.** Rešiti formule

a) $x=1\Rightarrow x=2$, b) $x\neq 1\Rightarrow x=2$, c) $x=1\Rightarrow x=1$, d) $x\neq 1\Rightarrow x=2$, e) $(x=1\wedge x=2)\Rightarrow x=3$,

f) $x\neq 1\Rightarrow(x=2\vee x=3)$, g) $x\neq 1\Rightarrow(x=2\wedge x=3)$.

12. Dokazati:

Konjunkcija $p\wedge q$ je istinita akko su obe rečenice p, q istinite.

Disjunkcija $p\vee q$ je istinita akko je bar jedna od rečenica p, q istinita.

Implikacija $p\Rightarrow q$ je istinita akko je p lažna („Iz laži sledi sve") ili je q istinita („Istina proizlazi iz bilo čega").

Ekvivalencija $p\Leftrightarrow q$ je istinita akko rečenice p, q imaju jednake istinitosne vrednosti.

13. Da li se do svih rešenja izvesne formule po x oblika

$$P(x)\Rightarrow Q(x)$$

može doći združivanjem vrednosti za koje je $P(x)$ lažno sa onima za koje je $Q(x)$ istinito ?

Odgovor. Može.

14. Neka je x ma koji prirodan broj. Da li je tačna implikacija:

$$x=2\Rightarrow x^2=4$$

Rešenje. Neka x dobije ma koju vrednost x_0 (jedan od brojeva *0, 1, 2, 3 ...*). Razlikujemo dva slučaja:

(i) x_0 *je 2.* Tada $\tau(x_0=2\Rightarrow x_0^2=4)=\tau(2=2\Rightarrow 2^2=4)=\tau(2=2\Rightarrow 4=4)=\top\Rightarrow\top=\top$.

(ii) x_0 *nije 2.* Tada $\tau(x_0=2)=\bot$, pa stoga $\tau(x_0=2\Rightarrow x_0^2=4)=\bot\Rightarrow\tau(x_0^2=4)=\top$.

Znači data implikacija je tačna za sve vrednosti x (iz skupa prirodnih brojeva).

15. Neka je x ma koji prirodan broj. Da li je tačna implikacija

$$x=2\Rightarrow x \textit{ je paran broj}$$

16. Uveriti se da li je implikacija

$$x=2 \wedge y=1 \Rightarrow x+y=3 \wedge x-y=1$$

tačna za sve realne brojeve x, y.

Uputstvo. Razlikovati slučaj: x_0 je 2. y_0 je 1, i slučaj kad to nije – tj. x_0 nije 2 ili y_0 nije 1, gde smo sa x_0, y_0 označili vrednosti redom za x, y.

17. Dokazati da je prazan skup podskup svakog skupa.

Rešenje. Neka je A ma koji skup. Prema definiciji relacije $\subseteq$ dosta je dokazati da za svaki x važi:

$$(\star) \qquad x \in \phi \Rightarrow x \in A$$

Prazan skup ϕ je skup bez elemenata, pa je $\tau(x \in \phi) = \bot$. Dakle, pretpostavka implikacije ($\star$) je uvek lažna (za svaki x i svaki A), pa je ta implikacija istinita.

18. Rešiti formule $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Longleftrightarrow Q$, ako su P, Q:

a) $P: x \in \{1, 2\}$, $Q: x \in \{2, 3\}$; b) $P: x > 1$, $Q: x > 3$;

c) $P: x=1 \vee x=2$, $Q: x \in \{1, 2\}$, gde x uzima vrednosti iz skupa $\{1,2,3,4,5\}$.

19. Dat je grupoid tablicom

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Rešiti formule:

1) $a \star x=b$, $x \star b=b \star x$, $x \star x=c$;

2) $x=b \Rightarrow x \star x=c$, $x \star a=b \Rightarrow b \star x=c$.

20. Rešiti date formule po x, y (iz skupa prirodnih brojeva)

a) $x=1 \wedge y=2$; b) $(x=1 \wedge y=2) \vee (x=2 \wedge y=3)$; c) $x=1 \wedge x+y=3$; d) $x+y=3 \wedge x-y=1$;

e) $x=1$; f) $y=2$; g) $x=1 \Rightarrow y=2$.

Uputstvo. Rešenja su preslikavanja oblika $\binom{x\ y}{a\ b}$, gde su a, b prirodni brojevi koji zadovoljavaju odnosnu formulu. Formula e) ima beskonačno mnogo rešenja $\binom{x\ y}{1\ b}$, gde je b proizvoljan.

21. Da li su date formule istinite za svaku vrednost promenljive x (iz skupa prirodnih brojeva)

a) $x \in \{1,2\} \Longleftrightarrow x=1 \vee x=2$; b) $x \in \{1,2,3\} \Longleftrightarrow x \in \{1,2\} \vee x \in \{2,3\}$.

c) $x=2 \Longleftrightarrow x \in \{2\}$; d) $x=2 \Longleftrightarrow x \in \{1,2\} \wedge x \in \{2,3\}$.

22. Da li su ove formule o skupovima istinite za ma koje skupove x, a, b, c

$$x \in \{a,b\} \Leftrightarrow x=a \vee x=b, \quad x \in \{a,b,c\} \Leftrightarrow x=a \vee x=b \vee x=c.$$

23. Utvrditi istinitosnu vrednost iskaza [1])

---

[1]) Znak $\exists$ koristimo kao zamenu za reč n e k i (p o s t o j i). To je tzv. e g z i s t e n c i j a l n i k v a n t o r.

$$(\forall x \in R)\, x^2 \geqslant 0,\ (\exists x \in R)\, x^2 = 1,\ (\exists x \in R)\, x^2 = -1$$

24. Formula $x = 0 \vee y = 0 \Leftrightarrow xy = 0$ je istinita za sve realne brojeve x, y. Dokazati.

25. Dokazati da je formula

$$x = 1 \vee x = 2 \Longleftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

istinita za svaki realan broj x.

26. Ispitati da li su date formule istinite (za sve realne brojeve x, y).

$$x=0 \wedge y=0 \Rightarrow xy=0,\quad xy=0 \Rightarrow x=0 \wedge y=0,$$

$$x=0 \vee y=0 \Longleftrightarrow xy=0,\quad xy=0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow y=0,\quad xy \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

27. Produžetak prethodnog.

$$xy > 0 \Longleftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0),\quad x \cdot y > 0 \wedge x > 0 \Rightarrow y > 0,$$

$$x \cdot y < 0 \Longleftrightarrow (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0),\quad x \cdot y < 0 \wedge x > 0 \Longleftrightarrow y < 0$$

28. Dokazati da je relacija α data tablicom relacija ekvivalencije skupa $\{1,2,3\}$

α	1	2	3
1	⊤	⊤	⊥
2	⊤	⊤	⊥
3	⊥	⊥	⊤

Uputstvo Treba dokazati da su formule $x\,\alpha\,x$, $x\,\alpha\,y \Rightarrow y\,\alpha\,x$, $x\,\alpha\,y \wedge y\,\alpha\,z \Rightarrow x\,\alpha\,z$ istinite za sve vrednosti x, y, z iz skupa $\{1, 2, 3\}$. Dakle, problem se svodi na odredjivanje istinitosnih vrednosti iskaznih[1]) formula posebne vrste kao:

$1\alpha 1$, $2\alpha 2$, $3\alpha 3$, $1\alpha 1 \Rightarrow 1\alpha 1$, $1\alpha 2 \Rightarrow 2\alpha 1$, $1\alpha 1 \wedge 1\alpha 1 \Rightarrow 1\alpha 1$ i sl. sagradjenih od iskaznih slova: $1\alpha 1$, $1\alpha 2$, $1\alpha 3$, $2\alpha 1$, $2\alpha 2$, $2\alpha 3$, $3\alpha 1$, $3\alpha 2$, $3\alpha 3$, čije su vrednosti odredjene tablicom relacije α. Na primer,

$$\tau(2\alpha 1 \wedge 1\alpha 3 \Rightarrow 2\alpha 3) = \top \wedge \bot \Rightarrow \bot = \bot \Rightarrow \bot = \top.$$

29. Dokazati da je datom tablicom odredjena jedna relacija poretka skupa $\{a, b, c\}$.

	a	b	c
a	⊤	⊤	⊤
b	⊥	⊤	⊥
c	⊥	⊥	⊤

30. Neka su α, β relacije skupa $\{1, 2, 3\}$ odredjene tablicama

α	1	2	3
1	⊤	⊤	⊥
2	⊥	⊤	⊥
3	⊥	⊤	⊥

β	1	2	3
1	⊥	⊥	⊤
2	⊥	⊥	⊤
3	⊤	⊤	⊥

Odrediti tablicu relacije γ definisane ovako

[1]) Iskazne formule sagradjene od iskaznih slova p, q, r su recimo: p, q, r p∧q, p∨q, p⇒q, p ⇔ q, (p∧q) ⇒ r, (p∧q) ⇔ (q∨r) i sl. O tome podrobno u tački VII I s k a z n e f o r m u l e. T a u t o l o g i j e.

$$x \gamma y \overset{\text{def}}{\iff} x \alpha y \wedge x \beta y.$$

Rešenje. Koristeći definiciju i tablice datih relacija imamo:

$\tau(1\gamma 1) = \tau(1\alpha 1) \wedge \tau(1\beta 1) = \top \wedge \bot = \bot$, $\tau(1\gamma 2) = \tau(1\alpha 2) \wedge \tau(1\beta 2) = \top \wedge \bot = \bot$.

Slično se dobijaju i jednakosti:

$\tau(1\gamma 3) = \bot$, $\tau(2\gamma 1) = \bot$, $\tau(2\gamma 2) = \bot$, $\tau(2\gamma 3) = \bot$, $\tau(3\gamma 1) = \bot$, $\tau(3\gamma 2) = \top$, $\tau(3\gamma 3) = \bot$

koje potpuno odredjuju tablicu relacije γ.

31. **Produžetak prethodnog.** Odrediti tablicu relacije γ uvedene ovako

a) $x\gamma y \overset{\text{def}}{\iff} (x \alpha y \vee x \beta y)$; b) $x\beta y \overset{\text{def}}{\iff} (x\alpha y \Rightarrow x\beta y)$

c) $x\gamma y \overset{\text{def}}{\iff} (x\alpha y \iff x\beta y)$

32. Dokazati da za ma koje iskaze p, q vredi:

$\tau(p\wedge q) = \bot$ akko $\tau p = \bot$ ili $\tau q = \bot$, $\tau(p\vee q) = \bot$ akko $\tau p = \bot$ i $\tau q = \bot$, $\tau(p \Rightarrow q) = \bot$ akko $\tau p = \top$ i $\tau q = \bot$, $\tau(p \iff q) = \bot$ akko $\tau p \neq \tau q$.

33. Dokazati:

Ako $\tau p = \top$, $\tau(p \Rightarrow q) = \top$, onda $\tau q = \top$
Ako $\tau p = \top$, $\tau(p \Leftrightarrow q) = \top$, onda $\tau q = \top$ (p, q ma koji iskazi)

34. Da li vredi (za ma koje iskaze p, q):

a) $\tau(p\vee q) = \top$ povlači $\tau p = \top$; b) $\tau(p\wedge q) = \bot$ povlači $\tau p = \bot$.

V POTREBAN I DOVOLJAN USLOV

♦ Medju logičkim operacijama *implikaciji* pripada istaknuto mesto. S pravom se može reći da se najveći deo matematičke misaone delatnosti odnosi na razna pitanja koja su u vezi sa implikacijom ili su njome protkana. Radi lakšeg rešavanja takvih pitanja, kroz istoriju ljudske misli razvio se čitav niz jezičkih izražavanja implikacije. Tako, u matematici se uzima da sve rečenice isto znače (p, q su ma koje rečenice):

(I_1) *Ako p, onda q,*
(I_2) *p povlači q,*
(I_3) *Iz p sledi*[1] *q,*
(I_4) *Da je q, dovoljno je da je p,*
(I_5) *p je dovoljan uslov za q,*
(I_6) *Da je p, potrebno je da je q,*
(I_7) *q je potreban uslov za p,*
(I_8) *q, ako p,*
(I_9) *p, samo ako q,*
(I_{10}) *q je posledica pretpostavke p.*

Pored istaknutih, za implikaciju postoje i mnogi drugi rečenični oblici.

♦ *Ekvivalencija* je uvedena kao dvostruka implikacija, tj. kao:
(E_1) *Ako p onda q i ako q onda p.* (p, q proizvoljne rečenice)
Koristeći istaknute rečenične oblike za implikaciju, posle uobičajenog jezičkog sažimanja na nekim mestima, ekvivalenciji odgovaraju i ovi oblici izražavanja

(E_2) *Ako p, onda q i obratno*[2]
(E_3) *p ako i samo ako q,*
(E_4) *Da je p, potrebno je i dovoljno, da je q,*
(E_5) *p je potreban i dovoljan uslov za q.*

---

[1]Umesto s l e d i govori se i: p r o i s t i č e, p r o i z l a z i, s l e d u j e.

[2]Za implikaciju $q \Rightarrow p$ kaže se da je o b r a t implikacije $p \Rightarrow q$.

♦ Istaknimo:

Dokazati da je p dovoljan uslov za q, ili

Dokazati da je q potreban uslov za p, ili

Dokazati da iz pretpostavke p proizlazi posledica q, i slično znači:

Dokazati da je implikacija $p \Rightarrow q$ istinita.

ZADACI

1. Date implikacije pročitati na načine (I_1) do (I_{10})

a) $6|x \Rightarrow 2|x$, b) $x > 2 \Rightarrow x > 0$, c) *x je kvadrat $\Rightarrow$ x je romb,*

d) *x je prirodan broj $\Rightarrow$ x je ceo broj.*

2. Naredne rečenice prevesti na oblike u kojima učestvuju reči:

samo ako, potreban uslov, dovoljan uslov

a) *Ako je trougao ravnostran, onda je on ravnokrak,*

b) *Realan broj je nenegativan, ako je pozitivan ili je jednak 0,*

c) *Iz $x^2 = 1$ sledi $x = 1$ ili $x = -1$.*

3. Ekvivalencije o prirodnim brojevima pročitati na načine (E_1) do (E_5)

a) $2|n \wedge 3|n \Leftrightarrow 6|n$, b) $2|n \vee 2|m \Leftrightarrow 2|n{\cdot}m$,

c) $n = 2 \Leftrightarrow$ *n je paran $\wedge$ n je prost.*

4. Ekvivalencije o realnim brojevima pročitati na načine (E_1) do (E_5)

a) $x{\cdot}y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$, b) $x{\cdot}y \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$

c) $x\,y > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$

5. Odrediti:

a) jedan dovoljan uslov, b) jedan potreban uslov

za rečenicu $4|x$ (x je ceo broj).

Rešenje. a) Jedan dovoljan uslov je recimo $8|x$, jer ako je ceo broj deljiv sa 8, deljiv je i sa 4, odnosno implikacija

$$8|x \Rightarrow 4|x$$

je istinita.

Dovoljni uslovi su i: $x = 4$, $12|x$, $4|x$ kao i razni drugi.

b) Potreban uslov za deljivost broja sa 4 jeste deljivost tog broja sa 2, odnosno implikacija

$$4|x \Rightarrow 2|x$$

je istinita.

Još neki potrebni uslovi su: $4|x$, $x \geqslant 4$, $4|x^2$, $6|3x$.

6. Za svaku od datih rečenica odrediti po 3 dovoljna, i po 3 potrebna uslova

a) *Trougao je ravnostran,* b) *Prirodan broj n je paran,*

c) *Prava a je paralelna sa pravom b.*

7. Date su rečenice o prirodnim brojevima:

n je paran, m je paran, n je paran $\wedge$ *m je paran, n je paran* $\vee$ *m je paran.*

Ispitati za svaku od njih da li je:

a) potreban uslov, b) dovoljan uslov, c) potreban i dovoljan uslov za rečenicu:

m·n je paran broj.

8. Koja medju datim rečenicama jeste potreban i dovoljan uslov za rečenicu: *Četvorougao je kvadrat*

a) *Dijagonale četvorougla se polove,*

b) *Dijagonale četvorougla su medjusobno jednake i polove se,*

c) *Dijagonale četvorougla su uzajamno normalne i polove se,*

d) *Četvorougao je pravougaonik i dijagonale su mu uzajamno normalne.*

9. Za svaku od datih rečenica odrediti po *3* potrebna i dovoljna uslova

a) *Četvorougao je paralelogram,* b) *Trougao je ravnostran,*

c) *Ceo broj je deljiv sa 30,* d) $x = 1 \vee x = 2$ (x je realan broj).

10. U terminima koeficijenata p, q odrediti potreban i dovoljan uslov da brojevi α, β budu rešenja realne jednačine (po x):

(☆) $$x^2 + px + q = 0$$

Rešenje. Prema Vijetovoj teoremi, brojevi α, β su rešenja jednačine (☆) ako i samo ako zadovoljavaju jednakosti

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha \cdot \beta = q$$

Otuda je traženi potreban i dovoljan uslov konjunkcija

$$\alpha + \beta = -p \wedge \alpha \cdot \beta = q$$

11. U terminima koeficijenata a, b odrediti dovoljan uslov da jednačina po x: $a \cdot x = b$ bude moguća (na polju realnih brojeva).

Rešenje. Jednačina $a \cdot x = b$ je moguća u ovim slučajevima

(1) $a \neq 0$, (2) $a = 0$ i $b = 0$

(U prvom slučaju jedinstveno rešenje je b/a, a u drugom jednačina glasi: $0 \cdot x = 0$, pa je svaki realan broj njeno rešenje.)

Otuda su: $a \neq 0$, $a = 0 \wedge b = 0$ dva dovoljna uslova tražene vrste.

12. Pomoću rečenica: *n je paran broj, m je paran broj* obrazovati potreban i dovoljan uslov za: *m·n je paran broj,* gde su *m, n* prirodni brojevi.

13. Da li je za datu implikaciju istinit njen obrat

a) *Ako je trougao ravnokrak, onda je on ravnostran;*

b) $x = 1 \vee x = 2 \Rightarrow x \in \{1,2\}$, c) $a \neq 0 \Rightarrow (\exists x \in R)\, a \cdot x = 0$

14. Naredne rečenice o realnoj jednačini $a \cdot x = 1$ (po nepoznatoj x) zapisati korišćenjem znakova osnovnih logičkih operacija

1) *Jednačina* $a \cdot x = 1$ *je moguća u slučaju* $a \neq 0$,
2) *Jednačina* $a \cdot x = 1$ *je moguća, uz uslov* $a \neq 0$,
3) *Jednačina*

je moguća. $a \cdot x = 1\ (a \neq 0)$

Odgovor. Sve tri rečenice isto znače kao:

Ako $a \neq 0$, *onda je jednačina* $a \cdot x = 1$ *moguća.*

Dakle, radi se o još nekim načinima kazivanja implikacije. Korišćenjem znaka $\Rightarrow$, sve date rečenice se zapisuju ovako:

$a \neq 0 \Rightarrow a \cdot x = 1$ *je moguća jednačina,* ili kraće: $a \neq 0 \Rightarrow (\exists x \in R)\ a \cdot x = 1$.

15. Naredne rečenice zapisati korišćenjem znakova osnovnih logičkih operacija

a) *Prirodan broj je ceo broj,*

b) *Kvadrat realnog broja je nenegativan,*

c) *Kvadrat je romb,*

d) *Prirodan broj je paran ili neparan,*

e) *Prost i paran prirodan broj je jednak 2.*

Rešenje. Sve rečenice su slučajevi važnog oblika implikacije

A je B

To je, u stvari, kraći način kazivanja duže rečenice

Ako x ima svojstvo A, onda x ima svojstvo B.

Otuda, traženi zapisi izgledaju ovako

a) x *je prirodan broj* $\Rightarrow x$ *je ceo broj,* ili : $x \in N \Rightarrow x \in Z$,

b) x *je realan broj* $\Rightarrow x^2 \geqslant 0$, ili: $x \in R \Rightarrow x^2 \geqslant 0$,

c) x *je kvadrat* $\Rightarrow x$ je romb,

d) x *je prirodan broj* $\Rightarrow x$ *je paran* $\vee$ x *je neparan* ili: $x \in N \Rightarrow x \in 2N \vee x \in 2N{+}1$,

e) x *je prost prirodan broj* $\wedge$ x *je paran* $\Rightarrow x = 2$.

16. Date rečenice zapisati korišćenjem znakova logičkih operacija

a) *Broj deljiv sa 10 je deljiv sa 5,*

b) *Prirodan broj je ili paran ili neparan,*

c) *Paralelne prave se ne seku,*

d) *Podudarni trouglovi su slični,*

e) *Pravougli trougao nije ravnostran.*

17. Umesto znaka ... staviti jedan od znakova logičkih operacija tako da dobijene rečenice postanu definicije *parnog broja, romba,* odnosno *rešenja* (po x) realne jednačine $J(x) = 0$

Prirodan broj n je paran ... $2|n$,

Četvorougao je romb ... ima sve stranice medjusobno jednake,

a je rešenje jednačine $J(x) = 0$ ... *formula* $J(a) = 0$ *je istinita.*

Odgovor. Na sva tri mesta treba da dodje znak $\Longleftrightarrow$, ili ako hoćemo da istaknemo da se radi o definicijama, onda znak $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (čitati: ekvivalentno po definiciji).

Primedba. Prethodne i sa njima slične definicije često se čuju u obliku implikacije, odnosno:

Prirodan broj n je paran, ako $2|n$,

Četvorougao je romb, ako ima sve stranice medjusobno jednake,

a je rešenje jednačine $J(x) = 0$, *ako je formula* $J(a) = 0$ *istinita.*

Medjutim, tu se piše implikacija, a misli se na ekvivalenciju, što je jedan od čestih slučajeva mešanja implikacije i ekvivalencije.

VI JEDNAKOSNI DOKAZI. ALGEBRA BROJEVA

♦ Jednakost je jedna od najvažnijih relacija uopšte. Poseduje razne zakonitosti, pravilnosti. Kao *aksiome* (polazna tvrdjenja) uzimamo:

(i) Jednakost je (R)–(S)–(T) relacija, tj. tačne su formule

(R) $x = x$, (S) $x = y \Rightarrow y = x$, (T) $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$,

gde su x, y, z ma koji objekti. Inače, (R), (S), (T) su odrednice tzv. *relacije ekvivalencije*. Naime, relacija $\sim$ nekog skupa A je njegova relacija ekvivalencije, ukoliko za sve $x, y, z \in A$ važe formule

$$x \sim x, \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x, \quad x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$$

(ii) Jednakost je saglasna sa svakom matematičkom operacijom i svakom relacijom – o čemu više govora u drugom i trećem delu ove tačke.

♦ U *jednakosnim dokazima* iz izvesnih pretpostavljenih jednakosti (koristeći se navedenim aksiomama) dedukuju se (izvode, dokazuju) razne druge jednakosti. Recimo, jedan dokaz implikacije

$$a = b \wedge c = b \Rightarrow a = c$$

izložen *korak–po–korak* glasi:

(1) $a = b$ (Pretpostavka)

(2) $c = b$ (Pretpostavka)

(3) $b = c$ (Iz (2) primenom svojstva (S))

(4) $a = c$ (Iz (1) i (3) primenom tranzitivnosti jednakosti)

Kraj dokaza.

♦ U prethodnom primeru, kao i u jednakosnim dokazima uopšte, svojstva jednakosti istaknuta kao aksiome koriste se obično u vidu *pravila izvodjenja:*

Ta i ta jednakost proizlazi iz tih i tih jednakosti

Recimo, svojstvima (S) i (T) odgovaraju ova pravila (zapisana na uobičajeni način)

(S) $\dfrac{x=y}{y=x}$ (Iz jednakosti $x=y$ proizlazi jednakost $y=x$)

(T) $\dfrac{x=y,\ y=z}{x=z}$ (Iz jednakosti $x=y$, $y=z$ proizlazi jednakost $x=z$).

ZADACI

1. Dokazati implikacije:

$$b = a \wedge b = c \Rightarrow a = c, \quad c = a \wedge b = d \wedge a = d \Rightarrow b = c$$

Rešenje. Jedan dokaz prve formule glasi:

(1) $b = a$ (Pretpostavka)

(2) $b = c$ (Pretpostavka)

(3) $a = b$ (Iz (1) po pravilu (S))

(4) $a = c$ (Iz (3) i (2) po (T))

2. Neka su a, b, c neke prave. Da li se dokaz implikacije

$$b \parallel a \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$$

može dobiti ako se u dokazu navedenom u prethodnom zadatku znak = svuda zameni znakom $\parallel$, podrazumevajući pri tom da se umesto (S), (T) koriste pravila:

$$(S_{\parallel}) \quad \frac{x \parallel y}{y \parallel x}, \qquad (T_{\parallel}) \quad \frac{x \parallel y, \; y \parallel z}{x \parallel z}$$

3. Dokazati implikaciju

$$b \sim a \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c,$$

gde je $\sim$ ma koja relacija ekvivalencije.

Uputstvo. U navedenom dokazu zadatka 1 znak = zameniti sa $\sim$.

4. Dokazati implikaciju

$$a_1 = a_2 \wedge a_2 = a_3 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} = a_n \Rightarrow a_1 = a_n$$

5. Dokazati ekvivalencije

$$a = b \Longleftrightarrow b = a, \quad a = b \wedge c = b \Longleftrightarrow b = a \wedge c = a$$

6. Dokazati formulu

$$a = b \wedge c = d \Rightarrow (a = c \Longleftrightarrow b = d)$$

Uputstvo. Iz pretpostavki $a = b$, $c = d$, $a = c$ izvesti $b = d$, kao i iz $a=b$, $c = d$, $b=d$ izvesti $a = c$.

7. Dokazati formulu:

$$(S') \qquad x \neq y \Rightarrow y \neq x$$

Rešenje. Formula ima oblik implikacije $A \Rightarrow B$. Dokazujemo je tzv. metodom *svodjenja na protivurečnost (reductio ad absurdum)*. Naime, da bismo dokazali da A povlači B, dokazaćemo da nije moguće da jednovremeno važe: $A, \neg B$, odnosno da iz tih dveju pretpostavki slede neke dve suprotne posledice R, $\neg R$. Jedan dokaz izgleda:

(1) $x \neq y$ (Pretpostavka A)

(2) $y = x$ (Pretpostavka $\neg$B)

(3) $x = y$ (Iz (2) po (S))

Zaključak: (1) i (3) su dve suprotne posledice (od A, $\neg B$), stoga vredi implikacija $A \Rightarrow B$.

8. Metodom svodjenja na protivurečnost dokazati implikacije

$$x = y \wedge y \neq z \Rightarrow x \neq z, \qquad x = y \wedge z \neq u \wedge u = x \Rightarrow y \neq z$$

Rešenje. Jedan dokaz prve formule glasi (premisa $x{=}y \wedge y{\neq}z$ označena je sa A, a zaključak $x{\neq}z$ sa B):

(1) $x{=}y$, $y{\neq}z$ (Pretpostavka A)

(2) $x{=}z$ (Pretpostavka $\neg B$)

(3) $y{=}x$ (Iz prve formule pod (1) primenom pravila (S))

(4) $y{=}z$ (Iz (3) i (2) po (T))

Kraj dokaza, jer smo dobili posledice $y{=}z$, $y{\neq}z$: formula (4) i druga formula pod (1).

9. Elementi nekog skupa označeni su sa A, B, C, D, E, F, G i ne zna se koji su sve medju njima jednaki, a koji različiti. Raspraviti to pitanje na osnovu podataka:

$$B{=}G,\ A{=}C,\ E{=}D,\ G{\neq}A,\ D{=}B,\ F{=}C$$

10. Da li se dobijaju tačne jednakosti iz

$$x = y, \qquad z = u$$

ako se x, y, z, u zamene sa:

a) $1, 1, 2, 2$; b) $2, 2, 2, 2$; c) $1, 2, 2, 2$?

11. Da li jednakost oblika $a{=}d$ mora biti posledica jednakosti $e{=}c$, $a{=}b$, $d{=}c$?

12. Da li je tačna implikacije $x{\neq}y \wedge y{\neq}z \Rightarrow x{\neq}z$?

13. Uočimo jednakosti

$$a_1 = a_2,\ a_3 = a_4,\ a_3 = a_5$$

čije strane su znaci konstanata a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, i izvestan skup A. Preslikavanje oblika

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in A)$$

nazivamo *model*[1] *(rešenje)* datih jednakosti, ukoliko su tačne jednakosti:

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \alpha_3 = \alpha_4,\ \alpha_3 = \alpha_5,$$

Odrediti sve modele u slučaju $A = \{1, 2, 3\}$.

14. Dokazati da formule

$$a = b,\ b = c,\ c = d,\ d \neq a$$

nemaju nikakav model.

---

[1] Uopšte, ako je uočen skup izvesnih jednakosti oblika $a_i{=}a_j$ skupa A, tada se preslikavanje čiji su likovi $a_1, a_2, \ldots$ a slike su neki elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ skupa A naziva m o d e l, ukoliko za te elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ dobijene jednakosti stvarno važe u skupu A.

15. Uočimo skup S jednakosti:

$$a_1 = a_1,\ a_1 = a_2,$$
$$a_2 = a_1,\ a_2 = a_2$$
$$b_1 = b_1,\ b_1 = b_2,\ b_1 = b_3,$$
$$b_2 = b_1,\ b_2 = b_2,\ b_2 = b_3,$$
$$b_3 = b_1,\ b_3 = b_2,\ b_3 = b_3$$

Dokazati da je taj skup *dokazno zatvoren*, odnosno da se iz tih jednakosti kao posledica ne može dokazati ni jedna nova jednakost (po a_i, b_j).

Rešenje. Sa slovima a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 moguće je uočiti tri vrste jednakosti: jednakost dvaju a-ova, kao $a_1 = a_2$ i sl., jednakost dvaju b-ova i najzad jednakosti oblika $a_i = b_j$. Jednakosti prve dve vrste pripadaju skupu S. Ostaje još da se dokaže da nijedna od jednakosti oblika $a_i = b_j$ nije posledica datih jednakosti. Dokazujemo to, primera radi, za jednakost $a_1 = b_2$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da ta jednakost jeste posledica skupa jednakosti S, i uočimo ovo preslikavanje

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nije teško uvideti da je to jedan model svih formula iz S. Medjutim, formula $a_1 = b_2$ nije u tom modelu ispunjena, jer $1=2$ nije tačna jednakost. Dakle, $a_1 = b_2$ zaista nije posledica skupa S. Slično važi i za ostale jednakosti oblika $a_i = b_j$.

Napomena. Skup S je posebnog oblika; to je, reći ćemo tako, *razvrstan* skup jednakosti. Opštije, neka su $A, B, C, \ldots$ izvesni medjusobno disjunktni neprazni skupovi slova $a_1, a_2, \ldots$, odnosno $b_1, b_2, \ldots$ i sl. Sa S označimo skup svih formula oblika

$$a_i = a_j,\ b_k = b_s,\ c_m = c_n, \ldots$$

pri čemu su a_i, a_j ma koji elementi skupa A, b_k, b_s skupa B i sl. Takav skup S nazivamo *razvrstan* skup (jednakosti).

16. Neka je S razvrstan skup jednakosti. Dokazati da je on dokazno zatvoren.

17. Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa A. Dokazati formule

(i) $a \sim b \Longleftrightarrow (\forall x)(x \sim a \Longleftrightarrow x \sim b)$, (ii) $a \sim b \Longleftrightarrow (\exists x)(x \sim a \wedge x \sim b)$

gde su a, b, x, elementi skupa A.

Rešenje. (i) Za dokaz s l e v a n a d e s n o dosta je izvesti ove dve implikacije

$$a \sim b \Rightarrow (x \sim a \Rightarrow x \sim b),\ a \sim b \Rightarrow (x \sim b \Rightarrow x \sim a)$$

za ma koji element x skupa A, što sledi neposredno na osnovu svojstava (S), (T) relacije $\sim$.

Jedan dokaz z d e s n a n a l e v o glasi:

(1) $(\forall x)(x \sim a \Longleftrightarrow x \sim b)$ (Pretpostavka)

(2) $a \sim a \Longleftrightarrow a \sim b$ (Iz ekvivalencije $x \sim a \Longleftrightarrow x \sim b$, koja prema (1) vredi za svaki x skupa A, stavljajući umesto x baš a)

(3) $\top \Longleftrightarrow a \sim b$ (Jer $\sim$ je refleksivna pa je $a \sim a$ tačno)

(4) $a \sim b$ (Iz (3) na osnovu istinitosne tablice za $\Longleftrightarrow$)

Kraj dokaza implikacije $(\forall x)(x \sim a \Longleftrightarrow x \sim b) \Rightarrow a \sim b$, a samim tim i prve ekvivalencije.

(ii) Dokaz s l e v a n a d e s n o sledi neposredno – postojeći x je, recimo a.

Dokaz z d e s n a n a l e v o sledi na osnovu svojstva tranzitivnosti relacije $\sim$:

(1) $(\exists x)(x \sim a \wedge x \sim b)$ (Pretpostavka)

(2) $x_o \sim a \wedge x_o \sim b$ (Postojeći x označili smo sa x_o)

(3) $a \sim b$ (Iz (2) na osnovu (S) i (T))

18. Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa A. *Klasa ekvivalencije* C_a proizvoljnog elementa a iz A uvodi se definicijom

$$C_a \overset{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \sim a\}$$

Dokazati da klase ekvivalencije imaju ova svojstva

(i) $C_a \neq \phi$, (ii) $C_a = C_b \Longleftrightarrow a \sim b$, (iii) $C_a \cap C_b = \phi \Longleftrightarrow a \not\sim b$,

(iv) $\bigcup\limits_{a \in A} C_a = A$, tj. unija[1] svih klasa ekvivalencije jednaka je skupu A.

Drugim rečima, relacijom ekvivalencije skup A se razlaže (razbija) na neprazne, medjusobno disjunktne podskupove.

Rešenje. (i) Pošto $a \sim a$, to $a \in C_a$ pa je C_a neprazan skup.

(ii) Podsetimo najpre da su skupovi C_a, C_b jednaki akko imaju iste elemente, odnosno

$$C_a = C_b \Longleftrightarrow (\forall x)(x \in C_a \Longleftrightarrow x \in C_b)$$

Dalje, na osnovu definicije klase ekvivalencije, vredi: $x \in C_a \Longleftrightarrow x \sim a$, $x \in C_b \Longleftrightarrow x \sim b$, na osnovu čega prethodna ekvivalencija postaje

$$C_a = C_b \Longleftrightarrow (\forall x)(x \sim a \Longleftrightarrow x \sim b)$$

Koristeći još i ekvivalenciju

$$a \sim b \Longleftrightarrow (\forall x)(x \sim a \Longleftrightarrow x \sim b)$$

dokazanu u prethodnom zadatku neposredno zaključujemo

$$C_a = C_b \Longleftrightarrow a \sim b$$

(ii) Presek $C_a \cap C_b$ je prazan skup akko njemu ne pripada nijedan element (skupa A), tj.

---

[1] Ako su $S_i (i \in I)$ izvesni skupovi, njihova unija $\bigcup\limits_{i \in I} S_i$ je skup svih onih elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova S_i.

$$C_a \cap C_b = \phi \iff \neg(\exists x)(x \in C_a \cap C_b) \quad \text{ili}$$

$$C_a \cap C_b = \phi \iff \neg(\exists x)(x \in C_a \wedge x \in C_b)$$

Dalje dokaz teče slično kao pod (ii) korišćenjem ekvivalencije

$$a \sim b \iff (\exists x)(x \sim a \wedge x \sim b)$$

(iv) Pošto je C_a podskup od A, to je i $\bigcup_{a \in A} C_a$ takodje podskup od A. Dakle $\bigcup_{a \in A} C_a \subseteq A$. Za dokaz obratne inkluzije $A \subseteq \bigcup_{a \in A} C_a$ dosta je iskoristiti činjenicu da a pripada klasi C_a.

19. Neka je A izvestan skup i A_i $(i \in I)$ podskupovi od A koji zadovoljavaju uslove:

(i) $A_i \neq \phi$, za svaki $i \in I$,

(ii) $A_i \cap A_j = \phi$ ako $i \neq j$,

(iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Drugačije se kaže da je familija $A_i (i \in I)$ jedno *razlaganje* ili *razbijanje skupa* A.

Neka je, dalje, $\sim$ relacija skupa A ovako uvedena:

$x \sim y$ akko x, y *pripadaju istom skupu* A_i, *za neki* i.

Dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije čije su klase upravo A_i.

20. Dokazati ekvivalenciju

S je razvrstan skup $\iff$ *S je dokazno zatvoren,*

gde je S ma koji skup jednakosti.

Uputstvo. U vezi sa $\Rightarrow$–*delom* videti zadatke 15 i 16. Da bismo dokazali $\Leftarrow$–*deo*, definišimo najpre relaciju $\sim$ (u skupu A svih slova koja učestvuju u formulama iz S):

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \text{formula } x = y \text{ pripada } S$$

Pošto je S dokazno zatvoren, tj. zatvoren u odnosu na primenu pravila (R), (S),(T), to je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa A. Prema prethodnom zadatku njome se skup A razbija na neprazne medjusobno disjunktne skupove – na klase ekvivalencije čija je unija skup A. Kako za proizvoljne elemente x, y skupa A vredi:

$x \sim y$ *akko* x, y pripadaju istoj klasi ekvivalencije

to vredi i:

$x = y \in S$ *akko* x, y pripadaju istoj klasi ekvivalencije

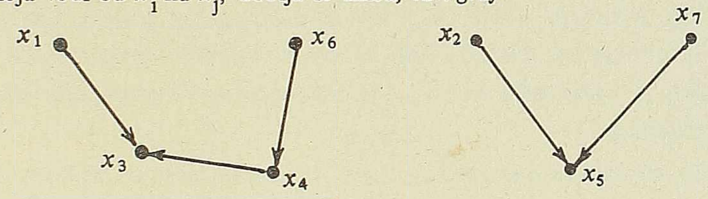
što upravo znači da je S razvrstan skup jednakosti.

21. Skup jednakosti

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = x_5, \quad x_4 = x_3, \quad x_6 = x_4, \quad x_7 = x_5$$

dopuniti sa što manje novih jednakosti tako da se dobije razvrstan skup S (tj. dokazno zatvoren – videti prethodni zadatak).

Rešenje. Prikazujući slova $x_1, x_2, ..., x_7$ grafičkim tačkama a jednakost oblika $x_i = x_j$ *strelicom* koja vodi od x_i ka x_j, dobija se skica, tzv. *graf*



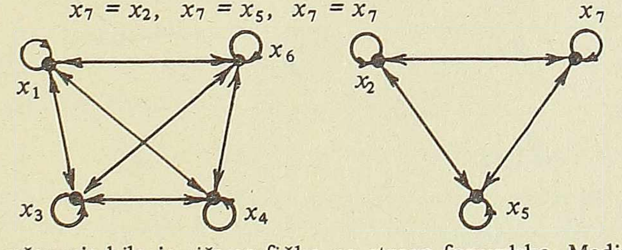
pomoću koje se zadatak rešava neposredno. Kao prvo, nije teško uvideti da S treba da sadrži svaku od jednakosti

$$\begin{array}{llll} x_1 = x_1, & x_1 = x_3, & x_1 = x_4, & x_1 = x_6, \\ x_3 = x_1, & x_3 = x_3, & x_3 = x_4, & x_3 = x_6, \\ x_4 = x_1, & x_4 = x_3, & x_4 = x_4, & x_4 = x_6, \\ x_6 = x_1, & x_6 = x_3, & x_6 = x_4, & x_6 = x_6 \end{array}$$

koje su u vezi sa prvim delom grafa (možemo reći i: medjusobno su povezane). U stvari, pored tih S sadrži jedino još i ove jednakosti (u vezi sa drugim delom grafa)

$$\begin{array}{lll} x_2 = x_2, & x_2 = x_5, & x_2 = x_7, \\ x_5 = x_2, & x_5 = x_5, & x_5 = x_7, \\ x_7 = x_2, & x_7 = x_5, & x_7 = x_7 \end{array}$$

Dopunjeni graf izgleda



Napomena. Prethodno rešavanje bilo je više grafičko no strogo formulsko. Medjutim, ta se „mana" lako otklanja. Naime, elementi skupa S, koji su neke jednakosti oblika $u = v$, mogu se strogo ovako odrediti

$u = v \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Postoji konačno mnogo slova $z_1, ..., z_k$ (neka od uočenih slova $x_1, ..., x_7$) tako da ma koja od jednakosti

$$u = z_1, \quad z_1 = z_2, ..., \quad z_k = v$$

označena sa p = q zadovoljava uslov:

(i) ona je oblika $p = p$ ili,

(ii) $p = q$ je član skupa M ili,

(iii) obratna jednakost, tj. $q = p$ je član skupa M.

U opštem slučaju može se na sličan način dokazati da se ma koji skup M jednakosti može dopuniti sa što manje novih jednakosti tako da se dodje do razvrstanog skupa S.

Napomena 2. U prethodnom zadatku u stvari je opisan postupak kako se od neke date relacije ρ izvesnog skupa A može doći do minimalne relacije ekvivalencije $\rho^{\sim}$ koja tu relaciju sadrži, tj. do tzv. *ekvivalencijskog* ili (R, S, T)– *zatvorenja* za ρ. U slučaju kada je relacija ρ data skupovno –skupom odgovarajućih uredjenih parova, skup $\rho^{\sim}$ biće nadskup od ρ, i to minimalni nadskup kojim je odredjena relacija ekvivalencije.

22. Za relaciju ρ skupa $\{x_1, ..., x_7\}$ –(navedeni su svi slučajevi važenja relacije)

$$x_1 \,\rho\, x_3, \quad x_2 \,\rho\, x_5, \quad x_4 \,\rho\, x_3, \quad x_6 \,\rho\, x_4, \quad x_7 \,\rho\, x_5$$

odrediti ekvivalencijsko zatvorenje $\rho^{\sim}$.

Uputstvo. Zadatak je izomorfan sa prethodnim; dosta je znak = svuda zameniti sa ρ.

23. Datu relaciju ρ skupa A dopuniti do ekvivalencijskog zatvorenja $\rho^{\sim}$

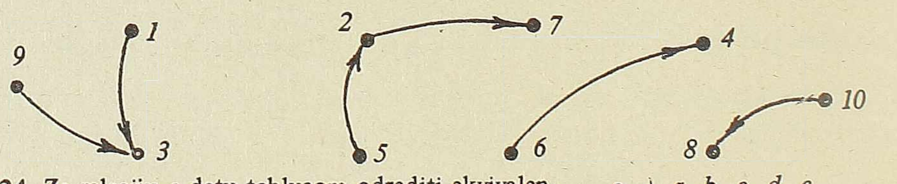
a) A je skup $\{1, 2, 3, ..., 8\}$, ρ je odredjena formulama

$$1 \,\rho\, 4, \quad 1 \,\rho\, 5, \quad 8 \,\rho\, 6, \quad 3 \,\rho\, 2$$

b) A je $\{a, b, c, d, e\}$, ρ je odredjena formulama

$$a \sim c, \quad d \sim e$$

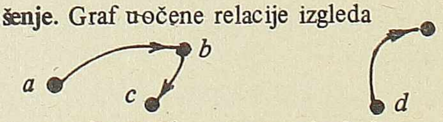
c) A je $\{1, 2, 3, ..., 10\}$, a relacija ρ je odredjena grafom



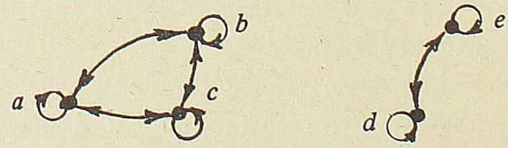
24. Za relaciju ρ datu tablucom odrediti ekvivalencijsko zatvorenje $\rho^{\sim}$.

ρ	a	b	c	d	e
a	⊥	T	⊥	⊥	⊥
b	⊥	⊥	T	⊥	⊥
c	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
d	⊥	⊥	⊥	⊥	T
e	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

Rešenje. Graf uočene relacije izgleda



a njegovo (R, S, T) – upotpunjenje je:



Stoga, u datoj tablici najpre uklanjamo sve ⊥–ove, a potom dodajemo neophodan broj T –ova prema prethodnom grafu. Na kraju još preostala prazna polja popunjavamo $\perp$-ovima. Dakle, postupak izgleda ovako

	a	b	c	d	e
a		$\top$			
b			$\top$		
c					
d					$\top$
e					

	a	b	c	d	e
a	$\top$	$\top$	$\top$		
b	$\top$	$\top$	$\top$		
c	$\top$	$\top$	$\top$		
d				$\top$	$\top$
e				$\top$	$\top$

$\rho^{\sim}$	a	b	c	d	e
a	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
b	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
c	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
d	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
e	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

25. Za relaciju ρ datu tablicom odrediti ekvivalencijsko zatvorenje $\rho^{\sim}$

1)

ρ	a	b	c	d	e	f
a	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
b	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
c	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
d	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
e	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
f	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$

2)

ρ	a	b	c	d	e	f
a	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
b	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
c	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
d	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
e	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
f	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

3)

ρ	a	b	c	d	e	f
a	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
b	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
c	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
d	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
e	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
f	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

26. Odrediti sve modele formula

$$a_1 = a_2,\ a_3 = a_5,\ a_6 = a_4,\ a_4 = a_1,\ a_7 = a_3,\ a_3 \neq a_1$$

ako se a_i tumače kao *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.*

27. Da li postoji model formula

$$a = c,\quad c = d,\quad d = b,\quad a \neq b$$

28. Koliko najmanje različitih objekata (recimo brojeva) je dovoljno da bi se odredio model formula

$$a \neq b,\quad a \neq c,\quad b \neq c,\quad d \neq e$$

29. Neka je M skup izvesnih jednakosti po $a_1, a_2, \ldots$. Dokazati:

Jednakost $a_i = a_j$ je (R, S, T) – posledica skupa M ako i samo ako ta jednakost važi u svim modelima skupa M.

30. Neka je M skup izvesnih jednakosti i različitosti po $a_1, a_2, \ldots$ (tj. formula vida $a_i = a_j$, $a_i \neq a_j$) Dokazati:

Skup M ima model ako i samo ako iz M nije moguće izvesti dve suprotne formule (kao $a_i = a_j$, $a_i \neq a_j$) primenom (R), (S), (T) svojstva jednakosti i još ovih dvaju pravila

$$\text{(S')}\ \frac{x \neq y}{y \neq x}, \qquad \text{(T')}\ \frac{x = y,\ y \neq z}{x \neq z}$$

Uputstvo. U skupu M uočiti podskup koji čine njegove jednakosti, a potom obrazovati odgovarajući razvrstani skup S.

31. **Nastavak prethodnog zadatka.** Dokazati:

Formula $a_i = a_j$, odnosno $a_i \neq x_j$ je (R, S, T, S', T') – posledica skupa M ako i samo ako ta formula važi u svim modelima skupa M.

♦ *Jednakost je saglasna sa svakom matematičkom operacijom.* Recimo, saglasnost sa sabiranjem izražena je formulom:

$$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \quad (x_1, y_1, x_2, y_2 \text{ ma koji brojevi})$$

koja se može iskazati i rečima:

Jednakosti se smeju sabirati.

Opštije, saglasnost sa nekom matematičkom operacijom f dužine n izražava se formulom:

$$(S_f) \quad x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

To svojstvo se najčešće koristi kao pravilo izvodjenja:

$$(S_f) \qquad \frac{x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n}{f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)}$$

Naime ako se u nekom dokazu nalaze formule oblika

$$x_1 = y_1, \; x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n,$$

tada je moguće za nov član dokaza uzeti formulu

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

♦ Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa A i f izvesna njegova operacija dužine n. Kažemo da je $\sim$ *saglasna* sa f (ili da je $\sim$ *kongruencija operacije* f) ukoliko za sve $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ iz skupa A važi uslov

$$x_1 \sim y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \sim y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \sim f(y_1, \ldots, y_n)$$

♦ Jedna od opštih posledica do sada navedenih aksioma jednakosti ((R), (S), (T) i aksiome saglasnosti sa ma kojom operacijom) jeste tzv. *zakon zamene* (za izraze):

U bilo kojem izrazu dozvoljeno je neki njegov deo, podizraz zameniti drugim sa njim jednakim izrazom (videti zadatke 32–37). Recimo, važi jednakost

$$2 + 3 \cdot (4 + 2) = 2 + 3 \cdot 6 \qquad (\text{Jer } 4 + 2 = 6)$$

ZADACI (nastavak)

32. Dokazati implikacije

$$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \Rightarrow (x_1 + x_2) \cdot x_3 = (y_1 + y_2) \cdot y_3$$

$$(x_1, y_1 \text{ ma koji brojevi})$$

Rešenje. Jedan dokaz je niz:

(1) $x_1 = y_1$ (Pretpostavka)

(2) $x_2 = y_2$ (Pretpostavka)

(3) $x_3 = y_3$ (Pretpostavka)

(4) $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ (Iz (1) i (2) primenom pravila

$$\frac{x_1 = y_1, \; x_2 = y_2}{x_1 + x_2 = y_1 + y_2}$$

odnosno sabiranjem jednakosti (1) i (2))

(5) $(x_1 + x_2) \cdot x_3 = (y_1 + y_2) \cdot y_3$ (Iz (4) i (3) primenom pravila

$$\frac{a_1 = b_1,\ a_2 = b_2}{a_1 \cdot a_2 = b_2 \cdot b_2},$$

tj. množenjem jednakosti (4) i (3))

33. Dokazati implikacije

$$x = y \Rightarrow a + x = a + y \wedge x + a = y + a, \qquad x = y \Rightarrow a \cdot x = a \cdot y \wedge x \cdot a = y \cdot a$$

(x, y, a ma koji brojevi)

34. Dokazati implikaciju

$$x = y \Rightarrow a \star x = a \star y \ \wedge\ x \star a = y \star a$$

(x, y, a elementi skupa S, $\star$ operacija tog skupa)

35. Dokazati implikaciju

$$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \Rightarrow (x_1 \star x_2) \star x_3 = (y_1 \star y_2) \star y_3$$

36. Dokazati:

$$A = B \Rightarrow x \star (y \circ A) = x \star (y \circ B)$$

tj. u izrazu $x \star (y \circ A)$ dozvoljeno je podizraz A zameniti jednakim izrazom B.

Rešenje. Dokaz je, recimo:

(1) $x = x$ (Aksioma (R))

(2) $y = y$ (Aksioma (R))

(3) $A = B$ (Pretpostavka)

(4) $y \circ A = y \circ B$ (Iz (2) i (3), prema aksiomi saglasnosti jednakosti sa $\circ$)

(5) $x \star (y \circ A) = x \star (y \circ B)$ (Iz (1) i (4))

Kraj.

Napomena. U tački XIII *Još o jednakosti* izlaže se opšti slučaj zakona zamene.

37. Dokazati formule

$$x = y \Rightarrow x^2 = y^2, \quad x = y \Rightarrow x^3 = y^3, \quad x = y \Rightarrow ax^2 + bx + c = ay^2 + by + c$$

$$x = a \wedge y = b \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \qquad x = a \wedge y = b \Rightarrow 2x + 3y = 2a + 3b$$

(a, b, x, y ma koji brojevi)

38. Neka su formule (o prirodnim brojevima)

$$x + 0 = x, \quad x + y' = (x+y)'$$

$$1 = 0', \quad 2 = 1', \quad 3 = 2', \quad 4 = 3' \ \text{ i sl.}$$

uzete za aksiome. Dokazati teoreme (tj. posledice aksioma)

$$3 + 2 = 5, \quad 3 + 3 = 6, \quad 7 + 11 = 18, \quad 8 + 15 = 23$$

Rešenje. Sve se jednakosti dokazuju slično. Evo jednog dokaza prve jednakosti, kao uglednog primera

$3+2=3+1'$ (Jer, $2=1'$ je aksioma. U stvari koristi se i zakon zamene, ali se to u obrazloženjima prećutkuje)

$=(3+1)'$ (Koristili smo drugu aksiomu: x, y su redom 3, 1)

$=(3+0')'$ (Jer $1=0'$)

$=(3+0)''$ (Prema drugoj aksiomi)

$=3''$ (Jer $3+0=3$, prema prvoj aksiomi)

$=4'$ (Jer $3'=4$; to sledi iz aksiome $4=3'$)

$=5$ (Jer $4'=5$)

Dakle, $3+2=5$, što sledi na osnovu svojstva (T) jednakosti.

Napomena. Na osnovu navedenih aksioma (to je, u stvari, deo tzv. *Peanovih aksioma* za prirodne brojeve) lako se dokazuje ma koja jednakost tablice sabiranja prirodnih brojeva.

39. Produžetak prethodnog zadatka. Aksiome su još i ove formule

$$x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot y' = x \cdot y + x$$

Dokazati jednakosti

$$3 \cdot 2 = 6, \quad 4 \cdot 7 = 28, \quad 6 \cdot 5 = 30$$

Rešenje. Jedan dokaz prve jednakosti glasi

$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1'$ (Jer $2 = 1'$) $= 3 \cdot 1 + 3$ (Druga aksioma) $= 3 \cdot 0' + 3$ (Jer $1 = 0'$)

$= (3 \cdot 0 + 3) + 3$ (Druga aksioma) $= (0 + 3) + 3$ (Jer $3 \cdot 0 = 0$)

$= 3 + 3$ (Jer $0 + 3 = 3$) $= 6$

Dakle: $3 \cdot 2 = 6$, smatrajući da je jednakost $3+3=6$ ranije dokazana (videti prethodni zadatak).

40. Koristeći asocijativni zakon sabiranja kao aksiomu, dokazati jednakost

$$a+(b+(c+d)) = ((a+b)+c)+d,$$

gde su a, b, c, d ma koji prirodni brojevi.

Rešenje. Aksioma[1] je

A(+) $$x+(y+z) = (x+y)+z,$$

te jedan dokaz uočene jednakosti glasi:

$a+(b+(c+d)) = (a+b)+(c+d)$

(Primena aksiome A(+): x, y, z su redom a, b, $c+d$)

$= ((a+b)+c)+d$

(Ponovo primena aksiome A(+), s tim što su sada x, y, z redom $a+b$, c, d)

Kraj (podrazumevajući korišćenje tranzitivnosti jednakosti).

Obično se korišćenje opštih svojstava jednakosti u dokazima ne ističe posebno. U daljem često tako činimo. Naravno takav skraćen jednakosni dokaz može se dopuniti do podrobnog u kome bi bila naznačena i svaka primena neke od aksioma

[1] Asocijativni zakon A(+) može se dokazati na osnovu aksioma $x+0 = x$, $x+y' = (x+y)'$ i aksiome indukcije za prirodne brojeve. O tome u tački XV Prirodni brojevi.

jednakosti.

41. Zamislimo da se u prethodnom dokazu znak + svuda zameni znakom $\cdot$. Da li će taj dokaz preći u dokaz jednakosti.

$$a\cdot (b\cdot (c\cdot d)) = ((a\cdot b)\cdot c)\cdot d) \quad (a,b,c,d \text{ prirodni brojevi})$$

na temelju zakona

A($\cdot$) $\qquad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z)$

42. Neka je $\star$ asocijativna operacija skupa S. Dokazati jednakost

$$((a \star b) \star c) \star d = a \star (b \star (c \star d)),$$

gde su a, b, c, d ma koji članovi skupa S.

43. Neka je $\star$ asocijativna operacija skupa S. Dokazati jednakost

$$a \star ((b \star c \star (d \star e)) = (a \star b) \star (c \star (d \star e))$$

Napomena. U zadacima 42, 43 sreli smo dva slučaja *uopštenog asocijativnog zakona* prema kome:

U slučaju asocijativne operacije, dozvoljeno je kod izraza (sagradjenog pomoću znaka te operacije) zagrade obrisati, te ih zatim po volji ponovo postaviti (naravno tako da se opet dobije izraz). Tako se dolazi do izraza jednakog polaznom.

44. Koristeći asocijativni zakon množenja dokazati:

$$x^2 \cdot x^3 = x^5, \ (x^2)^3 = x^6$$

Uputstvo. $x^3 \overset{\text{def}}{=} (x\cdot x)\cdot x, \quad x^4 \overset{\text{def}}{=} ((x\cdot x)\cdot x)\cdot x$ i sl.

45. Koristeći asocijativni zakon sabiranja, kao i definiciju *aditivnog stepena*

$$2x \overset{\text{def}}{=} x + x, \ 3x \overset{\text{def}}{=} (x+x)+x, \ 4x \overset{\text{def}}{=} ((x+x)+x)+x \ \text{ i sl.}$$

dokazati jednakosti:

$$2x + 3x = 5x, \quad 3(2x) = 6x$$

46. Jednakosti tablice sabiranja prirodnih brojeva (bez nule) kao

$$2 + 2 = 4, \ 53 + 34 = 87 \ \text{ i sl.}$$

mogu se dokazati i na temelju ovih aksioma

A(+) $\qquad (x+y)+z = x+(y+z),$

tj. asocijativnog zakona sabiranja, i još jednakosti

$$2 = 1+1, \quad 3 = 2+1, \ldots, \quad 10 = 9+1, \quad 11 = 10+1, \ldots, 20 = 19+1, \ldots$$

koje se mogu shvatiti kao definicije brojeva $2, 3, 4, \ldots$ (pomoću broja 1 i pojma „za jedan veći”, tj. pojma sledbenik). Uveriti se u to na primerima jednakosti:

$$2+2=4, \ 2+3=5, \quad 8+7=15$$

Uputstvo. $2+3 = 2+(2+1) = (2+2)+1 = (2+(1+1))+1 = ((2+1)+1)+1 = (3+1)+1 = 4+1 = 5.$

Primedba. Ranije smo (zad. 38) tablicu sabiranja prirodnih brojeva dokazivali na temelju drugih polaznica – drugih aksioma. Uopšte, kada se u matematici dokazuje izvesna činjenica, onda dokaz bitno zavisi od činjenica koje su uzete za aksiome. A u izboru aksioma u načelu postoji više mogućnosti.

47. Koristeći komutativni i asocijativni zakon sabiranja realnih brojeva dokazati jednakost

$$a+b+c=c+b+a \qquad (a,b,c\in R).$$

Rešenje. Prethodno podsetimo da se zbirovi dva i više sabiraka definišu rekurzivno:

$$a+b+c \overset{\text{def}}{=} (a+b)+c, \quad a+b+c+d \overset{\text{def}}{=} ((a+b)+c)+d \quad \text{i sl.}$$

Jedan dokaz uočene jednakosti glasi:

$$\begin{aligned} a+b+c &= (a+b)+c && \text{(Definicija)}\\ &= c+(a+b) && \text{(Primena zakona K(+): } x+y=y+x)\\ &= c+(b+a) && \text{(Primena zakona K(+))}\\ &= (c+b)+a && \text{(Primena zakona A(+): } (x+y)+z=x+(y+z), \text{ i to zdesna nalevo)} \end{aligned}$$

Kraj.

48. Operacija ☆ skupa S zadovoljava komutativan i asocijativan zakon:

$$\text{K}(☆)\quad x☆y=y☆x, \qquad \text{A}(☆)\quad (x☆y)☆z=x☆(y☆z)$$

Dokazati jednakost

$$(u☆v)☆w=(w☆v)☆u$$

za sve elemente u, v, w skupa S.

Uputstvo. Na dokaz iz prethodnog zadatka primeniti preslikavanje

$$\begin{pmatrix} a & b & c & + \\ u & v & w & ☆ \end{pmatrix}$$

i uveriti se da se dokaz prevodi u dokaz.

Napomena. U slučaju operacije koja je i komutativna i asocijativna u izrazu (sagradjenom pomoću znaka te operacije) dozvoljeno je zagrade obrisati, članove izraza po volji razmestiti, i potom zagrade po volji (ali ispravno) ponovo postaviti. Tako se dolazi do izraza jednakog polaznom.

49. Pretpostavljajući da je ☆ komutativna i asocijativna operacija skupa S, dokazati jednakost

$$(a☆b)☆(c☆d)=(b☆c)☆(d☆a) \qquad (a,b,c,d\in S)$$

50. Koristeći komutativan i asocijativan zakon sabiranja kao i definicije:

$$2x \overset{\text{def}}{=} x+x, \quad 3x \overset{\text{def}}{=} (x+x)+x, \quad 4x \overset{\text{def}}{=} ((x+x)+x)+x \quad \text{i sl.}$$

dokazati jednakost

$$(a+2b)+(2a+b)=3(a+b) \qquad (a,b \text{ ma koji brojevi})$$

51. Uočimo preslikavanje

$$\begin{pmatrix} a & b & + \\ u & v & \cdot \end{pmatrix}$$

Koje zakone za je dovoljno uzeti za aksiome da bi se dokaz jednakosti iz prethodnog zadatka preslikao u dokaz za:

$$(u \cdot v^2) \cdot (u^2 \cdot v) = (u \cdot v)^3 \qquad (u, v \text{ proizvoljni brojevi})$$

52. Na temelju aksioma (o realnim brojevima)

$$x+y = y+x \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

dokazati formule (o realnim brojevima)

a) $x \cdot (y+z+u) = x \cdot y + x \cdot z + x \cdot u$

b) $(x+y) \cdot (z+u+v) = x \cdot z + x \cdot u + x \cdot v + y \cdot z + y \cdot u + y \cdot v$

c) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, d) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$

Primedba. Formula b) izražava jedan slučaj množenja dva zbira.

53. Da li je poslednja formula medju aksiomama prethodnog zadatka posledica ostalih?

54. **Produžetak zadatka 46.** Uz aksiome iz tog zadatka uočimo i ove

$$x \cdot 1 = x, \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Dokazati jednakosti kao

$$2 \cdot 3 = 6, \quad 3 \cdot 4 = 12$$

tj. razne jednakosti tablice množenja prirodnih brojeva (bez nule).

Uputstvo. Prethodno se mogu dokazati jednakosti kao

$$2 = 1+1, \quad 3 = 1+1+1, \quad 4 = 1+1+1+1 \quad \text{i sl.}$$

Tada, recimo: $2 \cdot 3 = 2 \cdot (1+1+1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2+2+2$ itd.

55. Osnovna algebarska svojstva celih brojeva opisuju se formulama

$$x+y = y+x \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x+0 = x \qquad x \cdot 1 = x$$

$$x+(-x) = 0$$

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Polazeći od tih formula kao aksima dokazati teoreme

(a) $-(-x) = x$, (b) $-(x+y) = (-x) + (-y)$, (c) $x \cdot 0 = 0$,

(d) $(-x) \cdot y = -(xy)$, (e) $x \cdot (-y) = -(xy)$, (f) $(-x) \cdot (-y) = xy$

Uputstvo.

(a) $-(-x) = -(-x) + 0$ (Aksioma $x+0 = x$; umesto x stoji $-(-x)$)

$= -(-x) + (-x) + x$ (Jer $0 = -x+x$. U stvari $x+(-x)=0$, ali po pravilu (S) sledi $0 = -x+x$. Zagrade nisu pisane, jer usled asocijativnosti operacije +, mogu biti naknadno po volji stavljene.)

$= (-(-x) + (-x)) + x$

$= 0 + x$ (Jer $-A+A = 0$; A je $-x$)

$= x$

(b) $-(x+y) = -(x+y) + 0$

$= -(x+y) + x+y + (-y) + (-x)$ (Jer $x+y + (-y) + (-x) = x+0+(-x)=0$)

$= 0 + (-y) + (-x)$ (Jer $-A+A = 0$; A je $x+y$)

$= (-x) + (-y)$

(c) $x \cdot 0 = x \cdot 0+0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = x(0+0) + (-(x \cdot 0)) = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = 0$

(d) $(-x) \cdot y = (-x) \cdot y + 0 = (-x) \cdot y + xy + (-(xy)) = (-x+x)y + (-(xy))$
$= 0 \cdot y + (-(xy)) = 0 + (-(xy)) = -(xy)$

56. Uz aksiome prethodnog zadatka uvodimo i definiciju: $x-y \overset{\text{def}}{=} x + (-y)$. Dokazati formule

(a) $y + (x-y) = x$, (b) $y+z = x \Rightarrow z = x-y$, (c) $x \cdot (y-z) = xy - xz$,
(d) $(x-y)(z-u) = xz - xu - yz + yu$, (e) $x^2 - y^2 = (x-y) \cdot (x+y)$.

57. Polazeći od aksioma zadatka 55 i definicije $x-y \overset{\text{def}}{=} x + (-y)$ dokazati jednakosti

$$2 + (-2) = 0, \quad 3 + (-2) = 1, \quad 2 + (-3) = -1, \quad (-2)+(-3) = -5,$$
$$2 - 2 = 0, \quad 2-(-1) = 3, \quad (-1) - 3 = -4, \quad (-1) - (-3) = 2,$$
$$(-3) - (-1) = -2, \quad (-2) \cdot 3 = -6, \quad (-2) \cdot (-3) = 6,$$

uz korišćenje tablice sabiranja i množenja prirodnih brojeva (za koje je, inače, dovoljno kao polazne pretpostavke uzeti još i jednakosti: $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4=3+1$, ... – zadatak 46 i 54).

Napomena. Primećuje se da svojstva istaknuta u zadatku 55 bitno utiču na *algebru celih brojeva* – ona je, u stvari, odredjuju.

58. Produžetak zadatka 55. Uz aksiome tog zadatka, kao aksiomu uzimamo i:

$$x \neq 0 \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

Usvajajući još i definicije

$$x - y \overset{\text{def}}{=} x + (-y), \quad \frac{x}{y} \overset{\text{def}}{=} x \cdot \frac{1}{y} \quad \text{(Ukoliko } y \neq 0\text{)}$$

dokazati formule

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \qquad \text{(Ako } b,d \neq 0\text{)}$$

$ax = ay \iff x = y$ (Ako $a \neq 0$)

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ (Ako $b, d \neq 0$)

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ (Ako $b, d \neq 0$, odnosno $b, c, d \neq 0$)

Uputstvo. Koristiti se i činjenica

$$xy \neq 0 \iff x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

koju dokazujemo u tački IX *Razni primeri,* zadatak 21.

Jedan dokaz prve formule je, recimo:

$\Rightarrow$– *deo*. Neka $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Množenjem sa bd dobijamo $bd \cdot \frac{a}{b} = bd \cdot \frac{c}{d}$, odakle $ad=bc$, jer $b \cdot \frac{a}{b} = a, d \cdot \frac{c}{d} = a$, budući da su b, d različiti od 0.

$\Leftarrow$– *deo*. Polazi se od $ad = bc$ $b,d \neq 0$ pa se obavlja množenje sa $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}$ itd.

Uslovna ekvivalencija

$$ax = ay \iff x = y \quad (\text{Ako } a \neq 0)$$

zove se *zakon skraćivanja*. Njegova $\Leftarrow$– *polovina* je posledica saglasnosti jednakosti sa množenjem. Radi dokaza $\Rightarrow$– *polovine* podjimo od pretpostavki

$$ax = ay, \quad a \neq 0$$

Množenjem jednakosti $ax = ay$ sa $\frac{1}{a}$ dobija se $\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot ay$, odakle $x=y$, jer iz $a \neq 0$ sledi $\frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Preostale formule se lako dokazuju pomoću zakona skraćivanja. Tako, radi dokaza treće formule uvodimo najpre oznake

$$L = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}, \quad D = \frac{ad + bc}{bd}$$

Lako se dokazuje $bdL = bdD$ (pri tom se koristi i činjenica da je $bd \neq 0$), odakle skraćivanjem sa bd sledi $L=D$. Slično se mogu dokazati i ostale uslovne jednakosti.

Napomena. Aksiome (tzv. *aksiome polja*):

$$\begin{array}{ll} x + y = y + x & x \cdot y = y \cdot x \\ (x + y) + z = x + (y + z) & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ x + 0 = x & x \cdot 1 = x \\ x + (-x) = 0 & x \neq 0 \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = 1 \end{array}$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$1 \neq 0$$

uz definicije

$$x - y \stackrel{\text{def}}{=} x + (-y), \quad \frac{x}{y} \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot \frac{1}{y} \quad (\text{Ako } y \neq 0)$$

$$2 \stackrel{\text{def}}{=} 1+1, \quad 3 \stackrel{\text{def}}{=} 2+1, \quad 4 \stackrel{\text{def}}{=} 3+1, \ldots$$

prema dosadašnjem razmatranju odredjuju *algebru razlomaka* tj. *racionalnih brojeva.*

Medjutim, u radu sa brojevima koriste se i činjenice

$$2 \neq 0, \quad 3 \neq 0, \quad 4 \neq 0, \ldots..$$

bez kojih, inače, ne bismo imali razne osnovne jednakosti kao: $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ i sl. U vezi sa navedenim različitostima obično se ovako postupa: Ili se one uzmu za aksiome ili se navedenim aksiomama polja pridruže *aksiome uredjenosti* polja iz kojih, onda, slede sve navedene različitosti (videti tačku IX *Razni primeri,* zadatak 54).

59. Produžetak prethodnog zadatka. Dokazati teoremu

$$ax = b \Longleftrightarrow x = \frac{b}{a} \quad (\text{Ako } a \neq 0)$$

Napomena. Znači uz uslov $a \neq 0$, jednačina $ax = b$ ima jedinstveno rešenje po x.

60. Na kakve načine se može dokazati jednakost (o realnim brojevima)

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = (a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

koristeći se njihovim osnovnim algebarskim svojstvima navedenim u zadatku 55.

Uputstvo. Uvedimo oznake:

$$L = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2, \qquad D = (a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

Posle svodjenja lako se zaključuje

$$L = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab+2bc+2ac, \quad D = 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ac$$

Pri tom smo koristili i formulu $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ koju nije teško dokazati. Zaključak je da su L i D jednaki istom izrazu pa, po svojstvima (S) i (T) jednakosti sledi $L = D$.

Tako je opisan *jedan način:* Dokaz da su L i D jednaki istom izrazu.

Drugi način je poći od L i postupno ga preobratiti u D, *treći* preobratiti D u L. *Četvrti* način se sastoji u tome da se dokaže jednakost $L-D = 0$, jer $L=D \Longleftrightarrow L - D = 0$.

61. Takozvana *kongruencija po modulu 2* (oznaka $\equiv_2$) celih brojeva uvodi se ovako

$$x \equiv_2 y \ \text{ akko } x,y \text{ pri deobi sa 2 imaju isti ostatak}$$

Dokazati da ta relacija ima naredna svojstva:

(i) Ona je relacija ekvivalencije skupa Z,

(ii) Njome se celi brojevi razvrstavaju na dve klase ekvivalencije: skup parnih $2Z$ odnosno neparnih $2Z+1$ celih brojeva. Drugim rečima vredi ekvivalencija

$$x \in Z \Longleftrightarrow x \in 2Z \vee x \in 2Z+1$$

(iii) Saglasna je sa osnovnim operacijama skupa Z, tj.

$$x \equiv_2 y \wedge u \equiv_2 v \Rightarrow x+u \equiv_2 y+v \wedge x \cdot u \equiv_2 y \cdot v \wedge (-x) \equiv_2 (-y)$$

Uputstvo. Koristiti jednakost $a = bq + r$ izvedenu u tački XV, zadatak 26

62. Relacija $\equiv_m$, gde m može biti $1, 2, 3, \ldots$, uvodi se definicijom:

$$x \equiv_m y \text{ akko } x,y \text{ pri deobi sa } m \text{ imaju isti ostatak}$$

Dokazati:

– da je $\equiv_m$ relacija ekvivalencije skupa Z,

– da se njome celi brojevi razvrstavaju na m klasa,

– da je $\equiv_m$ saglasna sa osnovnim operacijama skupa Z.

63. Neka je A skup formula

$$a_1 \sim a_1,\ a_1 \sim a_2$$
$$a_2 \sim a_1,\ a_2 \sim a_2$$
$$a_3 \sim a_3$$

, a ☆ operacija

☆	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_2	a_1	a_3
a_3	a_3	a_3	a_1

Dokazati da je A dokazno zatvoren u odnosu na pravila (R), (S), (T), ($S_☆$), odnosno da se primenom tih pravila iz skupa A ne može izvesti nijedna nova formula oblika $a_i \sim a_j$.

Uputstvo. Prema zadacima 15, 16 skup A je dokazno zatvoren u odnosu na primenu pravila (R), (S), (T). Za dokaz zatvorenosti u odnosu na primenu ($S_☆$) dokazati najpre da je to pravilo ekvivalentno sa ova dva

$$(S'_☆)\quad \frac{x \sim y}{z ☆ x \sim z ☆ y} \qquad\qquad (S''_☆)\quad \frac{x \sim y}{x ☆ z \sim y ☆ z}$$

Tada se zadatak svodi na proveravanje da je svaki od skupova

$$a_1 ☆ A,\ A ☆ a_1,\ a_2 ☆ A,\ A ☆ a_2,\ a_3 ☆ A,\ A ☆ a_3$$

podskup od A. Pri tome

$$a_i ☆ A \overset{\text{def}}{=} \{a_i ☆ x \sim a_i ☆ y \mid x \sim y \in A\},$$

tj. $a_i ☆ A$ se dobija „množenjem" svih formula iz A sa leve strane elementom a_i. Slično se uvodi $A ☆ a_i$.

Napomena. Zatvorenost skupa A u odnosu na pravila (R), (S), (T), ($S_☆$), u stvari znači da je relacija $\sim$ prikazana datom tablicom kongruencija i operacije ☆.

$\sim$	a_1	a_2	a_3
a_1	⊤	⊤	⊥
a_2	⊤	⊤	⊥
a_3	⊥	⊥	⊤

64. Neka je A_0 skup koji se sastoji od formule $a_1 \rho a_2$, a $\star$ operacija data tablicom. Odrediti sve (R, S, T, $S_\star$) – posledice skupa A_0 tj. sve formule oblika $a_i \rho a_j$ koje slede iz A_0 primenom pravila (R), (S), (T), ($S_\star$).

$\star$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_2	a_2	a_3	a_1	a_4
a_3	a_3	a_1	a_2	a_4
a_4	a_4	a_4	a_4	a_1

Primedba. Postavljeni zadatak je, u stvari, zadatak odredjivanja minimalne kongruencije operacije $\star$ koja sadrži datu relaciju ρ (odredjenu formulom $a_1 \rho a_2$). To se odredjivanje može izvesti po koracima:

Najpre, polazeći od skupa A_0 obavljamo njegovo (R, S, T) – upotpunjenje kao u zadatku 20. Tako dolazimo do skupa A_1. Zatim A_1 upotpunjavamo primenom pravila ($S_\star$), odnosno dvaju pravila ($S'_\star$), ($S''_\star$). Tačnije, skupu A_1 pridodajemo elemente skupova $a_1 \star A_1$, $A_1 \star a_1$, $a_2 \star A_1$, $A_1 \star a_2$ i sl. Dobijeni skup označimo sa A_2. Ponovo primenjujemo pravila (R), (S), (T), i dolazimo do A_3, i tako naizmenično sve dok ne dodjemo[1] do skupa koji je dokazno zatvoren u odnosu na primenu pravila (R), (S), (T), ($S'_\star$), ($S''_\star$).

Rešenje zadatka. Skup A_1, tj. (R, S, T) – upotpunjenje za A_0 je

$$a_1 \rho a_1,\ a_1 \rho a_2$$
$$a_2 \rho a_1,\ a_2 \rho a_2$$
$$a_3 \rho a_3$$
$$a_4 \rho a_4$$

Množenjem sa a_1 sleva dolazimo do skupa

$$a_1 \star a_1 \rho a_1 \star a_1,\ a_1 \star a_1 \rho a_1 \star a_2$$
$$a_1 \star a_2 \rho a_1 \star a_1,\ a_1 \star a_2 \rho a_1 \star a_2$$
$$a_1 \star a_3 \rho a_1 \star a_3$$
$$a_1 \star a_4 \rho a_1 \star a_4$$

Korišćenjem tablice operacije $\star$ neposredno se zaključuje da je prethodni skup jednak A_1. Slično $A_1 \star a_1 = A_1$. Znači, množenjem sa a_1 ne dobija se nijedna nova formula. Medjutim, množenje sa a_2 prouzrokuje dve nove formule. Naime, skupovi $a_2 \star A_1$, $A_1 \star a_2$ su medjusobno jednaki i članovi su im formule

$$a_2 \rho a_2,\ a_2 \rho a_3$$
$$a_3 \rho a_2,\ a_3 \rho a_3$$
$$a_1 \rho a_1$$
$$a_4 \rho a_4$$

Nove formule su: $a_2 \rho a_3$, $a_3 \rho a_2$. Množenjem sa a_3 dolazi se do još dveju formula: $a_3 \rho a_1$, $a_1 \rho a_3$ kojima treba upotpuniti A_1. Time je spisak novih formula is-

[1] Opisani postupak može u opštem slučaju biti beskonačan.

crpljen, jer $a_4 \star A_1 = A_1 \star a_4 = \{a_1\ \rho\ a_1,\ a_4\ \rho\ a_4\}$.

Prema tome, skup A_2 je

$$\begin{array}{llll} a_1\ \rho\ a_1, & a_1\ \rho\ a_2, & a_1\ \rho\ a_3 & \\ a_2\ \rho\ a_1, & a_2\ \rho\ a_2, & a_2\ \rho\ a_3 & \\ a_3\ \rho\ a_1, & a_3\ \rho\ a_2, & a_3\ \rho\ a_3 & \\ & & & a_4\ \rho\ a_4 \end{array}$$

Taj skup je razvrstan – dakle zatvoren u odnosu na primenu pravila (R), (S), (T). Izmnažanjem sleva i zdesna redom elementima a_1, a_2, a_3, a_4 nije teško proveriti da je on zatvoren i u odnosu na $(S_\star)$. Znači traženi skup svih $(R, S, T, S_\star)$ – posledica je upravo A_2, a tražena minimalna kongruencija operacije $\star$ koja sadrži relaciju ρ (odredjenu formulom $a_1\ \rho\ a_2$) data je tablicom:

$\sim$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
a_2	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
a_3	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
a_4	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Primetimo još da je saglasnost relacije $\sim$ sa operacijom $\star$ moguće uočiti i na tablici te operacije, koja je, slično kao i tablica relacije $\sim$, razložena na blokove odredjene klasama ekvivalencije $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_4\}$. Pri tome je svaki od istaknutih blokova popunjen elementima iste klase. Slično vredi uopšte za tablicu neke operacije koja ima izvesnu kongruenciju.

$\star$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4
a_2	a_2	a_3	a_1	a_4
a_3	a_3	a_1	a_2	a_4
a_4	a_4	a_4	a_4	a_1

65. Dokazati da je relacija $\sim$ kongruencija operacije $\star$

$\sim$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
a_2	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
a_3	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
a_4	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
a_5	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
a_6	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
a_7	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

$\star$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	a_1	a_4	a_1	a_2	a_2	a_5	a_4
a_2	a_2	a_2	a_6	a_1	a_3	a_6	a_7
a_3	a_1	a_5	a_1	a_6	a_6	a_4	a_5
a_4	a_4	a_2	a_4	a_1	a_3	a_6	a_7
a_5	a_4	a_2	a_4	a_3	a_1	a_6	a_7
a_6	a_6	a_6	a_2	a_3	a_1	a_7	a_7
a_7	a_7	a_7	a_7	a_1	a_3	a_2	a_6

Uputstvo. Neposredno se proverava da je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa $\{a_1, \ldots a_7\}$ sa klasama ekvivalencije $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_6, a_7\}$, $\{a_4, a_5\}$. Za dokaz saglasnosti sa operacijom $\star$ dosta je tablicu operacije preznačiti tako da u prvom stupcu i prvoj vrsti dodju jedan do drugog elementi iste klase.

66. Date su relacija ρ i operacija $\star$ skupa $\{a, b, c, d, e, f\}$:

$a\rho c,\ \ c\rho c,\ \ e\rho f,\ \ f\rho f$

(navedeni su svi slučajevi važenja relacije)

☆	a	b	c	d	e	f
a	e	b	e	d	a	c
b	a	e	c	e	d	b
c	e	d	e	b	a	c
d	c	e	a	e	d	b
e	e	a	e	c	e	f
f	f	c	f	a	f	e

Odrediti minimalnu kongruenciju operacije ☆ koja sadrži relaciju ρ.

67. Data je operacija $+_6$ skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i relacija ρ oredjena formulom $2\rho 0$. Odrediti minimalnu kongruenciju operacije $+_6$ koja sadrži relaciju ρ.

68. Odrediti minimalnu kongruenciju operacije + celih brojeva koja sadrži relaciju ρ odredjenu formulom $2\rho 0$.

Odgovor. Tražena relacija je $\equiv_2$ (kongruencija po modulu 2).

♦ Jednakost je *saglasna* sa relacijom $<$ (realnih brojeva), što znači tačna je formula

$$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$$

Uopšte, za aksiomu se uzima da *je jednakost saglasna sa ma kojom relacijom* ρ dužine n, tj. tačna je formula

$$(S_\rho) \qquad x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge \rho(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \rho(y_1, \ldots, y_n)$$

(Rečima: ako su $x_1, \ldots, x_n$ redom jednaki $y_1, \ldots, y_n$ i ako su $x_1, \ldots, x_n$ u relaciji ρ, onda su i $y_1, \ldots, y_n$ u relaciji ρ).

♦ Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa A i ρ njegova relacija dužine n, kažemo da je $\sim$ *saglasna* sa ρ (ili da je $\sim$ *kongruencija* relacije ρ) ukoliko je za svaki $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ iz A ispunjen uslov:

$$x_1 \sim y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \sim y_n \wedge \rho(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \rho(y_1, \ldots, y_n)$$

ZADACI (nastavak).

69. Dokazati implikacije

$$x = y \wedge x < z \Rightarrow y < z, \quad x = y \wedge z < x \Rightarrow z < y,$$

gde su x,y,z ma koji realni brojevi.

70. Dokazati implikacije

$$x = y \wedge x\,\rho\,z \Rightarrow y\,\rho\,z, \quad x = y \wedge z\,\rho\,x \Rightarrow z\,\rho\,y,$$

gde su x, y, z elementi skupa S a ρ binarna relacija tog skupa.

71. Jednakost je saglasna sa svakom relacijom pa i sa samom sobom, odnosno tačna je formula

$$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Da li je ta formula posledica (R), (S), (T) svojstava jednakosti ?

Uputstvo. Videti zadatak 6.

72. Neka je A skup formula

$a_1 \sim a_1,\ a_1 \sim a_2,\ a_1 \sim a_3$

$a_2 \sim a_1,\ a_2 \sim a_2,\ a_2 \sim a_3$

$a_3 \sim a_1,\ a_3 \sim a_2,\ a_3 \sim a_3$

$a_4 \sim a_4,\ a_4 \sim a_5$

$a_5 \sim a_4,\ a_5 \sim a_5$

ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
a_2	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
a_3	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
a_4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
a_5	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

Dokazati da je A zatvoren u odnosu na primenu pravila (R), (S), (T), kao i pravila saglasnosti relacije $\sim$ sa ρ :

$$(S_\sim) \qquad \frac{x \sim y,\ u \sim v,\ x \rho u}{y \rho v}$$

Drugim rečima, dokazati da je relacija $\sim$ odredjena skupom formula A kongruencija relacije ρ.

Napomena. Primećuje se da je tablica relacije ρ razložena na blokove odredjene klasama ekvivalencije $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_4, a_5\}$. Takvo razlaganje je uopšte karakteristično za tablicu relacije koja ima neku kongruenciju.

73. Dokazati da je $\sim$ kongruencija relacije ρ

ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
a_2	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
a_3	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
a_4	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
a_5	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
a_6	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

$\sim$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
a_2	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
a_3	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
a_4	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
a_5	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
a_6	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

74. Dokazati da je kongruencija po modulu 2 prirodnih brojeva kongruencija relacije ρ date tablicom:

ρ	0	1	2	3	4 ....
0	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$....
1	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$ ...
2	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$ ...
3	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$ ...
4	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$ ...
$\vdots$	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

(Parne vrste su popunjene samim $\top$ -ovima a u neparnim sa naizmenično redjaju $\perp$ i $\top$).

VII ISKAZNE FORMULE. TAUTOLOGIJE

♦ Radi istraživanja osnovnih logičkih operacija uvode se *iskazne formule.* To su zapisi kakvi su, na primer:

$$p, p\vee q,\ p\Rightarrow q, (\neg p\vee q)\Rightarrow r,\ \neg(p\wedge q)\iff\neg p$$

u kojima pored znakova osnovnih logičkih operacija učestvuju i znaci p,q,r – tzv. *iskazna slova.* Iskazne formule su, u stvari, izrazi obrazovani od iskaznih slova (kao promenljivih)[1] i znakova osnovnih logičkih operacija.

♦ Neka su iskazna slova, recimo

$$p,q,r,s,p_1,q_1,r_1,s_1,p_2,q_2,r_2,s_2,\ \ldots$$

Tada, stroga definicija iskazne formule glasi:

(i) *Iskazna slova su iskazne formule.*

(ii) *Ako su A, B iskazne formule, onda su iskazne formule i ove reči*

$$\neg A, (A\wedge B), (A\vee B), (A\Rightarrow B), (A\iff B)$$

(iii) *Iskazne formule se dobijaju jedino primenom konačno puta pravila* (i) i (ii).

♦ U definiciji iskazne formule učestvuju i pomoćni znaci[2] zagrada), (. Radi uštede u pisanju, obično se usvajaju razna pravila o izostavljanju zagrada. Tako, recimo, umesto $(p\wedge q), ((p\vee q)\wedge\neg r), ((p\Rightarrow q)\Rightarrow r)$ pišemo redom: $p\wedge q, (p\vee q)\wedge\neg r, (p\Rightarrow q)\Rightarrow r$. Za druga pravila o izostavljanju zagrada navodimo ugledne primere:

Formula	Zapis:
$((p\wedge q)\wedge r), (((p\wedge q)\wedge r)\wedge s)$	$p\wedge q\wedge r,\ p\wedge q\wedge r\wedge s$
$((p\vee q)\vee r), (((p\vee q)\vee r)\vee s)$	$p\vee q\vee r,\ p\vee q\vee r\vee s$
$((p\wedge q)\Rightarrow r), ((p\vee q)\Rightarrow r)$	$p\wedge q\Rightarrow r,\ p\vee q\Rightarrow r$
$(p\Rightarrow(q\wedge r)), (p\Rightarrow(q\vee r))$	$p\Rightarrow q\wedge r,\ p\Rightarrow q\vee r$
$((p\wedge q)\iff r), ((p\vee q)\iff r)$	$p\wedge q\iff r,\ p\vee q\iff r$

♦ *Pri glavnom tumačenju (interpretaciji) iskaznih formula,* iskazna slova se tumače kao rečenice, a znaci $\wedge, \vee, \Rightarrow, \iff, \neg$ kao odgovarajuće rečenične operacije. Pri to-

---

[1] Pri tome iskazna slova mogu biti bilo koji unapred izabrani znaci. Jedino se moraju, razlikovati od znakova logičkih operacija: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\iff$, $\neg$, od pomoćnih znakova zagrada), (, kao i od onih znakova koji su već usvojeni kao oznake izvesnih konstanata (recimo $\top$, $\bot$).

[2] Iskazne formule se, slično kao i bilo koji drugi izrazi mogu definisati i bez zagrada. Jedna mogućnost je da se deo (ii) definicije zameni sa:

Ako su A, B iskazne formule, onda su iskazne formule i reči $\neg A$, $\wedge AB$, $\vee AB$, $\Rightarrow AB$, $\iff AB$.

me, svakoj iskaznoj formuli odgovara takodje izvesna rečenica.

♦ Za iskaznu formulu F definiše se njena *vrednost* $\tau(F)$ koja može biti $\top$ ili $\bot$. Vrednost formule se, za svaku unapred pretpostavljenu vrednost njenih iskaznih slova odredjuje prema tablicama $\{\top,\bot\}$–algebre. Recimo, ako slova p, q, imaju redom vrednosti $\top$, $\bot$, onda formula $p \Rightarrow (q \wedge \neg p)$ ima vrednost $\top \Rightarrow (\bot \wedge \neg\top)$ odnosno $\bot$. Dakle: $\tau(p \Rightarrow (q \wedge \neg p)) = \bot$; ukoliko $\tau p = \top$, $\tau q = \bot$.

♦ *Vrednost formule* moguće je i strogo definisati, recimo, ovako:

(i) *Vrednost iskaznog slova jeste* $\top$ *ili* $\bot$;

(ii) *Ako su poznate vrednosti* $\tau(A)$, $\tau(B)$ *formula* A, B *tada se za vrednosti formula* $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Longleftrightarrow B$, $\neg A$ *usvajaju definicije* :

$$\tau(A \wedge B) = \tau A \wedge \tau B, \qquad \tau(A \Rightarrow B) = \tau A \Rightarrow \tau B, \qquad \tau(A \vee B) = \tau A \vee \tau B,$$

$$\tau(A \Longleftrightarrow B) = \tau A \Longleftrightarrow \tau B, \quad \tau(\neg A) = \neg \tau A$$

Sa desne strane od znaka jednakosti su operacije $\{\top, \bot\}$–algebre koje su, radi jednostavnijeg pisanja, označene na isti način kao i odgovarajuće logičke operacije.

♦ Ako je formula obrazovana od n slova, onda za vrednosti tih slova postoji 2^n mogućnosti, i za svaku od njih odredjena je vrednost formule. Sve te mogućnosti se mogu prikazati tzv. *istinitosnom tablicom* formule koja se, obično obrazuje postupno (prema drvetu formule). Na primer, ako je F formula $p \Rightarrow (q \wedge \neg p)$, onda njoj odgovara ova tablica

τp	τq	$\tau(\neg p)$	$\tau(q \wedge \neg p)$	τF
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

♦ *Tautologija* je iskazna formula koja za sve vrednosti svojih iskaznih slova ima vrednost $\top$. Formula koja uvek ima vrednost $\bot$ naziva se *kontradikcija*. Na primer, tautologija je $p \vee \neg p$, dok je $p \wedge \neg p$, kontradikcija.

♦ Tautologijama se izražavaju razni zakoni našeg mišljenja, jer pri glavnom tumačenju (zamenom iskaznih slova ma kojim rečenicama, istinitim ili neistinitim) tautologiji uvek odgovara istinita rečenica.

Umesto *formula* F *jeste tautologija* kraće pišemo: $\models F$.

♦ Iz praktičnih razloga i znake $\top$, $\bot$ smatramo iskaznim formulama.

Dalje, uzimamo da je $\top$ tautologija, a $\perp$ kontradikcija[1].

♦ Iz tautologije $p \vee \neg p$ *zamenom (supstitucijom)* slova p proizvoljnom formulom A dobija se formula $A \vee \neg A$ koja je takodje tautologija[2]. Slično važi uopšte (zakon zamene):

Ako je $F(p_1, ..., p_n)$ tautologija obrazovana od iskaznih slova $p_1, ..., p_n$, onda je tautologija i formula $F(A_1, ..., A_n)$ dobijena zamenom slova $p_1, ..., p_n$ proizvoljnim iskaznim formulama $A_1, ..., A_n$.

♦ Neke važnije tautologije:

$p \Rightarrow p$	(Zakon refleksivnosti za implikaciju)
$p \vee \neg p$	(Zakon isključenja trećeg)
$\neg(p \wedge \neg p)$	(Zakon neprotivurečnosti)
$\neg\neg p \Rightarrow p$	(Zakon dvojne negacije)
$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	(Zakon negacije premise)
$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	(Zakon istinitosti zaključka)
$(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	(Zakon kontrapozicije)
$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	(Zakon tranzitivnosti za implikaciju)
$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$	(Pirsov zakon)
$p \wedge p \Longleftrightarrow p,\ p \vee p \Longleftrightarrow p$	(Zakoni idempotencije za $\wedge$ i $\vee$)
$p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p,\ p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$	(Zakoni komutativnosti za $\wedge$ i $\vee$)
$(p \wedge q) \wedge r \Longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r),\ (p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$	(Zakoni asocijativnosti za $\wedge$, $\vee$)
$(p \vee q) \wedge p \Longleftrightarrow p,\ (p \wedge q) \vee p \Longleftrightarrow p$	(Zakon apsorpcije $\wedge$ prema $\vee$, odnosno $\vee$ prema $\wedge$)
$(p \vee q) \wedge r \Longleftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	(Desni distributivni zakon $\wedge$ prema
$(p \wedge q) \vee r \Longleftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$	$\vee$, odnosno $\vee$ prema $\wedge$)
$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q,\ \neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	(De Morganovi zakoni)
$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$	(Zakon saglasnosti implikacije sa $\wedge$)
$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee s)$	(Zakon saglasnosti implikacije sa $\vee$)
$p \Longleftrightarrow p$	(Zakon refleksivnosti za ekvivalenciju)
$(p \Longleftrightarrow q) \Rightarrow (q \Longleftrightarrow p)$	(Zakon simetrije za ekvivalenciju)
$(p \Longleftrightarrow q) \wedge (q \Longleftrightarrow r) \Rightarrow (p \Longleftrightarrow r)$	(Zakon tranzitivnosti za ekvivalenciju)
$(p \Longleftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Longleftrightarrow \neg q)$	(Zakon saglasnosti ekvivalencije sa $\neg$)
$(p \Longleftrightarrow q) \wedge (r \Longleftrightarrow s) \Rightarrow (p \star r \Longleftrightarrow q \star s)$ ($\star$ je $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$)	(Zakoni saglasnosti ekvivalencije sa $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$)

---

[1] Može se uzeti da je $\top$, recimo, zamena za formulu $p \vee \neg p$, a $\perp$ zamena za $p \wedge \neg p$.

[2] To se može ovako dokazati: Neka iskazna slova formule A dobijaju neku vrednost. Tada, za vrednost formule A mogu nastupiti dva slučaja: Prvi: $\tau A = \top$, Drugi: $\tau A = \perp$. U oba slučaja je vrednost formule $A \vee \neg A$ jednaka $\top$ (jer: $\top \vee \neg\top = \top \vee \perp = \top$, $\perp \vee \neg\perp = \perp \vee \top = \top$.

$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (Tautologija modus ponensa)

$(p \Rightarrow q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ (Zakon distributivnosti $\Rightarrow$ prema $\wedge$)

$(p \vee q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ (Tautologija razlikovanja slučajeva)

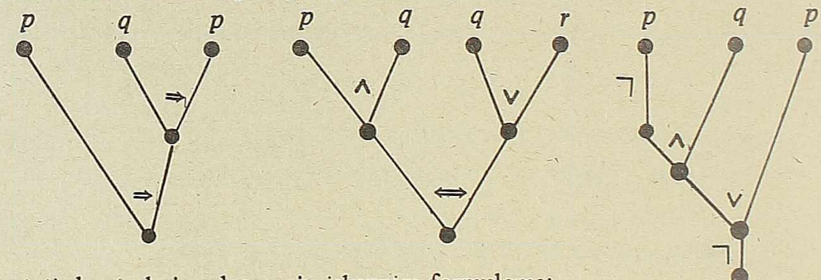
$(p \Rightarrow q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q \Rightarrow r)$ (Tautologija izbora slučaja zaključka)

$(p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q)$ (Tautologija svodjenja na protivurečnost za $\Rightarrow$)

$(\neg p \Rightarrow r \wedge \neg r) \Rightarrow p$ (Tautologija svodjenja na protivurečnost)

ZADACI

1. Odrediti iskazne formule koje odgovaraju navedenim drvetima:



2. Nacrtati drveta koja odgovaraju iskaznim formulama:

$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$, $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow p \vee q$, $\neg (p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$, $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$,

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)).$$

3. Uveriti se da sve date rečenice imaju oblik $p \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r_1 \vee r_2)$

a) $x \cdot y = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee y = 0$ (x, y realni brojevi)

b) $x \geqslant y \Longleftrightarrow x > y \vee x = y$ (x, y realni brojevi)

c) $2 | x \cdot y \Longleftrightarrow 2 | x \vee 2 | y$ (x, y celi brojevi)

d) $a \parallel b \Longleftrightarrow$ *a, b nemaju zajedničkih tačaka* $\vee$ *a se poklapa sa b* (a, b prave u ravni)

Rešenje. Neposredno se uočava da su sve rečenice oblika

$$a \Longleftrightarrow r_1 \vee r_2 \qquad \text{(uz uslov } p)$$

Recimo, kod prve rečenice, p, q, r_1, r_2 su po redu x, y *su realni brojevi*, $x \cdot y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Medjutim, uslov p zapisan u zagradi pored rečenice $q \Longleftrightarrow r_1 \vee r_2$, u stvari je premisa implikacije

$$p \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r_1 \vee r_2)$$

4. Navesti nekoliko matematičkih rečenica oblika $p \wedge q \Rightarrow r$,

Rešenje. Takve su recimo rečenice:

$x>2\wedge y>3 \Rightarrow x+y>5$ (*x, y su realni brojevi*)

$2|n \wedge 3|n \Rightarrow 6|n$ (n je prirodan broj)

$x>0 \wedge y>0 \Rightarrow x\cdot y>0$ (x,y su realni brojevi)

$a\|b \wedge b\|c \Rightarrow a\| c$ (a, b, c su prave)

$A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$ (A, B, C su skupovi)

5. Za svaku od datih iskaznih formula navesti po tri matematičke rečenice čiji je logički sklop odredjen tom formulom

$$p\Rightarrow q,\ \neg p\Rightarrow\neg q,\ p\Longleftrightarrow q,\ p\Rightarrow(q\Longleftrightarrow r),\ p\Rightarrow(q\Rightarrow r_1\wedge r_2)$$

6. Dokazati jednakosti:

$v\wedge\ = v$, $v\wedge\bot=\bot$, $v\vee\top=\top$, $v\vee\bot=v$, $v\Rightarrow\top=\top$, $v\Rightarrow\bot=\neg v$, $\top\Rightarrow v=v$, $\bot\Rightarrow v=\top$,

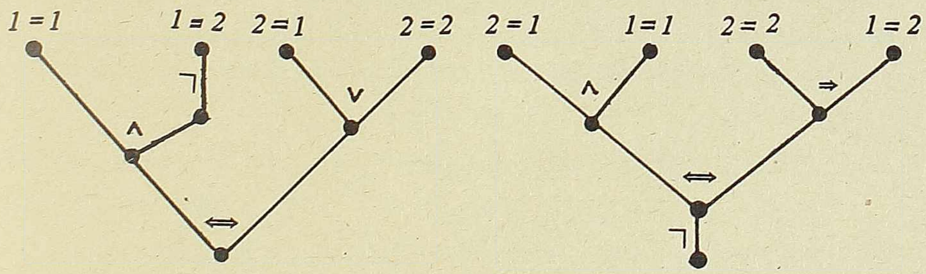
$v\Longleftrightarrow\top=v$, $v\Longleftrightarrow\bot=\neg v$, gde je v bilo koji od znakova $\top$, $\bot$, dok su $\wedge, \vee, \Rightarrow$, $\Longleftrightarrow, \neg$ operacije $\{\top,\bot\}$– algebre.

7. Uočimo znake *1, 2,=* (*jedan, dva, dve paralelne crte*) i reči sa njima:

$$1{=}1,\ 1{=}2,\ 2{=}1,\ 2{=}2$$

Dogovorimo se da te reči budu iskazna slova.

a) Obrazovati iskazne formule prema navedenim drvetima



b) Koje su istinosne vrednosti tih formula uz dopunski dogovor da znaci *1,2, =* imaju uobičajeno tumačenje (što, inače nije neophodno). Dakle, slovo *1=1* ima vrednost $\top$ i sl.

8. Obrazovati istinitosnu tablicu formule $(p\Rightarrow q)\Longleftrightarrow(\neg p\Rightarrow\neg q)$

Rešenje. U formuli učestvuju dva iskazna slova p, q za čije vrednosti postoje četiri mogućnosti. Otuda istinitosna tablica date formule, koju smo označili sa F izgleda:

τp	τq	$\tau(\neg p)$	$\tau(\neg q)$	$\tau(p\Rightarrow q)$	$\tau(\neg p\Rightarrow\neg q)$	τF
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

9. Obrazovati istinitosne tablice iskaznih formula:

a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ c) $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

10. Dokazati da naredne formule jesu tautologija:

$p \vee \neg p$, $\neg(p \wedge \neg p)$, $\neg\neg p \Leftrightarrow p$, $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \Rightarrow p \vee q$

11. Dokazati da date formule jesu tautologije

$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$\top \wedge p \Leftrightarrow p$	$\top \vee p \Leftrightarrow \top$
$\bot \wedge p \Leftrightarrow \bot$	$\bot \vee p \Leftrightarrow p$
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \bot$	$p \vee \neg p \Leftrightarrow \top$

12. Dokazati tautologije

a) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, b) $p \wedge \neg q \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \neg p))$

Primedba. Date formule imaju oblik implikacije $A \Rightarrow B$.
Budući da je $\tau(A \Rightarrow B) = \top$, ukoliko je $\tau A = \bot$, da bi se za takvu formulu dokazalo da je tautologija dosta je dokazati:

$(\rightarrow)$ $\tau B = \top$, ukoliko $\tau A = \top$

Rešenje zadatka. a) Podjimo od pretpostavke

$$\tau(p \wedge (p \Rightarrow q)) = \top$$

Tada, na osnovu tablice za $\wedge$, imamo

$$\tau p = \top, \quad \tau(p \Rightarrow q) = \top,$$

odakle na osnovu tablice za $\Rightarrow$ dobijamo

$$\tau q = \top.$$

Uslov oblika $(\rightarrow)$ je ispunjen, pa formula $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ jeste tautologija.

13. Dokazati tautologije

a) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$, $p \wedge \neg q \Rightarrow p \vee q$, $\neg p \wedge q \Rightarrow p \vee q$, $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)$

b) $p \wedge q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, $\neg p \wedge q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$, $p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$, $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

c) $p \wedge q \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$, d) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$, e) $p \wedge \neg q \wedge r \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

14. Dokazati:

a) $\tau(A \wedge B) = \top$ akko $\tau A = \top$ i $\tau B = \top$, $\tau(A \wedge B) = \bot$ akko $\tau A = \bot$ ili $\tau B = \bot$,

b) $\tau(A \vee B) = \top$ akko $\tau A = \top$ ili $\tau B = \top$, $\tau(A \vee B) = \bot$ akko $\tau A = \bot$ i $\tau B = \bot$,

c) $\tau(A \Rightarrow B) = \top$ akko $\tau A = \bot$ ili $\tau B = \top$, $\tau(A \Rightarrow B) = \bot$ akko $\tau A = \top$ i $\tau B = \bot$,

d) $\tau(A \Longleftrightarrow B) = \top$ akko $\tau A = \tau B$, $\tau(A \Longleftrightarrow B) = \bot$ akko $\tau A \neq \tau B$.

(A, B su ma koje iskazne formule)

15. Neka je $F(p_1, \ldots, p_n)$ iskazna formula obrazovana od slova $p_1, \ldots, p_n$. Dokazati da je navedena formula tautologija

$$(p_1 \Longleftrightarrow a_1) \wedge \ldots \wedge (p_n \Longleftrightarrow a_n) \Rightarrow (F(p_1, \ldots, p_n) \Longleftrightarrow F(a_1, \ldots, a_n))$$

16. Dokazati da je formula $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ tautologija.

Rešenje. Upotrebićemo metodu *svodjenja na protivurečnosti (reductio ad absurdum)*: Poći od pretpostavke da data formula nije tautologija i odatle izvesti protivurečnost (neka dva suprotna zaključka, kao *jeste R i nije R*).

Neka, dakle, formula $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ nije tautologija. Tada za neke vrednosti slova p, q imamo:

$$\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) = \bot$$

Odakle na osnovu tablice implikacije zaključujemo

$$\tau p = \top, \quad \tau(q \Rightarrow p) = \bot \text{ (jer } \tau A \Rightarrow B) = \bot \text{ akko } \tau A = \top \text{ i } \tau B = \bot).$$

Iz druge od tih jednakosti, ponovo na osnovu tablice implikacije, dobijamo

$$\tau q = \top, \quad \tau p = \bot$$

Izvedeni zaključci: $\tau p = \top$, $\tau p = \bot$ predstavljaju protivurečnost. Dakle, data formula jeste tautologija.

17. Metodom svodjenja na protivurečnost dokazati da naredne formule jesu tautologije.

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, b) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

c) $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow (p \wedge \neg q \Rightarrow r)$, d) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$, e) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$

18. Dokazati da je formula

$$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$$

tautologija.

Rešenje. Podjimo od pretpostavke:

Formula $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ nije tautlogija

odnosno

(1) $\tau((p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\vee q\Rightarrow r))=\perp$ (za neke vrednosti slova p, q, r)

Iz (1) proizilaze jednakosti

(2) $\tau\,(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)=\top$

(3) $\tau(p\vee q\Rightarrow r)=\perp$

Dalje, iz (2) dobijamo:

(4) $\tau(p\Rightarrow r)=\top$ i $\tau(q\Rightarrow r)=\top$,

a iz (3):

(5) $\tau(p\vee q)=\top$, $\tau(r)=\perp$

Ostalo je razmatranje jednakosti (4) i (5). To je moguće učiniti na dva načina.

Prvi način: Iz jednakosti (4) i jednakosti $\tau r=\perp$, na osnovu tablice implikacije, zaključujemo

$$\tau p=\perp,\qquad \tau q=\perp$$

odakle izvodima: $\tau(p\vee q)=\perp$. Ovo je u protivurečnosti sa prvom od jednakosti (5). Znači, data formula je tautologija.

Drugi način: Podjimo od jednakosti $\tau(p\vee q)=\top$, prema kojoj nastupa bar jedan od slučajeva $\tau p=\top$, $\tau q=\top$.

U slučaju $\tau p=\top$ iz prve od jednakosti (4) dobijamo $\tau r=\top$, a u slučaju $\tau q=\top$ iz druge od jednakosti (4) dobijamo opet $\tau r=\top$. Znači, u oba slučaja se dolazi do protivrečnosti, pa data formula jeste tautologija.

19. Metodom svodjenja na protivurečnosti dokazati da su tautologije formule:

$p\wedge q\Rightarrow p$, $p\Rightarrow p\vee q$, $((p\Rightarrow q)\Rightarrow p)\Rightarrow p$, $(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\iff(p\wedge q\Rightarrow r)$

$\neg(p\wedge q)\iff\neg p\vee\neg q$, $\neg(p\vee q)\iff\neg p\wedge\neg q$, $(p\Rightarrow q)\iff(p\iff p\wedge q)$,

$(p\Rightarrow q)\iff(q\iff p\vee q)$, $(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))\Rightarrow((p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r))$

Uputstvo. Ekvivalencija $A\iff B$ je tautologija akko obe formule $A\Rightarrow B$ i $B\Rightarrow A$ jesu tautologije.

20. Dokazati da su tautologije formule:

$$\top\wedge\top\iff\top,\quad \top\wedge\perp\iff\perp\quad \perp\wedge\top\iff\perp\quad \perp\wedge\perp\iff\perp$$

Rešenje. Date formule ne sadrže nijedno iskazno slovo. One su tautologije upravo u slučaju ako je njihova vrednost jednaka $\top$. Koristeći istinitostne tablice neposredno imamo

$$\tau(\top\wedge\top\iff\top)=\tau(\quad\iff\top)=\top$$

Dakle, formula $\top\wedge\top\iff\top$ jeste tautologija. I za ostale tri formule dokazivanje je slično.

Nije teško uvideti da navedene tautologije predstavljaju, može se tako reći, zapis istinitostne tablice konjukcije pomoću tautologija.

21. Dokazati da su tautologije formule:

a) $\top \vee \top \Leftrightarrow \top$, $\top \vee \bot \Leftrightarrow \top$, $\bot \vee \top \Leftrightarrow \top$, $\bot \vee \bot \Leftrightarrow \top$

b) $(\top \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top$, $(\top \Rightarrow \bot) \Leftrightarrow \bot$, $(\bot \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top$, $(\bot \Rightarrow \bot) \Leftrightarrow \top$

c) $(\top \Leftrightarrow \top) \Leftrightarrow \top$, $(\top \Leftrightarrow \bot) \Leftrightarrow \bot$, $(\bot \Leftrightarrow \top) \Leftrightarrow \bot$, $(\bot \Leftrightarrow \bot) \Leftrightarrow \top$

d) $\neg \top \Leftrightarrow \bot$, $\neg \bot \Leftrightarrow \top$

22. Dokazati da su tautologije formule:

a) $p \wedge \top \Leftrightarrow p$, $p \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$, b) $p \vee \top \Leftrightarrow \top$, $p \vee \bot \Leftrightarrow p$

c) $(p \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top$, $(p \Rightarrow \bot) \Leftrightarrow \neg p$, $(\top \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$, $(\bot \Rightarrow p) \Leftrightarrow \top$

d) $(p \Leftrightarrow \top) \Leftrightarrow p$, $(p \Leftrightarrow \bot) \Leftrightarrow \neg p$

23. Neka je $F(p)$ iskazna formula medju čijim iskaznim slovima se nalazi i slovo p. Zamenjujući to slovo znakom $\top$, odnosno znakom $\bot$ iz formule se dobijaju dve nove formule koje ćemo označiti sa $F(\top)$, odnosno $F(\bot)$. Recimo, ako je $F(p)$ $p \Rightarrow p \vee q$, tada su $F(\top)$ i $F(\bot)$ po redu formule $\top \Rightarrow \top \vee q$, $\bot \Rightarrow \bot \vee q$. Dokazati:

($\longleftrightarrow$) *$F(p)$ je tautologija akko $F(\top)$ i $F(\bot)$ su tautologije.*

Rešenje. Predpostavimo prethodno da je $F(p)$ tautologija. Ta formula, onda, za sve vrednosti svojih slova (p i ostalih) ima vrednost $\top$. Neka sva slova izuzev p imaju ma koje vrednosti. Vrednost formule $F(\top)$, odnosno $F(\bot)$ je u tom slučaju jednaka vrednosti formule $F(p)$ za istu vrednost tih slova, sa dodatkom da slovo p ima vrednost $\top$, odnosno $\bot$. Znači, formula $F(\top)$ i $F(\bot)$ uvek imaju vrednost $\top$, jer formula $F(p)$, je po pretpostavci tautologija. Tako je dokazana implikacija:

($\rightarrow$) *$F(p)$ je tautologija povlači $F(\top)$ i $F(\bot)$ su tautologije.*

Podjimo sada od pretpostavke da su formule $F(\top)$ i $F(\bot)$ tautologije. Neka slovo p i ostala slova formule $F(p)$ imaju ma koje vrednosti. Dokazujemo da je, tada, vrednost formule $F(p)$ jednaka $\top$. Zaista, vrednost formule $F(p)$ je ista kao i vrednost formule $F(\top)$ ukoliko je slučaj da p ima vrednost $\top$, odnosno kao vrednost formule $F(\bot)$ ukoliko p ima vrednost $\bot$. Stoga je formula $F(p)$ tautologija. Tako je dokazana i obratna implikacija.

($\leftarrow$) *$F(\top)$ i $F(\bot)$ su tautologije povlači $F(p)$ je tautologija*

Na osnovu ($\rightarrow$) i ($\leftarrow$) proizilazi ekvivalencija ($\longleftrightarrow$).

Primedba. Dokazano tvrdjenje je logička osnova jednog često vrlo uspešnog načina za dokazivanje tautologičnosti, tzv. *diskusije po slovu*. Neka je F formula koja ima slova p, q. Može se radi dokaza tautologičnosti, vršiti diskusija po bilo kom od tih slova. To znači da, ako želimo, recimo, diskutovati po slovu p, tada uočimo formule dobijene iz polazne zamenom p sa $\top$ i p sa $\bot$, i za njih dokazujemo da su tautologije. U tom dokazivanju je podesno koristiti razne tautologije zadatka 22, kao $p \wedge \top \Leftrightarrow p$ i sl. One se koriste tako što u formuli $F(\top)$, odnosno $F(\bot)$ podformulu recimo oblika $p \wedge \top$ zamenjujemo sa p. Slično zamenjivanje se obavlja sve dotle dok se formule $F(\top)$ i $F(\bot)$ ne prerade na neke dve formule A i B koje više ne sadrže nijedan od znakova $\top$, $\bot$ ili se ne dodje do tih znakova. Za ma koje vrednosti iskaznih nih slova, naravno vrede jednakosti

$$\tau F(\top) = \tau A \qquad \tau F(\bot) = \tau B$$

Formule A i $F(\top)$, odnosno B i $F(\bot)$, i tako ćemo reći, su istovredne pa se problem utvrdjivanja tautologičnosti formula $F(\top)$ i $F(\bot)$ svodi na problem utvrdjivanja, tautologičnosti formula A i B koje su očigledno, kraće.

Opisani postupak koristimo u rešavanju narednog zadatka.

24. Dokazati tautologiju:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Rešenje. Dokaz izvodimo diskusijom po slovu p. Radi toga označimo datu formulu sa $F(p)$. Formule $F(\top)$ i $F(\bot)$ glase:

(1) $((\top \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (\top \Rightarrow r)$, (2) $(\bot \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (\bot \Rightarrow r)$

Zamenjujući $\top \Rightarrow q$, $\top \Rightarrow r$ sa q, r formula (1) prelazi u istovrednu formulu (može se reži i ekvivalentnu, tačka VIII)

(3) $$q \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow r,$$

čija se tautologičnost može lako dokazati (tablicom ili, recimo, diskusijom po q)[1]. Prema tome formula (1) je tautologija. I formula (2) je tautologija pošto ona ima oblik implikacije $P \Rightarrow Q$ čiji zaključak Q je istovredan sa $\top$ (jer $(\bot \Rightarrow r) \Longleftrightarrow \top$).

Formule $F(\top)$ i $F(\bot)$ su, znači, tautologije. Otuda je tautologija i formula $F(p)$. Kraj dokaza.

25. Dokazati tautologije:

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q, \quad \neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q,$$

$$\neg(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \Longleftrightarrow q), \quad \neg(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow \neg q), \quad (p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \Longleftrightarrow \neg q)$$

26. Dokazati tautologije:

$$(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r), \quad (p \Rightarrow (q \vee r)) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$$

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Longleftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)), \quad (p \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r)) \Longleftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow r)).$$

Uputstvo. Diskutovati po p.

27. Neka je $F(q_1, \ldots, q_n)$ iskazna formula čija su sva slova $q_1, \ldots, q_n$, i koja zadovoljava uslov

(1) $$\tau F(\top, \ldots, \top) = \top$$

Dokazati da je tautologija formula

[1] Ako q ima vrednost $\top$ tada se (3) svodi na $r \Rightarrow r$, jer $\top \wedge (\top \Rightarrow r) \Longleftrightarrow (\top \Rightarrow r)$, dalje $(\top \Rightarrow r) \Longleftrightarrow r$. Ako q ima vrednost $\bot$, (3) se svodi na $\bot \Rightarrow r$. Formule $r \Longleftrightarrow r$, $\bot \Rightarrow r$ su očigledno tautologije. Stoga je tautologija i formula (3)

(2) $$(p \Rightarrow F(q_1, \ldots, q_n)) \Longleftrightarrow F(p \Rightarrow q_1, \ldots, q_n)$$

Dokazati, i obratno, tj. ako je formula (2) tautologija onda važi uslov (1).

28. Formula

$$F(p) \Rightarrow F(\top) \vee F(\perp)$$

je tautologija, ako je $F(p)$ ma koja formula. Dokazati.

29. Dokazati tautologije:

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \Longleftrightarrow p), \; (p \Longleftrightarrow (q \Longleftrightarrow r)) \Longleftrightarrow ((p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow r)$$

$$((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Longleftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)) \Longleftrightarrow p \vee r$$

30. Dokazati tautologije:

$$p \Rightarrow p, \; (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Longleftrightarrow q), \; (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$p \Longleftrightarrow p, \; (p \Longleftrightarrow q) \wedge (q \Longleftrightarrow p) \Rightarrow (p \Longleftrightarrow p), \; (p \Longleftrightarrow q) \wedge (q \Longleftrightarrow r) \Rightarrow (p \Longleftrightarrow r)$$

$$(p \Longleftrightarrow q) \Rightarrow (q \Longleftrightarrow p), \; (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p), \; (p \Longleftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Longleftrightarrow \neg q)$$

$$\neg(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \Longleftrightarrow q), \; \neg(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow \neg q), \neg(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow p \wedge \neg q$$

31. Dokazati tautologiju (tzv. Dedekindovu)

$$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$$

Rešenje. Formula je oblika $A \Longleftrightarrow B$, pa je *jedan način* dokazivanja ovakav:

Pretpostavimo da formula A ima vrednost $\top$ (za neke vrednosti slova p, q, r). Tada:

Bar jedna od formula $p \wedge q$, $q \wedge r$, $r \wedge p$ *ima vrednost* $\top$.

Odatle neposredno sledi zaključak:

Bar dva od slova p, q, r *imaju vrednost* $\top$.

Medjutim, tada sigurno i formula B ima vrednost $\top$. Recimo, ako je slučaj da p i q imaju vrednost $\top$, tada:

$$\tau((p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)) = \tau((\top \vee \top) \wedge (\top \vee r) \wedge (r \vee \top)) = \top \wedge \top \wedge \top = \top$$

Dakle dokazano je:

($\rightarrow$) $\tau(A) = \top$ povlači $\tau(B) = \top$.

Neka sada B ima vrednost $\top$. Tada:

Sve formule $p \vee q$, $q \vee r$, $r \vee p$ *imaju vrednost* $\top$.

Odatle neposredno sledi zaključak:

Bar dva od slova p, q, r *imaju vrednost* $\top$.

Medjutim, tada sigurno i formula A ima vrednost $\top$. Znači:

($\leftarrow$) $\tau(B) = \top$ povlači $\tau(A) = \top$

Iz implikacija ($\rightarrow$) i ($\leftarrow$) neposredno sledi

($\longleftrightarrow$) $\tau(A) = \top$ akko $\tau(B) = \top$

Na osnovu te ekvivalencije zaključujemo da važi jednakost:

(=) $\tau(A) = \tau(B)$ (za ma koju vrednost slova p, q, r)

jer, ako bi se desilo da su $\tau(A)$ i $\tau(B)$ različiti, jedan bi od njih bio $\top$, medjutim, prema ($\longleftrightarrow$) morao bi i drugi biti takodje jednak $\top$, što je protivurečnost. Drugim rečima A i B su istovredne formule, odnosno formula $A \Longleftrightarrow B$ jeste tautologija,

Drugi način: Označimo datu formulu sa $F(p,q,r)$. Formula $F(\top, q, r)$ je istovredna sa formulom

$$(q \vee r) \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow q \vee r$$

za koju nije teško dokazati da je tautologija. Slično $F(\bot, q, r)$ je istovredna sa formulom

$$q \wedge r \Longleftrightarrow (q \wedge r) \wedge (q \vee r)$$

koja je takodje tautologija.

Kako su $F(\top, q, r)$, $F(\bot, q, r)$ tautologije, to je i formula $F(p, q, r)$ Tautologija.

32. Dokazati

$$(\tau(A) = \top \text{ akko } \tau(B) = \top) \text{ povlači } \models A \Longleftrightarrow B$$

$$(\tau(A) = \bot \text{ akko } \tau(B) = \bot) \text{ povlači } \models A \Longleftrightarrow B$$

33. Dokazati da naredne formule jesu tautologije

$$(p \Longleftrightarrow q) \wedge (r \Longleftrightarrow s) \Rightarrow (p \star r \Longleftrightarrow q \star s) \quad (\star \text{ je } \wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow)$$

34. Dokazati tautologije:

$$(p \Longleftrightarrow q) \Rightarrow (p \star r \Longleftrightarrow q \star r)$$

$$(p \Longleftrightarrow q) \Rightarrow (r \star p \Longleftrightarrow r \star q)$$

($\star$ je bilo koji od znakova $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Longleftrightarrow$)

35. Dokazati tautologije:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee s)$$

36. Dokazati tautologije:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q))$$

37. Dokazati da ove formule nisu tautologije:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow s))$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \Longleftrightarrow r) \Rightarrow (q \Longleftrightarrow s))$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \vee (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Longleftrightarrow r) \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r))$$

Uputstvo. Dovoljno je za svaku formulu naći po jednu vrednost iskaznih slova za koju formula ima vrednost $\bot$. Za prvu formulu takav slučaj nastupa za:

$$\tau(p) = \bot, \quad \tau(q) = \top, \tau(r) = \bot, \quad \tau(s) = \bot.$$

38. Dokazati tautologiju: $p \wedge F(p) \Longleftrightarrow p \wedge F(\top)$, gde je $F(p)$ ma koja formula. Recimo,

formule

$$p\wedge(p\Rightarrow q)\Longleftrightarrow p\wedge(\top\Rightarrow q),\quad p\wedge(p\Rightarrow p)\Longleftrightarrow p\wedge(\top\Rightarrow\top)$$

su tautologije takve vrste.

Uputstvo. Diskutovati po p.

39. Dokazati tautologije:

$$F(p)\Longleftrightarrow (F(\top)\wedge p)\vee(F(\perp)\wedge\neg p),$$

$$F(p,q)\Longleftrightarrow(F(\top,\top)\wedge p\wedge q)\vee(F(\top,\perp)\wedge p\wedge\neg q)\vee(F(\perp,\top)\wedge\neg p\wedge q)\vee(F(\perp,\perp)\wedge\neg p\wedge\neg q),$$

gde su $F(p)$, $F(p,q)$ ma koje formule.

40. Formula

$$F(p)\star F(\neg p)\Longleftrightarrow F(\top)\star F(\perp)$$

je tautologija, ako je $\star$ neka komutativna operacija ($\wedge,\vee,\Longleftrightarrow$ i sl.) odnosno operacija koja zadovoljava uslove: $\models p\star q\Longleftrightarrow q\star p$. Dokazati.

41. Dokazati:

Ako $F(\top,\perp)=\perp$, onda $\models p\wedge\neg q\Rightarrow\neg F(p,q)$,

Ako $F(\top,\perp,\top)=\top$, onda $\models p\wedge\neg q\wedge r\Rightarrow F(p,q,r)$.

42. Neka dogovorno znaci $A^{\top}$, $A^{\perp}$ budu drugi zapisi za A, odnosno $\neg A$ (A je bilo koja formula). Dokazati:

(a) $\tau A^{v}=\top$ akko $\tau A=v$, (b) $\tau A^{v}=\perp$ akko $\tau A\neq v$,

gde je v $\top$ ili $\perp$.

43. Nastavak prethodnog zadatka. Dokazati tautologiju

$$(\Rightarrow)\qquad p_1^{a_1}\wedge\ldots\wedge p_n^{a_n}\Rightarrow F(p_1,\ldots,p_n)^{F(a_1,\ldots,a_n)}$$

gde je $F(p_1,\ldots,p_n)$ proizvoljna formula izgradjena od slova $p_1,\ldots,p_n$, a $a_1,\ldots,a_n$ su elementi skupa $\{\top,\perp\}$.

Uputstvo. Prema definiciji oznake A^{v} nije teško zaključiti da vredi:

$$\tau(A^{v})=\top\text{ akko }\tau A=v$$

Da bi se dokazala tautologija ($\Rightarrow$) dovoljno je dokazati implikaciju:

$$\text{Ako } \tau(p_1^{a_n}\wedge\ldots\wedge p_n^{a_n})=\top,\ \text{onda}\ \tau(F(p_1,\ldots,p_n)^{F(a_1,\ldots,a_n)})=\top$$

Napomenimo da je, koristeći se tautologijama oblika $p^{v}\Longleftrightarrow(p\Longleftrightarrow v)$ (v je $\top$ ili $\perp$), moguće prethodni zadatak svesti na zadatak 15.

44. Neka je $F(p_1,\ldots,p_n)$ tautologija i $A_1,\ldots,A_n$ ma koje iskazne formule. Dokazati da je formula $F(A_1,\ldots,A_n)$, dobijena zamenom slova $p_1,\ldots,p_n$ redom formulama $A_1,\ldots,A_n$, takodje tautologija.

45. Dokazati tautologiju

$$(\star)\qquad (p_1\Rightarrow(p_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow(p_n\Rightarrow p)\ldots))\Longleftrightarrow(p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n\Rightarrow p)$$

Rešenje. Dokaz izvodimo indukcijom po n i pritom diskutujemo po p_1.
Ako je $n=1$, formula glasi $(p_1 \Rightarrow p) \Longleftrightarrow (p_1 \Rightarrow p)$ a to je očigledno tautologija.
Neka je $n > 1$ i pretpostavimo da je formula (☆) tautologija, u slučaju kada u njoj umesto n stoji $n-1$, odnosno kada je broj slova $p_1, p_2, \ldots$ jednak $n-1$.

Tada: ako p_1 ima vrednost $\bot$, obe strane formule (☆) imaju vrednost $\top$ (jer $\bot \Rightarrow v = \top$, $(\bot \wedge v) \Rightarrow w = \bot \Rightarrow w = \top$, gde $v, w \in \{\top, \bot\}$.

Ako p_1 ima vrednost $\top$, tada je formula (☆) istovredna sa formulom

$$(p_2 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (p_n \Rightarrow p)\ldots)) \Leftrightarrow (p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow p)$$

koja je, prema indukcijskoj hipotezi (jer je $n-1$ broj slova $p_2, \ldots, p_n$) tautologija.
Dakle, formula (☆) ima uvek vrednost $\top$. Indukcijski dokaz je završen.

46. Da li je istinita implikacija

$$\models A \vee B \text{ povlači } \models A \text{ ili} \models B$$

Odgovor. Nije. Recimo: $\models p \vee \neg p$, medjutim ni p ni $\neg p$ nisu tautologije.

47. Dokazati. da za proizvoljne iskazne formule A, B vredi:

$$\models A \wedge B \longleftrightarrow \models A \text{ i } \models B, \quad \models A \vee B \leftarrow \models A \text{ ili } \models B,$$

$$\models A \Longleftrightarrow B \leftarrow \models A \text{ i } \models B, \quad \models A \Rightarrow B \leftarrow \models A \text{ i } \models B,$$

gde $\longleftrightarrow$ zamenjuje reči *ako i samo ako*, a znak $\leftarrow$ obrat reči *ako ... onda*, odnosno $P \leftarrow Q$ znači: *ako Q, onda P.*

48. Nastavak prethodnog zadatka. Dokazati:

$$\models A \text{ i } \models A \Rightarrow B \rightarrow \models B, \quad \models A \text{ i } \models A \Longleftrightarrow B \rightarrow \models B,$$

$$\models A \Rightarrow B \text{ i } \models B \Rightarrow C \rightarrow \models A \Rightarrow C, \quad \models A \Longleftrightarrow B \text{ i } \models B \Longleftrightarrow C \rightarrow \models A \Longleftrightarrow C,$$

gde znak $\rightarrow$ znači: *ako ... onda.*

49. Dogovorimo se da za datu formulu $F(p)$ sa $(\forall p)\, F(p)$, $(\exists p)\, F(p)$ drukčije označimo po redu formule:

$$F(\top) \wedge F(\bot), \quad F(\top) \vee F(\bot).$$

Dokazati:

$$\models (\forall p)\,(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\forall p) A \wedge (\forall p) B, \quad \models (\exists p)\,(A \vee B) \Longleftrightarrow (\exists p) A \vee (\exists p) B$$

$$\models A(p) \Rightarrow (\exists p) A(p), \quad \models (\forall p) A(p) \Rightarrow A(p), \quad \models \neg (\forall p) A \Longleftrightarrow (\exists p) \neg A$$

$$\models (\forall p)(\exists q)(p \Rightarrow q), \quad \models (p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\exists r)(p \Longleftrightarrow q \wedge r)$$

50. Nastavak prethodnog zadatka. Neka slovo p ne učestvuje u formuli B. Tada su sledeće formule tautologije:

$$(\forall p)(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\exists p) A \Rightarrow B), \quad (\exists p)(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\forall p) A \Rightarrow B)$$

$$(\forall p)(B \Rightarrow A) \Longleftrightarrow (B \Rightarrow (\forall p) A), \quad (\exists p)(B \Rightarrow A) \Longleftrightarrow (B \Rightarrow (\exists p) A)$$

Dokazati.

51. Dokazati tautologiju

$$\neg((p\wedge A)\vee(\neg p\wedge B)) \Longleftrightarrow (p\wedge\neg A)\vee(\neg p\wedge\neg B)$$

gde su A, B bilo koje formule.

Uputstvo. Diskutovati po p.

52. Neka je F_1, F_2 ... ovaj niz formula

$$p,\ p\Rightarrow p,\ (p\Rightarrow p)\Rightarrow p, \ldots, \text{ uopšte } F_n \text{ je } (F_{n-1}\Rightarrow p)$$

Dokazati:

$$\models F_n \text{ akko } n \text{ je paran broj}$$

53. Neka je F_1, F_2,..., F_n, ... ovaj niz formula

$$F_1 \text{ je } p_1\Rightarrow p_1,\ F_2 \text{ je } (F_1\Rightarrow p_2)\Rightarrow p_2, \ldots, F_n \text{ je } (F_{n-1}\Rightarrow p_n)\Rightarrow p_n, \ldots$$

Dokazati da su sve te formule tautologije.

54. Neka je $A(p)$ formula čije je jedino iskazno slovo p. Dokazati da je najmanje jedna od formula

$$A(p)\Longleftrightarrow\top,\ A(p)\Longleftrightarrow\bot,\ A(p)\Longleftrightarrow p,\ A(p)\Longleftrightarrow\neg p$$

tautologija.

55. Neka je $A(p)$ formula sa jedinim slovom p. Dokazati: Ako $A(p)$ nije kontradikcija onda je formula $A(p\Longleftrightarrow A(p))$ tautologija.

56. Neka je $A(p)$ proizvoljna formula sa jedinim slovom p. Dokazati da je tautologija sledeća formula

$$(A(p\vee q)\Longleftrightarrow A(p)\vee A(q))\Longleftrightarrow(A(p\wedge q)\Longleftrightarrow A(p)\wedge A(q))$$

Uputstvo. Diskutovati po p.

57. Umesto znakova $\vee, \wedge, \neg$ upotrebimo po redu znakove $+, \cdot, '$. Dokazati tautologiju:

$$F(ax_1+a'y_1, ax_2+a'y_2, \ldots, ax_n+a'y_n \Longleftrightarrow aF(x_1, x_2, \ldots, x_n)+a'F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

gde je F ma koja iskazna formula (a, x_i, y_j su iskazna slova).

Uputstvo. Diskutovati po a.

58. Neka je $F(p_1, \ldots, p_n, \Longleftrightarrow)$ iskazna formula obrazovana od iskaznih slova $p_1,\ldots, p_n$ i logičkog znaka $\Longleftrightarrow$. Takva formula je tautologija ako i samo ako se svako njeno iskazno slovo pojavljuje *paran* broj puta. Dokazati.

Rešenje. Razmotrimo istinitosnu tablicu za $\Longleftrightarrow$ i tablicu množenja za brojeve 1, -1.

$\Longleftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Uočava se da su te dve tablice *slične* (kaže se i *izomorfne*). Koristeći tu sličnost uočene iskazne formule tumačimo na ovaj način:

Iskazna slova tumačimo kao brojevne promenljive – oznake za brojeve 1, -1, *Znake* $\top$, $\perp$ redom kao brojeve 1, −1.

Na taj način istinitosna tablica za $\Longleftrightarrow$ prelazi u tablicu množenja za brojeve 1, −1, a iskazne formule postaju brojevni proizvodi. Recimo, formula $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p)$ postaje ovaj proizvod

$$(p \cdot q) \cdot ((p \cdot q) \cdot p)$$

Dalje, *vrednosti formule* (koja je $\top$ ili $\perp$) odgovara vrednost pridruženog proizvoda (koja je 1 ili −1).

Tautologijama odgovaraju oni proizvodi čija je vrednost uvek *jednaka* 1 – za svaku vrednost brojevnih promenljivih iz skupa $\{1, -1\}$. Recimo, tautologiji $(p \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow q)$ odgovara proizvod $(p \cdot p) \cdot (q \cdot q)$, tj. $p^2 \cdot q^2$. Nije teško uočiti da su uvek jednaki 1 oni i samo oni proizvodi kod kojih se svaka promenljiva pojavljuje paran broj puta. Koristeći uspostavljenu vezu izmedju pojmova „biti tautologija" i „biti jednak 1" zaključujemo da potreban i dovoljan uslov da formula oblika $F(p_1, \ldots, p_n; \Leftrightarrow)$ bude tautologija glasi:

Svako iskazno slovo u toj formuli ima paran broj pojavljivanja.

59. Neka je $F(p_1, \ldots, p_n; \Leftrightarrow, \neg)$ iskazna formula obrazovana od slova $p_1, \ldots, p_n$ i logičkih znakova $\Leftrightarrow$, $\neg$. Dokazati da je takva formula tautologija ako i samo ako se u njoj svako iskazno slovo i znak $\neg$ pojavljuju paran broj puta.

60. a) Dokazati da isključna disjunkcija $\veebar$ ima naredna svojstva

$$p \veebar q \Leftrightarrow q \veebar p, \quad (p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow p \veebar (q \veebar r), \quad (p \veebar q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \veebar (q \wedge r),$$

$$\neg p \veebar \neg q \Leftrightarrow p \veebar q, \quad p \veebar p \Leftrightarrow \perp, \quad p \veebar \perp \Leftrightarrow p, \quad p \veebar \top \Leftrightarrow \neg p,$$

odnosno da su sve te formule tautologije.

b) Neka je $F(p_1, \ldots, p_n; \veebar)$ iskazna formula obrazovana od slova $p_1, \ldots, p_n$ i logičkog znaka $\veebar$. Dokazati da je takva formula kontradikcija ako i samo ako se u njoj svako iskazno slovo pojavljuje paran broj puta.

61. Činjenicu da je formula $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ tautologija izražavamo i rečima: implikacija je *izraziva* pomoću negacije i disjunkcije. Slično: formula $p \vee q \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$ je tautologija, tj. disjunkcija je izraziva pomoću implikacije.

Izraziti sve osnove operacije pomoću:

a) disjunkcije, konjunkcije i negacije, b) konjunkcije i negacije, c) disjunkcije i negacije, d) implikacije i negacije.

62. Označimo sa $\uparrow$, $\downarrow$ sledeće operacije (prva se zove Shefferova, a druga Lukasiewiczeva):

$p \uparrow q$ je zamena za $\neg(p \wedge q)$

$p \downarrow q$ je zamena za $\neg(p \vee q)$

$\uparrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$

$\downarrow$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Dokazati da se sve osnovne logičke operacije mogu izraziti pomoću operacije $\uparrow$, kao i pomoću operacije $\downarrow$.

Uputstvo. Recimo $p\uparrow p \Longleftrightarrow \neg p$, $(p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q) \Longleftrightarrow p \vee q$ i sl.

63. Dokazati da se negacija ne može izraziti pomoću ostalih osnovnih logičkih operacija.

♦ Pretpostavimo da $\tau p = \top$, $\tau(p \Rightarrow q) = \top$. Iz tih jednakosti zaključujemo: $\tau(\top \Rightarrow q) = \top$, odnosno $\tau q = \top$. Znači, ukoliko obe formule p, $p \Rightarrow q$ imaju vrednost $\top$, onda i formula q ima takodje vrednost $\top$. U takvom slučaju kažemo da je q (semantička) posledica formula p, $p \Rightarrow q$.

♦ Uopšte, iskazna formula A je *(semantička) posledica* skupa iskaznih formula $\mathcal{F}$, ukoliko vredi:

Kad–god sve formule iz $\mathcal{F}$ imaju vrednost $\top$, onda i A ima vrednost $\top$.

♦ Formule skupa $\mathcal{F}$ nazivamo *pretpostavke (hipoteze)* i koristimo pisanje:

$$\mathcal{F} \models A$$

Tako, prema prethodnom, važi[1] : $p,\ p \Rightarrow q \models q$.

♦ Za skup iskaznih formula $\mathcal{F}$ njegov *model (rešenje)* je takva vrednost slova[2] (od kojih su te formule sagradjene) za koju sve formule iz $\mathcal{F}$ imaju vrednost $\top$. Jezikom modela definicija semantičke posledice može se iskazati u obliku:

A je semantička posledica skupa $\mathcal{F}$ akko svaki model skupa $\mathcal{F}$ jeste model i formule A.

♦ Ranije je već istaknuto i dokazano da je formula oblika $A \Rightarrow B$ tautologija ako i samo ako vredi:

Kad–god je $\tau A = \top$, tada je i $\tau B = \top$,

tj. kad–god je B posledica formule A. Dakle:

$$A \models B \quad \text{akko} \quad \models A \Rightarrow B$$

Dokazuje se (videti zadatak 80) da vredi i opštije tvrdjenje, tzv. *stav dedukcije (semantički):*

[1] Kada je skup pretpostavki konačan, recimo $\{F_1, ..., F_n\}$, umesto $\{F_1, ..., F_n\} \models F$ pišemo: $F_1, ..., F_n \models F$. Oznake za skup $\{\ \}$ izostavljamo često i u beskonačnom slučaju.

[2] Strože, v r e d n o s t izvesnih iskaznih slova definiše se kao preslikavanje tih slova u skup $\{\top, \bot\}$. Recimo, jedna vrednost slova $p_1, p_2, p_3, ...$ jeste:

$$\tau = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ \top & \bot & \top & \bot & \cdots \end{pmatrix} \quad (\top, \bot \text{ se naizmenično redjaju})$$

$$F_1, \ldots, F_n \models F \quad \text{akko} \quad F_1, \ldots, F_{n-1} \models F_n \Rightarrow F,$$

pomoću koga se uspostavlja veza izmedju pojmova semantička posledica i tautologija.

ZADACI (nastavak).

64. Odrediti sve modele formula (po p, q): $p \Rightarrow q$, $p \vee q$.

Rešenje. Prema istinitosnim tablicama implikacije i disjunkcije neposredno se zaključuje da obe formule imaju vrednost $\top$ upravo u ovim slučajevima

(i) $\tau p = \top$, $\tau q = \top$; (ii) $\tau p = \bot$, $\tau q = \top$

pa su traženi modeli:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ \top & \top \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{pmatrix}$$

65. Odrediti sve modele datih formula (po slovima p, q, r, odnosno p, q, r, s)

a) $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$; b) $p \Longleftrightarrow q$, $q \Longleftrightarrow r$, $r \Longleftrightarrow s$

66. Odrediti modele formula (po $p_1, p_2, p_3, \ldots$)

$$p_1^{\top}, p_2^{\bot}, p_3^{\top}, p_4^{\bot}, \ldots \qquad \text{(stepeni } \top, \bot \text{ redjaju se naizmenično)}$$

Odgovor. Jedini model je:

$$\tau = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ \top & \bot & \top & \bot & \end{pmatrix} \qquad (\top, \bot \text{ se redjaju naizmenično}).$$

jer važi

$$\tau(p^{\alpha}) = \top \quad \text{akko} \quad \tau p = \alpha \qquad (\alpha \text{ je } \top, \bot)$$

67. Odrediti modele formula (po $p_1, p_2, p_3, \ldots$):

$$p_1, \; p_1 \Rightarrow p_2, \; p_2 \Rightarrow p_3, \ldots$$

68. Odrediti modele formule $p \Rightarrow q$ po: a) p, q, b) p, q, r, c) p.

Rešenje. a) Na osnovu tablice implikacije modeli su:

$$\begin{pmatrix} p & q \\ \top & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ \bot & \bot \end{pmatrix}$$

b) U ovom slučaju nepoznate (po kojima tražimo rešenja) su p, q, r. Medjutim, r u stvari ne učestvuje u datoj formuli – znak da je vrednost za r proizvoljna. Modeli su

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \top & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \top & \bot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \bot & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \bot & \bot \end{pmatrix}$$

c) Ovde je nepoznata p, dok se q smatra poznatom. U stvari, radi se o traženju modela ponaosob dveju formula $p \Rightarrow \top$, $p \Rightarrow \bot$ koje odgovaraju slučajevima

$\tau q = \top$, $\tau q = \bot$ Nije teško videti da se u oba slučaja rešenja mogu ovako izraziti:

$$\begin{pmatrix} p \\ \bot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

69. Odrediti model date formule po naznačenim nepoznatim:

a) $p \wedge q$ po p, q b) $p \wedge q$ po $p, q, r,$ c) $p \wedge q$ po p
d) $p \wedge (q \Longleftrightarrow r)$ po $p, q, r,$ e) $p \wedge (q \Longleftrightarrow r)$ po p.

Uputstvo. e) Uslov $\tau q = \tau r$ je potreban i dovoljan da data formula ima model po p.

70. Dokazati: $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \models p \Rightarrow r$.

Rešenje. Načinimo istinitosne tablice formula $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$, $p \Rightarrow r$ (u odnosu na slova p, q, r).

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Uočava se da formule $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ imaju obe vrednost $\top$ u četiri slučaja:

1° $\tau p = \top$, $\tau q = \top$, $\tau r = \top$;
2° $\tau p = \bot$, $\tau q = \top$, $\tau r = \top$;
3° $\tau p = \bot$, $\tau q = \bot$, $\tau r = \top$;
4° $\tau p = \bot$, $\tau q = \bot$ $\tau r = \bot$.

U svim tim slučajevima formula $p \Rightarrow r$ takodje ima vrednost $\top$, čime se završava dokaz.

Dokaz se može i ovako izvesti: Pretpostavimo da za neku vrednost τ slova p, q, r važi:

(☆) $\tau(p \Rightarrow q) = \top$, $\tau(q \Rightarrow r) = \top$, $\tau(p \Rightarrow r) = \bot$

Iz treće jednakosti dobijamo: $\tau p = \top$, $\tau r = \bot$. Zamenom dobijenih vrednosti u prvu i drugu jednakost dolazimo do kontradikcije: $\tau q = \top$, $\tau q = \bot$. Znači pretpostavka (☆) je nemoguća, a time je metodom svodjenja na protivurečnost dokazano: $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \models p \Rightarrow r$.

71. Dokazati:

$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow p \models p \Longleftrightarrow q$; $\quad p \Rightarrow q \models \neg q \Rightarrow \neg p$;
$p \Rightarrow q,\ r \Rightarrow s \models p \wedge r \Rightarrow q \wedge s$; $\quad p \Rightarrow q,\ r \Rightarrow s \models p \vee r \Rightarrow q \vee s$

72. Dokazati da nije:

$p \vee q \models p$; $\quad p \Rightarrow q,\ q \models p$; $\quad \neg p,\ p \Rightarrow q \models q$

Rešenje. Dosta je za svako od pretpostavljenih tvrdjenja pronaći bar jednu vrednost slova p, q za koju sve pretpostavke imaju vrednost $\top$ a naznačena posledica vrednosti $\bot$. Takve vrednosti slova su po redu: 1° $\tau p = \bot$, $\tau q = \top$; 2° $\tau p = \bot$, $\tau q = \top$; 3° $\tau p = \bot$, $\tau q = \bot$.

73. Dokazati[1] :

a) $p_1, p_1 \Rightarrow p_2, \ldots, p_n \Rightarrow p_{n+1}, \ldots \models p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

b) $p_1, p_1 \Longleftrightarrow p_2, \ldots, p_n \Longleftrightarrow p_{n+1}, \ldots \models p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

c) $\neg p_1, p_1 \Longleftrightarrow p_2, \ldots, p_n \Longleftrightarrow p_{n+1}, \ldots \models \neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_n, \ldots$

74. Neka je $F(p, q)$ iskazna formula obrazovana od slova p, q. Dokazati da iz pretpostavki p^α, q^β (α, β su $\top$ ili $\bot$) proizlazi kao semantička posledica ili formula $F(p, q)$ ili njezina negacija $\neg F(p, q)$. Tačnije dokazati:

(i) Ako $F(\alpha, \beta) = \top$, onda je posledica $F(p, q)$, odnosno $F(p, q)^\top$

(ii) Ako $F(\alpha, \beta) = \bot$, onda je posledica $\neg F(p, q)$, odnosno $F(p, q)^\bot$. Ta se dva tvrdjenja mogu zajedno zapisati u obliku:

$$p^\alpha, q^\beta \models F(p, q)^{F(\alpha, \beta)}$$

75. Neka je $F(p_1, \ldots, p_n)$ iskazna formula obrazovana od slova $p_1, \ldots, p_n$. Dokazati da iz pretpostavki $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n}$ (α_i je $\top$ ili $\bot$) proizlazi kao semantička posledica ili formula $F(p_1, \ldots, p_n)$ ili njena negacija $\neg F(p_1, \ldots, p_n)$. Tačnije rečeno, dokazati:

$$p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_n^{\alpha_n} \models F(p_1, \ldots, p_n)^{F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$$

76. Dokazati da semantička posledica ima naredna svojstva (A, B, C, D su proizvoljne formule)

$\models A,\ A \models B \rightarrow\ \models B$	(Modus ponens)
$A \models B,\ B \models C \rightarrow A \models C$	(Tranzitivnost)
$A \models B,\ C \models D \rightarrow A \wedge C \models B \wedge D$	(Saglasnost sa konjunkcijom)
$A \models B,\ C \models D \rightarrow A \vee C \models B \vee D$	(Saglasnost sa disjunkcijom)

Rešenje. Dokaz izvodimo, recimo, za prvo tvrdjenje. Pretpostavimo, dakle: $\models A$, i neka je τ jedna vrednost slova (formula A, B). Tada, pošto je A tautologija, to $\tau A = \top$, a pošto $A \models B$, to zaključujemo: $\tau B = \top$. Prethodno rasudjivanje vredi za svaku vrednost slova τ, što znači da formula B jeste tautologija.

Slično, za poslednje tvrdjenje dokaz izgleda: Pretpostavimo

$$A \models B, \quad C \models D, \quad \tau(A \vee C) = \top,$$

gde je τ neka vrednost slova formula A, B, C, D. Iz treće pretpostavke proizlazi: $\tau A = \top$ *ili* $\tau C = \top$, a odatle koristeći $A \models B$, $C \models D$ zaključujemo

[1] $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ za skupove formula $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ znači: Svaka formula iz $\mathcal{B}$ je posledica skupa $\mathcal{A}$, s tim što i u takvom slučaju oznake za skup $\{\ \}$ često izostavljamo.

$$\tau B = \top \quad ili \quad \tau D = \top\text{, odnosno: } \tau(B \vee D) = \top .$$

Time je, uz pretpostavke $A \models B$, $C \models D$, dokazano

Ako $\tau(A \vee C) = \top$, *onda* $\tau(B \vee D) = \top$,

odnosno: $A \vee C \models B \vee D$.

Dokazi drugog i trećeg tvrdjenja izvode se slično.

77. Dokazati ekvivalenciju

$$F_1, ..., F_n \models F \text{ akko } F_1 \wedge \; ... \; \wedge F_n \models F$$

78. Dokazati: $A \models B$ akko $\models A \Rightarrow B$

79. Dokazati *(semantički) stav dedukcije:*

$$F_1, ..., F_n \models F \text{ akko } F_1, ..., F_{n-1} \models F_n \Rightarrow F$$

Uputstvo. Moguće je dokazivati indukcijom po n koristeći se jedino definicijom znaka $\models$. Drugi način je:

$F_1, ..., F_n \models F_1$	akko $F_1 \wedge \; ... \; \wedge F_n \models F$	(Zad. 78)
	akko $\models F_1 \wedge \; ... \; \wedge F_n \Rightarrow F$	(Zad. 79)
	akko $\models F_1 \wedge \; ... \; \wedge F_{n-1} \Rightarrow (F_n \Rightarrow F)$	(Jer $(p \wedge q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$)
	akko $F_1 \wedge ... \wedge F_{n-1} \models F_n \Rightarrow F$	(Zad. 79)
	akko $F_1, ..., F_{n-1} \models F_n \Rightarrow F$	(Zad. 78)

Kraj dokaza.

80. Dokazati da su naredne rečenice medjusobno ekvivalentne

$A, B, C \models F$; $A, B \models C \Rightarrow F$; $A, C \models B \Rightarrow F$; $A \models B \Rightarrow (C \Rightarrow F)$;

$A \models C \Rightarrow (B \Rightarrow F)$; $\models A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow F))$; $\models A \Rightarrow (C \Rightarrow (B \Rightarrow F))$

(A, B, C, F su ma koje iskazne formule)

81. Koristeći se činjenicom da je formula $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ tautologija dokazati:

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \models (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$; $\quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r),\; p \Rightarrow q \models p \Rightarrow r$;

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r),\; p \Rightarrow q,\; p \models r$; $\; p \Rightarrow (q \Rightarrow r),\; p \models (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$;

$p \models (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r))$; $\; \models p \Rightarrow ((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)))$

82. Dokazati: $F_1, ..., F_n \models F$ *akko* $\models (F_1 \Rightarrow (F_2 \Rightarrow \; ... \; (F_n \Rightarrow F) ...))$

83. Neka $f(p, q)$ izvesna iskazna formula i neka za svake dve formule A, B vredi ekvivalencija:

$$A \models B \text{ akko } \models f(A, B)$$

Dokazati da je tada $f(p, q) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q)$ tautologija.

VIII EKVIVALENTNOST ISKAZNIH FORMULA

♦ U skupu iskaznih formula (po izvesnim iskaznim slovima) definiše se relacija *ekv* (ekvivalentnost) na sledeći način

$$A \text{ ekv } B \text{ akko } \models A \Longleftrightarrow B$$

Recimo: $p \wedge q$ *ekv* $q \wedge p$, jer formula $p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$ je tautologija.

♦ Relacija *ekv* zadovoljava:

$$A \text{ ekv } B \text{ akko } \tau(A) = \tau(B), \text{ za sve vrednosti slova formula A, B}$$

ili drukčije rečeno

$$A \text{ ekv } B \text{ akko } A \text{ i } B \text{ su istovredne formule.}$$

♦ Relacija *ekv* je relacija ekvivalencije, koja je saglasna sa osnovnim logičkim operacijama (zadaci 2,3,4).

♦ Neka su $A, B, \ldots, C$ neke iskazne formule oblika

$$l \vee m \vee \ldots \vee n$$

pri čemu su $l, m, \ldots, n$ iskazna slova ili njihove negacije. Tada formulu oblika

$$A \wedge B \wedge \ldots \wedge C$$

zovemo *sastavna formula*. Recimo, takve su formule

$$p \wedge (q \vee \neg r);\ (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg r),\ p \wedge q \wedge \neg r,\ \neg p,\ r$$

♦ Dualno se definiše *rastavna formula*. To je formula oblika

$$A \vee B \vee \ldots \vee C$$

gde su $A, B, \ldots, C$ konjunkcije iskaznih slova ili njihovih negacija.

♦ Svaka iskazna formula ekvivalentna je sa nekom sastavnom (rastavnom) formulom. Do rastavne (sastavne) forme formule dolazi se postupno – odredjenim postupkom (zadatak 16).

♦ Neka je $A \wedge B \wedge \ldots \wedge C$ sastavna forma čija su sva iskazna slova $p_1, \ldots, p_n$. Za tu formu kažemo da je *potpuna* ili *kanonska konjunktivna normalna forma* (po $p_1, \ldots, p_n$) ako su formule $A, B, \ldots, C$ oblika

$$p_1^{\alpha_1} \vee p_2^{\alpha_2} \vee \cdots \vee p_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_i \text{ je } \top \text{ ili } \bot)$$

pri čemu su $p^{\top}$, $p^{\bot}$ druge oznake redom za p, $\neg p$. Primer kanonske konjunktivne normalne forme (po p, q) jeste:

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

Dualno se definiše *potpuna rastavna forma – kanonska disjunktivna normalna forma* (po $p_1, \ldots, p_n$).

♦ Važe ekvivalencije

$$F(p)\ ekv\ (F(\top)\wedge p)\vee(F(\bot)\wedge\neg p),$$

$$F(p,q)\ ekv\ (F(\top,\top)\wedge p\wedge q)\vee(F(\top,\bot)\wedge p\wedge\neg q)\vee(F(\bot,\top)\wedge\neg p\wedge q)\vee(F(\bot,\bot)\wedge\neg p\wedge\neg q)$$

čije desne strane odredjuju potpune rastavne forme formula $F(p)$, $F(p,q)$ (videti i zadatke 34 i 37).

◆ Dogovorno i oznake $\top$, $\bot$ smatramo za potpunu rastavnu, odnosno potpunu sastavnu formu. To je u skladu sa okolnošću da smo i te znake prihvatili kao iskazne formule. Ako to nije slučaj, tautologije nemaju potpunu sastavnu, a kontradikcije potpunu rastavnu formu.

ZADACI

1. Dokazati

$$A\ ekv\ B \text{ akko } A,\ B \text{ su istovredne formule.}$$

Rešenje. Jedan dokaz je:

$A\ ekv\ B$ akko $\models A \Longleftrightarrow B$	(Definicija)
akko $\tau(A \Longleftrightarrow B) = \top$, za sve vrednosti slova formula A, B	(Definicija)
akko $\tau A = \tau B$, za sve vrednosti slova formula A, B	(Jer $A \Longleftrightarrow B$ ima vrednost $\top$ akko A, B imaju uvek iste vrednosti)

Kraj dokaza.

2. Dokazati da je *ekv* relacija ekvivalencije, tj. da:

$$A\ ekv\ A,\ A\ ekv\ B \rightarrow B\ ekv\ A,\ A\ ekv\ B \text{ i } B\ ekv\ C \rightarrow A\ ekv\ C,$$

gde su A, B, C ma koje formule.

Uputstvo. Koristiti tvrdjenje prethodnog zadatka kao i tautologije $A \Longleftrightarrow A$, $(A \Longleftrightarrow B) \Rightarrow (B \Longleftrightarrow A)$ i sl.

3. Dokazati da je *ekv* saglasna sa operacijama $\wedge$, $\vee$, $\neg$, tj. da su tačne implikacije oblika

$$A_1\ ekv\ B_1 \text{ i } A_2\ ekv\ B_2 \rightarrow A_1\wedge A_2\ ekv\ B_1\wedge B_2$$

$$A_1\ ekv\ B_1 \text{ i } A_2\ ekv\ B_2 \rightarrow A_1\vee A_2\ ekv\ B_1\vee B_2$$

$$A\ ekv\ B \rightarrow \neg A\ ekv\ \neg B\ .$$

Uputstvo. Koristiti tautologije kao $(A_1 \Longleftrightarrow B_1)\wedge(A_2 \Longleftrightarrow B_2) \Rightarrow (A_1\wedge B_1 \Longleftrightarrow A_2\wedge B_2)$, ili dokaz zasnovati na činjenicama

$$\tau A_1 = \tau B_1,\ \tau A_2 = \tau B_2 \rightarrow \tau(A_1\wedge A_2) = \tau(B_1\wedge B_2) \text{ i sl.}$$

koje slede iz opštih svojstava jednakosti i definicije vrednosti iskazne formule.

4. Dokazati da je relacija *ekv* saglasna sa operacijama $\Rightarrow$, $\Longleftrightarrow$, tj. da važe implikacije oblika

$$A_1\ ekv\ B_1 \text{ i } A_2\ ekv\ B_2 \rightarrow (A_1\Rightarrow A_2)\ ekv\ (B_1\Rightarrow B_2),$$

$$A_1\ ekv\ B_1 \text{ i } A_2\ ekv\ B_2 \rightarrow (A_1\Longleftrightarrow A_2)\ ekv\ (B_1\Longleftrightarrow B_2)$$

5. Uočimo formulu $p \wedge \neg(q \vee (r \Rightarrow p))$, i njenu podformulu $r \Rightarrow p$ zamenimo sa $\neg r \vee p$. Dobija se formula $p \wedge \neg(q \vee (\neg r \vee p))$ koja je ekvivalentna sa polaznom. Dokazati.

Rešenje. Jedan dokaz glasi

(1) $r \Rightarrow p$ *ekv* $\neg r \vee p$ (Jer $(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg r \vee p)$ je tautologija)

(2) q *ekv* q

(3) $q \vee (r \Rightarrow p)$ ekv $q \vee (\neg r \vee p)$ (Korišćena je saglasnost ekv sa $\vee$ u vidu pravila:
$$\left(\frac{A_1 \text{ ekv } B_1,\ A_2 \text{ ekv } B_2}{A_1 \vee A_2 \text{ ekv } B_1 \vee B_2}\right)$$

(4) $\neg(q \vee (r \Rightarrow p))$ *ekv* $\neg(q \vee (\neg r \vee p))$ (Korišćena je saglasnost *ekv* sa $\neg$)

(5) p *ekv* p

(6) $p \wedge \neg(q \vee (r \Rightarrow p))$ *ekv* $(p \wedge \neg(q \vee (\neg r \vee p))$ (Iz (4) i (5) na osnovu saglasnosti *ekv* sa $\wedge$)

Kraj dokaza.

Dokaz se može izvesti i korišćenjem činjenice da je pojam ekvivalentnost formula prevodljiv na pojam istovrednost formula. Jer formule

$$p \wedge \neg(q \vee (r \Rightarrow p)), \quad p \wedge \neg(q \vee (\neg r \vee p))$$

su istovredne, budući da je jedan deo prve zamenjen delom sa njim ekvivalentnim.

Napomena. Dokazano tvrdjenje je poseban slučaj tzv. *zakona (ekvivalencijske) zamene:*

Neka je F ma koja formula i A njena podformula. Zameni li se A nekom sa njom ekvivalentnom formulom B, od F se prelazi na novu formulu F_1 ekvivalentnu sa formulom F.

Šta je glavni uzročnik važenja tog zakona? To je činjenica što je relacija *ekv* (R), (S), (T) relacija saglasna sa osnovnim logičkim operacijama.

Upravo ta svojstva relacije *ekv* su korišćena u navedenom dokazu, a tome slično može se postupiti i u dokazu opšteg zakona zamene. Primetimo da iz posve sličnih razloga važi zakon (jednakosnih) zamena koji smo upoznali u tački VI *Jednakosni dokazi. Algebra brojeva.*

6. Dokazati korak–po–korak (slično kao u prethodnom zadatku) ekvivalencije

$$\neg p \Rightarrow (q \wedge (r \vee p)) \text{ ekv } \neg p \Rightarrow (q \wedge (p \vee r)),$$
$$\neg(p \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow p \text{ ekv } \neg(p \wedge (r \Leftrightarrow q)) \Rightarrow p$$

7. Dokazati ekvivalencije (A, B, C su ma koje formule)

$A \wedge A$ *ekv* A	$A \vee A$ *ekv* A
$A \wedge B$ *ekv* $B \wedge A$	$A \vee B$ *ekv* $B \vee A$
$(A \wedge B) \wedge C$ *ekv* $A \wedge (B \wedge C)$	$(A \vee B) \vee C$ *ekv* $A \vee (B \vee C)$
$A \wedge (A \vee B)$ *ekv* A	$A \vee (A \wedge B)$ *ekv* A
$A \wedge (B \vee C)$ *ekv* $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$ *ekv* $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \wedge \top$ *ekv* A	$A \vee \top$ *ekv* $\top$
$A \wedge \perp$ *ekv* $\perp$	$A \vee \perp$ *ekv* A
$A \wedge \neg A$ *ekv* $\perp$	$A \vee \neg A$ *ekv* $\top$

Napomena. Ako znake $\wedge$, $\vee$, $\neg$, *ekv*, $\top$, $\perp$ redom zamenimo sa $\cap$, $\cup$, $'$, $=$, 1, 0 date formule se prevode u aksiome *Bulove algebre* (o čemu, kasnije, više reči).

8. Dokazati ekvivalencije (A, B su ma koje formule)

$$A \Rightarrow B \;ekv\; \neg A \vee B, \quad A \Leftrightarrow B \;ekv\; (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A),$$

9. Dokazati ekvivalencije oblika:

$$\neg\neg A \;ekv\; A, \quad \neg(A \wedge B) \;ekv\; \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \;ekv\; \neg A \wedge \neg B.$$

10. Dokazati:

A *ekv* B akko (Iz $\tau A = \top$ sledi $\tau B = \top$ i obratno),

i pomoću toga dokazati ekvivalencije oblika

$$A \wedge (B \wedge C) \;ekv\; (B \wedge A) \wedge C, \quad (A \wedge B) \wedge (C \wedge D) \;ekv\; ((C \wedge A) \wedge B) \wedge D,$$

Uputstvo. Formula oblika $A \wedge (B \wedge C)$ ima vrednost $\top$ ako i samo ako i A i B i C imaju vrednost $\top$, a slično vredi i za formulu $(B \wedge A) \wedge C$.

Napomena. Opštije, ako je $F(A_1, A_2, ..., A_n; \wedge)$ formula koja je gradjena pomoću znaka $\wedge$ i podformula $A_1, A_2, ..., A_n$, tada je ona ekvivalentna sa formulom koja se dobija brisanjem zagrada, proizvoljnim razmeštanjem delova $A_1, A_2, ..., A_n$, i ponovnim postavljanjem zagrada (naravno ispravno). Ta opšta činjenica, u stvari, sledi i iz druge i treće ekvivalencije zadatka 7 koje se mogu opisati rečima: $\wedge$ je komutativna i asocijativna operacija – ukoliko *ekv* smatramo kao jednu vrstu jednakosti.

11. Dokazati tvrdjenje

A *ekv* B akko (Iz $\tau A = \perp$ sledi $\tau B = \perp$ i obrnuto),

i pomoću toga dokazati ekvivalencije oblika

$$A \vee (B \vee C) \;ekv\; (B \vee A) \vee C, \quad (A \vee B) \vee (C \vee D) \;ekv\; ((C \vee A) \vee B) \vee D.$$

12. Dokazati ekvivalencije oblika

$$A \wedge (B \vee C \vee D) \;ekv\; (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge D)$$

$$A \vee (B \wedge C \wedge D) \;ekv\; (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (A \vee D)$$

$$(A \vee B) \wedge (C \vee D \vee E) \;ekv\; (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (A \wedge E) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D) \vee (B \wedge E)$$

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D \wedge E) \;ekv\; (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (A \vee E) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D) \wedge (B \vee E)$$

Uputstvo. Te ekvivalencije – uopštenja distributivnog zakona $\wedge$ prema $\vee$, i zakona

$\vee$ prema $\wedge$ mogu se lako izvesti koristeći drugu, treću i petu ekvivalenciju zadatka 7 (tj. koristeći komutativni, asocijativni i običan distributivni zakon[1] za $\wedge$, $\vee$), uz pretpostavku korišćenja opštih svojstava ekvivalentnosti (zadaci 2, 3, 4).

13. Dokazati ekvivalenciju (Dedekind):

$$(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A) \text{ ekv } (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$$

Rešenje. Koristeći činjenicu da *ekv* ima svojstva slična jednakosti, odnosno (R), (S), (T) i saglasnost sa operacijama $\wedge$, $\vee$, $\neg$, navodimo dokaz koji – po pisanju liči na jednakosni, i koji se oslanja na zakon (ekvivalencijske) zamene:

$(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A)$

$\quad$ *ekv* $[(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge B) \vee (B \wedge C)] \wedge (C \vee A)$

$\quad\quad$ (Zamena formule $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$ formulom $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge B) \vee (B \wedge C)$)

$\quad$ *ekv* $[(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee B \vee (B \wedge C)] \wedge (C \vee A)$

$\quad\quad$ (Jer $B \wedge B$ *ekv* B – zadatak 7)

$\quad$ *ekv* $[(A \wedge C) \vee B] \wedge (C \vee A)$

$\quad\quad$ (Jer $B \vee (B \wedge C)$ *ekv* B, $B \vee (B \wedge A)$ *ekv* B – zadatak 7)

$\quad$ *ekv* $(A \wedge C \wedge C) \vee (A \wedge C \wedge A) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge A)$

$\quad\quad$ (Korišćenje distributivnog zakona $\wedge$ prema $\vee$)

$\quad$ *ekv* $(A \wedge C) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge A)$

$\quad\quad$ (Jer $C \wedge C$ *ekv* C, $A \wedge A$ *ekv* A)

$\quad$ *ekv* $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$

$\quad\quad$ (Korišćenjem asocijativnog i komutativnog zakona za $\wedge$, $\vee$, kao i zakona $F \vee F$ *ekv* F)

Kraj dokaza.

Primetimo da se ekvivalencije zadatka 7 neobično često koriste u ekvivalencijskim dokazima uopšte. Istaknimo još da je podesno – zbog bolje preglednosti umesto znakova $\wedge$, $\vee$ koristiti redom znake $\cdot$, $+$. Tako, uz tu promenu znakova prethodni dokaz postaje:

$$\begin{aligned}
(A \vee B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \vee A) \ & \text{ekv } (A+B)\cdot(B+C)\cdot(C+A) \\
& \text{ekv } (AB+AC+BB+BC)\cdot(C+A) \\
& \text{ekv } (AC+B)\cdot(C+A) \\
& \text{ekv } ACC+ACA+BC+BA \\
& \text{ekv } AB+BC+CA \\
& \text{ekv } (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)
\end{aligned}$$

14. Dokazati tautologiju

$$((A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (A \vee B \vee D) \wedge (A \vee C \vee D)$$

$$\Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D) \vee (C \wedge D)$$

[1] Videti i zadatak 20, tačke XIX o tzv. ADA–strukturi.

Uputstvo. Poći od leve strane i umesto $\vee$, $\wedge$ koristiti znake $+$, $\cdot$, a dalje slično kao u prethodnom zadatku.

15. Dokazati tautologiju

$$(A\wedge B\wedge C)\vee(B\wedge C\wedge D)\vee(A\wedge B\wedge D)\vee(A\wedge C\wedge D))$$
$$\Longleftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)\wedge(A\vee D)\wedge(B\vee C)\wedge(B\vee D)\wedge(C\vee D)$$

Uputstvo. Poći od leve strane i umesto $\vee$, $\wedge$ koristiti znake $\cdot$, $+$, a dalje slično kao u zadatku 13.

16. Obrazovati rastavni i sastavni oblik formule F:

$$[(p \Longleftrightarrow q)\wedge(q\vee r)]\vee\neg[\neg(p\Rightarrow q)\vee(q\wedge r)]$$

Rešenje. Ti oblici se obično obrazuju postupno. Izvesni početni koraci su za oba oblika zajednički. Jedno obrazovanje izgleda:

F *ekv* $[(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\wedge(q\vee r)]\vee\neg[\neg(\neg p\vee q)\vee(q\wedge r)]$

(Korišćenjem dovoljno puta ekvivalencija oblika

$A \Longleftrightarrow B$ *ekv* $(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$, $A\Rightarrow B$ *ekv* $\neg A\vee B$

vršimo uklanjanje znakova $\Longleftrightarrow$, $\Rightarrow$)

ekv $[(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\wedge(q\vee r)]\vee\neg[(\neg\neg p\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)]$

(Koristeći ekvivalencije oblika

$\neg(A\wedge B)$ *ekv* $\neg A\wedge\neg B$, $\neg(A\vee B)$ *ekv* $\neg A\wedge\neg B$

„teramo" znak $\neg$ „udesno" – do samih slova.

Takodje korišćenjem ekvivalencije $\neg\neg A$ *ekv* A

smanjujemo broj negacija na najmanju meru)

ekv $[(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\wedge(q\vee r)]\vee[\neg(p\wedge\neg q)\wedge\neg(q\wedge r)]$

(Teranje znaka $\neg$ udesno)

ekv $[(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\wedge(q\vee r)]\vee[(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg r)]$

Ovde se završava zajednički put u traganju za oba oblika.. Označimo sa G dobijenu formulu.

Da bi se došlo do *rastavnog* oblika može se postupiti ovako. U formuli G znake $\wedge$, $\vee$, $\neg$ zameniti redom znacima $\cdot$, $+$, $'$ (videti zadatak 13) a potom raditi kao sa običnim polinomima (vršiti „množenje" i „sredjivanje"). Tako imamo:

G *ekv* $(p'+q)(q'+p)(q+r)+(p'+q)(q'+r')$

ekv $(p'q'+p'p+qq'+qp)\cdot(q+r)+p'q'+p'r'+qq'+qr'$

ekv $(p'q'+qp)\cdot(q+r)+p'q'+p'r'+qr'$

(Jer qq' *ekv* $q\wedge\neg q$ *ekv* $\perp$, i sl.)

ekv $p'q'q+p'q'r+qpq+qpr+p'q'+p'r'+qr'$

ekv $pq+p'q'r+pqr+p'q'+p'r'+qr'$

ekv $pq+p'q'+p'r'+qr'$

(Jer $pq+pqr$ *ekv* $pq\vee(pq\wedge r)$ *ekv* pq i sl.)

$ekv\ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$

Dobijena formula jeste jedan od rastavnih oblika formule F.

Potražimo sada *sastavni* oblik date formule. Radi toga u formuli G umesto $\wedge$, $\vee$, $\neg$ redom pištemo +, •, '. Ostali rad je sličan prethodnom (jer, na kraju, po uzajamnim vezama $\wedge$, $\vee$ su ravnopravni – što nije slučaj sa običnim sabiranjem i množenjem)

$G\ ekv\ (p'q+q'p+qr) \cdot (p'q+q'r')$

$ekv\ p'qp'q+p'qq'r'+q'pp'q+q'pq'r'+qrp'q+qrq'r'$

$ekv\ p'q+p'qr+pq'r'$

(Jer $pp'\ ekv\ p \vee \neg p\ ekv\ \top$ i sl.)

$ekv\ p'q+pq'r'$

(Jer $p'q+p'qr\ ekv\ p'q \wedge (p'q \vee r)\ ekv\ p'q)$

$ekv\ (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

Tako smo stigli i do jednog od sastavnih oblika polazne formule F.

17. **Nastavak prethodnog zadatka.** Rešiti datu formulu, odnosno odrediti sve njene modele (po p, q, r).

Rešenje. Rešenje (model) te formule po naznačenim slovima je svako preslikavanje oblika

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \qquad (\tau_i \text{ su } \top \text{ ili } \bot)$$

takvo da τ_1, τ_2, τ_3 (kao vrednosti za p, q, r) zadovoljavaju formulu, tj. da važi jednakost $\tau F(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \top$, Radi dobijanja rešenja podesno je koristiti rastavni oblik formule F, jer formula oblika $A \vee B \vee \ldots\ C$ ima vrednost $\top$ upravo u slučaju kada bar jedna od formula $A, B, \ldots, C$ ima vrednost $\top$. Stoga se u odredjivanju rešenja jednačine $\tau F = \top$ može ovako postupiti: Rešiti jednačine $\tau A = \top, \tau B = \top, \ldots, \tau C = \top$ (što je lakše), i potom dobijena rešenja okupiti – tako će se doći do svih rešenja jednačine $\tau F = \top$. Kako

$$F\ ekv\ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$$

to zaključujemo da su sva rešenja date formule:

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \bot & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \bot & \bot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \top & \bot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \bot & \bot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \top & \bot \end{pmatrix}$$

(prva dva su rešenja formule $p \wedge q$ i sl.)

Posle uklanjanja jednakih rešenja dobijamo ovaj spisak svih rešenja formule F

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \bot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \bot & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \bot & \bot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q & r \\ \bot & \top & \bot \end{pmatrix}$$

18. Obrazovati (bar jedan) rastavni i sastavni oblik formule

$$((p \vee q \vee r) \wedge (q \vee s \vee p)) \vee ((q \vee s \vee r) \wedge (p \vee r \vee s))$$

19. Obrazovati (bar jedan) rastavni i sastavni oblik date formule

a) $p \Rightarrow q$, b) $p \Longleftrightarrow q$, c) $p \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r)$, d) $(p \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r)) \Rightarrow \neg (p \Rightarrow \neg (q \Longleftrightarrow r))$

20. Rešiti jednačinu $\tau F = \top$ (po p, q, r), ako je F formula

a) $\neg p \wedge q \wedge r$, b) $\neg p \wedge q$, c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$, d) $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$

Uputstvo. videti zadatak 17.

21. Odrediti vrednosti slova p, q, r za koje sve date formule imaju vrednost $\top$

a) $p, q, q \Rightarrow r$; b) $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$; c) $\neg p, p \vee q, q \vee \neg r)$; d) $p, q \Rightarrow p, p \Rightarrow \neg r$;

e) $p, p \Longleftrightarrow \neg q, q \Longleftrightarrow r$; f) $p \vee q \vee r, p \Rightarrow (q \wedge r)$

22. Rešiti (po p, q, r) jednačinu $\tau(p \wedge \neg q \Rightarrow r) = \perp$.

23. Dokazati da tautologije imaju svojstvo:

$$\models A \quad \text{akko } A \text{ ekv } \top$$

24. Dokazati tautologiju $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ dokazujući da je ta formula ekvivalentna sa $\top$.

25. Dokazati tautologiju $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$ (dokazujući da je data formula ekvivalentna sa $\top$).

26. Pretpostavimo da je formula oblika $A \vee B$ tautologija. Da li je tada uvek bar jedna od formula A, B takodje tautologija?

Rešenje. Odgovor je *ne*. Recimo, formula $p \vee \neg p$ je tautologija, dok nijedna od formula p, $\neg p$ to nije. Slično, tautologija je i formula

$$p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

a nijedan od sastavaka p, q, $\neg p$, $\neg q$ nije takav.

Primetimo da su obe navedene formule rastavnog oblika. Zaključujemo da rastavni oblik ne mora biti podesan za ispitivanje tautologičnosti.

27. Dokazati tautologiju F:

$$(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$$

Uputstvo. Podesno je obrazovati neki s a s t a v n i oblik

$$A \wedge B \wedge \ldots \wedge C$$

date formule, jer tada se pitanje da li je F tautologija prevodi na pitanje: da li su sve formule $A, B, \ldots, C$ tautologije. Budući da su $A, B, \ldots, C$ jednostavne formule, na takvo se pitanje lako odgovara. U slučaju date formule sastavni oblik je

$$(p \vee \neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg r),$$

pa imamo ekvivalencije

F *ekv* $(\top \vee q \vee r) \wedge (p \vee \top \vee r) \wedge (\neg p \vee \top) \wedge (\neg q \vee \top)$

(Jer $p \vee \neg p$ *ekv* $\top$ i sl.)

ekv $\top \wedge \top \wedge \top \wedge \top$

ekv $\top$,

odakle zaključujemo da F jeste tautologija.

28. Obrazovati sastavni oblik i ispitati da li je data formula tautologija

a) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, b) $(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,

c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$, d) $(q \Rightarrow \neg(p \wedge r)) \Rightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg(r \Rightarrow p))$.

29. Neka je A formula oblika

$$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n,$$

pri čemu svaki od $a_1, \ldots, a_n$ je neko iskazno slovo ili negacija slova. Recimo, takve su formule

$$p \vee q \vee p \vee \neg r, \quad \neg p \vee q \vee p \vee \neg r \quad \text{i sl.}$$

Dokazati:

A je tautologija ako i samo ako A zajedno sa nekim svojim slovom sadrži i negaciju tog slova.

Rešenje. Ako je u_i ma koje iskazno slovo, dogovorno umesto u_i, $\neg u_i$ pišemo $u_i^{\top}$, odnosno $u_i^{\perp}$. Koristeći takve oznake možemo reći da je formula A oblika

$$u_1^{\alpha_1} \vee u_2^{\alpha_2} \vee \ldots\ldots \vee u_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_i \text{ je } \top \text{ ili } \perp)$$

pri čemu u_i ne moraju biti različiti. Pretpostavimo, dalje, da su svi članovi $u_1^{\alpha_1}$, $u_2^{\alpha_2}, \ldots\ldots, u_n^{\alpha_n}$ medjusobno različiti, jer ako nisu, to se može jednostavno postići korišćenjem ekvivalencije oblika $A \vee A$ *ekv* A. Recimo, $\neg p \vee q \vee \neg p \vee \neg r \vee p$ ima dva ista člana $\neg p$, ali ta je formula ekvivalentna sa formulom $\neg p \vee q \vee \neg r \vee p$ čiji su svi članovi: $\neg p$, q, $\neg r$, p medjusobno različiti.

Za formulu A postoje dva slučaja:

(i) Svi $u_1, \ldots\ldots, u_n$ su medjusobno različiti,

(ii) Važi bar jedna jednakost oblika

$$u_i = u_j \qquad (\text{gde } i \neq j)$$

U prvom slučaju A nije tautologija jer, recimo, $\tau A = \perp$, ukoliko izaberemo ovakve vrednosti za $u_1, \ldots, u_n$: $\tau u_1 = \neg\alpha_1$, $\tau u_2 = \neg\alpha_2, \ldots, \tau u_n = \neg\alpha_n$.
U drugom slučaju A jeste tautologija, jer A sadrži dva člana oblika u_i, $\neg u_i$ pa je ekvivalentna sa $u_i \vee \neg u_i \vee \ldots$ (gde ... označava izostavljene članove), tj.
A *ekv* $\top$.

30. Dokazati ekvivalencije

$$p \wedge F(p) \Leftrightarrow p \wedge F(\top), \qquad \neg p \wedge F(p) \Leftrightarrow \neg p \wedge F(\perp),$$

gde je $F(p)$ ma koja formula koja sadrži slovo p (a možda još i neka druga slova).

Uputstvo. Leva i desna strana (u oba slučaja) su istovredne i kad p ima vrednost $\top$ i kad p ima vrednost $\perp$.

31. Dokazati ekvivalenciju

$$p_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{\alpha_n} \wedge F(p_1, \ldots, p_n) \text{ ekv } p_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{\alpha_n} \wedge F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

gde je F iskazna formula po slovima $p_1, \ldots, p_n$ (a možda i još nekim drugim), a α_i je $\top$ ili $\perp$.

Uputstvo. Dokazati istovrednost leve i desne strane razlikujući dva slučaja

(i) $\tau p_1 = \alpha_1, \ldots, \tau p_n = \alpha_n$; (ii) Važi bar jedna od različitosti $\tau p_1 \neq \alpha_1, \ldots, \tau p_n \neq \alpha_n$.

32. Neka je $F(p)$ iskazna formula sagradjena, izmedju ostalog, i od slova p. Dokazati ekvivalenciju

$$F(p) \text{ ekv } (F(\top) \wedge p) \vee (F(\perp) \wedge \neg p)$$

Rešenje. Jedan način dokazivanja sastoji se u tome da se dokaže istovrednost obeju strana ekvivalencije (kad p ima vrednost $\top$, odnosno $\perp$, a ostala slova proizvoljnu vrednost).

Medjutim, koristeći ekvivalenciju zadatka 30 dokaz se može i ovako izvesti

$$F(p) \text{ ekv } F(p) \wedge \top \text{ ekv } F(p) \wedge (p \vee \neg p) \text{ ekv } (F(p) \wedge p) \vee (F(p) \wedge \neg p) \text{ ekv } (F(\top) \wedge p) \vee (F(\perp) \wedge \neg p)$$

33. Dokazati ekvivalenciju

$$F(p,q) \text{ ekv } (F(\top,\top) \wedge p \wedge q) \vee (F(\top,\perp) \wedge p \wedge \neg q) \vee (F(\perp,\top) \wedge \neg p \wedge q) \vee (F(\perp,\perp) \wedge \neg p \wedge \neg q)$$

34. Dokazati ekvivalenciju

$$F(p_1, \ldots, p_n) \text{ ekv } \bigvee_{\alpha_i \in \{\top, \perp\}} (F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge p_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{\alpha_n}),$$

gde se disjunkcija uzima za sve mogućnosti vida $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{\top, \perp\}$. Formula $F(p_1, \ldots, p_n)$ je sagradjena od slova $p_1, \ldots, p_n$ (a možda i nekih drugih).

35. Odrediti bar jednu formulu na osnovu date tablice

p	q	$F(p,q)$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

p	q	r	$f(p,q,r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Uputstvo. Koristiti ekvivalenciju zadatka 34 (za $n = 2$, odnosno $n = 3$). U prvom slučaju dobija se formula

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

a u drugom formula

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

36. Odrediti potpuni rastavni oblik date formule u odnosu na slova od kojih je sagradjena

a) $p \Rightarrow q$, b) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q)$, c) $p \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r)$, d) $p \Longleftrightarrow (q \Longleftrightarrow r)$.

Uputstvo. a) Koristeći ekvivalenciju zadatka 33 neposredno dobijamo

$$\begin{aligned}(p \Rightarrow q)\ \mathit{ekv}\ & ((\top \Rightarrow \top) \wedge p \wedge q) \vee ((\top \Rightarrow \bot) \wedge p \wedge \neg q) \vee ((\bot \Rightarrow \top) \wedge \neg p\ \ q) \vee ((\bot \Rightarrow \bot) \wedge \neg p \wedge \neg q)\\ \mathit{ekv}\ & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)\end{aligned}$$

Poslednja formula predstavlja traženi oblik.

Slično, u slučaju formule oblika $F(p_1, \dots, p_n)$ radi dobijanja njenog potpunog rastavnog oblika može se koristiti ekvivalencija zadatka 34. Medjutim, za datu formulu se i ovako može naći potpuni rastavni oblik:

Pronadje se neki rastavni oblik te formule pa se on d o p u n i – na način koji izlažemo – do potpunog rastavnog oblika. Tako, za formulu $p \Rightarrow q$ imamo:

$p \Rightarrow q\ \mathit{ekv}\ \neg p \vee q$

(To je već rastavni oblik)

$\mathit{ekv}\ (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (q \wedge (p \vee \neg p))$

(„Dopunjavanje")

$\mathit{ekv}\ (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)$

$\mathit{ekv}\ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

37. Dokazati ekvivalenciju

$$F(p_1, \dots, p_n)\ \neg\,\mathit{ekv} \bigwedge_{\alpha_i \in \{\top, \bot\}} (F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \vee p_1^{\neg \alpha_1} \vee \dots \vee p_n^{\neg \alpha_n}),$$

gde se konjunkcija uzima za sve mogućnosti vida $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{\top, \bot\}$.

Napomena. Navedena ekvivalencija može se koristiti za obrazovanje potpunog sastavnog oblika date formule.

38. Neka su a, b, c, d elementi skupa $\{\top, \bot\}$. Ukoliko važi ekvivalencija

$$(a \wedge p) \vee (b \wedge \neg p)\ \mathit{ekv}\ (c \wedge p) \vee (d \wedge \neg p),$$

tada važe jednakosti: $a = c$, $b = d$. Dokazati.

Napomena. U stvari, tako je iskazano da je potpuni rastavni oblik formule $F(p)$ jedinstven. U opštem slučaju potpuni sastavni i rastavni oblici date formule su jedinstveni.

39. Neka je $F(p_1, \dots p_n)$ formula čija su sva iskazna slova $p_1, \dots, p_n$. Tada, pod *dvojstvenom (dualnom)* formulom formule F, u oznaci $F^{\star}(p_1, \dots, p_n)$, smatramo formulu $\neg F(\neg p_1, \dots, \neg p_n)$, kao i ma koju sa njom ekvivalentnu formulu.
(i) Dokazati da su formule $p \vee q,\ p \wedge q,\ \neg p,\ \top,\ \bot$ po redu dvojstvene za formule $p \wedge q,\ p \vee q,\ \neg p,\ \bot,\ \top$.
(ii) Dokazati da je formula $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ *samodvojstvena*, tj. da su F i $F^{\star}$ ekvivalentne formule.

40. Dokazati ekvivalencije

$$(A \wedge B)^{\star} \Longleftrightarrow A^{\star} \vee B^{\star}, \quad (A \vee B)^{\star} \Longleftrightarrow A^{\star} \wedge B^{\star}, \quad (\neg A)^{\star} \Longleftrightarrow \neg A^{\star}, \ A^{\star\star} \Longleftrightarrow A,$$

gde su A, B ma koje formule, kao i ekvivalenciju $p^{\star} \Longleftrightarrow p$, gde je p iskazno slovo.

41. Za datu formulu $A(\wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$ – kod koje su istaknuti samo znaci u njoj učestvujućih logičkih operacija, kao i znaci $\top, \bot$, neka $\bar{A}$ bude dogovorna oznaka formule $A(\vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$ dobijene iz prve zamenjivanjem svih njenih znakova $\wedge$, $\vee, \neg, \top, \bot$ po redu znacima $\vee, \wedge, \neg, \bot, \top$. Dokazati:
(i) Formula oblika $P \Longleftrightarrow Q$ je tautologija *akko* formula $\bar{P} \Longleftrightarrow \bar{Q}$ je tautologija;
(ii) Formula A je tautologija akko formula $\neg \bar{A}$ je tautologija.
Da li je $\bar{A}$ dvojstvena formula za A?

42. Odrediti potreban i dovoljan uslov da formula oblika

$$(F(p_1, \dots, p_n) \Rightarrow p) \Longleftrightarrow F^{\star}(p_1 \Rightarrow p, \dots, p_n \Rightarrow p)$$

bude tautologija.

43. Odrediti formulu $X(p)$, p je njeno jedino slovo, tako da formula

$$p \Rightarrow X(p)$$

bude tautologija.

Rešenje. Zadatak se može i ovako shvatiti: Rešiti uslov

$$(\star) \qquad \models p \Rightarrow X(p)$$

po formuli $X(p)$. Osnovna zamisao je da se pomoću uslova $(\star)$ odredi tablica formule $X(p)$, a potom i sama ta formula. Radi toga obrazujemo naredni ekvivalencijski lanac.

$(\star)$ akko $\tau(\top \Rightarrow X(\top)) = \top,\ \tau(\bot \Rightarrow X(\bot)) = \top$

(Definicija tautologije)

akko $\tau X(\top) = \top$

(Ta jednakost sledi iz prve jednakosti. Tako je određena vrednost formule $X(p)$ kad p ima vrednost $\top$. Druga jednakost, u kojoj se nalazi $X(\bot)$, je ispunjena bez obzira šta je $X(\bot)$, odnosno $X(\bot)$ može biti $\top$ ili $\bot$. U oba slučaja je druga jednakost u važnosti, pa smo je stoga i izostavili.)

akko $X(p)$ ima tablicu

p	$\top$	$\bot$
$X(p)$	$\top$	π

(π je $\top$ ili $\bot$, tj. proizvoljno)

Prema dosadašnjem rasudjivanju problem se svodi na odredjivanje formule $X(p)$ na osnovu dobijene tablice. Na osnovu zadatka 32 vredi ekvivalencija

$$X(p)\ ekv (X(\top) \wedge p) \vee (X(\bot) \wedge \neg p)$$

odakle zaključujemo

$$X(p)\ ekv\ (\top \wedge p) \vee (\pi \wedge \neg p)$$

odnosno

$$X(p)\ ekv\ p \vee \pi$$

Tako dolazimo do ovog završnog odgovora:

Formula $X(p)$ – do na ekvivalentnost – jednaka je formuli $p \vee \pi$, gde je π proizvoljno – može biti $\top$ ili $\bot$.

Zamenjujući π prvo sa $\top$, a potom sa $\bot$ dobijamo formule $p \vee \top$, $p \vee \bot$, odnosno $\top$, p sa jednom od kojih je ekvivalentna tražena formula $X(p)$. Podrobnije, do na ekvivalentnost, postoje dve formule: $\top$ i p koje zadovoljavaju uslov (☆).

Napomena 1. Obično se za uslov kao što je (☆) kaže da je *Bulova jednačina* po nepoznatoj $X(p)$. Inače, taj uslov se može lako prevesti na stvarnu jednačinu. Naime, (☆) je ekvivalentno sa:

$$\tau(p \Rightarrow X) = \top\text{, za svaki } \tau$$

Evo još primera Bulovih jednačina:

$\models p \wedge q \Longleftrightarrow p \wedge X(p,q)$, $\quad \models A \Rightarrow X$ (A je data, X nepoznata formula)

Napomena 2. Prema prethodnom zadatku, rešenja Bulove jednačine (☆) – može se tako reći – odredjuju se, do na ekvivalentnost, formulom

(☆☆) $$p \vee \pi\text{,}$$

gde je $\pi \in \{\top, \bot\}$ proizvoljno. Formulu (☆☆) nazivamo *opšte rešenje* Bulove jednačine (☆).

44. Odrediti formulu $X(p)$ koja zadovoljava uslov

a) $\models p \Longleftrightarrow X(p)$, b) $\models X(p) \Rightarrow p$, c) $\models p \vee X(p)$

45. Odrediti formulu $X(p,q)$ koja zadovoljava uslov

a) $\models p \wedge q \Longleftrightarrow p \wedge X(p,q)$, b) $\models p \wedge X(p,q) \Rightarrow q$, c) $\models p \vee X(p.q) \Rightarrow q \vee \neg X(p,q)$

Odgovor. a) $X(p,q)\ ekv\ (p \wedge q) \vee (\pi_1 \wedge \neg p \wedge q) \vee (\pi_2 \wedge \neg p \wedge \neg q)$ – π_1, π_2 su proizvoljni elementi skupa $\{\top,\bot\}$. Dakle, do na ekvivalentnost, postoje četiri različite forme $X(p,q)$: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$, $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, $p \wedge q$.

46. Neka je A data formula. Dokazati da su sve formule X koje zadovoljavaju uslov

(1) $$\models A \Rightarrow X$$

odredjene obrascem

(2) $$X\ ekv\ A \vee \Pi\text{,}$$

gde je Π proizvoljna formula.

Rešenje. Neka je, prethodno, Π ma koja iskazna formula. Formula $A \vee \Pi$ zadovoljava uslov (1), jer $A \Rightarrow A \vee \Pi$ je tautologija. Dakle, obrazac (2) odredjuje razna rešenja uslova (1). Da li su njime obuhvaćena i sva rešenja tog uslova? Radi dokaza, pretpostavimo da je X_0 ma koje rešenje. Pitanje je kako pomoću obrasca (2) dobiti, do na ekvivalentnost, upravo X_0, odnosno šta izabrati za Π. Nije teško uvideti da je dosta za Π izabrati upravo rešenje X_0. Zaista, ako umesto Π stavimo X_0 i vodimo računa o tome da za X_0 važi uslov $\models A \Rightarrow X_0$ zaključujemo

$$A \vee \Pi \ ekv\ A \vee X_0$$

$$ekv\ X_0, \text{ jer je } (A \Rightarrow X_0) \Rightarrow (A \vee X_0 \Longleftrightarrow X_0) \text{ tautologija.}$$

Znači $A \vee \Pi$ se svodi, do na ekvivalentnost, na X_0. Kraj dokaza.

47. Da li obrazac

$$X\ ekv\ A \wedge \Pi \qquad (\Pi \text{ je proizvoljna formula})$$

odredjuje sva rešenja uslova (po X):

$$\models X \Rightarrow A \quad ?$$

48. Neka su A, B date formule. Dokazati[1] da je

(1) $$\models A+B$$

potrebno i dovoljno da uslov po X:

(2) $$\models AX+BX'$$

ima rešenje, i da su u tom slučaju obrascem

(3) $$X\ ekv\ A(B'+\Pi) \qquad (\Pi \text{ je proizvoljna formula})$$

odredjena sva rešenja tog uslova.

Rešenje. Pretpostavimo da je jednačina (2) moguća i da je X_0 jedno njeno rešenje. Tada:

(4) $$\models AX_0 + BX'_0$$

Zamislimo, dalje, da iskazna slova (koja ulaze u sve formule A, B, X_0) imaju neke vrednosti. Tada mogu nastupiti slučajevi

$$\text{(i) } \tau X_0 = \top, \qquad \text{(ii) } \tau X_0 = \bot$$

U prvom slučaju, na osnovu (4) zaključujemo

(5) $$\tau A = \top$$

a u drugom

(6) $$\tau B = \top$$

Dakle, za ma koju vrednost iskaznih slova važi bar jedna od jednakosti (5), (6). No, odatle sledi da je disjunkcija

---

[1] Umesto $\vee$, $\wedge$, $\neg$ redom stoje $+$, $\cdot$, $'$.

$$A + B$$

opštevažeća, odnosno da je tautologija. Tako je dokazano da je (1) potreban uslov da jednačina (2) bude moguća.

Pretpostavimo sada da je uslov (1) ispunjen, i dokažimo da obrazac (3) odredjuje sva rešenja uslova (2). Zaista, ako je Π ma koja formula, zamenjujući X sa $A(B'+\Pi)$ zaključujemo

$AX + BX'$ ekv $A \cdot A(B' + \Pi) + B(A(B' + \Pi))'$

ekv $AB' + A\Pi + B(A' + B\Pi')$

(Korišćenje De Morganovih zakona)

ekv $AB' + BA' + A\Pi + B\Pi'$

ekv $\top$, jer formula $(A+B) \Rightarrow (AB'+BA' + A\Pi + B\Pi')$ je tautologija.

Dakle, obrazac (3) zaista odredjuje izvesna rešenja uslova (2).

Dokazujemo da (3) odredjuje sva rešenja. Neka je X_0 ma koje rešenje. Postupajući slično kao u zadatku 45 sa Π biramo upravo X_0. Tada imamo

$A(B' + \Pi)$ ekv $A(B' + X_0)$

ekv X_0, jer formula $(AX_0 + BX_0') \Rightarrow (A(B' + X_0) \Longleftrightarrow X_0)$ je tautologija;

A, B, X_0 su ma koje formule.

Dakle, obrazac (3) kao rezultat daje upravo formulu X_0.

Zaključak je da se obrascem (3) „pokrivaju" sva rešenja uslova (2).

Napomena. Navedeni dokazi iz prethodnog zadatka nisu potpuni. Preostaje još da se dokaže da formule

$$(A+B) \Rightarrow (AB' + BA' + A\Pi + B\Pi'), \quad (AX_0 + BX_0') \Rightarrow (A(B'+X_0) \Longleftrightarrow X_0)$$

jesu tautologije, gde su A, B, Π, X_0 proizvoljne iskazne formule.

49. Neka su A, B, C date formule. Dokazati da je

$$\models A + B + C$$

potreban i dovoljan uslov da jednačina po X

$$\models AX + BX' + C$$

ima rešenja, i da su u tom slučaju obrascem

$$X \; ekv \; (A+C)(B'C'+\Pi) \quad (\Pi \text{ je proizvoljna formula})$$

odredjena sva rešenja te jednačine.

Uputstvo. Koristiti prethodni zadatak kao i: C ekv $CX + CX'$.

50. Da li je uslov: $\models A \Rightarrow B$ potreban i dovoljan da sistem

$$\models A \Rightarrow X, \qquad \models X \Rightarrow B$$

ima rešenja po X?

Uputstvo. Obrazovati konjunkciju $(A \Rightarrow X) \wedge (X \Rightarrow B)$.

51. Rešiti po X sistem

$$\models X \Rightarrow A, \quad \models X \Rightarrow B \quad (A, B \text{ date formule})$$

IX RAZNI PRIMERI

Upoznajmo izvesne primene dosada izloženog, odnosno primere u kojima se koriste tautologije, razna svojstva jednakosti i sl. Dokazna sredstva, pri tom, uglavnom ne izlaze iz okvira dosad upoznatih činjenica. Gde–gde koristimo i kvantore i jednostavnije činjenice o njima.

ZADACI

1. Pretpostavimo da su dokazane dve formule (rečenice) oblika $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$. Da li se, tada može uzeti da je $A \Rightarrow C$ istinita formula?

Rešenje. Odgovor je, naravno, potvrdan. Radi obrazloženja dovoljno je ukazati na okolnost da je formula

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

tautologija. Drugačije se kaže: ta tautologija je logička osnova ovog *pravila izvodjenja*.

$$\frac{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C} \qquad \text{(Iz } A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \text{ proizlazi } A \Rightarrow C\text{)}$$

To se pravilo, tzv. *tranzitivnost (prenosnost) implikacije*, uopšte, često koristi.

Navodimo još i neka druga pravila[1]) koja se slično temelje na odgovarajućim tautologijama

$$\frac{A \Longleftrightarrow B,\ B \Longleftrightarrow C}{A \Longleftrightarrow C} \qquad \text{(Pravilo tranzitivnosti ekvivalencije)}$$

$$\frac{A \Longleftrightarrow B}{B \Longleftrightarrow A} \qquad \text{(Pravilo simetrije ekvivalencije)}$$

$$\frac{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow A}{A \Longleftrightarrow B} \qquad \text{(Pravilo antisimetrije implikacije)}$$

U daljem izlaganju ukazivaćemo na upotrebu navedenih pravila.

2. Dokazati: Ako je ceo broj deljiv sa *2* i sa *3* deljiv je i sa *6*.

Rešenje. Jedan dokaz je ovaj implikacijski lanac

---

[1]) To su primeri l o g i č k i h p r a v i l a i z v o dj e nj a za razliku od matematičkih kakvo je recimo $\frac{A=B,\ B=C}{A=C}$.

x je deljiv sa 2 i sa 3

$\Rightarrow x = 2a \wedge x = 3b$	(a,b su neki celi brojevi)[1])
$\Rightarrow 3x = 6a \wedge 2x = 6b$	(Množenje prethodnih jednakosti sa 3, odnosno sa 2)
$\Rightarrow 3x - 2x = 6a - 6b$	(Oduzimanje prethodnih jednakosti)
$\Rightarrow x = 6\,(a-b)$	
$\Rightarrow x$ je deljiv sa 6	(Jer $a-b$, kao razlika celih brojeva a, b je ceo broj)[2])

Dalje, koristeći pravilo tranzitivnosti implikacije zaključujemo:

$$x \text{ je deljiv sa } 2 \text{ i sa } 3 \Rightarrow x \text{ je deljiv sa } 6$$

3. Dokazati implikaciju: $3|x \wedge 5|x \Rightarrow 15|x$.

4. Dokazati ekvivalencije (o celim brojevima)

$$2|x \wedge 3|x \Longleftrightarrow 6|x, \qquad 3|x \wedge 5|x \Longleftrightarrow 15|x$$

Uputstvo. Dokaze izvoditi u dva smera a potom primeniti pravilo antisimetrije implikacije $\dfrac{A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow A}{A \Longleftrightarrow B}$

5. Dokazati implikacije o celim brojevima

$$m \in 2Z \wedge n \in 2Z \Rightarrow m+n \in 2Z \wedge m \cdot n \in 2Z,\ m \in 2Z \wedge n \in 2Z+1 \Rightarrow m+n \in 2Z+1 \wedge m \cdot n \in 2Z$$

$$m \in 2Z+1 \wedge n \in 2Z+1 \Rightarrow m+n \in 2Z \quad m \cdot n \in 2Z+1$$

6. Dokazati ispravnost pravila

$$\frac{\neg B \Rightarrow \neg A}{A \Rightarrow B} \qquad \text{(Pravilo kontrapozicije (premeštanja))}$$

Uputstvo. Formula $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ je tautologija.

Napomena. Navodimo nekoliko primera primene pravila kontrapozicije u dokazivanju.

Recimo, zadatak: Dokazati implikaciju

(☆) $\qquad 3x \neq 3 \Rightarrow x \neq 1 \qquad$ (x je, na primer, prirodan broj)

može se ovako rešiti. Na osnovu pravila kontrapozicije, implikacija (☆) biće dokazana, ukoliko dokažemo njen premešaj (kontrapoziciju):

$$\neg(x \neq 1) \Rightarrow \neg(3x \neq 3),$$

---

[1])Definicija deljivosti broja x sa 2 (a slično i, uopšte sa m), kada se strogo zapiše, glasi:

$$2|x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists a \in Z)x = 2a$$

Otuda su u prethodnom dokazu korišćeni (ali prećutno) i neki jednostavni zakoni za kvantore.

[2])Pisanje koje smo koristili uobičajeno je za implikacijski lanac: $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_2 \Rightarrow A_3, \ldots,$ $A_{n-1} \Rightarrow A_n$. Slično se piše i u slučaju nekog ekvivalencijskog lanca.

odnosno, ukoliko dokažemo:

(☆☆) $x = 1 \Rightarrow 3x = 3.$

Medjutim, poslednja formula je tačna, na osnovu pravila saglasnosti jednakosti sa svakom operacijom. Dakle, tačna je i formula (☆).

Navodimo još nekoliko primera matematičkih tvrdjenja oblika implikacije, sa odgovarajućim kontrapozicijama.

(1) $x \cdot y=0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$	(1') $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0$
(2) $x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0,$	(2') $x \cdot y \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$
(3) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x+y > 0,$	(3') $x+y \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0 \vee y \leqslant 0$
(4) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0,$	(4') $x \cdot y \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0 \vee y \leqslant 0$
(5) $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z,$	(5') $x \geqslant z \Rightarrow x \geqslant y \vee y \geqslant z$

Zanimljivo je da neka od tih tvrdjenja kao (3'), (5') nisu potpuno očigledna.

7. Do kojih se tvrdjenja dolazi kontrapozicijom datih tvrdjenja (o pravim a, b, c)[1]

(1) $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c;$ (2) $a \perp b \wedge b \perp c \Rightarrow a \parallel c;$ (3) $a \perp b \wedge a \parallel c \Rightarrow c \perp b;$

(4) *Ako prave a, b imaju najmanje dve zajedničke tačke, onda se one poklapaju.*

(5) *Ako se prave a,b seku ili su paralelne, onda one pripadaju jednoj ravni*

8. Ustanoviti da li su istinite implikacije o realnim nizovima:

Ako niz nije ograničen, onda on nije konvergentan,

Ako niz nije konvergentan, onda on nije monoton ili nije ograničen.

Odgovor. Istinite su, jer njihove kontrapozicije

Konvergentan niz je ograničen,

Monoton i ograničen niz je konvergentan

jesu poznata tvrdjenja iz analize.

9. Dokazati ispravnost pravila

$$\frac{\neg A \Longleftrightarrow \neg B}{A \Longleftrightarrow B} \qquad \text{(Pravilo kontrapozicije za ekvivalenciju)}$$

10. Kako glasi kontrapozicija svakog od tvrdjenja:

$x = 1 \wedge y = 1 \Longleftrightarrow x \cdot y = 1$ (x,y prirodni brojevi)

$2|x \wedge 3|x \Longleftrightarrow 6|x$ (x ceo broj)

$x = 0 \vee y = 0 \Longleftrightarrow x \cdot y = 0$ (x,y realni brojevi)

11. Neko je radi dokaza formule A postupio na ovaj način. Pošao je od pretpostavke $\neg A$ i na osnovu toga izveo izvesna dva suprotna zaključka R, $\neg R$. Da li se može smatrati da je tako formula A dokazana?

Rešenje. Formula oblika $(\neg A \Rightarrow R \wedge \neg R) \Rightarrow A$ je, što se lako proverava, tautologija. Stoga je odgovor na postavljeno pitanje potvrdan.

[1] $a \perp b$ je zamena za: p r a v a a j e n o r m a l n a n a p r a v u b.

Napomena. U matematici se često na opisan način pristupa dokazivanju neke činjenice A. Taj se postupak zove metoda *svodjenja na protivrečenost* (reductio ad absurdum).

12. Dokazati da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj, odnosno da ne postoje dva cela broja p, q takva da $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Rešenje. Dokaz izvodimo metodom svodjenja na protivrečnost. Označimo sa A tvrdjenje zadatka i pretpostavimo $\neg A$, odnosno:

(1) $\sqrt{2}$ *jeste racionalan broj*

Tada za neke cele brojeve p, q $(q \neq 0)$ vredi jednakost

(2) $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Posle skraćivanja (u slučaju kad za to postoji mogućnost) jednakost (2) postaje

(3) $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $\quad$ *(a, b* $\in Z$, *b* $\neq 0$, *a* i *b* *uzajamno prosti)*

Odatle kvadriranjem proizlazi

(4) $2 = \frac{a^2}{b^2}$, odnosno $a^2 = 2b^2$

znači a^2 je paran broj, pa je i a paran, odnosno za neki ceo broj k vredi

(5) $a = 2k$

Uvršćujući $2k$ umesto a u drugu od jednakosti (4) neposredno zaključujemo da je i b paran broj, Znači, brojevi a i b su parni pa oni *nisu* uzajamno prosti. To je kontradikcija sa (3) prema kome *a, b jesu* uzajamno prosti[1]).

Dakle $\neg A$ dovodi do kontradikcije te je time metodom svodjenja na protivurečnost dokazano A.

13. Dokazati da $\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

14. Da li je ispravno pravilo

$$\frac{P \wedge \neg Q \Rightarrow R \wedge \neg R}{P \Rightarrow Q}$$

Napomena. Reč je o posebnom slučaju pravila $\frac{\neg A \Rightarrow R \wedge \neg R}{A}$ (sadržanog u metodi svodjenja na protivurečnosti) ukoliko je A oblika $P \Rightarrow Q$. Naime, tada je $\neg A$, tj. $\neg (P \Rightarrow Q)$, ekvivalentno sa $P \wedge \neg Q$.

15. Dokazati (koristeći aksiome polja[2])) implikaciju o realnim brojevima

---

[1])Zapazimo da je umesto a, b s u u z a j a m n o p r o s t i dosta pretpostaviti: a, b nisu oba parna. Celo prethodno rasudjivanje ostaje u važnosti i u tom slučaju.

[2])U ovom i nekim narednim zadacima o realnim brojevima je prećutno prisutna pretpostavka da realni brojevi obrazuju polje. Tako, ti zadaci su produžetak razmatranja iz 52. zadatka (i nekih ranijih) tačke VI.

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Rešenje. Dokaz svodjenjem na protivurečnost glasi

(1) $a \cdot b = 0$ (Pretpostavka P)

(2) $a \neq 0,\ b \neq 0$ (Pretpostavka $\neg$ Q)

(3) $\frac{1}{a} \cdot a \cdot b = \frac{1}{a} \cdot 0$ (Jednakost (1) pomnožena je sa $\frac{1}{a}$)

(4) $1 \cdot b = 0$ (Pošto $a \neq 0$, to $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ i $\frac{1}{a} \cdot 0 = 0$)

(5) $b = 0$

Kraj dokaza, jer je jednakost $b = 0$ suprotna sa $b \neq 0$ – druga od jednakosti (2).

16. Metodom svodjenja na protivurečnost dokazati da za prave u ravni vrede implikacije

$$a \| b \wedge b \| c \Rightarrow a \| c, \quad a \perp b \wedge b \perp c \Rightarrow a \| c$$

17. Pozivajući se na odgovarajuću tautologiju dokazati ispravnost tzv. *pravila razlikovanja slučajeva*

$$\frac{A_1 \vee A_2,\ A_1 \Rightarrow B,\ A_2 \Rightarrow B}{B}$$

Napomena. To je pravilo logička osnova metode dokazivanja sa istim nazivom – *metode razlikovanja slučajeva.* Primenjuje se pri dokazivanju formule B na osnovu pretpostavke A koja se može razložiti na dva slučaja A_1, A_2 (ili, uopšte, na konačno mnogo), tj. koja je oblika disjunkcije $A_1 \vee A_2$. Tada je dosta dokazati formulu B u svakom od tih slučajeva, odnosno dokazati implikacije: $A_1 \Rightarrow B$, $A_2 \Rightarrow B$.

18. Metodom razlikovanja slučajeva dokazati da je proizvod dva uzastopna cela broja paran broj, odnosno: $n \cdot (n+1)$ je paran.

Rešenje. Kako je za cele brojeve tačna disjunkcija

(1) n je paran $\vee$ n je neparan, tj. $n \in 2Z \vee n \in 2Z+1$,

to je dosta dokazati ove dve implikacije

(2) $n \in 2Z \Rightarrow n \cdot (n+1) \in 2Z,\quad n \in 2Z+1 \Rightarrow n \cdot (n+1) \in 2Z$

Prva od njih je očigledno tačna, pošto je proizvod parnog broja n sa bilo kojim celim brojem (pa i sa $n+1$) paran broj. Za dokaz druge implikacije dosta je uočiti činjenicu *da su uzastopni celi brojevi različite parnosti,* tj. da vredi ekvivalencija

(3) $$n \in 2Z+1 \Longleftrightarrow n+1 \in 2Z$$

Tada dokaz glasi

$n \in 2Z+1 \Rightarrow n+1 \in 2Z$ (Prema (3))

$\Rightarrow n \cdot (n+1) \in 2Z$ (Proizvod broja n sa parnim brojem $n+1$ je paran)

Znači vredi i: $n \in 2Z+1 \Rightarrow n \cdot (n+1) \in 2Z$, na osnovu pravila tranzitivnosti implikacije.

Najzad, iz (1) i (2) na osnovu pravila razlikovanja slučajeva sledi zaključak: $n \cdot (n+1) \in 2Z$. Kraj dokaza.

19. Dokazati da je proizvod tri uzastopna cela broja deljiv sa 3.

20. Dokazati implikaciju o realnim brojevima

$$a=0 \vee b=0 \Rightarrow a \cdot b=0$$

Uputstvo. Dokazati dve implikacije

$$a=0 \Rightarrow a \cdot b=0, \qquad b=0 \Rightarrow a \cdot b=0$$

tj. formule $0 \cdot b=0, a \cdot 0=0$ (videti zadatak 55 tačke VI).

21. Dokazati ekvivalencije o realnim brojevima

(i) $a \cdot b=0 \Longleftrightarrow a=0 \vee b=0$, (ii) $a \cdot b \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Uputstvo. (i) U zadacima 15 i 20 dokazane su obe polovine ekvivalencije.
(ii) Ta je formula kontrapozicija prve ekvivalencije.

22. Dokazati ekvivalencije o celim brojevima

(i) $m \cdot n \in 2Z \Longleftrightarrow m \in 2Z \vee n \in 2Z$, (ii) $m \cdot n \in 2Z+1 \Longleftrightarrow m \in 2Z+1 \wedge n \in 2Z+1$

Napomena. Korišćenjem relacije $\equiv_2$ (kongruencija po modulu 2) prethodne formule mogu se zapisati u obliku:

(i) $m \cdot n \equiv_2 0 \Longleftrightarrow m \equiv_2 0 \vee n \equiv_2 0$, (ii) $m \cdot n \equiv_2 1 \Longleftrightarrow m \equiv_2 1 \wedge n \equiv_2 1$

23. Dokazati ekvivalencije o celim brojevima

(i) $m+n \in 2Z \Longleftrightarrow (m \in 2Z \wedge n \in 2Z) \vee (m \in 2Z+1 \wedge n \in 2Z+1)$,

(ii) $m+n \in 2Z+1 \Longleftrightarrow (m \in 2Z \wedge n \in 2Z+1) \vee (m \in 2Z+1 \wedge n \in 2Z)$

24. Za cele brojeve je tačna ekvivalencija

$$m \cdot n \in 2Z \wedge m+n \in 2Z \Longleftrightarrow m \in 2Z \wedge n \in 2Z$$

Dokazati.

25. Dokazati ispravnost pravila izvodjenja

$$\frac{A,\ A \Rightarrow B}{B} \ \text{(Modus ponens)}, \qquad \frac{A,\ A \Longleftrightarrow B}{B} \ \text{(Modus ponens za} \Longleftrightarrow)$$

26. Medju aksiomama euklidske geometrije nalazi se i tzv. *aksioma* paralelnosti[1]: Za svaku pravu a i svaku tačku A postoji tačno jedna prava b paralelna sa a. Dokazati da iz te aksiome sledi

(1) $a \parallel b \wedge a$ *seče* $c \Rightarrow b$ *seče* c (a, b, c prave u ravni)

Uputstvo. U ravni vredi ekvivalencija $\neg(a \parallel b) \Longleftrightarrow a$ *seče* b.

---

[1] Ta je aksioma nešto jača od uobičajene aksiome paralelnosti koja se iskazuje za slučaj t a č k a A j e v a n p r a v e a, jer se u slučaju $A \in a$ tvrdjenje o postojanju jedinstvene prave b paralelne sa a neposredno dokazuje. Naime, b je upravo a.

27. Dokazati tranzitivnost relacije $\parallel$ za prave u ravni.

Uputstvo. Dokazati ekvivalenciju

(2) $(a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c) \Longleftrightarrow (a \parallel b \wedge a \text{ seče } c \Rightarrow b \text{ seče } c)$,

a zatim na tvrdjenja (1) i (2) primeniti pravilo $\dfrac{A, A \Longleftrightarrow B}{B}$

28. Dokazati valjanost *pravila saglasnosti ekvivalencije sa osnovnim logičkim operacijama*

$$\frac{A \Longleftrightarrow B}{\neg A \Longleftrightarrow \neg B}, \qquad \frac{A \Longleftrightarrow B}{C \star A \Longleftrightarrow C \star B}, \qquad \frac{A \Longleftrightarrow B}{A \star C \Longleftrightarrow B \star C} \quad (\star \text{ je } \wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow)$$

Napomena. Uopšte, dokazuje se ispravnost tzv. *pravila zamene* koje se može ovako opisati.

Pretpostavimo da je formula oblika $A \Longleftrightarrow B$ dokazana, i pri tome je A podformula od F. Tada se zamenom A sa B od F prelazi na formulu F_1 i vredi:

$F \Longleftrightarrow F_1$ je istinita formula

29. *Implikacija je saglasna sa konjunkcijom i disjunkcijom,* odnosno

$$\frac{A \Rightarrow B}{C \star A \Rightarrow C \star B}, \qquad \frac{A \Rightarrow B}{A \star C \Rightarrow B \star C} \qquad (\star \text{ je } \wedge, \vee)$$

Dokazati ispravnost tih pravila.

30. Dokazati ekvivalenciju

$$(a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c) \Longleftrightarrow (\forall x)(x = a \vee x = b \Longleftrightarrow x = c \vee x = d)$$

31. Da li za proizvoljnu relaciju ekvivalencije $\sim$ skupa S vredi

$$(a \sim c \wedge b \sim d) \vee (a \sim d \wedge b \sim c) \Longleftrightarrow (\forall x)(x \sim a \vee x \sim b \Longleftrightarrow x \sim c \vee x \sim d) .$$

32. U naše vreme za teoriju skupova (osnivač G.Cantor, 1848–1918) postoje razni aksiomatski pristupi. U tzv. Zermelo–Fraenkel–ovom[1]) sistemu polazni pojam je relacija *biti element*(znak $\in$). Neke od postavki su (kasnije navodimo ZF sistem u celosti):

(i) Relacija *jednakost* (skupova) uvodi se definicijom

$$A = B \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

(Skupovi su jednaki akko imaju iste elemente)

(ii) Relacija *uključivanje* (inkluzija) uvodi se sa:

$$A \subseteq B \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

(iii) Skup svih elemenata x koji (i samo oni) poseduju izvesno svojstvo $F(x)$ označava se, obično, ovako: $\{x \mid F(x)\}$.

[1]) Ernest Zermelo (1871–1953), Abraham Fraenkel (r. 1891).

(iv) Svojstvima $x \in A \vee x \in B$, $x \in A \wedge x \in B$, $x \in A \wedge x \notin B$ odredjuju se osnovne skupovne operacije *unija* $A \cup B$, *presek* $A \cap B$, *razlika* $A \setminus B$ skupa A sa skupom B. Dakle:

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\},\quad A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},\quad A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(v) Sa $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a, b, c\}$, i sl. označavamo, dalje, skupove čiji su svi članovi a, odnosno a, b, odnosno a, b, c. Drukčije rečeno

$$\{a\} = \{x \mid x = a\},\quad \{a,b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\},\quad \{a,b,c\} = \{x \mid x = a \vee x = b \vee x = c\}$$

1° Uočavajući svojstvo $F(x)$: $x \notin x$ dokazati da postoje svojstva kojima ne odgovaraju skupovi, tj. nisu *okupljajuća (kolektivizirajuća)*

2° Ako svojstvu $F(x)$ odgovara izvestan skup S, tada je S jedinstven, tj. uslov

$$x \in S \Longleftrightarrow F(x)$$

može zadovoljavati tačno jedan skup S. Dokazati.

3° Relacija = je (R), (S), (T) relacija, tj. tačne su formule

$$x = x,\quad x = y \Rightarrow y = x,\quad x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$$

za ma koje skupove x, y, z. Dokazati.

4° Dokazati da je relacija $\subseteq$ (R), (AS), (T) relacija, tj. tačne su formule

$$x \subseteq x,\quad x \subseteq y \wedge y \subseteq x \Rightarrow x = y,\quad x \subseteq y \wedge y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$$

5° Dokazati jednakosti

$$\begin{array}{ll}
A \cup A = A & A \cap A = A \\
A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
A \cup (A \cap B) = A & A \cap (A \cup B) = A \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{array}$$

Uputstvo. 1° Videti 19. zadatak II tačke. 2° Neka vrede ekvivalencije

$$x \in S_1 \Longleftrightarrow F(x),\quad x \in S_2 \Longleftrightarrow F(x) \qquad \text{(Za sve } x\text{)}$$

Odatle koristeći simetrije i tranzitivnost za $\Longleftrightarrow$ zaključujemo

$$x \in S_1 \Longleftrightarrow x \in S_2 \qquad \text{(Za sve } x\text{)}$$

što daje $S_1 = S_2$.

3° Pretpostavimo $x = y \wedge y = z$. Tada za svaki element a vrede ekvivalencije

$$a \in x \Longleftrightarrow a \in y,\quad a \in y \Longleftrightarrow a \in z$$

a odatle sledi nova ekvivalencija

$$a \in x \Longleftrightarrow a \in z \qquad \text{(Za ma koji element } a\text{)}$$

tj. $x = z$. Dakle: $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$.

5° Jedan dokaz, recimo, jednakosti J: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ glasi

$J \Longleftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \cup (B \cap C) \Longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$

(Definicija jednakosti skupova)

$\Longleftrightarrow (\forall x)\,(x \in A \vee x \in B \cap C)) \Longleftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C)$

(Jer po definiciji $\cup$ i $\cap$ vrede ekvivalencije oblika

$x \in P \cup Q \Longleftrightarrow x \in P \vee x \in Q,\ x \in P \cap Q \Longleftrightarrow x \in P \wedge x \in Q)$

$\Longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

$\Longleftrightarrow (\forall x)(p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(Formule $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ su označene redom sa p, q, r)

$\Longleftrightarrow (\forall x)\top$

(Jer formula $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee z)$ je tautologija)

$\Longleftrightarrow \top$

33. Dokazati jednakosti

$$\{a\} = \{a,a\},\ \{a,b\} = \{b,a\},\ \{a,b,c\} = \{b,c,a\} = \{b,a,c\}$$

34. Dokazati ekvivalenciju

$$\{a,b\} = \{c,d\} \Longleftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$$

Uputstvo. Iskoristiti ekvivalenciju zadatka 31.

35. Sa $f(a,b)$ označimo skup $\{\{a\}, \{a,b\}\}$, gde su a,b ma koji skupovi. Dokazati ekvivalenciju:

$$f(a,b) = f(c,d) \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Napomena. U skladu sa važenjem prethodne ekvivalencije skup $f(a,b)$ se naziva *uredjena dvojka* skupa a sa skupom b. Inače, umesto $f(a,b)$ koristi se uobičajena oznaka (a, b).

36. Neka su A, B podskupovi skupa U. Dokazati jednakosti

$$(A \cup B)' = A' \cap B',\quad (A \cap B)' = A' \cup B' \qquad \text{(De Morganovi zakoni)}$$

gde $'$ označava komplement prema skupu U (tj. S' je $U \setminus S$).

Uputstvo. Prvu jednakost dovesti u vezu sa formulom

$$x \in U \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \Longleftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A) \wedge (x \in U \wedge x \notin B)$$

koja je slučaj tautologije

$$u \wedge \neg (a \quad b) \Longleftrightarrow (u \wedge \neg a) \wedge (u \wedge \neg b)$$

37. Neka je ϕ prazan skup (recimo, $y = \phi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)\, x \notin y$).

Dokazati jednakost

$$A \cup \phi = A,\quad A \cap \phi = \phi,\quad A \setminus \phi = A,\quad \phi \setminus A = \phi,\ A \setminus A = \phi$$

38. Dokazati skupovne identitete

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),\quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \setminus A) = A,\quad A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C,\quad A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$$

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C),\quad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

39. Dokazati da je skupovna jednakost saglasna sa operacijama $\cup$, $\cap$, $\setminus$, tj. da vredi implikacija

$$A=B \wedge C=D \Rightarrow A \star C = B \star D \quad (\star \text{ je } \cup, \cap, \setminus)$$

40. Neka su A, B podskupovi skupa X i ' komplement u odnosu na X. Dokazati ekvivalenciju

$$A = B \Longleftrightarrow A' = B'$$

41. Dokazati da je inkluzija saglasna sa $\cup$ i $\cap$ tj.

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D \quad A \cap C \subseteq B \cap D$$

42. Dokazati da inkluzija ima svojstva

a) $A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$; b) $A \subseteq B \Longleftrightarrow B = A \cup B$, $A \subseteq B \Longleftrightarrow A = A \cap B$

43. Veze izmedju $\subseteq$ i $\setminus$ iskazane su formulama

$$A \setminus B \subseteq A, \quad A \setminus B = \phi \Longleftrightarrow A \subseteq B, \quad A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$$

Dokazati svaku od tih formula.

44. Neka su A, B podskupovi skupa X i ' komplement u odnosu na X. Dokazati ekvivalenciju

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B' \subseteq A'$$

45. **Produžetak zadatka 59, tačke VI.** U rešavanju linearnih jednačina (na polju realnih brojeva) podesno se koriste naredne opšte činjenice o ekvivalentnosti jednakosnih formula

(i) $\quad A = B \Longleftrightarrow A = T \quad$ (Ako $B = T$)

Znači, od jednakosti $A = B$ prelazi se na ekvivalentnu jednakost, ukoliko se desna strana, tj. B zameni jednakim izrazom T.

(ii) $\quad A = B \Longleftrightarrow T = B \quad$ (Ako $A = T$)

(iii) $\quad A = B \Longleftrightarrow A + C = B + C$

(iv) $\quad A = B \Longleftrightarrow A \cdot C = B \cdot C \quad$ (Ako $C \neq 0$)

1° Dokazati ekvivalencije (i), (ii), (iii), (iv) primenom aksioma polja.

2° Primenom tih ekvivalencija rešiti jednačine (po x)

a) $3x = 8 - x$; b) $5x + 1 = 2x + 7$; c) $x + 2 = 5x - (4x + 3)$;

d) $2 - 3x = x - (4x - 2)$; e) $x + a = b + 2(x + c)$

Uputstvo: 2° a) Obrazujemo sledeći, može se reći, rešavajući lanac (na početku je data jednačina a na kraju jednačina rešenog oblika)

$$3x = 8 - x \underset{\text{(iii)}}{\Longleftrightarrow} 3x + x = 8 - x + x \underset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} 3x + x = 8 \underset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} 4x = 8$$

$$\underset{\text{(iv)}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 8 \underset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} x = \frac{1}{4} \cdot 8 \underset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} x = 2$$

Polazna jednačina je, na osnovu pravila tranzitivnosti za $\Longleftrightarrow$, ekvivalentna sa jednačinom $x = 2$. Zaključak: 2 je jedinstveno rešenje date jednačine.

Naravno, u rešavanju se obično više koraka sažimaju u jedan. Pomenimo da na kraju rešavajućeg lanca može biti i jednakost $0=1$ (slučaj nemogućih jednačina) $0=0$ (slučaj identiteta, tj. jednačina koje zadovoljavaju svi realni brojevi).

46. Dokazati ekvivalenciju $A = B \Longleftrightarrow A - B = 0$.

47. U tzv. Gaussovom postupku rešavanja sistema linearnih jednačina ključnu ulogu ima ekvivalencija oblika

$$A = 0 \wedge B = 0 \Longleftrightarrow A = 0 \wedge B + lA = 0,$$

prema kojoj je sistem $A=0 \wedge B=0$ ekvivalentan sa sistemom $A=0 \quad B+lA=0$ (l je proizvoljno). Pored toga koriste se i razna osnovna svojstva konjunkcije i jednakosti. Rešiti dati sistem po navedenim nepoznatim

a) $x+y=3,\ x-y=1,\ 3x+2y=8;$ b) $x-y=1,\ 3x-3y=3$

c) $x+y+z = 3,\ 2x-y-3z = 6,\ x+2y-z = 1$ (Zarez, stoji umesto znaka $\wedge$)

Rešenje. a)

$$\begin{aligned} x+y &= 3 & x+y &= 3 \\ x-y &= 1 \Longleftrightarrow & -2y &= -2 \\ 3x+2y &= 8 & -y &= -1 \end{aligned}$$

(Prvu jednačinu smo prepisali, pomnožili sa -1 i dodali drugoj, pomnožili je sa -3 i dodali trećoj)

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} x+y &= 3 \\ y &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

(Drugu i treću jednačinu smo skratili sa -2, tj. -1)

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} x+y &= 3 \\ y &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

(Druga jednačina je množena sa -1 i dodata trećoj)

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} x+y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

(Jer $p \wedge \top \Longleftrightarrow p$)

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

(Druga je množena sa -1 i dodata prvoj)

Znači, polazni sistem ekvivalentan je sa sistemom $x = 2 \wedge y = 1$, pa je preslikavanje $\binom{x\ y}{2\ 1}$ njegovo jedinstveno rešenje[1]

b) Taj sistem je ekvivalentan sa svojom prvom jednačinom. Ima beskonačno rešenja odredjenih, recimo, jednakostima $x = a,\ y = a-1$ (a je proizvoljan realan broj).

48. Rešiti sistem (po x, y, z)

$$2x - y + 2z = 1 \wedge 5x + 2y + 5z = a \quad x + y + z = 2$$

Uputstvo. Sistem je moguć akko $a = 7$.

[1] Uopšte, rešenje (nekog uslova, nekih formula) u slučaju više nepoznatih se uzima kao odgovarajuće preslikavanje. To je podesnije nego da se, recimo, u prethodnom slučaju kao rešenje uzme uredjena dvojka.

49. Dokazati ekvivalenciju

$$A = 0 \wedge B = 0 \Longleftrightarrow A + B = 0 \wedge A - B = 0$$

i pomoću nje rešiti sistem

$$2x + 3y - 7 = 0 \wedge 2x - 3y + 1 = 0$$

50. Rešiti jednačinu (po x) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x-1} = 0.$

Rešenje. Koristimo ekvivalencije

$$\frac{A}{B} = 0 \Longleftrightarrow A = 0 \wedge B \neq 0, \qquad x^2 + px + q = 0 \Longleftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$$

gde su x_1, x_2 sva rešenja jednačine $x^2 + px + q = 0$. Jedan rešavajući lanac izgleda (sa J smo označili datu jednačinu):

$J \Longleftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \wedge x - 1 \neq 0$

$\Longleftrightarrow (x = 1 \vee x = -2) \wedge x \neq 1$

$\Longleftrightarrow (x = 1 \wedge x \neq 1) \vee (x = -2 \wedge x \neq 1)$

(Distributivnost $\wedge$ prema $\vee$)

$\Longleftrightarrow \perp \vee \; (x = -2 \wedge x \neq 1)$

$\Longleftrightarrow x = -2$

(Jer $x = -2 \Rightarrow x \neq 1$. U stvari koristi se tautologija $(p \Rightarrow q)$ $\Rightarrow (p \wedge q \Longleftrightarrow p)$. Prema kojoj $p \wedge q$ je ekvivalentna sa p, ukoliko je q posledica od p)

Znači, -2 je jedinstveno rešenje date jednačine.

51. Rešiti jednačine (po $x \in R$)

a) $\dfrac{2x-2}{x-1} = 0$, b) $\dfrac{2x^3 + x^2 - x}{2x-1} = 0$, c) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{3}{2}$

52. Rešiti sistem jednačina (po $x, y, z \in R$)

$$xy = 0 \wedge yz = 0 \wedge zx = 0$$

Rešenje. U rešavanju koristimo najpre ekvivalenciju oblika (videti zadatak 20)

$$ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Jedan rešavajući lanac izgleda (S je oznaka sistema)

$S \Longleftrightarrow (x = 0 \vee y = 0) \wedge (y = 0 \vee z = 0) \wedge (z = 0 \vee x = 0)$

$\Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$

(Formule $x=0$, $y=0$, $z=0$ označili smo redom sa p,q,r. Namera nam je da obrazujemo neki rastavni oblik te formule)

$\Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$

(Koristeći zadatak 13 tačke VIII Prema rešavanju tog zadatka podesnije je $\vee$, $\wedge$ redom zameniti sa $+$, $\cdot$ a potom, izvršiti „izmnožavanje” i sredjivanje.).

$\Longleftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0) \vee (y = 0 \wedge z = 0) \vee (z = 0 \wedge x = 0)$

Postoje znači tri grupe rešenja sistema S. Kod prve x i y su 0, z je proizvoljan, kod druge y i z su 0, x je proizvoljan, a kod treće y je proizvoljan a x i z su 0.

53. Rešiti sistem po A, B, C, D (iz skupa R)

a) $AB = 0 \wedge BC = 0 \quad CD = 0$; b) $ABC = 0 \wedge BCD = 0 \wedge CDA = 0$

54. U slučaju aksiomatskog zasnivanja realnih brojeva *aksiomama* polja (navedenim u zadatku 58, tačka VI) pridružuju se još i ove tzv. *aksiome uredjenja* (polazni pojmovi su *biti pozitivan, biti negativan*):

(U_1) ili $x > 0$ ili $x = 0$ ili $x < 0$,

(U_2) $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \quad (x < 0 \Rightarrow -x > 0)$,

(U_3) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow (x+y > 0 \wedge x \cdot y > 0)$,

kao i tzv. *aksioma potpunosti:*

Svaki odozgo ograničen neprazan podskup realnih brojeva ima supremum (najmanje gornje ograničenje).

Usvajamo još i definicije:

$$x \geqslant 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x > 0 \vee x = 0, \quad x \leqslant 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x < 0 \vee x = 0$$

$$x > y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x - y > 0,\ x \geqslant y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x-y \geqslant 0,\ x < y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x-y < 0,\ x \leqslant y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x-y \leqslant 0$$

Dokazati teoreme:

a) $x > 0 \wedge y < 0 \Longrightarrow xy < 0$; b) $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy > 0$; c) $x^2 \geqslant 0$

d) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$; e) $1 > 0$, ; f) $2 > 0, 3 > 0, \ldots$; g) $2 \neq 0, 3 \neq 0, \ldots$;

h) $\frac{1}{2} > 0, \frac{1}{3} > 0, \ldots$

Uputstvo a) Iz $x > 0$, $y < 0$ sledi $x > 0$, $-y > 0$ (po(U_2)), a odatle $x \cdot (-y) > 0$ (po(U_1)), iz čega dobijamo $-xy > 0$, odnosno $xy < 0$.

c) Po (U_1) je *ili* $x < 0$ *ili* $x = 0$ *ili* $x > 0$. Ako $x < 0$, onda $x^2 > 0$ (po b)). Ako $x = 0$ onda $x^2 = 0$ a ako $x > 0$ onda $x^2 > 0$ (po (U_3)). Dakle, uvek $x^2 \geqslant 0$.

d) Važi implikacija $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ (jer iz $x^2 = 0$ sledi $x = 0$). Iz formula

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0, \quad x^2 > 0 \vee x^2 = 0$$

neposredno sledi formula

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

e) Pošto $1 \neq 0$, to po d) $1^2 > 0$, tj. $1 > 0$.

f) Iz $1 > 0$, $1 > 0$ primenom (U_3) sledi $2 > 0$.

g) Iz $2 > 0$ sledi $2 \neq 0$ (po (U_1))

h) Pošto $2 \neq 0$, to $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Dalje, kako $1 > 0$, $2 > 0$, to mora biti $\frac{1}{2} > 0$ (jer obe mogućnosti $\frac{1}{2} = 0$, $\frac{1}{2} < 0$ dovode do kontradikcije; recimo, iz $\frac{1}{2} = 0$ sledi $1 = 0$, a iz $\frac{1}{2} < 0$, zbog $2 > 0$, sledi $1 < 0$).

55. Nastavak prethodnog zadatka. Dokazati formule

a) $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow x+y < 0$; b) $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow x+y \geqslant 0 \wedge x \cdot y \geqslant 0$;

c) $x \leqslant 0 \wedge y \leqslant 0 \Rightarrow x+y \leqslant 0 \wedge x \cdot y \geqslant 0)$;

d) $x \cdot y > 0 \Longleftrightarrow (x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0)$;

e) $x \cdot y < 0 \Longleftrightarrow (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)$;

f) $x \cdot y \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0) \vee (x \leqslant 0 \wedge y \leqslant 0)$

h) $x \cdot y \leqslant 0 \Longleftrightarrow (x \geqslant 0 \wedge y \leqslant 0) \vee (x \leqslant 0 \wedge y \geqslant 0)$.

Uputstvo. b) $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow (x > 0 \vee x=0) \wedge (y > 0 \vee y = 0)$
$\Rightarrow (x > 0,\ y > 0 \vee x > 0,\ y = 0 \vee x = 0,\ y > 0 \vee x=0,\ y=0)$. Stigli smo do četiri slučaja, a u svakom od njih se lako dokazuje formula $x + y \geqslant 0$, odnosno $x \cdot y \geqslant 0$;

d) $x \cdot y > 0 \Longleftrightarrow x \cdot y > 0 \wedge \top \Longleftrightarrow x \cdot y > 0 \wedge (x=0 \vee x>0 \vee x<0) \wedge (y=0 \vee y>0 \vee y<0)$

Dalje obrazujemo rastavni oblik. Pojavljuju se članovi kao:

$$xy > 0 \wedge x = 0 \wedge y = 0, \quad xy > 0 \wedge x > 0 \wedge y < 0, \quad xy > 0 \wedge x > 0 \wedge y > 0$$

Prva dva su ekvivalentna sa $\perp$, a treći sa $x > 0 \wedge y > 0$, pošto $x > 0 \wedge y > 0$ povlači $xy > 0$. Na kraju se disjunkcija svodi na: $(x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0)$

56. Nastavak zadataka 54, 55. Dokazati:

a) $x<0 \Longleftrightarrow x^3<0$; b) $x>0 \Rightarrow \frac{1}{x}>0$; c) $x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<0$; d) $\neg(\exists x \in R)x^2+1=0$.

57. Nastavak zadatka 54. Dokazati:

a) *ili* $x>y$ *ili* $x=y$ *ili* $x<y$; b) relacije $<, \leqslant, >, \geqslant$ su tranzitivne;

c) relacije $\leqslant$, $\geqslant$ su relacije poretka;

d) $x \leqslant y \vee y \leqslant x$; e) $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x < z$; f) $x \geqslant y \wedge y > z \Rightarrow x > z$;

g) $\neg(x < y) \Longleftrightarrow x \geqslant y$, $\neg(x \leqslant y) \Longleftrightarrow x > y$; h) $x \geqslant z \Rightarrow x \geqslant y \vee y \geqslant z$,

i) $a+c \leqslant b+d \Rightarrow a \leqslant b \vee c \leqslant d$

Uputstvo. h) Obrazovati kontrapoziciju.

58. Pri rešavanju nejednakosti često se koriste ove ekvivalencije

$xRy \Longleftrightarrow (x+z)R(y+z)$, $xRy \Longleftrightarrow (x-z)R(y-z)$,

$xRy \Longleftrightarrow xzRyz$ (Ako $z > 0$), $xRy \Longleftrightarrow (x:z)R(y:z)$ (Ako $z > 0$),

$xRy \Longleftrightarrow xzR^{-1}yz$ (Ako $z < 0$), $xRy \Longleftrightarrow (x:z)R^{-1}(y:z)$ (Ako $z < 0$),

gde je R ma koji od znakova $<, \leqslant, >, \geqslant$, a R^{-1} je znak obratne relacije (tj. redom: $> \ \geqslant \ < \ \leqslant$).

1° Dokazati navedene ekvivalencije;

2° Rešiti formule (po x):

$$2x-3 > 0, \quad x+3 < 5-x, \quad 2x > 4x+2 \wedge 3x-4 < 4x-6$$

Napomena. Nejednačine kao $x > 1$, $x < 2$ smatramo rešenim.

59. Rešiti nejednačine (po x):

$$(x-1)\cdot(x-2) > 0, \quad (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) < 0, \quad (2x-1)\cdot(3-2x) > 0$$

Uputstvo. $(x-1)\cdot(x-2) > 0 \iff (x-1 > 0 \wedge x-2 > 0) \vee (x-1 < 0 \wedge x-2 < 0)$
$\iff (x > 1 \wedge x > 2) \vee (x < 1 \wedge x < 2) \iff (x > 2 \vee x < 1)$.

Pored ekvivalencije $ab > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$ koristili smo i $x > 1 \wedge x > 2 \iff x > 2$ i sl. Uopšte vredi:

$x > a \wedge x > b \iff x > \max(a,b)$, $\quad x < a \wedge x < b \iff x < \min(a,b)$,

gde $\max(a,b) = a$, ukoliko $a \geqslant b$, a inače $\max(a,b) = b$ i sl.

60. Dokazati ekvivalencije

$$x > 1 \wedge x > 2 \iff x > 2, \quad x > 2 \wedge x=3 \iff x=3, \quad x < 5 \wedge x < 8 \iff x < 5$$

Napomena. Važi uslovna ekvivalencija

(☆) $\quad p \wedge q \iff p \qquad$ (Ako $p \Rightarrow q$),

tj. $p \wedge q$ je ekvivalentno sa p, ukoliko je q posledica od p. Napomenimo da se ekvivalencija (☆) neobično često koristi.

61. Dokazati ekvivalenciju

$$x \geqslant a \wedge x \leqslant b \iff a \leqslant x \leqslant b \wedge a \leqslant b$$

gde je $a \leqslant x \leqslant b$ drugi zapis za $a \leqslant x \wedge x \leqslant b$

Rešenje.

$$\begin{aligned}
x \geqslant a \wedge x \leqslant b &\iff a \leqslant x \wedge x \leqslant b \\
&\iff a \leqslant x \wedge x \leqslant b \wedge a \leqslant b \\
&\quad \text{(Jer } a \leqslant b \text{ sledi iz } a \leqslant x \wedge x \leqslant b\text{)} \\
&\iff a \leqslant x \leqslant b \wedge a \leqslant b
\end{aligned}$$

Napomena. Ako zadatak glasi: Rešiti po x sistem

$$x \geqslant a \wedge x \leqslant b$$

onda, prema dokazanom tvrdjenju, uslov $a \leqslant b$ je potreban i dovoljan da taj sistem ima rešenje, a u potvrdnom slučaju rešenja su brojevi odsečka $[a, b]$, drukčije rečeno formulu $a \leqslant x \leqslant b$ smatramo rešenom.

62. Rešiti date sisteme linearnih nejednačina koristeći ekvivalencije vida

$$C \leqslant A \wedge C \leqslant B \iff C \leqslant \min(A,B), \quad C \geqslant A \wedge C \geqslant B \iff C \geqslant \max(A, B)$$

$$C \geqslant A \wedge C \leqslant B \iff A \leqslant C \leqslant B \wedge A \leqslant B$$

a) $x+y-1 \geqslant 0 \wedge 3x-y-3 \leqslant 0 \wedge 2x-y+1 \geqslant 0 \wedge 3x+5y-15 \leqslant 0 \wedge 2x \leqslant 3$

b) $2x+y-2 \geqslant 0 \wedge x-y-1 \leqslant 0 \wedge x-3y+5 \geqslant 0 \wedge x+y-3 \leqslant 0$

c) $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge x+y \leqslant 1$, $\quad$ d) $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge z \geqslant 0 \wedge z \leqslant x+y$

e) $x \geqslant 1 \wedge y \geqslant 2 \wedge z \geqslant 3 \wedge x+y+z \leqslant 10$ $\quad$ f) $x+y \leqslant 3 \wedge y+z \leqslant 3 \wedge x+z \leqslant 3$

Rešenje. a) Označimo dati sistem sa S. Tada:

$$S \Longleftrightarrow y \geqslant 1-x \wedge y \geqslant 3x-3 \wedge y \leqslant 2x+1 \wedge y \leqslant -\frac{3}{5}x+3 \wedge 2x \leqslant 3$$

(U prvom koraku obavili smo rešavanje po y, a mogli smo i po x)

$$\Longleftrightarrow y \geqslant max(1-x,\ 3x-3) \wedge y \leqslant min(2x+1,\ -\frac{3}{5}x+3) \wedge 2x \leqslant 3$$

$$\Longleftrightarrow max\ (1-x,\ 3x-3) \leqslant y \leqslant min(2x+1,\ -\frac{3}{5}x+3)$$

$$\wedge max\ (1-x,\ 3x-3) \leqslant min\ (2x+1, -\frac{3}{5}x+3) \wedge 2x \leqslant 3$$

(Prva formula, označićemo je R_y, odredjuje y; iz ostalih odredjujemo x)

$$\Longleftrightarrow R_y \wedge 1-x \leqslant 2x+1 \wedge 1-x \leqslant -\frac{3}{5}x+3 \wedge 3x-3 \leqslant 2x+1 \wedge 3x-3 \leqslant -\frac{3}{5}x+3 \wedge 2x \leqslant 3$$

$$\Longleftrightarrow R_y \wedge x \geqslant 0 \wedge x \geqslant -5 \wedge x \leqslant 4 \wedge 3x \leqslant 5 \wedge 2x \leqslant 3$$

$$\Longleftrightarrow R_y \wedge x \geqslant 0 \wedge x \leqslant 1{,}5$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1{,}5 \wedge max\ (1-x,\ 3x-3) \leqslant y \leqslant min\ (2x+1,\ -\frac{3}{5}x+3)$$

Dobijeni sistem možemo smatrati rešenim. Do rešenja se ovako dolazi: x je ma koji broj izmedju 0 i 1,5 a za tako odabrani x, za y se može uzeti ma koji broj u navedenim granicama. Slično se rešavaju ostali sistemi.

Napomena. Opisani postupak, tzv. Furije–Mockinov, je opšte prirode – može se koristiti za rešavanje ma kog sistema linearnih nejednačina.

63. Rešiti sistem nejednačina

$$x-2y+4>0 \wedge 2x+y-2>0 \wedge 3x-y-3<0 \wedge x<2$$

Odgovor. $0<y<3 \wedge max(2y-4, \frac{2-y}{2}) < x < min(2, \frac{y+3}{3})$.

64. Rešiti sistem nejednačina po x, y, z

$$x+y+z \geqslant 2 \wedge x+y-z \leqslant 2 \wedge 3x-y-z \geqslant 0 \wedge x+z \leqslant 3 \wedge y+z \leqslant 3 \wedge x+z \leqslant 3$$

65. Dokazati najpre da za realne brojeve vrede ekvivalencije

(i) $a=b \Longleftrightarrow (\forall\ x)\ (x \leqslant a \Longleftrightarrow x \leqslant b)$

(ii) $x \leqslant min(a,b) \Longleftrightarrow x \leqslant a \wedge x \leqslant b$, (iii) $x \leqslant max(a,b) \Longleftrightarrow x \leqslant a \vee x \leqslant b$

a zatim njihovom primenom dokazati ovaj min–max identitet

(☆) $max(a,\ min(b,\ c)) = min(max(a,\ b),\ max(a,\ c))$

Rešenje. Sve tri ekvivalencije mogu se dokazati u dva smera. Za prvu, dokaz sleva nadesno sledi na osnovu saglasnosti jednakosti sa relacijom $\leqslant$, a zdesna nalevo, iz pretpostavke $(\forall x)(x \leqslant a \Longleftrightarrow x \leqslant b)$ izvodi se najpre $a \leqslant b$ (stavljajući umesto x baš a), a zatim slično i: $b \leqslant a$. Preostale dve ekvivalencije izvode se razlikovanjem slučajeva: $a \leqslant b$, $b \leqslant a$.

Primenom formula (i), (ii), (iii) jedan dokaz postavljenog identiteta izgleda (x je proizvoljan realan broj):

$x \leqslant max\,(a,\, min(b,c))$

$\Longleftrightarrow x \leqslant a \vee x \leqslant min(b,c)$

$\Longleftrightarrow x \leqslant a \vee (x \leqslant b \wedge x \leqslant c)$

$\Longleftrightarrow (x \leqslant a \vee x \leqslant b) \wedge (x \leqslant a \vee x \leqslant c)$

(Primena tautologije $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$)

$\Longleftrightarrow x \leqslant max(a,b) \wedge x \leqslant max(a,c)$

$\Longleftrightarrow x \leqslant min(max(a,b),\, max(a,c))$

Dakle, za proizvoljan realan broj x vredi ekvivalencija:

$$x \leqslant max(a,\, min(b,c)) \Longleftrightarrow x \leqslant min(max(a,b),\, max(a,c)),$$

odakle, koristeći formulu (i), zaključujemo da vredi jednakost (☆).

66. Dokazati naredne min–max identitete

$min(min(a,b),\, c) = min(a,\, min(b,\, c)),\quad max(max(a,\, b),\, c) = max(a,\, max(b,\, c))$

$min(a,\, max\,(a,\, b)) = a \qquad max(a,\, min(a,\, b)) = a$

$$min(a,\, max(b,\, c)) = max(min(a,b),\, min(a,c))$$

67. Rešiti jednačinu (po $x \in R$): $|x-2| = 1$.

Rešenje. Koristimo definiciju apsolutne vrednosti: $|a| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a, & \text{ako } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{ako } a < 0 \end{cases}$,

kao i aksiome uredjenja i razne njihove posledice dokazane u prethodnim zadacima. Tada imamo:

$|x-2| = 1 \Longleftrightarrow |x-2| = 1 \wedge (x-2 \geqslant 0 \vee x-2 < 0)$

(Na osnovu aksiome (U_1) tačna je formula $x-2 \geqslant 0 \vee x-2 < 0$)

$\Longleftrightarrow (|x-2| = 1 \wedge x-2 \geqslant 0) \vee (|x-2| = 1 \wedge x-2 < 0)$

(Primena distributivnog zakona $\wedge$ prema $\vee$)

$\Longleftrightarrow x-2 = 1 \vee -(x-2) = 1$

(Definicija apsolutne vrednosti)

$\Longleftrightarrow x=3 \vee x=1$

Dakle, rešenja date jednačine su 1,3 .

68. Rešiti jednačinu (po $x \in R$) : $|x-2| + |x-3| = 1$.

Uputstvo. Prema uredjajnoj aksiomi (U_1) vredi ekvivalencija

$|x-2| + |x-3| = 1 \Longleftrightarrow |x-2| + |x-3| = 1 \wedge (x-2 \geqslant 0 \vee x-2 < 0) \wedge (x-3 \geqslant 0 \vee x-3 < 0)$

69. Rešiti jednačine (po $x \in R$) :

a) $|x| + x = 3$; b) $x^2 + |x| - 6 = 0$; c) $|x-1| + |x-2| = 1$; d) $|x| + |1-x| = 1$;

e) $|x-a| + |x-b| = c$; f) $|x - |x|| = 6$; g) $|x| + |x-1| = 2x-1$

70. Rešiti realne nejednačine po x:

a) $x-1 > 5-3x$; b) $x^2 - 5|x| < 0$; c) $|x+3| < 1$; d) $|x| + |1-x| < 1$.

71. Rešiti sisteme jednačina (po $x,y \in R$):

a) $|x| + y = 5$; b) $x = |y|,\ y = |x|$; c) $|x-1| + |y-2| = 2,\quad |x-2| + |y+1| = 4$

72. Realna funkcija $f(x)$ uvedena je definicijom: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ako } |x| \leqslant 1 \\ 1, & \text{ako } |x| > 1 \end{cases}$.

Rešiti date jednačine po x

a) $f(x) + 2x = 3$; b) $f(x) = f(x)$; c) $f(x) = \alpha (\alpha \in R)$; d) $f(x-1)+f(x+2)=1$

73. Funkcija znaka sgn uvodi se ovako: $sgn\ x \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} -1, & \text{ako } x < 0 \\ 0, & \text{ako } x = 0 \\ 1, & \text{ako } x > 0 \end{cases}$

Rešiti po x jednačine

a) $sgn(x-3) + sgn(x+2) = 1$; b) $sgn(x^2-1) = sgn x$; c) $sgn(x^2+2x-3) = 1$

74. Dokazati da za realne brojeve vredi uslovna ekvivalencija:

$$a^2 = b^2 \iff a=b \qquad (\text{Ako } a,b \geqslant 0)$$

Uputstvo. Koristiti jednakost $a^2-b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ kao i činjenicu da $a+b \geqslant 0$, ukoliko $a,b \geqslant 0$.

75. Pri rešavanju mnogih iracionalnih jednačina osnovnu ulogu ima formula

(☆) $\qquad \sqrt{a} = b \iff a = b^2 \wedge b \geqslant 0 \qquad$ (a,b realni brojevi)

Dokazati tu formulu, pa je potom primeniti na rešavanje jednačina:

$1^\circ\ \sqrt{x+6} = x$; $\quad 2^\circ\ -\sqrt{6-2x} = x+1$; $\quad 3^\circ\ \sqrt{\dfrac{x^2-1}{2}} = \dfrac{1}{3}x+1$

Rešenje. Ističemo:

- da je, po definiciji, b *kvadratni koren iz* a akko vredi jednakost $b^2 = a$,
- da, zbog te jednakosti, kvadratni koren postoji samo za *nenegativne* realne brojeve,
- da za svaki takav broj x postoje *dve* vrednosti korena (sem u slučaju $a=0$ kada postoji jedna – broj 0); onu nenegativnu označavamo sa $\sqrt{a}$.

Prema tome, tačne su formule

$$\sqrt{a} \geqslant 0 \ (\text{Ako } a \geqslant 0), \quad (\sqrt{a})^2 = a \ (\text{Ako } a \geqslant 0), \quad b = \sqrt{a} \Rightarrow a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0$$

na osnovu kojih zaključujemo

$\sqrt{a} = b \iff \sqrt{a} = b \wedge a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0$

(Koristimo logički zakon: $p \iff p \wedge q$, *ako* $p \Rightarrow q$)

$\iff a = b^2 \wedge a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0$

(Prema uslovnoj ekvivalenciji: $x^2 = y^2 \iff x = y$, *ako* $x, y \geqslant 0$)

$\iff a = b^2 \wedge b \geqslant 0$

(Jer $a = b^2 \Rightarrow a \geqslant 0$, pa ponovo primenjujemo: $p \iff p \wedge q$, *ako* $p \Rightarrow q$)

Dakle: $\sqrt{a} = b \iff a = b^2 \wedge b \geqslant 0$.

$1^\circ\ \sqrt{x+6} = x \iff x+6 = x^2 \wedge x \geqslant 0$ $\qquad$ (Primena formule (☆))

$\iff x^2-x-6 = 0 \wedge x \geqslant 0$

$\iff (x=3 \vee x=-2) \wedge x \geqslant 0$ (Rešavanje jednačine $x^2-x-6=0$)

$\iff (x=3 \wedge x \geqslant 0) \vee (x=-2 \wedge x \geqslant 0)$

$\iff x=3 \wedge x \geqslant 0$ | Jer $x=-2 \wedge x \geqslant 0 \iff \perp$|

$\iff x=3$ | Jer $x=3 \Rightarrow x \geqslant 0$|

Zaključak: Broj 3 je jedino rešenje jednačine $\sqrt{x+6}=x$.

2° Jedino rešenje je -5; 3° Rešenja su 3 i $-9/7$.

76. Dokazati ekvivalencije o realnim brojevima

(i) $a^2 < b^2 \iff a < b$ (Ako $a, b \geqslant 0$); (ii) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \iff a < b \wedge a \geqslant 0$;

(iii) $a < \sqrt{b} \iff a < 0 \vee (a \geqslant 0 \wedge a^2 < b)$; (iv) $\sqrt{a} < b \iff a < b^2 \wedge a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0$

77. Za koje realne vrednosti x vredi svaka od jednakosti

(a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$;

(b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$;

(c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$.

Rešenje. Neka A bude zajednička oznaka brojeva $\sqrt{2}$, 1, 2. Tada:

$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=A$

$\iff \left(\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}\right)^2=A^2 \wedge x+\sqrt{2x-1} \geqslant 0 \wedge x-\sqrt{2x-1} \geqslant 0 \wedge 2x-1 \geqslant 0$

$\iff 2x+2\sqrt{x^2-(\sqrt{2x-1})^2}=A^2 \wedge x \geqslant 1/2 \wedge x \geqslant \sqrt{2x-1}$

(Jer $x \geqslant 1/2 \Rightarrow x+\sqrt{2x-1} \geqslant 0$)

$\iff 2x+2\sqrt{x^2-2x+1}=A^2 \wedge x \geqslant 1/2 \wedge x^2 \geqslant 2x-1$

(Jer $x \geqslant 0$, $2x-1 \geqslant 0$)

$\iff 2x+2\sqrt{(x-1)^2}=A^2 \wedge x \geqslant 1/2$

(Jer $x^2 \geqslant 2x-1 \iff (x-y)^2 \geqslant 0$)

$\iff 2(x+|x-1|)=A^2 \wedge x \geqslant 1/2$

$\iff [2(x+|x-1|)=A^2 \wedge x \geqslant 1/2 \wedge x>1] \vee [2(x+|x-1|)=A^2 \wedge x \geqslant 1/2 \wedge x \leqslant 1]$

(Razlikovanje slučajeva: $x>1$, $x \leqslant 1$)

$\iff [2(x+x-1)=A^2 \wedge x>1] \vee [2(x-x+1)=A^2 \wedge 1/2 \leqslant x \leqslant 1)$

$\iff (4x=A^2+2 \wedge x>1) \vee (A^2=2 \wedge 1/2 \leqslant x \leqslant 1)$

Zamenjujući umesto A redom $\sqrt{2}$, 1, 2 neposredno dobijamo:

(a) $\iff (4x=4 \wedge x>1) \vee (2=2 \wedge 1/2 \leqslant x \leqslant 1) \iff 1/2 \leqslant x \leqslant 1$;

(b) $\iff (4x=3 \wedge x>1) \vee (1=2 \wedge 1/2 \leqslant x \leqslant 1) \iff \perp$

(c) $\iff (4x=6 \wedge x>1) \vee (4=2 \wedge 1/2 \leqslant x \leqslant 1) \iff x=3/2$.

Znači, jednakost (a) je zadovoljena za $x \in [1/2,1]$, jednakost (b) ni za jedan x, a jednakost (c) za tačno jedan x – za $3/2$.

78. Rešiti po x iracionalne jednačine

a) $\sqrt{5-x}-\sqrt{x}=1$; b) $\sqrt{5-x}-\sqrt{x}=\alpha\ (\alpha\in R)$: c) $\dfrac{\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{2-x}-2}=0$:

d) $\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{\sqrt{2-x}-x}=0$: e) $\sqrt{x^2-\sqrt{3-x}}-\sqrt{x^2-\sqrt{3-x}}=0$;

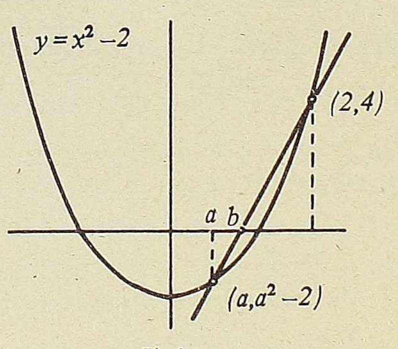
f) $\sqrt{x^2+\sqrt{3-x}}-\sqrt{x^2-\sqrt{3-x}}=3$.

79. Korišćenjem aksioma navedenih u zadatku 54 dokazati da postoji $\sqrt{2}$, odnosno da postoji nenegativno realno rešenje jednačine (po x): $x^2=2$.

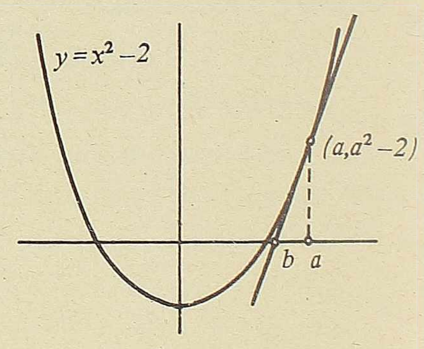
Rešenje. Uočimo skup S pozitivnih realnih brojeva kvadrata manjeg od 2, tj. $S=\{x\in R|x>0 \wedge x^2<2\}$. Taj skup je ograničen odozgo, recimo broj 2 je jedno njegovo gornje ograničenje. Otuda na osnovu aksiome supremuma postoji realan broj $a=\sup S$. Pošto prema uredjajnoj aksiomi (U_1) vredi:

$$\text{ili } a^2<2 \text{ ili } a^2=2 \text{ ili } a^2>2$$

dokazaćemo da svaka od pretpostavki $a^2<2$, $a^2>2$ vodi do kontradikcije, tj. da mora biti $a^2=2$.



Sl. 1.



Sl. 2.

Zaista, ako $a^2<2$, $a>0$ tada broj $b=\dfrac{2a+2}{a+2}$ (vidi Sl.1) ispunjava uslove

$$2-b^2=\frac{2(2-a^2)}{(a+2)^2}>0, \qquad b-a=\frac{2-a^2}{a+2}>0$$

tj. pripada skupu S i veći je od $\sup S$, što je nemoguće.

Slično, ako $a^2>2$, $a>0$ tada broj $b=\dfrac{2+a^2}{2a}$ (vidi Sl.2) ispunjava uslove

$$2-b^2=-\frac{(2-a^2)^2}{4a^2}<0, \qquad a-b=\frac{a^2-2}{2a}>0$$

tj. b je gornje ograničenje za S koje je manje od $\sup S$, što nije moguće.

80. Dokazati da postoji $\sqrt{3}$ (u skupu realnih brojeva), odnosno $(\exists\, a\geqslant 0)a^2=3$.

81. Dokazati da za svaki nenegativan realan broj a postoji $\sqrt{a}$ tj.

$$(\forall\, a\geqslant 0)\ (\exists\, b\geqslant 0)\ b^2=a$$

X KVANTORI

♦ *Kvantori (kvantifikatori, kolikovnici)*, u jeziku, su reči *svaki, neki*. Prvi je tzv. univerzalni (opšti) kvantor, dok je drugi egzistencijalni (posebni).

Za kvantore postoje pored navedenih i razni drugi jezički oblici. Tako, *svaki* u matematici isto znači što i: *ma koji, bilo koji, proizvoljan, svi,* dok se umesto *neki* govori i: *postoji (najmanje jedan, bar jedan), najmanje jedan* i sl.

♦ U vezi sa tim rečima su dve nove logičke operacije: generalizacija i partikularizacija.

Generalizacija (uopštavanje) po x rečenice A jeste rečenica: *Za svaki x A,* a njen zapis[1] je $(\forall x)A$.

Partikularizacija (posebnovanje) po x rečenice A je: *Za neki x A* sa odgovarajućim prevodom $(\exists x)A$.

U slučaju višestrukog uopštavanja umesto $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)A$ pišemo često i ovako: $(\forall x_1, \ldots, x_n)A$. Slično, $(\exists x_1, \ldots, x_n)A$ je kraći zapis za rečenicu (formulu) $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)A$.

♦ Rečenice: *Svaki A je B, Neki A je B* isto znače što i ove duže rečenice

Za svaki x, ako x ima svojstvo A, onda x ima svojstvo B,
Postoji x koji ima svojstvo A i svojstvo B.

Dogovorimo li se da „x ima svojstvo A" zapišemo: $A(x)$ (slično se uvodi $B(x)$) dobijamo ove prevode $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$, $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$. Pored tih (podrobnih) prevoda na jezik predikatskog računa I reda, za razmatrane rečenice koristimo često i ovakve skraćene[2] prevode

$$(\forall x \text{ je } A)\, B(x), \qquad (\exists x \text{ je } A)\, B(x)$$

Tako, rečenica: *Svaki prirodan broj je ceo broj* može se prevesti na svaki od načina

$$(\forall n)\,(n \in N \Rightarrow n \in Z), \qquad (\forall n \in N)\; n \in Z$$

---

[1] Zapis (govorićemo i prevod) $(\forall x)A$ pripada formulskom jeziku tzv. predikatskog računa I reda (videti narednu tačku).

[2] $\forall x$ je A, $\exists x$ je A su tzv. u s l o v n i k v a n t o r i.

♦ *Svaki* je jedno uopštenje konjunkcije, a *neki* uopštenje disjunkcije. Naime, ako je x oznaka za *konačno* mnogo predmeta, recimo $a_1, ..., a_n$, onda $(\forall x)A(x)$, $(\exists x)A(x)$ isto znače što i formule:

$$A(a_1) \wedge ... \wedge A(a_n), \quad A(a_1) \vee ... \vee A(a_n)$$

♦ *Istinitost* složenih rečenica dobijenih uopštavanjem, odnosno posebnovanjem odredjuje se u skladu sa značenjem reči *svaki, neki*. Naime, ako je $\alpha(x)$ rečenica (formula, uslov) po x o izvesnom skupu S, tada: Rečenica $(\forall x)\alpha(x)$ je istinita, ukoliko je $\alpha(x)$ istinita *za svaki* element x iz S, dok je $(\exists x)\alpha(x)$ istinita, ukoliko je $\alpha(x)$ istinita rečenica *za neki* (najmanje jedan) element x iz S.

Recimo, obe rečenice o realnim brojevima

$$(\forall x)x^2 \geqslant 0, \quad (\exists x)x^2 = 2$$

su istinite.

♦ Opisujemo tzv. *brojačke kvantore* kojima se ističe *broj* predmeta koji imaju neko svojstvo. Ti se kvantori iskazuju rečima kao:

postoje najmanje dva[1], *za svaka najviše dva, za svaka najmanje tri, postoje tačno dva, postoji tačno jedan* i sl.

Svi brojački kvantori mogu se izraziti pomoću osnovnih *svaki, neki*. Tako, pošto složena rečenica

Postoje najmanje dva predmeta koji imaju svojstvo A

ima ovakvo značenje

Postoje x,y takvi da je x različit od y i da x ima svojstvo A i y ima svojstvo A

to njen zapis[2] na formulskom jeziku predikatskog računa I reda izgleda

$$(\exists x,y)(x \neq y \wedge A(x) \wedge A(y))$$

♦ Posebno ističemo brojački kvantor iskazan rečima *postoji tačno jedan*. Naime, rečenica

Postoji tačno jedan predmet koji ima svojstvo A

izrečena na podrobniji način glasi

Postoji x koji ima svojstvo A i ne postoji y različit od x koji takodje ima svojstvo A

te je njen prevod

$$(\exists x)(A(x) \wedge \neg(\exists y)(y \neq x \wedge A(y)))$$

Inače, za brojački kvantor *postoji tačno jedan* koristimo oznaku $\exists_1$ pa prema

---

[1] Kad kažemo d v a, t r i, mislimo na d v a r a z l i č i t a, t r i m e dj u s o b n o r a z l i č i t a predmeta.

[2] Rečenicu x i m a s v o j s t v o A preveli smo sa A(x).

prethodnom imamo[1])

$$(\exists_1 x)A(x) \overset{\text{def}}{=} (\exists x)(A(x) \wedge \neg(\exists y)(y \neq x \wedge A(y)))$$

Još o brojačkim kvantorima videti u zadacima 27, 28, 29, 30.

ZADACI

1. Pročitati na razne načine formule

$$(\forall x)(x \in R \Rightarrow x^2 \geqslant 0), \ (\forall x \in R)(x^2 \geqslant o)$$

$$(\exists x)(x \in C \wedge x^2 = -1), \ (\exists x \in C)(x^2 = -1)$$

Rešenje. Prve dve formule su prevodi iste rečenice. Moguća čitanja su, na primer:
Za svaki (ma koji, bilo koji, proizvoljan) realan broj x važi: njegov kvadrat je nenegativan broj.
Kvadrat svakog (ma kog, bilo kog, proizvoljnog) realnog broja je nenegativan.

Druge dve formule su takodje prevodi iste rečenice. Moguća čitanja su, recimo:
Postoji najmanje jedan kompleksan broj čiji je kvadrat jednak −1.
Za neki kompleksan broj x važi: njegov kvadrat je jednak −1.
Jednačina $x^2 = -1$ je moguća, na skupu kompleksnih brojeva.
Jednačina $x^2 = -1$ ima bar jedno rešenje, na skupu kompleksnih brojeva.

2. Pročitati rečima formule o prirodnim brojevima:

$$(\forall m \in N)\ m \leqslant n, \ (\forall m \in N)\ n \leqslant m, \ (\exists n \in N)(\forall m \in N)\ n \leqslant m,$$

$$\neg(\exists n \in N)(\forall m \in N)\ m \leqslant n, \ (\forall n \in N)(\exists m \in N)\ n < m,$$

$$\neg(\forall n \in N)(\exists m \in N)\ m < n$$

Rešenje. Uobičajena čitanja tih formula su redom:
n je najveći prirodan broj, n je najmanji prirodan broj,
Postoji najmanji prirodan broj, Ne postoji najveći prirodan broj,
Za svaki prirodan broj postoji od njega veći prirodan broj,
Nije (tačno) da za svaki prirodan broj postoji od njega manji prirodan broj.

3. Pročitati formule o realnim brojevima

$$(\forall x,y)(\exists_1 z)\ x+y=z, \ (\forall x,y)(\exists_1 z)\ x \cdot y = z, \ (\exists_1 x)(\forall y) x+y=y,$$

$$(\exists_1 x)(\forall y) x \cdot y=y, \ (\forall x)(\exists_1 y)\ x+y=0, \ (\forall x \neq 0)(\exists_1 y)\ x \cdot y=1$$

---

[1]) Korišćenjem jednog od tzv. De Morganovih zakona za kvantore (videti poglavlje XII V a lj a n e f o r m u l e) koji se može ovako izreći: n i j e d a p o s t o j i isto znači što i s v a k i n i j e (formulskim jezikom: $\neg(\exists x)F \Longleftrightarrow (\forall x)\neg F$), kao i nekih jednostavnih tautologija, zaključujemo da se i svaka od ekvivalencija

$$(\exists_1 x)\ A(x) \Longleftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge (\forall y)(y \neq x \Rightarrow \neg A(y)))$$

$$(\exists_1 x)\ A(x) \Longleftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge (\forall y)(A(y) \Rightarrow y=x))$$

može uzeti za definiciju kvantora $\exists_1$.

4. Pročitati formule o skupu S

$$(\exists x) x \in S, \quad \neg(\exists x) x \in S, \quad (\exists x)(x \in S \wedge \neg (\exists y)(y \neq x \wedge y \in S)),$$
$$(\exists x,y)(x \neq y \wedge x \in S \wedge y \in S), \quad \neg(\exists x,y)(x \neq y \wedge x \in S \wedge y \in S);$$
$$(\exists x,y,z)(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S)$$

Odgovor. Uobičajena čitanja bi bila:

S je neprazan skup, S je prazan skup, S je jednočlan skup, S je skup sa najmanje dva elementa, S je skup sa najviše jednim elementom, S je skup sa najmanje tri elementa.

5. Obrazovati:

(1) Generalizaciju po z, po y i najzad po x rečenice (formule):

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

(2) Generalizaciju po x a zatim partikularizaciju po y formule:

$$x + y = x$$

(3) Partikularizaciju po y a zatim generalizaciju po x formule:

$$x + y = 0$$

Odgovor.

(1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x+y)+z = x+(y+z)$

(2) $(\exists y)(\forall x)\, x+y = x$

(3) $(\forall x)(\exists y)\, x+y = 0$

6. Date formule zapisati pomoću kvantora

$$F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \dots \wedge F(a_n), \quad F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n)$$

Rešenje. Označimo sa S skup $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Traženi zapisi su redom:

$$(\forall x \in S)\, F(x), \quad (\exists x \in S)\, F(x)$$

7. Zapisati bez kvantora formule:

$$(\forall x,y) A(x,y), \quad (\exists x,y) A(x,y), \quad (\forall x,y)(x \neq y \Rightarrow A(x,y)), \quad (\exists x,y)(x \neq y \wedge A(x,y))$$

pretpostavljajući da su x, y elementi skupa $\{1, 2\}$.

Odgovor.

$$A(1,1) \wedge A(1,2) \wedge A(2,1) \wedge A(2,2), \quad A(1,1) \vee A(1,2) \vee A(2,1) \vee A(2,2),$$
$$A(1,2) \wedge A(2,1), \quad A(1,2) \vee A(2,1)$$

8. Koje od narednih formula su istinite za realne brojeve

$$(\forall x)(\forall y)\, x+y=0, \quad (\forall x)(\exists y)\, x+y=0, \quad (\exists x)(\forall y)\, x+y=0, \quad (\exists x)(\exists y)\, x+y=0$$

9. Da li kvantori $\forall$, $\exists$ mogu razmenjivati mesta, a da se pri tom ne menja značenje rečenice?

Odgovor. Ne mogu, jer na primer, za prirodne brojeve prva od formula

$$(\forall x)(\exists y)\, x < y, \quad (\exists y)(\forall x)\, x < y$$

je istinita (jer za svaki prirodan broj postoji broj veći od njega) dok je druga lažna (jer ne postoji najveći prirodan broj).

10. Neka $Q(x,y)$ znači: *ravan x seče ravan y* (tj. te ravni imaju tačno jednu zajedničku pravu). Koja od datih formula je istinita

$$(\forall x)(\exists y)\ Q(x,y)$$
$$(\forall x)(\forall y)(Q(x,y) \Rightarrow \neg(x \parallel y))$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \parallel y \wedge Q(x,z) \Rightarrow Q(y,z))$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Q(x,y) \wedge Q(y,z) \Rightarrow Q(x,z))$$
$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x,z) \wedge Q(y,z))$$

Odgovor. Neistinita je jedino četvrta formula, jer ako x seče y i y seče z, može nastupiti slučaj $x \parallel z$.

11. Da li su istinite formule

$$(\forall a \in R)(\forall b \in R)(\exists p \in R)(\exists q \in R)(\forall x \in R)(x^2 + ax + b = (x+p)^2 + q)$$
$$(\exists p \in R)(\exists q \in R)(\forall a \in R)(\forall b \in R)(\forall x \in R)(x^2 + ax + b = (x+p)^2 + q)$$

Odgovor. Prva formula je istinita. Postojeći p, q su redom $\frac{a}{2}$, $\frac{4b-a^2}{4}$. Druga formula je lažna jer ako bi postojali p, q takvi da je formula

$$x^2 + ax + b = (x+p)^2 + q$$

istinita za sve vrednosti a, b, x, tada bi sledilo da su svaka dva kvadratna trinoma $x^2 + ax + b$, $x^2 + a_1 x + b_1$ medjusobno jednaka, što nije tačno.

12. Odrediti istinitosnu vrednost date formule (o prirodnim brojevima) ako x,y redom imaju vrednosti $1, 2$.

a) $x+y=3$, b) $x+y=2$, c) $x+0\cdot y=1$, d) $x=1$, e) $(\exists y) y+x=2$, f) $(\exists x,y)\ 1=x\cdot y$

Rešenje. Formula a) je tačna, a formula b) netačna. Tačne su i formule c) i d) jer ako se x, y redom zamene sa $1,2$ dobijaju se sledeće tačne jednakosti $1+0\cdot 2 = 1$, $1=1$. Formula d) je tačna ukoliko x ima vrednost 1, a y ima ma koju vrednost, jer ta formula ne zavisi od y. Nešto slično vredi i za formulu e). Ta formula, u stvari, zavisi samo od x, jer ona znači:

Postoji neki prirodan broj koji sabran sa brojem x daje 2

što je „taj neki broj" u formuli označen upravo sa y – to nije važno, mogli smo ga označiti i sa z,u i sl. Sledstveno zamenom x sa 1, y sa 2, od e) se dobija formula $(\exists y)\ y+1 = 2$ koja je, inače, tačna. Formula f) ne zavisi ni od x ni od y. Njena istinitosna vrednost je $\top$.

13. Neka x, y, z imaju redom vrednosti $1, 2, 3$. Koja od sledećih formula o celim brojevima je tada tačna

a) $x+y-z = 1$, b) $y=2$, c) $x=1$, d) $x+y=5$, e) $(\exists u) x+y+z = u$, f) $(\exists x) x+y = z$, g) $(\forall u) u\cdot(x+y-z) = 0$, h) $(\forall x)(\exists y) x+y = z$.

14. Neka je F formula (prirodnim brojevima) : $\sum_{i=1}^{x} i^2 = y$.

a) Da li F zavisi od i ?

b) Odrediti istinitosnu vrednost formule F u slučajevima

1) $x=2,\ y=5$, 2) $x=2,\ y=5,\ i=8$, 3) $x=2,\ y=4,\ i=5$

15. Za koje vrednosti x na skupu realnih brojeva je istinita formula

$$(\exists\, y)\,(x+y = 1 \wedge 2x-y = 2)$$

Rešenje. Predpostavimo da je formula istinita i označimo postojeći y sa y_o. Tada dobijamo sistem po x, y_o:

$$x+y_o = 1 \wedge 2x - y_o = 2$$

Taj je sistem ekvivalentan sa $x=1 \wedge y_o = 0$. Znači, iz predpostavke da je formula

$$(\exists\, y)\,(x+y = 1 \wedge 2x - y = 2)$$

istinita sledi: $x=1$.

Proveravamo da važi i obratno. Naime, ako $x = 1$, onda je prethodna formula ekvivalentna sa istinitom formulom:

$$(\exists\, y)\,(y = 0)$$

Zaključak: Jedina vrednost x za koju je razmatrana formula istinita jeste broj 1.

16. Rešiti po x (na skupu prirodnih brojeva) formulu:

a) $(\exists\, y)\ x\cdot y = 6$, b) $(\exists\, y)\ x+y=3$, c) $(\exists\, y)\,(x+y=5 \wedge x-y=1)$, d) $(\exists\, y)\ x=2y$

17. Dokazati ekvivalenciju o realnim brojevima

$$(\exists\, x)\, ax=b \Longleftrightarrow a\neq 0 \vee b=0$$

Uputstvo. Koristiti činjenicu da realni brojevi čine polje.

18. Formulom

a) $x \star y = x+y+1$, b) $x \star y = x+y+xy$, c) $x \star y = 2x+3y$

je odredjena operacija skupa R. Da li ta operacija poseduje (u skupu R) jedinični element, tj. da li je tačna formula $(\exists\, x)\,(\forall\, y)\,(x \star y=y \wedge y \star x=y)$?

19. Ispitati istinitost formula:

$\neg(\exists\, x\in Q)\ x^2=2$, $\neg(\exists x\in Q)\ x^2 = 3$, $(\exists x\in R)\ x^2 = -1$

$(\exists\, a\in R)\,(\forall\, y\in R)\ ax=a$, $(\exists\, a\in R)\,(\forall\, x\in R)\ \exists\, y\in R)\ x+y=a$

20. Neka su α, β binarne relacije skupa $\{1, 2, 3\}$ odredjene tablicama

α	1	2	3
1	⊤	⊥	⊥
2	⊥	⊤	⊤
3	⊥	⊥	⊥

β	1	2	3
1	⊥	⊤	⊥
2	⊥	⊤	⊥
3	⊤	⊥	⊥

Odrediti tablicu relacije γ (istog skupa) definisane formulom

$$\gamma(x,y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists\, z)\,(\alpha(x,z) \wedge \beta(z,y))$$

Primedba. Relacija γ se obično označava $\alpha\circ\beta$. To je tzv. *proizvod* relacije α sa relacijom β. Dakle:

$$(\alpha\circ\beta)(x,y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists z)(\alpha(x,z) \wedge \beta(z,y))$$

Rešenje zadatka. *Prvi način:* Prema definiciji istinitosne vrednosti rečenice oblika $(\exists z) A(z)$, za relaciju γ imamo ovakvo rasudjivanje: $\tau\gamma(x,y) = \top$ *akko* $(\tau\alpha(x,z) = \top$ i $\tau\beta(z,y) = \top$, za neki z iz $\{1, 2, 3\})$. Odatle kada $x=1$ i $y=1$, dobijamo: $\tau\gamma(1,1) = \top$ *akko* $(\tau\alpha(1,z) = \top$ *i* $\tau\beta(z,1) = \top$, za neki z iz $\{1, 2, 3\})$. Kako za z imamo tri mogućnosti, to za konjunkciju na desnoj strani razlikujemo slučajeve:

$$z = 1: \tau\alpha(1,1) = \top \text{ i } \tau\beta(1,1) = \top,$$
$$z = 2: \tau\alpha(1,2) = \top \text{ i } \tau\beta(2,1) = \top,$$
$$z = 3: \tau\alpha(1,3) = \top \text{ i } \tau\beta(3,1) = \top$$

Medjutim, nijedna od tih mogućnosti nije ispunjena, jer: $\tau\beta(1,1) = \bot$, $\tau\alpha(1,2) = \bot$, $\tau\alpha(1,3) = \bot$. Otuda zaključujemo: $\tau\gamma(1,1) = \bot$.

U slučaju $x=1$, $y=2$ zaključujemo: $\tau\gamma(1,2) = \top$, pošto je ispunjeno $\tau\alpha(1,z) = \top$ i $\tau\beta(z,2) = \top$, *za neki z iz skupa* $\{1, 2, 3\}$ (dosta je za z uzeti 1).

Sličnim rasudjivanjem dobijamo

$\tau\gamma(1,3) = \bot$, $\tau\gamma(2,1) = \top$, $\tau\gamma(2,2) = \top$, $\tau\gamma(2,3) = \bot$

$\tau\gamma(3,1) = \top$, $\tau\gamma(3,2) = \bot$, $\tau\gamma(3,3) = \bot$

Otuda tablica relacije γ izgleda kao što je prikazano.

γ	1	2	3
1	$\bot$	$\top$	$\bot$
2	$\top$	$\top$	$\bot$
3	$\top$	$\bot$	$\bot$

Drugi način: Prema značenju kvantora $\exists$ na konačnom skupu definicija relacije γ može se preobratiti u oblik[1])

$$\gamma(x,y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha(x,1) \wedge \beta(1,y) \vee \alpha(x,2) \wedge \beta(2,y) \vee \alpha(x,3) \wedge \beta(3,y)$$

Recimo, za slučaj $x=2$, $y=3$ ta definicija glasi

(1) $\gamma(2,3) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha(2,1) \wedge \beta(1,3) \vee \alpha(2,2) \wedge \beta(2,3) \vee \alpha(2,3) \wedge \beta(3,3)$

Vrednosti za $\alpha(2,1)$, $\alpha(2,2)$, $\alpha(2,3)$ (koje se pojavljuju sa desne strane prethodne ekvivalencije) nalaze se u drugoj vrsti, a vrednosti za $\beta(1,3)$, $\beta(2,3)$, $\beta(3,3)$ u trećem stupcu odgovarajućih tablica. Otuda, se, prema definiciji (1), vrednost za $\gamma(2,3)$ dobija „množenjem" elemenata druge vrste tablice za α sa odgovarajućim elementima trećeg stupca tablice za β, i „sabiranjem" tako dobijenih proizvoda. Znači, do $\alpha\circ\beta$ se može doći *matričnim množenjem relacije* α sa relacijom β. Pri tome operacije $\vee$, $\wedge$ igraju ulogu sabiranja i množenja.

---

1) Operacije $\wedge$, $\vee$ označili smo sa $\wedge$, $\vee$ da bismo imali izvesnu grafičku sličnost sa znacima $\cdot$, $+$. Zbog toga u disjunkciji sa desne strane ne pišemo zagrade.

Prema rečenom vrednost za $\gamma(2,3)$ računa se na ovaj način

$$\tau\gamma(2,3) = (\perp \wedge \perp) \vee (\top \wedge \perp) \vee (\top \wedge \perp)$$
$$= \perp \quad \perp \vee \perp$$
$$= \perp$$

γ	1	2	3
1			
2			$\perp$
3			

Dakle $\tau\gamma(2,3) = \perp$, odnosno u preseku druge vrste i trećeg stupca tablice relacije γ nalazi se vrednost $\perp$. Slično se popunjavaju i ostala polja tablice.

21. Obrazovati proizvod relacije α sa relacijom β.

a) α, β su relacije skupa $\{a, b, c, d, e\}$ odredjene tablicama

α	a	b	c	d	e
a	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
b	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
c	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
d	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
e	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$

β	a	b	c	d	e
a	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
b	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
c	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
d	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
e	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

b) α i β su relacije $<$ skupa celih brojeva Z.

c) α i β su relacije $<$ skupa racionalnih brojeva Q.

22. Neka je α relacija skupa $\{a, b, c\}$ odredjena navedenom tablicom.
Odrediti tablicu relacije β istog skupa definisane formulom:

α	a	b	c
a	$\perp$	$\top$	$\top$
b	$\perp$	$\top$	$\top$
c	$\perp$	$\top$	$\top$

a) $\beta(x,y) \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\ z)\ (\alpha(z,x) \Rightarrow \alpha(z,y))$

b) $\beta(x,y) \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\ z)\ (\alpha(z,x) \iff \alpha(z,y))$

23. Opisati relacije α, β skupa prirodnih brojeva uvedene definicijama:

$$\alpha(x) \overset{\text{def}}{\iff} (\exists\ y)\ x > y \qquad\qquad \beta(x) \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\ y)\ x > y$$

Rešenje. Zamenjujući u definicijama relacija α, β umesto x prirodne brojeve 1,2,3 ... dobijamo:

$\alpha(1) \iff (\exists\ y)\ 1 > y,\quad \alpha(2) \iff (\exists\ y)\ 2 > y,\quad \alpha(3) \iff (\exists\ y)\ 3 > y, \ldots$

$\beta(1) \iff (\forall\ y)\ 1 > y,\quad \beta(2) \iff (\forall\ y)\ 2 > y,\quad \beta(3) \iff (\forall\ y)\ 3 > y, \ldots$

Odatle proizlazi zaključak:

$\tau\alpha(1) = \perp,\quad \tau\alpha(x) = \top$ za svaki prirodan broj $x \neq 1$;

$\tau\beta(x) = \perp$, za svaki prirodan broj x.

24. Prevesti rečenice

x je oblika 2k, gde je k ceo broj

x je oblika f(a), gde je a element skupa S.

Rešenje. Rečenica

x je oblika 2k, gde je k ceo broj

ima značenje

x je jednak 2k, za neki ceo broj k

odnosno

$x = 2k$, *za neki* $k \in Z$

Otuda njen prevod izgleda: $(\exists\ k \in Z)\ x = 2k$

Slično, prevod rečenice

x je oblika f(a), gde je a element skupa S

jeste: $(\exists\ a \in S)\ x = f(a)$.

25. Obrazovati prevode rečenica

Nijedan A nije B, *Neki A nije B*

Rešenje. Prva rečenica isto znači kao: *Svaki A nije B*, odnosno *Svaki A je ne B*. Otuda prevod glasi $(\forall\ x)\ (A(x) \Rightarrow \neg B(x))$. Prevod druge rečenice koja isto znači kao *Neki A je ne B* je: $(\exists\ x)\ (A(x) \wedge \neg B(x))$.

26. Prevesti rečenice

Neki ravnokraki trougao je ravnostran.

Nijedan ravnostrani trougao nije pravougli.

Neki pravougli trougao je ravnokrak.

Postoji ravnokraki trougao koji nije pravougli.

Rešenje. Uvedimo oznake

$\rho(\triangle ABC)$ za: *ABC je ravnostrani trougao*[1]

$r(\triangle ABC)$ za: *ABC je ravnokraki trougao*

$\pi(\triangle ABC)$ za: *ABC je pravougli trougao*

Tada traženi prevodi glase

$(\exists\ \triangle ABC)\ [r(\triangle ABC) \wedge \rho(\triangle ABC)]$, $(\forall\ \triangle ABC)\ [\rho(\triangle ABC) \Rightarrow \neg\pi(\triangle ABC)]$

$(\exists\ \triangle ABC)\ [\pi(\triangle ABC) \wedge r(\triangle ABC)]$, $(\exists\ \triangle ABC)\ [r(\triangle ABC) \wedge \neg\pi(\triangle ABC)]$

27. Izraziti pomoću osnovnih brojačke kvantore iskazane rečima:

postoji najviše jedan, *za svaki najviše jedan.*

Rešenje. Za proizvoljno svojstvo A (dužine 1) rečenica

Postoji najviše jedan predmet koji ima svojstvo A.

ima ovakvo značenje

Ne postoje dva[2] *predmeta x,y takva da važi A(x) i A(y).*

---

[1] Ovde se složen znak $\triangle ABC$ koristi kao promenljiva.

[2] Tu, a i u daljem d v a, t r i itd. znači d v a r a z l i č i t a, t r i m e dj u s o b n o r a z l i č i t a itd.

Nije teško uočiti da je prevod te rečenice formula:

$$\neg(\exists x,y)(x \neq y \wedge A(x) \wedge A(y))$$

Slično, rečenici

Za svaki najviše jedan predmet vredi A

odgovara prevod

$$\neg(\forall x,y)(x \neq y \Rightarrow A(x) \wedge A(y))$$

28. Brojački kvantor „postoje tačno dva" izraziti pomoću osnovnih kvantora.

Odgovor. Na formulskom jeziku predikatskog računa prvog reda to izražavanje izgleda

$$(\exists x,y)(x \neq y \wedge A(x) \wedge A(y) \wedge \neg(\exists z)(z \neq x \wedge z \neq y \wedge A(z)))$$

29. Kvantore iskazane rečima „postoje najmanje tri", „za svaka najmanje tri" izraziti pomoću osnovnih.

30. Izraziti pomoću osnovnih brojačke kvantore

„postoje najviše dva", „za svaka najviše dva".

31. Obrazovati prevod tzv. *prve Hilbertove aksiome veze:*

Za svake dve tačke postoji prava kojoj te tačke pripadaju.

Rešenje. Uvodimo oznake: $\tau(x)$ za „x je tačka", $\pi(x)$ za „x je prava". Tada podroban prevod glasi:

$$(\forall x,y)(\tau(x) \wedge \tau(y) \Rightarrow (x \neq y \Rightarrow (\exists z)(\pi(z) \wedge x \in z \wedge y \in z)))$$

Primedba. Da bi se dobili što jednostavniji prevodi, usvajamo razna pravila o skraćenom pisanju.

(i) U geometriji se često javljaju svojstva *biti tačka, biti prava, biti ravan.* Dogovaramo se, stoga, da *tačke* označimo velikim latinskim slovima A, B, C i sl. *prave* malim latinskim slovima a, b, c i sl., a *ravni* grčkim slovima α, β, γ i sl.

(ii) Umesto $x \in S \wedge y \in S$, $x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S$ i sl. pišemo kraće $x, y \in S$, $x, y, z \in S$ i sl. Dalje, ukoliko *sve* promenljive koje učestvuju u formuli uzimaju vrednosti iz istog skupa S, tada često umesto $x \in S$, $y \in S$ pišemo jednostavno x, y bez onoga $\in S$, s tim što tu pretpostavku ističemo izdvojeno u zagradi sa strane ili, kako smo to već i ranije činili, rečima iskazujemo da se formula odnosi na elemente skupa S.

Prema usvojenim dogovorima o skraćenom pisanju prva Hilbertova aksioma veze može se prevesti i ovako

$$(\forall A, B)(A \neq B \Rightarrow (\exists a) A, B \in a)$$

32. Obrazovati prevode Hilbertovih aksioma veze:

(1) *Za svake dve tačke postoji prava kojoj te tačke pripadaju.*

(2) *Za svake dve tačke postoji najviše jedna prava kojoj te tačke pripadaju.*

(3) *Na pravoj postoje najmanje dve tačke. Postoje najmanje tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj.*

(4) *Za svake tri tačke koje ne leže na jednoj pravoj postoji ravan koja sadrži te tačke. Za svaku ravan postoji tačka koja joj pripada.*

(5) *Za svake tri tačke koje ne leže na istoj pravoj postoji najviše jedna ravan kojoj te tačke pripadaju.*

(6) *Ako dve tačke neke prave pripadaju jednoj ravni, onda i svaka tačka te prave pripada uočenoj ravni.*

(7) *Ako dve ravni imaju jednu zajedničku tačku onda te ravni imaju još jednu zajedničku tačku.*

(8) *Postoje najmanje četiri tačke koje ne pripadaju istoj ravni.*

Rešenje. U uočenim aksiomama, a što je i inače čest slučaj u geometriji, pojavljuje se na više mesta rečenica oblika:

$$x_1, \ldots, x_n \text{ su medjusobno različiti}$$

koju ćemo prevoditi elementarnom formulom $raz(x_1, \ldots, x_n)$. Naravno, takva se rečenica može prevesti i korišćenjem jedino znaka jednakosti = (odnosno različitosti ≠). Na primer, za $raz(x, y, z)$ odgovarajuća formula takve vrste je:

$$x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z$$

Traženi prevodi (skraćeni) aksioma veze glase:

(1) $(\forall A, B)\,(raz(A, B) \Rightarrow (\exists a), A, B \in a)$

(2) $(\forall A, B)\,(raz(A, B) \Rightarrow \neg(\exists a, b)\,(raz(a, b) \wedge A, B \in a \wedge A, B \in b)$

(3) $(\forall a)(\exists A,B)\,(raz(A,B) \wedge A,B \in a) \wedge (\exists A,B,C)\,(raz(A,B,C) \wedge \neg(\exists a)A,B,C \in a)$

(4) $(\forall A,B,C)(raz(A,B,C) \wedge \neg(\exists a)A,B,C \in a \Rightarrow (\exists \alpha)A,B,C \in \alpha) \wedge (\forall \alpha)(\exists A)A \in \alpha$

(5) $(\forall A,B,C)(raz(A,B,C) \wedge \neg(\exists a)A,B,C \in a \Rightarrow \neg(\exists \alpha,\beta)(raz(\alpha,\beta) \wedge A,B,C \in \alpha \wedge A,B,C \in \beta))$

(6) $(\exists A,B \in a)\,(raz(A, B) \wedge A, B \in \alpha) \Rightarrow (\forall X \in a)X \in \alpha$

(7) $(\forall A)\,(A \in \alpha \wedge A \in \beta \Rightarrow (\exists B \neq A)\,(B \in \alpha \wedge B \in \beta))$

(8) $(\exists A,B,C,D)\,(raz(A,B,C,D) \wedge \neg(\exists \alpha)A, B, C, D \in \alpha)$

33. Prevesti *Hilbertove aksiome rasporeda:*

(1) Ako je tačka B izmedju tačaka A i C, tačke A, B, C su tri medjusobno različite tačke, i tačka B je takodje izmedju tačaka C i A.

(2) Ako je tačka B izmedju tačaka A i C, tačka C nije izmedju tačaka A i B.

(3) Ako su A i B dve različite tačke, postoji tačka C tako da je B izmedju tačaka A i C.

(4) Postoje najmanje tri medjusobno različite tačke od kojih nijedna nije izmedju ostale dve.

(5) Ako su A,B,C tri medjusobno različite tačke od kojih nijedna nije izmedju os-

tale dve, D tačka izmedju B i C, E tačka izmedju A i D, tada postoji tačka F izmedju A i B tako da je E izmedju C i F.

34. Prevesti date rečenice o realnim brojevima (S je podskup od R)

a je najmanji element skupa S, a je najveći element skupa S,

a je gornje ograničenje skupa S, a je donje ograničenje skupa S,

a je gornja medja (supremum) skupa S, a je donja medja (infinum) skupa S.

Odgovor. Prevodi su po redu formule:

$$a \in S \wedge (\forall x \in S)\, a \leqslant x, \quad a \in S \wedge (\forall x \in S)\, x \leqslant a,$$

$$(\forall x \in S)\, x \leqslant a, \qquad (\forall x \in S)\, a \leqslant x,$$

$$(\forall x \in S)\, x \leqslant a \wedge (\forall b \in R)\, ((\forall x \in S)\, x \leqslant b \Rightarrow a \leqslant b)$$

$$(\forall x \in S)\, a \leqslant x \wedge (\forall b \in R)\, ((\forall x \in S)\, b \leqslant x \Rightarrow b \leqslant a)$$

35. Prevesti: *princip minimalnog elementa* i *princip potpune indukcije* za uredjen skup $(S, \leqslant)$.

Rešenje. Princip minimalnog elementa glasi:

Svaki neprazan podskup skupa S ima minimalni element (tj. takav element od koga nijedan element uočenog podskupa nije manji).

Prevod te rečenice je formula

$$(\forall A \subset S)\, (A \neq \phi \Rightarrow (\exists a \in A)\, (\forall x \in A) \neg (x < a))$$

Princip transfinitne (*Neterine*) indukcije glasi:

Za proizvoljan podskup A od S važi: Ako A sadrži element $a \in S$ kad god sadrži sve elemente $x \in S$ koji su manji od a, onda $A = S$.

Prevod te rečenice je formula:

$$(\forall A \subset S)\, [(\forall a \in S)\, ((\forall x \in S)\, (x < a \Rightarrow x \in A) \Rightarrow a \in A) \Rightarrow A = S]$$

36. U skupu N prirodnih brojeva definisati pojam *sledbenik broja n* pomoću pojma *biti manji*.

Odgovor. Neka je $<$ uobičajena oznaka za *biti manji*. Tada:

m je sledbenik za n akko $n < m \wedge \neg (\exists k)\, (n < k \wedge k < m)$

37. Pomoću odnosa *biti element* i *biti jednak* (za tačke) definisati odnos: *prava a seče pravu b* (oznaka: $a \times b$).

Rešenje. *Prava a seče pravu b*

akko a i b imaju tačno jednu zajedničku tačku

akko postoji tačno jedna zajednička tačka A koja pripada i a i b

akko postoji tačka A koja pripada i a i b, i ne postoji tačka B različita od A koja pripada i a i b

Otuda tražena definicija zapisana korišćenjem kvantora $\exists_1$ glasi:

$a \times b$ *akko* $(\exists_1 A)\ (A \in a \wedge A \in b)$

Svodjenjem na osnovne kvantore dobijamo:

$a \times b$ akko $(\exists A)(A \in a \wedge A \in b \wedge \neg(\exists B)(B \neq A \wedge B \in a \wedge B \in b))$

38. Pomoću odnosa *biti element, biti podskup, biti jednak* (za prave) definisati: *prava a je paralelna pravoj b* (oznaka: $a \| b$).

Rešenje.

$a \| b$ akko prave a i b se poklapaju ili
prave a, b leže u istoj ravni, a nemaju zajedničkih tačaka
akko prava a se poklapa sa b ili
postoji ravan α kojoj pripada i prava a i prava b,
i ne postoji tačka A koja pripada obema pravim a i b.
akko $a=b \vee (\exists \alpha)(a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha) \wedge \neg(\exists A)(A \in a \wedge A \in b))$

Dakle:

$a \| b$ akko $a=b \vee ((\exists \alpha)(a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha) \wedge \neg(\exists A)(A \in a \wedge A \in b))$

39. Koristeći jedino osnovne kvantore definisati naredne pojmove teorije skupova pomoću odnosa $\in$, $=$:
„biti prazan skup”, „biti neprazan skup”, „biti jednočlan skup”, „biti skup sa najviše dva elementa”, „biti skup sa elementima a, b”.

Rešenje.

S je neprazan skup akko S ima najmanje jedan element
akko postoji element x koji pripada S
akko $(\exists x)\, x \in S$

S je prazan skup akko S nema nijedan element
akko ne postoji element x koji pripada S
akko $\neg(\exists x)(x \in S)$

S je jednočlan skup akko S ima tačno jedan element
akko postoji x koji pripada S i ne postoji y koji je različit od x i koji takodje pripada S.
akko $(\exists x)(x \in S \wedge \neg(\exists y)(y \neq x \wedge y \in S))$

S je dvočlan skup akko S ima tačno dva elementa
akko postoje različiti elementi x, y koji pripadaju S i ne postoji element z različit od x, y koji takodje pripada S
akko $(\exists x,y)(x \neq y \wedge x \in S \wedge y \in S \wedge \neg(\exists z)(z \neq x \wedge z \neq y \wedge z \in S))$

S je skup sa najviše dva elementa akko ne postoje tri različita elementa x, y, z koja pripadaju S
akko $\neg(\exists x,y,z)(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S)$

S je skup sa elementima a, b akko a, b pripadaju S i ne postoji element x različit od a, b koji takodje pripada S
akko $a \in S \wedge b \in S \wedge \neg(\exists x)(x \neq a \wedge x \neq b \wedge x \in S)$

40. Definisati *uniju skupa S, presek skupa S* pomoću odnosa *biti element*.

Rešenje. *Unija skupa S* (oznaka $\bigcup_{x \in S} x$) je, po definiciji, skup svih onih elemenata y koji pripadaju *bar jednom* elementu x skupa S. *Presek skupa S* (oznaka $\bigcap_{x \in S} x$) je skup svih onih elemenata y koji pripadaju *svakom* elementu x iz S. Prema rečenom

$$\bigcup_{x \in S} x = \{y \mid y \in x, \text{ za neki element } x \text{ iz } S\} = \{y \mid (\exists\, x \in S)\, y \in x\}$$

$$\bigcap_{x \in S} x = \{y \mid y \in x, \text{ za svaki element } x \text{ iz } S\} = \{y \mid (\forall\, x \in S)\, y \in x\}$$

Dakle, tražene definicije glase:

$$\bigcup_{x \in S} x \overset{\text{def}}{=} \{y \mid (\exists\, x \in S)\, y \in x\}, \qquad \bigcap_{x \in S} x \overset{\text{def}}{=} \{y \mid (\forall\, x \in S)\, y \in x\}$$

XI GLAVNA INTERPRETACIJA PREDIKATSKIH FORMULA

♦ Zapisi kao $x = y$, $x \in A$, $(\exists x)x = y$, $x \| y \Rightarrow y \| x$ su primeri *predikatskih formula* (prvog reda).

♦ U razmatranju neke matematičke teorije (recimo, aritmetike, teorije skupova i sl.) koriste se predikatske formule gradjene pomoću odredjenih *relacijskih i operacijskih znakova*, kao i *znakova konstanata*. Skup izvesnih takvih znakova naziva se *(relacijsko–operacijski) jezik*. Jedan jezik je

$$L = \{a, \star, \alpha, \beta\}$$

uz dogovor, recimo, da je a znak konstante, $\star$ operacijski znak dužine 2, α, β relacijski znaci, redom, dužina 2, 3. Uopšte, svakom relacijskom i operacijskom znaku nekog jezika dodeljuje se po jedan prirodan broj–*dužina* znaka.

♦ Predikatske formule se uvek definišu u odnosu na neki jezik[1] L. Tada je reč o formulama koje od relacijskih, operacijskih i znakova konstanata sadrže samo one koji pripadaju tom jeziku. Pored toga formule shvaćene kao reči sadrže znake

$$\wedge \ \vee \Rightarrow \ \Leftrightarrow \ \neg \ \forall \ \exists \ , \ ) \ ($$

kao i neke znake odabrane za promenljive (recimo $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$)

♦ Neka je L dati jezik. Pretpostavimo da smo kao u tački II definisali terme (izraze) tog jezika, tj. izraze gradjene pomoću promenljivih, kao i pomoću znakova konstanata i operacijskih znakova tog jezika. Nakon toga definišemo tzv. *elementarne formule*. To su reči oblika

$$\rho(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

gde je ρ ma koji relacijski znak dužine n (iz jezika L), a $t_1, \ldots, t_n$ su izrazi (istog jezika).

Formule I reda– jezika L se, dalje, definišu ovako:

(i) Elementarne formule su formule;

(ii) Ako su A, B formule, onda su formule i reči

$$(A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \Rightarrow B),\ (A \Leftrightarrow B),\ \neg A,\ (\forall u)A,\ (\exists u)A$$

(*u* je ma koja promenljiva)

---

[1] Koji mora imati bar jedan relacijski znak.

(iii) Formule [1] se dobijaju jedino primenom pravila (i), (ii) konačan broj puta[2]

♦ Neke od formula na već navedenom jeziku L su

$$\alpha(a, x) \Rightarrow \alpha(x \star x, a), \qquad (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\beta(x,y,z) \wedge \neg \alpha(x,z))$$

♦ U slučaju tzv. *glavne interpretacije (tumačenja)* predikatskih formula postupa se ovako. Uočava se izvestan neprazan skup D – tzv. *domen* interpretacije. Znaci konstanata tumače se kao odredjeni elementi domena, drukčije rečeno kao neke njegove operacije dužine 0. Relacijski i operacijski znaci tumače se kao relacije i operacije (odgovarajućih dužina) domena D. Sažeto rečeno uočava se neki neprazan skup D sa izvesnim njegovim operacijama i relacijama (takvo zajedništvo[3] se naziva *relacijsko–operacijska struktura*). Logički veznici se tumače kao odgovarajuće rečenične operacije. Promenljive se, dalje, tumače kao elementi domena. Recimo jednu interpretaciju formule

$$\alpha(x, y) \Rightarrow (\exists z)(\alpha(x, z) \quad \alpha(z, y))$$

odredjuju skup N kao domen i relacija $<$ kao vrednost (interpretacija) znaka α. Na taj način formuli odgovara zapis (rečenica, formula o domenu N)

$$x < y \Rightarrow (\exists z)(x < z \wedge z < y)$$

Za razne vrednosti promenljivih x, y (promenljiva z u stvari ne učestvuje – videti zadatak 12 tačke X) nastaju razni odredjeni iskazi o prirodnim brojevima i njihovoj relaciji $<$. Ako navedeni zapis označimo sa $F(x,y)$, tada su, recimo, $F(1,1)$, $F(1, 2)$, $F(1, 3)$ redom iskazi

$$1 < 1 \Rightarrow (\exists z)(1 < z \wedge z < 1), \quad 1 < 2 \Rightarrow (\exists z)(1 < z \wedge z < 2),$$
$$1 < 3 \Rightarrow (\exists z)(1 < z \wedge z < 3)$$

medju kojima je jedino drugi netačan.

♦ Strože rečeno glavna interpretacija se uvodi na sledeći način. Neka je L dati jezik. Pod relacijsko–operacijskom strukturom tog jezika smatramo izvestan neprazan skup D zajedno sa nekim njegovim relacijama i operacijama. Tačnije svakom znaku iz jezika L pridružuje se po jedna operacija, odnosno relacija odgovarajuće dužine skupa D. Neka je, sada, F jedna (ili više) formula na jeziku L. Pod glavnom interpretacijom te (odnosno tih) formula smatramo svaku relacijsko–operacijsku strukturu jezika L.

U slučaju odredjene interpretacije za razne vrednosti promenljivih (u stvari onih koje „nisu pod dejstvom nekog kvantora", tzv. *slobodnih* promenljivih – taj pojam u daljem tačno opisujemo), od formule F nastaju razni *iskazi.*

---

[1] U slučaju tzv. predikatskih formula II reda kvantori se mogu odnositi i na operacijske i relacijske znake. U takve formule dolaze:

$$(\forall x)(\exists \alpha)\,\alpha(x), \quad (\exists f)(\forall x)\, f(x) = x \quad \text{i dr.}$$

[2] I tu se slično kao kod iskaznih formula usvajaju razni dogovori o nepisanju nekih zagrada.

[3] Struktura se tačnije rečno sastoji iz tri dela – skupovnog (to je domen D), relacijskog i operacijskog. Otuda se često kaže da je struktura u r e d j e n a t r o j k a takvih delova.

♦ Uočimo sada izvesnu formulu F i promenljivu u. Pojavljivanje promenljive u u formuli F je *vezano* ako je ono oblika $(\exists u)$, $(\forall u)$, ili je to pojavljivanje u oblasti dejstva takvih kvantora. Tačnije, u drugom slučaju formula F ima podformulu oblika

$$(\exists u)A, \quad (\forall u)A$$

i, pritom, u se pojavljuje u formuli A. Ona pojavljivanja promenljive u koja nisu vezana nazivaju se *slobodna*. Recimo, u formuli

$$x = a \Rightarrow (\exists x)\, x = b$$

prvo pojavljivanje promenljive x je slobodno, a preostala dva su vezana.

♦ Neka je L dati jezik, F formula nad njim i I odredjena interpretacija (jezika L). Pretpostavimo da su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sve slobodne promenljive u F. Ukoliko te promenljive dobiju neku vrednost, recimo, redom $d_1, d_2, \ldots, d_n$, iz forn... se dobija iskaz

$$F(d_1, \ldots, d_n)$$

o domenu, odnosno skupovnom delu interpretacije. Istinitosna vrednost tog iskaza odredjuje se na osnovu istinitosnih tablica osnovnih logičkih operacija, s tim što se kvantori $\forall$, $\exists$ tumače u skladu sa značenjem reči *svaki, neki.* U vezi sa tim, dogovorom

$$\rho(d_1, d_2, \ldots, d_n) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

se na prirodan način formuli $F(x_1, \ldots, x_n)$ dodeljuje jedna relacija ρ domena, pri čemu je dužina relacije upravo jednaka broju slobodnih promenljivih formule F (videti zadatke 20–23 prethodne tačke).

♦ Za formulu F kažemo da je *istinita (tačna)* pri interpretaciji I, ukoliko ona za sve vrednosti svojih slobodnih promenljivih ima vrednost $\top$. Interpretacija I se tada naziva *model* formule F. Interpretacija I je *model* skupa formula $\mathcal{F}$, ukoliko su pri njoj sve formule iz $\mathcal{F}$ istinite. Oznake koje pri tom koristimo su u prvom slučaju $I \models F$ a u drugom $I \models \mathcal{F}$.

♦ Primetimo da je *zatvorena* formula F (to je ona koja je bez slobodnih promenljivih) pri svakoj interpretaciji I ili istinita ili lažna, tj.

$$\text{ili } I \models F \qquad \text{ili } I \models \neg F$$

ZADACI

1. Odrediti vrednost formule $F(x, y): x < y \Rightarrow y < x$ ako se $<$ tumači kao relacija „manje" skupa prirodnih brojeva, a promenljive x, y imaju redom vrednosti $1, 3$, odnosno $6, 6$.

Rešenje. Za vrednosti $1,3$ imamo:

$$\tau F(1,3) = \tau(1 < 3 \Rightarrow 3 < 1) = \top \Rightarrow \bot = \bot$$

Na sličan se način dobija $\tau F(6,6) = \top$.

2. Neka je $F(x,y)$ formula o realnim brojevima:

a) $2 > 1 \Longleftrightarrow (\forall x)(x > 2 \Rightarrow x > 1)$, b) $x > y \Rightarrow (\exists z) x > z > y$,

c) $x \neq y \Rightarrow (\exists z > 0) x = y + z$

Odrediti formule $F(1,2)$ i njihove istinitosne vrednosti (pri uobičajenom tumačenju jezika formule).

Rešenje.

a) $F(1,2)$ je sama formula, i ona je istinita;

b) $F(1,2)$ glasi

$$1 > 2 \Rightarrow (\exists z) 1 > z > 2$$

što je istinita formula (jer $1 > 2$ je lažna).

c) $F(1,2)$ je: $1 \neq 2 \Rightarrow (\exists z > 0) 1 = 2 + z$, što je neistinita formula.

3. Neka je $F(x, y)$ formula o skupovima:

a) $x \in \{x\}$, b) $(\forall x)(x \in \{x\} \Rightarrow x \in \{x, y\})$

Odrediti $F(\phi, \phi)$ i njenu istinitosnu vrednost.

4. Odrediti sve vrednosti promenljive x iz domena interpretacije za koje formula $(\exists y)\alpha(x, y)$ ima vrednost $\top$

a) Domen je skup N, α je relacija $|$ (deljivost),

b) Domen je skup R, α je uvedena definicijom

$$\alpha(x, y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x + y = -3 \wedge x - y = -1$$

Rešenje. a) Pri prvoj interpretaciji data predikatska formula postaje $(\exists y) x | y$, a to je istinita formula za svaki prirodan broj x (za x je postojeći y baš x, jer se svaki prirodan broj sadrži u samom sebi).

Otuda je skup vrednosti promenljive x za koje data formula ima vrednost $\top$ jednak celom domenu interpretacije, tj. skupu N.

b) Pri drugoj interpretaciji predikatska formula postaje

$$(\star) \qquad (\exists y)(x + y = -3 \wedge x - y = -1)$$

Pretpostavimo da je $(\star)$ istinita rečenica i neka je y_0 neki postojeći y. To znači da je istinita i konjunkcija

$$x + y_0 = -3 \wedge x - y_0 = -1$$

Ta je konjunkcija ekvivalentna sa $x = 1 \wedge y_0 = 2$. Dakle, iz pretpostavke da je $(\star)$ istinito sledi $x = 1$. Važi i obratno, ako je $x = 1$, onda je formula $(\star)$ istinita – postojeći y je 2.

Zaključak: Traženi skup vrednosti promenljive x jeste $\{1\}$.

5. Utvrditi da li je interpretacija:

Domen je N, α *je* $<$

model svake od navedenih formula

$\neg(\alpha(x, y) \wedge \alpha(y,x))$, $\neg(\exists y)\alpha(x,y)$, $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$, $(\exists y)(\quad x)\alpha(x,y)$

6. Odrediti najmanje dva modela formule $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\alpha(x, y, z)$.

7. Odrediti najmanje dva modela formule

(☆) $$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow (\alpha(f(x)))$$

Rešenje. Prvi model je:

Domen je skup N, α *je „biti paran broj",* $f(x)$ *je* $x + 2$.

Formuli (☆) odgovara istinita rečenica o prirodnim brojevima

$(\forall x)$ (x je paran broj $\Rightarrow x{+}2$ je paran broj)

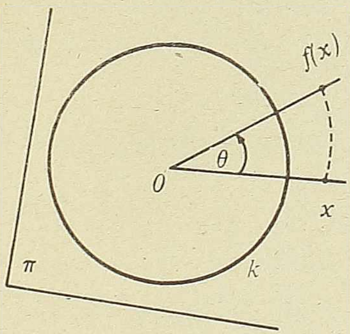
Drugi model je odredjen uslovima:

– Domen je skup tačaka ravni π;

– $\alpha(x)$ znači $x \in k$, gde je k krug ravni π sa centrom u tački 0.

– f je rotacija ravni π oko tačke 0 (u pozitivnom smeru) za ugao θ.

Pri toj interpretaciji dobijamo posebnu formulu (o tačkama ravni π)



$$(\forall x)(x \in k \Rightarrow f(x) \in k)$$

ili izraženo uobičajenim geometrijskim jezikom, ovu istinitu rečenicu

Rotacijom (za ugao θ*) tačke kruga k ostaju na tom krugu.*

8. Da li se može odrediti model formule

$$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(f(x)))$$

sa domenom $\{a, b, c\}$ i to takav da interpretacija za f bude unapred dato preslikavanje $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & b \end{pmatrix}$?

Rešenje. Prema značenju kvantora $\forall$ na konačnom skupu, moraju (što je i dovoljno) biti istinite ove tri formule

$\alpha(a) \Rightarrow \alpha(f(a))$, $\alpha(b) \Rightarrow \alpha(f(b))$, $\alpha(c) \Rightarrow \alpha(f(c))$

odnosno (korišćenjem date interpretacije za f) formule:

$$\alpha(a) \Rightarrow \alpha(c), \quad \alpha(b) \Rightarrow \alpha(b), \quad \alpha(c) \Rightarrow \alpha(b)$$

Druga formula je uvek istinita, jer je to slučaj tautologije $p \Rightarrow p$, pa se problem svodi na odredjivanje vrednosti *iskaznih slova* $\alpha(a)$, $\alpha(b)$, $\alpha(c)$ tako da važi:

$$\tau(\alpha(a) \Rightarrow \alpha(c)) = \top, \quad \tau(\alpha(c) \Rightarrow \alpha(b)) = \top$$

Jedna mogućnost je, recimo:

$$\tau\alpha(a) = \perp, \quad \tau\alpha(b) = \top, \quad \tau\alpha(c) = \top$$

Znači jedan model formule $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(f(x)))$ sa domenom $\{a, b, c\}$, uz uslov da se f interpretira kao $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & b \end{pmatrix}$, dobija se kada se α tumači kao relacija

	a	b	c
α	$\perp$	$\top$	$\top$

9. Data je formula

(☆) $\quad (\forall x)(\alpha(x, f(x)) \Rightarrow \alpha(f(x), x))$

Ispitati da li je datom interpretacijom odredjen model te formule

Domen je skup $\{a, b, c\}$; *α i f su odredjene tablicama*

α	a	b	c
a	$\top$	$\top$	$\perp$
b	$\top$	$\perp$	$\top$
c	$\perp$	$\perp$	$\top$

	f
a	b
b	a
c	a

Rešenje *Prvi način:* Obrazujemo postupno tablicu složene relacije definisane formulom $F(x)$:

$$\alpha(x, f(x)) \Rightarrow \alpha(f(x), x) \qquad (x \text{ je } a, b, c)$$

koristeći pri tom date tablice relacije α i operacije f. Tako dobijamo

x	$f(x)$	$\alpha(x,f(x))$	$\alpha(f(x),x)$	$F(x)$
a	b	$\top$	$\top$	$\top$
b	a	$\top$	$\top$	$\top$
c	a	$\perp$	$\perp$	$\top$

Dakle, tablica relacije definisane formulom $F(x)$ izgleda ovako:

	$F(x)$
a	$\top$
b	$\top$
c	$\top$

Iz nje neposredno zaključjemo da je $(\forall x) F(x)$ (što je, u stvari polazna formula (☆)) istinita.

Drugi način: Činjenica da je datim tablicama za α i f odredjen jedan model formule (☆) može se i ovako izraziti (formulisati). Iz pretpostavki

$$\begin{array}{ll} & \alpha(a,a),\ \alpha(a,b),\ \neg\alpha(a,c) \\ (☆☆) & \alpha(b,a), \neg\alpha(b,b), \alpha(b,c); \quad f(a)=b,\ f(b)=a,\ f(c)=a \\ & \neg\alpha(c,a), \neg\alpha(c,b), \alpha(c,c) \end{array}$$

proizlazi kao posledica formula

$$(\forall x \in \{a,b,c\})(\alpha(x,f(x)) \Rightarrow \alpha(f(x), x))$$

odnosno, prema značenju kvantora $\forall$ na konačnom skupu, proizlazi formula

$$(\alpha(a,f(a)) \Rightarrow \alpha(f(a),a)) \wedge (\alpha(b,f(b)) \Rightarrow \alpha(f(b), b)) \wedge (\alpha(c,f(c)) \Rightarrow \alpha(f(c),c))$$

Nije teško proveriti da je to tačno. Pri tome je podesno najpre iskoristiti pretpostavke

$$f(a)=b, \quad f(b)=a, \quad f(c)=a$$

pomoću kojih se problem svodi na tvrdjenje iskaznog tipa

$$\begin{array}{lcl} \alpha(a,a), \ \alpha(a,b), \neg\alpha(a,c) & & (\alpha(a,b)\Rightarrow\alpha(b,a)) \\ \alpha(b,a), \neg\alpha(b,b), \ \alpha(b,c) & \models & \wedge(\alpha(b,a)\Rightarrow\alpha(a,b)) \\ \neg\alpha(c,a), \neg\alpha(c,b), \ \alpha(c,c) & & \wedge(\alpha(c,a)\Rightarrow\alpha(a,c)) \end{array}$$

10. Ispitati da li je interpretacija:

Domen je $\{a,b\}$, α *je*

α	a	b
a	$\top$	$\bot$
b	$\bot$	$\bot$

, f *je*

	f
a	b
b	a

model formule $(\forall x)(\exists y)(\alpha(x,x)\Rightarrow\alpha(x,f(y)))$.

11. Da li se model formule $(\forall x)(\alpha(x,f(x))\Rightarrow\alpha(f(x),x))$ dat u zadatku 9 može[1] *skratiti* (odstranjivanjem interpretacije za f) do modela formule

(☆) $$(\forall x)(\exists y)(\alpha(x,y)\Rightarrow\alpha(y,x))$$

Odgovor. Može. Pri tako dobijenoj interpretaciji:

Domen je skup $\{a,b,c\}$, α *je relacija tog skupa odredjena tablicom* :

α	a	b	c
a	$\top$	$\top$	$\bot$
b	$\top$	$\bot$	$\top$
c	$\bot$	$\bot$	$\top$

formula (☆) je istinita jer je za x jedan postojeći y odredjen tablicom operacije f. Recimo, za a postojeći y je b i slično.

12. Da li se svaki model formule $(\forall x)F(x,f(x))$ može skratiti do modela za: $(\forall x)(\exists y)F(x,y)$?

13. Da li se svaki model formule $F(a)$ može skratiti (odstranjivanjem interpretacije za a) do modela za: $(\exists x)F(x)$?

14. Neka je I interpretacija formule $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$ odredjena uslovima:

Domen je skup $\{a,b,c\}$, α *je relacija data tablicom*:

α	a	b	c
a	$\top$	$\bot$	$\bot$
b	$\top$	$\top$	$\bot$
c	$\bot$	$\top$	$\top$

Neposredno se proverava da I jeste model date formule. Da li se taj model može produžiti (dodavanjem interpretacije za operacijski znak f) do modela za

[1] Uopšte, p r o d u ž e nj e jednog modela (tj. matematičke strukture) M jeste druga struktura M' uz uslov: M i M' imaju iste skupove, operacije i relacije strukture M takodje su operacije i relacije strukture M', ali je moguće da M' ima i neke dodatne operacije i relacije. Drugim rečima, jezik strukture M' je nadskup jezika strukture M. Inače, umesto M' je produženje za M kaže se i: M je s k r a ć e nj e za M'. Ako je recimo N skup svih prirodnih brojeva, struktura (N, +, ·, <) je produženje svake od struktura (N, +, ·), (N, +).

(☆) $(\forall x)\,\alpha(x, f(x))$;

Rešenje. Prema interpretaciji relacije α važe jednakosti

$\tau\alpha(a,a) = \top$, $\tau\alpha(b,a) = \top$, $\tau\alpha(b,b) = \top$, $\tau\alpha(c,b) = \top$, $\tau\alpha(c,c) = \top$

na osnovu kojih obrazujemo tablicu:

x	za x postojeći y
a	a
b	a,b
c	b,c

Odredjujemo sva preslikavanja domena $\{a, b, c\}$ u samog sebe koja zadovoljavaju uslov

Lik je x, slika je za x postojeći y

Prema prethodnoj tablici za svako takvo preslikavanje f važi

$$f(a) = a,$$
$$f(b) = a \text{ ili } f(b) = b,$$
$$f(c) = b \text{ ili } f(c) = c.$$

Postoje ukupno četiri preslikavanja koja zadovoljavaju te uslove, i to su:

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & b \end{pmatrix},\quad f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & c \end{pmatrix},\quad f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & b \end{pmatrix},\quad f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Svako produženje interpretacije I dobijeno dodavanjem jednog od uslova

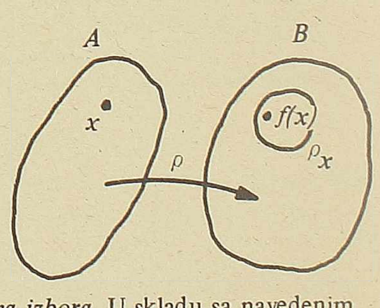
Interpretacija za f je preslikavanje f_i $(i = 1,2,3,4)$

jeste model formule (☆).

15. Neka je domen interpretacije I za formulu $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y)$ skup N prirodnih brojeva, a α relacija $<$. I je očigledno model. Produžiti interpretaciju I do modela za: $(\forall x)\alpha(x, f(x))$.

Odgovor. Jedna mogućnost je da se medju svim za x postojećim y za koje važi $x < y$ izabere najmanji. Drugim rečima, da se $f(x)$ interpretira kao naslednik x' za x.

Napomena. U matematici se često pojavljuje ovakav slučaj: A, B su izvesni neprazni skupovi. Dalje, svaki element x skupa A je u nekom odnosu, relaciji ρ najmanje sa po jednim elementom y skupa B. Znači, svakom elementu x skupa A odgovara po jedan neprazan podskup elemenata ρ_x skupa B. Da li se izvesnim utvrdjenim *izborom* u svakom od tih podskupova može odabrati po jedan predstavnik, ili–funkcijskim izražavanjem: da li postoji neka funkcija f kojom se elementi x prevode u takve izabranike? U matematici se neobično često koristi ta pretpostavka – tzv. *aksioma izbora*. U skladu sa navedenim razmišljanjem jedna njena formulacija (na jeziku računa II reda) glasi:



$(\forall x \in A)(\exists y \in B)F(x,y) \Rightarrow (\exists f{:}A \to B)(\forall x \in A)\,F(x,f(x))$ (F je formula)

(Rečima: Ako za svaki x iz A postoji bar jedan y iz B tako da važi $F(x,y)$, tada postoji bar jedna funkcija f, tzv. izborna funkcija, koja slika A u B, tako da za bilo koji x iz A vredi $F(x, f(x))$).

Inače, koriste se i razni ekvivalenti aksiome izbora, kao, slobodnije rečeno, za svaku familiju (tj. skup) izvesnih nepraznih skupova postoji funkcija koja te skupove (kao likove) slika na po jedan njihov element, drukčije rečeno: u svakom od članova familije bira po jedan element.

16. Da li se svaki model formule

(☆) $$(\forall x)(\exists y)\alpha(x, y)$$

može produžiti dodavanjem interpretacije za f) do modela za

(☆☆) $$(\forall x)\ \alpha(x, f(x))$$

Odgovor. Može. Medjutim, u opštem slučaju dokaz postojanja takvog produženja zasniva se na aksiomi izbora. Naime, ako je I jedan model za (☆), onda prema toj aksiomi postoji bar jedna izborna funkcija (koja preslikava domen u samog sebe). Ukoliko se ta funkcija uzme kao interpretacija, dobijeno produženje je traženi model formule (☆☆),

17. Da li se svaki model formule $(\exists x)\ \alpha(x)$ može produžiti (dodavanjem interpretacije za znak konstante a) do modela za $\alpha(a)$?

18. Da li se svaka interpretacija formule $(\exists y)\alpha(x,y)$ može produžiti do interpretacije za $\alpha(x,f(x))$, ali tako da važi:

$$\tau(\exists y)\alpha(x,y) = \top \rightarrow \tau\alpha(x, f(x)) = \top, \ \textit{za neki } f$$

(x je proizvoljan element domena)

Odgovor. Može, s tim što se preslikavanje f ovako definiše:

Ako je $\tau(\exists y)\ \alpha(x,y) = \top$ (x je element domena) onda se za $f(x)$ po aksiomi izbora bira jedan od postojećih y. Ako je $\tau(\exists y)\alpha(x,y) = \perp$, onda se za $f(x)$ može izabrati proizvoljan element domena (opet po aksiomi izbora).

19. Neka je $F(x_1, ..., x_n, y)$ formula čije su sve slobodne promenljive $x_1, ..., x_n, y$. Dokazati:

Svaki model formule $(\forall x_1)...(\forall x_n)(\exists y)\ F(x_1, ..., x_n, y)$ produživ je do modela formule $(\forall x_1)...(\forall x_n)\ F(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$, gde je f novi, tj. u formuli F neučestvujući, funkcijski znak. Obratno, svaki model druge formule skrativ je do modela prve.

Uputstvo. Koristiti aksiomu izbora.

20. Odrediti sve dvočlane modele formule

(1) $$(\forall x)(\exists y)\ (\alpha(x,y) \Rightarrow \neg\alpha(y,x))$$

Rešenje. Neka je $\{a, b\}$ proizvoljan dvočlani skup. Odredjujemo sve binarne relacije α tog skupa za koje je data formula istinita. Prema značenju kvantora na konačnom skupu gornja formula je ekvivalentna sa:

$$(\forall x)\,(\alpha(x,a) \Rightarrow \neg\alpha(a,x)) \vee (\alpha(x,b) \Rightarrow \neg\alpha(b,x))$$

odnosno sa:

$$((\alpha(a,a) \Rightarrow \neg\alpha(a,a)) \vee (\alpha(a,b) \Rightarrow \neg\alpha(b,a)))$$
$$\wedge\ ((\alpha(b,a) \Rightarrow \neg\alpha(a,b)) \vee (\alpha(b,b) \Rightarrow \neg\alpha(b,b)))$$

Poslednja formula je u stvari iskazna – iskazna slova su $\alpha(a,a)$, $\alpha(a,b)$, $\alpha(b,a)$, $\alpha(b,b)$. Dovedimo je na rastavni oblik. Neposredno se dobija da je jedan njen rastavni oblik formula:

$$\neg\alpha(a,b) \vee \neg\alpha(b,a) \vee (\neg\alpha(a,a) \wedge \neg\alpha(b,b)).$$

Odatle zaključujemo: Polazna formula je istinita na dvočlanom modelu tačno u ovim slučajevima:

1° $\tau\alpha(a,b) = \bot$, a $\tau\alpha(a,a)$, $\tau\alpha(b,a)$, $\tau\alpha(b,b)$ proizvoljni

2° $\tau\alpha(b,a) = \bot$, a $\tau\alpha(a,a)$, $\tau\alpha(a,b)$, $\tau\alpha(b,b)$ proizvoljni

3° $\tau\alpha(a,a) = \bot$, $\tau\alpha(b,b) = \bot$, a $\tau\alpha(a,b)$, $\tau\alpha(b,a)$ proizvoljni

Nije teško ustanoviti, da ukupno postoji *13* traženih modela. Recimo, slučaju 1° odgovara *8* modela.

21. Odrediti sve tročlane normalne[1] modele formule

a) $\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,x) \Rightarrow x = y$, b) $\alpha(x,y) \Rightarrow (\exists x)\, y = f(x)$

22. Opisati sve modele formule

(☆) $$(\forall x)\,(\alpha(x) \Rightarrow \neg\alpha(f(x)))$$

kod kojih je domen

$$D = \{a, f(a), f^2(a), f^3(a), \ldots, b, f(b), f^2(b), f^3(b), \ldots\},$$

tj. domen je skup svih terma obrazovanih od znakova konstanata a, b i operacijskog znaka f (dužine 1). Takvi modeli su tzv. *term–modeli* odredjeni skupom $\{a, b\}$. U njima se operacijski znak f tumači na, kako se to kaže, *prirodan* način: rezultat operacije primenjene na term t jeste term $f(t)$.

Rešenje. Problem se svodi na odredjivanje svih relacija α skupa D tako da važi

$$(\forall x \in D)\,(\alpha(x) \Rightarrow \neg\alpha(f(x)))$$

odnosno na rešavanje narednog beskonačnog sistema Bulovih (iskaznih) „jednačina"

$$\text{(S)}\quad \begin{array}{ll} \alpha(a) \Rightarrow \neg\alpha(f(a)) & \alpha(b) \Rightarrow \neg\alpha(f(b)) \\ \alpha(f(a)) \Rightarrow \neg\alpha(f^2(a)) & \alpha(f(b)) \Rightarrow \neg\alpha(f^2(b)) \\ \alpha(f^2(a)) \Rightarrow \neg\alpha(f^3(a)) & \alpha(f^2(b)) \Rightarrow \neg\alpha(f^3(b)) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Jedno rešenje tog sistema je očigledno prazna relacija, tj. relacija odredjena uslovom:

$$\tau\alpha(t) = \bot, \quad \textit{za svaki } t \in D$$

---

[1] Pri tzv. normalnoj ili jednakosnoj interpretaciji znak = se tumači kao jednakost, što inače pri proizvoljnoj interpretaciji nije obavezno. Videti tačku XIII Još o jednakosti.

Dalje, jedno rešenje je i:

$\tau\alpha(a) = \top$, $\tau\alpha(f(a)) = \bot$, $\tau\alpha(f^2(a)) = \top$, $\tau\alpha(f^3(a)) = \bot$, ...

$\tau\alpha(b) = \top$, $\tau\alpha(f(b)) = \bot$, $\tau\alpha(f^2(a)) = \top$, $\tau\alpha(f^3(a)) = \bot$, ...

($\top$ i $\bot$ se naizmenično smenjuju), jer se u tom slučaju (S) svodi na

$$\begin{array}{ll} \top \Rightarrow \top & \top \Rightarrow \top \\ \bot \Rightarrow \bot & \bot \Rightarrow \bot \\ \top \Rightarrow \top & \top \Rightarrow \top \\ \bot \Rightarrow \bot & \bot \Rightarrow \bot \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

Uopšte, svako rešenje sistema (S) odredjuje jedan term–model formule.

23. Odrediti potreban i dovoljan uslov da formula F (predikatskog računa I reda) *ne bude istinita pri interpretaciji I, tj. da I ne bude* model za F, ako:

a) F je zatvorena formula, b) F ima slobodnih promenljivih

c) F je oblika $(\forall x)A(x)$, d) F je oblika $(\exists x)A(x)$

Rešenje. U sva četiri slučaja obrazujemo negaciju definicije *F je istinita formula pri interpretaciji I* date na početku ovog odeljka. Na takav način dolazimo do sledećih tvrdjenja:

a) *Nije* $I \models F$ akko *Formuli F odgovara pri toj interpretaciji lažan iskaz*

b) *Nije* $I \models F$ akko $\tau F = \bot$, *za neku vrednost slobodnih promenljivih iz domena*

c) *Nije* $I \models (\forall x)A(x)$ akko *Za neku vrednost slobodnih promenljivih formule F važi:* $\tau A(x) = \bot$, *za neki x iz domena*

d) *Nije* $I \models (\exists x)A(x)$ akko *Za neku vrednost slobodnih promenljivih formule F važi:* $\tau A(x) = \bot$, *za svaki x iz domena*

XII VALJANE FORMULE

♦ Predikatska formula F je *valjana* (oznaka: $\models F$), ukoliko je istinita pri svakoj glavnoj interpretaciji. Valjana je, recimo, formula

$$\alpha(a) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x)$$

jer pri proizvoljnoj interpretaciji, ukoliko $\tau\alpha(a) = \top$, onda $\tau(\exists x)\,\alpha(x) = \top$ (postojeći x je recimo a, tj. interpretacija za a). Obratna implikacija

$$(\exists x)\,\alpha(x) \Rightarrow \alpha(a)$$

nije valjana, jer, na primer, nije istinita pri interpretaciji:

Domen je skup prirodnih brojeva, α je „biti paran broj", a je 3.

♦ Valjanim formulama se, kao što je to bio slučaj i sa tautologijama, izražavaju zakoni ljudskog mišljenja.

♦ Jedna klasa valjanih formula dobija se iz tautologija zamenom iskaznih slova proizvoljnim predikatskim formulama. Takve se valjane formule nazivaju *izvodi* iz tautologija. Na primer, izvodi iz tautologije $p \Rightarrow p$ jesu naredne formule

$\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x)$, $(\forall x)\,\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\,\alpha(x)$, $(\forall x)(\exists y)\,\eta(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\,\eta(x,y)$

♦ **Spisak važnijih valjanih formula** (koje nisu izvodi iz tautologija):

Zakoni permutativnosti istorodnih kvantora:

$(\forall x)(\forall y)A \Longleftrightarrow (\forall y)(\forall x)A$, $\quad (\exists x)(\exists y)A \Longleftrightarrow (\exists y)(\exists x)A$

Distributivni zakon generalizacije prema konjunkciji:

$$(\forall x)(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\forall x)A \wedge (\forall x)B$$

Distributivni zakon partikularizacije prema disjunkciji:

$$(\exists x)(A \vee B) \Longleftrightarrow (\exists x)A \vee (\exists x)B$$

Distributivni zakoni operacija $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ prema kvantorima:

$(\forall x)(A \vee B(x)) \Longleftrightarrow (A \vee (\forall x)B(x))$ $\quad (\exists x)(A \vee B(x)) \Longleftrightarrow (A \vee (\exists x)B(x))$

$(\forall x)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow (A \wedge (\forall x)B(x))$ $\quad (\exists x)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow (A \wedge (\exists x)B(x))$

$(\forall x)(A \Rightarrow B(x)) \Longleftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B(x))$ $\quad (\exists x)(A \Rightarrow B(x)) \Longleftrightarrow (A \Rightarrow (\exists x)B(x))$

$(\forall x)(B(x) \Rightarrow A) \Longleftrightarrow ((\exists x)B(x) \Rightarrow A)$ $\quad (\exists x)(B(x) \Rightarrow A) \Longleftrightarrow ((\forall x)B(x) \Rightarrow A)$

(x nije slobodna promenljiva u formuli A)

De Morganovi zakoni za kvantore:

$$\neg(\forall x)A \Longleftrightarrow (\exists x)\neg A, \qquad \neg(\exists x)A \Longleftrightarrow (\forall x)\neg A$$

Zakoni saglasnosti implikacije sa kvantorima:

$(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B)$, $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\exists x)A \Rightarrow (\exists x)B)$

Zakoni saglasnosti ekvivalencije sa kvantorima:

$(\forall x)(A \Longleftrightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Longleftrightarrow (\forall x)B)$, $(\forall x)(A \Longleftrightarrow B) \Rightarrow ((\exists x)A \Longleftrightarrow (\exists x)B)$

♦ Ako se u prethodnim formulama $\forall x$, $\exists x$ zamene uslovnim kvantorima $\forall x$ *je* U, $\exists x$ *je* U dobijaju se formule medju kojima je većina valjana. Tako se dobijaju, na primer, De Morganovi zakoni za uslovne kvantore:

$\neg(\forall x \text{ je } U)A \Longleftrightarrow (\exists x \text{ je } U)\neg A$, $\quad \neg(\exists x \text{ je } U)A \Longleftrightarrow (\forall x \text{ je } U)\neg A$

Nisu valjane jedino ove dve formule (x nije slobodna u A)

$(\forall x \text{ je } U)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow A \wedge (\forall x \text{ je } U)B(x)$, $(\exists x \text{ je } U)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow A \wedge (\exists x \text{ je } U)B(x)$

Medjutim, uz uslov $(\exists x)U$ dolazi se obavezno do valjanih formula. Recimo, formula

$$(\exists x)U \Rightarrow ((\forall x \text{ je } U)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow A \wedge (\forall x \text{ je } U)B(x))$$

jeste valjana (videti zadatak 56).

♦ Neka je $F(x)$ bilo koja formula, a x jedna njena slobodna promenljiva. Da li je valjana formula $(\forall x)F(x) \Rightarrow F(y)$? Uočimo, na primer, ove formule

$(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(y)$, $(\forall x)(\exists z)\beta(x,z) \Rightarrow (\exists z)\beta(y,z)$, $(\forall x)(\exists y)\beta(x,y) \Rightarrow (\exists y)\beta(y,y)$

koje su sve navedenog vida $-F(x)$ je redom: $\alpha(x)$, $(\exists z)\beta(x,z)$, $(\exists y)\beta(x,y)$.

Prva formula je očigledno valjana. Slično vredi i za drugu, jer:

Ako za svaki x (u odnosu na neku interpretaciju) postoji z tako da vredi $\beta(x,z)$, tada i u slučaju kada je x jednak upravo y postoji neki element z tako da vredi $\beta(y,z)$.

Medjutim, treća formula nije valjana. Naime, u njenom zaključku stoji da postoji y koji je sam sa sobom u relaciji β, a to ne mora biti[1]. Druga i treća formula su slične, pa ipak jedna jeste a druga nije valjana. Razlog je sledeći. Kvantor formule $(\exists z)\beta(x,z)$ deluje na drugo mesto podformule $\beta(x,z)$, ali ne i na prvo. Slično vredi i kada se x zameni sa y. Takav slučaj je prisutan kod druge formule. Medjutim, kod treće formule imamo: Kvantor formule $(\exists y)\beta(x,y)$ deluje na drugo, ali ne i na prvo mesto podformule $\beta(x,y)$ (dakle, slično kao maločas), ali kada se x zameni sa y dobija se formula $(\exists y)\beta(y,y)$ kod koje kvantor $(\exists y)$ deluje na *oba* mesta podformule $\beta(y,y)$. Drugačije rečeno, kvantor $(\exists y)$ je „proširio svoje dejstvo". Obično se ovako kaže:

U formuli $(\exists y)\beta(x,y)$ promenljiva y *„napada"* x.

To je razlog zbog koga x ne sme biti zamenjeno sa y. Slično vredi i u opštem slučaju. Naime, neka *y ne napada x u formuli $F(x)$*, što znači da $F(x)$ nema nijednu podformulu oblika $(\forall y)A(x,y)$ ili $(\exists y)A(x,y)$ u kojoj x učestvuje kao slobodna promenljiva. Pod takvim uslovom formula

[1] Recimo, takva formula nije tačna ukoliko se β tumači kao relacija $<$ skupa N. Zaista, tačno je $(\forall x \in N)(\exists y \in N)\, x < y$, ali nije tačno $(\quad y \in N)\, y < y$.

$$(\forall x)F(x) \Rightarrow F(y)$$

jeste valjana.

♦ Slično, formula

$$(\forall x)F(x) \Rightarrow F(t) \qquad (t \text{ je term})$$

je valjana ukoliko nijedna promenljiva terma t ne napada[1] x u formuli $F(x)$.

Recimo, formule

$$(\forall x)\,\alpha(x) \Rightarrow \alpha(y \star y), \qquad (\forall x)\,\alpha(x) \Rightarrow \alpha(a),$$

$$(\forall x)(\exists y)\,\beta(x,y) \Rightarrow (\exists y)\,\beta(x \star z, y) \qquad (\forall x)(\exists y)\,\beta(x,y) \Rightarrow (\exists y)\,\beta(f(x),y)$$

jesu valjane, dok formula

$$(\forall x)(\exists y)\,\beta(x,y) \Rightarrow (\exists y)\,\beta(z \star y, y)$$

nije. Razlog je što term $z \star y$ ima promenljive z, y i jedna od njih, i to y, napada x u formuli $(\exists y)\,\beta(x,y)$. U vezi sa prethodnim videti i zadatak 39.

♦ Ističemo dva tvrdjenja koja se često koriste. Pretpostavimo da u interpretaciji I vredi jednakost $\tau(\exists x)\,A(x) = \top$, gde je x jedina slobodna promenljiva formule $A(x)$. Tada za neki element c iz domena interpretacije vredi jednakost $\tau A(c) = \top$. Ta se činjenica (na kojoj se, inače, zasniva potpuno stroga definicija značenja kvantora $\exists$ u smislu A. Tarskog[2]) obično koristi u vidu pravila oblika:

(C) *Iz* $\tau(\exists x)\,A(x) = \top$ *proizlazi* $\tau A(c) = \top$, *za neki c iz domena.*

Zamislimo, sada da formula A pored x ima kao slobodnu promenljivu još jedino y i pretpostavimo da pri interpretaciji I vredi jednakost $\tau(\forall x)(\ \ y)A(x,y) = \top$. Tada, na osnovu aksiome izbora, vredi i jednakost $\tau(\forall x)\,A(x,f(x)) = \top$, gde je f izvesno preslikavanje domena u samog sebe. Dakle:

(C_f) *Iz* $\tau(\forall x)(\exists y)\,A(x,y) = \top$ *proizlazi* $\tau(\forall x)\,A(x, f(x)) = \top$
za neko preslikavanje f domena u samog sebe

Slično pravilo vredi i kada A pored x kao slobodne promenljive ima, recimo, još i $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tada f treba da zavisi od svih njih.

♦ Za predikatske formule se uvodi pojam: formula A je *semantička posledica* skupa formula $\mathcal{F}$, u oznaci $\mathcal{F} \models A$. Naime, to je upravo u slučaju kada je formula A istinita za svaku interpretaciju I pri kojoj su istinite sve formule skupa $\mathcal{F}$, tj. svaki model skupa $\mathcal{F}$ takodje je i model formule A. Recimo:

$\alpha(x) \Rightarrow \beta(x),\ (\exists x)\,\alpha(x) \models (\exists x)\,\beta(x)$ (izostavljene su zagrade – oznake skupa $\mathcal{F}$)

♦ Slično kao za iskazne formule i za predikatske se uvodi relacija *ekv*. Definicija glasi:

---

[1] Govorićemo i da term t ne napada x.

[2] Alfred Tarski (r. 1901) jedan od glavnih predstavnika poljske logičke škole.

$$A \text{ ekv } B \text{ akko } \models A \Leftrightarrow B$$

Dokazuje se da je *ekv* relacija ekvivalencije saglasna sa svim logičkim operacijama, odnosno:

$$A \text{ ekv } A,\ \ A \text{ ekv } B \rightarrow B \text{ ekv } A,\ \ A \text{ ekv } B \text{ i } B \text{ ekv } C \rightarrow A \text{ ekv } C$$

$$A \text{ ekv } B \text{ i } C \text{ ekv } D \rightarrow A \star C \text{ ekv } B \star D \quad (\star \text{ je } \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$$

$$A \text{ ekv } B \rightarrow \neg A \text{ ekv } \neg B,\ \ A \text{ ekv } B \rightarrow (qx)A \text{ ekv } (qx)B \ (q \text{ je } \forall, \exists)$$

Posledica tih tvrdjenja jeste *princip ekvivalencijskih transformacija:*

Ako se u formuli F neka njena podformula A zameni ekvivalentnom formulom B, prelazi se na formulu ekvivalentnu sa F.

♦ Svaka formula F može se ekvivalencijskim transformacijama dovesti na tzv. *preneks formu:*

$$(q_1 x_1) \ldots (q_n x_n)\, G$$

gde su $q_1, \ldots, q_n$ kvantori, dok je G formula bez kvantora.

Na primer, za formulu $(\exists x)\, \alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\, \beta(x)$, jedna preneks forma je $(\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y))$. Videti zadatak 63 i naredne.

♦ **Još u vezi sa pravilom (C_f).** Neka je $A(x_1, \ldots, x_n, y)$ formula čije su sve slobodne promenljive $x_1, \ldots, x_n, y$, i neka je f operacijski znak dužine n koji ne učestvuje u formuli A. Tada:

Svaki model formule $(\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists y)\, A(x_1, \ldots, x_n, y)$ je produživ do modela formule $(\forall x_1, \ldots, x_n)\, A(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$, kao i obratno svaki model druge formule skrativ je do modela prve.

To tvrdjenje proističe iz aksiome izbora (videti tačku XI *Glavna interpretacija predikatskih formula).* Obično se funkcija f naziva Skolemova[1]. Dalje, prelaz od prve na drugu formulu nazivamo *skolemizacija.*

♦ Opštije, svakoj formuli A može se pridružiti formula $\hat{A}$, tzv. *otvorena forma* formule A (videti zadatak 74) oblika:

$$(\forall u_1) \ldots (\forall u_n)\, B,$$

gde B ne sadrži kvantore i koja moguće je, ima i neke nove, dodatne funkcijske znake, tako da:

Svaki model formule A produživ je do modela formule $\hat{A}$, a svaki model formule $\hat{A}$ skrativ je do modela formule A.

Posebno odatle sledi:

A ima model ako i samo ako $\hat{A}$ ima model.

To se podesno koristi za ispitivanje valjanosti (videti zadatke 86–92).

---

[1] Thoralf Skolem (1887–1963), jedan od tvoraca aksiomatske teorije skupova.

ZADACI

1. Dokazati da je valjana formula $\neg(\forall x)\,\alpha(x) \Longleftrightarrow (\exists x)\neg\alpha(x)$, gde je α relacijski znak dužine 1.

Rešenje. Prema definiciji valjanosti treba dokazati da je *za svaki neprazan skup D, za svaku njegovu relaciju α dužine 1 formula $\neg(\forall x)\,\alpha(x) \Longleftrightarrow (\exists x)\neg\alpha(x)$ tačna*, tj. pošto je ona oblika ekvivalencije, da vredi jednakost

(☆) $$\tau\neg(\forall x)\,\alpha(x) = \tau(\exists x)\neg\alpha(x)$$

Pretpostavimo da je D ma koji neprazan skup i da je α njegova relacija dužine 1. Razlikujemo dva slučaja:

1° α je puna relacija skupa D, tj. $\tau\alpha(x) = \top$ za sve elemente x iz D.

2° α nije puna relacija.

Izračunajmo vrednost leve i desne strane jednakosti (☆). U prvom slučaju imamo

$\tau\neg(\forall x)\,\alpha(x) = \neg\top = \bot$, $\tau(\exists x)\neg\alpha(x) = \bot$ (jer α je puna relacija, pa je $\neg\alpha$ prazna relacija)

pa je jednakost (☆) ispunjena. U drugom slučaju formula $(\forall x)\,\alpha(x)$ je netačna, pa je vrednost leve strane jednaka $\top$. Pošto α nije puna relacija, tj. nije uvek ispunjena jednakost $\tau\alpha(x) = \top$, to je za neki element x_0 skupa D ispunjena jednakost $\tau\alpha(x_0) = \bot$, odnosno jednakost $\tau\neg\alpha(x_0) = \top$, pa u drugom slučaju i desna strana jednakosti (☆) ima vrednost $\top$. Dakle, jednakost (☆) važi u oba slučaja, čime se dokaz završava.

2. Dokazati valjanu formulu $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\alpha(x) \wedge \alpha(y) \Longleftrightarrow \alpha(z))$ gde je α relacijski znak dužine 1.

Rešenje. Neka je D proizvoljan neprazan skup i α njegova relacija dužine 1. Dokazaćemo da za ma koja dva elementa x, y iz D u skupu D postoji element z takav da vredi ekeivalencija $\alpha(x) \wedge \alpha(y) \Longleftrightarrow \alpha(z)$. Zaista neka su x, y ma koji elementi skupa D. Moguća su dva slučaja:

1° $\tau(\alpha(x) \wedge \alpha(y)) = \top$, 2° $\tau(\alpha(x) \wedge \alpha(y)) = \bot$

U prvom slučaju i za x i za y vrede jednakosti $\tau\alpha(x) = \top$, $\tau\alpha(y) = \top$ pa se za z može uzeti ma koji od njih (jer, tada obe strane navedene ekvivalencije imaju iste vrednosti, jednake $\top$). U drugom slučaju vredi najmanje jedna od jednakosti $\tau\alpha(x) = \bot$, $\tau\alpha(y) = \bot$. Ukoliko vredi prva jednakost za z se može uzeti x, a inače treba uzeti y. Dakle i u drugom slučaju, za tako odabrane vrednosti z, ekvivalencija $\alpha(x) \wedge \alpha(y) \Longleftrightarrow \alpha(z)$ je ispunjena. Dokaz je završen.

3. Dokazati valjanost formule $(\exists x)(\forall y)\,\alpha(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\,\alpha(x,y)$, gde je α relacijski znak dužine 2.

Rešenje. Formula ima oblik implikacije $P \Rightarrow Q$. Uopšte, u takvom slučaju često je podesno postupiti na sledeći način. Radi dokaza valjanosti formule oblika $P \Rightarrow Q$ dokazati da u odnosu na ma koju interpretaciju I (i za sve vrednosti slobodnih promenljivih formula P, Q) vredi implikacija

$(\rightarrow)$ $\qquad$ *Ako* $\tau P = \top$, *onda* $\tau Q = \top$

Neka je, sada I ma koja interpretacija i neka u odnosu na nju vredi jednakost $\tau(\exists\, x)\, (\forall\, y)\; \alpha(x, y) = \top$. Prema tome za neki element a domena vredi jednakost $\tau(\forall\, y)\; \alpha(a, y) = \top$. Dokazujemo da je i vrednost formule $(\forall\, y)\, (\exists\, x)\; \alpha(x,y)$ jednaka $\top$. Zaista, neka je y ma koji element domena. Za x izaberimo upravo pomenuti element a. Tada, prema dokazanom, vredi jednakost $\tau\alpha(a,y) = \top$ za sve y iz D, tj. i formula $(\forall\, y)\, (\exists\, x)\; \alpha(x, y)$ je tačna u zamišljenoj interpretaciji I. Na takav način dokazali smo implikaciju oblika $(\rightarrow)$, čime se dokaz završava.

4. Dokazati da nije valjana formula $\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,x) \Rightarrow \alpha(x,x) \wedge \alpha(y,y)$.

Rešenje. Data formula je bez kvantora i nastaje iz iskazne formule

$(\star)$ $\qquad$ $p \wedge q \Rightarrow r \wedge s$

kada se p, q, r, s redom zamene sa $\alpha(x,y)$ $\alpha(y,x)$, $\alpha(x,x)$, $\alpha(y,y)$. Ta iskazna formula nije tautologija, pa to pruža mogućnost da i zadana formula ne bude valjana. Ubrzo ćemo se uveriti da iz tog razloga, kao i okolnosti da je data formula bezkvantorska, sledi da nije valjana. Jedan „kontra–model" se može ovako napraviti. Formula $(\star)$ ima vrednost $\perp$, recimo u slučaju $\tau p = \top$, $\tau q = \top$, $\tau r = \perp$, $\tau s = \perp$. Uočimo skup $\{a, b\}$ sa *dva* elementa (upravo dva jer razmatrana formula ima ukupno dve promenljive). Sada definišemo relaciju α i biramo „opovrgavajuće" vrednosti za x, y. Neka redom a, b budu vrednosti za x, y. Prema rečenom formula

$$\alpha(a,b) \wedge \alpha\,(b,a) \Rightarrow \alpha(a,a) \wedge \alpha\,(b,b)$$

sigurno ima vrednost $\perp$ ukoliko vrede jednakosti

$$\alpha\,(a,b) = \top\,,\ \alpha(b,a) = \top\,,\ \alpha(a,a) = \perp\,,\ \alpha\,(b,b) = \perp$$

Ostaje još da se proveri da li postoji neka relacija uočenog skupa koja zadovoljava te zahteve. Nije teško uočiti da navedene jednakosti u potpunosti odredjuju jednu relaciju skupa a, b. Zaključak: za tako odabran skup, tako odabranu relaciju i odabrane vrednosti njenih promenljivih polazna formula ima vrednost $\perp$. Stoga ta formula zaista nije valjana.

5. Dokazati valjanost formule $\neg(\forall\, x)\, A \Longleftrightarrow (\exists\, x) \neg A$, gde je A ma koja predikatska formula.

Rešenje. Razlikujemo dva slučaja:

1° Promenljiva x nije slobodna promenljiva formule A,

2° Promenljiva x je slobodna promenljiva formule A.

U stvari u prvom slučaju vrednost formule A ne zavisi od x tako da kvantori $(\forall x)$, $(\exists\, x)$ deluju „naprazno" (obe strane date ekvivalencije se svode na istu formulu:

$\neg A$). Podrobnije, neka je I ma koja interpretacija jezika formule $\neg(\forall x)A \Longleftrightarrow (\exists x)\neg A$. Dalje, neka sve slobodne promenljive formule A uzmu izvesne vrednosti iz domena. Tada formula A dobija neku vrednost t (koja je $\top$ ili $\perp$). Medjutim, budući da x nije slobodna promenljiva formule A, formule A i $(\forall x)A$ za uočene vrednosti slobodnih promenljivih su istovredne. Slično vredi i za formule $\neg A$ i $(\exists x)\neg A$. Tako zaključujemo da su obe strane razmatrane ekvivalencije istovredne (obe strane imaju vrednost $\neg t$), pa je dokaz u prvom slučaju završen.

U drugom slučaju pretpostavimo da formula A kao slobodne promenljive pored x ima upravo još i $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Formulu A označimo ovako $A(x, y_1, \ldots, y_n)$, da bismo istakli sve njene slobodne promenljive. Neka je I ma koja interpretacija jezika formule $\neg(\forall x)A \Longleftrightarrow (\exists x)\neg A$, tj. formule A. To posebno znači da su svi znaci konstanata, svi operacijski, kao i svi relacijski znaci formule A na odredjen način protumačeni („vrednovani") u domenu D uočene interpretacije. Formuli $A(x, y_1, \ldots, y_n)$ tada prirodno odgovara relacija domena D, recimo u oznaci ρ, uvedena definicijom:

$$\rho(x, y_1, \ldots, y_n) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \tau A(x, y_1, \ldots, y_n) = \top$$

U stvari, problem se na osnovu toga svodi na dokazivanje ekvivalencije

(☆) $$\neg(\forall x)\,\rho(x, y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow (\exists x)\neg\rho(x, y_1, \ldots, y_n)$$

za sve elemente $y_1, \ldots, y_n$ skupa D. Zamislimo sada da se $y_1, \ldots, y_n$ redom zamene nekim elementima $b_1, \ldots, b_n$ domena D. Svakim takvim zamenjivanjem od relacije ρ dužine $n+1$ se prelazi na po jednu relaciju α dužine 1:

$$\alpha(x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi(x, b_1, \ldots, b_n)$$

Ekvivalencija (☆) se prevodi u sledeću ekvivalenciju

(☆☆) $$\neg(\forall x)\,\alpha(x) \Longleftrightarrow (\exists x)\neg\alpha(x)$$

Medjutim, ta ekvivalencija, na osnovu zadatka 1, važi za svaku relaciju α domena D, čime se završava dokaz valjanosti zadate formule.

Napomena. Prethodni zadatak je uopštenje zadatka 1: umesto $\alpha(x)$ stoji proizvoljna formula A. Medjutim, prema izvedenom rasudjivanju valjanost formule $\neg(\forall x)A \Longleftrightarrow (\exists x)\neg A$ sledi iz valjanosti formule $\neg(\forall x)\,\alpha(x) \Longleftrightarrow (\exists x)\neg\alpha(x)$.

6. Formulu $(\exists y)\,\beta(y)$ označimo sa p. Dokazati valjanost formule

(1) $$(\forall x)\,(\alpha(x) \Rightarrow p) \Longleftrightarrow ((\exists x)\,\alpha(x) \Rightarrow p)$$

Rešenje. Neka je D ma koji neprazan skup i α, β dve njegove relacije dužine 1 (kao interpreti, vrednosti znakova α, β). U odnosu na takvu interpretaciju formula $(\exists y)\,\beta(y)$, budući da je zatvorena, je ili tačna ili netačna. Drukčije rečeno, slovo p ima jednu od dve vrednosti $\top$, $\perp$. Dokazivanje valjanosti može se obaviti „diskusijom po p" (slično kao u slučaju tautologija), tj. razmatranjem ova dva slučaja:

1° p ima vrednost $\top$ (tj. $(\exists y)\beta(y)$ je tačna u odnosu na uočenu interpretaciju).

2° p ima vrednost $\bot$ (tj. formula $(\exists y)\beta(y)$ je netačna).

U tim slučajevima iz ekvivalencije (1) ředom nastaju ekvivalencije

$$(\forall x)\top \Longleftrightarrow \top, \quad (\forall x)\neg\alpha(x) \Longleftrightarrow \neg(\exists x)\alpha(x)$$

Prva je očigledno tačna, a slično vredi i za drugu (dokaz sličan kao u zadatku 1). Time se završava dokaz valjanosti formule (1).

7. Dokazati valjanost formule $(\exists x)(\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x))$.

8. Dokazati valjanost formule $(\exists x)(A \Rightarrow (\forall x)A)$, gde je A ma koja formula.

Uputstvo. Zadaci 7 i 8 su u sličnom odnosu kao prvi i peti zadatak.

9. Dokazati valjanost formule $(\exists x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A$, gde je A ma koja formula.

Uputstvo. Videti zadatak 3.

10. Dokazati da je valjana formula $(\forall x)A \Rightarrow (\exists x)A$, gde je A ma koja formula.

11. Dokazati valjanost formule $(\forall x)(A(x) \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\exists x)A(x) \Rightarrow B)$, gde su $A(x), B$ ma koje formule, i x nije slobodna promenljiva formule B.

Uputstvo. Videti zadatak 6.

12. Dokazati da nisu valjane formule

a) $\alpha(x,x) \Rightarrow \neg(\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,x))$, b) $\beta(x,y,z) \Rightarrow \beta(y,z,x) \vee \beta(z,x,y)$

c) $\neg(\alpha(x,y) \vee \beta(x,y,z)) \Rightarrow \beta(x,y,x) \wedge \alpha(y,x)$, d) $\gamma(x) \Longleftrightarrow (\gamma(y) \Rightarrow \gamma(x))$

13. Dokazati da nije valjana formula $(\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$

14. Ispitati valjanost formula

$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x))$, $(\forall x)((\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x)$, $(\exists y)(\alpha(y) \Longleftrightarrow (\forall x)\alpha(x))$

$(\exists x)((\exists x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x))$, $(\exists y)((\exists x)\alpha(x) \Longleftrightarrow \alpha(y))$, $(\exists x)(\alpha(x) \vee \neg(\exists y)\alpha(y))$

15. Dokazati valjanost formula

$(\forall x)(\alpha(x) \vee p) \Longleftrightarrow (\forall x)\alpha(x) \vee p$, $(\exists x)(\alpha(x) \wedge p) \Longleftrightarrow (\exists x)\alpha(x) \wedge p$

gde je p formula $(\forall x)(\exists y)\beta(x,y)$.

Uputstvo. Diskutovati po p.

16. Dokazati valjanost formula (x nije slobodna promenljiva u formuli A):

$(\forall x)(A \vee B(x)) \Longleftrightarrow (A \vee (\forall x)B(x)$, $(\exists x)(A \vee B(x)) \Longleftrightarrow (A \vee (\exists x)B(x))$

$(\forall x)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow (A \wedge (\forall x)B(x))$, $(\exists x)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow (A \wedge (\exists x)B(x))$

$(\forall x)(A \Rightarrow B(x)) \Longleftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B(x))$, $(\exists x)(A \Rightarrow B(x)) \Longleftrightarrow (A \Rightarrow (\exists x)B(x))$

$(\forall x)(B(x) \Rightarrow A) \Longleftrightarrow ((\exists x)B(x) \Rightarrow A))$, $(\exists x)(B(x) \Rightarrow A)) \Longleftrightarrow ((\forall x)B(x) \Rightarrow A)$

Uputstvo. Diskutovati po A.

17. Dokazati valjanost formula

$(\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Longleftrightarrow (\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x)$, $(\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Longleftrightarrow (\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x)$

$(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x) \Rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$, $(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x)$

18. Dokazati valjanost formula

$(\forall x)(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\forall x)A \wedge (\forall x)B$, $(\exists x)(A \vee B) \Longleftrightarrow (\exists x)A \vee (\exists x)B$,

$(\forall x)A \vee (\forall x)B \Rightarrow (\forall x)(A \vee B)$, $(\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x)A \wedge (\exists x)B$

gde su A, B ma koje formule.

19. Formula $(\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x)$ nije valjana. Dokazati.

20. Dokazati da su valjane formule

$(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B)$, $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\exists x)A \Rightarrow (\exists x)B)$

Rešenje. Dokaz valjanosti izvodimo za prvu formulu, odnosno za formulu

(☆) $$((\forall x)(A \Rightarrow B) \wedge (\forall x)A) \Rightarrow (\forall x)B$$

koja je sa njom ekvivalentna (prema tautologiji $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Longleftrightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$. Uočimo, stoga, proizvoljnu interpretaciju i neka slobodne promenljive imaju neku vrednost za koju premisa prethodne implikacije ima vrednost T. Tada:

$$\tau(A \Rightarrow B) = \top, \ \tau A = \top, \text{ za svaki } x \text{ iz domena}$$

Odatle proističe $\tau B = \top$, za svaki x iz domena, odnosno $\tau(\forall x)B = \top$.

Znači, za proizvoljnu interpretaciju i proizvoljnu vrednost slobodnih promenljivih važi:

$$\tau((\forall x)(A \Rightarrow B) \wedge (\forall x)A) = \top \rightarrow \tau(\forall x)B = \top,$$

pa je formula (☆) valjana. Otuda je valjana i sa njom ekvivalentna formula

$$(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B)$$

21. Dokazati valjanost formula

$(\forall x)(A \Longleftrightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Longleftrightarrow (\forall x)B)$, $(\forall x)(A \Longleftrightarrow B) \Rightarrow ((\exists x)A \Longleftrightarrow (\exists x)B)$

22. Formula

$$(\exists x)(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B)$$

je valjana. Dokazati.

23. Da li su valjane formule

$(\forall x)A(x,x) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)A(x,y)$, $(\forall x)A(x,f(x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)A(x,y)$,

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y) \Rightarrow (\forall x)A(x,f(x)),$$

gde je A ma koja predikatska formula?

24. Dokazati valjanost narednih formula

$(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall x)(\exists y)A$, $(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\exists x)(\forall y)A$, $(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A$

(A je predikatska formula)

25. Dokazati valjanost formula

$(\forall x,y)(\exists z)(\alpha(x) \vee \alpha(y) \Longleftrightarrow \alpha(z))$, $(\forall x_1,x_2,x_3)(\exists z)((\alpha(x_1) \wedge \alpha(x_2)) \vee \alpha(x_3) \Longleftrightarrow \alpha(z))$

26. Neka je $F(p_1, p_2, ..., p_n)$ iskazna formula po slovima $p_1, ..., p_n$ koja ne sadrži

znake $\neg$, $\Rightarrow$, $\Longleftrightarrow$. Dokazati valjanost formule

$$(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n)(\exists y)(F(\alpha(x_1), \alpha(x_2), \ldots, \alpha(x_n)) \Longleftrightarrow \alpha(y))$$

27. Neka je $F(p_1, \ldots, p_n)$ iskazna formula (po slovima p_i) koja nije tautologija. Svako slovo p_i zamenimo formulom oblika

$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ (φ je relacijski znak, u_j promenljive – ne nužno različite)

i to, svako slovo različitom takvom formulom. Dokazati da se tako dolazi do formule koja nije valjana.

Uputstvo. Videti zadatke 4 i 12.

28. Dokazati da nije valjana formula $\alpha(x, f(f(x))) \Rightarrow \alpha(f(x), x) \vee \alpha(x, f(x))$.

Uputstvo. Potražiti kontra–model na sledeći način. Neka u zamišljenom takvom modelu x ima vrednost a. Prema datoj formuli za tu vrednost x – a pojavljuje se još i ovi elementi $f(a)$, $f(f(a))$. Neka $f(a) = b$, $f(f(a)) = f(b) = c$. Ovo nas navodi na pomisao da napravimo kontra–model sa tri elementa a, b, c. Radi toga potražiti relaciju α i funkciju f skupa $\{a, b, c\}$ iz uslova

$$f(a) = b, \quad f(b) = c, \quad \tau(\alpha(a,c) \Rightarrow \alpha(b,a) \vee \alpha(a,b)) = \perp$$

29. Dokazati da nisu valjane formule:

a) $\alpha(f(x), y) \vee \alpha(x, f(y)) \Rightarrow (\alpha(f(x), f(y)) \vee \neg\alpha(f(x), y)$,

b) $\neg(\alpha(x) \wedge \beta(f(x), y)) \vee (\alpha(f(f(x))) \wedge \beta(f(f(x)), f(y))$
$\Longleftrightarrow (\alpha(x) \wedge \alpha(f(f(x))) \vee (\beta(f(x), y) \wedge \beta(f(f(x)), f(y)))$

Uputstvo. b) Sve (različite) elementarne podformule su:

$$\alpha(x), \quad \alpha(f(f(x))), \quad \beta(f(x), y), \quad \beta(f(f(x)), f(y))$$

Zamenjujući ih redom sa: p, q, r, s dolazi se do iskazne formule

$$\neg(p \wedge r) \vee (q \wedge s) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (r \wedge s)$$

koja nije tautologija. Koristeći tu okolnost načiniti kontra–model sa elementima a, b, c, d, e koji redom služe kao vrednost terma

$$x, y, f(x), f(f(x)), f(y).$$

30. Neka je $F(e_1, \ldots, e_k)$ formula bez kvantora, gde su $e_1, \ldots, e_k$ sve njene (različite) elementarne podformule (one su oblika $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ – φ je relacijski znak a t_i su termi). Zamenjujući $e_1, \ldots, e_k$ redom iskaznim slovima $p_1, \ldots, p_k$ dobija se iskazna formula $F(p_1, \ldots, p_k)$. Dokazati:

$$F(e_1, \ldots, e_n) \text{ je valjana akko } F(p_1, \ldots, p_n) \text{ je tautologija.}$$

31. Dokazati valjanost formule: $(\forall x) F(x) \Rightarrow F(a)$, $F(a) \Rightarrow (\exists x) F(x)$.

32. Dokazati:

$$\models (\exists x) \alpha(x) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow (\exists x) \beta(x)$$

Rešenje. Dokazujemo da je pri proizvoljnoj interpretaciji istinito tvrdjenje oblika ($\rightarrow$) iz zadatka 3. Jedan dokaz izgleda:

(1) $\tau(\exists x)\alpha(x) = \top$ (Pretpostavka)

(2) $\tau(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) = \top$ (Pretpostavka)

(3) $\tau\alpha(a) = \top$ (Postojeći x iz (1) označen je sa a – primena (C), videti uvodni tekst)

(4) $\tau(\alpha(a) \Rightarrow \beta(a)) = \top$ (Iz (2) pomoću $\models (\forall x) F(x) \Rightarrow F(a)$

(5) $\tau\beta(a) = \top$ (Iz (3) i (4) na osnovu tablice za implikaciju)

(6) $\tau(\exists x)\beta(x) = \top$ (Iz (5) prema $\models F(a) \Rightarrow (\exists x) F(x)$)

Kraj dokaza.

Napomena. Dokaz se može obaviti i metodom *reductio ad absurdum.* Radi toga pretpostavimo da u odnosu na izvesnu interpretaciju I vredi:

(☆) $\tau(\exists x)\alpha(x) = \top$, $\tau(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) = \top$, $\tau(\exists x)\beta(x) = \bot$

Iz treće jednakosti sledi $\tau\neg(\exists x)\beta(x) = \top$, a odatle $\tau(\forall x)\neg\beta(x) = \top$. Drukčije rečeno: $\tau\beta(x) = \bot$ za svaki x (odgovarajućeg domena). Koristeći taj zaključak, kao i drugu jednakost (☆), tj. da $\tau(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) = \top$ za svaki x (domena) zaključujemo: $\tau(\forall x)\neg\alpha(x) = \top$ (koristimo i činjenicu $\models (p \Rightarrow \bot) \Longleftrightarrow \neg p)$, odnosno $\tau\neg(\exists x)\alpha(x) = \top$. Dobijeni zaključak je u kontradikciji sa prvom jednakošću (☆).

33. Zaključivanje oblika (α, β, γ su relacije dužine 1 nekog skupa):

Ako svaki α jeste β i svaki β jeste γ, onda svaki α jeste γ.
Ako svaki β jeste γ i neki α jeste β, onda neki α jeste γ.

su primeri *Aristotelovih silogizama* (prvi je tzv. *Barbara* a drugi *Darii).* Svaki silogizam je prevodljiv na neku valjanu formulu [44]. Tako, prevodi za *Barbaru* i *Darii* su formule:

$$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \wedge (\forall x)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(x)) \Rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(x)),$$

$$(\forall x)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(x)) \wedge (\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \gamma(x)).$$

Dokazati njihovu valjanost.

Uputstvo. Valjanost prve formule proizilazi na osnovu tranzitivnosti implikacije. U vezi sa drugim videti prethodni zadatak.

34. Dokazati valjanost formula

$(\forall x)(\beta(x) \Rightarrow \neg\gamma(x)) \wedge (\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \neg\gamma(x))$ (Festino)

$(\exists x)\alpha(x) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \wedge (\forall x)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(x)) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \gamma(x))$ (Barbari)

$(\forall x)(\beta(x) \Rightarrow \neg\gamma(x)) \wedge (\exists x)\alpha(x) \wedge (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \neg\gamma(x))$ (Celaront)

35. Dokazati valjanost formula

$(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(a)$, $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(x)$, $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(y)$, $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(f(x))$,
$(\forall x)\beta(x,y) \Rightarrow \beta(x,y)$, $(\forall x)\beta(x,y) \Rightarrow \beta(y,y)$, $(\forall x)\beta(x,y) \Rightarrow \beta(f(x), y)$.

36. Dokazati da formula

$$(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \Rightarrow (\exists y)\alpha(f(y), y)$$

nije valjana.

Uputstvo. Odgovarajući kontra–model je recimo: skup prirodnih brojeva kao domen, relacija $<$ kao tumačenje za α, $x+1$ kao tumačenje za $f(x)$.

37. Formulu o prirodnim brojevima $(\exists y)\ y+1 = x$ označimo sa $A(x)$ a terme x_1+x_2, $x+y$ sa t. Zamenom promenljive x termom t od $A(x)$ se dobija $A(t)$. Da li vredi:

Ako promenljiva x i term t imaju jednake vrednosti, onda su i formule $A(x)$, $A(t)$ istovredne.

Rešenje. U slučaju terma x_1+x_2 problem se svodi na dokazivanje implikacije

$$x = x_1+x_2 \Rightarrow [(\exists y)\ y+1=x \Longleftrightarrow (\exists y) y+1=x_1+x_2]$$

koja je očigledno tačna. Inače, strogo dokaz sledi na osnovu svojstava jednakosti (videti narednu tačku).

Odgovarajuća implikacija u drugom slučaju glasi

$$x = x+y \Rightarrow [(\exists y)\ y+1 = x \Longleftrightarrow (\exists y)\ y+1 = x+y]$$

i ona nije uvek tačna – dosta je za x, y uočiti na primer, vrednosti 0, 1.

Kakva je razlika izmedju terma x_1+x_2 i $x+y$? Nije teško uočiti da prvi ne napada promenljivu x u formuli $A(x)$, dok je drugi napada. Otuda je zamenom promenljive x termom $x+y$ kvantor $\exists\ y$ proširio svoje dejstvo i na taj term.

38. Neka je $A(x)$ proizvoljna formula sa slobodnom promenljivom x i t term obrazovan od $x_1, \ldots, x_n$ koji ne napada x.

Promenljive $x_1, \ldots, x_n$ mogu imati neka pojavljivanja (kako slobodna tako vezana) u formuli $A(x)$. Zamenom x sa t, te će promenljive dobiti još neka nova pojavljivanja, a formula $A(x)$ prećiće u formulu $A(t)$.

Dokazati da su sva ta nova pojavljivanja promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ slobodna.

Uputstvo. Svako novo pojavljivanje promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ je u okviru terma t, pa se problem svodi na dokazivanje da $A(t)$ nema nijednu podformulu oblika $(qx_i)B(t)$ – q je kvantor. Pri tome je ta formula nastala iz $(qx_i)B(x)$ – podformule od $A(x)$, zamenom x sa t. Ukoliko bi podformula takvog oblika postojala, to bi značilo da term t napada x, a to je suprotno pretpostavci.

39. Dokazati da za formulu $A(x)$ i term t koji ne napada x vredi:

Ako x i t pri nekoj interpretaciji dobiju jednake vrednosti, onda su i $A(x)$, $A(t)$ istovredne formule.

Uputstvo. Pošto su, prema prethodnom zadatku, sva nova pojavljivanja promenljivih terma t slobodna, to svakoj njihovoj vrednosti odgovara tačno jedan element domena – vrednost terma. U slučaju kada promenljiva x dobije kao vrednost baš taj element domena, važiće jednakost $\tau A(t) = \tau A(x)$.

Primedba. Tvrdjenje iz prethodnog zadatka može se iskazati u obliku narednog svojstva jednakosti

$x = t \Rightarrow (A(x) \Longleftrightarrow A(t))$, uz uslov da t ne napada x u formuli $A(x)$

To je tzv. *zakon zamene* za formule (videti narednu tačku).

40. Ako term t ne napada x u formuli $A(x)$, onda je

$$(\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(t)$$

valjana formula. Dokazati.

Rešenje. Iz pretpostavke da ta formula nije valjana, tj. da pri nekoj interpretaciji i nekoj vrednosti slobodnih promenljivih (slobodne su, izmedju ostalih, i sve promenljive terma t – zadatak 38) vredi $\tau(\forall x)A(x) = \top$, $\tau A(t) = \bot$, zaključujemo da kad promenljiva x i term t dobiju jednake vrednosti, onda i formula $A(x)$ dobije vrednost $\bot$. Suprotno pretpostavci $\tau(\forall x)\, A(x) = \top$.

41. Neka je $A(x)$ formula $(\exists y)\, \beta(x,y)$. Koji od terma t:

$$x,\ y,\ f(x),\ g(x,y),\ g(x,z),\ h(x,y,z),\ h(x,f(x),z)$$

ne napada x u toj formuli? Koja od formula

$$(\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(t)$$

je valjana?

42. Da li je uslov *t ne napada x* ispunjen ukoliko su sve promenljive terma t nove, tj. nijedna od njih ne učestvuje u formuli $A(x)$?

43. Dokazati valjanost formula

$$(\forall x)\, \alpha(x,y) \Rightarrow \alpha(f(x,y),y), \quad (\forall x)\, (\exists y)\, \alpha(x,f(x,y)) \Rightarrow (\exists y)\, \alpha(f(x,x), f(x,y))$$

Napomena. Uslov *t ne napada x* u formuli $A(x)$ je dovoljan da formula $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(t)$ bude valjana, ali nije neophodan. Na primer, formula $(\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(y)$, gde $A(x) : (\forall y)\alpha(x,y)$ je valjana.

44. Dokazati valjanost formula

$$(\forall x)\, A(x) \Longleftrightarrow (\forall y)\, A(y), \quad (\exists x)\, A(x) \Longleftrightarrow (\exists y)\, A(y),$$

uz uslov da y ne učestvuje u $A(x)$ a da x ne učestvuje u $A(y)$.

45. Dokazati da je, u slučaju kada su sve promenljive terma t nove, formula

$$(\forall x)\, A(x) \Rightarrow (\forall x_1, \ldots, x_n)\, A(t(x_1, \ldots, x_n))$$

valjana.

46. Ispitati da li su valjane formule:

$$(\forall x)\, \alpha(x) \Rightarrow (\forall x_1, x_2)\, \alpha(f(x_1, x_2)), \quad (\exists x_1, x_2)\, \alpha(f(x_1, x_2)) \Rightarrow (\exists x)\, \alpha(x),$$

$$(\forall x)\, (\exists y)\, \beta(x,y) \Rightarrow (\forall x_1, x_2)\, (\exists y)\, \beta(f(x_1,x_2),y), \quad (\forall x)(\forall y)\, \beta(x,y) \Rightarrow (\forall y)\, \beta(f(y),y)$$

47. Neka je $f : S^2 \to S$, gde je S skup $\{0, 1, \ldots, n\}$ – n je dati prirodan broj. Dokazati nejednakosti:

(1) $\max\limits_{x} \min\limits_{y} f(x,y) \geqslant \min\limits_{y} f(a,y)$ (a je ma koji element iz S)

(2) $\max\limits_{x} \min\limits_{y} f(x,y) \geqslant \min\limits_{y} f(x+z,y)$

Opovrgnuti nejednakost:

(3) $\max\limits_{x} \min\limits_{y} f(x,y) \geqslant \min\limits_{y} f(y,y)$.

48. Dokazati da je *ekv* relacija ekvivalencije.

49. Dokazati da je relacija *ekv* saglasna sa svim logičkim operacijama, odnosno:

A *ekv* $B \to \neg A$ *ekv* $\neg B$, A *ekv* B, C *ekv* $D \to A \star C$ *ekv* $B \star D$

A *ekv* $B \to (qx) A$ *ekv* $(qx) B$ ($\star$ je $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Longleftrightarrow$; q je $\forall$, $\exists$)

50 Dokazati *princip ekvivalencijskih transformacija:*

Ako je A podformula od F, i F' formula dobijena iz F zamenom A sa formulom B, uz uslov A *ekv* B, onda je F *ekv* F'.

Uputstvo. Strog dokaz se izvodi indukcijom po broju onih logičkih znakova formule F koji ne učestvuju u podformuli A.

51. Dokazati valjanost De Morganovih zakona za uslovne kvantore

$$(\forall x \text{ je } U)\, A(x) \Longleftrightarrow (\exists\, x \text{ je } U) \neg A(x), \qquad \neg(\exists\, x \text{ je } U)\, A(x) \Longleftrightarrow (\forall\, x \text{ je } U) \neg A(x)$$

Rešenje. Koristeći princip ekvivalencijskih transformacija (zadatak 50), za drugu od datih formula izvodimo ekvivalencijski lanac:

$\neg(\exists x \text{ je } U)\, A(x)$	*ekv* $\neg(\exists\, x)\,(U \wedge A(x))$	(Definicija)
	ekv $(\forall x) \neg(U \wedge A(x))$	(Valjana formula $\neg(\exists\, x)F \Longleftrightarrow (\forall x) \neg$
	ekv $(\forall\, x)(\neg U \vee \neg A(x))$	(Tautologija $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$)
	ekv $(\forall\, x)(U \Rightarrow \neg A(x))$	(Tautologija $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg\, p \vee q)$)
	ekv $(\forall\, x \text{ je } U) \neg A(x)$	(Definicija)

Zaključak: $\models \neg(\exists\, x \text{ je } U) A(x) \Longleftrightarrow (\forall\, x \text{ je } U) \neg\, A(x)$

Slično se dokazuje valjanost prve formule.

52. Dokazati valjanost narednih formula

$$(\forall x \text{ je } U)\,(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\forall x \text{ je } U)\, A \wedge (\forall x \text{ je } U) B$$
$$(\exists\, x \text{ je } U)\,(A \vee B) \Longleftrightarrow (\exists\, x \text{ je } U)\, A \vee (\exists\, x \text{ je } U) B$$

53. Dokazati da naredne formule jesu valjane

$$(\forall x \text{ je } U)\,(A \vee B(x)) \Longleftrightarrow (A \vee (\forall x \text{ je } U) B(x))$$
$$(\exists x \text{ je } U)\,(A \wedge B)(x)) \Longleftrightarrow (A \wedge (\exists\, x \text{ je } U) B(x)) \qquad (x \text{ nije slobodna u } A)$$

54. Dokazati da naredne formule jesu valjane

$$(\forall x \text{ je } U)(A \Rightarrow B(x)) \Longleftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x \text{ je } U) B(x))$$
$$(\forall x \text{ je } U)(B(x) \Rightarrow A) \Longleftrightarrow ((\exists\, x \text{ je } U) B(x) \Rightarrow A) \qquad (x \text{ nije slobodna u } A)$$

55. Ispitati da li su valjane formule:

$$(\forall x \text{ je } U)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow (A \wedge (\forall x \text{ je } U) B(x))$$
$$(\exists\, x \text{ je } U)(A \vee B(x)) \Longleftrightarrow (A \vee (\exists\, x \text{ je } U) B(x)) \qquad (x \text{ nije slobodna u } A)$$

56. Dokazati valjanost formula:

$$(\exists x)U \Rightarrow ((\forall x \text{ je } U)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow (A \wedge (\forall x \text{ je } U)B(x)))$$
$$(\exists x)U \Rightarrow ((\exists x \text{ je } U)(A \vee B(x)) \Longleftrightarrow (A \vee (\exists x \text{ je } U)B(x))$$
(x nije slobodna u A)

Uputstvo. Dokazati najpre ekvivalenciju

$$(\forall x \text{ je } U)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow ((\exists x)\, U \Rightarrow A) \wedge (\forall x \text{ je } U)B(x))$$

na osnovu koje neposredno sledi

$$((\forall x \text{ je } U)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow A \wedge (\forall x \text{ je } U)B(x)) \quad (\text{Ako } (\exists x)U)$$

57. Dokazati valjanost formula (x nije slobodna u A):

$$(\exists x)U \Rightarrow ((qx \text{ je } U)(A \star B(x)) \Longleftrightarrow A \star (qx \text{ je } U)B(x),$$
$$(\exists x)U \Rightarrow ((qx \text{ je } U)(B(x) \Rightarrow A) \Longleftrightarrow ((q'x \text{ je } U)B(x) \Rightarrow A$$

Pri tome $\star$ označava operacije $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, dok je q oznaka kvantora $\forall$, $\exists$. Dalje, ako je q jedan od tih kvantora, onda je q' onaj drugi.

Primedba. Prema zadacima 52–54 neke od ekvivalencija iz prethodnog zadatka istinite su i bez uslova $(\exists x)U$.

58. Dokazati valjanost formule

$$(\forall x)(\exists y)\,\alpha(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\alpha(x,y) \Rightarrow \beta(x,y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\,\beta(x,y)$$

59. Dokazati:

$$\models (\forall x)(\exists y)\,\alpha(x,y) \wedge (\exists x)(\forall y)(\alpha(x,y) \Rightarrow \beta(x,y)) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)\,\beta(x,y)$$

60. Dokazati :

$$\models (\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \wedge (\forall x)(\exists y)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(y))$$

Rešenje. *Prvi način:* Dokazujemo (pri proizvoljnoj interpretaciji) tvrdjenje oblika ($\Rightarrow$) iz zadatka 3.

(1)	$\tau(\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) = \top$	(Pretpostavka)
(2)	$\tau(\forall x)(\exists y)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(y)) = \top$	(Pretpostavka)
(3)	$\tau(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(f(x))) = \top$, za neki f	(Iz (1) pomoću (C_f))
(4)	$\tau(\forall x)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(g(x))) = \top$, za neki g	(Iz (2) pomoću (C_f))
(5)	$\tau(\forall x)(\beta(f(x)) \Rightarrow \gamma(g(f(x)))) = \top$	(Iz (4) korišćenjem $\models (\forall x)A(x) \Rightarrow (\forall x)A(f(x))$)
(6)	$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(g(f(x)))) = \top$	(Iz (3) i (5) pomoću silogizma *Barbara*)
(7)	$(\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(y)) = \top$	(Iz (6) prema $\models (\forall x)A(x,h(x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)A(x,y)$)

Drugi način: Korišćenjem ekvivalencijskih transformacija dobijamo

$$(\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \wedge (\forall x)(\exists y)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(y))$$
$$\text{ekv } (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\beta(y)) \wedge (\forall x)(\beta(x) \Rightarrow (\exists y)(\gamma(y)) \Rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\gamma(y))$$

(Primenjena je valjana formula $(\exists x)(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (A \Rightarrow (\exists x)B)$,
uz uslov da x nije slobodna u A)

ekv $((\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\beta(y)) \wedge ((\exists x)\beta(x) \Rightarrow (\exists y)\gamma(y)) \Rightarrow ((\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\gamma(y))$

(Pomoću $\models (\forall x)(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\exists x)A \Rightarrow B)$, uz uslov da x nije slobodna u B)

ekv $((\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x)) \wedge ((\exists x)\beta(x) \Rightarrow (\exists x)\gamma(x)) \Rightarrow ((\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\gamma(x))$

(U formulama $(\exists y)\beta(y)$, $(\exists y)\gamma(y)$ izvršena je zamena promenljive y sa x. Za te formule x je nova promenljiva, pa je zamena dozvoljena.)

Poslednja formula u ekvivalencijskom lancu je valjana (kao izvod iz tautologije $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$), pa je otuda i polazna formula valjana.

61. Dokazati:

$\models (\exists y)(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \wedge (\exists y)(\forall x)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(y)) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(y))$

$\models (\exists x)(\forall y)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \wedge (\exists x)(\forall y)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(y)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(y))$

$\models (\forall y)(\exists x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \wedge (\forall y)(\exists x)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(y)) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(y))$

$\models (\exists x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(y)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(y))$

62. Dokazati valjanost formule

$(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \wedge (\forall x)(\exists y)\beta(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\alpha\circ\beta(x,y)$

Rešenje. Neka je premisa date implikacije istinita (pri interpretaciji I). Tada

$$\tau(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) = \top, \qquad \tau(\forall x)(\exists y)\beta(x,y) = \top$$

Označimo za x njemu postojeći[1] y sa:

(i) $f(x)$, ukoliko je $\tau\alpha(x,y) = \top$

(ii) $g(x)$, ukoliko je $\tau\beta(x,y) = \top$

Dakle važi: $\tau\alpha(x,f(x)) = \top$, $\tau\beta(x,g(x)) = \top$.

Kako za svaki x postoji y takav da je $\tau\beta(x,y) = \top$, to i za $f(x)$ postoji njemu odgovarajući y. Prema usvojenim oznakama to je element $g(f(x))$ i za njega važi

$$\tau\beta(f(x), g(f(x)) = \top.$$

Prema definiciji proizvoda relacija, zaključak date implikacije u stvari je formula:

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\alpha(x,z) \wedge \beta(z,y))$$

Dokazujemo da je ona istinita pri uočenoj interpretaciji. Naime, za svaki x postoje y, z (oni su redom $f(x)$, $g(f(x))$) tako da je $\tau\alpha(x,z) \wedge \beta(z,y) = \top$, jer prema napred istaknutim jednakostima važi:

$$\tau\alpha(x, f(x)) = \top, \qquad \tau\beta(f(x)), g(f(x))) = \top$$

Kraj dokaza.

63. Obrazovati preneks formu formula

a) $(\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall y)\beta(y)$, b) $\neg(\forall x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x)$, c) $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\beta(y)$

1) Tu je u stvari dva puta primenjeno tvrdjenje (C_f).

Rešenje. Slobodnije rečeno, zadatak glasi: „izvući" sve kvantore na početak formule. Primetimo da se, radi toga, često može postupiti na razne načine.

a) Uočimo ekvivalencijski lanac

$(\forall x)\, \alpha(x) \wedge (\forall y)\, \beta(y)$

$\Longleftrightarrow (\forall x)\, (\alpha(x) \wedge (\forall y)\, \beta(y))$, jer x nije slobodno u formuli $(\forall y)\, \beta(y)$ – korišćenje valjane formule $(\forall x)\, A(x) \wedge B \Longleftrightarrow (\forall x)\, (A(x) \wedge B)$

$\Longleftrightarrow (\forall x)\, (\forall y)\, (\alpha(x) \wedge \beta(y))$, jer y nije slobodno u $\alpha(x)$.

Znači $(\forall x)\, (\forall y)\, (\alpha(x) \wedge \beta(y))$ je jedna preneks forma date formule.

Medjutim, do preneks forme možemo i ovako doći:

$(\forall x)\, \alpha(x) \wedge (\forall y)\, \beta(y)$

$\Longleftrightarrow (\forall x)(\alpha(x) \wedge (\forall x)\, \beta(x)$, jer formule $(\forall y)\, \beta(y)$, $(\forall x)\, \beta(x)$ su ekvivalentne. Kažemo: obavili smo *preimenovanje* promenljive y.

$\Longleftrightarrow (\forall x)\, (\alpha(x) \wedge \beta(x))$, jer: $\models (\forall x)\, A \wedge (\forall x)\, B \Longleftrightarrow (\forall x)\, (A \wedge B)$.

Znači, kao preneks forma date formule može se uzeti i formula $(\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$.

b) Kako:

$\neg (\forall x)\, \alpha(x) \vee (\exists x)\, \beta(x)$

$\Longleftrightarrow (\exists x) \neg \alpha(x) \vee (\exists x)\, \beta(x)$

$\Longleftrightarrow (\exists x)\, (\neg \alpha(x) \vee \beta(x))$,

formula $(\exists x)\, (\neg \alpha(x) \vee \beta(x))$ je preneks forma date formule.

c) Uočimo lanac

$(\forall x)\, \alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\, \beta(y)$

$\Longleftrightarrow (\exists x)\, (\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\, \beta(y))$, korišćenjem valjane formule oblika $((\forall x)\, A(x) \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\exists x)\, (A(x) \Rightarrow B)$

$\Longleftrightarrow (\exists x)\, (\exists y)\, (\alpha(x) \Rightarrow \beta(y))$, prema valjanoj formuli oblika $(A \Rightarrow (\exists y)\, B(y)) \Longleftrightarrow (\exists y)\, (A \Rightarrow B(y))$

Formula $(\exists x)\, (\exists y)\, (\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)$, je dakle, tražena preneks forma. Medjutim:

$(\forall x)\, \alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\, \beta(x)$

$\Longleftrightarrow \neg (\forall x)\, \alpha(x) \vee (\exists y)\, \beta(y)$

$\Longleftrightarrow (\exists x) \neg \alpha(x) \vee (\exists y)\, \beta(y)$

$\Longleftrightarrow (\exists x) \neg \alpha(x) \vee (\exists x)\, \beta(x)$; umesto y uzeto je x.

$\Longleftrightarrow (\exists x)\, (\neg \alpha(x) \vee \beta(x))$

$\Longleftrightarrow (\exists x)\, (\alpha(x) \Rightarrow \beta(x))$

Znači i formula $(\exists x)\, (\alpha(x) \Rightarrow \beta(x))$ je preneks forma date formule.

64. Obrazovati preneks formu formula

a) $(\exists x)\, \alpha(x) \vee (\exists y)\, \beta(y)$, b) $(\exists x)\, \alpha(x) \wedge (\exists x)\, \beta(x)$,

c) $\neg (\forall x)\, (\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\, \beta(x))$, d) $(\exists x)\, \alpha(x) \Rightarrow \neg (\forall x)\, (\exists y)\, \beta(x,y)$

e) $(\forall x)(\exists y)\, \alpha(x,y) \Rightarrow (\forall x)\, \alpha(x,x)$, f) $(\forall x)\, \alpha(x) \Longleftrightarrow (\exists y)\, \beta(y)$

65. Dokazati da svaka predikatska formula poseduje najmanje jednu preneks formu.

Rešenje. Korišćenjem dovoljno puta ekvivalencija oblika

$$(A \Leftrightarrow B)\ ekv\ (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B), \quad (A \Rightarrow B)\ ekv\ (\neg A \vee B)$$

od date formule može se preći na novu, njoj ekvivalentnu formulu koja ne sadrži znake $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$. Otuda, bez smanjenja opštosti, dokaz izvodimo za formule u čijoj gradnji mogu da učestvuju jedino znaci $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Dokaz teče indukcijom prema broju tih znakova.

I *slučaj*. Broj znakova $\wedge$, $\vee$, $\neg$ je 0. Takva formula ima oblik

$$(q_1 u_1) \dots (q_k u_k)\ \phi(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_s) \qquad (k \geqslant 0)$$

gde su $q_1, \dots, q_s$ kvantori; $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots v_s$ promenljive, ϕ relacijski znak (dužine $k+s$) i ona je već u preneks obliku. Dokaz je završen za uočene formule.

II *slučaj*. Broj znakova $\wedge$, $\vee$, $\neg$ date formule F je n (>0), i pretpostavka je da je iskaz zadatka tačan za sve formule kod kojih je broj tih znakova manji od n. Postoji „raskrsnica":

a) F je oblika $\neg G$, b) F je oblika $G \wedge H$, c) F je oblika $G \vee H$.

Naravno formula G (odnosno G, H) u svakom od tih slučajeva su sa manjim brojem znakova $\wedge$, $\vee$, $\neg$ te za njih – prema indukcijskoj hipotezi – postoje odgovarajuće preneks forme.

Ako važi slučaj a) neka

$(q_1 u_1) \dots (q_k u_k) A$ ($k \geqslant 0$; $q_1, \dots, q_k$ su kvantori ; A ne sadrži kvantore)

bude preneks forma formule G. Tada:

$$F \Leftrightarrow \neg (q_1 u_1) \dots (q_k u_k)\, A$$

$$\Leftrightarrow \quad (\bar{q}_1 u_1) \dots (\bar{q}_k u_k) \neg A \qquad (\bar{q}_i \text{ je } \forall, \exists \text{ ukoliko je } q_i \text{ redom } \exists, \forall)$$

pa, znači i formula F poseduje preneks formu.

Pretpostavimo sada da važi slučaj b) i da su

$(q_1 u_1) \dots (q_k u_k)\, A, \qquad (q_1' v_1) \dots (q_s' v_s)\, B$

(k, $s \geqslant 0$; q_i, q_j' su kvantori; A, B su bez kvantora)

preneks forme formula G i H. Uočimo $k+s$ različitih promenljivih

$$U_1, \dots, U_k, \qquad V_1, \dots, V_s$$

koje su *nove*, u odnosu na formule G i H, tj. ne učestvuju ni u jednoj od njih. Tada vrede ekvivalencije

$$(q_1 u_1) \dots (q_k u_k) A \Leftrightarrow (q_1 U_1) \dots (q_k U_k) A,$$

$$(q_1' v_1) \dots (q_s' v_s) B \Leftrightarrow (q_1' V_1) \dots (q_l' V_s) B$$

zamišljajući da desne strane nastaju iz levih zamenjivanjem promenljivih u_i, v_j redom sa U_i, V_j. Na osnovu tih ekvivalencija zaključujemo

$$F \Longleftrightarrow (q_1 U_1) \dots (q_k U_k) A \wedge (q_1' V_1) \dots (q_s' V_s) B$$
$$\Longleftrightarrow (q_1 U_1) \dots (q_k U_k) \quad (A \wedge (q_1' V_1) \dots (q_s' V_s) B)$$
$$\Longleftrightarrow (q_1 U_1) \dots (q_k U_k) (q_1' \; V_1) \dots (q_s' V_s) (A \wedge B)$$

pa i formula F poseduje preneks formu.

Slično se postupa i u slučaju c). Kraj dokaza.

66. Neka slova q_1, q_2 označavaju kvantore, a u, v promenljive. Razlikujući razne slučajeve $(q_1 = q_2,\ q_1 \neq q_2,\ u = v,\ u \neq v)$ odrediti preneks formu formule F:

$$(q_1 u)\, \alpha(u) \star (q_2 v)\, \beta(v) \qquad (\star \text{ je } \wedge, \vee)$$

ali tako da ta forma sadrži što manje različitih promenljivih.

Odgovor. Ukoliko su q_1, q_2 različiti kvantori za preneks formu formule F može se uzeti

$$(q_1 x)\, (q_2 y)\, (\alpha(x) \star \beta(y))$$

Naravno, umesto x, y mogli smo koristiti i neke druge dve različite promenljive.

Ukoliko $q_1 = q_2 = q$ tada imamo dva podslučaja:

q „se slaže[1]" *sa* $\star$, $\qquad$ q *„se ne slaže" sa* $\star$

U prvom slučaju tražena preneks forma je, recimo

$$(qx)\, (\alpha(x) \star \beta(x))$$

a u drugom

$$(qx)\, (qy)\, (\alpha(x) \star \beta(y))$$

67. Odrediti preneks formu formule

$(qu)\, \alpha(u) \star \beta(y)$ (q je oznaka kvantora, u oznaka promenljive)

tako da ta forma sadrži što manje (različitih) promenljivih.

Odgovor. $(qx)\, (\alpha(x) \star \beta(y))$

68. Obrazovati preneks formu formule

$$(\exists\, y)\, (\forall\, x)\, \alpha(x) \Rightarrow \neg((\exists\, x) \beta(x) \vee (\forall x) \neg \gamma(x))$$

Rešenje. Do preneks forme se može doći na razne načine – recimo, sledeći ideju dokaza izloženog u 65. zadatku. Medjutim, ako želimo da forma ima što manje promenljivih (za razna razmatranja to je često dosta važno) u obrazovanju forme može se slediti ovaj niz koraka:

(i) Brišu se „slepi" kvantori, tj. oni koji „ne deluju" ni na koji deo formule. Za datu formulu takav je $(\exists\, y)$. Tako dobijamo:

$$(\forall\, x) \alpha(x) \Rightarrow \neg\, ((\exists\, x) \beta(x) \vee (\forall\, x) \neg\, \gamma(x))$$

(ii) Odstranjuju se znaci $\Rightarrow$, $\Longleftrightarrow$ korišćenjem zamena oblika:

$$A \Rightarrow B \text{ sa } \neg A \vee B,\ A \Longleftrightarrow B \text{ sa } (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

---

[1] tj. q je $\forall$, $\star$ je $\wedge$; ili q je $\exists$, $\star$ je $\vee$.

Tako se dolazi do formule

$$\neg(\forall x)\,\alpha(x) \vee \neg((\exists x)\,\beta(x) \vee (\forall x)\neg\gamma(x))$$

(iii) Znak $\neg$ „se tera udesno do kraja" – odnosno, obavljaju se zamene oblika:

$$\neg(\forall x)A \text{ sa } (\exists x)\neg A, \quad \neg(\exists x)A \text{ sa } (\forall x)\neg A$$

$$\neg(A \vee B) \text{ sa } \neg A \wedge \neg B, \quad \neg(A \wedge B) \text{ sa } \neg A \vee \neg B, \quad \neg\neg A \text{ sa } A$$

Tako dobijamo formulu

$$(\exists x)\neg\alpha(x) \vee ((\forall x)\neg\beta(x) \wedge (\exists x)\,\gamma(x))$$

(iv) Kvantori se „teraju" na početak uz upotrebu što manjeg broja promenljivih, postupajući slično kao u zadacima 65 i 66.

Tako imamo

$$(\exists x)\neg\alpha(x) \vee ((\forall x)\neg\beta(x) \wedge (\exists x)\,\gamma(x))$$

$$\Longleftrightarrow (\exists x)\neg\alpha(x) \vee ((\forall x)\neg\beta(x) \wedge (\exists y)\gamma(y))$$

$$\Longleftrightarrow (\exists x)\neg\alpha(x) \vee (\exists y)(\forall x)(\neg\beta(x) \wedge \gamma(y))$$

(Namerno smo kvantore „izvukli" u tom redu)

$$\Longleftrightarrow (\exists y)\neg\alpha(y) \vee (\exists y)(\forall x)(\neg\beta(x) \wedge \gamma(y))$$

$$\Longleftrightarrow (\exists y)(\neg\alpha(y) \vee (\forall x)(\neg\beta(x) \wedge \gamma(y)))$$

$$\Longleftrightarrow (\exists y)(\forall x)(\neg\alpha(y) \vee (\neg\beta(x) \wedge \gamma(y)))$$

Zadnja formula je traženi rezultat.

69. Obrazovati preneks forme formula

a) $\alpha(x,y)$, b) $\neg(\exists x)\,\alpha(x,y)$, c) $(\forall x)(\exists y)\,\alpha(x,y) \Longleftrightarrow \neg(\exists x)(\forall y)\,\beta(x,y)$

70. Dokazati ekvivalenciju

$$(\forall x)(\exists y)\,A(x,y) \wedge (\exists x)(\forall y)\,B(x,y) \Longleftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\exists z)\,(A(y,z) \wedge B(x,y))$$

gde su $A(x,y)$, $B(x,y)$ ma koje formule čije su sve slobodne promenljive x, y.

71. Dokazati ekvivalenciju

$$(\forall x)(\exists y)\,A(x,y) \vee (\exists x)(\forall y)\,B(x,y) \Longleftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)\,(A(x,y) \vee B(y,z))$$

gde su x,y jedine slobodne promenljive formula $A(x,y)$, $B(x,y)$.

72. Dokazati ekvivalenciju

$$(\forall x)(\exists y)\,(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \Longleftrightarrow (\exists y)(\forall x)\,(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y))$$

73. Dokazati valjanost ekvivalencije (računa II reda)

$$[(\forall x)(\exists y)\,F(x,y) \Longleftrightarrow (\exists f)(\forall x)\,F(x,f(x))]$$

$$\Longleftrightarrow (\exists f)\,[(\forall x)(\exists y)\,F(x,y) \Longleftrightarrow (\forall x)\,F(x,f(x))]$$

gde je $F(x,y)$ formula čije su sve slobodne promenljive x, y.

Rešenje. Dokaz sledi iz ekvivalencijskog lanca:

$$(\exists f)\,[(\forall x)(\exists y)\,F(x,y) \Longleftrightarrow (\forall x)\,F(x,f(x))]$$

$$\text{ekv } (\exists f)[(\forall x)(\exists y)F(x,y) \Rightarrow (\forall x)F(x,f(x)) \wedge ((\forall x)F(x,f(x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)F(x,y))]$$

$$\text{ekv } (\exists f)\,[((\forall x)(\exists y)\,F(x,y) \Rightarrow (\forall x)\,F(x,f(x))) \wedge \top\,]$$

(Jer drugi član konjunkcije je valjana formula)

$ekv\ (\forall x)(\exists y)F(x,y) \Rightarrow (\exists f)(\forall x)F(x,f(x))$

(Jer f ne učestvuje u prvom članu implikacije)

$ekv\ ((\forall x)(\exists y)F(x,y) \Rightarrow (\exists f)(\forall x)F(x,f(x))) \wedge \top$

$ekv\ ((\forall x)(\exists y)F(x,y) \Rightarrow (\exists f)(\forall x)F(x,f(x)))$

$\wedge\ ((\exists f)(\forall x)F(x,f(x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)F(x,y))$

(Umesto $\top$ stavili smo valjanu formulu ekvivalentnu sa formulom

$(\forall f)((\forall x)F(x,f(x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)F(x,y))$)

$ekv\ (\forall x)(\exists y)F(x,y) \Longleftrightarrow (\exists f)(\forall x)F(x,f(x))$

Napomena. Levu stranu dokazane ekvivalencije (umesto $(\exists f)$ bilo je $(\exists f{:}A \to B)$ što samo prividno izgleda opštije) koristili smo za formulski zapis aksiome izbora. Stoga navedena ekvivalencija daje, može se tako reći, jedan *preizraz* (preformulaciju) te aksiome. Taj preizraz je podloga tvrdjenja: *Ako su x,y jedine slobodne promenljive formule $F(x,y)$ svaki model formule $(\forall x)(\exists y)F(x,y)$ je produživ do modela formule $(\forall x)F(x,f(x))$, kao i obratno, svaki model druge skrativ je do modela prve,* navedenog u uvodnom tekstu. Istina tamo stoji nešto opštije tvrdjenje (sa ma kojim n), ali i ono je posledica aksiome izbora.

74. Odrediti otvorenu formu formule

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(\exists v)\ A(x,y,z,u,v)$$

gde je A formula bez kvantora, čije su sve slobodne promenljive x, y, z, u, v.

Rešenje. Do otvorene formule dolazimo postupno.

U svakom koraku uvodimo nove Skolemove funkcije, odnosno obavljamo po jednu skolemizaciju, tj. prelaz od formule oblika $(\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists y)A(x_1, \ldots, x_n, y)$ na formulu oblika $A(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ (videti uvodni tekst).

U prvom koraku datu formulu shvatimo kao formulu oblika

$(\forall x)(\exists y)B_1(x,y)$ $(B_1(x,y)$ je $(\forall z)(\exists u)(\exists v)\ A(x,y,z,u,v))$

Skolemizacijom dobijamo formulu $(\forall x)B_1(x,f(x))$ (f je nov funkcijski znak), odnosno

$$(\forall x)(\forall z)(\exists u)(\exists v)A(x, f(x), z, u, v)$$

U idućem koraku tu formulu shvatamo kao formulu oblika

$$(\forall x)(\forall z)(\exists u)\ B_2(x, z, u)$$

Skolemizacijom dolazimo do formule $(\forall x)(\forall z)B_2(x, z, g(x, z))$, odnosno do

$$(\forall x)(\forall z)(\exists v)\ A(x,f(x), z, g(x, z), v)$$

Najzad, uvodeći još jednu Skolemovu funkciju h i prelazeći na formulu

$$(\forall x)(\forall z)A(x, f(x), z, g(x, z), h(x, z))$$

dobijamo traženu otvorenu formu $\hat{A}$.

Nije teško uvideti da su A i $\hat{A}$ zaista u odnosu: svaki model za A produživ je do modela za $\hat{A}$ i obratno svaki model od $\hat{A}$ skrativ je do modela za A – jer, takav odnos vredi u svakom koraku i još, uz to odnos je prenosan (tranzitivan).

75. Odrediti otvorene forme formula

a) $(\exists x)\alpha(x)$, b) $(\exists x)(\forall y)\beta(x,y)$, c) $(\forall x)(\exists y)\beta(x,y)$, d) $(\exists x)(\exists y)\beta(x,y)$,
e) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)\gamma(x,y,z,u,v)$,
f) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)\gamma(x,y,z,u,v)$.

Odgovor. a) $\alpha(a)$, b) $(\forall y)\beta(b,y)$, c) $(\forall x)\beta(x,f(x))$, d) $\beta(a,b)$,

e) $(\forall y)(\forall z)(\forall v)\gamma(a,y,z,f(y,z),v)$, f) $(\forall x)(\forall z)(\forall v)\gamma(x,f(x),z,g(x,z),v)$.
Primećuje se da univerzalni kvantori ostaju, da svakom egzistencijalnom odgovara po jedan funkcijski znak. Dalje, ako imamo neki kvantor oblika $(\exists p)$ – p je promenljiva, onda se p zamenjuje sa $v(p_1, p_2, \ldots, p_s)$. Tu je v novi funkcijski znak a $p_1, p_2, \ldots p_s$ su sve promenljive koje prethode kvantoru $(\exists p)$ i još su univerzalno kvantifikovane.

76. Odrediti otvorene forme formula

a) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)\alpha(x,y,z,u)$, b) $\neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)\alpha(x,y,z,u)$
c) $\neg(\exists x)\neg(\exists y)\neg(\forall z)\beta(x,y,z)$ d) $(\forall x)\neg(\exists y)\neg(\exists z)\beta(x,y,z)$
e) $(\forall x_1)(\exists y_1)(\forall x_2)(\exists y_2)\ldots(\forall x_n)(\exists y_n)\gamma(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$

77. Odrediti otvorene forme formula

a) $(\forall x)\alpha(x) \vee (\exists y)\beta(y)$, b) $(\exists x)(\forall y)\alpha(x,y) \Rightarrow \neg(\forall y)(\exists x)\beta(x,y)$,
c) $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \wedge (\forall x)(\exists y)\beta(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\gamma(x,y)$,
d) $(\exists x)(\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\beta(y)) \vee (\exists x)(\exists y)(\alpha(x) \wedge \beta(y))$

78. Dokazati da formula F_1 ima (neki) model akko formula F_2 ima model gde:

a) F_1 je $(\forall x)(\exists y)(\exists z)A(x,y,z)$; F_2 je $(\forall x)A(x,f(x),g(x))$
b) F_1 je $(\exists x)(\forall y)(\forall z)A(x,y,z)$; F_2 je $(\forall y)(\forall z)A(a,y,z)$
c) F_1 je $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)A(x,y,z,u)$; F_2 je $(\forall x)(\forall z)A(x,f(x),z,g(x,z))$

Slova x, y, z (odnosno u) su jedine slobodne promenljive formule A, a je novi znak konstante, f, g,... novi funkcijski znaci.

79. Dokazati da je svaki model formule F: $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\beta(y)$ produživ do modela ma koje od formula

(i) $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \beta(b)$, (ii) $\alpha(a) \Rightarrow (\exists y)\beta(y)$, (iii) $\alpha(a) \Rightarrow \beta(b)$ kao i obratno, da je svaki model ma koje od formula (i), (ii), (iii) skrativ do modela formule F.

80. Dokazati da je svaki model formule $(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x)$ produživ do modela ma koje od formula $(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow \beta(b)$, $(\exists x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(f(x)))$.

81. Dokazati:

Formila $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\beta(y))$ *ima model akko formula*
$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(b))$ *ima model.*

Rešenje. Neka dogovorno znaci *i.m.* zamenjuju reči *ima model.* Tada vredi sledeći lanac ekvivalencija

$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\beta(y))$ *i.m.* akko $(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\beta(y)$ *i.m.*
akko $(\exists y)((\exists x)\alpha(x) \Rightarrow \beta(y))$ *i.m.*
akko $(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow \beta(b)$ *i.m.*
akko $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(b))$ *i.m.*

Koristili smo činjenicu da se svojstvo *imati neki model* čuva kod ekvivalentnih formula, a takodje da su po tom svojstvu ekvivalentne formule oblika $(\exists y)A(y)$, $A(b)$, gde je y jedina slobodna promenljiva formule A, i b je novi znak konstante (tj. neučestvujući u A).

Napomena. U ovom primeru, može se tako reći, od formule $(\exists x)(\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)\beta(y))$ prešli smo na formulu $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(b))$ obavljajući skolemizaciju „unutra" – tj. zamenjujući podformulu $(\exists y)\beta(y)$ sa $\beta(b)$. U narednom zadatku navode se opširniji takvi slučajevi.

82. Dokazati:

Formula $(\forall x_1, \ldots, x_n)(A(x_1, \ldots, x_n) \star (\exists y) B(x_1, \ldots, x_n, y))$ *ima model*
akko formula $(\forall x_1, \ldots, x_n)(A(x_1, \ldots, x_n) \star B(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)))$ *ima model.*

Tu su $x_1, \ldots, x_n$ (odnosno još i y) jedine slobodne promenljive formule A (odnosno B), f je novi funkcijski znak, a $\star$ je jedan od znakova $\wedge$, $\vee$.

Uputstvo. Koristiti ekvivalenciju oblika $A \star (\exists y) B$ *ekv* $(\exists y)(A \star B)$.

83. Dokazati:

$A \star (\forall x_1, \ldots, x_n)(\exists y)B(x_1, \ldots, x_n, y)$ *ima model*
akko $A \star (\forall x_1, \ldots, x_n) B(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ *ima model,*

gde je A zatvorena formula, $x_1, \ldots, x_n, y$ su sve promenljive formule B, f je nov funkcijski znak, $\star$ je $\wedge$ ili $\vee$.

84. Dokazati:

Formula $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\alpha(x,y) \vee \beta(y,z))$ *ima model*
akko formula $(\forall x)(\forall z)(\alpha(x,f(x)) \vee \beta(b,z))$ *ima model.*

Rešenje. Neka slova *i.m.* zamenjuju reči *ima model.* Tada:

$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\alpha(x,y) \vee \beta(y,z))$ *i.m.*
akko $(\forall x)(\exists y)(\alpha(x,y) \vee (\forall z)\beta(y,z))$ *i.m.*
akko $(\forall x)((\exists y)\alpha(x,y) \vee (\exists y)(\forall z)\beta(y,z))$ *i.m.*
akko $(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \vee (\exists y)(\forall z)\beta(y,z)$ *i.m.*
(Kvantore smo stalno „terali udesno")
akko $(\forall x)\alpha(x,f(x)) \vee (\exists y)(\forall z)\beta(y,z)$ *i.m.*
(Obavljena je skolemizacija prvog člana – 83 . zadatak)
akko $(\forall x)\alpha(x,f(x)) \vee (\forall z)\beta(b,z)$ *i.m.*
(Skolemizacija drugog člana)
akko $(\forall x,z)(\alpha(x,f(x)) \vee \beta(b,z))$ *i.m.* Kraj dokaza.

85. Dokazati

Formula $(\forall x_2)(\exists y_1)(\forall x_1)(\exists y_2)(A(x_1,y_1) \wedge B(x_2,y_2))$ *ima model akko formula* $(\forall x_1)(\forall x_2)(A(x_1, a) \wedge B(x_2, f(x_2)))$ *ima model.*

Tu su x_1, y_1 (odnosno x_2, y_2) jedine slobodne promenljive formula $A(x_1,y_1)$, $B(x_2 y_2)$, a novi znak konstante, f novi funkcijski znak (u odnosu na $A(x_1,y_1)$, $B(x_2, y_2)$).

Napomena. Ukoliko se na polaznu formulu odmah primeni skolemizacija, tj. kvantori se „ne teraju" udesno do kraja dolazi se do znatno složenije formule

$$(\forall x_2)(\forall x_1)(A(x_1, g(x_1)) \wedge B(x_2, h(x_2, x_1))$$

Uopšte, kad se za neku formulu traži što prostija formula (u odnosu na Skolemove funkcije), koja je sa njom ekvivalentna po svojstvu *imati model*, često je podesno „terati" kvantore udesno[1] i obavljati skolemizaciju „unutra".

86. Dokazati valjanost date zatvorene formule F, dokazujući da njena negacija nema model

$$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \wedge (\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x)$$

Rešenje. Koristimo činjenicu da za *zatvorene* formule[2] važi ekvivalencija

F je valjana akko $\neg F$ nema model.

Na osnovu toga zadatak se svodi na dokazivanje da $\neg F$ *nema model.* U tu svrhu polazimo od pretpostavke: $\neg F$ *ima model* i tragamo za nekom kontradikcijom. Radi toga podesno je za formulu $\neg F$ pronaći neku otvorenu formu ϕ, jer, tada je dovoljno dokazati da pretpostavka ϕ *ima model* vodi u neku protivurečnost. Dalje, što će se iz ovog i narednih primera bolje videti, podesno je bezkvantorski deo formule ϕ dovesti na sastavni oblik.

U skladu sa rečenim uočimo ovaj implikacijski lanac

$\neg F$ *ima model*

$\rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \wedge (\exists x)\alpha(x) \wedge \neg(\exists x)\beta(x)$ *ima model*

$\rightarrow (\forall x)(\neg\alpha(x) \vee \beta(x)) \wedge (\exists x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\neg\beta(x)$ *ima model*

$\rightarrow (\forall x)(\neg\alpha(x) \vee \beta(x)) \wedge \alpha(a) \wedge (\forall x)\neg\beta(x)$ *ima model*

$\rightarrow (\forall x)(\alpha(a), \neg\beta(x), \neg\alpha(x) \vee \beta(x))$ *ima model*

(Tu, dogovorno umesto $\wedge$ stoji znak , . Stigli smo do otvorene forme za $\neg F$, čiji bezkvantorski deo je u sastavnom obliku).

---

[1] Medjutim, ima slučajeva u kojima takvo „teranje" nije najpodesnije. Recimo to važi za formulu $(\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$.

[2] Neka je, primera radi, F zatvorena formula koja od relacijskih i operacijskih znakova sadrži jedino relacijski znak α dužine 2. Tada:

$$\begin{aligned} F \text{ je valjana} &\longleftrightarrow (\forall D)(\forall \alpha \subset D^2)\ \tau F = \top \\ &\longleftrightarrow \neg\neg(\forall D)(\forall \alpha \subset D^2)\ \tau F = \top \\ &\longleftrightarrow \neg(\exists D)(\exists \alpha \subset D^2)\ \tau(\neg F) = \top \\ &\longleftrightarrow \neg F \text{ nema model.} \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je M neki model poslednje formule u kome su sa a, α, β (dakle, istim znacima) označene interpretacije znakova a, α, β. Tada, na osnovu predhodnog, zaključujemo

(1) $\alpha(a)$ (tj. $\tau\, \alpha(a) = \top$)

(2) $(\forall x) \neg \beta(x)$

(3) $(\forall x) (\neg \alpha(x) \vee \beta(x))$

Dalje se trudimo „da posvadjamo" uslove (1), (2), (3) odnosno da iz (1), (2), (3) izvedemo kontradikciju. Zaista, iz (2) sledi $\neg \beta(a)$, a iz (3) sledi $\neg \alpha(a) \vee \beta(a)$. Medjutim, $\alpha(a)$ i $\neg \alpha(a) \vee \beta(a)$ daju $\beta(a)$ što je u suprotnosti sa $\neg \beta(a)$. Kraj dokaza, jer smo pretpostavku $\neg F$ *ima model* doveli do protivurečnosti.

Napomena. U navedenom implikacijskom lancu dozvoljeno je znak $\rightarrow$ zameniti znakom $\longleftrightarrow$, dolazi se opet do tačnog lanca.

87. Dokazati valjanost formule F:

$$(\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \wedge (\exists x)\, \alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\, \beta(x).$$

Rešenje. Postupamo slično kao u prethodnom zadatku: Polazimo od $\neg F$, gradimo njen otvoren oblik, njega dovodimo na sastavni oblik i pomoću toga dokazujemo da $\neg F$ nema model, tj. da je F valjana. Dakle:

$\neg F$ *ima model*

$\longleftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \wedge (\exists x)\alpha(x) \wedge \neg (\exists x)\beta(x)$ *ima model*

$\longleftrightarrow (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(f(x))) \wedge \alpha(a) \wedge (\forall x) \neg \beta(x)$ *ima model*

$\longleftrightarrow (\forall x)(\alpha(a), \neg \beta(x), \alpha(x) \Rightarrow \beta(f(x)))$ *ima model*

Iz poslednjeg člana lanca slede posledice:

(1) $\alpha(a)$, (2) $(\forall x) \neg \beta(x)$, (3) $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(f(x)))$

Radi dobijanja kontradikcije postupimo ovako. Iz (3) zaključujemo $\alpha(a) \Rightarrow \beta(f(a))$, odakle na osnovu (1) sledi: $\beta(f(a))$. Medjutim, iz (2) zamenjujući x u $\neg \beta(x)$ sa $f(a)$ dobijamo $\neg \beta(f(a))$. Došli smo do kontradikcije (u zamišljenom modelu). Znači $\neg F$ nema model, tj. F je valjana formula.

Opaska. Zapazili smo da se u izvodjenju kontradikcije promenljivim daju razne „dobre" vrednosti i da su one upravo neki od terma po a:

$$a, \quad f(a), \quad f(f(a)), \quad .....$$

88. Dokazati valjanost formula (dokazujući da njihova negacija nema model)

a) $\alpha(a) \Rightarrow (\exists x)\, \alpha(x)$, b) $(\forall x)\, \alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\, \alpha(x)$,

c) $(\forall x)\, \alpha(x) \Rightarrow \alpha(a)$, d) $(\forall x)\, \alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\, \alpha(f(x))$,

e) $(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow (\exists x)\, \alpha(x) \wedge (\exists x)\, \beta(x)$,

f) $((\forall x)(\exists y)\, \alpha(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(\alpha(x,y) \Rightarrow \beta(x,y))) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\, \beta(x,y)$

g) $((\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(y)) \wedge (\forall x)(\exists y)(\beta(x) \Rightarrow \gamma(y))) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow \gamma(y))$

Uputstvo za b). Iz zamišljenog modela za promenljive uzeti jednu vrednost označenu, recimo, a.

89. Dokazati valjanost formule F:

$$(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \wedge (\forall y)(\exists z)\beta(y,z) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)(\alpha(x,y) \wedge \beta(y,z))$$

Uputstvo. Pretpostavka $\neg F$ *ima model* dovodi do zaključka da su na takvom modelu tačne formule[1]

(1) $(\forall x)\,\alpha(x,f(x))$, (2) $(\forall y)\,\beta(y,g(y))$, (3) $(\forall z)(\forall u)(\neg\alpha(a,z) \vee \neg\beta(z,u))$

Dokazujemo da su ta tri zaključka nesaglasna, odnosno da vode ka protivurečnosti. I ovde, kao i u zadacima 86, 87 koristimo terme[2] gradjene od a, f i g, odnosno znakova konstanti i funkcijskih znakova prisutnih[3] u (1), (2), (3).

U (1) i (3) se javljaju $\alpha(x,f(x))$, $\neg\alpha(a,z)$. Da bismo koristili njihovu povezanost iz (1) izvodimo formulu:

(4) $\alpha(a,f(a))$ (umesto x u $\alpha(x,f(x))$ zamenili smo a).

Smenjujući z sa $f(a)$ u nekvantorski deo formule (3) zaključujemo:

(5) $\neg\alpha(a,f(a)) \vee \neg\beta(f(a),u)$

Iz (4) i (5) zaključujemo

(6) $\neg\beta(f(a),u)$

Ako u nekvantorski deo formule (2) zamenimo y sa $f(a)$ dobijamo:

(7) $\beta(f(a),g(f(a)))$

Najzad, ako u (6) umesto u zamenom $g(f(a))$ dobijamo kontradikciju sa (7).

Napomena. U zadacima 86, 87, 89 približno smo opisali tzv. *rešavajući postupak* (resolution method) za ispitivanje valjanosti.

90. Dokazati valjanost formule

$$(\forall x)(\exists y)\alpha(x,y) \wedge \neg(\exists y)(\forall z)\beta(z,y) \Rightarrow \neg(\forall x,y,z)(\alpha(x,y) \Rightarrow \beta(z,x))$$

91. Dokazati valjanost formule

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,[\alpha(x,x) \wedge (\alpha(x,y) \Rightarrow \alpha(y,x)) \wedge (\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,z) \Rightarrow \alpha(x,z))]$$
$$\Rightarrow (\forall x)(\forall y)\,[\alpha(x,y) \Leftrightarrow (\exists z)(\alpha(x,z) \wedge \alpha(y,z))]$$

92. Dokazati valjanost formule

$$[(\forall x)(\forall y)(\alpha(x,y) \Rightarrow \alpha(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,z) \Rightarrow \alpha(x,z))$$
$$\wedge (\forall x)(\exists y)\,\alpha(x,y)] \Rightarrow (\forall x)\alpha(x,x)$$

93. Uočimo formulu A:

---

[1] Radi lakšeg rasudjivanja za svaki od slučajeva (1), (2), (3) vezane promenljive su drugačije označene.

[2] U stvari, ti termi predstavljaju elemente zamišljenog domena.

[3] Ukoliko je slučaj da se ne javlja nijedan znak konstante, tada uočavamo jedan element domena, označen recimo sa a, i terme obrazovane od njega (tj. odgovarajuće elemente domena).

$$[(\forall x)\alpha(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\alpha(x,y)\wedge\alpha(y,z) \Rightarrow \alpha(x,z)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\alpha(x,y)\vee\alpha(y,x))] \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\alpha(x,y)$$

(i) Dokazati da je A tačna na svakom *konačnom* domenu.

(ii) Naći interpretaciju sa skupom prirodnih brojeva kao domenom pri kojoj je A netačna.

94. Formula

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_m)(\exists y_1)\dots(\exists y_n)A(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$$

(x_i, y_j su jedine slobodne promenljive bezkvantorske formule A, koja ne sadrži nijedan funkcijski znak, niti znak konstante).

je valjana ukoliko je tačna na svakom domenu sa m elemenata. Dokazati.

95. Neka je A zatvorena formula koja od matematičkih znakova ima jedino relacijski znak α dužine 1. Dokazati da je ona ekvivalentna sa formulom iskazne vrste

$$A^{\star}((\exists x)\alpha,\quad (\exists x)\alpha')$$

po slovima[1] $(\exists x)\alpha$, $(\exists x)\alpha'$.

Uputstvo. Formula A ekvivalentna je sa izvesnom svojom preneks formom

(1) $\qquad (q_1x_1)\dots(q_nx_n)B(\alpha(x_1),\dots,\alpha(x_n))$

pa se strog dokaz izvodi indukcijom po broju kvantora u formuli (1).

U slučaju kada je formula (1) oblika $(\exists x_1)B(\alpha(x_1))$ formulu B dovodimo na rastavni oblik, a potom izvodimo:

$$(\exists x_1)B(\alpha(x_1))\ ekv\ B(\top)(\exists x_1)\alpha(x_1)+B(\bot)(\exists x_1)\alpha'(x_1)$$

Odatle zamenom x_1 u formuli sa desne strane, sa x dobijamo

$$(\exists x_1)B(\alpha(x_1))\ ekv\ B(\top)(\exists x)\alpha+B(\bot)(\exists x)\alpha'\,.$$

U slučaju kada je formula (1) oblika $(\forall x_1)B(\alpha(x_1))$, svodjenjem formule $B(\alpha(x_1))$ na sastavni oblik neposredno zaključujemo:

$$(\forall x_1)B(\alpha(x_1))\ ekv\ (B(\top)+((\exists x)\alpha)')\cdot(B(\bot)+((\exists x)\alpha')')$$

Ako formule $(\exists x)\alpha$, $(\exists x)\alpha'$ označimo redom sa p, q, tražena formula $A^{\star}$ U prvom slučaju $(B(\top)p+B(\bot)q$, a u drugom $(B(\top)+p')\cdot(B(\bot)+q')$

96. Neka je A formula $(\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg\alpha(y)\wedge(\alpha(x)\Longleftrightarrow\alpha(z))]$. Odrediti formulu $A^{\star}$ (videti prethodni zadatak).

Rešenje. Postupak odredjivanja formule $A^{\star}$ izgleda:

$$A\ ekv\ (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg\alpha(y)\wedge(\neg\alpha(x)\vee\alpha(z))\wedge(\neg\alpha(z)\vee\alpha(x))]$$

$$ekv\ (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\alpha'(y)\cdot(\alpha'(x)+\alpha(z))\cdot(\alpha'(z)+\alpha(x))$$

$$ekv\ (\exists x)(\exists y)[\alpha'(y)\cdot(\alpha'(x)+(\forall z)\alpha(z))\cdot((\forall z)\alpha'(z)+\alpha(x))]$$

[1] U ovom i nekoliko narednih zadataka umesto $\vee$, $\wedge$, $\neg$ koristimo oznake $+$, $\cdot$, $'$ a umesto $(\exists x)\alpha(x)$, $(\forall z)\alpha(x)$ i sl. pišemo kraće $(\exists x)\alpha$, $(\forall x)\alpha$. Inače u zadacima 95–99 razmatramo pitanje tzv. o d l u č i v o s t i formula sa relacijskim znacima dužine 1.

(„Teranje" kvantora $\forall z$ udesno, sve do samih elementarnih formula)

$ekv\ (\exists x)\ (\exists y)\ [\alpha'(y)\cdot(\alpha'(x)+(\forall x)\alpha)\cdot((\forall x)\alpha'+\alpha(x))]$

(Zamena vezane promenljive z sa x)

$ekv\ (\exists x)\ [(\exists y)\alpha'(y)\ \cdot(\alpha'(x)+(\forall x)\alpha)\cdot((\forall x)\alpha'+\alpha(x))]$

(„Teranje" kvantora $\exists y$ udesno)

$ekv\ (\exists x)\ [(\exists x)\alpha'\cdot(\alpha'(x)+(\forall x)\alpha)\cdot((\forall x)\alpha'+\alpha(x))]$

(Zamena promenljive y sa x)

$ekv\ (\exists x)\ [(\exists x)\alpha'\cdot\alpha'(x)\cdot(\forall x)\alpha'+(\exists x)\alpha'\cdot\alpha'(x)\cdot\alpha(x)$
$+(\exists x)\alpha'\cdot(\forall x)\alpha\cdot(\forall x)\alpha'+(\exists x)\alpha'\cdot(\forall x)\alpha\cdot\alpha(x)]$

(Svodjenje formule u srednjoj zagradi na rastavni oblik)

$ekv\ (\exists x)\ [(\exists x)\alpha'\cdot(\forall x)\alpha'\cdot\alpha'(x)+(\exists x)\alpha'\cdot(\forall x)\alpha\cdot\alpha(x)]$

(Jer $\alpha'(x)\cdot\alpha(x)\ ekv\ \perp$, $(\forall x)\alpha\cdot(\forall x)\alpha'\ ekv\ (\forall x)\ (\alpha\cdot\alpha')\ ekv\ \perp$)

$ekv\ (\exists x)\ [(\forall x)\alpha'\cdot\alpha'(x)+\perp]$

(Jer $\models(\forall x)\alpha'\Rightarrow(\exists x)\alpha'$, $(\exists x)\alpha'\cdot(\forall x)\alpha\ ekv\ \perp$)

$ekv\ (\forall x)\alpha'\cdot(\exists x)\alpha'$

$ekv\ (\exists x)\alpha'\cdot((\exists x)\alpha)'$

Tražena formula $A^{\star}$ je, dakle, $(\exists x)\alpha'\cdot((\exists x)\alpha)'$.

97. Prema zadatku 95 zatvorena formula A obrazovana od relacijskog znaka α dužine 1 kao jedinog matematičkog znaka ekvivalentna je sa formulom iskazne vrste

$$A^{\star}((\exists x)\alpha,\ (\exists x)\alpha')$$

obrazovanom od slova $(\exists x)\alpha$, $(\exists x)\alpha'$. Ta činjenica pruža mogućnost jednostavnog o d l u č i v a nj a da li formula A jeste ili nije valjana. Naime, vredi ekvivalencija

$$A \text{ je valjana akko } p\vee q\Rightarrow A^{\star}(p,q) \text{ je tautologija}$$

Dokazati.

Rešenje. Formule $(\exists x)\alpha$, $(\exists x)\alpha'$ su zatvorene i pri raznim tumačenjima relacijskog znaka α dobijaju vrednost $\top$ ili $\perp$. Pri tome mogu nastupiti ova tri slučaja

(i) $\tau(\exists x)\alpha=\top$, $\tau(\exists x)\alpha'=\top$; (ii) $\tau(\exists x)\alpha=\top$, $\tau(\exists x)\alpha'=\perp$;

(iii) $\tau(\exists x)\alpha=\perp$, $\tau(\exists x)\alpha'=\top$

Slučaj $\tau(\exists x)\alpha=\perp$, $\tau(\exists x)\alpha'=\perp$ je nemoguć. Uzrok tome je činjenica što je formula $(\exists x)\alpha\vee(\exists x)\alpha'$ valjana. Otuda se utvrdjivanje valjanosti formule $A^{\star}((\exists x)\alpha,(\exists x)\alpha')$, a samim tim i valjanosti formule A, može svesti na proveravanje da li iskazna formula $A^{\star}(p,q)$ ima vrednost $\top$ kad slova p, q imaju vrednost $\top$, $\top$ ili $\top$, $\perp$ ili $\perp$, $\top$, tj. upravo kad formula $p\vee q$ ima vrednost $\top$.

Drugim rečima, zadatak se svodi na proveravanje da li je formula

$$p \vee q \Rightarrow A^{\star}(p, q)$$

tautologija.

98. Neka je A zatvorena formula koja od matematičkih znakova ima jedino relacijske znake $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dužine 1. Dokazati da je A ekvivalentna sa formulom iskazne vrste

$$A^{\star}(p_1, p_2, \ldots, p_{2^n}),$$

gde su sa $p_1, p_2, \ldots, p_{2^n}$ označene formule oblika $(\exists x)(\alpha_1^{a_1} \cdot \alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_n^{a_n})$, pri čemu $a_i \in \{\top, \bot\}$.

99. **Produžetak prethodnog zadatka.** Dokazati ekvivalenciju:

A je valjana akko $p_1 \vee p_2 \ldots \vee p_{2^n} \Rightarrow A^{\star}(p_1, p_2, \ldots, p_{2^n})$ *je tautologija.*

100. **Lema o „promenljivoj" konstanti.** Neka je $F(x)$ formula čija je jedina slobodna promenljiva x. Dokazati:

$$\models (\forall x) F(x) \quad \text{akko} \quad \models F(c)$$

gde je c znak konstante koji ne učestvuje u $F(x)$.

101. Dokazati da za ma koju formulu A vredi

$$A \models (\forall x) A, \qquad (\forall x) A \models A$$

Uputstvo. Uočiti proizvoljnu interpretaciju I i dokazati tvrdjenje:

I je model za A ako i samo ako I je model za $(\forall x)A$.

102. Relacija $\models$ ima svojstva

$$\models A,\ A \models B \rightarrow\ \models B; \quad A \models B,\ B \models C \rightarrow A \models C$$

Dokazati.

103. Dokazati:

$A, (\exists x)B \models (\exists x)(A \wedge B);$ $\qquad (\exists x)A, A \Rightarrow B \models (\exists x)B;$

$(\exists x) \neg B, A \Rightarrow B \models (\exists x) \neg A;$ $\qquad A \Rightarrow B, (\exists x)(A \wedge C) \models (\exists x)(B \wedge C)$

104. Dokazati:

$A \Rightarrow B \models (\forall x) A \Rightarrow (\forall x) B,$ $\qquad A \Rightarrow B \models (\exists x) A \Rightarrow (\exists x) B,$

$A \Longleftrightarrow B \models (\forall x) A \Longleftrightarrow (\forall x) B,$ $\qquad A \Longleftrightarrow B \models (\exists x) A \Longleftrightarrow (\exists x) B,$

gde su A, B ma koje formule.

Uputstvo. Formula (i slične)

$$(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x) A \Rightarrow (\forall x) B)$$

je valjana.

105. Dokazati *stav dedukcije (predikatski):*

$$F_1, \ldots, F_n \models F \ \textit{akko}\ F_1, \ldots, F_{n-1} \models F_n \Rightarrow F$$

uz pretpostavku da je F_n zatvorena formula.

106. Neka su $F_1, \ldots, F_n$ zatvorene formule. Tada:

$$F_1, \ldots, F_n \models F \ \textit{akko} \models F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \Rightarrow F$$

Dokazati.

XIII JOŠ O JEDNAKOSTI

♦ Neka je $\mathcal{F}$ skup formula medju čijim relacijskim znacima se nalazi i = (znak jednakosti). Takozvana *jednakosna* ili *normalna interpretacija* tih formula je takva interpretacija pri kojoj se znak = tumači kao jednakost. Ukoliko je takva interpretacija model uočenih formula, kažemo da je to *jednakosni* ili *normalni model*.
Recimo jedan takav model formule

$x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$

odredjen je tablicom:

ρ	a	b	c
a	$\top$	$\top$	$\top$
b	$\perp$	$\top$	$\top$
c	$\perp$	$\perp$	$\top$

♦ Formula $x = x$ je tačna pri ma kojoj jednakosnoj interpretaciji – to je primer tzv. *jednakosno valjane* formule. Uopšte, jednakosno valjane su sve aksiome jednakosti:

(R) $x = x$, (S) $x = y \Rightarrow y = x$, (T) $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$,

(S_f) $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$,

(S_α) $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow (\alpha(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \alpha(y_1, \ldots, y_n))$

(f i α su proizvoljni operacijski, odnosno relacijski znak dužine n).

♦ U vezi sa jednakošću ističemo zakone *jednakosnih zamena* za terme i za formule. Prema njima „nešto je dozvoljeno zameniti jednakim". Naime, ako je I proizvoljan term i t njegov podterm, što ističemo oznakom $I(t)$, tada je dozvoljeno podterm t zameniti sa njim jednakim termom t'. Novodobijeni term $I(t')$ jednak je sa polaznim. Drugim rečima, formula

(1) $$t = t' \Rightarrow I(t) = I(t')$$

je jednakosno valjana.
Odgovarajući zakon jednakosne zamene za formule

(2) $$t = t' \Rightarrow (A(t) \Longleftrightarrow A(t'))$$

važi uz izvesna ograničenja tehničke prirode. Naime, da bi formula (2) bila jednakosno valjana, dosta je da sve promenljive terma t budu slobodne u formuli $A(t)$ i da term t' (koji se zamenjuje umesto t) ne napada nijednu od tih promenljivih.
Formula (2) je logički ekvivalentna sa formulom

(2') $$(t = t' \wedge A(t)) \Longleftrightarrow (t = t' \wedge A(t')),$$

što sledi na osnovu tautologije $(p \Rightarrow (q \Longleftrightarrow r)) \Longleftrightarrow (p \wedge q \Longleftrightarrow p \wedge r)$.

♦ Neka je $\mathcal{M}$ neka struktura (M je njen skupovni deo) i $\sim$ njena kongruencija (tj. kongruencija svake njene operacije i svake relacije). Takozvana *količnička struktura* $\mathcal{M}/\sim$ odredjena je uslovima:

(i) Njen skupovni deo je *količnički skup* $M/\sim$, tj. skup svih klasa ekvivalencije.

(ii) U vezi sa svakom operacijom f dužine n je operacija $\tilde{f}$ sa klasama ovako uvedena

$$\tilde{f}(C_{x_1}, ..., C_{x_n}) \stackrel{\text{def}}{=} C_{f(x_1, ..., x_n)}$$

(iii) U vezi sa svakom relacijom α dužine n je relacija sa klasama $\tilde{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha}(C_{x_1}, ..., C_{x_n}) \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \alpha(x_1, ..., x_n)$$

Recimo, za strukturu $\mathcal{M} = (M, \star, \alpha)$, gde je $M = \{a, b, c\}$, a $\star$ i α su odredjene tablicama, neposredno se proverava da je $\sim$ njena kongruencija.

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	a	a	c

α	a	b	c
a	$\bot$	$\bot$	$\top$
b	$\bot$	$\bot$	$\top$
c	$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\sim$	a	b	c
a	$\top$	$\top$	$\bot$
b	$\top$	$\top$	$\bot$
c	$\bot$	$\bot$	$\top$

Odgovarajuća količnička struktura $\mathcal{M}/\sim = (M/\sim, \tilde{\star}, \tilde{\alpha})$ ima skupovni deo $\{C_a, C_c\}$, gde $C_a = \{a, b\}$, $C_c = \{c\}$, a operacija $\tilde{\star}$ i relacija $\tilde{\alpha}$ su

$\tilde{\star}$	C_a	C_c
C_a	C_a	C_c
C_c	C_a	C_c

$\tilde{\alpha}$	C_a	C_c
C_a	$\bot$	$\top$
C_c	$\bot$	$\bot$

Definicije (ii), (iii) su ispravne, što se dokazuje u zadatku 44.

♦ Neka je $\mathcal{F}$ skup izvesnih predikatskih formula a $\mathcal{A}x_=$ skup aksioma jednakosti (po relacijskim i operacijskim znacima iz $\mathcal{F}$). Do svih normalnih modela skupa $\mathcal{F}$ može se ovako doći:

Uoči se skup $\mathcal{F} \cup \mathcal{A}x_=$ i za taj se skup obrazuju modeli $\mathcal{M}$ u kojima je $=$ uopšte neka relacija $\sim$, ne nužno jednakost. Tada su strukture $\mathcal{M}/\sim$ normalni modeli za $\mathcal{F}$.

♦ U slučaju kada je $\mathcal{F}$ skup izvesnih algebarskih zakona, odnosno formula oblika

$$t_1 = t_2 \qquad (t_1,\ t_2 \text{ su termi})$$

do svih normalnih modela može se doći obrazovanjem tzv. *slobodnih algebri* i njihovih količničkih struktura (videti zadatak 63.).

♦ Neka je $\mathcal{C}$ skup nekih znakova konstanti, $\mathcal{O}$ skup funkcijskih (operacijskih) znakova (dužina $\geqslant 1$) i $\mathcal{V}$ prebrojiv skup promenljivih.[1] Sa *Term* ($\mathcal{C}$, $\mathcal{V}$; $\mathcal{O}$), odnosno kraće sa T, označimo skup svih odgovarajućih terma. U tzv. *jednakosnom ra-*

[1] U daljem kao promenljive obično koristimo

$$x,\ y,\ z,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ ...,\ x_n,\ y_n,\ z_n,\ ...$$

a kao znakove konstanata a, b, c, d, ..., a_1, b_1, ...
Inače za skupove $\mathcal{C}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{O}$ pretpostavljamo da su medjusobno disjunktni, kao i da znak = nije član nijednog od njih.

čunu (jednakosnoj logici) $\mathcal{J}$ kao formule se smatraju reči oblika $t = s$, gde su $t, s \in$ *Term* ($\mathcal{C}$, $\mathcal{V}$; $\mathcal{O}$). Formule oblika $t = t$ uzimaju se za aksiome, a kao pravila (u skladu sa aksiomama jednakosti) uzimaju se:

$$\text{(S)}\ \frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}, \quad \text{(T)}\ \frac{t_1 = t_2,\ t_2 = t_3}{t_1 = t_3}, \quad (\mathrm{S_f})\ \frac{t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n}{f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n)}$$

gde je $f \in \mathcal{O}$ ma koji funkcijski znak (dužine n).

♦ Izvesna formula $t = s$ jednakosnog računa $\mathcal{J}$ je njegova *teorema* (oznaka $\vdash_{\mathcal{J}} t{=}s$) akko, po definiciji, za tu formulu u računu $\mathcal{J}$ postoji dokaz, odnosno konačan niz formula

$$(\star) \qquad t_1 = s_1, \quad t_2 = s_2, \ldots, t_k = s_k$$

gde je $t_k = s_k$ upravo formula $t = s$ i čiji svaki član $t_i = s_i$ zadovoljava uslov:

(i) to je formula oblika $t = t$, tj. aksioma, ili

(ii) postoje neki prethodni članovi tog niza tako da je taj član njihova posledica po jednom od pravila (S), (T), ($\mathrm{S_f}$).

♦ Važi *stav potpunosti* (I oblik):

$$\vdash_{\mathcal{J}} t = s \quad \text{akko} \quad \models_{\mathcal{J}} t = s$$

gde znak $\models_{\mathcal{J}}$ odgovara rečima: jednakosno valjana.

♦ Neka je $\mathcal{F}$ skup izvesnih formula jednakosne logike i $t = s$ neka formula iste logike. Uvodimo pojmove:

(i) $\mathcal{F} \models_{\mathcal{J}} t = s$ ($t = s$ je *semantička posledica* skupa $\mathcal{F}$)

akko formula $t = s$ je tačna u svim normalnim modelima skupa $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{J}} t = s$ ($t = s$ je *sintaktička posledica* skupa $\mathcal{F}$)

akko postoji dokaz formule $t = s$ na osnovu hipoteza $\mathcal{F}$, tj. konačan skup formula

$$t_1 = s_1, \ldots, t_k = s_k \qquad (t_k = s_k \text{ je } t = s)$$

čiji svaki član $t_i = s_i$ zadovoljava uslov:

– to je formula oblika $t = t$, tj. aksioma, ili

– to je član skupa $\mathcal{F}$ ili formula nastala iz nekog člana skupa $\mathcal{F}$ zamenjivanjem[1] njegove promenljive na neki način termima, odnosno članovima skupa *Term* ($\mathcal{C}$, $\mathcal{V}$; $\mathcal{O}$), ili

– postoje neki prethodni članovi toga niza tako da je član $t_i = s_i$ njihova posledica po jednom od pravila (S), (T), ($\mathrm{S_f}$).

[1] Kaže se da je u takvom slučaju korišćeno pravilo s u b s t i t u c i j e (z a m e n e) promenljivih termima. Recimo, ako je $x \star y = y \star x$, jedan član skupa $\mathcal{F}$, tada u nekom dokazu iz hipoteza $\mathcal{F}$ možemo koristiti svaku od formula $(x \star y) \star z = z \star (x \star y)$, $x \star z = z \star x$, uopšte $t_1 \star t_2 = t_2 \star t_1$, gde su t_1, t_2 ma koji termi – članovi skupa Term ($\mathcal{C}$, $\mathcal{V}$; $\mathcal{O}$).

♦ Važi *stav potpunosti* (II oblik)

$$\mathcal{G} \models_{\mathcal{I}} t = s \quad \text{akko} \quad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{I}} t = s$$

ZADACI

1. Dokazati da su formule

(1) $x = x$, (2) $x = y \Rightarrow y = x$, (3) $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$,
(4) $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$
(5) $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow (\alpha(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \alpha(y_1, \ldots, y_n))$

jednakosno valjane.

Rešenje. Podsetimo, da za formulu oblika $x = y$ kažemo da ima vrednost $\top$ pri izvesnoj jednakosnoj interpretaciji i izvesnoj vrednosti promenljivih x, y, ukoliko ona prelazi u tačnu jednakost o elementima domena – dakle u jednakost oblika $a = a$. Drugim rečima, $x = y$ ima vrednost $\top$, ukoliko promenljive x, y imaju istu vrednost a.

Očigledno, $x=x$ je tačna formula pri svakoj jednakosnoj interpretaciji. Dalje, iz pretpostavke da $x = y$ ima vrednost $\top$ (pri nekoj jednakosnoj interpretaciji), zaključujemo da promenljive x, y imaju istu vrednost. Stoga, i $y = x$ ima vrednost $\top$. Slično se rasudjuje i u slučaju formule (3). Pretpostavimo sada da su (pri izvesnoj jednakosnoj interpretaciji i izvesnoj vrednosti promenljivih) tačne formule $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. To onda znači da, ako $x_1, \ldots, x_n$ imaju redom vrednosti $a_1, \ldots, a_n$, iste vrednosti po redu imaju i promenljive $y_1, \ldots, y_n$. Stoga zaključak implikacije (4) postaje:

$$\bar{f}(a_1, \ldots, a_n) = \bar{f}(a_1, \ldots, a_n) \quad (\bar{f} \text{ je interpretacija za } f)$$

Kako je $\bar{f}$ operacija dužine n, to se primenom te operacije na n–torku $a_1, \ldots, a_n$ dobija tačno jedan element domena (označimo ga sa a), pa prethodna formula prelazi u tačnu jednakost

$$a = a$$

Znači, (4) je jednakosno valjana formula. Iz sličnog razloga je jednakosno valjana i formula (5).

2. Dokazati jednakosnu valjanost formula

$$t = t, \quad t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1, \quad t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3$$
$$t_1 = t'_1 \wedge \ldots \wedge t_n = t'_n \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n),$$
$$t_1 = t'_1 \wedge \ldots \wedge t_n = t'_n \Rightarrow (\alpha(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow \alpha(t'_1, \ldots, t'_n))$$

Pri tome su $t, t_1, \ldots,$ proizvoljni termi.

Uputstvo. Pri ma kojoj jednakosnoj interpretaciji i ma kojoj vrednosti promenljivih svakom termu odgovara tačno jedan element domena – vrednost terma, pa je rasudjivanje slično onom u prethodnom zadatku.

3. Dokazati da je jednakosno valjana formula

(1) $a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \wedge c_1 = c_2 \Rightarrow (a_1 \star b_1) \star c_1 = (a_2 \star b_2) \star c_2$

Rešenje. Neka važe jednakosti $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ (pri izvesnoj jednakosnoj interpretaciji). Tada važi nova jednakost

$$a_1 \star b_1 = a_2 \star b_2,$$

jer je dokazano da su aksiome jednakosti jednakosno valjane (ovde se radi o aksiomi $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow x_1 \star x_2 = y_1 \star y_2$). Dalje, iz tačnih jednakosti

$$a_1 \star b_1 = a_2 \star b_2, \quad c_1 = c_2$$

sledi tačna jednakost

$$(a_1 \star b_1) \star c_1 = (a_2 \star b_2) \star c_2$$

(U stvari, opet je primenjena činjenica da je saglasnost jednakosti sa $\star$ jednakosno valjana formula). Kraj dokaza.

Primedba. Primećuje se da smo u dokazivanju jednakosne valjanosti formule (1) kao osnovnu polugu koristili činjenicu da su aksiome jednakosti jednakosno valjane formule. Uopšte, tako se može dokazivati jednakosna valjanost.

4. Dokazati: $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2 \models_{\mathcal{J}} (a_1 \star b_1) \star c_1 = (a_2 \star b_2) \star c_2$

Napomena. Taj zadatak je, u stvari, ekvivalentan sa prethodnim.

5. Dokazati: $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 = c_2 \vdash_{\mathcal{J}} (a_1 \star b_1) \star c_1 = (a_2 \star b_2) \star c_2$.

Rešenje. Jedan dokaz izgleda

(1)	$a_1 = a_2$	(Pretpostavka)
(2)	$b_1 = b_2$	(Pretpostavka)
(3)	$a_1 \star b_1 = a_2 \star b_2$	(Iz (1) i (2) primenom pravila ($S_\star$))
(4)	$c_1 = c_2$	(Pretpostavka)
(5)	$(a_1 \star b_1) \star c_1 = (a_2 \star b_2) \star c_2$	(Iz (1) i (2) pomoću ($S_\star$))

Napomena. U tački VI *Jednakosni dokazi. Algebra brojeva* već smo imali više zadataka takve vrste (recimo zadaci 32 do 37).

6. Dokazati:

$a_1 = a_2,\ a_1 = a_3,\ a_4 = a_2 \models_{\mathcal{J}} a_4 = a_3;\qquad a_1 = a_2,\ a_1 = a_3,\ a_4 = a_2 \vdash_{\mathcal{J}} a_4 = a_3;$

$a_1 = a_2,\ b_1 = b_2 \models_{\mathcal{J}} (a_1 \star b_1) \star (b_1 \star b_1) = (a_2 \star b_2) \star (b_2 \star b_2);$

$a_1 = a_2,\ b_1 = b_2 \vdash_{\mathcal{J}} (a_1 \star b_1) \star (b_1 \star b_1) = (a_2 \star b_2) \star (b_2 \star b_2);$

$a \star a = a,\ b \star b = b,\ a \star b = b \star a \vdash_{\mathcal{J}} (b \star b) \star ((a \star a) \star a) = a \star b;$

$(a \star b) \star a = a \star b,\ a \star b = b \star a \models_{\mathcal{J}} ((b \star a) \star a) \star a = a \star b.$

7. Dokazati da nije

(1) $a \star a = b,\ a \star b = a,\ b \star a = a,\ b \star b = b \vdash_{\mathcal{J}} (a \star b) \star a = b \star a$

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da važi (1). Tada, ako je $\mathcal{M}$ neki model formula

(2) $a \star a = b,\ a \star b = a,\ b \star a = a,\ b \star b = b,$

onda to mora biti i model za

(3) $(a \star b) \star a = b \star a$

Medjutim, jedan model formula (2) je skup $\{0,1\}$ sa operacijom $\bigstar$ datom tablicom:

$\bigstar$	0	1
0	1	0
1	0	1

Pri tome se znaci konstanata a, b tumačė kao 0, 1 a znak $\star$ kao operacija $\bigstar$. Formula (3) je pri tom tumačenju netačna, jer termi $(a \star b) \star a$, $b \star a$ imaju vrednosti 1, odnosno 0.

8. Dokazati da ne važi:

(i) $a \star a = a,\ a \star b = b,\ b \star a = b,\ b \star b = a \vdash_{\mathcal{J}} (b \star a) \star b = a \star b$

(ii) $a \star (a \star a) = a,\ (a \star a) \star a = a,\ (a \star a) \star (a \star a) = a \star a \vdash_{\mathcal{J}} a \star a = a'$

(iii) $a \star (b \star c) = (c \star a) \star b,\ (a \star b) \star c = b \star (c \star a) \vdash_{\mathcal{J}} (a \star b) \star c = c \star (a \star b)$

9. Dokazati

$$x \star y = y \star x,\ x \star (y \star z) = (x \star y) \star z \vdash_{\mathcal{J}} x \star (y \star z) = (z \star x) \star y$$

Dokaz.

(1) $x \star (y \star z) = (y \star z) \star x$ (Koristeći formulu $x \star y = y \star x$ uz zamenu $x \to x,\ y \to y \star z$)

(2) $y \star (z \star x) = (y \star z) \star x$ (Koristeći formulu $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ uz zamenu $x \to y,\ y \to z,\ z \to x$)

(3) $(y \star z) \star x = y \star (z \star x)$ (Iz (2) primenom pravila (S))

(4) $y \star (z \star x) = (z \star x) \star y$ (Koristeći formulu $t_1 \star t_2 = t_2 \star t_1$ gde t_1 je y, t_2 je $z \star x$)

(5) $x \star (y \star z) = (y \star z) \star x$ (Iz (1), (2) primenom (T))

(6) $(y \star z) \star x = (z \star x) \star y$ (Iz (3), (4) primenom (T))

(7) $x \star (y \star z) = (z \star x) \star y$ (Iz (5), (6) primenom (T))

Medjutim, taj se dokaz obično ovako kraće zapisuje

$x \star (y \star z) = (y \star z) \star x$ (Primena zakona $x \star y = y \star x$)

$\quad = y \star (z \star x)$ (Primena zakona $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$)

$\quad = (z \star x) \star y$ (Primena zakona $x \star y = y \star x$)

ne navodeći sva svojstva jednakosti koja se, inače, koriste.

10. Dokazati:

a) $x \star y = y \star x \vdash_{\mathcal{G}} (x \star y) \star (z \star u) = (u \star z) \star (y \star x)$,

b) $x \star e = x,\ e \star x = x,\ x \star (y \star z) = y \star (z \star x) \vdash_{\mathcal{G}} x \star y = y \star x$,

c) $x \star e = x,\ e \star x = x,\ (x \star y) \star (z \star u) = (x \star z) \star (y \star u) \vdash_{\mathcal{G}} x \star y = y \star x$,

d) $x \star (y \star z) = (x \star y) \star (x \star z),\ (x \star y) \star z = (x \star z) \star (y \star z)$

$$\vdash_{\mathcal{G}} (x \star y) \star (z \star u) = ((x \star z) \star (y \star z)) \star ((x \star u) \star (y \star u)),$$

e) $x \star x = x,\ x \star y = y \star x,\ (x \star y) \star z = x \star (y \star z) \vdash_{\mathcal{G}} (x \star x) \star ((y \star x) \star y) = x \star y$

11. Dokazati da iz aksioma grupe:

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z),\quad x \star e = x,\quad e \star x = x,\quad x \star x^{-1} = e,\quad x^{-1} \star x = e$$

kao sintaktičke posledice proizlaze jednakosti

$$(x^{-1})^{-1} = x,\quad (x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$$

Uputstvo. Dokaz prve jednakosti izgleda

$$(x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} \star e = (x^{-1})^{-1} \star (x^{-1} \star x) = ((x^{-1})^{-1} \star x^{-1}) \star x = e \star x = x$$

12. Produžetak prethodnog zadatka. Dokazati da ne važi:

Aksiome grupe $\vdash_{\mathcal{G}} x \star y = y \star x$

Primedba. Drukčije rečeno, postoje grupe koje nisu komutativne.

13. Dokazati:

$$(c \cdot a) \cdot b = (b \cdot a) \cdot c,\ c \cdot (b \cdot a) = (b \cdot c) \cdot a,\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \vdash_{\mathcal{G}} (c \cdot c) \cdot ((a \cdot b) \cdot (a \cdot b))$$
$$= b \cdot (b \cdot (a \cdot (c \cdot (a \cdot c))))$$

14. Neka je $\mathcal{G}$ skup formula: $a \star a = b,\quad a \star b = a,\quad b \star a = a,\quad b \star b = b.$
Dokazati: da ne važi $\mathcal{G} \vdash_{\mathcal{G}} a = b$.

Rešenje. Ako bi jednakost $a = b$ proizlazila iz skupa $\mathcal{G}$, onda bi ona morala biti tačna na svakom modelu za $\mathcal{G}$.

Medjutim, grupoid $(\{0,1\}, \bigstar)$ gde je $\bigstar$ operacija:

$\bigstar$	0	1
0	1	0
1	0	1

jeste model skupa $\mathcal{G}$, ali u njemu ne važi $0 = 1$.
Pri tome se a, b interpretiraju kao $0, 1$ a operacijski znak $\star$ kao operacija $\bigstar$.

15. Dokazati:

Važi $x = y \vdash_{\mathcal{G}} z = u$, ali ne važi $a = b \vdash_{\mathcal{G}} c = d$

Rešenje. Iz jednakosti $x = y$ (x, y su promenljive!) obavljanjem zamena $x \to z$, $y \to u$

dobija se jednakost $z = u$. Medjutim, ako je pretpostavka jednakost $a = b$ (a, b su znaci konstanata!), onda zamene prethodne vrste nisu dozvoljene. Znači, rasudjivanje upotrebljeno maločas, u slučaju promenljivih, ne može se preneti i na slučaj konstanti. Radi dokaza da ne važi $a = b \vdash c = d$ dosta je, recimo, a, b, c, d redom tumačiti kao $1, 1, 1, 2$. Jednakost $a = b$ važi, a jednakost $c = d$ ne važi, čime se dokaz završava.

16. Dokazati jednakosnu valjanost formule

$$x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow t(x_1, \ldots, x_n) = t(y_1, \ldots, y_n)$$

Uputstvo. Koristeći činjenicu da su aksiome jednakosti jednakosno valjane, dokaz izvesti indukcijom po broju operacijskih znakova u termu t.

17. Dokazati *zakon jednakosne zamene za izraze*:

(1) $$t = t' \Rightarrow I(t) = I(t')$$

Pri tome je I proizvoljan izraz, t njegov podizraz — što je istaknuto oznakom $I(t)$, a $I(t')$ je dobijen iz I jednom zamenom t sa t'.

Rešenje. Dokaz tačnosti formule (1) pri proizvoljnoj jednakosnoj interpretaciji izvodimo indukcijom po $o(I)$ — broju onih operacijskih znakova izraza I koji ne učestvuju u podizrazu t. Ukoliko je taj broj 0, I je upravo t, pa formula (1) ima oblik

$$t = t' \Rightarrow t = t'$$

što je slučaj tautologije $p \Rightarrow p$.

Neka je sada I proizvoljan izraz za koji $o(I) = n$ (gde $n > 0$), i pretpostavimo da je tvrdjenje zadatka tačno za sve izraze za koje je $o(I) < n$. Pored toga pretpostavimo da je (pri uočenoj interpretaciji i datoj vrednosti promenljivih) tačna jednakost $t = t'$. Uočeni izraz I se prikazuje pomoću svojih podizraza i jednog operacijskog znaka. Recimo, neka je reč o podizrazima I_1, I_2 i znaku $\star$ (dužine dva). Dakle:

$$I = (I_1 \star I_2)$$

Kako je t podizraz od I, to je on podizraz ili od I_1 ili od I_2. Razmotrimo prvi slučaj, tj. $I_1 = I_1(t)$. Pošto $o(I_1) < n$, to na osnovu indukcijske hipoteze sledi

(2) $$I_1(t) = I_1(t') \quad \text{(Jer, po pretpostavci, } t = t'\text{)}.$$

Odatle, neposredno zaključujemo

(3) $$(I_1(t) \star I_2) = (I_1(t') \star I_2) \quad \text{(Uz uslov } t = t'\text{)}$$

Slično se razmatra slučaj $I_2 = I_2(t)$, kao i slučaj

$$I = f(I_1, \ldots, I_k),$$

gde je f neki operacijski znak dužine k.

18. Dokazati ovaj opšti zakon jednakosnih zamena za izraze

$$t_1 = t'_1 \wedge \ldots \wedge t_n = t'_n \Rightarrow I(t_1, \ldots, t_n) = I(t'_1, \ldots, t'_n)$$

(I je proizvoljan izraz, $t_1, \ldots, t_n$ njegovi podizrazi, dok je $I(t'_1, \ldots, t'_n)$ dobijen iz I zamenom $t_1, \ldots, t_n$ po redu izrazima $t'_1, \ldots, t'_n$)

19. Dokazati da su jednakosno valjane formule

$$x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow (\alpha(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \alpha(y_1, \ldots, y_n))$$

$$t_1 = t'_1 \wedge \ldots \wedge t_n = t'_n \Rightarrow (\alpha(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow \alpha(t'_1, \ldots, t'_n))$$

(α je proizvoljan relacijski znak dužine n, a t_1, t_2, ... su proizvoljni izrazi).

20. Formula

(☆) $\quad x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow (\alpha(x_1, x_2) \wedge \neg\beta(x_1) \Leftrightarrow \alpha(y_1, y_2) \wedge \neg\beta(y_1))$

je jednakosno valjana. Dokazati.

Rešenje. Uočimo proizvoljnu jednakosnu interpretaciju I. Prema prethodnom zadatku istinite su formule

(1) $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow (\alpha(x_1, x_2) \Leftrightarrow \alpha(y_1, y_2))$, (2) $x_1 = y_1 \Rightarrow (\beta(x_1) \Leftrightarrow \beta(y_1))$

Korišćenjem tautologije $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$ iz (2) sledi

(3) $x_1 = y_1 \Rightarrow (\neg\beta(x_1) \Leftrightarrow \neg\beta(y_1))$. odnosno

(4) $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Rightarrow (\neg\beta(x_1) \Leftrightarrow \neg\beta(y_1))$.

Najzad, iz (1) i (4) sledi formula (☆).

21. Dokazati istinitost (pri jednakosnoj interpretaciji I) formule:

(☆) $\quad x = y \Rightarrow ((qz)\alpha(x,z) \Leftrightarrow (qz)\alpha(y,z))$ $\quad$ (q je kvantor)

Rešenje. Pri uočenoj interpretaciji tačna je formula

(1) $\quad x = y \Rightarrow (\alpha(x,z) \Leftrightarrow \alpha(y,z))$ $\quad$ (Jer $x = y \Leftrightarrow x = y \wedge z = z$)

odakle, pošto z ne učestvuje u formuli $x = y$, sledi

(2) $\quad x = y \Rightarrow (\forall z)(\alpha(x,z) \Leftrightarrow \alpha(y,z))$

Dalje, tačna je formula

(3) $(\forall z)(\alpha(x,z) \Leftrightarrow \alpha(y,z)) \Rightarrow ((qz)\alpha(x,z) \Leftrightarrow (qz)\alpha(y,z))$,

jer je ona valjana. Najzad, iz (2) i (3) proizilazi (☆).

22. Pri proizvoljnoj jednakosnoj interpretaciji istinite su formule:

$$x = f(x) \Rightarrow ((\exists y)\alpha(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)\alpha(f(x), y)),$$

$$x = g(x_1, x_2) \Rightarrow ((\forall y)\alpha(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)\alpha(g(x_1, x_2), y))$$

Dokazati.

23. Neka je $A(x)$ formula sa slobodnom promenljivom x, i neka y ne napada x. Dokazati da je tada jednakosno valjana formula:

$$x = y \Rightarrow (A(x) \Leftrightarrow A(y))$$

Uputstvo. Dokaz se izvodi indukcijom po broju logičkih znakova u formuli $A(x)$. Pri tome se u slučaju kada je ta formula oblika $(qz)B(x,z)$ koristi ova činjenica

Promenljiva z je različita od x (jer je x slobodna) i različita od y (jer y ne napada x),

na osnovu koje iz pretpostavke

$$x = y \Rightarrow (B(x,z) \Longleftrightarrow B(y, z))$$

proizlazi

$$x = y \Rightarrow (\forall z)(B(x, z) \Longleftrightarrow B(y, z))$$

Dalje se postupa kao u zadatku 21.

24. Ako term t ne napada x u formuli $A(x)$, onda je formula

$$x = t \Rightarrow (A(x) \Longleftrightarrow A(t))$$

jednakosno valjana. Dokazati.

25. Neka je term t slobodan u formuli A (tj. sve njegove promenljive su slobodne), što, kao i obično, ističemo oznakom $A(t)$, i neka t' ne napada nijednu promenljivu terma t. Tada je jednakosno valjana formula:

(1) $$t = t' \Rightarrow (A(t) \Longleftrightarrow A(t'))$$

Dokazati.

26. Dokazati da su date formule jednakosno valjane

$$\alpha(x) \Longleftrightarrow (\exists y)(y{=}x \wedge \alpha(y)), \qquad \alpha(x) \Longleftrightarrow (\forall y)(y{=}x \Rightarrow \alpha(y))$$

Uputstvo. Neka je I jednakosna interpretacija. Za prvu formulu dosta je dokazati istinitost dveju implikacija

$$\alpha(x) \Rightarrow (\exists y)(y{=}x \wedge \alpha(y)), \qquad (\exists y)(y = x \wedge \alpha(y)) \Rightarrow \alpha(x),$$

odnosno ovih sa njima ekvivalentnih formula

$$(\exists y)(\alpha(x) \Rightarrow y{=}x \wedge \alpha(y)), \qquad (\forall y)(y{=}x \wedge \alpha(y) \Rightarrow \alpha(x))$$

Postojeći y za prvu formulu je upravo x, dok je istinitost druge sledi na osnovu zadatka 1.

27. Dokazati jednakosnu valjanost formula

$$A(x) \Longleftrightarrow (\exists y)(y = x \wedge A(y)), \quad A(x) \Longleftrightarrow (\forall y)(y = x \Rightarrow A(y)),$$

gde je y nova promenljiva za formulu $A(x)$.

28. Dokazati da je svaka od datih formula jednakosno valjana

a) $(x \star y) \star x = z \Longleftrightarrow (\exists u)(x \star y = u \wedge u \star x = z),$

b) $(x \star y) \star x = z \Longleftrightarrow (\forall u)(x \star y = u \Rightarrow u \star x = z).$

c) $(x \star x) \star x = x \star x \Longleftrightarrow (\forall u,v)(x \star x{=}u \wedge u \star x{=}v \Rightarrow x \star x{=}v),$

d) $(x \star y) \star z{=}x \star (y \star z) \Longleftrightarrow (\exists u,v,w)(x \star y{=}u \wedge u \star z{=}v \wedge y \star z{=}w \wedge x \star w{=}v)$

Napomena. Prema prethodnom zadatku formula oblika $t_1 = t_2 - t_1$, t_2 su proizvoljni termi, ekvivalentna je sa formulom u čijoj izgradnji učestvuju jedino elementarne formule oblika $u \star v = w$, (u, v, w su promenljive), ili, u opštem slučaju, formule oblika $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ ($x_1, \ldots, x_n$, y su promenljive).

29. Da li se rečenica

Svaki $f(x)$ ima svojstvo α

može zapisati jezikom predikatskog računa I reda?

Rešenje. Ta rečenica ima ovakav smisao

Za svaki y, ako je y oblika $f(x)$, onda y ima svojstvo α.

Ako se setimo da prevod rečenice „y je oblika $f(x)$" glasi: $(\exists x)\, y = f(x)$, dolazimo do ove formule

$$(\forall y)((\exists x)\, y = f(x) \wedge \alpha(y))$$

za koju koristimo i oznaku $(\forall f(x))\, \alpha(f(x))$.

Slično, rečenici

Postoji $f(x)$ koji ima svojstvo α

odgovara prevod

$$(\exists y)((\exists x)\, y = f(x) \wedge \alpha(y))$$

koji označavamo kraće $(\exists f(x))\, \alpha(f(x))$.

30. Prevesti rečenice

Svaki $f(x,y)$ ima svojstvo α, *Neki $f(x, y)$ ima svojstvo α*

31. Dokazati da su ekvivalencije

$$(\forall f(x))\alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\forall x)\alpha(f(x)), \qquad (\exists f(x))\alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\exists x)\alpha(f(x))$$

jednakosno valjane.

32. Dokazati da su jednakosno valjane formule:

$$(\forall f(x,y))\alpha(f(x,y)) \Longleftrightarrow (\forall x, y)\alpha(f(x, y)),$$

$$(\exists f(x,y))\alpha(f(x,y)) \Longleftrightarrow (\exists x,y)\alpha(f(x,y))$$

33. Dokazati istinitost formula

$$(\forall y)(\exists x) y=f(x) \Rightarrow [(\forall f(x))\alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\forall x)\alpha(x)]$$

$$(\forall y)(\exists x) y=f(x) \Rightarrow [(\exists f(x))\alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\exists x)\alpha(x)]$$

pri proizvoljnoj jednakosnoj interpretaciji.

Uputstvo. Obe formule su uslovne ekvivalencije, pa se dokaz može podeliti u dva dela. Tako, u vezi sa prvom dokazati

$$(\forall y)(\exists x)\, y=f(x) \Rightarrow [(\forall f(x))\alpha(f(x)) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x)]$$

$$(\forall y)(\exists x)\, y=f(x) \Rightarrow [(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall f(x))\alpha(f(x))]$$

Primetimo da je implikacija

$$(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall f(x))\, \alpha(f(x))$$

tačna pri svakoj normalnoj interpretaciji i bez uslova $(\forall x)(\exists y)\, y=f(x)$. To sledi iz valjane formule $(\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(t)$, gde term t „ne napada" promenljivu x u formuli $A(x)$.

34. Dokazati da su uslovne ekvivalencije

$(\forall y)(\exists x_1,x_2)\, y=f(x_1, x_2) \Rightarrow [(\forall f(x_1, x_2))\, \alpha(f(x_1, x_2)) \Longleftrightarrow (\forall x)\, \alpha(x)]$

$(\forall y)(\exists x_1,x_2)\, y=f(x_1, x_2) \Rightarrow [(\exists f(x_1, x_2))\, \alpha(f(x_1, x_2)) \Longleftrightarrow (\exists x)\, \alpha(x)]$

jednakosno valjane.

35. Kao uopštenje formula zadatka 26 dokazati ekvivalencije:

$\alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\ \ y\in B)(y=f(x) \wedge \alpha(y))$, $\quad \alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\forall y\in B)(y=f(x) \Rightarrow \alpha(y))$

Tu je $f: A \to B$ preslikavanje skupa A u skup B a α relacija (dužine 1) skupa B.

36. Neka je $f: A \to B$ a α relacija (dužine 1) skupa B. Slično kao ranije uvodimo oznake

$(\exists f(x)\in B)\, \alpha(f(x))$ je zamena za $(\exists y\in B)((\exists x\in A))\, y=f(x) \wedge \alpha(y))$

$(\forall f(x)\in B)\alpha(f(x))$ je zamena za $(\forall y\in B)((\exists x\in A))y=f(x) \Rightarrow \alpha(y))$

Dokazati ekvivalencije:

$(\exists f(x)\in B)\, \alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\exists x\in A)\, \alpha(f(x))$, $(\forall f(x)\in B)\, \alpha\, (f(x)) \Longleftrightarrow \forall x\in A)\, \alpha(f(x))$

37. U slučaju kada je $f: A \to B$ preslikavanje *na*, tačne su formule (α je relacija dužine 1 skupa B)

$(\exists x\in A)\, \alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\exists y\in B)\, \alpha(y)$, $\quad (\forall x\in A)\alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\forall y\in B)\, \alpha(y)$

Dokazati.

38. Neka su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ strukture na jeziku $L = \{\alpha\}$ gde je α relacijski znak dužine 1 i $f: A \to B$ preslikavanje skupovnog dela strukture $\mathcal{A}$ u skupovni deo strukture $\mathcal{B}$. Ukoliko za svaki element a iz A vredi

$$\mathcal{A} \models \alpha(a) \leftrightarrow \mathcal{B} \models \alpha(f(a)),$$

onda i za svaku formulu $F(x_1, ..., x_n)$ iskazne vrste (tj. u čijoj izgradnji ne učestvuju kvantori) vredi slična ekvivalencija

$\mathcal{A} \models F(a_1, ..., a_n) \longleftrightarrow \mathcal{B} \models F(f(a_1), ..., f(a_n))$ $\quad (a_1, ..., a_n$ ma koji elementi iz $A)$.

Dokazati.

Uputstvo. Dokaz se izvodi indukcijom po broju logičkih veznika (iskaznih!) formule $F(x_1, ..., x_n)$. Recimo, ako je reč o formuli $\alpha(x) \wedge \neg\alpha(y)$, tada, na osnovu pretpostavke, vrede ekvivalencije

(1) $\mathcal{A} \models \alpha(a) \leftrightarrow \mathcal{B} \models \alpha(f(a))$, $\qquad$ (2) $\mathcal{A} \models \alpha(b) \leftrightarrow \mathcal{B} \models \alpha(f(b))$

na osnovu kojih izvodimo:

$\mathcal{A} \models \alpha(a) \wedge \neg\alpha(b) \leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha(a),\ \mathcal{A} \models \neg\alpha(b)$

(Definicija tačnosti konjunkcije)

$\leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha(a)$, nije $\mathcal{B} \models \alpha(b)$

(Definicija tačnosti negacije)

$\leftrightarrow \mathcal{B} \models \alpha(f(a))$, nije $\mathcal{B} \models \alpha(f(b))$

(Iskorišćene su ekvivalencije (1) i (2))

$\leftrightarrow \mathcal{B} \models \alpha(f(a)) \wedge \neg\alpha(f(b))$

(Definicija tačnosti konjunkcije i negacije).

Dakle, izvedena je ekvivalencija

$\mathcal{A} \models \alpha(a) \wedge \neg\alpha(b) \leftrightarrow \mathcal{B} \models \alpha(f(a)) \wedge \neg\alpha(f(b))$ (a, b ma koji članovi skupa A).

39. Neka su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ strukture na istom jeziku L, f preslikavanje skupa A u skup B (A, B su odgovarajući skupovni delovi za $\mathcal{A}$, odnosno $\mathcal{B}$), i neka za svaku relaciju α (dužine n) tih struktura vredi[1]

(1) $\alpha(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \alpha(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \quad (a_1, \ldots, a_n \in A)$

Tada i za svaku formulu $F(x_1, \ldots, x_n)$ iskazne vrste vredi slično

(2) $F(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow F(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \quad (a_1, \ldots, a_n \in A)$

Dokazati.

Primedba. U slučaju kada L sadrži i znak = koji se u obema strukturama tumači kao jednakost, iz zahteva (1) proizlazi zahtev

$$a = b \leftrightarrow f(a) = f(b) \quad (a, b \in A)$$

što, u stvari, znači da je u takvom slučaju f *jedan–jedan* preslikavanje.

40. Neka je $f\colon A \to B$ preslikavanje *na*, gde su A, B skupovni delovi struktura $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ na jeziku $L = \{\alpha\}$, α je relacijski znak dužine 1. Iz pretpostavke, da za ma koji element a iz A vredi ekvivalencija,

(☆) $\alpha(a) \leftrightarrow \alpha(f(a))$

dokazati da vredi:

(i) $(\forall x \in A)\, \alpha(x) \leftrightarrow (\forall y \in B)\, \alpha(y)$, (ii) $(\exists x \in A)\alpha(x) \leftrightarrow (\exists y \in B)\alpha(y)$

Rešenje. Dokaz tvrdjenja (i) glasi

(1) $\alpha(x) \leftrightarrow \alpha(f(x))$, gde je x proizvoljan element iz A (Pretpostavka)

(2) $(\forall x \in A)\, \alpha(x) \leftrightarrow (\forall x \in A)\, \alpha(f(x))$ (Saglasnost $\leftrightarrow$ sa univerzalnim kvantorom)

---

[1] Umesto $\mathcal{A} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \mathcal{B} \models \alpha(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ pišemo kraće: $\alpha(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \alpha(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

(3) $(\forall x \in A)\, \alpha(x) \leftrightarrow (\forall y \in B)\, \alpha(y)$ (Jer, zbog pretpostavke da je f preslikavanje *na*, vredi ekvivalencija $(\forall x \in A)\, \alpha(f(x)) \Longleftrightarrow (\forall y \in B)\, \alpha(y)$ – videti zadatak 37).

Slično se dokazuje i ekvivalencija (ii).

41. Produžetak prethodnog zadatka. Neka je F proizvoljna z a t v o r e n a formula) na jeziku L. Dokazati da iz uslova (☆) proizilazi ekvivalencija

$$\mathcal{A} \models F \leftrightarrow \mathcal{B} \models F,$$

odnosno da su, i tako se kaže, strukture $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *elementarno ekvivalentne.*

42. Neka su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ strukture na jeziku L i neka za svaku njihovu relaciju α (dužine n) vredi ekvivalencija

(☆) $$\alpha(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \alpha(f(a_1), ..., f(a_n)) \qquad (a_1, ..., a_n \in A)$$

Pretpostavimo još da je $f\colon A \to B$ preslikavanje *na*. Tada su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *elementarno ekvivalentne,* tj. za svaku zatvorenu formulu F (na jeziku L) vredi

$$\mathcal{A} \models F \leftrightarrow \mathcal{B} \models F$$

Dokazati.

43. Produžetak prethodnog zadatka. Dokazati da, uz uslov prethodnog zadatka, svaka predikatska formula $F(x_1, ..., x_m)$ – $x_1, ..., x_m$ su slobodne promenljive – zadovoljava ekvivalenciju

$$F(a_1, ..., a_m) \leftrightarrow F(f(a_1), ..., f(a_m)) \qquad (a_1, ..., a_m \in A).$$

Primedba. Ukoliko jezik L sadrži i znak = koji se u obema strukturama tumači kao jednakost, zahtev da je f preslikavanje *na* i uslov (☆) povlače da je f uzajamno jednoznačno preslikavanje koje „čuva'' elementarne formule. U takvom slučaju se kaže i da su strukture $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *izomorfne* – f je jedan *izomorfizam.* Tada se tvrdjenje zadatka 42 iskazuje kratko:

Izomorfne strukture su elementarno ekvivalentne.

44. Neka je $\mathcal{M}$ neka struktura i $\sim$ njena kongruencija. Dokazati ispravnost definicija operacija i relacija sa klasama izloženih u uvodnom tekstu.

Uputstvo. Uočimo operaciju ☆ i relaciju α (obe, recimo, dužine 2). Operacija $\widetilde{☆}$ i relacija $\widetilde{\alpha}$ uvode se na ovaj način

(i) $C_a \,\widetilde{☆}\, C_b \overset{\text{def}}{=} C_{a☆b}$, (ii) $C_a \,\widetilde{\alpha}\, C_b \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} a\, \alpha\, b.$

Prema skupovnim definicijama operacije i relacije (setimo se: to su preslikavanja skupa S^2 u skup S, odnosno u $\{\top, \bot\}$ – u ovom slučaju S je $A/\sim$), dosta je dokazati da svakim dvema klasama C_a, C_b odgovara tačno jedna treća klasa – rezultat primene operacije $\widetilde{☆}$, odnosno tačno jedan element $\top$, $\bot$ – u slučaju dokaza ispravnosti definicije (ii). Tako, definicija (i) je ispravna, jer:

(1) $C_a = C_c, \quad C_b = C_d$ (Pretpostavka)

(2) $a \sim c, \quad b \sim d$ (Jer vredi: $x \sim y \Longleftrightarrow C_x = C_y$)

(3) $a \star b \sim c \star d$ (Pošto je $\sim$ saglasna sa $\star$)

(4) $C_{a \star b} = C_{c \star d}$

odnosno, jednakim dvojkama (C_a, C_b), (C_c, C_d) odgovaraju jednake klase $C_{a\star b}$, $C_{c\star d}$, koje su, prema definiciji (i) uzete kao rezultat primene operacije $\tilde{\star}$ redom na uočene dvojke.

Slično, zbog saglasnosti relacije $\sim$ sa α, iz pretpostavki $C_a = C_c$, $C_b = C_d$ sledi: $a \,\alpha\, b \Longleftrightarrow c \,\alpha\, d$, pa je i definicija (ii) ispravna.

Primedba. Kako vredi ekvivalencija

$$a \sim b \Longleftrightarrow C_a = C_b,$$

to je relacija sa klasama koja odgovara relaciji $\sim$, u stvari, jednakost.

45. Data je struktura $\mathcal{A} = (A, \star, \alpha, =)$, gde je $A = \{a, b, c, d, e\}$ a $\star$, α, $=$ su odredjene tablicama

$\star$	a	b	c	d	e
a	b	c	a	e	d
b	c	b	a	e	d
c	c	b	b	e	d
d	d	e	d	a	b
e	e	d	e	b	a

α	a	b	c	d	e
a	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
b	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
c	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
d	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
e	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

$=$	a	b	c	d	e
a	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
b	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
c	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
d	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
e	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$

(Pazite, relacija = očigledno nije jednakost)

i skup formula $\mathcal{G}$:

$(\forall\, x,y)\,(x = y \Rightarrow \alpha(x,y)), \quad (\forall\, x,y)\, x \star y = y \star x, \quad (\exists\, x)(\forall\, y)\, \alpha(x, x \star y)$

Dalje, neka su $Ax =$ aksiome jednakosti koje se odnose na jezik: $=$, $\star$, α, tj. to su formule

$$x = x, \quad x = y \Rightarrow y = x, \qquad x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$$

$$x = y \wedge u = v \Rightarrow x \star u = y \star v, \quad x = y \wedge u = v \Rightarrow (\alpha(x,u) \Rightarrow \alpha(y, v))$$

(i) Dokazati da je struktura $\mathcal{A}$ model skupa $Ax =$, odnosno da je relacija = kongruencija[1] operacije $\star$ i relacije α. Obrazovati odgovarajuću količničku strukturu $\mathcal{A}/=$.

(ii) Dokazati da je $\mathcal{A}$ model skupa $\mathcal{G}$.

(iii) Količnička struktura $\mathcal{A}/=$ je jednakosni model skupa $\mathcal{G}$. Dokazati.

Rešenje. (i) Iz tablice relacije =, koja je očigledno razložena na blokove, neposred-

[1] Svaka relacija ekvivalencije je i sama sebi kongruencija, što se neposredno dokazuje. To dopušta da se (i) može iskazati u obliku: D o k a z a t i d a j e r e l a c i j a = k o n g r u e n c i j a s t r u k t u r e $\mathcal{A}$.

no se zaključuje da je to relacija ekvivalencije čije su klase: $C_a = \{a, b, c\}$, $C_d = \{d, e\}$. Dalje, tablice operacije ☆ i relacije α razložene su takodje na blokove (u odnosu na iste klase), pa je otuda = njihova kongruencija. Tablice odgovarajuće operacije ☆ i relacija α, = sa klasama (zadržali smo iste oznake) izgledaju:

☆	C_a	C_d
C_a	C_a	C_d
C_d	C_d	C_a

α	C_a	C_d
C_a	$\top$	$\top$
C_d	$\perp$	$\top$

=	C_a	C_d
C_a	$\top$	$\perp$
C_d	$\perp$	$\top$

(Relacija = je sada jednakost)

(ii) Da bismo dokazali da je struktura $\mathcal{A}$ model prve formule, dosta je dokazati da implikacija

$$x = y \Rightarrow \alpha(x, y)$$

ima vrednost $\top$ za svaki x, y iz skupa $\{a, b, c, d, e\}$. Medjutim, premisa $x = y$ ima vrednost $\top$ u slučaju kada x, y pripadaju istoj klasi. Prema tablici relacije α, u tom slučaju i zaključak $\alpha(x, y)$ takodje ima vrednost $\top$.

U vezi sa drugom formulom primetimo najpre da operacija ☆ nije komutativna, jer na primer b ☆ c je a, dok c ☆ b je b. Medjutim, a i b pripadaju istoj klasi ekvivalencije. Slično vredi i u opštem slučaju:

Ako x ☆ y je u, y ☆ x je v, onda su u, v iz iste klase,

što, u stvari, znači da je $\mathcal{A}$ model formule $(\forall x, y)\, x ☆ y = y ☆ x$.
Najzad, za postojeći x, u vezi sa trećom formulom, dosta je izabrati neki od elemenata a, b, c, jer, prema tablici relacije α, ti elementi su u relaciji sa svakim elementom skupa A.

(iii) Kako za relacije i operacije sa klasama vredi

$$C_x = C_y \longleftrightarrow x = y, \qquad \alpha(C_x, C_y) \longleftrightarrow \alpha(x, y) \qquad C_x ☆ C_y = C_{x☆y}$$

to, posve slično kao u zadatku 38, zaključujemo

$$(C_x = C_y \Rightarrow \alpha(C_x, C_y)) \longleftrightarrow (x = y \Rightarrow \alpha(x, y))$$

a odatle

$$(\forall x, y \in A)(C_x = C_y \Rightarrow \alpha(C_x, C_y)) \longleftrightarrow (\forall x, y \in A)(x = y \Rightarrow \alpha(x, y))$$

Najzad, koristeći valjanu formulu $(\forall x)\, \rho(f(x)) \Longleftrightarrow (\forall f(x))\, \rho(f(x))$, dobijamo ekvivalenciju

$$(\forall C_x, C_y \in A_{/=})(C_x = C_y \Rightarrow \alpha(C_x, C_y)) \longleftrightarrow (\forall x, y \in A)(x = y \Rightarrow \alpha(x, y))$$

Drugim rečima, dokazana je ekvivalencija

$$\mathcal{A}_{/=} \models (\forall x, y)(x = y \Rightarrow \alpha(x, y)) \longleftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x, y)(x = y \Rightarrow \alpha(x, y))$$

na osnovu koje zaključujemo da $\mathcal{A}_{/=}$ jeste model formule $(\forall x, y)(x = y \Rightarrow \alpha(x, y))$.
Slično se, u vezi sa drugom i trećom formulom, dokazuju ekvivalencije

$$\mathcal{A}/_= \models (\forall x,y) x \star y = y \star x \leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x,y) x \star y = y \star x,$$

$$\mathcal{A}/_= \models (\exists x)(\forall y)\, \alpha(x, x \star y) \leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\forall y)\, \alpha(x, x \star y)$$

na osnovu kojih sledi zaključak da $\mathcal{A}/_=$ jeste model i tih dveju formula. Primetimo još da je model $\mathcal{A}/_=$ jednakosni, budući da je relacija = u tom slučaju jednakost.

46. Neka je $\mathcal{F}$ skup izvesnih formula na jeziku L koji sadrži i znak =, i $Ax_=$ neka su aksiome jednakosti koje se odnose na taj jezik. Dokazati:

Struktura $\mathcal{A}$ na jeziku L je model skupova $\mathcal{F}$, $Ax_=$ akko količnička struktura $\mathcal{A}/_=$ je jednakosni model skupa $\mathcal{F}$.

47. Neka je $\mathcal{G}$ skup formula

$$(\star) \qquad \begin{array}{lll} a \star a = c, & a \star b = a, & a \star c = b, \\ b \star a = b, & b \star b = b, & b \star c = a, \\ c \star a = a, & c \star b = c, & c \star c = c \end{array}$$

i t proizvoljan term obrazovan od znakova konstanata a, b, c i operacijskog znaka $\star$. Dokazati da važi:

(1) $\qquad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t = a \quad$ ili $\quad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t = b \quad$ ili $\quad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t = c.$

Rešenje. Dokaz izvodimo indukcijom po broju d – broju znakova $\star$ u termu t.

Slučaj $d = 0$. Tada je t term a ili b ili c. Na osnovu aksiome $x = x$ zaključujemo da važi:

$$\mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} a = a \quad \text{ili} \quad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} b = b \quad \text{ili} \quad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} c = c.$$

Slučaj $d > 0$. Uočimo term t koji ima n operacijskih znakova i pretpostavimo da je tvrdjenje zadatka dokazano za sve terme kod kojih je taj broj manji od n. Tada je t oblika $(t' \star t'')$, i pri tome oba terma t', t'' ispunjavaju uslov $d < n$. Korišćenjem indukcijske hipoteze zaključujemo

(2) $\qquad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t' = a \quad$ ili $\quad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t' = b \quad$ ili $\quad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t' = c$

(3) $\qquad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t'' = a \quad$ ili $\quad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t'' = b \quad$ ili $\quad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t'' = c$

Iz (2) i (3) neposredno sledi da je dokazana bar jedna od ovih devet rečenica

(4) $\qquad \mathcal{G} \vdash_{\mathcal{J}} t' = \alpha,\ t'' = \beta \qquad (\alpha, \beta$ pripadaju skupu $\{a, b, c\})$.

Dalje, prema pravilu $(S_\star)$ tačne su i rečenice

(5) $\qquad t' = \alpha,\ t'' = \beta \vdash (t' \star t'') = (\alpha \star \beta) \quad (\alpha, \beta \in \{a, b, c\})$.

Iz (4) i (5) zaključujemo da je tačna bar jedna od rečenica

(6) $\qquad \mathcal{G} \vdash t = (\alpha \star \beta) \qquad (\alpha, \beta \in \{a, b, c\})$.

Najzad, prema formulama $\mathcal{G}$ nije teško uočiti da vredi

(7) $\mathcal{G} \models_{\mathcal{J}} (\alpha \star \beta) = a$ ili $\mathcal{G} \models_{\mathcal{J}} (\alpha \star \beta) = b$ ili $\mathcal{G} \models_{\mathcal{J}} (\alpha \star \beta) = c$

Iz (6) i (7) neposredno sledi tvrdjenje (1) primenom pravila (T).

Primedba. Primetimo da se za jednakosti $\mathcal{G}$ iz prethodnog zadatka može reći da su nastale „posmatranjem" navedene tablice. Tvrdjenje zadatka je tada u vezi sa činjenicom da svaki izraz grupoida ima odredjenu *vrednost*, i to tačno jednu (zadatak 14). U skladu sa tim u disjunkciji (1) uvek važi tačno jedan njen član.

$\star$	a	b	c
a	c	a	b
b	b	b	a
c	a	c	c

48. Dokazati: $a \star a = (a \star a) \star a,\quad x \star y = y \star x \models_{\mathcal{J}} a \star ((a \star a) \star a) = a \star a$

Dokaz.

$a \star ((a \star a) \star a) = a \star (a \star a)$ (Prema pretpostavci $a \star a = (a \star a) \star a$)

$= (a \star a) \star a$ (Korišćenjem zakona $x \star y = y \star x$, uz zamene $x \to a,\ y \to (a \star a)$)

$= a \star a$ (Na osnovu $a \star a = (a \star a) \star a$)

49. Dokazati da iz formula $a \star a = b,\quad a \star b = a,\quad b \star a = a,\quad b \star b = b$ proizilaze sve formule oblika

$$x \star y = y \star x, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z),$$

gde $x, y, z \in \{a, b\}$.

Uputstvo. Dokazati da svaka dva terma oblika $x \star y$, $y \star x$ odnosno oblika $(x \star y) \star z$, $x \star (y \star z)$ imaju jednake vrednosti.

Recimo, $a \star b = a$, $b \star a = a$, pa stoga $a \star b = b \star a$. Slično, pošto su posledice jednakosti:

$$(b \star a) \star b = a \star b = a, \quad b \star (a \star b) = b \star a = a$$

to je posledica i: $(b \star a) \star b = b \star (a \star b)$.

Napomena. Tvrdjenje prethodnog zadatka može se i ovako iskazati: Grupoid odredjen navedenom tablicom je komutativan i asocijativan.

$\star$	a	b
a	b	a
b	a	b

50. Dokazati da iz formula $a \star a = b,\quad a \star b = a,\quad b \star a = a,\ b \star b = b$ ne proizlaze sve formule oblika

$$x \star x = x \qquad (x \text{ je } a \text{ ili } b)$$

odnosno dokazati da grupoid

$\star$	a	b
a	b	a
b	a	b

ne zadovoljava zakon $x \star x = x$.

Rešenje. Razlog je što $a \star a$ ima vrednost b.

51. Dokazati da dati grupoid zadovoljava svaki algebarski zakon oblika

$$t_1 = t_2$$

$\star$	a	b
a	a	a
b	a	a

gde su t_1, t_2 proizvoljni izrazi obrazovani od izvesnih promenljivih, znakova konstanata a, b i operacijskog znaka ☆.

52. Dokazati da svaki grupoid sa dva elementa zadovoljava zakon

$$((x ☆ x) ☆ x) ☆ x = x ☆ x$$

Rešenje. Označimo elemente grupoida sa a, b. Da bi prethodni zakon važio, dosta je da važe ove dve jednakosti

(1) $$((a ☆ a) ☆ a) ☆ a = a ☆ a, \quad ((b ☆ b) ☆ b) ☆ b = b ☆ b.$$

Kako je ☆ proizvoljna operacija skupa $\{a, b\}$, to u dokazu prve jednakosti razlikujemo dva slučaja

(i) $a ☆ a = a$, (ii) $a ☆ a = b$.

U prvom se neposredno zaključuje da oba izraza

(2) $$((a ☆ a) ☆ a) ☆ a, \qquad a ☆ a$$

imaju vrednost a, a u drugom razlikujemo dva podslučaja

(ii') $b ☆ a = a$, (ii'') $b ☆ a = b$

Ako $b ☆ a = a$, onda imamo ovakvo „računanje"

$$((a ☆ a) ☆ a) ☆ a = (b ☆ a) ☆ a = a ☆ a = b, \quad a ☆ a = b,$$

pa termi (2) imaju oba vrednost b. Slično, ako $b ☆ a = b$, imamo:

$$((a ☆ a) ☆ a) ☆ a = (b ☆ a) ☆ a = b ☆ a = b, \quad a ☆ a = b$$

Znači, vrednosti terma (2) su opet iste. Time je dokazana prva od jednakosti (1). Dokaz druge izvodi se sličnim rasudjivanjem.

53. Neka su t_1, t_2, t_3 dogovorne oznake redom za izraze

$$(a ☆ b), \quad (b ☆ c), \quad (c ☆ a)$$

i neka je $\mathcal{S}$ skup jednakosti

$$t_1 ☆ t_1 = t_1, \quad t_1 ☆ t_2 = t_2, \quad t_1 ☆ t_3 = t_3,$$
$$t_2 ☆ t_1 = t_2, \quad t_2 ☆ t_2 = t_3, \quad t_2 ☆ t_3 = t_1,$$
$$t_3 ☆ t_1 = t_3, \quad t_3 ☆ t_2 = t_1, \quad t_3 ☆ t_3 = t_2,$$

Primetimo da su te jednakosti takve kao da su ispisane na osnovu date tablice.

☆	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_2	t_3
t_2	t_2	t_3	t_1
t_3	t_3	t_1	t_2

Uočimo dalje, ma koji izraz $f(t_1, t_2, t_3)$ sagradjen pomoću t_1, t_2, t_3 i ☆. Skup T svih takvih izraza podrobno se opisuje definicijom:

(i) t_1, t_2, t_3 pripadaju T,

(ii) Ako su u, v iz skupa T, onda $(u ☆ v)$ takodje pripada T.

(iii) Elementi skupa T dobijaju se jedino konačnom primenom pravila (i) i (ii).

Članovi skupa T su na primer: $(a ☆ b)$, $(a ☆ b) ☆ (b ☆ c)$, $((a ☆ b) ☆ (b ☆ c)) ☆ (c ☆ a)$ ali nisu: $(a ☆ b) ☆ a$, $(b ☆ c) ☆ (b ☆ a)$ i sl.

Dokazati:

$$\mathcal{S} \vdash_{\mathcal{J}} f(t_1, t_2, t_3) = t_1 \quad \text{ili} \quad \mathcal{S} \vdash_{\mathcal{J}} f(t_1, t_2, t_3) = t_2 \quad \text{ili} \quad \mathcal{S} \vdash_{\mathcal{J}} f(t_1, t_2, t_3) = t_3$$

Uputstvo. Zadatak je sličan zadatku 47. Shvatajući $f(t_1, t_2, t_3)$ kao izraz po slovima t_1, t_2, t_3, onda takvom izrazu odgovara broj d – broj znakova $\star$ koji ne učestvuju u t_1, t_2, t_3. Dokaz dalje teče indukcijom po d.

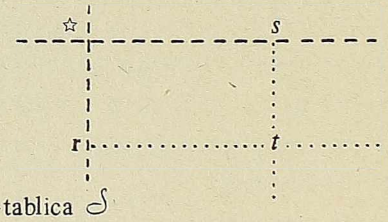
54. Produžetak prethodnog zadatka. Neka je A neki skup izraza obrazovanih od $\star$ i izvesnih znakova konstanata, a $\mathcal{S}$ neka je skup jednakosti oblika

$$r \star s = t,$$

gde su r, s, t članovi skupa A i pri tome svakoj dvojci (r, s) odgovara tačno jedan t. Dokazati da za svaki izraz $f(t_1, ..., t_k)$ sagradjen od $\star$ i izraza $t_1, ..., t_k$ iz A vredi

$$(\text{Za neki izraz } t \text{ iz } A) \qquad \vdash f(t_1, ..., t_k) = t.$$

Napomena. $\mathcal{S}$ i slične skupove nazivaćemo *skoro–tablice*. Takve skupove formula prikazujemo crtežima sastavljenim od ovakvih delova (videti naredni zadatak)



55. Data je skoro–tablica $\mathcal{S}$

$\star$	$a \star b$	$b \star c$	$c \star a$
$a \star b$	$a \star b$	$c \star a$	$b \star c$
$b \star c$	$c \star a$	$b \star c$	$a \star b$
$c \star a$	$b \star c$	$a \star b$	$c \star a$

tj. skup jednakosti uočen u zadatku 53. Dokazati da nijedna od jednakosti

(1) $\qquad a \star b = b \star c, \qquad a \star b = c \star a, \qquad b \star c = c \star a$

nije posledica jednakosti $\mathcal{S}$.

Uputstvo: Preslikavanje φ:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \star & a & b & c \\ \star_M & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gde je M skup $\{1, 2, 3\}$, $\star_M$ njegova operacija odredjena tablicom

$\star_M$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

jeste jedan model skoro–tablice $\mathcal{S}$, odnosno tim preslikavanjem sve jednakosti iz $\mathcal{S}$ se prevode u tačne jednakosti. Medjutim, φ nije model nijedne od jednakosti (1) jer

$$\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star_M \varphi(b) = 1 \star_M 2 = 2, \quad \varphi(b \star c) = \varphi(b) \star_M \varphi(c) = 2 \star_M 3 = 1$$

$$\varphi(c \star a) = \varphi(c) \star_M \varphi(a) = 3 \star_M 1 = 2$$

a *1, 2, 3* su medjusobno različiti elementi.

Napomena. Radi bolje odredjenosti, u smislu šta čemu odgovara, uopšte je podesno da se model izvesnih (predikatskih) formula $\mathcal{F}$ shvati kao svojevrsno preslikavanje. Likovi takvog preslikavanja su članovi jezika tih formula, tj. znaci konstanata, operacijski i relacijski znaci, a slike su odgovarajući interpreti (vrednosti) u okviru odabranog skupa M. Naravno, takvo preslikavanje je model upravo u slučaju ako se formule iz $\mathcal{F}$ prevode u tačne iskaze o članovima skupa M

U vezi sa rečenim pomenimo takodje da je i u slučaju, na primer, sistema linearnih jednačina po izvesnim nepoznatim $x, y, z, \ldots$ podesno kao rešenje smatrati izvesno preslikavanje oblika

$$\begin{pmatrix} x & y & z & \ldots \\ \xi & \eta & \zeta & \ldots \end{pmatrix}$$

čije slike zadovoljavaju taj sistem. Na takav način je tačno utvrdjeno šta kojoj nepoznatoj odgovara.

56. Opisati sve normalne modele formula $\mathcal{S}$:

$$\text{(S)} \qquad \begin{matrix} a \star a = b, & a \star b = a \\ b \star a = a, & b \star b = b \end{matrix}$$

gde su a, b znaci konstanata, a $\star$ operacijski znak.

Rešenje. Neka je M ma koji neprazan skup. U skladu sa napomenom iz prethodnog zadatka, model sa skupom M kao nosiocem jeste svako preslikavanje φ oblika

$$\varphi = \begin{pmatrix} \star & a & b \\ \star_M & a_M & b_M \end{pmatrix}$$

gde je $\star_M$ binarna operacija skupa M, a_M i b_M su dva člana istog skupa, uz uslov da važe jednakosti

$$(\varphi S) \qquad \begin{matrix} a_M \star_M a_M = b_M, & a_M \star_M b_M = a_M \\ b_M \star_M a_M = a_M, & b_M \star_M b_M = b_M \end{matrix}$$

Kao što se vidi tim jednakostima se izražavaju veze jedino izmedju elemenata a_M, b_M – za ostale elemente skupa M, ako ih on uopšte ima, ne traže se nikakvi uslovi. Na osnovu te okolnosti lako se opisuju svi normalni modeli datih formula. Modele tih formula delimo u dve vrste prema tome da li su a_M, b_M dva *različita* ili dva *jednaka* elementa skupa M.

Neka je, dakle, M neki neprazan skup. U skupu M izaberimo dva različita elementa a_M, b_M, i operaciju $☆_M$ definišimo tako da ostane sačuvana tablica

$☆_M$	a_M	b_M
a_M	b_M	a_M
b_M	a_M	b_M

tj. jednakosti (φ S). Radi toga je pri definisanju $x ☆_M y$, za $x, y \in M$, dovoljno rezultat izabrati prema tablici ukoliko $x, y \in \{a_M, b_M\}$, a u protivnom slučaju, tj. kad je najmanje jedan od x i y izvan skupa $\{a_M, b_M\}$ za rezultat se može uzeti ma koji element skupa M.

Tako se opisuju modeli prve vrste. Modeli druge vrste odlikuju se time što za njih važi i jednakost $a = b$. Neka je, recimo, M neki neprazan skup. Izaberimo u njemu jedan element u oznaci a_M, a operaciju $☆_M$ definišimo tako da važi jednakost $a_M ☆_M a_M = a_M$, jer jednakosti (φ S) se pod pretpostavkom $a_M = b_M$ „stežu" na tu jednakost. Tada preslikavanje

$$\varphi = \begin{pmatrix} ☆ & a & b \\ ☆_M & a_M & a_M \end{pmatrix}$$

jeste normalni model formula (S).

Nije teško uvideti da navedeni opis obuhvata sve normalne modele skupa (S).

57. Opisati sve normalne modele date skoro–tablice

(i)

☆	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

(ii)

☆	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

(iii)

☆	a	b	c
a	c	b	c
b	b	b	b
c	a	b	a

58. Opisati sve normalne modele date skoro–tablice

(i)

☆	a	b	$a☆b$	$b☆a$
a	a	b	$a☆b$	$b☆a$
b	b	b	$a☆b$	$b☆a$
$a☆b$	b	b	b	b
$b☆a$	a	a	b	b

(ii)

☆	a	b	$a☆b$	$b☆a$
a	b	a	a	b
b	a	b	$a☆b$	$b☆a$
$a☆b$	b	a	a	b
$b☆a$	b	b	b	a

59. Neka je $\Gamma = \{a, b\}$ i $\mathcal{F}$ skup formula:

$$x☆x = x, \qquad x☆y = y☆x, \qquad (x☆y)☆z = x☆(y☆z)$$

Označimo sa T skup svih terma po a, b, ☆, a sa $\mathcal{F}|_\Gamma$ skup svih formula oblika

$$t_1☆t_1 = t_1, \quad t_1☆t_2 = t_2☆t_1, \; (t_1☆t_2)☆t_3 = t_1☆(t_2☆t_3) \; (t_1, t_2, t_3 \in T)$$

nastalih iz $\mathcal{F}$ zamenjivanjem promenljivih na sve moguće načine elementima T. U vezi sa svakim termom t sa $S(t)$ označimo skup njegovih znakova konstanata. Recimo: $S(a) = \{a\}$, $S(a \star b) = \{a, b\}$.

(i) Dokazati:

$$\text{Ako } S(t) = \{a\} \text{ onda } \mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t = a$$
$$\text{Ako } S(t) = \{b\} \text{ onda } \mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t = b$$
$$\text{Ako } S(t) = \{a,b\} \text{ onda } \mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t = a \star b$$

(ii) Dokazati obrate prethodnih implikacija.

Rešenje. (i) Neka je t recimo term $(a \star a) \star a$ čiji $S(t)$ je $\{a\}$ Dvaput primenjujući jednakost oblika $t \star t = t$ dobijamo $(a \star a) \star a = a \star a = a$. Na sličan način se uopšte može dokazati za sve terme t za koje $S(t) = \{a\}$ vredi jednakost $t = a$, kao jednakosna posledica formula $\mathcal{F}|_\Gamma$. Medjutim, strogi dokazi navedenih implikacija mogu se izvesti indukcijom po $d(t)$ – broju znakova $\star$ prisutnih u termu t. Recimo, jedan takav dokaz treće implikacije glasi:

Pretpostavimo da $S(t) = \{a,b\}$, tada $d \geqslant 1$.

Slučaj $d = 1$: Term t je jednog od oblika $a \star b$, $b \star a$. Kako obe jednakosti $a \star b = a \star b$, $b \star a = a \star b$, slede iz $\mathcal{F}|_\Gamma$ (prva je slučaj aksiome $x = x$, a druga se dobija iz komutativnog zakona $x \star y = y \star x$, tj. druga je član skupa $\mathcal{F}|_\Gamma$), to je dokaz u ovom slučaju završen.

Slučaj $d > 1$: Pretpostavimo da t ima n znakova $\star$ i da je za sve terme sa manje od n tih znakova treća implikacija tačna. Term t je oblika $(t' \star t'')$, a za skupove $S(t')$, $S(t'')$, zbog pretpostavke $S(t) = \{a,b\}$, može nastupiti ukupno 7 skučajeva:

1° $\{a\}$, $\{b\}$; 2° $\{a\}$, $\{a,b\}$; 3° $\{b\}$. $\{a\}$; 4° $\{b\}$, $\{a,b\}$;

5° $\{a,b\}$, $\{a\}$; 6° $\{a,b\}$, $\{b\}$; 7° $\{a,b\}$, $\{a,b\}$

U svakom od njih primenjuju se prve dve implikacije (za koje pretpostavljamo da su dokazane) ili indukcijska hipoteza.

Razmotrimo, na primer, prva dva slučaja.

1° Ako $S(t') = \{a\}$, $S(t'') = \{b\}$, onda korišćenjem prve i druge implikacije zaključujemo

$$\mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t' = a, \qquad \mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t'' = b.$$

Primenom pravila $(S_\star)$ odatle izvodimo

$$\mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t' \star t'' = a \star b, \text{ odnosno } \mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t = a \star b.$$

2° Ako $S(t') = \{a\}$, $S(t'') = \{a,b\}$, onda korišćenjem prve implikacije i indukcijske hipoteze dobijamo

$$\mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t' = a, \qquad \mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t'' = a \star b,$$

odakle, primenom pravila $(S_\star)$ izvodimo

(1) $\mathcal{G}|_\Gamma \vdash_{\overline{i}} t' \star t'' = a \star (a \star b)$, odnosno $\mathcal{G}|_\Gamma \vdash_{\overline{i}} t = a \star (a \star a)$

Zbog asocijativnog i zakona $x \star x = x$, skupu $\mathcal{G}|_\Gamma$ pripadaju jednakosti

(2) $$a \star (a \star b) = (a \star a) \star b, \qquad a \star a = a$$

Iz (1) i (2) primenom pravila $(S_\star)$ i (T) zaključujemo

$$\mathcal{G}|_\Gamma \vdash_{\overline{i}} t = a \star b.$$

Slično se razmatraju i preostali slučajevi.

(ii) Dokazane implikacije (i) su, u stvari, poseban slučaj ove implikacije.

(3) Ako $S(t_1) = S(t_2)$, onda $\mathcal{G}|_\Gamma \vdash_{\overline{i}} t_1 = t_2$

koja neposredno sledi na osnovu njih. Radi dokaza tvrdjenja (ii) dokazujemo obrat implikacije (3).

Za to je dovoljno dokazati da nijedna od jednakosti

(4) $$a = b, \qquad a = a \star b, \qquad b = a \star b$$

nije posledica skupa $\mathcal{G}|_\Gamma$. Razlog je što svaka jednakost $t_1 = t_2$ iz skupa $\mathcal{G}|_\Gamma$ zadovoljava uslov *istoslovnosti*, odnosno uslov: $S(t_1) = S(t_2)$ i što pravila (S), (T), $(S_\star)$ čuvaju istoslovnost. Recimo, ako $S(t_1) = S(t_1')$, $S(t_2) = S(t_2')$, onda

$$S(t_1 \star t_2) = S(t_1) \cup S(t_2) = S(t_1') \cup S(t_2') = S(t_1' \star t_2')$$

odnosno pravilo $(S_\star)$ čuva istoslovnost. Medjutim, ni za jednu od jednakosti (4) uslov istoslovnosti nije ispunjen.

Dokaz implikacije

(5) Ako $\mathcal{G}|_\Gamma \vdash_{\overline{i}} t_1 = t_2$, onda $S(t_1) = S(t_2)$

a samim tim i obrata implikacija (i), izvodi se sada neposredno metodom svodjenja na protivurečnost.

Istaknimo da je uopšte u vezi sa nekim skupom jednakosti oblika $\mathcal{G}|_\Gamma$ najteže pitanje da li neka jednakost $t_1 = t_2$ jeste ili nije jednakosna posledica tog skupa. To je tzv. *problem reči*. Na osnovu tvrdjenja (3) i (5) neposredno sledi ekvivalencija

(6) $$\mathcal{G}|_\Gamma \vdash_{\overline{i}} t_1 = t_2 \quad \text{akko} \quad S(t_1) = S(t_2)$$

prema kojoj se problem reči u ovom zadatku svodi na proveravanje da li su skupovi $S(t_1)$, $S(t_2)$ jednaki. To se lako ustanovljava budući da se radi o konačnim skupovima. Drugačije rečeno, problem reči je *odlučiv*, što inače nije čest slučaj.

60. Produžetak prethodnog zadatka. U skupu T uočimo (izrazovsku) operaciju

$$t_1 \mathbin{\bar\star} t_2 \stackrel{\text{def}}{=} (t_1 \star t_2)$$

i u grupoidu $(T, \bar\star)$ relaciju $\sim$ uvedenu ovako

$$t_1 \sim t_2 \quad \text{akko} \quad \mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} t_1 = t_2$$

Dokazati:

(i) $\sim$ je kongruencija grupoida $(T, \bar{\star})$,

(ii) Količnički grupoid $(T, \bar{\star})/\sim$ zadovoljava zakone

$$x \star x = x, \quad x \star y = y \star x, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

(iii) Količnička struktura ima upravo tri elementa: C_a, C_b, $C_{(a \star b)}$

Rešenje. (i) Vredi $t \sim t$, jer formula $t = t$ je aksioma pa važi $\mathcal{F}|_\Gamma \vdash t = t$. Dalje, ako važi $t_1 \sim t_2$, odnosno $\mathcal{F}|_\Gamma \vdash t_1 = t_2$, to postoji odgovarajući dokaz formule $t_1 = t_2$. Produžujući taj dokaz članom $t_2 = t_1$, koji po pravilu (S) sledi iz člana $t_1 = t_2$, dobijamo jedan dokaz formule $t_2 = t_1$, tj. važi

$$\mathcal{F}|_\Gamma \vdash t_2 = t_1$$

pa važi i $t_2 \sim t_1$. Time je dokazana simetričnost relacije $\sim$. Slično se dokazuje tranzitivnost, kao i saglasnost sa operacijom $\bar{\star}$.

(ii) Treba dokazati jednakosti

$$C_t \tilde{\star} C_t = C_t, \quad C_s \tilde{\star} C_t = C_t \tilde{\star} C_s, \quad (C_r \tilde{\star} C_s) \tilde{\star} C_t = C_r \tilde{\star} (C_s \tilde{\star} C_t),$$

gde su r, s, t ma koji elementi skupa T a $\tilde{\star}$ je operacija količničke strukture. Recimo, jedan dokaz treće jednakosti glasi: Kako

$$(C_r \tilde{\star} C_s) \tilde{\star} C_t = C_{(r \star s)} \tilde{\star} C_t = C_{(r \star s) \star t}$$

i kako

$$C_r \tilde{\star} (C_s \tilde{\star} C_t) = C_r \tilde{\star} C_{(s \star t)} = C_{r \star (s \star t)}$$

to koristeći još i

$$(r \star s) \star t \sim r \star (s \star t)$$

zaključujemo da zaista važi treća navedena jednakost. Potpuno slično se dokazuju i prve dve jednakosti.

(iii) Na osnovu implikacija (i) dokazanih u prethodnom zadatku neposredno se zaključuje da za svaki term t važi

$$t \sim a \quad \text{ili} \quad t \sim b \quad \text{ili} \quad t \sim (a \star b)$$

odnosno da u odnosu na relaciju $\sim$ postoje najviše tri klase: C_a, C_b, $C_{(a \star b)}$

Medjutim, ponovo prema prethodnom zadatku, broj klasa je upravo tri, jer su a, b, $(a \star b)$ medjusobno neekvivalentni (budući da nijedna od formula $a = b$, $a = (a \star b)$, $b = (a \star b)$ nije posledica formula $\mathcal{F}|_\Gamma$).

Evo i tablice količničke strukture $(T, \bar{\star})/\sim$

$\tilde{\star}$	C_a	C_b	$C_{(a \star b)}$
C_a	C_a	$C_{(a \star b)}$	$C_{(a \star b)}$
C_b	$C_{(a \star b)}$	C_b	$C_{(a \star b)}$
$C_{(a \star b)}$	$C_{(a \star b)}$	$C_{(a \star b)}$	$C_{(a \star b)}$

Recimo: $C_a \tilde{\star} C_a = C_a$, jer uopšte vredi $C_t \tilde{\star} C_t = C_t$. Dalje, $C_b \tilde{\star} C_{(a \star b)}$ $= C_{((b \star (a \star b))} = C_{(a \star b)}$ i sl.

Primedba. Količnička struktura $(T, \bar{\star})/\sim$ naziva se *slobodna algebra* klase zakona

$$x \star x = x, \quad x \star y = y \star x, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

generisana skupom $\Gamma = \{a,b\}$. Na sličan način se uopšte definiše slobodna algebra klase $\mathcal{G}$ izvesnih algebarskih zakona, odnosno jednakosti oblika $t_1 = t_2$ (t_1, t_2 termi) generisana datim skupom Γ:

P r v o, uočimo skup svih znakova konstanata koje učestvuju u zakonima $\mathcal{G}$. Uniju tog skupa sa Γ nazivamo skup A. D r u g o, sa T označimo skup svih izraza gradjenih od članova skupa A i operacijskih znakova koji se pojavljuju u zakonima $\mathcal{G}$. Dalje sa $\mathcal{G}|_\Gamma$ označimo skup svih formula nastalih iz formula $t_1 = t_2$ skupa $\mathcal{G}$ zamenjivanjem promenljivih članovima skupa T, na sve moguće načine. T r e- ć e, u skupu T uočimo relaciju $\sim$:

$$t_1 \sim t_2 \quad \text{akko} \quad \mathcal{G}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{G}} t_1 = t_2$$

To je, u opštem slučaju, relacija ekvivalencije saglasna sa ma kojim operacijskim znakom f iz $\mathcal{G}$, što znači da važi implikacija

$$t_1 \sim s_1 \text{ i } t_2 \sim s_2 \text{ i} \ldots \text{ i } t_n \sim s_n \rightarrow f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \sim f(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

Č e t v r t o, algebarska struktura čiji su elementi klase ekvivalencije po $\sim$ i za koju je, u vezi sa svakim pomenutim operacijskim znakom[1)] f, izmedju klasa definisana operacija $\tilde{f}$ dogovorom

$$\tilde{f}(C_{t_1}, \ldots, C_{t_n}) = C_{f(t_1, \ldots, t_n)}$$

naziva se *slobodna algebra klase* $\mathcal{G}$ *nad skupom* Γ. Ta struktura, što se lako dokazuje na osnovu njene definicije, zadovoljava zakone $\mathcal{G}$. Osnovni problem u vezi sa odredjivanjem slobodne algebre je pitanje kako za ma koja dva terma t_1 i t_2 odlučiti da li su ekvivalentni. Problem postojanja takvog algoritma se naziva *problem reči.*

[1)] Znacima konstanata učestvujućim u $\mathcal{G}$ u slobodnoj strukturi se dodeljuje klasa ekvivalencije tih konstanata. I to su nularne operacije slobodne strukture.

61. Odrediti slobodnu algebru klase zakona

$$x \star x = x, \quad x \star y = y \star x, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

nad skupom $\Gamma = \{a_i \mid i \in I\}$.

62. Odrediti slobodnu algebru klase zakona: $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$, tj. slobodnu semigrupu, generisanu skupom $\Gamma = \{a, b, c\}$.

Uputstvo. Posledica asocijativnog zakona je:
$t_1 \sim t_2$ akko t_1, t_2 se (možda) razlikuju jedino u rasporedu zagrada.

63. Obrazovati slobodnu strukturu klase zakona $\mathcal{F}$
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $a \cdot a = a$, $b \cdot b = b$, $(a \cdot b) \cdot a = b \cdot (a \cdot b)$ (a,b znaci konstanata)

generisanu skupom $\Gamma = \{a,b\}$.

Rešenje. U skupu T svih izraza gradjenih sa a, b i operacijskim znakom $\cdot$ uočimo relaciju $\sim$:

$$t_1 \sim t_2 \quad \text{akko} \quad \mathcal{F}|_\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t_1 = t_2$$

gde je $\mathcal{F}|_\Gamma$ skup svih formula nastalih iz formula skupa $\mathcal{F}$ svim mogućim zamenama x, y, z članovima skupa T. Na osnovu prisutnosti asocijativnog zakona, za ma koji term t_1 zaključujemo da je ekvivalentan sa svakim drugim nastalim iz njega nekim prerasporedjivanjem zagrada. Tako:

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot (b \cdot a)) \sim (a \cdot ((b \cdot a) \cdot b)) \cdot a$$

U skladu sa tim ma koji term je ekvivalentan sa nekim termom oblika

$$\alpha_1, \ \alpha_1 \cdot \alpha_2, \ (\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot \alpha_3, \ ((\alpha_1 \cdot \alpha_2) \cdot \alpha_3) \cdot \alpha_4, \cdots \ (\alpha_1 \text{ je } a \text{ ili } b)$$

koje ćemo kraće označavati bez upotrebe znakova zagrada i operacijskog znaka. Recimo:

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot (b \cdot a)) \sim ababa, \quad (b \cdot a) \cdot (a \cdot a) \sim baa \quad \text{i sl.}$$

Koristeći dalje jednakosti $a \cdot a = a$, $b \cdot b = b$ lako je zaključiti da je ma koji term ekvivalentan sa nekim termom oblika

$$\alpha_1, \quad \alpha_1 \alpha_2, \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \ldots \qquad (\alpha_i \text{ je } a \text{ ili } b)$$

i pri tome su α_1 i α_2, α_2 i α_3, ... medjusobno različiti.
Tako

$$abbaaab \sim abab, \qquad aababb \sim abab$$

Do sada nismo pominjali zakon $(a \cdot b) \cdot a = b \cdot (a \cdot b)$, odnosno $aba = bab$. Koristeći i taj zakon, indukcijom prema dužini terma, lako se izvodi sledeći zaključak

(σ) *Svaki term t ekvivalentan je sa jednim od terma: a, b, ab, ba, aba*

Pored zaključka stoji slovo σ – prvo slovo reči svodjenje, jer je problem odredjivanja slobodne strukture (tj. problem ekvivalentnosti terma) sveden na problem ekvivalentnosti pet navedenih terma, za koje ćemo koristiti i naziv *naznačeni*. Pokazujemo jedan, inače po prirodi vrlo opšti, postupak kojim se problem može rešiti.

Skup naznačenih označimo sa A; dakle:

$$A = \{a, b, ab, ba, aba\}$$

Neka su t_1, t_2 ma koji elementi skupa A. Na temelju tvrdjenja (σ) term $(t_1 \cdot t_2)$ ekvivalentan je sa jednim od članova skupa A. Recimo:

$$(a \cdot a) \sim a, \quad (ab \cdot ba) \sim aba, \quad (aba \cdot ab) \sim aba$$

Drugim rečima, jednakosti

$$(a \cdot a) = a, \quad ab \cdot ba = aba, \quad aba \cdot ab = aba$$

jesu posledice formula $\mathcal{A}|_\Gamma$. Uopšte, sa t_{12} označimo jedan od naznačenih koji je ekvivalentan sa $(t_1 \cdot t_2)$. Dalje, sa $\mathcal{S}$ označimo skup svih jednakosti oblika $(t_1 \cdot t_2) = t_{12}$. To je jedna skoro–tablica skupa A. Grafički je prikažimo crtežom

(1)

$\cdot$	a	b	$a \cdot b$	$b \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$
a	a	$a \cdot b$	$a \cdot b$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$
b	$b \cdot a$	b	$(a \cdot b) \cdot a$	$b \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$
$a \cdot b$	$(a \cdot b) \cdot a$	$a \cdot b$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$
$b \cdot a$	$b \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$
$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot a$

U vezi sa popunjavanjem te tablice istaknimo sledeće. Kako već rekosmo, za svaka dva t_1, $t_2 \in A$ u istom skupu postoji najmanje jedan term t_{12}, takav da $t_1 \cdot t_2 \sim t_{12}$. Pri popunjavanju tablice uzimamo po jedan takav t_{12}. U stvari, ukoliko su članovi skupa A, odnosno naznačeni medjusobno neekvivalentni, tada postoji tačno jedna opisana skoro'tablica. Medjutim, nama je upravo to nepoznato, ali ipak na temelju zaključka(σ) možemo obrazovati bar jednu skoro–tablicu $\mathcal{S}$.

Dobijena skoro–tablica $\mathcal{S}$ se, kao što ćemo ubrzo uvideti, može upotrebiti za raspravljanje pitanja ekvivalentnosti, odnosno problema reči. Najpre svakom od naznačenih izraza a, b, $a \cdot b$, $b \cdot a$, $(a \cdot b) \cdot a$ dodelimo po jedan element, „jednu zamenu", recimo po redu A, B, C, D, E. U skupu $\{A, B, C, D, E\}$, definišimo potom operaciju $\bullet$ na sledeći način. Neka su X, Y ma koja dva elementa tog skupa i neka su x, y njima odgovarajući naznačeni izrazi. Tada za $X \bullet Y$ uzimamo onaj član skupa $\{A, B, C, D, E\}$ koji je zamena izraza $x \cdot y$, odnosno njemu odgovarajućeg po skoro–tablici $\mathcal{S}$. Recimo, prema tom dogovoru imamo

$$C \bullet D = \text{zamena za } (a \cdot b) \cdot (b \cdot a) = \text{zamena za } (a \cdot b) \cdot a = E$$

Na takav način dolazi se do ove tablice $\overline{\mathcal{S}}$

(2)

$\bullet$	A	B	C	D	E
A	A	C	C	E	E
B	D	B	E	D	E
C	E	C	E	E	E
D	D	E	E	E	E
E	E	E	E	E	E

Slobodnije rečeno, ta tablica nastaje iz ako se članovi skupa $\{a, b, a\cdot b, b\cdot a, (a\cdot b)\cdot a\}$ zamene svojim slikama u odnosu na preslikavanje

$$\begin{pmatrix} a & b & a\cdot b & b\cdot a & (a\cdot b)\cdot a \\ A & B & C & D & E \end{pmatrix}$$

Tako smo u vezi sa skoro–tablicom $\mathcal{S}$ napravili jednu matematičku strukturu, odnosno grupoid. Elementi C, D, E su zamene složenih izraza $a\cdot b$, $b\cdot a$, $(a\cdot b)\cdot a$. U vezi sa svakim uočimo po odgovarajuću jednakost medju A, B, C, D, E. Tako, C je zamena izraza $a\cdot b$, a slovima a, b odgovaraju A, B. Otuda u vezi sa C uočavamo jednakost $C = A\bullet B$. Slično u vezi sa D i E imamo jednakosti $D = B\bullet A$, $E = (A\bullet B)\bullet A$. Skup tih triju jednakosti označimo sa $\mathcal{P}$.

U dobijenom grupoidu dogovorno njegove elemente A, B smatrajmo kao dve nularne operacije. Dobijenu strukturu nazivamo *rešavajuća struktura* i takodje je označavamo sa $\bar{\mathcal{S}}$. Ta struktura može zadovoljiti polazne zakone $\mathcal{F}$:

$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$, $a\cdot a = a$, $b\cdot b = b$, $(a\cdot b)\cdot a = b\cdot(a\cdot b)$

smatrajući da se znaci konstanata a, b tumače kao navedene nularne operacije redom A, B i da se operacijski znak $\cdot$ tumači kao operacija $\bullet$. Kao što ćemo ubrzo uvideti to je pitanje povezano sa problemom koji rešavamo. Naime važi sledeći stav (o rešavajućoj strukturi):

Naznačeni izrazi a, b, $a\cdot b$, $b\cdot a$, $(a\cdot b)\cdot a$ su medjusobno neekvivalentni ako i samo ako rešavajuća struktura zadovoljava zakone $\mathcal{F}$, kao i jednakosti $\mathcal{P}$ (odnosno „pamti poreklo svojih članova").

Pretpostavimo da je stav dokazan i pogledajmo kako se koristi za raspravljanje pitanja ekvivalentnosti. Na osnovu tog stava naznačeni izrazi su neekvivalentni akko rešavajuća struktura $\bar{\mathcal{S}}$ zadovoljava zakone i jednakosti $\mathcal{P}$.

Provera jednakosti $\mathcal{P}$:

Kako $A\bullet B = C$, prema tablici $\bar{\mathcal{S}}$, to jednakost $C = A\bullet B$ važi. Slično važi i jednakost $D = B\bullet A$. Dalje:

$$\begin{aligned} (A\bullet B)\bullet A &= C\bullet A && \text{(Prema tablici (2))} \\ &= E && \text{(Prema tablici (2))} \end{aligned}$$

pa važi i jednakost $E = (A\bullet B)\bullet A$.

Provera zakona $\mathcal{F}$.

Treba ispitati da li za sve elemente x, y, z skupa $\{A, B, C, D, E\}$važe jednakosti $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$, $A \bullet A = A$, $B \bullet B = B$, $(A \bullet B) \bullet A = B \bullet (A \bullet B)$

Poslednje tri jednakosti se lako proveravaju, nešto je teže proveriti prvu. Medjutim, i ona je ispunjena.

Na osnovu stava o rešavajućoj strukturi izrazi a, b, $a \cdot b$, $b \cdot a$, $(a \cdot b) \cdot a$ su medjusobno neekvivalentni. Otuda tražena slobodna struktura ima ove delove:

Skup–nosilac je $\{C_a, C_b, C_{a \cdot b}, C_{b \cdot a}, C_{(a \cdot b) \cdot a}\}$,

Odgovarajući za a, b, su C_a, C_b po redu, a operacija $\cdot$ je odredjena navedenom tablicom

(3)

$\bullet$	C_a	C_b	$C_{a \cdot b}$	$C_{b \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$
C_a	C_a	$C_{a \cdot b}$	$C_{a \cdot b}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$
C_b	$C_{b \cdot a}$	C_b	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{b \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$
$C_{a \cdot b}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{a \cdot b}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$
$C_{b \cdot a}$	$C_{b \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$
$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$	$C_{(a \cdot b) \cdot a}$

Napomena 1. Pretpostavimo da se prilikom proveravanja važenja jednakosti $\mathcal{F}$ i $\mathcal{P}$ desilo da neka jednakost nije ispunjena. Recimo, da za neke vrednosti x, y, z leva i desna strana asocijativnog zakona iznose D, odnosno E. To je znak da je jednakost $b \cdot a = (a \cdot b) \cdot a$ posledica jednakosti $\mathcal{F}|_\Gamma$ (ali da mi to nismo primetili). Posle takvog saznanja vršimo „skupljanje" skupa naznačenih. Naime, kao nove naznačene uzimamo a, b, $a \cdot b$ i $b \cdot a$ – dakle, „izbacujemo" izraz $(a \cdot b) \cdot a$ – za njih pravimo novu skoro–tablicu, proveravamo važenje odgovarajućih uslova, itd. U vezi sa rečenim videti i naredni zadatak.

Dokaz stava o rešavajućoj strukturi. Pretpostavimo najpre da su izrazi

$$a, b, a \cdot b, b \cdot a, (a \cdot b) \cdot a$$

medjusobno neekvivalentni. Tada njihove klase C_a, C_b, ... odredjuju slobodnu strukturu koju smo maločas podrobnije opisali. Ta struktura je model formula $\mathcal{F}$, ili, izražavajući se u skladu sa napomenom posle zadatka 55, preslikavanje

$$\begin{pmatrix} \cdot & a & b \\ \bullet & C_a & C_b \end{pmatrix}$$

zadovoljava zakone $\mathcal{F}$. Takodje su, u skladu sa opštom definicijom operacija nad klasama, ispunjene i ove jednakosti

(4) $C_{a\cdot b} = C_a \bullet C_b,\quad C_{b\cdot a} = C_b \bullet C_a,\quad C_{(a\cdot b)\cdot a} = (C_a \bullet C_b)\bullet C_a$

Zamislimo sada obrazovanje skoro–tablice sa naznačenim izrazima a, b, $a\cdot b$, $(a\cdot b)\cdot a$. Na osnovu pretpostavke o njihovoj neekvivalentnosti zaključuje se da postoji tačno jedna skoro–tablica. Ona se može dobiti iz tablice (3), slobodnije rečeno, brisanjem znaka za klasu, tj. zamenjujući $C_a, C_b, \ldots$ redom sa a, b, ... I rešavajuća struktura $\mathcal{S}$ se može direktno formirati iz slobodne strukture, koristeći se ovakvim zamenjivanjem (preslikavanjem)

$$\begin{pmatrix} C_a & C_b & C_{a\cdot b} & C_{b\cdot a} & C_{(a\cdot b)\cdot a} & \cdot \\ A & B & C & D & E & \bullet \end{pmatrix}$$

Tablica rešavajuće strukture je, u stvari, izomorfna sa tablicom klasa, a navedeno preslikavanje je jedan izomorfizam. Otuda i rešavajuća struktura zadovoljava zakone $\mathcal{G}$. Dalje, važenje jednakosti (4) povlači da u rešavajućoj strukturi važe jednakosti $\mathcal{P}$. Tako je dokazana jedna polovina stava.

Pretpostavimo sada da rešavajuća struktura $\mathcal{S}$ zadovoljava zakone $\mathcal{G}$ i jednakosti $\mathcal{P}$ i dokažimo da su naznačeni izrazi medjusobno neekvivalentni. Neka, suprotno, neka dva različita naznačena izraza t_1, t_2 budu medjusobno ekvivalentna, tj. neka važi:

(5) $$\mathcal{G}|_{\Gamma} \vdash t_1 = t_2$$

Izraze t_1, t_2 označimo i $t_1(a, b, \cdot)$, $t_2(a, b, \cdot)$ ističući tako iz čega su sagradjeni. Neka je

(6) $$t_1' = t_2', \quad t_1'' = t_2'', \ldots, t_1 = t_2$$

jedan dokaz iskaza (5). U tom nizu jednakosti obavimo sledeće zamenjivanje znakova

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdot \\ A & B & \bullet \end{pmatrix}$$

gde je $\bullet$ oznaka operacije rešavajuće strukture. Na osnovu pretpostavke da $\mathcal{S}$ zadovoljava zakone $\mathcal{G}$ zaključujemo da se dokaz (6) prevodi u dokaz ovog iskaza.

(7) *U rešavajućoj strukturi važi jednakost* $t_1(A, B, \bullet) = t_2(A, B\bullet)$.

Najzad, koristeći se jednakostima $\mathcal{P}$ dobijena jednakost se prevodi na jednakost neka dva inače različita elementa strukture $\mathcal{S}$ – što je kontradikcija. Recimo, ukoliko bi t_1, t_2 bili redom $a\cdot b$ i $(a\cdot b)\cdot a$, tada bi jednakost $t_1(A, B, \bullet) = t_2(A, B, \bullet)$ glasila $A\bullet B = (A\bullet B)\bullet A$ odnosno $C = E$ (ukoliko se upotrebe i jednakosti $\mathcal{P}$). Dobijenom kontradikcijom završava se i dokaz preostale polovine stava.

Napomena 2. I u opštem slučaju važi odgovarajući stav o rešavajućoj strukturi. Neka je, naime, $\mathcal{G}$ skup nekih algebarskih zakona, Γ dati skup i A unija skupa Γ i skupa znakova konstanata učestvujućih u $\mathcal{F}$ (videti primedbu uz zadatak 60). Prethodno, u vezi sa ekvivalentnošću $\sim$ izraza, objašnjavamo kad neki skup izraza nazivamo skupom naznačenih izraza. Skup M izvesnih izraza (članova skupa T) nazivamo skupom naznačenih izraza ukoliko su ispunjena ova dva uslova:

(i) Za ma koji $t \in T$ postoji najmanje jedan $m \in M$, tako da $t \sim m$.

(ii) Ako $m \in M$, onda skupu M pripadaju i svi oni članovi skupa A koji su podizrazi za m. Na primer, ako je m izraz $a \star b$, gde su a, b iz A, tada i a i b treba da budu članovi skupa M.

Šta je skoro–tablica nad M? To je ma koji skup $\mathcal{S}$ jednakosti oblika

(☆) $$f(t_1, t_2, ..., t_n) = t$$

gde je f operacijski znak dužine n–jedan od znakova iz $\mathcal{F}$, i gde su $t_1, t_2, ..., t_n$, t članovi skupa M uz ovaj uslov:

Za svaki operacijski znak f i za sve $t_1, t_2, ..., t_n$ iz M tačno jedna jednakost oblika (☆) je prisutna u $\mathcal{S}$ i uz to $t_1, t_2, ..., t_n$, t su u ovoj vezi

$$f(t_1, t_2, ..., t_n) \sim t$$

tj. jednakost (☆) je jedna od posledica formula $\mathcal{F}|_{\Gamma}$.

U vezi sa nekom skoro–tablicom $\mathcal{S}$ uvodi se pojam rešavajuće strukture $\overline{\mathcal{S}}$. Svakom članu $m \in M$ dodelimo po jedan nov član, recimo u oznaci $\overline{m}$. Tada ti „zamenjenici" $\overline{m}$ grade skupovni deo rešavajuće strukture $\overline{\mathcal{S}}$. Svakom operacijskom znaku f iz $\mathcal{F}$ dodeljujemo po jednu operaciju $\overline{f}$ skupa $\overline{\mathcal{S}}$ rukovodeći se ovom definicijom: Ukoliko jednakost (☆) pripada $\mathcal{S}$, tada

$$\overline{f}(\overline{t}_1, \overline{t}_2, ..., \overline{t}_n) \overset{\text{def}}{=} \overline{t}$$

Najzad, znacima konstanata iz $\mathcal{F}$ dodeljujemo odgovarajuće elemente iz $\overline{\mathcal{S}}$ kao nularne operacije strukture $\overline{\mathcal{S}}$. Naime, neka je c neki znak konstante iz $\mathcal{F}$ i neka $c \sim m$, gde $m \in M$. Tada znaku c dodeljujemo $\overline{m}$, kao odgovarajuću nularnu operaciju skupa $\overline{S}$.

Važi sledeći *stav o rešavajućoj strukturi:*

Članovi skupa M su medjusobno neekvivalentni ako i samo ako rešavajuća struktura $\overline{\mathcal{S}}$ zadovoljava zakone $\mathcal{G}$ i „pamti poreklo svojih članova".[1)]

[1)] To znači da se u vezi sa svakim složenim izrazom članom skupa M (onim koji ima bar jedan operacijski znak), zahteva važenje odredjene jednakosti u $\mathcal{S}$. Neka je, naime, $m \in M$ u čijoj izgradnji učestvuju operacijski znaci $f_1, f_2, ..., f_s$ i članovi $a_1, a_2, ..., a_m$ skupa A što ćemo i ovako zapisati

$$m \text{ je } t(a_1, a_2, ..., a_m;\ f_1, f_2, ..., f_s)$$

Tada se zahteva da u $\mathcal{S}$ važi jednakost

$$\overline{m} = t(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m;\ \overline{f}_1, \overline{f}_2, ..., \overline{f}_s)$$

Recimo ako bi m bio izraz $a_1 \star (a_2 \circ f(a_3))$ gde $a_1, a_2, a_3 \in A$, $\star$ i $\circ$ su operacijski znaci dužine dva a f operacijski znak dužine jedan, tada se radi o jednakosti

$$\overline{m} = \overline{a}_1 \,\overline{\star}\, (\overline{a}_2 \,\overline{\circ}\, \overline{f}(\overline{a}_3))$$

64. Odrediti slobodnu algebru zakona

$$x \cdot x = x, \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad (a \cdot b) \cdot a = b \cdot (a \cdot b)$$

(x, y, z promenljive; a, b znaci konstanata)

nad skupom $\Gamma = \{ a, b \}$.

Uputstvo. Najpre se lako zaključuje da je svaki izraz t, član skupa $\mathcal{F}$ (izražavanje u skladu sa primedbom zadatka 60), ekvivalentan sa jednim od izraza

$$a,\ ab,\ aba,\ abab, \ldots,\ b,\ ba,\ bab,\ baba, \ldots$$

gde aba stoji umesto $(a \cdot b) \cdot a$ i slično. Koristeći se dalje jednakošću $aba = bab$ zaključujemo da je svaki izraz ekvivalentan sa jednim od ovih[1]

$$a, b, ab, ba, aba$$

pa se problem svodi na ispitivanje ekvivalentnosti tih izraza. Radi tog ispitivanja dobijene izraze nazivamo naznačeni i u vezi sa njima obrazujmo neku skoro–tablicu. Nije teško doći do ove skoro-tablice :

$\cdot$	a	b	ab	ba	aba
a	a	ab	ab	aba	aba
b	ba	b	aba	ba	aba
ab	aba	ab	ab	aba	aba
ba	ba	aba	aba	ba	aba
aba	aba	aba	aba	aba	aba

Recimo: $ba \cdot ab \sim baab \sim bab \sim aba$, pa smo stoga u preseku vrste člana ba i stupca člana ba stavili aba. U narednom koraku obrazujemo odgovarajuću rešavajuću strukturu. Neka njeni članovi budu A, B, C, D, E, redom kao „zamenjenici" izraza a, b, ab, ba, aba. Tada A, B su nularne operacije strukture $\mathcal{J}$, a operacija $\bullet$, koja odgovara operacijskom znaku $\cdot$ odredjena je tablicom

$\bullet$	A	B	C	D	E
A	A	C	C	E	E
B	D	B	E	D	E
C	E	C	C	E	E
D	D	E	E	D	E
E	E	E	E	E	E

Ostaje da se ispita da li struktura $\mathcal{J}$, odnosno preslikavanje

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdot \\ A & B & \bullet \end{pmatrix}$$

---

[1] Recimo:

$abab \sim (aba)b \sim babb \sim bab \sim aba$

$baba \sim (bab)a \sim abaa \sim aba$ i sl.

zadovoljava jednakosti $\mathcal{G}$, kao i jednakosti „porekla":

$$C = A \bullet B, \quad D = B \bullet A, \quad E = (A \bullet B) \bullet A$$

U ovom slučaju, što se lako proverava, $\bar{\mathcal{S}}$ zadovoljava i jednakosti „porekla", kao i zakone $x \cdot x = x$, $(a \cdot b) \cdot a = b \cdot (a \cdot b)$. Medjutim, proveravanjem zakona $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ uvidja se da on ne važi u $\bar{\mathcal{S}}$. Recimo, zamenjujući x, y, z redom sa A, B, C na levoj strani se dobija iznos $(A \bullet B) \bullet C$, tj. C, a na desnoj $A \bullet (B \bullet C)$ odnosno E, a C i E su dva različita člana skupa $\bar{\mathcal{S}}$. Dakle, jednakost

(☆) $$(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$$

ne važi u $\bar{\mathcal{S}}$. Zaključak: medju naznačenim ima i ekvivalentnih. Kako ih pronaći? Zamenjujući u jednakosti (☆) umesto $A, B, C, \bullet$ redom $a, b, a \cdot b, \cdot$ dobijamo ovu jednakost

(☆☆) $$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a \cdot (b \cdot (a \cdot b))$$

To je jednakost asocijativnog vida, pa, dakle, jeste posledica formula $\mathcal{G}/_\Gamma$, odnosno termi $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$ i $a \cdot (b \cdot (a \cdot b))$ su medjusobno ekvivalentni. Dakle:

$$(ab)(ab) \sim a(b(ab)),$$

odakle koristeći jednakosti skoro–tablica $\mathcal{S}$ dobijamo

$$ab \sim a(aba) \quad (\text{Jer } b(ab) \sim aba)$$
$$\sim aba$$

pa su znači ab i aba medjusobno[1] ekvivalentni. Umesto starog skupa naznačenih sada možemo uzeti ovaj

$$\{a, b, ab, ba\}$$

Medjutim, nije teško zaključiti da su i ab i ba takodje ekvivalentni. Evo jednog dokaza:

$$ab \sim ab \cdot ab \sim aba \cdot b \sim bab \cdot a \sim ba \cdot ba \sim ba$$

Dakle, prema sadašnjem rasudjivanju, svaki član t skupa T ekvivalentan je sa jednim od ovih izraza

$$a, b, ab$$

Sada kao skup naznačenih uzimamo:

$$M = \{a, b, ab\}$$

Odgovarajuća skoro–tablica izgleda

[1] Primetite da izrazima ab, aba odgovaraju zamenjenici C i E – maločas pojavljeni.

	a	b	ab
a	a	ab	ab
b	ab	b	ab
ab	ab	ab	ab

U ovom slučaju nije teško ustanoviti da odnosna rešavajuća struktura zadovoljava zakone $\mathcal{F}$ i jednakosti porekla (u stvari, jednu takvu jednakost $C = A \bullet B$). Završni zaključak:

Elementi tražene slobodne strukture su C_a, C_b, $C_{a \cdot b}$, njene nularne operacije (odgovarajuće znacima a, b) su C_a, C_b, a operacija $\bullet$ je odredjena tablicom sličnom sa na kraju navedenom tablicom izraza a, b, ab.

65. Opisati slobodnu algebru zakona $\mathcal{F}$ nad skupom Γ u slučajevima

(i) $\mathcal{F} = \{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad a \cdot a = a, \quad b \cdot b = b\}$, $\Gamma = \phi$

(ii) $\mathcal{F} = \{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad a \cdot x = x\}$, $\Gamma = \{a, b\}$

(iii) $\mathcal{F} = \{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad x \cdot x = x\}$, $\Gamma = \{a, b, c\}$

(iv) $\mathcal{F} = \{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad a \cdot a = a, \quad (b \cdot b) \cdot b = b\}$ $\Gamma = \phi$

(a, b su znaci konstanata)

66. Opisati slobodnu algebru zakona

$$(a \cdot a) \cdot a = a, \quad a \cdot (a \cdot a) = a, \quad (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \quad (a \text{ je znak konstante})$$

nad $\Gamma = \phi$.

67. Opisati slobodnu semigrupu (tj. slobodnu algebru zakona $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$) nad skupom Γ:

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) ma koji skup.

68. Opisati slobodnu algebru zakona

$$x + 0 = x, \quad x + (-x) = 0, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

(0 je znak konstante, $-$ je operacijski znak dužine jedan, a $+$ operacijski znak dužine dva),

tj. slobodnu grupu nad skupom Γ:

(i) $\{a\}$, (ii) ϕ, (iii) $\{a, b\}$.

69. Opisati slobodnu komutativnu grupu nad skupom Γ:

(i) $\{a\}$, (ii) $\emptyset$, (iii) $\{a, b\}$.

70. Opisati slobodnu algebru zakona $x \cdot x = x \cdot x$ nad skupom $\Gamma = \{a, b, c\}$.

Napomena. Slobodna algebra iz prethodnog zadatka može se dobiti i polazeći od $\mathcal{F} = \phi$, ali uz dogovor da se skup operacijskih znakova sastoji iz jednog člana; iz $\cdot$.

71. **Stav potpunosti jednakosne logike.** Neka je C skup nekih znakova konstanata, a

O skup operacijskih znakova. Neka je, dalje, $t_1 = t_2$ jednakosna formula na jeziku $C \cup O$, a $\mathcal{F}$ skup izvesnih takvih formula. Dokazati ekvivalenciju:

$$\mathcal{F} \models_{\mathcal{J}} t_1 = t_2 \quad \text{akko} \quad \mathcal{F} \vdash_{\mathcal{J}} t_1 = t_2$$

tj. formula $t_1 = t_2$ je tačna na svim (normalnim)modelima skupa $\mathcal{F}$ ako i samo ako formula $t_1 = t_2$ je (sintaktička) posledica skupa $\mathcal{F}$. Posebno, ako je $\mathcal{F} = \phi$ imamo ekvivalenciju

$$\models_{\mathcal{J}} t_1 = t_2 \quad \text{akko} \quad \vdash_{\mathcal{J}} t_1 = t_2$$

Uputstvo. Jedan deo ekvivalencije:

$$\text{Ako } \mathcal{F} \vdash_{\mathcal{J}} t_1 = t_2, \text{ onda } \mathcal{F} \models_{\mathcal{J}} t_1 = t_2$$

je sasvim jednostavan – dokaz neposredan. Medjutim, obrat se dokazuje složenije. Pretpostavimo, naime, da važi $\mathcal{F} \models_{\mathcal{J}} t_1 = t_2$. Uočimo[1)]

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots\}$$

i označimo sa $\mathcal{S}$ odgovarajući slobodan model skupa formula $\mathcal{F}$. Formula $t_1 = t_2$ je na osnovu pretpostavke, tačna u tom modelu. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sve promenljive koje učestvuju u formuli $t_1 = t_2$, koju ćemo i ovako označiti

$$t_1(x_1, \ldots, x_k) = t_2(x_1, \ldots, x_k)$$

Za vrednosti promenljivih uzmimo redom

$$C_{\gamma_1}, \ldots, C_{\gamma_k}$$

Znači jednakost

$$t_1(C_{\gamma_1}, \ldots, C_{\gamma_k}) = t_2(C_{\gamma_1}, \ldots, C_{\gamma_k})$$

je tačna u strukturi $\mathcal{F}$. Na osnovu definicije operacija sa klasama prethodna jednakost je prevodiva na oblik

$$C_{t_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)} = C_{t_2(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)}$$

odakle zaključujemo

(☆) $\qquad \mathcal{F}|_{\Gamma} \vdash t_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = t_2(\gamma_1, \ldots, \gamma_k),$

na osnovu definicije slobodne strukture (videti primedbu zadatka 60) – gde je T skup svih izraza sagradjenih pomoću članova skupa $C \cup \Gamma$ kao znakova konstanata i operacijskih znakova O. Zamislimo neki dokaz iskaza (☆) i u tom dokazu svuda znake γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ redom zamenimo znacima $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Nije teško zaključiti da se tako dobija dokaz ovog iskaza

$$\mathcal{F} \vdash t_1(x_1, \ldots, x_k) = t_2(x_1, \ldots, x_k)$$

Time se završava dokaz stava potpunosti (odnosno njegovog II oblika). U stvari, ako se u prethodnom rasudjivanju uzme $\mathcal{F} = \phi$, ali za Γ opet izabere $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots\}$ tada se opet dolazi do jedne strukture $\mathcal{S}$ (videti prethodni zadatak), pa nastavljanjem rasudjivanja poput već izloženog na kraju se dobija dokaz i prvog oblika stava potpunosti.

1) Pretpostavljamo da su C, O i Γ medjusobno disjunktivni skupovi.

XIV BULOVE ALGEBRE

♦ Bulova algebra[1] $\mathcal{B} = (B, \cup, \cap, ', 0, 1)$ je algebarska struktura sa binarnim operacijama $\cup$, $\cap$, unarnom operacijom $'$ i konstantama 0,1. Aksiome Bulove algebre su formule

$$
\begin{array}{ll}
x \cup x = x & x \cap x = x \\
x \cup y = y \cup x & x \cap y = y \cap x \\
(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) & (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) \\
x \cup (x \cap y) = x & x \cap (x \cup y) = x \\
x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) & x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \\
x \cup 0 = x & x \cap 0 = 0 \\
x \cup 1 = 1 & x \cap 1 = x \\
x \cup x' = 1 & x \cap x' = 0
\end{array}
$$

♦ Značajniji primeri Bulovih algebri su:

(i) $\{\top, \bot\}$ – *algebra* u odnosu na operacije $\vee$, $\wedge$, $\neg$ uvedene istinitosnim tablicama. Pri tom ulogu konstanata 0,1 imaju redom $\bot$, $\top$.

(ii) Skup svih iskaznih formula (obrazovanih od izvesnih iskaznih slova) u odnosu na logičke operacije $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Ulogu konstanata 0,1 igraju proizvoljna kontradikcija, odnosno tautologija. Pri tome se relacija *ekv* tumači kao jednakost. To je tzv. *Lindenbaumova algebra*[2].

(iii) Skupovna algebra koju čine partitativan skup $\mathcal{P}(S)$ izvesnog skupa S u odnosu na operacije $\cup$, $\cap$, $'$ – unija, presek i komplement (u odnosu na S).

♦ Podskup F Bulove algebre $\mathcal{B}$ koji zadovoljava uslove

(i) $1 \in F$,

(ii) $x, y \in F \Rightarrow x \cap y \in F$

(iii) $x \in F \wedge y \in B \Rightarrow x \cup y \in F$ (x, y su proizvoljni elementi iz B – skupovnog dela Bulove algebre $\mathcal{B}$)

naziva se *filter*.

[1] Nazvana po imenu Georgea Boolea (1815–1864).

[2] Strože, ta se algebra uvodi kao količnička struktura algebre iskaznih formula u odnosu na relaciju e k v. Njeni elementi su, dakle, klase medjusobno ekvivalentnih formula.

♦ Filter F je *ultrafilter,* ukoliko je on pravi filter (tj. ukoliko $F \neq B$) i još je maksimalan (u odnosu na relaciju $\subseteq$). Uslov maksimalnosti, u stvari, znači da ne postoji neki drugi pravi filter G različit od F za koji vredi $F \subseteq G$.

ZADACI

1. Dokazati da iz ovih zakona Bulove algebre

$$x \cup y = y \cup x, \quad x \cup (y \cap x) = x, \quad (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z),$$
$$x \cap y = y \cap x, \quad x \cap (y \cup x) = x, \quad (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z),$$
$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

proizilazi distributivni zakon:

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

Rešenje. Jedan dokaz, zdesna nalevo, glasi:

$(x \cup y) \cap (x \cup z) = ((x \cup y) \cap x) \cup ((x \cup y) \cap z)$

(Primena pretpostavljenog distributivnog zakona)

$= x \cup ((x \cup y) \cap z)$

(Na osnovu komutativnih zakona $x \cap y = y \cap x$, $x \cup y = y \cup x$ i zakona apsorpcije $x \cap (x \cup y) = x$)

$= x \cup ((x \cap z) \cup (y \cap z))$

(Još jedanput primena pretpostavljenog distributivnog zakona, kao i komutativnog zakona za $\cap$)

$= (x \cup (x \cap z)) \cup (y \cap z)$

(Na osnovu asocijativnosti operacije $\cup$)

$= x \cup (y \cap z)$

(Prema zakonu apsorpcije $\cup$ prema $\cap$, i komutativnom zakonu za $\cap$)

Dakle: $(x \cup y) \cap (x \cup z) = x \cup (y \cap z)$

2. Dokazati da iz zakona:

$x \cup x = x$, $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$, $x \cup y = y \cup x$, $x \cap y = y \cap x$, $x \cap (y \cup x) = x$

proizlazi zakon:

$$x \cup (y \cap x) = x$$

3. Dokazati da u Bulovoj algebri vredi ovakav zakon skraćivanja

$$x \cup z = y \cup z \wedge x \cap z = y \cap z \Rightarrow x = y$$

Rešenje. Jedan dokaz je ovaj niz koraka

(1)	$x \cup z = y \cup z$	(Pretpostavka)
(2)	$x \cap z = y \cap z$	(Pretpostavka)
(3)	$(x \cup z) \cap z' = (y \cup z) \cap z'$	(Iz (1) „sečenjem" sa z')

(4) $x \cap z' = y \cap z'$ (Iz (3) primenom zakona: $(x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z)$, $x \cap x' = 0$, $x \cup 0 = x$)

(5) $(x \cap z) \cup (x \cap z') = (y \cap z) \cup (y \cap z')$ (Uniranjem jednakosti (2) i (4))

(6) $x \cap (z \cup z') = y \cap (z \cup z')$ (Primena distributivnog zakona $\cap$ prema $\cup$)

(7) $x = y$ (Jer: $z \cup z' = 1$, $x \cap 1 = x$)

Kraj dokaza.

4. Prema aksiomama Bulove algebre vredi:

$$Ako\ y = x',\ onda\ x \cup y = 1,\ x \cap y = 0$$

Dokazati da vredi i obratna implikacija

$$Ako\ x \cup y = 1,\ x \cap y = 0,\ onda\ y = x'$$

ili, drugim rečima, dokazati da je za svaki x (element Bulove algebre) njegov komplement *x' jedinstven.*

Rešenje. Dokaz jedinstvenosti sledi na osnovu ovog implikacijskog lanca.

$x \cup y = 1$, $x \cap y = 0$ *povlači* $(x \cup y) \cap x' = 1 \cap x'$, $(x \cap y) \cup x' = 0 \cup x'$

(Prva jednakost je presečena a druga unirana sa x')

povlači $x' \cap y = x'$, $x' \cup y = x'$

(Korišćenjem aksioma Bulove algrebre)

povlači $x' \cap y = x' \cap x'$, $x' \cup y = x' \cup x'$

(Primena zakona idempotencije)

povlači $y = x'$

(Skraćivanjem sa x', prema prethodnom zadatku)

5. Dokazati da iz aksioma Bulove algebre proizlazi jednakost $x'' = x$ (tj. $(x')' = x$).

6. U Bulovoj algebri vredi ekvivalencija $x = y \Longleftrightarrow x' = y'$. Dokazati.

7. Dokazati da u Bulovoj algebri vrede De Morganovi zakoni:

$$(x \cup y)' = x' \cap y', \quad (x \cap y)' = x' \cup y'$$

Uputstvo. Za dokaz, recimo, prve jednakosti dosta je izvesti (videti zadatak 4):

$$(x \cup y) \cup (x' \cap y') = 1, \qquad (x \cup y) \cap (x' \cap y') = 0$$

8. Pomoću osnovnih operacija Bulove algebre definišemo dve nove operacije označene sa $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$:

$$x \rightarrow y \overset{\text{def}}{=} x' \cup y,\ x \longleftrightarrow y \overset{def}{=} (x' \cup y) \cap (y' \cup x)$$

Dokazati jednakosti:

a) $x \rightarrow x = 1$, $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$, $x \rightarrow (y \cap z) = (x \rightarrow y) \cap (x \rightarrow z)$, $0 \rightarrow x = 1$, $x \rightarrow 1 = 1$,

b) $x \longleftrightarrow y = (x \rightarrow y) \cap (y \rightarrow x)$, $x \longleftrightarrow y = (x' \cap y') \cup (x \cap y)$, $x \longleftrightarrow x = 1$, $x \longleftrightarrow 0 = x$, $x \longleftrightarrow 1 = x$

9. Dokazati da u Bulovoj algebri vredi ekvivalencija

$$x = y \qquad \text{akko} \qquad x \longleftrightarrow y = 1$$

Rešenje. Dokaz izvodimo u dva smera. Pretpostavimo, najpre, da jeste $x=y$. Tada:

$$x \leftrightarrow y = x \leftrightarrow x = (x' \cup x) \cap (x' \cup x) = 1 \cap 1 = 1$$

Dakle: Ako $x=y$, onda $x \leftrightarrow y = 1$.

Dokaz obratne implikacije izgleda:

$x \leftrightarrow y = 1$ *povlači* $(x' \cup y) \cap (y' \cup x) = 1$

(Definicija operacije $\leftrightarrow$)

povlači $(x' \cap y') \cup (x' \cap x) \cup (y \cap y') \cup (y \cap x) = 1$

(Višestruka primena distributivnog zakona $\cap$ prema $\cup$)

povlači $(x' \cap y') \cup (y \cap x) = 1$

(Jer $x' \cap x = 0$, $0 \cup x = x$)

povlači $((x' \cap y') \cup (x \cap y)) \cap x = 1 \cap x$, $((x' \cap y') \cup (x \cap y)) \cap y = 1 \cap y$

(Prethodna jednakost je „presečena" sa x, odnosno sa y)

povlači $x \cap y = x$, $x \cap y = y$

(Na osnovu distributivnog zakona $\cap$ prema $\cup$, kao i: $x \cap x' = 0$, $x \cup 0 = x$, $1 \cap x = x$)

povlači $x = y$

(Na osnovu simetrije i tranzitivnosti jednakosti)

Dakle: Ako $x \leftrightarrow y = 1$, onda $x = y$. Kraj dokaza.

10. Obrazovati skupovnu Bulovu algebru odredjenu skupom $S = \{1,2\}$.

Rešenje. Elementi te algebre su svi podskupovi od S , odnosno:

(☆) ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$

dok tablice skupovnih operacija unije, preseka, komplementa (u odnosu na S) izgledaju

$\cup$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

$\cap$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{1\}$	ϕ	$\{1\}$	ϕ	$\{1\}$
$\{2\}$	ϕ	ϕ	$\{2\}$	$\{2\}$
$\{1,2\}$	ϕ	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$

	$'$
ϕ	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	ϕ

Skupovni identiteti koji odgovaraju aksiomama Bulove algebre vrede za proizvoljne skupove, pa samim tim i za uočena posebna četiri skupa (☆).

11. Neka je $m = p_1 p_2 \dots p_k$ prirodan broj čiji su prosti činioci $p_1, p_2, \dots p_k$ svi medjusobno različiti, i neka je B skup svih činilaca broja m. Dokazati da je B Bulova algebra u odnosu na operacije $\cup$, $\cap$, ' i konstante[1] **0**,**1** ovako uvedene:

$$x \cup y \text{ je } NZS\,(x,y), \quad x \cap y \text{ je } NZD\,(x,y), \quad x' \text{ je } m : x,$$

$$\mathbf{0} \text{ je broj } 1, \qquad \mathbf{1} \text{ je broj } m$$

Recimo, ako $m = 42$ (tj. $m = 2 \cdot 3 \cdot 7$), onda:

$B = \{1, 2, 3, 7, 2 \cdot 3, 2 \cdot 7, 3 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 7\} = \{1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 42\}$

12. Uočimo sve iskazne formule obrazovane od slova p, q i relaciju *ekv*. Obrazovati odgovarajuću Lindenbaum–ovu algebru.

Rešenje. Postoji ukupno šesnaest[2] medjusobno različitih (različitih u smislu relacije *ekv*. tj. medjusobno neekvivalentnih) iskaznih formula, i to su recimo (u kanonskom rastavnom obliku):

$\bot$ (tj. pp'), pq, $p'q$, pq', $p'q'$, $pq+p'q$, $pq+pq'$, $pq+p'q'$, $p'q+pq'$, $p'q+p'q'$, $pq'+p'q'$, $pq+p'q+pq'$, $pq+p'q+p'q'$, $pq+pq'+p'q'$, $p'q+pq'+p'q'$, $pq+p'q+pq'+p'q'$ (tj. $\top$))

(Logičke znake $\wedge$, $\vee$, $\neg$ zamenili smo redom sa $\cdot$, +, ').

13. Dokazati da skup svih podskupova X skupa prirodnih brojeva N koji imaju svojstvo:

ili je X konačan ili je njegov komplement X' konačan

čini Bulovu algebru u odnosu na operacije $\cup$, $\cap$, ' (komplement se uzima u odnosu na N), i konstante ϕ, N (ϕ je 0, N je 1).

14. **Mreža** (jedno uopštenje Bulove algebre) je algebarska struktura $\mathcal{M} = (M, \cup, \cap)$ sa dvema binarnim operacijama $\cup$, $\cap$ i aksiomama:

$$x \cup x = x \qquad\qquad x \cap x = x$$

$$x \cup y = y \cup x \qquad\qquad x \cap y = y \cap x$$

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) \qquad\qquad (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$$

$$x \cup (x \cap y) = x \qquad\qquad x \cap (x \cup y) = x$$

To je tzv. *algebarska definicija* mreže.

Mreža je *distributivna*, ukoliko zadovoljava zakone

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z), \qquad x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

---

[1] Konstante Bulove algebre označili smo sa **0**,**1** da se (u ovom primeru) ne bi mešale sa brojevima 0,1.

[2] Ima ih 16, jer toliko ima binarnih operacija skupa $\{\top, \bot\}$, a svakoj operaciji odgovara tačno jedna formula u kanonskom rastavnom obliku. O tome videti poglavlje VIII E k v i v a l e n t n o s t i s k a z n i h f o r m u l a.

Dokazati da je skup realnih brojeva u odnosu na operacije *min*, *max* distributivna mreža.

Uputstvo. Zadatak se svodi na dokazivanje ovih *min–max* identiteta

$$max(x,y) = x \qquad min(x,x) = x$$

$$max(x,y) = max(y,x) \qquad min(x,y) = min(y,x)$$

$$max(max(x,y),z) = max(x,max(y,z)) \qquad min(min(x,y),z) = min(x,min(y,z))$$

$$max(x,min(x,y)) = x \qquad min(x, max(x,y)) = x$$

$$max(x, min(y,z)) = min(max(x,y), max(x,z)) \qquad min(x,max(y,z)) = max(min(x,y), min(x, z))$$

Prva četiri identiteta slede neposredno. Dokazi preostalih izvode se svodjenjem na odgovarajuće tautologije kao: $(p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$, $p \vee (q \wedge p) \Longleftrightarrow p$ i sl. Pri tome se koriste ove ekvivalencije

$$x=y \Longleftrightarrow (\forall z)(z \leqslant x \Longleftrightarrow z \leqslant y), \quad z \leqslant min(x,y) \Longleftrightarrow z \leqslant x \wedge z \leqslant y,$$

$$z \leqslant max(x,y) \Longleftrightarrow z \leqslant x \vee z \leqslant y$$

dokazane u tački IX *Razni primeri* (zadaci 65, 66).

15. Dokazati da skup prirodnih brojeva u odnosu na operacije NZD (najveći zajednički delitelj), NZS (najmanji zajednički sadržalac) čini distributivnu mrežu.

Uputstvo. Najpre dokazati ove ekvivalencije o prirodnim brojevima

$$x = y \Longleftrightarrow (\forall p)(\forall k)(p^k \mid x \Longleftrightarrow p^k \mid y),$$

$$p^k \mid \mathrm{NZD}(x,y) \Longleftrightarrow p^k \mid x \wedge p^k \mid y, \qquad p^k \mid \mathrm{NZS}(x,y) \Longleftrightarrow p^k \mid x \vee p^k \mid y,$$

Tu je p ma koji prost broj a k ma koji prirodan broj. Primenom tih ekvivalencija identiteti koje treba dokazati svode se na odgovarajuće tautologije.

16. Pomoću operacija mreže definišemo relaciju $\leqslant$ na ovaj način

$$x \leqslant y \quad \text{akko} \quad x \cup y = y$$

a) Dokazati da se relacija $\leqslant$ može i ovako definisati: $x \leqslant y$ *akko* $x \cap y = x$

b) Dokazati da je $\leqslant$ relacija poretka saglasna sa operacijama $\cup$, $\cap$.

c) U odnosu na relaciju $\leqslant$ svaki dvočlan podskup neke mreže ima supremum i infimum.

Uputstvo. a) Dokazati ekvivalenciju: $x \cup y = y$ *akko* $x \cap y = x$. b) Recimo jedan dokaz antisimetričnosti relacije $\leqslant$ izgleda: Iz pretpostavki $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ sledi $x \cup y = y$, $x \cup y = x$ a odatle $x = y$. c) Dokazati da vrede jednakosti

$$sup(x,y) = x \cup y, \qquad inf(x,y) = x \cap y$$

Obrazloženje, na primer, za prvu od njih izgleda ovako:

Pošto $x \cup (x \cup y) = x \cup y$, $y \cup (x \cup y) = x \cup y$, to $x \leqslant x \cup y$, $y \leqslant x \cup y$, odnosno $x \cup y$ je jedno gornje ograničenje skupa $\{x, y\}$. Dalje, ako $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ (odnosno $x \cup z=z$, $y \cup z=z$), to zaključujemo

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) = x \cup z = z,$$

odnosno $x \cup y \leqslant z$ pa je $x \cup y$ najmanje gornje ograničenje skupa $\{x, y\}$. Drugim rečima, $x \cup y$ je supremum tog skupa.

17. Neka je $\leqslant$ relacija poretka Bulove algebre uvedena kao i u mreži definicijom (videti prethodni zadatak):

$$x \leqslant y \quad \text{akko} \quad x \cup y = y$$

Dokazati da vrede ekvivalencije

$$x \leqslant y \quad \text{akko} \quad x' \geqslant y', \qquad x \leqslant y \quad akko \quad x \to y = 1$$

18. Dokazati da su za proizvoljnu relaciju poretka $\leqslant$ (izvesnog skupa) tačne ekvivalencije[1])

$$a \geqslant sup(x,y) \Longleftrightarrow a \geqslant x \wedge a \geqslant y, \qquad a \leqslant inf(x,y) \Longleftrightarrow a \leqslant x \wedge a \leqslant y$$

19. Pored algebarske definicije (navedene u zadatku 14) mreža se može uvesti i tzv. *relacijskom definicijom* koja glasi:

Delimično uredjen sistem $\mathcal{M} = (M, \leqslant)$ – relacija $\leqslant$ je relacija poretka skupa M, je mreža ukoliko svaki dvočlan podskup od M ima supremum i infimum.

Dokazati da su algebarska i relacijska definicija mreže medjusobno ekvivalentne u ovakvom smislu:

Ako je $\mathcal{M} = (M, \cup, \cap)$ mreža uvedena algebarskom definicijom, onda se može definisati relacija $\leqslant$ skupa M takva da za nju budu zadovoljeni uslovi relacijske definicije. Slično obratno, ako je mreža $\mathcal{M} = (M, \leqslant)$ data relacijskom definicijom, u skupu M se mogu definisati operacije $\cup$, $\cap$ takve da budu zadovoljene algebarske aksiome mreže.

Uputstvo. Ukoliko je mreža $\mathcal{M}$ data algebarskom definicijom, relacija $\leqslant$ uvodi se ovako

$$x \leqslant y \quad \text{akko} \quad x \cup y = y$$

Ta je relacija relacija poretka skupa M i u odnosu na nju svaki dvočlan podskup od M ima supremum i infimum (videti zadatak 16), tj. zadovoljeni su uslovi relacijske definicije.

U slučaju kada je, obratno, $\mathcal{M}$ data relacijskom definicijom, operacije $\cup$, $\cap$ uvode se na ovaj način

$$x \cup y \overset{\text{def}}{=\!=} sup(x,y), \qquad x \cap y \overset{\text{def}}{=\!=} inf(x,y)$$

i dokazuje se da one zadovoljavaju zakone (algebarske aksiome mreže):

---

1) To su, u stvari, uslovne ekvivalencije. One vrede uz uslov da postoji sup(x,y) odnosno inf(x,y).

$$x \cup x = x \qquad\qquad x \cap x = x$$
$$x \cup y = y \cup x \qquad\qquad x \cap y = y \cap x$$
$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) \qquad\qquad (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$$
$$x \cup (x \cap y) = x \qquad\qquad x \cap (x \cup y) = x$$

Zakoni idempotencije kao i komutativni zakoni dokazuju se neposredno. Za dokaz ostalih jednakosti podesno je koristiti ekvivalencije

$$x = y \Leftrightarrow (\forall a)\,(a \geqslant x \Leftrightarrow a \geqslant y), \qquad x = y \Leftrightarrow (\forall a)\,(a \leqslant x \Leftrightarrow a \leqslant y)$$
$$a \geqslant sup(x,y) \Leftrightarrow a \geqslant x \wedge a \geqslant y, \qquad a \leqslant inf(x,y) \Leftrightarrow a \leqslant x \wedge a \leqslant y$$

koje vrede za proizvoljnu relaciju poretka $\leqslant$ (videti zadatak 18). Njihovim korišćenjem dokaz, recimo, asocijativnosti operacije $\cup$, odnosno dokaz jednakosti

$$sup(sup(x, y), z) = sup(x, sup(y, z))$$

izgleda:

$$\begin{aligned}
&sup(sup(x, y), z) = sup(x, sup(y, z))\\
\Leftrightarrow\ & (\forall a)\,(a \geqslant sup(sup(x,y), z) \Leftrightarrow a \geqslant sup(x, sup(y, z)))\\
\Leftrightarrow\ & (\forall a)\,(a \geqslant sup(x,y) \wedge a \geqslant z \Leftrightarrow a \geqslant x \wedge a \geqslant sup(y, z))\\
\Leftrightarrow\ & (\forall a)\,((a \geqslant x \wedge a \geqslant y) \wedge a \geqslant z \Leftrightarrow a \geqslant x \wedge (a \geqslant y \wedge a \geqslant z)\\
\Leftrightarrow\ & \top \quad \text{(Na osnovu tautologije } (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r))
\end{aligned}$$

Primedba. Koristeći relacijsku definiciju mreže Bulova algebra se može i ovako uvesti: To je distributivna mreža koja

(i) ima tzv. *univerzalne granice*, tj. elemente 0,1 takve da za svaki x vredi $0 \leqslant x \leqslant 1$,

(ii) *komplementarna* je, tj. za svaki element x postoji njegov komplement – to je takav element y za koji vredi $inf(x,y) = 0$, $sup(x, y) = 1$.

To bi bila *relacijska* definicija Bulove algebre koja je, naravno, ekvivalentna sa *algebarskom* definicijom datom na početku ovog odeljka.

20. Filter F Bulove algebre B bio je odredjen uslovima

(i) $1 \in F$,

(ii) $x, y \in F \Rightarrow x \cap y \in F$,

(iii) $x \in F \wedge y \in B \Rightarrow x \cup y \in F$

Dokazati da se uslov (iii) može zameniti sa

(iii') $x \in F \wedge y \geqslant x \Rightarrow y \in F$

21. Neka je $\mathcal{B}$ skupovna algebra odredjena skupom $S = \{1, 2, 3\}$.
Odrediti: a) sve filtere, b) sve ultrafiltere te algebre.

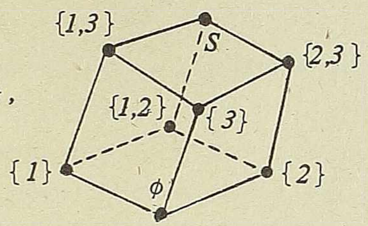
Odgovor. a) Kako $B = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, S\}$, to su filtri:

$\{S\}$, $\{S, \{1,2\}\}$, $\{S, \{1,3\}\}$, $\{S, \{2,3\}\}$,

$\{S, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}\}$, $\{S, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1\}\}$

$\{S, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3\}\}$, B

b) Ultrafiltri su:



$\{S, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}\}$, $\{S, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3\}\}$,

$\{S, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1\}\}$.

22. Dokazati: Filter F je pravi filter Bulove algebre $\mathcal{B}$ ako i samo ako ne postoji nijedan element x takav da i x i x' pripadaju F.

Rešenje. Ako F jeste pravi filter, i ako za neki x_0 (iz B) vredi: $x_0 \in F$, $x_0' \in F$, onda $x_0 \cap x_0'$ tj. 0 pripada F. Odatle zaključujemo da svaki element x iz B pripada F (jer $x \geqslant 0$ – videti zadatak 20), tj. da $F = B$. Suprotno sa pretpostavkom da je F pravi filter. Dokaz obratne implikacije, odnosno njene kontrapozicije:

Ako F nije pravi filter, tj. ako $F = B$, onda postoji element x takav da i x i x' pripadaju F

sledi neposredno (postojeći x je proizvoljan element iz B).

23. Dokazati da za pravi filter F Bulove algebre $\mathcal{B}$ vredi ekvivalencija

F je ultrafilter akko *F zadovoljava uslov* (U) $: (\forall x \in B)$ *(ili $x \in F$ ili $x' \in F$).*

Dokaz. *Ako*: Pretpostavimo da je uslov (U) ispunjen i da F nije maksimalan filter, odnosno da postoji neki pravi filter G takav da: $F \subseteq G$, $F \neq G$. Tada postoji element x_0 za koji: $x_0 \notin F$, $x_0 \in G$. Koristeći (U) zaključujemo $x_0' \in F$, odnosno $x_0' \in G$. Pošto $x_0 \in G$, $x_0' \in G$, to, prema prethodnom zadatku, G nije pravi filter. Kontradikcija sa pretpostavkom.

Samo ako: Dokazujemo kontrapoziciju odgovarajuće implikacije, tj.

Ako nije (U), *onda F nije ultrafilter.*

Pretpostavimo, stoga, da uslov (U) nije ispunjen. Tada mogu nastupiti dva slučaja

(i) Za neki x_0 vredi: $x_0 \in F$, $x_0' \in F$,

(ii) Za neki x_0 vredi: $x_0 \notin F$, $x_0' \notin F$.

Prvi slučaj je u suprotnosti sa pretpostavkom da je F pravi filter. U drugom slučaju uočavamo skup:

$G = \{fx_0 + x \mid f \in F, x \in B\}$ (operacije $\cap$, $\cup$ označene su redom sa $\cdot$, $+$). Taj skup jeste filter. Obrazloženje: Neka su $fx_0 + x$, $gx_0 + y$ dva elementa iz G, tada $(fx_0 + x)(gx_0 + y) = fgx_0 + fyx_0 + gxx_0 + xy = (fg+fy+gx)x_0 + xy$, te njihov presek takodje pripada G. Slično, unija elementa iz G sa elementom iz B je član skupa G.

Dalje, neposredno se proverava da $F \subseteq G$ (jer $f = fx_0 + f$) i da $F \neq G$ (jer $x_0 \notin F$, $x_0 \in G$, pošto $x_0 = 1x_0 + 0$).

Preostaje još da se dokaže da je G pravi filter, tj. da je $G \neq B$. Naime, jedan element koji ne pripada G je baš x_0', jer bi iz pretpostavke $x_0' \in G$ sledilo:

$$x'_o = fx_o + x \qquad \text{(za neki } x \text{ iz } B \text{ i neki } f \text{ iz } F\text{)}$$

odakle se uniranjem obeju strana jednakosti sa x'_o dobija:

$$x'_o = f + (x + x'_o)$$

što bi značilo da $x'_o \in F$. Kontradikcija sa pretpostavkom u slučaju (ii).

Na osnovu dokazanih činjenica zaključujemo da F nije maksimalni pravi filter, tj. da F nije ultrafilter. Kraj dokaza.

24. Neka je $\mathcal{B}$ algebra podskupova skupa prirodnih brojeva N, a F skup svih onih podskupova od N čiji su komplementi konačni. Dokazati da je F filter. Da li je to ultrafilter?

Rešenje. Komplement skupa N (a to je konstanta 1 uočene Bulove algebre) je prazan, dakle konačan skup. Znači $N \in F$. Dalje, ako $X, Y \in F$ – što znači da su komplementi X', Y' konačni – onda $X \cap Y \in F$, jer $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$ je konačan kao unija konačnih skupova. Najzad, ako $X \in F$, $Y \in B$, onda pošto je skup $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$ konačan (kao presek skupa Y' sa konačnim skupom X'), to i $X \cup Y \in F$. Zaključak je da F jeste filter.

Medjutim, F nije ultrafilter, jer bi to prema prethodnom zadatku značilo da za svaki podskup X skupa prirodnih brojeva vredi:

ili je X konačan ili je njegov komplement X' konačan

što nije tačno. Primer skupa za koji taj uslov nije ispunjen je $2N$–skup svih parnih brojeva.

25. Odrediti sve filtre i ultrafiltre Bulove algebre

a) činilaca od 42, b) činilaca od 3003

uvedene u zadatku 11.

26. Neka je F ultrafilter Bulove algebre $\mathcal{B}$ i F' podskup od B uveden na ovaj način

$$F' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{f' \mid f \in F\}$$

Dokazati: (i) $F \cap F' = \phi$, (ii) $F \cup F' = B$.

27. Relacija $\equiv$ (mod F) Bulove algebre $\mathcal{B}$ uvodi se na ovaj način

$$x \equiv y \ (\text{mod F}) \text{ akko } x \longleftrightarrow y \in F \qquad (F \text{ je neki filter})$$

Dokazati da je $\equiv$ (mod F) kongruencija algebre $\mathcal{B}$.

Uputstvo. Treba dokazati da je $\equiv$ (mod F) relacija ekvivalencije saglasna sa operacijama $\cap$, $\cup$, $'$:

$$x \equiv x (\text{mod F}), \quad x \equiv y (\text{mod F}) \Rightarrow y \equiv x (\text{mod F})$$

$$x \equiv y (\text{mod F}) \wedge y \equiv z (\text{mod F}) \Rightarrow x \equiv z (\text{mod F}), \quad x \equiv y (\text{mod F}) \Rightarrow x' \equiv y' (\text{mod F})$$

$$x \equiv y (\text{mod F}) \Rightarrow x \cup z \equiv y \cup z (\text{mod F}), \quad x \equiv y (\text{mod F}) \Rightarrow x \cap z \equiv y \cap z (\text{mod F})$$

28. Neka je $\mathcal{B}$ algebra podskupova skupa $\{1, 2, 3\}$ i F filter $\{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. Šta su klase ekvivalencije u odnosu na relaciju $\equiv$ (mod F) ?

Odgovor. $\{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$, $\{\{1\}, \{1,3\}\}$, $\{\{2\}, \{2,3\}\}$, $\{\phi, \{3\}\}$.

29. Uočimo kongruenciju $\equiv$ (mod F) Bulove algebre $\mathcal{B}$ u odnosu na filter F definisanu u zadatku 27. Dokazati da su klase ekvivalencije skupovi oblika $F \longleftrightarrow x$, gde

$$F \longleftrightarrow x \overset{\text{def}}{=} \{f \longleftrightarrow x | f \in F\} \quad (x \text{ je iz } B)$$

30. Neka je F ultrafilter Bulove algebre $\mathcal{B}$. Koliko ima klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju $\equiv$ (mod F)?

Odgovor. Ima ih dve, i to su F i F', gde $F' = \{f' | f \in F\}$.

31. Neka je $\sim$ kongruencija Bulove algebre $\mathcal{B}$. Dokazati da za neki filter F te algebre važi ekvivalencija

$$x \sim y \quad akko \quad x \longleftrightarrow y \in F \qquad (\text{za sve } x, y \in B)$$

32. U vezi sa skupom izvesnih iskaznih formula $\mathcal{F}$ uočimo skup *Con* $\mathcal{F}$ koga čine sve semantičke posledice iz $\mathcal{F}$. Dokazati da je *Con* $\mathcal{F}$ filter u odgovarajućoj Lindenbaumovoj algebri.

Rešenje. Dokazujemo da su sva tri uslova iz definicije filtra ispunjena.

(i) Proizvoljna tautologija očigledno pripada *Con* $\mathcal{F}$.

(ii) Ako su formule A, B iz *Con* $\mathcal{F}$, tj. ako $\mathcal{F} \models A$, $\mathcal{F} \models B$, onda neposredno zaključujemo da vredi i $\mathcal{F} \models A \wedge B$, odnosno $A \wedge B$ takodje pripada *Con* $\mathcal{F}$.

(iii) Ako $\mathcal{F} \models A$ i B je proizvoljna iskazna formula, tada i $\mathcal{F} \models A \vee B$, jer je formula $A \Rightarrow A \vee B$ tautologija.

33. Neka je $\mathcal{B}$ neka Lindenbaumova algebra i $\mathcal{F}$ njen podskup. Dokazati ekvivalenciju:

$$\mathcal{F} \text{ je filter ako i samo ako } Con\ \mathcal{F} = \mathcal{F}$$

34. Uočimo Lindenbaumovu algebru iskaznih formula obrazovanih od slova p_1, p_2, p_3, ... , i skup

$$\mathcal{F} = \{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3}, \dots\},$$

gde su α_1, α_2, α_3, ... izvesni elementi skupa $\{\top, \bot\}$. Dokazati da je *Con* $\mathcal{F}$ ultrafilter.

Uputstvo. Prema zadatku 33 skup *Con* $\mathcal{F}$ je filter.
Za dokaz da je to i ultrafilter dosta je dokazati tvrdjenje

$$ili \quad \mathcal{F} \models A \quad ili \quad \mathcal{F} \models \neg A \qquad (A \text{ ma koja iskazna formula})$$

koje sledi na osnovu zadataka 72, 73 tačke VII *Iskazne formule. Tautologije.*

35. U Bulovoj algebri iz prethodnog zadatka uočimo neki filter $\mathcal{F}$. Dokazati:

je ultrafilter ako i samo ako se medju njegovim elementima nalaze i formule oblika $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, $p_3^{\alpha_3}$, ... za neke α_1, α_2, α_3, ... iz skupa $\{\top, \bot\}$.

36. Neka je F podskup Bulove algebre $\mathcal{B}$. Dokazati da je F ultrafilter akko je za sve

elemente x, y te algebre ispunjeno

$$x \in F \text{ i } y \in F \text{ akko } x \cap y \in F;\ x \in F \text{ ili } y \in F \text{ akko } x \cup y \in F$$

$$x \notin F \text{ akko } x' \in F;\ 1 \in F$$

37. (i) Neka je $\mathcal{M}$ distributivna mreža i $P(x, y, z)$ izraz sagradjen od promenljivih x, y, z i operacijskih znakova $\cap$, $\cup$. Dokazati da je u toj mreži $P(x, y, z)$ identički jednak sa unijom nekoliko od sledećih izraza

$$x,\ y,\ z,\ y \cap z,\ z \cap x,\ x \cap y,\ x \cap y \cap z$$

Recimo, važi identitet

$$(x \cup y) \cap (y \cup z) \cap (z \cup x) = (x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x)$$

(ii) Da li $P(x, y, z)$ može biti identički jednak sa dve takve unije?

38. (i) Neka je B Bulova algebra i $P(x,y)$ izraz sagradjen od promenljivih x, y i operacijskih znakova $\cap$, $\cup$, $'$. Dokazati da je u toj algebri $P(x,y)$ identički jednak sa nekim izrazom oblika

$$(A \cap x \cap y) \cup (B \cap x' \cap y) \cup (C \cap x \cap y') \cup (D \cap x' \cap y')$$

gde su A, B, C, D članovi skupa $\{0,1\}$.

(ii) Dokazati da je $P(x, y)$ identički jednak izrazu

$$(P(1,1) \cap x \cap y) \cup (P(1,0) \cap x \cap y') \cup (P(0,1) \cap x' \cap y) \cup (P(0,0) \cap x' \cap y')$$

39. Neka su $F(x_1, \ldots, x_n)$, $G(x_1, \ldots, x_n)$ formule oblika $t_1 = t_2$, gde su t_1, t_2 izrazi gradjeni od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ i operacijskih znakova $\cap$, $\cup$, $'$.

(i) Dokazati da je formula $F(x_1, \ldots, x_n)$ identitet u svakoj Bulovoj algebri ukoliko je identitet u dvočlanoj Bulovoj algebri $\{0,1\}$.

(ii) Dokazati da implikacija

$$\textit{Ako } F(x_1, \ldots, x_n), \textit{ onda } G(x_1, \ldots, x_n)$$

važi u svakoj Bulovoj algebri ukoliko važi u dvočlanoj Bulovoj algebri $\{0,1\}$.

Uputstvo. (i) Bez smanjenja opštosti za F se može uzeti da je oblika $t_1 = 0$. Dalje se može, recimo, koristiti, „unijski" oblik (koji je u slučaju $n=2$ opisan u zadatku 38).

(ii) Dokazati da je u Bulovoj algebri $\{0,1\}$ implikacija oblika

(1) *Ako* $t_1(x_1, \ldots, x_n) = 1$, *onda* $t_2(x_1, \ldots, x_n) = 1$

ekvivalentna sa jednakošću

(2) $$t_1 \to t_2 = 1$$

a potom koristiti tvrdjenje (i). Jedan dokaz da iz (1) sledi (2) glasi. Neka važi (1), tj. kad god je za neke vrednosti $x_1, \ldots, x_n$ Bulove algebre $\{0,1\}$ ispunjena jednakost $t_1 = 1$, da je onda ispunjena i jednakost $t_2 = 1$. Medjutim, pretpostavimo da ne važi (2), tj. da za neke vrednosti $x_1^0, \ldots, x_n^0$ važi različitost

(3) $$t_1 \to t_2 \neq 1$$

Budući da je reč o dvočlanoj algebri iz (3) sledi

$$t_1 \to t_2 = 0$$

a odatle $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ (za vrednosti $x_1^0, \ldots, x_n^0$). Kontradikcija sa implikacijom (1).

XV PRIRODNI BROJEVI

♦ Prirodni brojevi

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

predstavljaju jednu od najstarijih i najznačajnijih tvorevina ljudskog uma. Mada oni, medju svim matematičkim pojmovima, deluju skoro najjasnije, tokom njihovog aksiomatskog zasnivanja iskrsle su razne poteškoće od kojih neke ni do danas nisu prebrodjene.

♦ Takozvana *elementarna teorija brojeva* – označićemo je sa S, u kojoj se aksiomatski sredjuju svojstva osnovnih brojevnih operacija i relacija, ima za polazne pojmove broj *nulu* i operacije *sledbenik, sabiranje, množenje* (sa uobičajenim oznakama 0, $'$, $+$, $\cdot$). Aksiome[1] su:

(S1) $0 \neq x'$

(S2) $x' = y' \Rightarrow x = y$

(S3) $x + 0 = x$

(S4) $x + y' = (x + y)'$

(S5) $x \cdot 0 = 0$

(S6) $x \cdot y' = x \cdot y + x$

(S7) $I(0) \wedge (\forall x)(I(x) \Rightarrow I(x')) \Rightarrow (\forall x)\, I(x)$, gde je $I(x)$ proizvoljna predikatska formula (I reda) na jeziku koga čine: 0, $'$, $+$, $\cdot$, $=$

(S8) Aksiome jednakosti[2] : $x = x$, $x = y \Rightarrow y = x$, $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$, $x = y \Rightarrow x' = y'$, $x = y \wedge u = v \Rightarrow x + u = y + v$, $x = y \wedge u = v \Rightarrow x \cdot u = y \cdot v$.

♦ Na osnovu aksiome indukcije (S7) neposredno se dokazuje ispravnost ovog pravila izvodjenja

$$\frac{I(0),\ (\forall x)\ (I(x) \Rightarrow I(x'))}{(\forall x)\ I(x)}$$

♦ Iz prethodnih aksioma izvode se sva uobičajena algebarska svojstva sabiranja i množenja prirodnih brojeva kao:

---

[1] Podrazumevamo svuda univerzalne kvantore, mada postoji i druga mogućnost, da aksiome budu formule (S1)–(S8) bez kvantora, ali tada dopuštamo i primenu pravila g e n e r i z a c i j e: $\dfrac{A(x)}{(\forall x)\ A(x)}$ (videti prvi zadatak).

[2] Umesto svih pretpostavljenih svojstava jednakosti, dovoljno je uzeti, na primer, samo ova dva: $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$, $x = y \Rightarrow x' = y'$. O tome videti [39]

$$(x+y)+z=x+(y+z) \qquad (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$$
$$x+y=y+x \qquad x\cdot y=y\cdot x$$
$$x+0=x \qquad x\cdot\overline{1}=x$$
$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

Pri tome izraze, $0'$, $0''$, $0'''$, ... označavamo redom sa, $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$, ... i zovemo ih *numerali* ili *brojke*. Skup svih numerala označavamo sa $\overline{N}$.

◆ Osnovne relacije prirodnih brojeva $<, >, \leqslant, \geqslant, |$ uvode se definicijama

$$x<y \overset{\text{def}}{\iff} (\exists z\neq 0)x+z=y, \quad x>y \overset{\text{def}}{\iff} y<x,$$

$$x\leqslant y \overset{\text{def}}{\iff} x<y \vee x=y, \quad x\geqslant y \overset{\text{def}}{\iff} y\leqslant x,$$

$$x|y \overset{\text{def}}{\iff} (\exists z)y=x\cdot z$$

i dokazuje se da iz aksioma (S1)–(S8) proizlaze njihova uobičajena svojstva (videti zadatke 20, 27).

◆ Aksiome elementarne teorije brojeva u skladu su sa tzv. *Peanovim aksiomama* za prirodne brojeve (nastale 1888. godine i potiču, u stvari, od Dedekinda i Peana[1]) koje glase:

(P1) *0 je prirodan broj.*

(P2) *Za svaki prirodan broj n postoji tačno jedan prirodan broj n', tzv. naslednik za n.*

(P3) *$0\neq n'$, za svaki prirodan broj n.*

(P4) *Ako $m'=n'$, onda $m=n$.*

(P5) *Ako je M neki podskup skupa prirodnih brojeva koji sadrži 0 i sa svakim brojem n sadrži i njegovog naslednika n', onda M sadrži sve prirodne brojeve.*

Tu teoriju označimo sa P.

◆ Primetimo da su u teoriji P prirodni brojevi, u stvari, numerali (i jedino oni), što iz elementarne teorije brojeva ne sledi. Naime, pored tzv. *standardnog* modela koji čini skup prirodnih brojeva N u odnosu na uobičajene operacije, teorija S ima i tzv. *nestandardne*[2] modele sa širim domenima.

Medju aksiomama teorije P ne nalaze se formule (S3)–(S6) koje sada prelaze u definicije sabiranja i množenja. Korektnost takvih definicija dokazuje se korišćenjem skupovnih pojmova, što je u slučaju teorije P dozvoljeno.

Istaknimo još da je aksioma indukcije (S7) uža od odgovarajuće aksiome (P5) u kojoj učestvuje proizvoljan podskup prirodnih brojeva. Medjutim, ne može se svaki podskup prirodnih brojeva opisati predikatskim formulama I reda, a pogotovu ne na jeziku: 0, $'$, $+$, $\cdot$, $=$.

[1] Richard Dedekind (1831–1916), Giuseppe Peano (1858–1932).

[2] Videti tačku XVII Počeci teorije modela.

♦ Teorija S je nastala prilagodjavanjem Peanovih aksioma na predikatski jezik I reda[1] koji je za matematiku najjednostavniji. Medjutim, za uzvrat se pojavljuju nestandardni modeli. Uz to, dok su svaka dva modela teorije P medjusobno izomorfna, tj. ta je teorija kako se to kaže, *kategorična*, tako nešto ne važi za teoriju S.

Dalje, iako se mnoge činjenice o prirodnim brojevima mogu dokazati u teoriji S, ona ne pokriva potpuno naš početni, intuitivni pojam broja. Naime, nisu sva svojstva prirodnih brojeva izraziva formulama predikatskog računa I reda, pa se o takvim svojstvima i ne može govoriti da li jesu ili nisu teoreme u S. Pored toga, i kada se ograničimo na svojstva I reda (i to na jeziku 0, ', +, $\cdot$, =), dokazuje se da postoji zatvorena formula F koja je tačna za prirodne brojeve, ali takva da ni F ni $\neg F$ nisu teoreme teorije S. Drugačije se kaže da je S *nepotpuna* teorija (to je tzv. Gedelova[2] teorema nepotpunosti teorije S dokazana 1931. godine). Šta više, dokazano je da se S ne može nikako efektivno upotpuniti (dodavanjem novih aksioma), odnosno ona je *esencijalno nepotpuna*.

Najzad, kako teorija S ima model (jer mi prihvatamo da prirodni brojevi u odnosu na uobičajene operacije čine jedan model za S), dosadašnji dokazi njene *neprotivurečnosti* (Gencen[3], Gedel i dr.), tj. dokazi da se iz S ne može izvesti i neka formula A i njena negacija $\neg A$, oslanjaju se na veoma jaka pomoćna sredstva (transfinitnu indukciju ili funkcije višeg tipa [39], [53]).

♦ Pored elementarne teorije brojeva razmatra se i tzv. *aritmetika II reda*. U ovoj koju navodimo [53], pored brojeva pojavljuju se i skupovi što povlači da je u njoj pokriveno više intuitivnih svojstava prirodnih brojeva. Polazni pojmovi su, dakle, pored 0 , ', +, $\cdot$, = i svojstva „biti broj", „biti skup (izvesnih) prirodnih brojeva" i „biti element" za koje koristimo oznake n, s, $\in$. Aksiome su:

$n(x) \vee s(x), \quad \neg\, (n(x) \wedge s(x)), \quad n(0), \; n(x) \Rightarrow n(x'), \quad a \in x \Rightarrow n(a) \wedge s(x),$

Aksioma indukcije: $s(x) \wedge 0 \in x \wedge (\forall a)\; (n(a) \wedge a \in x \Rightarrow a' \in x) \Rightarrow (\forall a)\; (n(a) \Rightarrow a \in x).$

Dalje, slede dve skupovne aksiome[4]

Aksioma ekstenzionalnosti: $s(x) \wedge s(y) \wedge (\forall a)\; (a \in x \Longleftrightarrow a \in y) \Rightarrow x = y$

Aksioma uključivanja: $(\exists y)\; (s(y) \wedge (\forall x)\; (x \in y \Longleftrightarrow n(x) \wedge F(x)),$ gde je F neka formula (na jeziku teorije), y promenljiva različita od x koja nema pojavljivanje u F.

Naredne aksiome su, u stvari, aksiome teorije S prilagodjene za slučaj aritmetike II reda:

---

[1] O aksiomatskom zasnivanju uopšte neke matematičke teorije u okviru predikatskog računa I reda govori se u glavi XVIII F o r m a l n e t e o r i j e. Za sada, recimo samo toliko da su aksiome i teoreme takve teorije izvesne predikatske formule I reda.

[2] Kurt Gödel (1906–1978).

[3] Gerhard Gentzen (1909–1945).

[4] Videti narednu tačku.

$n(x) \Rightarrow 0 \neq x'$, $n(x) \wedge n(y) \Rightarrow (x' = y' \Rightarrow x = y)$, i slično sve ostale, osim aksiome indukcije, koju smo već naveli.

Najzad, da bi ', +, · bile operacije, dodefinisaćemo ih i za skupove aksiomama:

$s(x) \Rightarrow x' = 0$, $s(x) \wedge s(y) \Rightarrow x + y = 0$, $s(x) \wedge s(y) \Rightarrow x \cdot y = 0$.

♦ Medjutim, istaknuti problemi i teškoće ne rešavaju se ni uvođenjem aritmetike II reda, jer i ona ima razne nedostatke. Recimo, ni ona nije kategorična, jer pored *standardnog*[1] ima, takodje i nestandardne modele.

ZADACI

1. Dokazati da iz aksioma[2] (S1) – (S8) proizlazi formula

(☆) $$(\forall x)(x''' = 0''' \Rightarrow x = 0)$$

Rešenje. Uočimo formule

(1) $(\forall x)(x''' = 0''' \Rightarrow x'' = 0'')$

(2) $(\forall x)(x'' = 0'' \Rightarrow x' = 0')$

(3) $(\forall x)(x' = 0' \Rightarrow x = 0)$

Sve su one slučajevi aksiome (S2). Dalje, dvostrukom primenom valjane formule

$$(\forall x)(A \Rightarrow B) \wedge (\forall x)(B \Rightarrow C) \Rightarrow (\forall x)(A \Rightarrow C)$$

izvodimo

(4) $(\forall x)(x''' = 0''' \Rightarrow x = 0)$

Uopšte, često se radi dokaza formule oblika $(\forall x)(P \Rightarrow Q)$ dokazuje niz formula oblika

$(\forall x)(P \Rightarrow M_1)$, $(\forall x)(M_1 \Rightarrow M_2)$, ..., $(\forall x)(M_{k-1} \Rightarrow M_k)$, $(\forall x)(M_k \Rightarrow Q)$

pomažući se pri tome raznim „medju–formulama" M_i. Medjutim, obično se tada kvantor $\forall$ ne piše, premda se podrazumeva. Tako, kraći zapis navedenog dokaza glasi

(1) $x'''=0''' \Rightarrow x''=0''$, (2) $x''=0'' \Rightarrow x'=0'$, (3) $x' = 0' \Rightarrow x=0$, (4) $x'''=0''' \Rightarrow x=0$

---

[1] Standardni model čini skup prirodnih brojeva sa uobičajenim operacijama. Pri tome se $\in$, n, s tumače kao b i t i e l e m e n t, b i t i p r i r o d a n b r o j, b i t i p o d s k u p s k u p a p r i r o d n i h b r o j e v a.

[2] Svi zadaci od 1–og do 31–og, izuzev zadatka 29, odnose se na elementarnu teoriju brojeva S.

Zanimljivo je da se i takav skraćen način pisanja, uz usvajanje tzv. *pravila generalizacije*

$$\text{(Gen)} \qquad \frac{A(x)}{(\forall x)\, A(x)}$$

može prihvatiti kao ispravan dokaz[1]. Prema tom pravilu, ako u nekom dokazu učestvuje član $A(x)$, kao nov član dokaza može se uzeti formula $(\forall x)\,(A(x))$. Drugim rečima, ako u nekim koracima dokazivanja ne pišemo kvantor $\forall$, to možemo „nadoknaditi" primenom pravila (Gen). Uz to, recimo još da se dokaz može voditi i bez korišćenja tog pravila (pišući uvek sve kvantore i dr.).

U prethodnom dokazivanju, u stvari, smo rasudjivali sa nizom implikacija

$$A(x) \Rightarrow B_1(x), \qquad B_1(x) \Rightarrow B_2(x), \ldots$$

U matematici je omiljeno da se u takvom slučaju polazi od formule $A(x)$ kao pretpostavke, pa se iz nje postupno izvode razne posledice, sve dok se ne dodje do željene. Naravno, u takvom dokazivanju slovo x se mora smatrati znakom konstante[2], istina proizvoljne (recimo, radi toga se može umesto x pisati c – to je *tzv. pomoćna ili promenljiva konstanta*). Jedan takav dokaz formule (☆) izgleda

(1)	$c''' = 0'''$	(Pretpostavka)
(2)	$c'' = 0''$	(Iz (1) primenom aksiome (S2))
(3)	$c' = 0'$	(Primena (S2))
(4)	$c = 0$	(Još jedanput (S2))

Zaključak:

$$c''' = 0''' \Rightarrow c = 0$$

pri čemu je c ma koja konstanta. U stvari, odatle sledi formula

$$(\forall x)\,(x''' = 0''' \Rightarrow x = 0).$$

Napomenimo još da se pri upotrebi pomoćnih konstanata u matematici često („iz nemarnosti") za njih ne uvode nove oznake, već se zadržavaju oznake $x, y, \ldots$ – promenljivih.

---

[1] Evo jednog takvog dokaza (1), (3), ..., (8)

(1) $(\forall x)\,(x''' = 0''' \Rightarrow x'' = 0'')$, (2) $x''' = 0''' \Rightarrow x'' = 0''$,

(3) $(\forall x)\,(x'' = 0'' \Rightarrow x' = 0')$, (4) $x'' = 0'' \Rightarrow x' = 0'$,

(5) $(\forall x)\,(x' = 0' \Rightarrow x = 0)$ (6) $x' = 0' \Rightarrow x = 0$

Formule (1), (3), (5) su slučajevi aksiome (S2), dok (2) sledi iz (1), (4) sledi iz (3), (6) sledi iz (5) na osnovu valjane formule $(\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(x)$. Dalje, iz (2), (4), (6) primenom tranzitivnosti implikacije (kao pravila) izvodimo

(7) $$x''' = 0''' \Rightarrow x = 0$$

a odatle, primenom pravila (Gen), dobijamo

(8) $$(\forall x)\,(x''' = 0''' \Rightarrow x = 0)$$

[2] U protivnom bi iz $A(x)$ sledila $(\forall x)\, A(x)$.

U daljem izlaganju slično postupamo u indukcijskim dokazima.

2. Dokazati:

(☆) $S \vdash (\forall x, y)(x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow x' + y'' = 0''')$

Rešenje.

Prvi način:

(1) $(\forall x)(x=0 \Rightarrow x'=0')$, slučaj aksiome $(\forall x,y)(x=y \Rightarrow x' = y')$

(2) $(\forall y)(y = 0 \Rightarrow y' = 0')$

(3) $(\forall y)(y' = 0' \Rightarrow y'' = 0'')$

(4) $(\forall y)(y = 0 \Rightarrow y'' = 0'')$, iz (2) i (3) primenom valjane formule $(\forall x)(A \Rightarrow B) \wedge (\forall x)(B \Rightarrow C) \Rightarrow (\forall x)(A \Rightarrow C)$

(5) $(\forall x,y)((x = 0 \Rightarrow x' = 0') \wedge (y = 0 \Rightarrow y'' = 0'')$, iz (1) i (4) primenom valjane formule $(\forall x) A(x) \wedge B \Rightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B)$ – x nije slobodna u B

(6) $(\forall x, y)(x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow x' = 0' \wedge y'' = 0'')$, iz (5) primenom tautologije $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s)$

(7) $(\forall x,y)(x' = 0' \wedge y'' = 0'' \Rightarrow x' + y'' = 0' + 0'')$, slučaj aksiome $(\forall x, y, u, v)(x = y \wedge u = v \Rightarrow x + u = y + v)$

(8) $0' + 0'' = 0'''$, jer $0' + 0'' = (0' + 0')' = (0' + 0)'' = 0'''$

(9) $(\forall x,y)(x' = 0' \wedge y'' = 0'' \Rightarrow x' + y'' = 0''')$, primena zakona zamene za formule.

Drugi način: Cilj nam je da dokažemo implikaciju

(☆☆) $x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow x' + y'' = 0'''$

iz koje potom neposredno generalizacijom po x, y sledi formula (☆). Stoga najpre iz formula

(1) $(\forall x)(x=0 \Rightarrow x'=0')$, (2) $(\forall y)(y=0 \Rightarrow y'=0')$, (3) $(\forall y)(y'=0' \Rightarrow y''=0'')$, koje su sve slučajevi aksiome $(\forall x,y)(x=y \Rightarrow x'=y')$, primenom valjane formule $(\forall x) A(x) \Rightarrow A(x)$ izvodimo

(4) $x = 0 \Rightarrow x'=0'$, (5) $y = 0 \Rightarrow y'=0'$, (6) $y' = 0' \Rightarrow y'' = 0''$.

Dalje dokaz teče ovako:

(7) $y = 0 \Rightarrow y'' = 0''$, iz (5) i (6) na osnovu pravila tranzitivnosti implikacije

(8) $x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow x' = 0' \wedge y'' = 0''$, iz (4) i (7) na osnovu pravila saglasnosti implikacije sa konjunkcijom

(9) $x'=0' \wedge y''=0'' \Rightarrow x'+y''=0'+0''$, na osnovu aksiome $(\forall x,y,u,v)(x=y \wedge u=v \Rightarrow x+u = y+v)$

(10) $x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow x' + y'' = 0' + 0''$, iz (8) i (9) primenom pravila tranzitivnosti implikacije

(11) $0' + 0'' = 0'''$; jer $0' + 0'' = (0' + 0')' = (0' + 0)'' = 0'''$

(12) $x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow x' + y'' = 0'''$, iz (10) i (11) primenom zakona zamene za formule

(13) $(\forall x, y)(x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow x' + y'' = 0''')$, generalizacijom po x, y formule (12).

Treći način: Uočimo proizvoljne konstante a, b i za njih dokažimo implikaciju

(☆☆☆) $$a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow a' + b'' = 0'''$$

Jedan dokaz glasi:

(1) $a = 0,\ b = 0$ (Pretpostavke)

(2) $a' = 0',\ b = 0$ (Iz $a = 0$ primenom aksiome $(\forall x,y)(x = y \Rightarrow x' = y')$ i valjane formule $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$)

(3) $a' = 0',\ b' = 0'$ (Iz $b = 0$ primenom prethodno pomenute aksiome i valjane formule)

(4) $a' = 0',\ b'' = 0''$ (Još jedna primena istih formula)

(5) $a' + b'' = 0' + 0''$ (Iz (4) na osnovu aksiome $(\forall x,y,u,v)(x = y \wedge u + v \Rightarrow x + u = y + v)$

(6) $a' + b'' = 0'''$ (Jer, na osnovu (S4) i (S3) vredi $0' + 0'' = (0' + 0')' = (0' + 0)'' = 0'''$).

Kraj dokaza implikacije (☆☆☆), a samim tim i formule (☆) budući da su a, b bile proizvoljne konstante.

3. Dokazati teoreme teorije S:

$(\forall x,y)(x''=0' \wedge y'''=0'' \Rightarrow x'+y'=0)$, $(\forall x,y)(x=0'' \wedge y=0'' \Rightarrow x \cdot y=0'''')$

$(\forall x,y)(x \cdot y'=2 \wedge y=0 \Rightarrow x=2)$, $(\forall x,y,z)(x=0 \wedge y=0 \wedge z=0 \Rightarrow x'+y'+z'=0''')$.

4. Obrazovati formulu $I(x)$ na jeziku teorije S za koju:

a) $I(0)$ jeste α, $(\forall x)(I(x) \Rightarrow I(x'))$ nije teorema,

b) Nije teorema $I(0)$ a jeste $(\forall x)(I(x) \Rightarrow I(x'))$,

c) Nisu teoreme ni $I(0)$ ni $(\forall x)(I(x) \Rightarrow I(x'))$,

d) Obe formule $I(0)$, $(\forall x)(I(x) \Rightarrow I(x'))$ jesu teoreme.

Rešenje. a) Takva formula je recimo $x = 0$. Naime, $0 = 0$ je slučaj aksiome $x=x$ dok formula

$$(\forall x)(x = 0 \Rightarrow x' = 0)$$

ne vredi, odnosno to nije teorema teorije S. Razlog je što implikacija

$$0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$$

nije teorema, budući da su teoreme $0 = 0$, $0' \neq 0$.

b) Primer takve vrste je formula $x \neq 0$. Naime, $0 \neq 0$ nije teorema, dok formula

$$(\forall\ x)\ (x \neq 0 \Rightarrow x' \neq 0)$$

jeste jer je $x' \neq 0$ aksioma (S1).

c) Ako je $I(x)$ formula $x = 0'$, onda nisu teoreme nijedna od formula

$$0 = 0',\ (\forall\ x)\ (x = 0' \Rightarrow x' = 0')$$

Prva je, naime, u suprotnosti sa aksiomom (S1) dok je u vezi sa drugom dovoljno za x izabrati $0'$. Implikacija $x = 0' \Rightarrow x' = 0'$ tada postaje

$$0' = 0' \Rightarrow 0'' = 0'$$

što nije teorema ($0' = 0'$ je teorema kao slučaj aksiome $x = x$, dok je $0'' = 0'$ u suprotnosti sa (S1)).

d) Neka $I(x)$ bude recimo $x + 0' = x'$. Formule $I(0)$ i $(\forall\ x)\ (I(x) \Rightarrow I(x'))$ tada glase

$$0 + 0' = 0',\ (\forall\ x)\ (x + 0' = x' \Rightarrow x' + 0' = x'')$$

i obe su teoreme teorije S. Obrazloženje za prvu formulu glasi

$$0 + 0' = (0 + 0)' = 0'$$

U vezi sa drugom, dokazujemo da su obe formule $x + 0' = x'$, $x' + 0' = x''$ teoreme u S. Pri tome se oslanjamo na aksiome (S3) i (S4) i, naravno, na svojstva jednakosti. Obrazloženja glase:

$$x + 0' = (x + 0)' = x', \quad x' + 0' = (x' + 0)' = (x')' = x''$$

Još jedan primer formule koja zadovoljava uslove d) je $0 \cdot x = 0$. Dokaz za

(☆) $$(\forall\ x)\ (0 \cdot x = 0 \Rightarrow 0 \cdot x' = 0)$$

glasi:

Uočimo neki x i pretpostavimo da je za njega dokazana jednakost.

(IH) $$0 \cdot x = 0$$

Dalje izvodimo ovaj jednakosni lanac

$0 \cdot x'$	$= 0 \cdot x + 0$	(Primena (S6))
	$= 0 \cdot x$	(Na osnovu (S3))
	$= 0$	(Primena pretpostavke (IH))

Dakle, iz pretpostavke da za uočeni x vredi jednakost $0 \cdot x = 0$ dokazano je da vredi i $0 \cdot x' = 0$. Kako je uočeni x bio proizvoljan, time je dokazana i formula (☆).

5. Dokazati da iz aksioma (S1) do (S8) proizlazi asocijativni zakon sabiranja, odnosno dokazati

(☆) $$(\forall\ x, y, z)\ (x + y) + z = x + (y + z)$$

Dokaz (indukcijom po z). Označimo formulu

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

sa $I(z)$, dok su x,y parametri. Tada:

(i) Dokaz za $I(0)$ sledi neposredno na osnovu aksiome (S3). Naime, iz narednih formula, koje su obe slučajevi te aksiome

$$(x + y) + 0 = x + y, \qquad x + (y + 0) = x + y$$

primenom svojstava simetrije i tranzitivnosti jednakosti zaključujemo

$$(x + y) + 0 = x + (y + 0)$$

(ii) Dokazujemo sada da za svaki z vredi implikacija

$$I(z) \Rightarrow I(z')$$

Neka je, dakle, indukcijska hipoteza (za neke uočene x, y, z)

(IH) $$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Tada izvodimo ovaj jednakosni lanac

$(x + y) + z' = ((x + y) + z)'$ (Aksioma (S4))

$= (x + (y + z))'$ (Korišćenjem (IH) kao i aksiome (S8))

$= x + (y + z)'$ (Primena (S4))

$= x + (y + z')$ (Još jedanput (S4))

Dakle: $(x+y) + z' = x + (y+z')$, odnosno iz pretpostavke $I(z)$ proizlazi zaključak $I(z')$, i pri tom obavljeno rasudjivanje vredi za svaki z. Kako je dokazano $I(0)$ i $(\forall z)(I(z) \Rightarrow I(z'))$, to prema aksiomi indukcije, odnosno prema odgovarajućem pravilu izvodjenja, zaključujemo $(\forall z)\, I(z)$. Za dokaz formule (☆) preostaje još da se obavi generalizacija po x i po y.

6. Dokazati da sabiranje u teoriji S zadovoljava zakone[1])

a) $0 + x = x$, b) $x' + y = (x + y)'$, c) $x + y = y + x$

Uputstvo. Prvu formulu dokazati indukcijom po x, drugu i treću indukcijom po y. Recimo, formula b) je u slučaju $y = 0$ neposredna posledica aksiome (S3). Dalje, iz indukcijske hipoteze

(IH) $$x' + y = (x + y)'$$

izvodimo:

$x' + y' = (x' + y)'$ (Primena (S4))

$= (x + y)''$ (Primena (IH) i (S8))

$= (x + y')'$ (Pomoću (S4))

Dakle, iz pretpostavke $x' + y = (x + y)'$ sledi zaključak $x' + y' = (x + y')'$. Za dokaz formule b) nedostaje još primena aksiome indukcije i generalizacija po x.

7. Dokazati zakone skraćivanja za sabiranje

$$x + z = y + z \Longleftrightarrow x = y, \qquad z + x = z + y \Longleftrightarrow x = y$$

---

[1]) Podrazumevamo univerzalne kvantore.

Uputstvo. Za prvu formulu je dosta dokazati dve implikacije. Ona zdesna nalevo sledi neposredno na osnovu aksioma jednakosti. Dokaz sleva nadesno izvodimo indukcijom po z.

U slučaju $z = 0$ formula glasi

$$x + 0 = y + 0 \Rightarrow x = y$$

što je prema aksiomi (S3) teorema. Dalje, neka je indukcijska pretpostavka

(IH) $$x + z = y + z \Rightarrow x = y$$

Tada imamo ovakav implikacijski lanac

$x + z' = y + z' \Rightarrow (x + z)' = (y + z)'$ (Na osnovu (S4))

$\Rightarrow x + z = y + z$ (Prema (S2))

$\Rightarrow x = y$ (Prema (IH))

Znači, iz pretpostavke (IH) sledi zaključak

$$x + z' = y + z' \Rightarrow x = y$$

Dokaz se potom neposredno privodi kraju korišćenjem aksiome indukcije. Druga ekvivalencija sledi na osnovu prve i komutativnog zakona sabiranja.

8. Dokazati naredne zakone za množenje

$$0 \cdot x = 0, \quad x' \cdot y = x \cdot y + y, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

9. Dokazati da je množenje distributivno prema sabiranju, tj.

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

10. Množenje je asocijativno, tj. vredi zakon

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Dokazati.

11. Dokazati teoreme:

a) $x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$, b) $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

Uputstvo. Dokazi se izvode, na primer, indukcijom po y. Recimo, dokaz formule a) izgleda:

(i) U slučaju $y = 0$ imamo ovaj ekvivalencijski lanac

$$(x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge 0 = 0) \Longleftrightarrow (x = 0 \Rightarrow x = 0) \Longleftrightarrow \top$$

Korišćene su aksiome $x + 0 = x$, $x = x$ kao i simetrija i tranzitivnost jednakosti.

(ii) Dokaz da iz indukcijske hipoteze

(1) $$x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

sledi zaključak

(2) $$x + y' = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y' = 0$$

proizlazi iz toga što je negacija premise implikacije (2) teorema (jer je ona ekvivalentna sa $(x + y)' \neq 0$). Primenom aksiome indukcije zaključujemo da je formula a) teorema.

12. Dokazati ekvivalencije

$$x + y = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \wedge y = 0, \qquad x \cdot y = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

13. Dokazati jednakosti

a) $x+1=x'$, $x+2=x''$, $x+3=x'''$ (i slično dalje za $4, 5, \ldots$)

b) $x \cdot 1 = x$, $x \cdot 2 = x+x$, $x \cdot 3 = x+x+x$ (itd. za $4, 5, \ldots$).

14. Dokazati ekvivalencije

a) $x+y=1 \iff (x=0 \wedge y=1) \vee (x=1 \wedge y=0)$, $x \cdot y = 1 \iff x=1 \wedge y=1$,

b) $x+y=2 \iff (x=0 \wedge y=2) \vee (x=1 \wedge y=1) \vee (x=2 \wedge y=0)$,

$x \cdot y = 2 \iff (x=1 \wedge y=2) \vee (x=2 \wedge y=1)$

15. Dokazati ekvivalenciju $x \neq 0 \iff (\exists y)\, x = y'$.

16. Dokazati ekvivalenciju $x \neq 0 \wedge x \neq \overline{1} \iff (\exists y)\, x = y''$.

17. Za množenje vrede ovakvi uslovni zakoni skraćivanja

$$x \cdot z = y \cdot z \iff x = y, \quad z \cdot x = z \cdot y \iff x = y \quad (\text{Ako } z \neq 0)$$

Dokazati.

Uputstvo. Za prvu formulu dokazati dve uslovne implikacije. Druga formula tada sledi na osnovu komutativnog zakona za množenje. Dokaz formule

$$x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y \quad (\text{Ako } z \neq 0)$$

izvesti indukcijom po y. Pri dokazu indukcijskog koraka iz pretpostavki

$$x \cdot z = y' \cdot z, \qquad z \neq 0$$

dokazati najpre da je $x \neq 0$ a zatim, primenjujući ekvivalenciju zadatka 15, izraziti x u obliku u'.

18. Dokazati različitosti

a) $x \neq x'$, $x \neq x''$, $x \neq x'''$ i slično dalje.

b) $x' \neq x''$, $x' \neq x'''$, $x' \neq x''''$ itd.

c) $x'' \neq x'''$, $x'' \neq x''''$ itd.

19. Neka su $\overline{m}$, $\overline{n}$ proizvoljni numerali. Dokazati:

$$\overline{m} = \overline{n} \leftrightarrow m = n, \quad \overline{n}' = \overline{n+1}, \quad \overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}, \quad \overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{m \cdot n}$$

Pri tome, recimo, u jednakosti $\overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$ sabiranje sa leve strane je sabiranje u teoriji S, a sa desne strane je uobičajeno sabiranje prirodnih brojeva.

Uputstvo. U vezi sa prvom formulom dokazati najpre implikaciju

$$\overline{n} = 0 \rightarrow n = 0$$

i pri tom razlikovati slučajeve: 1° n je 0, 2° n nije 0.

Implikacija

$$\overline{m} = \overline{n} \rightarrow m = n$$

svodi se na prethodnu, korišćenjem činjenice da se u slučaju $m > n$ broj m može prikazati u obliku $n+p$.

Dokazi jednakosti $\overline{m} + \overline{n} = \overline{m+n}$, $\overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{m \cdot n}$ izvode se indukcijom[1] po n–bro-

---

[1] To, naravno, nije indukcija (S7) već indukcija koja se odnosi na pomoćne prirodne brojeve kojima se služimo pri raspravljanju pojedinih pitanja o prirodnim brojevima u teoriji S. Znači, pri izlaganju o prirodnim brojevima ne možemo pobeći od samih prirodnih brojeva (ovi pomoćni su, istina, na jednom drugom nivou). Jer kako bismo, inače, drugačije iskazali da numeral 0''''' ima pet znakova '.

ju znakova ' u numeralu $\overline{n}$.

Primedba. Prema ekvivalenciji prethodnog zadatka, odnosno prema njenoj kontrapoziciji

$$\overline{m} \neq \overline{n} \longleftrightarrow m \neq n$$

Svi numerali $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ su medjusobno različiti. Odatle kao neposredna posledica proizlazi da je svaki model elementarne teorije brojeva S beskonačan.

20. Dokazati da relacije $<, >, \leqslant, \geqslant$ imaju naredna svojstva

a) $0 < \overline{1}, \overline{1} < \overline{2}, \overline{2} < \overline{3}, \ldots$ i uopšte $x < x'$, b) $0 < x'$, c) $x < y \Longleftrightarrow x' \leqslant y$,

d) $\neg x < x$, $x < y \Rightarrow \neg y < x$, $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$, $x < y \Rightarrow x+z < y+z$, $x < y \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$ (Ako $z \neq 0$)

e) $x \leqslant x$, $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$, $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$, $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$, $x \leqslant y \Rightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z$ (Ako $z \neq 0$)

f) $x < y \vee x = y \vee x > y$, $x \leqslant y \vee x \geqslant y$

Uputstvo. a) Formula $x < x'$ proizlazi iz jednakosti $x' = x + 1$ – postojeći z je upravo 1. d) Formula $\neg (x < x)$ ekvivalentna je sa $(\forall z)(z \neq 0 \Rightarrow x + z \neq x)$. Dalje dokaz teče indukcijom po z.

Tranzitivnost relacije $<$ dokazuje se, recimo, ovako:

(1) $x < y,\ y < z$	(Pretpostavka)
(2) $(\exists u \neq 0)\ x+u=y,\ (\exists v \neq 0)\ y+v=z$	(Definicija)
(3) $(\exists u, v \neq 0)\ (x+u=y \wedge y+v = z)$	
(4) $(\exists u, v \neq 0)\ (x+u=y \wedge (x+u)+v=z)$	(U formuli $y+v = z$ umesto y zamenili smo $x+u$, jer je pretpostavka $x+u=y$; to je primena zakona zamene: $t_1 = t_2 \wedge \alpha(t_1) \Longleftrightarrow t_1 = t_2 \wedge \alpha(t_2)$)
(5) $(\exists u, v \neq 0)\ x+(u+v) = z$	
(6) $(\exists w \neq 0)\ x + w = z$	(Postojeći w je upravo $u+v$, jer iz $u \neq 0$, $v \neq 0$, sledi $u + v \neq 0$ – zadatak 12)
(7) $x < z$	

21. Neka je $\overline{n}$ proizvoljan numeral. Dokazati ekvivalencije

$$x \leqslant \overline{n} \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n},\quad x < \overline{n} \Longleftrightarrow x=0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n-1}$$

22. Neka su $F(x)$, $G(x)$ proizvoljne formule na jeziku teorije S. Dokazati da su naredne formule teoreme te teorije

$$F(0) \wedge F(\overline{1}) \wedge \ldots \wedge F(\overline{n-1}) \Longleftrightarrow (\forall x < \overline{n})\, F(x),$$

$$(\forall x < y)\, F(x) \wedge (\forall x \geqslant y)\, G(x) \Rightarrow (\forall x)\, (F(x) \vee G(x))$$

Napomena. Pored indukcije (S7), koju zovemo i *osnovna indukcija* ili *indukcija* $x \to x'$, u teoriji S važe i razne druge indukcije kao *potpuna indukcija, indukcija počev od k* i dr. U vezi sa tim, videti naredna dva zadatka.

23, Dokazati da u teoriji S vredi *potpuna indukcija*, odnosno dokazati:

(PI) $\quad (\forall x)((\forall y < x)\, I(y) \Rightarrow I(x)) \Rightarrow (\forall x)\, I(x)$

gde je $I(x)$ ma koja formula na jeziku teorije S.

Dokaz. Označimo sa $K(x)$ formulu

$$(\forall y < x)\, I(y)$$

Tada formula (PI) postaje

$$(\forall x)(K(x) \Rightarrow I(x)) \Rightarrow (\forall x)\, I(x)$$

Pretpostavimo da je dokazana formula

(1) $\quad (\forall x)(K(x) \Rightarrow I(x))$

i dokažimo

(2) $\quad (\forall x)\, I(x)$

Radi toga, najpre iz pretpostavke (1) izvodimo

(3) $\quad (\forall x)\, K(x)$

i to *indukcijom* $x \to x'$. Naime $K(0)$ je

$$(\forall y)(y < 0 \Rightarrow I(y))$$

a to je formula teorema budući da je $\neg(y < 0)$ teorema teorije S. Dalje dokazujemo

(4) $\quad (\forall x)(K(x) \Rightarrow K(x'))$

Ta je formula, naime, ekvivalentna sa (1) budući da u S vredi ovaj ekvivalencijski lanac

$$\begin{aligned} K(x') &\Longleftrightarrow (\forall y)(y < x' \Rightarrow I(y)) \\ &\Longleftrightarrow (\forall y)(y \leqslant x \Rightarrow I(y)) \\ &\Longleftrightarrow (\forall y)(y < x \vee y = x \Rightarrow I(y)) \\ &\Longleftrightarrow (\forall y)(y < x \Rightarrow I(y)) \wedge (\forall y)(y = x \Rightarrow I(y)) \\ &\Longleftrightarrow K(x) \wedge I(x) \end{aligned}$$

Dalje, iz $K(0)$ i formule (4) primenom indukcije $x \to x'$ sledi formula $(\forall x)K(x)$. Najzad, iz (1) najpre izvodimo

(5) $\quad (\forall x)\, K(x) \Rightarrow (\forall x)\, I(x)$

a potom iz (3) i (5) primenom modus ponensa izvodimo formulu (2).

24. Dokazati da su za ma koju formulu $I(x)$ na jeziku teorije S naredne formule teoreme u S

Indukcija počev od k:

$$I(k)\wedge(\forall x\geqslant k)\,(I(x)\Rightarrow I(x'))\Rightarrow(\forall x\geqslant k)\,I(x)$$

Indukcija x, x' → x":

$$I(0)\wedge I(1)\wedge(\forall x)\,(I(x)\wedge I(x')\Rightarrow I(x''))\Rightarrow(\forall x)\,I(x)$$

Indukcija na intervalu:

$$I(a)\wedge(\forall x\colon a\leqslant x<b)\,(I(x)\Rightarrow I(x'))\Rightarrow(\forall x\colon a\leqslant x\leqslant b)\,I(x)$$

Povratna indukcija:

$$I(b)\wedge(\forall x\colon a\leqslant x<b)\,(I(x')\Rightarrow I(x))\Rightarrow(\forall x\colon a\leqslant x\leqslant b)\,I(x).$$

25. Dokazati *princip minimalnog elementa*

$$(\exists x)\,I(x)\Rightarrow(\exists y)\,(I(y)\wedge(\forall z<y)\,\neg I(z))$$

gde je $I(x)$ proizvoljna formula na jeziku teorije S.

26. Zamislimo da je u teoriji S indukcija (S7) zamenjena potpunom indukcijom (PI). Tako dobijenu teoriju označimo sa S'. Dokazati da (S7) nije njena teorema, odnosno da „iz potpune ne proizlazi osnovna indukcija".

Rešenje. Rešenje će biti „modelsko". Naime, načinićemo model teorije S' u kome je formula (S7) netačna (za jedan „dobar" izbor formule $I(x)$). Članovi tog modela su

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ a0,\ a1,\ a2,\ a3,\ a4,\ \ldots$$

pri tome je njihov poredak baš takav kako su navedeni (sleva nadesno). Operacije naslednik, sabiranje, množenje prirodnih brojeva 0, 1, 2, 3, ..., definisane su na uobičajeni način, a u ostalim slučajevima ovako:

$$(an)'\overset{\text{def}}{=}an',\quad m+an\overset{\text{def}}{=}a\,\overline{m+n},\quad am+n\overset{\text{def}}{=}a\overline{m+n},\quad am+an\overset{\text{def}}{=}a\overline{m+n}$$

$$m\cdot an\overset{\text{def}}{=}a\overline{m\cdot n},\quad am\cdot n\overset{\text{def}}{=}a\overline{m\cdot n},\quad am\cdot an\overset{\text{def}}{=}a\,\overline{m\cdot n}$$

$$am\cdot 0=0,\quad n\neq 0\Rightarrow am\cdot n=a\,\overline{m\cdot n},\quad 0\cdot an=0,\quad m\neq 0\Rightarrow m\cdot an=a\,\overline{m\cdot n}$$

$$am\cdot an=a\,\overline{m\cdot n}$$

gde su m, n ma koji prirodni brojevi, a sa $\overline{m+n}$, $\overline{m\cdot n}$ je označen rezultat njihovog sabiranja, odnosno množenja.

Nije teško proveriti da se na takav način dolazi do modela teorije S'. Medjutim, na tom modelu indukcija (S7) ne vredi. Recimo, formula $I(z)\colon(\forall x,y)\,(x+z=y+z\Rightarrow x=y)$ očigledno nije tačna za sve članove uočenog modela, tj. formula

(1) $$(\forall z)\,I(z)$$

je netačna. S druge strane, formula

(2) $$I(0)\wedge(\forall z)\,(I(z)\Rightarrow I(z'))$$

je tačna, pa je otuda implikacija (2) ⇒ (1), a to je slučaj aksiome (S7), netačna.

27. Dokazati da relacija | (deljivost) ima naredna svojstva

a) $1|x,\ x|0,\ 0|x \Longleftrightarrow x=0,\quad y\neq 0 \Rightarrow (x|y \Rightarrow x\leqslant y)$,

b) $x|x,\quad x|y \wedge y|x \Rightarrow x=y,\ x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$,

c) $x|y \wedge x|z \Rightarrow x|(y+z),\quad x|y \vee x|z \Rightarrow x|(y\cdot z)$

28. Dokazati formulu o postojanju količnika i ostatka

$$(\forall a)(\forall b\neq 0)(\exists_1 q)(\exists_1 r<b)\ a=bq+r$$

Recima: za svaki broj a i $b\neq 0$ postoje jedinstveno količnik q i ostatak r koji zadovoljava uslov $r<b$.

Rešenje. Najpre dokazujemo p o s t o j a nj e. Označimo sa $I(a)$ formulu

$$(\exists q)(\exists r<b)\ a=b\cdot q+r$$

Dokaz izvodimo indukcijom po a Pri tome je b parametar koji zadovoljava uslov $b\neq 0$.

Ako $a=0$ formula $I(a)$ je teorema – postojeći q i r su oba 0. Neka je, dalje, indukcijska hipoteza $I(a)$. Postojeće q i r označimo sa q_0, r_0. Dakle, pretpostavke su

(1) $\qquad a=b\cdot q_0+r_0 \qquad (r_0<b,\ b\neq 0)$

Iz (1) na osnovu aksioma jednakosti dobijamo

(2) $\qquad a'=(b\cdot q_0+r_0)'$,

odnosno

(3) $\qquad a'=b\cdot q_0+r_0'$

Kako po pretpostavci $r_0<b$, to $r_0'\leqslant b$, odnosno $r_0'<b \vee r_0'=b$. Stoga razlikujemo slučajeve: $r_0'<b$, $r_0'=b$. U slučaju $r_0'<b$ traženi ostatak i količnik su q_0 i r_0'. U slučaju $r_0'=b$ jednakost (3) postaje

(4) $\qquad a'=b\cdot q_0+b$

odnosno

(5) $\qquad a'=b\cdot q_0'$

pa su sada količnik i ostatak redom q_0', 0. Time je dokazano $(\forall a)\ I(a)$, uz uslov $b\neq 0$. Preostaje još generalizacija po $b\neq 0$.

Dokaz j e d i n s t v e n o s t i količnika i ostatka sledi iz narednog rasudjivanja. Pretpostavimo da za neki a i $b\neq 0$ imamo jednakosti

(6) $\quad a=bq_1+r_1\ (r_1<b),\qquad a=bq_2+r_2\ (r_2<b)$

Za količnike q_1, q_2 postoje mogućnosti: $q_1=q_2$, $q_1<q_2$, $q_1>q_2$. Dalje se dokazuje da pretpostavke $q_1<q_2$, $q_2>q_1$ obe dovode do kontradikcije. Recimo, ako $q_1<q_2$, onda za neki $w\neq 0$ vredi $q_2=q_1+w$, odakle zamenom u drugu od jednakosti (6) dobijamo

(7) $r_1 = bw + r_2$

Pošto $bw \geqslant b$ (jer $w \neq 0$), to dobijamo $r_1 \geqslant b$ što je kontradikcija sa pretpostavkom $r_1 < b$. Slično se opovrgava i slučaj $q_1 > q_2$. Preostaje, dakle, $q_1 = q_2$, a tada se iz jednakosti (6) neposredno dobija i $r_1 = r_2$.

29 Dokazati da za svaka dva cela broja a i $b > 0$ postaje jedinstven količnik q i ostatak r koji zadovoljava uslov: $0 \leqslant r < b$.

Uputstvo. U slučaju kada je oblika $-c (c \geqslant 0)$ izvodi se najpre jednakost

(1) $c = bq_o + r_o \qquad (0 \leqslant r_o < b)$

iz koje neposredno sledi

(2) $-c = -(bq_o + r_o)$

odnosno

(3) $-c = b(-q_o) - r_o$

Potom, dodavanjem b i $-b$ na desnu stranu jednakosti (3) i sredjivanjem, dobijamo

(4) $-c = b(-q_o - 1) + b - r_o$

Zbog pretpostavke $r_o < b$, $b > 0$ broj $b-r_o$ zadovoljava uslov $0 \leqslant b-r_o < b$, pa je traženi ostatak, dok je količnik $-q_o - 1$.

30. Uočimo skup $\overline{N}$ svih numerala i operacije sa njima date u zadatku 19. Dokazati da je to jedan model teorije S (uz pretpostavku da skup N svih prirodnih brojeva, koji se u razmatranju numerala pojavljuju kao pomoćni, jeste model te teorije).

31. Neka je $A = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots\}$. Dokazati da je taj skup, u odnosu na uobičajeno sabiranje, model aksioma (S1), (S2), (S3), (S4), (S7) i (S8) – bez aksiome koja se odnosi na saglasnost jednakosti sa množenjem.

32. Neka je P teorija odredjena Peanovim aksiomama (P1) do (P5). Dokazati da su u njoj prirodni brojevi upravo numerali.

Rešenje. Prema aksiomama (P1) i (P2) numerali jesu prirodni brojevi. Obratno, pošto skup numerala $\overline{N}$ zadovoljava premisu aksiome indukcije (P5), to je, prema zaključku te aksiome, skup svih prirodnih brojeva jednak upravo $\overline{N}$.

33. Neka P_a bude teorija odredjena aksiomama sličnim sa (P1) – (P5) s tim što jedino umesto 0 stoji neki drugi znak konstante, recimo a. Znači, njene aksiome glase

(P_a1) *a je prirodan broj* i slično dalje.

Dokazati:

(i) „Prirodni brojevi" teorije P_a upravo su „numerali":

$$a, a', a'', a''', a'''', \dots$$

(ii) Skup prirodnih brojeva teorije P u odnosu na operacije $'$, $+$, $\cdot$ izomorfan je sa skupom „prirodnih brojeva" teorije P_a u odnosu na odgovarajuće operacije.

Uputstvo. Traženi izomorfizam je

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0' & 0'' & 0''' & 0'''' & \ldots \\ a & a' & a'' & a''' & a'''' & \ldots \end{pmatrix}$$

34. Neka je T skup svih terma obrazovanih od znaka konstante a i operacijskog znaka f dužine 1. Dokazati da taj skup zadovoljava aksiome (P1) do (P5), uz uslov da se 0 tumači kao a, x' kao $f(x)$, a znak = kao *jednakost reči*.

Rešenje. U definiciji skupa T :

(i) $a \in T$,

(ii) $x \in T \Rightarrow f(x) \in T$,

(iii) *Elementi skupa* T *se dobijaju jedino konačnom primenom pravila* (i) *i* (ii).

uslov (iii) znači, ustvari, da je T minimalan skup koji zadovoljava uslove (i) i (ii). Stoga se (iii) može zameniti sa:

(iii') *Ako* $S \subseteq T$ *i* S *zadovoljava uslove*

$$a \in S, \ (\forall x)(x \in S \Rightarrow f(x) \in S)$$

onda vredi jednakost $S = T$,

a to je upravo aksioma indukcije. Ostale aksiome se neposredno proveravaju.

35. Dokazati da je skup prirodnih brojeva N u odnosu na uobičajene operacije model aritmetike II reda. Pri tome se n, s tumače kao „biti prirodan broj", odnosno „biti skup (izvesnih) prirodnih brojeva".

36. Dokazati da je posledica aksioma aritmetike II reda ovakvo pravilo indukcije

$$\frac{I(0), \ (\forall x)(n(x) \Rightarrow (I(x) \Rightarrow I(x'))),}{(\forall x)(n(x) \Rightarrow I(x))}$$

gde je formula $I(x)$ (na jeziku te teorije) sa slobodnom promenljivom x.

37. Dokazati da su u aritmetici II reda teoreme

$$n(0), \ n(0'), \ n(0''), \ n(0''') \text{ i slično dalje.}$$

38. Uočimo skupove

$N_0 = \{0\}$, $N_1 = \{0, \overline{1}\}$, $N_2 = \{0, \overline{1}, \overline{2}\}$, $\overline{N}$ – skup svih numerala.

Dokazati da su teoreme aritmetike II reda

$$s(N_0), \ s(N_1), \ s(N_2), \ s(\overline{N})$$

Uputstvo. Ti se skupovi mogu opisati redom formulama

$$x = 0, \ x = 0 \lor x = \overline{1}, \ x = 0 \lor x = \overline{1} \lor x = \overline{2}, \ x = 0 \lor (\exists y) x = y'$$

Dalje primeniti aksiomu uključivanja

39. Dokazati da su naredne formule teoreme aritmetike II reda

(i) $n(x) \Rightarrow n(x')$, (ii) $n(x) \wedge n(y) \Rightarrow n(x+y)$, (iii) $n(x) \wedge n(y) \Rightarrow n(x \cdot y)$

Rešenje. Prva formula je aksioma, a druge dve se dokazuju, recimo, indukcijom po y. Na primer, druga formula je u slučaju $y = 0$ ekvivalentna sa

$$n(x) \Rightarrow n(x)$$

Dalje, iz pretpostavke

(1) $$n(x) \wedge n(y) \Rightarrow n(x+y)$$

kao i iz pretpostavki

(2) $$n(x),\quad n(y')$$

najpre, svodjenjem na protivurečnost, zaključujemo

(3) $$n(x),\quad n(y)$$

a odatle koristeći indukcijsku hipotezu (1) dobijamo

(4) $$n(x+y)$$

odnosno, prema aksiomi $n(x) \Rightarrow n(x')$

(5) $$n((x+y)')$$

Najzad, koristeći aksiomu $n(x) \wedge n(y) \Rightarrow (x+y)' = x+y'$, izvodimo

(6) $$n(x+y')$$

Time je, da uz pretpostavku (1), dokazana implikacija

$$n(x) \wedge n(y') \Rightarrow n(x+y')$$

Preostaje još primena pravila indukcije iz zadatka 36.

40. Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljan standardni model aritmetike II reda. Dokazati da se u tom modelu može definisati struktura $\mathcal{N} = (N, \,', +, \cdot)$ koja je model elementarne teorije brojeva S.

Uputstvo. Skupovni deo N odredjen je sa

$$N = \{x \in M \mid n(x)\}$$

Prema prethodnom zadatku, taj je skup zatvoren u odnosu na $'$, $+$, $\cdot$.

XVI SKUPOVI

♦ Veliki broj matematičkih činjenica pa i čitave matematičke teorije mogu se izložiti pomoću skupovnih pojmova. Otuda značaj i važnost teorije skupova.

Sam Kantor[1] – tvorac teorije skupova – nije svoju teoriju izložio aksiomatski, ali analizom njegovih dokaza može se zaključiti da se sve teoreme mogu izvesti iz ovih aksioma:

(1) *Dva skupa su jednaka ako imaju iste elemente* (aksioma ekstenzionalnosti),
(2) *Za unapred dato svojstvo postoji skup čiji su elementi upravo oni koji imaju to svojstvo* (aksioma apstrakcije[2]),
(3) *Ako su elementi skupa A neprazni i medjusobno disjunktni skupovi, onda postoji funkcija f čiji su originali skupovi iz A a slike su elementi originala* (aksioma izbora).

♦ Medjutim, te aksiome su dovele do raznih *paradoksa*[3] (glavni „krivac" je aksioma apstrakcije), jer se pokazalo da nije svako svojstvo skupovno (okupljajuće, kolektivizirajuće). Otkrivanjem paradoksa u teoriji skupova poljuljana je do temelja matematička zgrada – to je tzv. treća kriza osnova matematike, za koju još uvek ne možemo reći da je potpuno prebrodjena. Kao rezultat pokušaja da se izidje iz krize nastale su ne samo razne teorije skupova[4] već i razni pravci[5] u matematici.

---

[1] George Cantor (1845–1918).

[2] Aksiomu apstrakcije prvi je formulisao G.Frege 1893. godine

[3] Najpoznatiji paradoksi su Burali–Fortijev (1897), Raselov (1903), Rišarov (1905), Grelingov (1908), Skolemov (1922–23). Sam Kantor je otkrio paradoks u svojoj teoriji još 1899. ali je on objavljen tek 1932. O Raselovom paradoksu videti u tački II O p e r a c i j e. I z r a z i, zadatak 19.

[4] Reč s k u p se, stoga, danas upotrebljava u više značenja. Pored Kantorovih, kaže se i intuitivnih skupova, tu su i skupovi u okviru raznih aksiomatskih teorija.

[5] U takvom smislu najpoznatiji pravci su:

– f o r m a l i z a m, medju čijim najvećim predstavnicima je Hilbert. Osnovna postavka je da se razne grane matematike mogu, sa malo polazne pretpostavljene obične matematike (meta–matematika), strogo izložiti kao formalne teorije (kao „matematike reči");

– i n t u i c i o n i z a m (predstavnici Brauer, Hejting), zasniva se na intuiciji prirodnih brojeva i konačnosti. Intuicionisti ne prihvataju logičke zakone kao $p \vee \neg p$, $\neg(\forall x)A \Rightarrow (\exists x)\neg A$, $\neg\neg p \Rightarrow p$. U njihovoj matematici najveći naglasak je na konstruktivnim predmetima. Preciziranjem tog pojma nastao je poseban pravac: k o n s t r u k t i v i z a m (Markov, Kušner, Jesenjin–Voljpin);

– l o g i c i z a m (Rasel, Vajthed) pretpostavljajući kao polazne deo klasične matematike i teorije skupova, ostalu matematiku svodi na logiku. Teoriju skupova izlažu kao teoriju tipova.

Pored Raselove *teorije tipova*[1] koja predstavlja zaokružen, mada dosta složen sistem kojim se poznati paradoksi otklanjaju, nastale su i razne aksiomatske teorije skupova. Izlažemo tzv. *teoriju* ZF (Cermelo–Frenkel). To je teorija prvog reda,tj. aksiome, teoreme i logička sredstva kojima se pri tom koristimo, pripadaju prekidatskom računu I reda – videti tačku XVIII *Formalne teorije*.

♦ Polazni pojmovi teorije ZF su „skup", i dvojične relacije „biti element" i „jednakost" za koje koristimo uobičajene oznake $\in$, $=$. Prvom grupom aksioma uspostavlja se veza izmedju tih dveju relacija

Ax 1.	$a = b \Rightarrow (\forall x)\,(x \in a \Longleftrightarrow x \in b)$	(Aksiome saglasnosti
Ax 2.	$a = b \Rightarrow (\forall x)\,(a \in x \Longleftrightarrow b \in x)$	jednakosti sa $\in$)
Ax 3.	$(\forall x)\,(x \in a \Longleftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b$	(Aksioma ekstenzionalnosti)

Prva i treća aksioma ekvivalentne su sa formulom: $a = b \Longleftrightarrow (\ x)\,(x \in a \Longleftrightarrow x \in b)$ uporišnom u dokazima raznih skupovnih identiteta.

♦ Dalje slede *aksiome postojanja* kojima se tvrdi da su izvesna svojstva skupovna[2].

Aksioma praznog skupa:

Ax 4. $(\exists s)\,(\forall x)\; x \notin s$

Aksioma dvočlanog skupa:

Ax 5. $(\forall a, b)\,(\exists s)\,(\forall x)\,(x \in s \Longleftrightarrow x = a \vee x = b)$

Aksioma unije:

Ax 6. $(\forall a)\,(\exists s)\,(\forall x)\,(x \in s \Longleftrightarrow (\exists y \in a)\, x \in y)$

Aksioma partitativnog skupa:

Ax 7. $(\forall a)\,(\exists s)\,(\forall x)\,(x \in s \Longleftrightarrow x \subseteq a)$

Pri tome se relacija $\subseteq$ uvodi definicijom: $a \subseteq b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)(x \in a \Rightarrow x \in b)$

[1] Ukratko, osnovna ideja u toj teoriji je da se svim izrazima u formulama dodele tzv. t i p o v i – izvesne istaknute reči gradjene od znakova , 0) (. Tako, kod formule $x \in y$ ako je x tipa t onda y mora biti tipa (t). Stoga $x \in x$, $x \notin x$ nisu formule čime se izbegava pojava Raselovog paradoksa.

[2] Nisu sva svojstva skupovna tj. sa proizvoljnim uslovom $S(x)$ na jeziku $\{\in, =\}$ ne može se uvek uočiti odgovarajući skup. Stoga ukupnost elemenata koji odgovaraju takvom svojstvu zovemo k l a s a i označavamo sa $\{x \mid S(x)\}$. Dakle:

$$a \in \{x \mid S(x)\} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} S(a)$$

Za dve klase A, B (klase, za razliku od skupova, označavamo velikim slovima) kažemo da su jednake ukoliko imaju iste slemente, tj.

$$A = B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)\,(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

Neke od klasa su tada skupovi, što se upravo i tvrdi aksiomama Ax4 – Ax7. Recimo, prema A x5 klasa $\{x \mid x = a \vee x = b\}$ je skup. Klasa je ovde samo pomoćni pojam uveden radi jednostavnijeg izražavanja. Postoje, medjutim, aksiomatske teorije skupova kod kojih su polazni pojmovi: skup i klasa; najpoznatija takva teorija je NBG (videti na primer [44]).

Svi skupovi čije se postojanje tvrdi aksiomama Ax4 do Ax7 su jedinstveni[1] te se za za njih odgovarajućim definicijama uvode utvrdjene oznake ϕ, $\{a, b\}$, $\cup a$, $P(a)$:

$$a = \phi \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)\, x \notin a, \qquad \{a,b\} \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid x = a \vee x = b\}.$$

$$\cup a \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid (\exists y \in a) x \in y\}, \qquad P(a) \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid x \subseteq a\}$$

♦ Neka su $a_1, ..., a_n$ skupovi. Tada se skup $\{a_1, ..., a_n\}$ čiji su elementi upravo $a_1, ..., a_n$; uvodi definicijom:

$$\{a_1\} \overset{\text{def}}{=\!=} \{a_1, a_1\} \qquad \{a_1, ..., a_n\} \overset{\text{def}}{=\!=} \{a_1, ..., a_{n-1}\} \cup \{a_n\} \ (n = 1,2,...,)$$

Pri tome je $a \cup b$ druga oznaka za $\cup\{a, b\}$.

♦ Naredna aksioma tzv. *aksioma separacije* je oslabljeni oblik prvobitne aksiome apstrakcije i njome se tvrdi da elementi nekog skupa x koji imaju izvesno svojstvo φ čine skup.

Ax8. $\quad (\forall a)(\exists s)(\forall x)(x \in s \Longleftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)),$

gde je $\varphi(x)$ predikatska formula na jeziku $\{\in, =\}$.

♦ Naredni uslovi po x su skupovni (videti zadatke 10, 12, 13):

$$(\forall y \in a)\, x \in y, \quad x \in a \wedge x \notin b, \quad (\exists u \in b)(\ \ v \in b)\, x = (u, v)$$

Pri tome su a, b ma koji skupovi dok je (u,v) *uredjena dvojka* uvedena funkcijom

$$(u, v) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\{u\}, \{u, v\}\}$$

Odatle sledi postojanje i jedinstvenost *preseka* nekog skupa, kao i *razlike*[2] i *Dekartovog* proizvoda dva skupa koji se uvode definicijama:

$$\cap a \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid (\forall y \in a) x \in y\} \qquad (\text{Ako } a \neq \phi)$$

$$a \backslash b \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid x \in a \wedge x \notin b\}, \quad a \times b \overset{\text{def}}{=\!=} \{(u, v) \mid u \in a \wedge u \in b\}$$

♦ *Binarna relacija* skupa a je, po definiciji, svaki podskup od a^2 (tj. od $a \times a$), dok je *preslikavanje* skupa a u skup b svaki podskup f od $a \times b$ koji ima svojstvo

$$(\forall x \in a)(\exists_1 y \in b)(x, y) \in f$$

Pri tome se umesto $(x, y) \in \alpha$, $(x, y) \in f$ koriste uobičajene oznake $x \alpha y$, $y = f(x)$.

♦ Sa klasama se na sličan način uvode odgovarajući pojmovi kao: *unija, presek, razlika, inkluzija, relacija, preslikavanje* i sl. Recimo, definicija unije glasi:

$$\cup A \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid (\exists y \in A)\, x \in y\} \quad (A \text{ je proizvoljna klasa})$$

---

[1] Uopšte, ako je φ neko skupovno svojstvo, što znači da je teorema $(\exists s)(\forall x)(x \in s \Longleftrightarrow \varphi(x))$, onda je skup s jedinstven (na osnovu aksiome ekstenzionalnosti).

[2] Ako $b \subseteq a$, onda se $a \backslash b$ zove k o m p l e m e n t ili d o p u n a (skupa b u odnosu na a) i označava sa $C_a b$ ili b' u slučaju kada je a utvrdjen skup.

♦ Na osnovu aksioma postojanja dokazuje se da postoje razni konačni skupovi. Medju njima su posebno značajni

$$\phi,\ \{\phi\},\quad \{\phi,\{\phi\}\},\ \{\phi,\{\phi\}.\{\phi,\{\phi\}\}\},\ldots$$

Oni se, naime, vladaju kao prirodni brojevi (videti zadatak 18) pa otuda definicije:

(☆) $0 \overset{\mathrm{def}}{=} \phi,\ 1 \overset{\mathrm{def}}{=} \{\phi\}\ ,\ 2 \overset{\mathrm{def}}{=} \{\phi,\{\phi\}\},\ 3 \overset{\mathrm{def}}{=} \{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\},\ldots$

Uopšte, naslednik x' se definiše pomoću x sa: $x' = x \cup \{x\}$. Postojanje jednog beskonačnog skupa, kakvi su za matematiku od izuzetne važnosti, tvrdi se narednom tzv. *aksiomom beskonačnosti:*

Ax 9. *Postoji skup a koji zadovoljava uslove*

(i) $\phi \in a$,

(ii) $(\forall x)(x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$

Uslove (i) i (ii) mogu zadovoljavati i neki podskupovi od a. Dokazuje se da i presek svih takvih podskupova ω -takodje zadovoljava istaknute uslove, kao i da su elementi od ω upravo skupovi (☆). Skup ω je jedan model Peanovih aksioma (videti pomenuti zadatak 18). Prema tome, aksiomom beskonačnosti se obezbedjuje postojanje prirodnih brojeva u okviru teorije ZF.

ZADACI

1. Dokazati da je skupovna jednakost relacija ekvivalencije saglasna sa ma kojom formulom $\varphi(x)$ na jeziku $\{\in, =\}$.

Uputstvo. Koristiti tautologije $p \Longleftrightarrow p$, $(p \Longleftrightarrow q) \Rightarrow (q \Longleftrightarrow p)$, $(p \Longleftrightarrow q) \wedge (q \Longleftrightarrow r) \Rightarrow (p \Longleftrightarrow r)$, valjanu formulu $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B)$, kao i činjenicu da je $\Longleftrightarrow$ saglasna sa svim logičkim operacijama. Dokaz saglasnosti sa $\varphi(x)$ izvesti indukcijom po broju logičkih znakova te formule.

2. Dokazati jedinstvenost praznog skupa.

Rešenje. Pretpostavimo da postoje dva skupa a, b koji zadovoljavaju uslove akisome Ax4 tj.

$$(\forall x)\, x \notin a, \qquad (\forall x)\, x \notin b$$

Odatle neposredno na osnovu tautologije $\neg p \Longleftrightarrow \neg q \Rightarrow (p \Longleftrightarrow q)$ izvodimo

$$(\forall x)(x \in a \Longleftrightarrow x \in b)$$

a to, na osnovu aksiome ekstenzionalnosti, povlači $a = b$.

3. Neka je S neko skupovno svojstvo, tj. neka je formula

$$(\exists s)(\forall x)\ (x \in s \Longleftrightarrow S(x))$$

teorema. Dokazati da je tada skup s jedinstven.

Uputstvo. Dokaz je izveden u zadatku 32 tačke IX.

Napomena. Uopšte, u vezi sa svojstvima osnovnih skupovnih operacija i relacija videti zadatke 32–34 tačke IX.

4. Dokazati ekvivalencije

$$\{a,b\} = \{c,d\} \Longleftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c), \quad \{a\} = \{b\} \Longleftrightarrow a = b$$

5. Dokazati implikaciju

$$(\forall x)\,(a \in x \Longleftrightarrow b \in x) \Rightarrow a = b$$

Uputstvo. Iz pretpostavke $(\forall x)\,(a \in x \Longleftrightarrow b \in x)$ izvesti $a \in \{b\} \Longleftrightarrow b \in \{b\}$.

6. Da li vredi ekvivalencija

$$a = b \Longleftrightarrow (\forall x)\,(a \in x \Longleftrightarrow b \in x)$$

7. Dokazati da su dve uredjene dvojke jednake akko su im odgovarajuće komponente jednake, tj.

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Uputstvo. Videti zadatke 30, 31, 34, 35 tačke IX.

8. Dokazati ekvivalenciju

$$x \in a \cup b \Longleftrightarrow x \in a \vee x \in b$$

9. Za konačne skupove vredi ekvivalencija

$$x \in \{a_1, \ldots, a_n\} \Longleftrightarrow x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n$$

Dokazati.

10. Svojstvo (po x)

(☆) $$(\forall y \in a)\; x \in y$$

je skupovno za svaki neprazan skup a. Dokazati.

Uputstvo. Uočimo jedan element y_0 iz a. Formula (☆) je ekvivalentna sa formulom

$$x \in y_0 \wedge (\forall y \in a)\, x \in y$$

na koju još treba primeniti aksiomu separacije.

11. Dokazati ekvivalenciju

$$x \in a \cap b \Longleftrightarrow x \in a \wedge x \in b,$$

gde je $a \cap b$ druga oznaka za $\cap\, \{a, b\}$.

12. Dokazati da direktan proizvod $a \times b$ skupova a, b jeste skup.

Uputstvo. Dosta je dokazati implikaciju

$$u \in a \wedge v \in b \Rightarrow (u, v) \in P\,(P\,(a \cup b))$$

13. Za svaka dva skupa a, b svojstvo (po x)

$$x \in a \wedge x \notin b$$

je skupovno. Dokazati.

14. Neka su a, b, c ma koji skupovi. Dokazati naredne skupovne identitete

$$
\begin{array}{ll}
a \cup a = a & a \cap a = a \\
a \cup b = b \cup a & a \cap b = b \cap a \\
a \cup (a \cap b) = a & a \cap (a \cup b) = a \\
(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) & (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \\
a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) & a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \\
(a \cup b) \times c = (a \times c) \cup (b \times c) & (a \cap b) \times c = (a \times c) \cap (b \times c) \\
(a \setminus b) \setminus c = (a \setminus c) \setminus b & (a \cup b) \setminus c = (a \setminus c) \cup (b \setminus c) \\
a \setminus (b \cup c) = (a \setminus b) \cap (a \; c) & a \setminus (b \cap c) = (a \setminus b) \cup (a \setminus c)
\end{array}
$$

Uputstvo. Najpre za svaki od naznačenih identiteta dokazati da su izrazima sa leve, odnosno sa desne strane jednakosti odredjeni izvesni skupovi, a potom dokazivati na uobičajeni način, svodjenjem na odgovarajuću tautologiju (videti zadatke 32, 38 tačke IX).

15. Uočimo svojstva odredjena uslovima (i) i (ii) iz aksiome Ax 9, tj.

(i) $\phi \in a$.

(ii) $(\forall x)(x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$

Dokazati da oba ta svojstva „prolaze kroz presek", odnosno ako svaki član a skupa s ima svojstvo (i) i (ii), onda i presek $\cap s$ ima ta svojstva.

Rešenje. Dokaz za (ii) izgleda

$(\forall a \in s)(\forall x)(x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$

$\Rightarrow (\forall x)\ [(\forall a \in s) x \in a \Rightarrow (\forall a \in s)\ x \cup \{x\} \in a]$

(Na osnovu valjane formule $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B)$)

$\Rightarrow (\forall x)(x \in \cap s \Rightarrow x \cup \{x\} \in \cap s)$

(Definicija preseka)

Slično se izvodi dokaz za (i).

16. Neka je S neko skupovno svojstvo koje prolazi kroz presek (videti prethodni zadatak). Tada je minimalan skup (u smislu inkluzije) koji ima svojstvo S upravo presek svih tih skupova. Dokazati.

17. Neka je $\leqslant$ relacija skupa ω ovako uvedena

$$m \leqslant n \overset{\text{def}}{=\!=} m \in n \vee m = n$$

(i) Dokazati da na ω vredi princip potpune indukcije, odnosno dokazati:

$$(\forall x)\ ((\forall y < x) y \in a \Rightarrow x \in a) \Rightarrow a = \omega,$$

gde je a podskup od ω.

(ii) Dokazati da je $\leqslant$ relacija totalnog poretka i to takva da svaki neprazan podskup od ω ima najmanji element, tj. da je $\leqslant$ relacija *dobrog poretka*.

Uputstvo. Princip potpune indukcije ekvivalentan je sa principom minimalnog elementa, što se dokazuje u zadatku 26.

18. Neka je ω presek svih skupova koji su podskupovi skupa a čije se postojanje tvrdi aksiomom beskonačnosti, i koji imaju svojstva (i) i (ii). Dokazati da je ω jedan model Peanovih aksioma (Pl) do (P5) iz prethodne tačke. Pri tome se 0 tumači kao prazan skup ϕ, x' kao skup $x \cup \{x\}$.

Uputstvo. Pri opisanom tumačenju Peanove aksiome postaju

(P1) $\phi \in \omega$

(P2) $(\forall n)(n \in \omega \Rightarrow n \cup \{n\} \in \omega)$

(P3) $(\forall n \in \omega)\, n \cup \{n\} \neq \phi$

(P4) $n \cup \{n\} = m \cup \{m\} \Rightarrow m = n$

(P5) Ako $s \subseteq \omega$ i s zadovoljava uslove (P1) i (P2), onda $s = \omega$.

Sva tvrdjenja osim (P4) dokazuju se sasvim jednostavno. U vezi sa (P4) indukcijom po n dokazati najpre

(i) $n \notin n$, (ii) $m \in n \Rightarrow \neg\, n \subseteq m$, (iii) $m \in n \Rightarrow m \subseteq n$

gde su m, n ma koji prirodni brojevi, odnosno ma koji članovi skupa ω.

19. Dokazati tzv. *teoremu rekurzije.*

Ako je a element skupa x i f preslikavanje skupa x u x, tada postoji jedinstveno preslikavanje u od ω u x takvo da $u(0) = a$, $u(n') = f(u(n))$, za svaki n iz ω.

Uputstvo. Uočiti presek u svih onih podskupova s od $\omega \times x$ koji zadovoljavaju uslove

$$(0, a) \in s, \quad (n, y) \in s \Rightarrow (n', f(y)) \in s$$

i dokazati da je to traženo preslikavanje.

20. Neka je S klasa svih skupova obrazovanih od praznog skupa ϕ i operacije $\{\ \}$ (koja može biti dužine $1, 2, 3, \ldots$). Dokazati da je S model svih dosada navedenih aksioma teorije ZF osim aksiome beskonačnosti.

Uputstvo. Elementi klase S su svi konačni skupovi koji se mogu obrazovati od praznog skupa i operacije $\{\ \}$, pa su zadovoljene aksiome Ax1 do Ax5, a takodje i Ax8. U vezi sa Ax6 i Ax7 koristi se činjenica da je unija konačnog skupa konačan skup. Slično vredi i za partitativan skup konačnog skupa.

21. Neka se konačni skupovi obrazovani od praznog skupa i operacije $\{\ \}$ tumače kao prirodni brojevi na ovaj način:

Prazan skup ϕ se tumači kao broj 1. Ako su $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ tumačenja medjusobno različitih skupova $a_1, \ldots, a_n$, i pri tome je $\bar{a}_1 < \ldots < \bar{a}_n$, tada je tumačenje za $\{a_1, \ldots, a_n\}$ broj $p_1^{\bar{a}_1} \cdot p_2^{\bar{a}_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\bar{a}_n}$, gde su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ uzastopni prosti brojevi (počev od 2).

Dokazati da se na opisani način dolazi do modela aksioma Ax1 do Ax8'. Pri tome se relacija $\in$ tumači kao „biti eksponent" u odgovarajućem prirodnom broju razloženom na proizvod stepena prostih brojeva.

♦ Da bi se isključila mogućnost da skup može biti sam sebi element uvodi se *aksioma regularnosti*[1]

Ax10. $\quad a \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x \in a)\, x \cap a = \emptyset$

♦ Spisak aksioma teorije *ZF* završava se ovim dvema aksiomama – tzv. *aksiomom izbora* i *aksiomom zamene*

Ax11. $\quad (\forall x \in a)\, x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists b)(\exists f : a \to b)(\forall x \in a)\, f(x) \in x$

Ax12. *Ako je $S(x,y)$ neki uslov, formula po x, y takav da za svaki x iz a klasa $\{y \mid S(x,y)\}$ jeste skup, tada:*

$$(\exists b)(\exists f : a \to b)(\forall x \in a)\ f(x) = \{y \mid S(x,y)\}$$

♦ Za skup s kažemo da je *dobro uredjen* relacijom poretka $\leqslant$ ukoliko svaki neprazan skup od s ima najmanji element. Primer dobro uredjenog skupa je ω (videti zadatak 17). Kao posledica aksiome izbora dokazuje se (zadatak 29) da se svaki skup može dobro urediti.

♦ *Ordinalni brojevi* (ili kratko *ordinali*) predstavljaju uopštenje rednih brojeva *prvi, drugi, treći, ...* i u vezi su sa produženjem čina brojanja i nadalje, preko niza prirodnih brojeva. Do ideje takvog uopštenja prvi je došao Kantor koji je ordinalne brojeve približno opisao „kao rezultat apstrahovanja svih drugih svojstava dobro uredjenog skupa osim poretka njegovih elemenata".

♦ Ordinalni brojevi se mogu strogo definisati kao klase svih dobro uredjenih skupova koji su medjusobno uredjajno izomorfni[2] Takva definicija potiče od Rasela (i nezavisno od Fregea). Drugi način, koji potiče od fon Nojmana i koji u daljem pobliže upoznajemo, jeste da se ordinalni brojevi uvedu kao posebni dobro uredjeni skupovi koji se na odredjen način obrazuju polazeći od praznog

---

[1] Aksioma regularnosti se može uzeti i za klase:

Ax10'. $\quad A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x \in A)\, x \cap A = \emptyset$

Medjutim, dokazuje se da su ti oblici medjusobno ekvivalentni. Inače, aksioma regularnosti je nezavisna od ostalih aksioma teorije ZF, pa se otuda može razmatrati takva teorija sa i bez Ax10.

[2] Delimično uredjeni skupovi $(A, \leqslant_A)$, $(B, \leqslant_B)$ su uredjajno izomorfni ukoliko postoji obostrano jednoznačno preslikavanje $f : A \to B$ tako da vredi

$$x \leqslant_A y \Leftrightarrow f(x) \leqslant_B f(y) \qquad (x, y \in A)$$

skupa. Bliže, prema toj definiciji, ordinalni broj je skup α dobro uredjen relacijom[1] $\in$ koji je uz to i tranzitivan, tj. zadovoljava uslov

$$(\forall x)\,(x \in \alpha \Rightarrow x \subseteq \alpha)$$

♦ Ordinalni broj je, pored prirodnih brojeva, i skup ω koji dolazi posle svih prirodnih brojeva $1, 2, 3, \ldots$. Zatim slede $\omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3, \ldots$, gde je uopšte $\alpha+1 \overset{\text{def}}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$. Koristeći aksiomu zamene neposredno se zaključuje da svi ordinalni brojevi

$$\omega,\ \omega+1,\quad \omega+2, \ldots$$

čine skup. Unija tog skupa sa skupom ω je naredni ordinalni broj koji se obično označava sa $\omega 2$ ili $\omega+\omega$. Potom slede $\omega 2+1,\ \omega 2+2,\ \omega 2+3, \ldots$, a posle njih dolazi $\omega 3$. Na taj način dolazimo do niza ordinalnih brojeva

$$\omega,\ \omega 2,\ \omega 3, \ldots$$

Ponovo primenom aksiome zamene zaključujemo da posle svih njih dolazi nov ordinalni broj, tzv. ω^2. Posle se brojanje slično produžava:

$$\omega^2,\ \omega^2+1,\ \omega^2+2, \ldots, \omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1, \ldots,\ \omega^2+\omega 2,\ \omega^2+\omega 2+1, \ldots,\ \omega^2+\omega 3,$$
$$\omega^2+\omega 4, \ldots,\ \omega^2 2, \ldots,\ \omega^2 3, \ldots,\ \omega^3, \ldots, \omega^4, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{(\omega^{\omega})}, \ldots \text{ itd.,}$$

♦ Dokazuje se (zadatak 29) da je svaki dobro uredjen skup x uredjajno izomorfan tačno jednom ordinalnom broju α (u fon Nojmanovom smislu); α je tzv. *ordinalni broj* skupa x.

♦ Sa ordinalnim brojevima se definišu operacije *sabiranje, množenje, stepenovanje*. Tako, ako su α, β ordinalni brojevi disjunktnih skupova a, b i ako se $a \cup b$ uredi tako da prvo dodju članovi skupa a a potom skupa b, dolazi se do dobrog uredjenja. Zbir $\alpha+\beta$ je tada, po definiciji ordinalni broj tako uredjenog skupa $a \cup b$. Dokazuje se da je sabiranje ordinalnih brojeva aosijativno ali da nije komutativno. O definicijama i svojstvima ostalih operacija videti u zadacima 35,36.

♦ Za izbrojavanje elemenata konačnih skupova koriste se prirodni brojevi 1, 2, 3, ... U vezi sa izbrojavanjem elemenata beskonačnih skupova uvode se tzv. *kardinalni brojevi* (ili *kardinali*). S tim u vezi, za skup a se kaže da je *ekvipotentan (ravnomoćan)* sa b ukoliko postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje f od a na b. Ravnomoćni su, recimo, skup prirodnih brojeva i skup parnih prirodnih brojeva.

♦ Kardinalni broj, slično kao i ordinalni, može se uvesti na više načina. Recimo, jedna mogućnost je da on bude klasa svih medjusobno ravnomoćnih skupova. Druga je da se za kardinalni broj uzme najmanji od svih medjusobno ravnomoćnih ordinalnih brojeva u fon Nojmanovom smislu. Recimo, svi ordinali

$$\omega,\quad \omega+1,\quad \omega+2, \ldots, \omega 2$$

[1] Tačnije relacijom $\leqslant$ ovako uvedenom: $x \leqslant y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \in y \vee x = y$.

su medjusobno ravnomoćni. Najmanji medju njima je ω, pa je on odgovarajući kardinalni broj (u svojstvu kardinalnog broja ω se obično označava sa $\aleph_0$). Inače, za skup čiji je kardinalni broj $\aleph_0$ kažemo da je *prebrojiv*. Prvi veći kardinalni broj je $\aleph_1$.

♦ Svaki skup ima kardinalni broj (u fon Nojmanovom smislu). To sledi otuda što se svaki skup može dobro urediti i što je svaki dobro uredjen skup uredjajno izomorfan nekom ordinalu (u fon Nojmanovom smislu).

♦ Prirodni brojevi su tzv. *konačni* kardinalni dok su svi ostali (kao $\aleph_0$, $\aleph_1$) *beskonačni*. Slično, i za skup kažemo da je konačan ili beskonačan u zavisnosti od njegovog kardinalnog broja.

♦ Na osnovu Kantorove teoreme (zadatak 38) kardinalni broj partitativnog skupa $P(x)$ je strogo veći od kardinalnog broja skupa x. Odatle se, primenjujući taj rezultat na prebrojive skupove, zaključuje da vredi nejednakost $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$. U vezi sa tim je tzv. *kontinum hipoteza* koja se izražava jednakošću $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Dokazuje se da je kontinum hipoteza nezavisna od ostalih aksioma *ZF*, tj. aksiomama teorije ZF može se dodati bilo koja od formula $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (ali, naravno, ne i obe) kao nova aksioma. To su, uz pretpostavku da je *ZF* neprotivurečna teorija, dokazali K.Gedel, odnosno P.Koen, [62].

ZADACI (nastavak)

22. Dokazati da nijedan skup x nije sam sebi element, kao i da ne postoje skupovi $x_1, \ldots, x_n$ takvi da vredi: $x_1 \in x_2$, $x_2 \in x_3$, ..., $x_{n-1} \in x_n$, $x_n \in x_1$.

Uputstvo. Primeniti aksiomu regularnosti na skupove $\{x\}$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

23. Dokazati da klasa svih ordinala nije skup.

24. Dokazati ekvivalenciju:

α je ordinal akko α je tranzitivan skup i za svaki $x, y \in \alpha$ vredi $x \in y \vee x = y \vee y \in x$.

Uputstvo. Deo *samo ako* sledi neposredno na osnovu definicije ordinalnog broja. U vezi sa *Ako* najpre, koristeći prethodni zadatak i uslov tranzitivnosti, izvesti da je relacija $\leqslant$:

$$x \leqslant y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \in y \vee x = y \qquad (x, y \in \alpha)$$

relacija totalnog poretka a potom primeniti implikaciju

$$a \neq \phi \Rightarrow (\exists x \in a)(\forall y \in a)\, y \notin x$$

koja je ekvivalentna sa aksiomom regularnosti, i prema kojoj svaki neprazan skup ima minimalni element u odnosu na relaciju $\leqslant$. Medjutim, kako je $\leqslant$ totalan poredak, to odatle sledi da svaki neprazan podskup od α ima najmanji element, tj. da je α dobro uredjen.

25. Dokazati naredna tvrdjenja o ordinalnim brojevima α, β

(i) Ako $a \in \alpha$, onda je a ordinal

(ii) Ako je b tranzitivan skup, onda: $b \subset \alpha \iff b \in \alpha$

(iii) $\alpha \cap \beta$ je ordinal

(iv) $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$

26. Neka je A izvesna klasa uredjena relacijom totalnog poretka $\leqslant$. Dokazati da je *princip minimalnog elementa* ekvivalentan sa *principom potpune indukcije* (tj. *Neterine indukcije*), odnosno dokazati:

$$(\forall X \subseteq A)\ [X \neq \phi \Rightarrow (\exists x \in X)\ (\forall y \in X) \neg\, y < x]$$
$$\iff (\forall X \subseteq A)\ [(\forall x)\ ((\forall y < x)\ y \in X \Rightarrow x \in X) \Rightarrow X = A]$$

Rešenje. Dokaz je ovaj ekvivalencijski lanac

$(\forall X \subseteq A)\ [X \neq \phi \Rightarrow (\exists x \in X)\ (\forall y \in X) \neg\, y < x]$

$\iff (\forall X \subseteq A)\ [X' \neq \phi \Rightarrow (\exists x \in X')\ (\forall y \in X') \neg\, y < x]$

(X' je komplement u odnosu na A; ta ekvivalencija, inače vredi budući da je $f : X \to X'$ uzajamno jednoznačno preslikavanje klase A u samu sebe)

$\iff (\forall X \subseteq A)\ [X' \neq \phi \Rightarrow (\exists x \notin X)\ (\forall y \notin X) \neg\, y < x]$

$\iff (\forall X \subseteq A)\ [(\forall x \notin X)\ (\exists y \notin X)\ y < x \Rightarrow X' = \phi]$

(Kontrapozicija prethodne implikacije)

$\iff (\forall X \subseteq A)\ [(\forall x)\ (x \notin X \Rightarrow (\exists y)\ (y \notin X \wedge y < x)) \Rightarrow X' = \phi]$

$\iff (\forall X \subseteq A)\ [(\forall x)\ (\neg (\exists y)(y \notin X \wedge y < x) \Rightarrow x \in X) \Rightarrow X' = \phi]$

$\iff (\forall X \subseteq A)\ [(\forall x)\ ((\forall y)\ (y < x \Rightarrow y \in X) \Rightarrow x \in X) \Rightarrow X' = \phi]$

$\iff (\forall X \subseteq A)\ [(\forall x)\ ((\forall y < x) y \in X \Rightarrow x \in X) \Rightarrow X = A]$

(Jer $X' = \phi \iff X = A$)

27. Dokazati da klasa svih ordinalnih brojeva zadovoljava princip potpune indukcije (u odnosu na relaciju $\in$).

28. Dokazati *Cornovu lemu:*

Ako je x delimično uredjen skup u kome svaki lanac ima gornje ograničenje, tada x ima bar jedan maksimalni element.

Rešenje. Umesto datog uredjenja $\leqslant$ skupa x može se posmatrati inkluzija $\subseteq$ budući da vredi ekvivalencija

$$a \leqslant b \iff s(a) \subseteq s(b),$$

gde je $s(x) \overset{\text{def}}{=} \{y | y \leqslant x\}$, tj. $s(x)$ je skup svih prethodnika od x. Uslovi o lancima prevode se tada na odgovarajuće uslove o relaciji $\subseteq$. Neka je, stoga, s skup svih lanaca skupa x. Primetimo da s ima ova svojstva:

Svaki podskup skupa s takodje pripada s i unija lanaca skupova iz s pripada s (misli se na lance u odnosu na $\subseteq$).

Dokazujemo da s ima maksimalni element. Radi toga uočimo izbornu funkciju f skupa x, tj. f pridružuje svakom nepraznom podskupu a od x element $f(a)$ takav da $f(a) \in a$. U vezi sa $a \in s$ uočimo skup $\hat{a}$ svih onih elemenata iz x čijim se dodavanjem dobija ponovo element iz s, tj.

$$\hat{a} \overset{\text{def}}{=\!=} \{y \in x \mid a \cup \{y\} \in s\}$$

Funkciju $g: s \to s$ uvodimo na ovaj način

$$g(a) \overset{\text{def}}{=\!=\!=} \begin{cases} a, \text{ako} & \hat{a} \backslash a = \phi \\ a \cup \{f(\hat{a} \backslash a)\}, \text{ako} & \hat{a} \backslash a \neq \phi \end{cases}$$

Znači $g(a)$ sadrži još najviše jedan nov element u odnosu na skup a. Da bismo do kazali da s ima maksimalni element, dosta je dokazati da postoji $a \in s$ takav da $g(a) = a$. Radi toga uvodimo ovakvu definiciju. Za skup $y \subseteq s$ kažemo da je *dobar* ukoliko

(i) $\phi \in y$

(ii) $a \in y \Rightarrow g(a) \in y$

(iii) Ako je $c \subseteq y$ lanac onda $\cup c \in y$.

Dobri skupovi očigledno postoje – takav je sam s. Lako se proverava da prethodni uslovi „prolaze kroz presek", pa je presek y_0 svih dobrih skupova ponovo dobar skup. Dokazujemo da je y_0 lanac. Za element c iz y_0 koji je uporediv (u odnosu na c) sa svakim elementom iz y_0 govorićemo kratko da je *uporediv*. U vezi sa ma kojim uporedivim elementom c uočimo skup

$$u_c \overset{\text{def}}{=\!=} \{a \in y_0 \mid a \text{ je uporediv sa } g(c)\}$$

Za u_c dokazujemo da je dobar. Naime:

– $\phi \in u_c$

– Ako $a \in u_c$, onda za a i $g(c)$ postoje mogućnosti: $a \subset g(c)$, $g(c) \subseteq a$. U prvom slučaju se izvodi $g(a) \subseteq g(c)$ a u drugom $g(c) \subseteq g(a)$. Znači da je $g(a)$ svakako uporediv sa $g(c)$, tj. $g(a) \in u_c$.

– Ako je b neki lanac skupova iz y_0 koji su svi uporedivi sa $g(c)$, onda je i $\cup b$ uporediva sa $g(c)$. Naime, ukoliko je $g(c)$ nadskup svakog skupa iz b, onda je on nadskup i za $\cup b$, a ukoliko je $g(c)$ podskup bar jednog skupa iz b, onda je $g(c)$ podskup i za $\cup b$.

Znači u_c je dobar skup. Kako je $u_c \subseteq y_0$ a y_0 je najmanji dobar skup, to zaključujemo $u_c = y_0$. Drugim rečima, ako je c uporediv element, onda je i $g(c)$ uporediv. Posledica te činjenice je da je skup svih uporedivih elemenata dobar skup. Ponovo zbog minimalnosti skupa y_0, zaključujemo da je skup svih uporedivih elemenata upravo jednak y_0 pa je y_0, stoga, lanac.

Najzad, kako je y_0 lanac, to je njegova unija – označimo je sa a_0 – element od

y_0. Kako unija uključuje sve elemente iz y_0 kao svoje podskupove, to $g(a_0) \subseteq a_0$. A kako je i $a_0 \subseteq g(a_0)$, to $g(a_0) = a_0$ pa je a_0 maksimalni element skupa s.

Najzad, pošto je a_0 maksimalan lanac ograničen sa gornje strane, to on ima najveći element m_0. Taj element je i maksimalni element skupa s. (Obrazloženje: Ako postoji neki $n_0 > m_0$, onda je lanac $a_0 \cup \{n_0\}$ pravi nadskup od a_0 što je suprotno sa činjenicom da je a_0 maksimalni lanac.)

29. Dokazati da se svaki skup x može dobro urediti, tj. da postoji relacija poretka $\leqslant$ skupa x takva da je $(x, \leqslant)$ dobro uredjen.

Uputstvo. Uočiti skup s svih dobro uredjenih podskupova od x i relaciju $\leqslant$ ovako uvedenu

$$(a, \leqslant_1) \leqslant (b, \leqslant_2) \text{ akko } a \subseteq b \wedge (\forall u, v \in a)\, u \leqslant_1 v \Rightarrow u \leqslant_2 v \qquad (a, b \subseteq x)$$

Proveriti da $(s, \leqslant)$ zadovoljava uslove Zornove leme. Maksimalni element $(m, \leqslant)$, čije se postojanje tvrdi tom lemom, je takav da $x = m$, pa je $\leqslant$ jedno traženo dobro uredjenje skupa x.

30. Neka je α dobro uredjen skup a x neki dati skup. Sa $s(a)$ označimo skup pravih prethodnika od a (a je iz α), tj. $s(a) = \{b \in \alpha \mid b < a\}$. Preslikavanje skupa $s(a)$ u skup x nazivamo *nizom tipa a*. Dalje, preslikavanje skupa svih takvih nizova u skup x nazivamo *nizovskom funkcijom skupa x tipa* α. Dokazati teoremu *transfinitne rekurzije:*

Za svaki dobro uredjen skup α i svaku nizovsku funkciju f skupa x tipa α postoji jedinstvena funkcija $u: \alpha \to x$ takva da $u(a) = f(u^a)$, gde je u^a restrikcija funkcije u na skup $s(a)$.

31. Dokazati da za svaka dva dobro uredjena skupa x, y vredi:

Ili su x, y uredjajno izomorfni ili je jedan od njih izomorfan početnom delu drugog.

32. Dokazati da klasa $\{\omega, \omega+1, \omega+2, \dots\}$, tj. $\{\omega+k \mid k \in \omega\}$ jeste skup.

33. Dokazati da je svaki dobro uredjen skup izomorfan tačno jednom ordinalnom broju (u fon Nojmanovom smislu).

34. Dokazati da za sabiranje ordinalnih brojeva vredi: $\alpha+0 = \alpha$, $0 + \alpha = \alpha$, $\alpha+1 = \alpha'$. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ali da ne vredi: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Uputstvo. Sabiranje nije komutativno, jer, na primer, $1 + \omega = \omega$, $\omega + 1 \neq \omega$

35. Neka su α, β ordinalni brojevi disjunktnih skupova a, b i neka je c dobro uredjen skup čiji je skupovni deo $a \times b$ a uredjenje je leksikografsko, tj.

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \text{ akko } b_1 < b_2 \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2)$$

Tada je proizvod $\alpha\beta$, po definiciji, ordinalni broj tako uredjenog skupa $a \times b$. Dokazati da za proizvod važi:

$$\alpha 0 = 0, \quad 0\alpha = 0, \quad \alpha 1 = \alpha, \quad 1\alpha = \alpha, \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

ali da ne važi

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

36. Ordinalni stepen α^β definiše se rekurzivno (to je moguće na osnovu zadatka 31):

(i) $\alpha^0 = 1$, (ii) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha$,

(iii) $\alpha^\beta = \sup\limits_{\gamma < \beta} \alpha^\gamma$, ukoliko je β granični[1] ordinal

Dokazati: $0^\alpha = 0 \; (\alpha \geqslant 1)$, $1^\alpha = 1$, $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$, $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$

Da li vredi jednakost: $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$?

37. Dokazati da je ravnomoćnost relacija ekvivalencije.

38. Dokazati *Kantorovu teoremu:*

Neka je x ma koji skup. Tada je x ravnomoćan sa podskupom od $P(x)$ ali x i $P(x)$ nisu ravnomoćni.

Uputstvo. Preslikavanjem $f : a \to \{a\}$ se skup x prevodi na skup svih jednočlanih podskupova od x, i to uzajamno jednoznačno. Dokaz da x i $P(x)$ nisu ravnomoćni izvodi se svodjenjem na protivurečnost, tj. pretpostavljanjem da postoji $g : x \to P(x)$ koje je *na* i $1\!-\!1$ i uočavanjem skupa $a = \{y \in x \mid y \notin f(y)\}$ za koji se izvodi ovakva kontradikcija: $b \in f(b)$, $b \notin f(b)$, gde je b onaj element iz x za koji vredi $f(b) = a$.

39. Neka je s skup svih nizova obrazovanih od $0,1$. Dokazati da s nije prebrojiv.

40. Neka su a, b disjunktni skupovi i $\bar{\bar{a}}$, $\bar{\bar{b}}$ njima odgovarajući kardinali. Zbir i proizvod kardinala uvodimo ovako:

$$\bar{\bar{a}} + \bar{\bar{b}} \overset{\text{def}}{=\!=} \overline{\overline{a \cup b}}, \quad \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{b}} \overset{\text{def}}{=\!=} \overline{\overline{a \times b}}$$

Dokazati jednakosti:

$$\bar{\bar{a}} + \bar{\bar{b}} = \bar{\bar{b}} + \bar{\bar{a}}, \quad (\bar{\bar{a}} + \bar{\bar{b}}) + \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{a}} + (\bar{\bar{b}} + \bar{\bar{c}})$$

$$\bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{b}} = \bar{\bar{b}} \cdot \bar{\bar{a}}, \quad (\bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{b}}) \cdot \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{a}} \cdot (\bar{\bar{b}} \cdot \bar{\bar{c}})$$

$$\bar{\bar{a}} \cdot (\bar{\bar{b}} + \bar{\bar{c}}) = \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{b}} + \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{c}}$$

41. Prema definiciji kardinalnih brojeva vredi ekvivalencija:

$$\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}} \text{ akko } a \cong b,$$

[1] G r a n i č n i je onaj ordinal koji nema neposrednog prethodnika, tj. koji nije oblika $\alpha+1$. Recimo, ω je takav.

gde smo sa $\cong$ označili relaciju „ravnomoćnost".

Dokazati: $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{d}} \Rightarrow \bar{\bar{a}} + \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{b}} + \bar{\bar{d}}$

$$\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{d}} \Rightarrow \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{b}} \cdot \bar{\bar{d}}$$

42. Uredjenje medju kardinalima uvodi se ovako

$$\bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{b}} \quad \text{akko} \quad a \text{ je ravnomoćan sa podskupom od } b$$

Dokazati:

(i) $\bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{a}}, \quad \bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{b}} \leqslant \bar{\bar{a}} \Rightarrow \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}, \quad \bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{b}} \leqslant \bar{\bar{c}} \Rightarrow \bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{c}}$

(ii) $\bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{c}} \leqslant \bar{\bar{d}} \Rightarrow \bar{\bar{a}} + \bar{\bar{c}} \leqslant \bar{\bar{b}} + \bar{\bar{d}}, \quad \bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{c}} \leqslant \bar{\bar{d}} \Rightarrow \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{c}} \leqslant \bar{\bar{b}} \cdot \bar{\bar{d}}$

Uputstvo. Antisimetrija, tj.

$$\bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{b}} \leqslant \bar{\bar{a}} \Rightarrow \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$$

je tzv. *Šchreder –Bernštajnova* teorema. Dokaz videti, na primer, u [22].

43. Dokazati: $\bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{c}} \leqslant \bar{\bar{d}} \Rightarrow \bar{\bar{a}} + \bar{\bar{c}} \leqslant \bar{\bar{b}} + \bar{\bar{d}}$

$$\bar{\bar{a}} \leqslant \bar{\bar{b}} \wedge \bar{\bar{c}} \leqslant \bar{\bar{d}} \Rightarrow \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{c}} \leqslant \bar{\bar{b}} \cdot \bar{\bar{d}}$$

44. Neka su a, b skupovi i a^b skup svih preslikavanja od b u a. Tada stepen kardinalnih brojeva uvodimo na ovaj način

$$\bar{\bar{a}}^{\bar{\bar{b}}} \overset{\text{def}}{=\!=} \overline{\overline{a^b}}$$

Dokazati:

$$(\bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{b}})^{\bar{\bar{c}}} = \bar{\bar{a}}^{\bar{\bar{c}}} \cdot \bar{\bar{b}}^{\bar{\bar{c}}}, \quad \bar{\bar{a}}^{(\bar{\bar{b}} + \bar{\bar{c}})} = \bar{\bar{a}}^{\bar{\bar{b}}} \cdot \bar{\bar{a}}^{\bar{\bar{c}}}, \quad (\bar{\bar{a}}^{\bar{\bar{b}}})^{\bar{\bar{c}}} = \bar{\bar{a}}^{\bar{\bar{b}} \cdot \bar{\bar{c}}}$$

45. Ako je $\bar{\bar{a}}$ beskonačan kardinalni broj, onda

$$\bar{\bar{a}} + \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}, \quad \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}}$$

Dokazati.

46. Dokazati da za kardinalne brojeve $\bar{\bar{a}}$, $\bar{\bar{b}}$, od kojih je bar jedan beskonačan vredi

$$\bar{\bar{a}} + \bar{\bar{b}} = max\,(\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}), \; \bar{\bar{a}} \cdot \bar{\bar{b}} = max\,(\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}}).$$

XVII POČECI TEORIJE MODELA

(i) Iskazni slučaj

♦ Neka je $\mathcal{F}$ skup izvesnih iskaznih formula, a $P_{\mathcal{F}}$ skup svih iskaznih slova tih formula. Neka je dalje, $P \supseteq P_{\mathcal{F}}$ skup nekih iskaznih slova. Pod *modelom formula $\mathcal{F}$ po slovima iz P* smatramo svako preslikavanje skupa P u skup $\{\top, \bot\}$, tako da ma koja formula A skupa $\mathcal{F}$, u odnosu na to preslikavanje ima vrednost $\top$. Recimo, dva modela po p, q, r, s formula $p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow \neg p$, su

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ \bot & \top & \top & \top \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ \bot & \top & \top & \bot \end{pmatrix}$$

dok formula $p \wedge \neg p$ po istim slovima nema nijedan model.

♦ Skup formula oblika

$$p_1^{\alpha_1}, \ p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n}, \ldots \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \text{ su članovi skupa } \{\top, \bot\})$$

po slovima $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ ima tačno jedan model

$$\tau = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & \ldots \end{pmatrix}$$

♦ ima model po slovima iz P akko $\mathcal{F}$ ima model po slovima iz $P_{\mathcal{F}}$.

♦ Za formulu A kažemo da je *semantička posledica* skupa formula $\mathcal{F}$, oznaka $\mathcal{F} \models A$, akko po definiciji:

Svaki model[1] *formula $\mathcal{F}$ ujedno je i model formule A.*

♦ Za formulu A kažemo da je *sintaktička posledica* skupa formula $\mathcal{F}$, oznaka $\mathcal{F} \vdash A$ akko po definiciji postoji konačan niz (takozvani *dokaz* formule A iz hipoteza $\mathcal{F}$):

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \qquad (A_n \text{ je } A)$$

tako da ma koji član A_i tog niza zadovoljava uslov

(i) *A_i je član skupa $\mathcal{F}$*, ili

(ii) *A_i je neka tautologija*[2], ili

(iii) *A_i je posledica po modus ponensu neka dva prethodna člana tog niza, tj. izvesna dva prethodna člana niza su oblika*

---

[1] Po nekom skupu P iskaznih slova, nadskupu skupa $P_{\mathcal{F}} \cup \{A\}$. Bez smanjenja opštosti za P se može uzeti i taj skup.

[2] Na osnovu stava semantičke potpunosti iskaznog računa (videti prethodnu tačku) navedena definicija se može oslabiti uzimanjem da A_i može biti, ne ma koja tautologija, već jedna od aksioma iskaznog računa.

$$B, B \Rightarrow A_i$$

♦ Skup $\mathcal{F}$ iskaznih formula je *sintaksno protivurečan*, akko po definiciji, važi

$$\mathcal{F} \vdash \bot \qquad (\bot \text{ je formula } p \wedge \neg p)$$

♦ Skup $\mathcal{F}$ je *neprotivurečan* akko $\mathcal{F}$ nije protivurečan.

♦ Osnovni stavovi

(S_1) *Stav dedukcije*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A \rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow A$$

(S_2) *Stav kompaktnosti*

Skup $\mathcal{F}$ ima model akko svaki konačan podskup skupa $\mathcal{F}$ ima model.

(S_3) *Stav potpunosti* (I oblik)

Skup $\mathcal{F}$ ima model akko je $\mathcal{F}$ neprotivurečan.

(S_4) *Stav potpunosti* (II oblik)

$$\mathcal{F} \models A \leftrightarrow \mathcal{F} \vdash A$$

(S_5) Skup $\mathcal{F}$ nema model akko u tom skupu postoji konačno mnogo formula $A_1, A_2, \ldots, A_k$ takvih da je

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Leftrightarrow \bot$$

tautologija.

ZADACI

1. Formula $p \Rightarrow q$ ima po p, q tri modela:

$$\begin{pmatrix} p & q \\ \top & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ \bot & \top \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ \bot & \bot \end{pmatrix}$$

Koliko modela ima ista formula po slovima p, q, r, s, t?

Odgovor. 24, jer od svakog navedenog može se napraviti po 8 modela po slovima p, q, r, s, t. Vrednosti slova r, s, t mogu se po volji odabrati.

2. Za skupove iskaznih formula $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ kažemo da su *ravnosledni* (oznaka: $\mathcal{A} \models\mid \mathcal{B}$), ukoliko su sve formule iz $\mathcal{B}$ posledice skupa $\mathcal{A}$, i obratno sve formule iz $\mathcal{A}$ su posledica skupa $\mathcal{B}$.

Dokazati da su naredni uslovi medjusobno ekvivalentni

(i) $\mathcal{A} \models\mid \mathcal{B}$, tj. $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ i $\mathcal{B} \models \mathcal{A}$,

(ii) Skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ imaju iste modele,

(iii) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ imaju iste posledice, tj.:

$$\mathcal{A} \models F \text{ akko } \mathcal{B} \models F \qquad (F \text{ je proizvoljna formula})$$

3. Odrediti sve modele datih formula (po njihovim slovima)

a) $p \wedge q,\ \neg q \vee \neg r,\quad s \Rightarrow r;$ b) $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r$

Rešenje. Napominjemo da je za rešavanje oba zadatka moguće postupiti na ovakav način: Obrazovati konjunkciju datih formula, a potom tu konjunkciju prevesti na rastavni oblik (potpuni ili ne) i pomoću njega saznati sve tražene vrednosti slova (od kojih su formule gradjene).

Izlažemo drugačiji način rešavanja – način kakav se može upotrebiti i kada broj datih iskaznih formula *nije konačan*.

a) Označimo sa $\mathcal{F}$ dati skup formula. Tada:[1]

$\mathcal{F} \models\!\mid \mathcal{F}, p, q$ (Pošto iz $p \wedge q$ proizlazi p, q)

$\models\!\mid \mathcal{F}, p, q, \neg r$ (Jer, iz $q,\ \neg q \vee \neg r$ sledi formula $\neg r$)

$\models\!\mid \mathcal{F}, p, q, \neg r, \neg s$ (Na osnovu $\neg r,\ s \Rightarrow r \models \neg s$)

Problem rešavanja skupa formula $\mathcal{F}$ svodi se na taj način na problem rešavanja skupa $\mathcal{F} \cup \mathcal{M}$, gde smo sa $\mathcal{M}$ označili skup formula: $p, q, \neg r, \neg s$. Medjutim, skup $\mathcal{M}$ ima tačno jedno rešenje (model):

$$\tau = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ \top & \top & \perp & \perp \end{pmatrix}$$

Otuda imamo ovaj zaključak: Ako skup $\mathcal{F}$ ima rešenje, onda to mora biti τ. Drugačije rečeno, τ je jedini „kandidat" (mogućnik) za rešenje. Budući da vredi (što se lako proverava) $\mathcal{M} \models \mathcal{F}$, zaključujemo produžavajući prethodni „ravnosledni" lanac: $\mathcal{F} \models\!\mid \mathcal{M}$. Dakle, τ je jedino rešenje skupa $\mathcal{F}$.

U vezi sa prethodnim načinom rešavanja istaknimo ove opšte crte. U početku smo polazeći od skupa $\mathcal{F}$ izvlačili razne posledice (tog skupa). $\mathcal{F}$ je, naravno, ravnosledan sa skupom koji iz njega nastaje dodavanjem nekih njegovih posledica $\mathcal{M}$.

U obrazovanju posledica skupa $\mathcal{F}$ (kojih, inače, ima beskonačno mnogo) stremili smo ka *posledicama posebne vrste.* Ta se posebnost sastoji u tome da dobijene posledice imaju tačno jedno rešenje koje se, pored toga, „direktno čita" iz samih posledica. Jasno je da skup $\mathcal{M}$ ima te odlike. Opštije, u takve skupove dolaze skupovi obrazovani od formula oblika

$$p^{\alpha},\ q^{\beta},\ r^{\gamma}, \ldots \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots \text{ su } \top \text{ ili } \perp)$$

Tako smo stigli do zaključka $\mathcal{F} \models\!\mid \mathcal{F} \cup \mathcal{M}$.

Najzad, kako vredi $\mathcal{M} \models \mathcal{F}$, to se zaključak $\mathcal{F} \models\!\mid \mathcal{F} \cup \mathcal{M}$ svodi na: $\mathcal{F} \models\!\mid \mathcal{M}$, što problem rešava do kraja.

Napomenimo da se sličan put rešavanja sreće i u mnogim drugim matematičkim zadacima, upravo u onim koji poseduju jedinstveno rešenje. U zadatku b) srećemo slučaj sa više rešenja.

---

[1] Umesto $\mathcal{F} \cup \{p, q\}$ stoji $\mathcal{F}$, p, q. I u daljem često oznake za skup { } izostavljamo.

b) Dati skup formula označimo sa $\mathcal{F}$. Dogovorimo se da

$$\mathcal{A} \models\!\mid \mathcal{B} \text{ ili } \mathcal{C} \qquad (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \varphi \text{ su skupovi formula})$$

označava da svaki model (tj. svako rešenje) skupa $\mathcal{B}$, odnosno skupa $\mathcal{C}$ jeste model i skupa $\mathcal{A}$, i obratno svaki model skupa $\mathcal{A}$ jeste model bar jednog od skupova $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Tada imamo ovakvo rasudjivanje:

$\mathcal{F} \models\!\mid \mathcal{F}, p$ ili $\mathcal{F}, \neg p$

(Jer za p postoje dve mogućnosti)

$\models\!\mid \mathcal{F}, p, q, r$ ili $\mathcal{F}, \neg p$

(Jer: $p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \models p, q, r$)

$\models\!\mid \{p, q, r\}$ ili $\mathcal{F}, \neg p$

(Lako se proverava da vredi: $p, q, r \models \mathcal{F}$)

U stvari tako smo došli do jednog rešenja

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \top & \top & \top \end{pmatrix}$$

Ostaje da razmotrimo rešenja (ako postoje) koja odgovaraju skupu $\mathcal{F}, \neg p$. Za njih imamo:

$\mathcal{F}, \neg p \models\!\mid \mathcal{F}, \neg p, q$ ili $\mathcal{F}, \neg p, \neg q$ („Raskrsnica po q")

$\models\!\mid \mathcal{F}, \neg p, q, r$ ili $\mathcal{F}, \neg p, \neg q$ (Jer: $q, q \Rightarrow r \models r$)

$\models\!\mid \{\neg p, q, r\}$ ili $\{\neg p, \neg q\}$ (Jer: $\neg p, q, r \models \mathcal{F}$ i $\neg p, \neg q \models \mathcal{F}$)

Skupu $\{\neg p, q, r\}$ odgovara rešenje $\tau_2 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \perp & \top & \top \end{pmatrix}$, dok skupu $\{\neg p, \neg q\}$ odgovaraju dva rešenja (r se može birati po volji):

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \perp & \perp & \top \end{pmatrix}, \quad \tau_4 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ \perp & \perp & \perp \end{pmatrix}$$

Znači skup $\mathcal{F}$ ima ukupno tačno 4 rešenja.

4. Date su formule ($\sim$ je dvojična relacija)

$$x \sim x, \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x, \quad x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$$

Označimo sa $\mathcal{F}$ skup formula koje se iz njih dobijaju kada se promenljive x, y na sve moguće načine zamene članovima skupa $\{a, b\}$. Dobijeni skup $\mathcal{F}$ je, ustvari, skup izvesnih *iskaznih* formula po slovima $a \sim a$, $a \sim b$, $b \sim a$, $b \sim b$. Rešiti skup $\mathcal{F}$ po tim slovima, odnosno odrediti mu sve modele.

Primetimo da je postavljeni zadatak, ustvari, zadatak odredjivanja svih relacija ekvivalencije skupa $\{a, b\}$.

5. Odrediti sve relacije ekvivalencije $\sim$ skupa $\{a, b, c\}$ koje zadovoljavaju uslove: $a \sim b, \neg (b \sim c)$.

6. Odrediti sve modele formula:

a) $p \Leftrightarrow q,\ q \vee \neg r,\ s \Leftrightarrow p$; b) $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r,\ r \Rightarrow s$;

c) $p \vee q \vee r,\ p \vee q \vee s,\ p \vee r \vee s,\ q \vee r \vee s$;

d) $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \wedge s,\ s \Rightarrow p \wedge q \wedge r$

7. Odrediti sve modele formula:

a) $p_1 \Rightarrow p_2,\ p_2 \Rightarrow p_3, \ldots, p_n \Rightarrow p_{n+1}, \ldots$

b) $p_1 \Leftrightarrow \neg p_2,\ p_2 \Leftrightarrow \neg p_3, \ldots, p_n \Leftrightarrow \neg p_{n+1}$

c) $p_3 \Leftrightarrow p_1 \vee p_2,\ p_4 \Leftrightarrow p_2 \vee p_3, \ldots, p_{n+2} \Leftrightarrow p_n \vee p_{n+1}, \ldots$

8. Dokazati:

(i) *$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ima model $\rightarrow \mathcal{A}$, p ima model ili $\mathcal{B}, \neg p$ ima model*

(ii) *$\mathcal{A}, p$ nema model i $\mathcal{B}, \neg p$ nema model $\rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ nema model.*

Tu je p iskazno slovo, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ skupovi iskaznih formula.

Rešenje. (i) Pretpostavimo da je M jedan model skupa $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ (odredjen vrednostima slova iz $P \supseteq P_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$). Tvrđenje je trivijalno ukoliko se slovo p ne pojavljuje u P, jer, tada se M može produžiti do modela za $\mathcal{A} \cup \{p\}$ ili za $\mathcal{B} \cup \{\neg p\}$. Razmotrimo slučaj kada je p jedno među slovima skupa P. Uočimo vrednosti τp tog slova u modelu M. Postoje dve mogućnosti:

$$\text{(a) } \tau p = \top \quad , \qquad \text{(b) } \tau p = \bot$$

U slučaju (a) skup $\mathcal{A}$, p ima model – jedan je upravo M, a u drugom slučaju skup $\mathcal{B}$, $\neg p$ ima model – ponovo je to M. Kraj dokaza.

(ii) Ovo tvrdjenje je kontrapozicija tvrdjenja (i).

9. Neka je $\mathcal{F}$ konačno zadovoljiv skup formula (tj. svaki konačan podskup skupa $\mathcal{F}$ ima model) i p iskazno slovo. Tada bar jedan od skupova

$$\mathcal{F} \cup \{p\}, \qquad \mathcal{F} \cup \{\neg p\}$$

je takodje konačno zadovoljiv. Dokazati.

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da nijedan od tih skupova nije konačno zadovoljiv. U tom slučaju izvesna dva skupa oblika

$$\mathcal{A} \cup \{p\}, \qquad \mathcal{B} \cup \{\neg p\}$$

gde su $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ konačni podskupovi skupa $\mathcal{F}$ nemaju modele. Medjutim, (zadatak 8), odatle sledi da ni skup $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ nema model, što je protivurečnost, budući da je to konačan podskup skupa $\mathcal{F}$.

10. Dokazati *stav kompaktnosti:*

Skup iskaznih formula $\mathcal{A}$ (po slovima $p_1, p_2, \ldots$ ima model ako i samo ako svaki njegov konačan podskup ima model.

Rešenje. Radi lakšeg dokazivanja prethodno uvodimo jednu oznaku. Ako je $\mathcal{F}$ neki konačno zadovoljiv skup i p iskazno slovo, tada (zadatak 9) bar jedan od skupova $\mathcal{F} \cup \{p\}$, $\mathcal{F} \cup \{\neg p\}$ je takodje konačno zadovoljiv. Neka dogovorno $\delta_p \mathcal{F}$

(„dopuna skupa $\mathcal{F}$ po p") označava skup $\mathcal{F}, p$ ukoliko je taj skup konačno zadovoljiv, odnosno skup $\mathcal{F}, \neg p$ ukoliko skup $\mathcal{F}, p$ nije konačno zadovoljiv. Prema uvodjenju ove oznake neposredno zaključujemo da važi implikacija:

$\mathcal{F}$ je konačno zadovoljiv $\to$ $\delta_p \mathcal{F}$ konačno zadovoljiv.

Primetimo još da je δ_p oblika

$$\mathcal{F}, p^{\alpha} \qquad (\alpha \text{ je } \top \text{ ili } \bot)$$

pa, sledstveno, ukoliko taj skup ima neki model, vrednost slova p mora biti α. Slobodnije rečeno, skup $\delta_p \mathcal{F}$ je „izjašnjen" po p – to „izjašnjenje" glasi: $\tau p = \alpha$.

Uočimo sada niz skupova

$$\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$$

odredjen na ovaj način

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}_1 = \delta_{p_1}\mathcal{A}_0, \quad \mathcal{A}_2 = \delta_{p_2}\mathcal{A}_1, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}_n = \delta_{p_n}\mathcal{A}_{n-1}, \ldots$$

Koristeći prethodni zadatak i definiciju znaka δ_p lako zaključujemo:

1° Svi skupovi $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots$ su konačno zadovoljivi

2° Važe inkluzije $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \ldots \subseteq \mathcal{A}_{n-1} \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \ldots$

Podesno je skup $\mathcal{A}_n$ i ovako označiti

$$\mathcal{A}, p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n}$$

jer on, na kraju, nastaje kad se skupu $\mathcal{A}$ dodaju p_1 ili $\neg p_1$, p_2 ili $\neg p_2, \ldots, p_n$ ili $\neg p_n$.

Označimo sa $\mathcal{S}$ uniju svih skupova $\mathcal{A}_i$. Dakle:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$$

Skup $\mathcal{S}$:

(i) je nadskup skupa $\mathcal{A}$ (jer $\mathcal{A}_0$ je $\mathcal{A}$)

(ii) je konačno zadovoljiv (jer ako je $\{F_1, \ldots, F_k\}$ neki njegov konačan podskup, tada je on podskup i nekog od skupova $\mathcal{A}_i$, pa kao takav poseduje bar jedan model)

(iii) sadrži izvesne formule oblika

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n}, \ldots \qquad (\alpha_i \text{ su } \top \text{ ili } \bot)$$

(jer $\mathcal{A}_1$ sadrži formulu oblika $p_1^{\alpha_1}$, $\mathcal{A}_2$ sadrži tu i još neku oblika $p_2^{\alpha_2}$, itd.).

Dokazujemo da je

$$M = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \ldots\ldots & p_n \ldots\ldots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots\ldots & \alpha_n \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

jedan model za $\mathcal{S}$, pa prema (i) model i za $\mathcal{A}$. Zamislimo da je

$$F(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$$

ma koja formula skupa $\mathcal{S}$, čija su sva slova (a njih je samo *konačno* mnogo):

$$p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$$

Skup $\mathcal{S}$, prema (ii) je konačno zadovoljiv, pa stoga skup (inače njegov konačan podskup)

$$\{F(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}),\ p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}, \ldots, p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}\}$$

mora imati neki model. Medjutim, zbog prisustva formula $p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}, \ldots, p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$ lako zaključujemo da u svakom modelu istog skupa moraju vredeti jednakosti

$$\tau p_{i_1} = \alpha_{i_1}, \ldots, \tau p_{i_k} = \alpha_{i_k}$$

kao i jednakost

$$F(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}) = \top$$

Dakle, formula F – odnosno ma koja formula skupa $\mathcal{S}$ je zadovoljena u M, tj. M je zaista model za $\mathcal{S}$, odnosno i za $\mathcal{A}$. Kraj dokaza.

Napomena. Nije bitno što je skup $\{p_1, p_2, \ldots\}$ iskaznih slova prebrojiv. Stav kompaktnosti vredi i za svaki drugi skup iskaznih slova. Obično se tada u dokazivanju uzima da je skup iskaznih slova dobro uredjen i dokaz se vodi slično kao u prebrojivom slučaju. U vezi sa tim videti dokaz izložen u 27. zadatku.

11. Konačan skup formula $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ nema model ako i samo ako formula

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Leftrightarrow \bot$$

je tautologija. Dokazati.

Uputstvo. Koristiti se potpunim rastavnim oblikom formule $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$.

12. Dokazati: Ako skup $\mathcal{F}$ izvesnih formula nema model, tada taj skup ima konačno mnogo formula $A_1, A_2, \ldots, A_n$ čija je konjunkcija ekvivalentna sa $\bot$.

Rešenje. Uočimo lanac

$\mathcal{F}$ nema model $\rightarrow$ Izvestan njegov konačan podskup $\{A_1, \ldots, A_n\}$ nema model (jer, ako bi svi takvi podskupovi imali model, po stavu kompaktnosti – zadatak 10 – i $\mathcal{F}$ bi imao model)

$\rightarrow$ Formula $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Leftrightarrow \bot$ je tautologija (zadatak 11)

iz koga sledi traženi zaključak.

13, Dokazati: Ako je formula A semantička posledica skupa $\mathcal{F}$ (izvesnih iskaznih formula) tada postoji konačan podskup $\mathcal{F}_0$ skupa $\mathcal{F}$ tako da je A semantička posledica i tog skupa.

Rešenje. Uočimo lanac

$\mathcal{F} \models A \rightarrow \mathcal{F}, \neg A$ nema model

(Po definiciji znaka $\models$)

$\rightarrow$ Postoji $\mathcal{F}_o$, konačan podskup od $\mathcal{F}$, tako da skup $\mathcal{F}_o, \neg A$ nema model (U suprotnom po stavu kompaktnosti dobili bismo da skup $\mathcal{F}, \neg A$ ima model)

$\rightarrow$ Postoji konačan podskup $\mathcal{F}_o$ skupa $\mathcal{F}$ tako da: $\mathcal{F}_o \models A$

(Deo $\mathcal{F}_o, \neg A$ *nema model* je ekvivalentan sa $\mathcal{F}_o \models A$)

iz koga sledi traženi zaključak.

Napomena. Obrat dokazanog tvrdjenja takodje važi, a dokaz je trivijalan.

14. Neka je $\mathcal{F}$ dati skup iskaznih formula. Uočimo skup $\mathcal{U}$ svih formula jednog od oblika

$$A_1 \vee P, (A_1 \wedge A_2) \vee P, \ldots, (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee P, \ldots$$

gde su $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$; $k = 1, 2, 3, \ldots$, P je proizvoljna iskazna formula (gradjena od istih slova kao i formula skupa $\mathcal{F}$).

Dokazati:

(i) $\mathcal{F} \models \mathcal{U}$

(ii) Ako $\mathcal{F} \models A$, tada u skupu $\mathcal{U}$ postoji formula B koja je ekvivalentna sa A.

15. Dokazati $\mathcal{F} \vdash A$ ukoliko je A tautologija, a $\mathcal{F}$ ma koji skup iskaznih formula.

16. Dokazati *stav dedukcije:*

(☆) $$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A \longrightarrow A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow A$$

Dokaz. U vezi sa pojmom $\mathcal{F} \vdash A$, uopšte, uvedimo prirodan broj d – to je dužina (odnosno broj članova) najkraćeg izvodjenja za $\mathcal{F} \vdash A$. Naravno, jednom broju d može odgovarati i više različitih izvodjenja. Dokaz izvodimo indukcijom prema broju d koji odgovara rečenici

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$$

Slučaj $d = 1$. Tada postoji jednočlano izvodjenje za $A_1, \ldots, A_n \vdash A$. Ono mora da glasi A, i uz to A mora biti neka tautologija ili A_n ili A_i gde $1 \leqslant i < n$. Dokaz za

$A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow A$ u prva dva slučaja izvodi se neposredno a u trećem glasi:

(1) $A_i \Rightarrow (A_n \Rightarrow A_i)$ (Tautologija),

(2) A_i (Hipoteza)

(3) $A_n \Rightarrow A_i$ (Iz (1) i (2) po modus ponensu)

Slučaj $d > 1$. Neka je

(1) $F_1, F_2, \ldots, F_d$ (F_d je A)

jedno izvodjenje formule A iz pretpostavki $A_1, \ldots, A_n$. Za A postoji jedna od mogućnosti:

(i) A je neka tautologija, (ii) A je A_i – neka od formula $A_1, ..., A_n$, (iii) u navedenom izvodjenju postoje dva člana oblika

$$B, B \Rightarrow A$$

U svakom od ta tri slučaja dokazujemo da važi

(2) $$A_1, ..., A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow A$$

U prvom slučaju $A_n \Rightarrow A$ je takodje tautologija pa (2) važi. U drugom slučaju (2) dobija oblik

(3) $$A_1, ..., A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow A_i$$

Ukoliko $i = n$ tada (3) sigurno važi (jer $A_n \Rightarrow A_n$ je tautologija, a ukoliko $i < n$ tada važi:

(4) $$A_1, ..., A_{n-1} \vdash A_i$$

Medjutim, dalje primetimo da je tautologija formula

(5) $$A_i \Rightarrow (A_n \Rightarrow A_i)$$

pa iz (4) i (5) neposredno sledi (3). U trećem slučaju izvesna dva člana F_i, F_j ($i<d$, $j<d$) izvodjenja (1) su oblika B, $B \Rightarrow A$. Znači, važe rečenice

$$A_1, ..., A_n \vdash B, \qquad A_1, ..., A_n \vdash B \Rightarrow A$$

i uz to odnosna izvodjenja su dužina manjih od d. Na osnovu indukcijske hipoteze tačne su i rečenice

(6) $$A_1, ..., A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow B, \qquad A_1, ..., A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

Na osnovu (6) koristeći se još i tautologijom

$$(A_n \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A_n \Rightarrow B) \Rightarrow (A_n \Rightarrow A))$$

kao i modus ponensom (dva puta) dobijamo

$$A_1, ..., A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow A$$

Kraj dokaza.

17. Podjimo od grupoida odredjenog tablicom

☆	1	a	b
1	1	b	a
a	1	1	1
b	1	1	1

i u vezi sa njim uvedimo pojmove „formula", „vrednost formule", „model" i dr. slično slučaju istinitosnih tablica osnovnih logičkih operacija.

Prvo, izvesna slova, na primer

$$p_1, p_2, ..., p_n, ...$$

nazivamo „iskazna". Kao „formule" uzmimo sve izraze gradjene od tih slova i operacijskog znaka ☆. Tako, neke formule su

$$p_1, \; p_2 \star p_1, \; p_3 \star (p_1 \star p_2),$$

gde su izvesne zagrade izostavljene. Elementi 1, a, b služiće kao „vrednosti" iskaznih slova, dok tablica grupoida igra ulogu „istinitosne" tablice. Neka, dogovorno, element 1 bude tzv. *označena* vrednost. Na osnovu tablice grupoida svakoj formuli A, čija slova imaju odredjene vrednosti, odgovara „vrednost" formule. To je ili 1 ili a ili b. Recimo, ako p_1, p_2 redom imaju vrednosti $1, a$, tada formula $p_1 \star p_2$ ima vrednost b, dok formula $p_1 \star (p_2 \star p_1)$ ima vrednost 1. U stvari, ta druga formula uvek ima vrednost 1. To je „tautologija". Naime, „tautologije" su one formule koje uvek (tj. za sve vrednosti svojih slova) imaju vrednosti 1. Dalje, na sličan način uvodimo pojmove:

$$\textit{model datih formula } \mathcal{F},\ \mathcal{F} \models A,\ \mathcal{F} \vdash A$$

gde je A neka formula, a $\mathcal{F}$ je skup formula.

(i) Odrediti sve modele po p_1, p_2, p_3 formule

$$p_2 \star (p_3 \star p_1)$$

(ii) Formule

$$p_1 \star p_1,\quad p_1 \star (p_2 \star p_1),\quad (p_1 \star (p_2 \star p_3)) \star ((p_1 \star p_2) \star (p_1 \star p_3))$$

su tautologije. Dokazati.

(iii) Uvodeći pojam $\mathcal{F} \vdash A$ na sličan način kao kod iskaznih formula zamenjujući modus ponens pravilom

$$\frac{A,\ A \star B}{B}$$

dokazati „stav dedukcije" za $\star$:

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A \to A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \star A$$

Uputstvo. (ii) Dokazati nemogućnost da data formula ima vrednost različitu od 1. (iii) Koristiti dokaz naveden u prethodnom zadatku, zamenjujući u njemu znak $\Rightarrow$ znakom $\star$.

18. Produžetak prethodnog zadatka.

(iv) Dokazati „stav kompaktnosti" za $\star$:

Skup F ima model akko svaki njegov konačan podskup ima model.

19. Dokazati ekvivalenciju

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A \longleftrightarrow \text{ Formula } (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow A \text{ je tautologija.}$$

Uputstvo. Deo „sleva nadesno" sledi na osnovu stava dedukcije, primenjenog n puta[1] kao i tautologije

$$(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (A_n \Rightarrow A) \ldots)) \Rightarrow ((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow A)$$

Deo „zdesna nalevo" sledi iz tautologije

$$((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow A) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \ldots \quad (A_n \Rightarrow A) \ldots))$$

---

[1] Tada se iz $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$ dobija da je tautologija formula $(A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \ldots (A_n \Rightarrow A)\ldots))$;

i modus ponensa primenjenog n puta.

20. Dokazati *stav potpunosti* (II oblik)

(☆) $$\mathcal{F} \models A \longleftrightarrow \mathcal{F} \vdash A$$

Uputstvo. Po definiciji važi $\mathcal{F} \vdash A$ akko za neki konačan podskup $\{A_1, \ldots, A_n\}$ skupa $\mathcal{F}$ važi $A_1, \ldots, A_n \vdash A$. Koristiti i zadatke 13 i 19 kao i tvrdjenje :

$$A_1, \ldots, A_n \models A \text{ akko formula } (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow A \text{ je tautologija}$$

21. Dokazati *stav potpunosti* (I oblik)

$$\mathcal{F} \textit{ ima model} \longleftrightarrow \mathcal{F} \textit{ je neprotivurečan}$$

gde je $\mathcal{F}$ ma koji skup iskaznih formula.

Uputstvo. Koristeći ekvivalenciju (☆) prethodnog zadatka neposredno imamo

$\mathcal{F}$ *ima model* $\longleftrightarrow$ *Nije* $\mathcal{F} \models \bot$

$\longleftrightarrow$ *Nije* $\mathcal{F} \vdash \bot$

$\longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ *je neprotivurečan*

U vezi sa prvim članom tog ekvivalencijskog lanca navodimo ovo obrazloženje, smatrajući da je $\mathcal{F}$ skup oblika $\{F_i \mid i \in I\}$:

Nije $\mathcal{F} \models \bot \longleftrightarrow$ *Nije* $\{F_i \mid i \in I\} \models p \wedge \neg p$

$\longleftrightarrow$ *Nije (Za svaki τ) [(Za svaki $i \in I$)$\tau F_i = \top \to \tau(p \wedge \neg p) = \top$]*

(Sa τ smo označili preslikavanje skupa svih odgovarajućih iskaznih slova u skup $\{\top, \bot\}$)

$\longleftrightarrow$ *Nije (Za svaki τ) Nije (Za svaki $i \in I$) $\tau F_i = \top$*

(Jer je drugi član implikacije, tj. $\tau(p \wedge \neg p) = \top$, netačan)

$\longleftrightarrow$ *(Postoji τ) Nije Nije (Za svaki $i \in I$)$\tau F_i = \top$*

$\longleftrightarrow$ *(Postoji τ) (Za svaki $i \in I$)$\tau F_i = \top$*

$\longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ *ima model*

Napomena. Moguće je i obratno, odnosno stav potpunosti (II oblik) izvesti iz stava potpunosti (I oblik).

22. Neka je $\mathcal{F}$ skup izvesnih formula F_i $(i \in I)$ po slovima $p_1, p_2, \ldots$. Pretpostavimo, dalje da za svaku vrednost tih slova (tj. preslikavanje u skup $\{\top, \bot\}$ najmanje jedna od tih formula ima vrednost $\top$. Dokazati da u skupu $\mathcal{F}$ postoji konačno mnogo formula $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ takvih da je disjunkcija

$$F_{i_1} \vee \ldots \vee F_{i_k}$$

tautologija.

Dokaz. Koristeći u meta logici pisanje blisko formulskim imamo:

(Za svaki τ) (Postoji $i \in I$)$\tau F_i = \top$

$\to$ *Nije Nije (Za svaki τ) (Postoji $i \in I$)$\tau F_i = \top$*

$\to$ *Nije (Za neki τ) Nije (Postoji $i \in I$)$\tau F_i = \top$*

$\rightarrow$ *Nije (Postoji τ) (Za svaki $i \in I$) $\tau F_i = \perp$*
$\rightarrow$ *Nije (Postoji τ) (Za svaki $i \in I$) $\tau \neg F_i = \top$*
$\rightarrow$ *Nije da skup $\{\neg F_i | i \in I\}$ ima model*
$\rightarrow$ *Nije da svaki konačan podskup $\{\neg F_{i_1}, \ldots, \neg F_{i_k}\}$ skupa $\{\neg F_i | i \in I\}$ ima model*
$\rightarrow$ *Neki konačan podskup $\{\neg F_{i_1}, \ldots, \neg F_{i_k}\}$ nema model*
$\rightarrow$ *(Ne postoji τ) $(\tau(\neg F_{i_1} \wedge \ldots \wedge \neg F_{i_k}) = \top$*
$\rightarrow$ *(Za svaki τ) $\tau(F_{i_1} \vee \ldots \vee F_{i_k}) = \top$*
$\rightarrow$ *$F_{i_1} \vee \ldots \vee F_{i}$ je tautologija.*

23. U skupu svih iskaznih formula po slovima p, q, r uočimo skup $\mathcal{B} = \{p^\alpha, q^\beta, r^\gamma\}$ gde su α, β, γ tri odredjena elementa skupa $\{\top, \perp\}$.

(i) Dokazati

$$p^\alpha, q^\beta, r^\gamma \models A(p,q,r) \leftrightarrow \tau A(\alpha,\beta,\gamma) = \top$$

gde je $A(p, q, r)$ ma koja formula po slovima p, q, r.

(ii) Označimo sa $Con_{\models} \mathcal{B}$ skup svih semantičkih posledica skupa $\mathcal{B}$. Dokazati da je skup $Con_{\models} \mathcal{B}$ maksimalno neprotivurečan, tj. da ne postoji pravi nadskup[1] tog skupa koji je takodje neprotivurečan.

Uputstvo. (ii) U skladu sa (i) važi jednakost

$$Con \mathcal{B} = \{A(p,q,r) \mid \tau A(\alpha, \beta, \gamma) = \top\},$$

gde smo izostavili znak $\models$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji neprotivurečan skup $\mathcal{M}$, koji je pravi nadskup skupa $Con \mathcal{B}$ i neka

$$F(p, q, r) \in \mathcal{M} \setminus Con \mathcal{B}$$

Za tu formulu važi jednakost $\tau F(\alpha,\beta,\gamma) = \perp$, jer bi inače $F(p, q, r)$ pripadala skupu $Con \mathcal{B}$. Na osnovu toga zaključujemo jednakost $\tau \neg F(\alpha,\beta,\gamma) = \top$, pa znači formula $\neg F(p, q, r)$ pripada skupu $Con \mathcal{B}$. Prema dosadašnjem rasudjivanju sledi da i $F(p, q, r)$ i $\neg F(p, q, r)$ pripadaju skupu $\mathcal{M}$, odnosno da je $\mathcal{M}$ protivurečan – što je suprotno pretpostavci.

24. Produžetak prethodnog zadatka. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih iskaznih formula po slovima $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ i

$$\tau = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \ldots & p_n \ldots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_n \ldots \end{pmatrix}$$

jedno preslikavanje skupa tih slova u skup $\{\top, \perp\}$. U vezi sa τ uočimo skup formula:

$$\mathcal{B}_\tau = \{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n}, \ldots\}$$

[1] Misli se na nadskupove gradjene takodje po slovima p, q, r.

(i) Dokazati da je skup $Con\mathcal{B}$ maksimalno neprotivurečan skup formula.

(ii) Obratno, ako je $\phi \subseteq \mathcal{F}$ neki maksimalno neprotivurečan skup formula, tada je ϕ oblika $Con\mathcal{B}_\tau$ za neko preslikavanje τ. Dokazati.

25. Neka je $\mathcal{F}$ neprotivurečan skup formula i A izvesna formula. Bar jedan od skupova $\mathcal{F}, A$ odnosno $\mathcal{F}, \neg A$ je takodje neprotivurečan. Dokazati.

Uputstvo. Ako su oba skupa $\mathcal{F}, A$ i $\mathcal{F}, \neg A$ protivurečni, tada: $\mathcal{F}, A \vdash \bot$ i $\mathcal{F}, \neg A \vdash \bot$, odakle na osnovu stava dedukcije (zadatak 16) sledi: $\mathcal{F} \vdash A \Rightarrow \bot, \mathcal{F} \vdash \neg A \Rightarrow \bot$, odnosno $\mathcal{F} \vdash \neg A$, $\mathcal{F} \vdash A$. Odatle zaključujemo da je $\mathcal{F}$ protivurečan, itd.

Tvrdjenje se može dokazati i korišćenjem stava potpunosti (zadatak 21). Naime, ako je $\mathcal{F}$ neprotivurečan, tada $\mathcal{F}$ ima bar jedan model τ. Preslikavanje τ je model i za tačno jednu od formula A, $\neg A$. Dakle, bar jedan od skupova $\mathcal{F}, A$ i $\mathcal{F}, \neg A$ ima model, odnosno jeste neprotivurečan.

26. Dokazati ekvivalenciju

(Nije $\mathcal{F} \vdash A \longleftrightarrow \mathcal{F}, \neg A$ *je neprotivurečan*

Dokaz. (korišćenjem stava dedukcije).

$\mathcal{F}, \neg A$ *je neprotivurečan* $\leftrightarrow$ Nije $\mathcal{F}, \neg$ A protivurečan

$\leftrightarrow$ Nije $\mathcal{F}, \neg A \vdash \bot$

$\leftrightarrow$ Nije $\mathcal{F} \vdash \neg A \Rightarrow \bot$

$\leftrightarrow$ Nije $\mathcal{F} \vdash A$

Dakle:

$\mathcal{F}, \neg A$ *je neprotivurečan* $\longleftrightarrow$ *Nije* $\mathcal{F} \vdash A$.

27. Dokazati *stav Lindenbauma:* Ma koji neprotivurečan skup formula može se proširiti do maksimalno neprotivurečnog skupa formula.

Uputstvo. Stav se može dokazati recimo, korišćenjem stava potpunosti (zadatak 21). Neka je, recimo, $\mathcal{F}$ dat neprotivurečan skup formula po izvesnim slovima p_i $(i \in I)$. Taj skup ima bar jedan model τ: $p_i \to \alpha_i$ (α_i su elementi skupa $\{\top, \bot\}$).

U vezi sa τ uočimo skup $\mathcal{B}_\tau = \{p_i^{\alpha_i} \mid i \in I\}$ kao i skup $Con\,\mathcal{B}_\tau$ (videti zadatak 23). Taj skup je maksimalno neprotivurečan skup formula koji sadrži skup $\mathcal{F}$.

Opisujemo i jedan dokaz bez oslanjanja na stav potpunosti i to u slučaju kad je skup iskaznih slova p_i ma koji skup. Uočimo skup svih iskaznih formula po tim slovima i pretpostavimo da je taj skup dobro uredjen[1]), slobodnije rečeno, da su njegovi članovi poredjani u „niz”:

(1) $$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots$$

U vezi sa tim nizom obrazovaćemo neopadajući lanac skupova formula:

(2) $$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_\alpha \subseteq$$

gde je $\mathcal{F}_0$ polazno dat neprotivurečan skup formula. Skup $\mathcal{F}_1$ obrazujemo na ovaj način. Uočimo skup $\mathcal{F}_0 \cup \{A_0\}$ i tada $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \cup \{A_0\}$, ukoliko je taj skup ne-

[1]) Videti tačku XVI.

protivurečan, odnosno $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0$ ukoliko je skup $\mathcal{F}_0 \cup \{A_0\}$ protivurečan. Na sličan način obrazujemo i $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$, odnosno na α – tom koraku uzimamo: $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \{A_\alpha\}$, ako je $\mathcal{F}_\alpha \cup \{A_\alpha\}$ neprotivurečan, odnosno $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha$ inače. Ukoliko je α granični ordinal, tada uzimamo uniju, odnosno: $\mathcal{F}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta$. U idućem koraku obrazujemo uniju $\mathcal{M}$ svih članova niza (2):

$$\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{F}_\alpha$$

Lako se dokazuje da je $\mathcal{M}$ maksimalno neprotivurečan skup formula koji sadrži polazni skup $\mathcal{F}$. Jer, ako bi $\mathcal{M}$ bio protivurečan, tada bi važilo $\mathcal{M} \vdash \bot$, odnosno za konačno mnogo formula $M_1, M_2, \ldots, M_k$ skupa $\mathcal{M}$ bi važilo $M_1, M_2, \ldots, M_k \vdash \bot$. Medjutim, sve te formule pripadaju izvesnom skupu $\mathcal{F}_\alpha$, pa bi to značilo da je skup $\mathcal{F}_\alpha$ protivurečan, što se, inače, lako opovrgava. Dalje, pretpostavimo da $\mathcal{M}$ nije maksimalan, već da $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$ gde je $\mathcal{K}$ neprotivurečan skup formula i još izvesna formula A pripada skupu $\mathcal{K}$, ali ne i skupu $\mathcal{M}$. Pošto (1) sadrži sve iskazne formule (po uočenim iskaznim slovima), to je A jedna od tih formula, recimo formula A_α. Prema zamišljenoj konstrukciji skup $\mathcal{F}_\alpha \cup \{A_\alpha\}$ mora biti protivurečan, jer bi inače A_α bila član skupa $\mathcal{F}_{\alpha+1}$, odnosno skupa $\mathcal{M}$. Znači, skup $\mathcal{M} \cup \{A_\alpha\}$ je protivurečan, pa takav mora biti i skup $\mathcal{K}$. Dobijena kontradikcija potvrduje maksimalnost skupa $\mathcal{M}$. Kraj dokaza.

28. Dokazati:

Skup iskaznih formula po slovima p_i $(i \in I)$ je maksimalno neprotivurečan akko taj skup po istim slovima ima tačno jedan model.

29. Neka je $\mathcal{H}$ skup izvesnih iskaznih formula vida:

iskazno slovo, odnosno *konjunkcija slova povlači slovo*

Recimo, jedan takav skup grade formule

(I) $\qquad p,\ p \Rightarrow q,\ p \Rightarrow r,\quad p \wedge q \wedge r \Rightarrow s,\quad s \wedge t \Rightarrow u,\quad t \wedge u \Rightarrow p$

Označimo sa $P_{\mathcal{H}}$ skup svih iskaznih slova formula $\mathcal{H}$. Dokazati da je preslikavanje $\tau\colon P_{\mathcal{H}} \to \{\top, \bot\}$ odredjeno definicijom

(Δ) $\qquad \tau p = \top$ akko $\mathcal{H} \vdash p \qquad (p \in P_{\mathcal{H}}$, ma koje slovo)

model skupa $\mathcal{H}$.

Dokaz. Označimo sa $S = \{s_i \mid i \in I\}$ skup svih slova kojima je preslikavanjem τ dodeljena vrednost $\top$. To su upravo ona slova (iz skupa $P_{\mathcal{H}}$) koja su posledice skupa $\mathcal{H}$. Skupovi $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H} \cup S$ su ravnosledni (zadatak 2). Uočimo ma koju formulu F:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \ldots \wedge \theta_k \Rightarrow \varphi \qquad (\theta_1, \ldots, \theta_k, \varphi \text{ su slova})$$

iz skupa $\mathcal{H}$ i u vezi sa njom formulu F_S odredjenu na ovaj način :

F_S je $\top$ ukoliko $\varphi \in S$, a u protivnom F_S je formula koja nastaje iz F kada se u ovoj izostave („obrišu") sva ona slova $\theta_1, \ldots, \theta_k$ koja su članovi skupa S. Neka je, recimo, $S = \{p, q, r\}$. Tada redom formulama

$$p \wedge t \Rightarrow u, \quad q \wedge t \wedge u \Rightarrow v, \quad u \wedge p \wedge r \Rightarrow v, \quad v \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow t$$

odgovaraju formule

$$t \Rightarrow u, \quad t \wedge u \Rightarrow v, \quad u \Rightarrow v, \quad \top, \; t$$

Drukčije rečeno, formula F_S nastaje iz formule F ako se sva slova te formule, koja su članovi skupa S zamene sa $\top$ ali se uz to uzmu u obzir i tablice operacija $\wedge$, $\Rightarrow$.

Ako je F ma koja formula, tada su ravnosledni skupovi S, F i S, F_S. S tim u vezi su tautologije kao

$$p \wedge q \wedge A(p, q, r, s, \ldots) \Longleftrightarrow p \wedge q \wedge A(\top, \top, r, s, \ldots)$$

$$p_1 \wedge \ldots \wedge p_k \wedge A(p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l) \Longleftrightarrow p_1 \wedge \ldots \wedge p_k \wedge A(\top, \ldots, \top, q_1, \ldots, q_k)$$

gde je A ma koja iskazna formula po naznačenim slovima. U stvari, ravnoslednost skupova S, F i S, F_S i počiva na takvim tautologijama. Opštije, ravnosledni su skupovi $\mathcal{H} \cup S$ i $\mathcal{H}_S \cup S$, gde smo sa $\mathcal{H}_S$ označili skup formula nastao od formula F skupa $\mathcal{H}$ zamenjujući svaku od tih formula sa F_S. Koristeći dalje ravnoslednost skupova $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H} \cup S$ zaključujemo najzad ravnoslednost skupova $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}_S \cup S$. Razmotrimo sada izgled članova skupa $\mathcal{H}_S$. Ti članovi, u skladu sa načinom kako su nastali, mogu biti: $\top$, i l i konjunkcija slova povlači slovo, i l i slovo. Treća mogućnost otpada, jer u protivnom, tj. kad bi F_S bilo slovo, to slovo bi bilo još jedan nov član skupa S – što nije moguće, budući da je S skup svih „slovnih" posledica skupa $\mathcal{H}$. Znači, ma koji član skupa $\mathcal{H}_S$ je $\top$ ili je oblika

$$\rho_1 \wedge \ldots \wedge \rho_l \Rightarrow \psi \qquad (\rho_1, \ldots, \rho_l, \psi \text{ su slova})$$

pri čemu, a to je veoma bitno, nijedno od slova $\rho_1, \ldots, \rho_l, \psi$ ne pripada skupu S. Sada smo u stanju da ustanovimo da preslikavanje τ odredjeno definicijom (Δ) zaista jeste model skupa $\mathcal{H}$ odnosno, što je ekvivalentno, model skupa $S \cup \mathcal{H}_S$. Preslikavanjem τ svim članovima skupa S se dodeljuje vrednost $\top$, a svim slovima ρ_1 $\ldots, \rho_l, \psi$ formula skupa $\mathcal{H}_S$ vrednost $\perp$. Zamenjujući sva iskazna slova njihovim vrednostima članovi skupa S postaju $\top$, neki članovi skupa $\mathcal{H}_S$ takodje $\top$ a neki postaju

$$\perp \wedge \ldots \wedge \perp \Rightarrow \perp$$

što opet iznosi $\top$. Zaključak: τ je model skupa $\mathcal{H}$. Kraj dokaza.

30. Produžetak prethodnog zadatka. Da li se članovi skupa S, odnosno sve „slovne" posledice skupa $\mathcal{H}$ mogu dobiti primenjujući konačno puta sledeća pravila u kojima kao pomoćni učestvuje i pojam *dobra* formula:

(a) Ako $s \in \mathcal{H}$, onda $s \in S$.

(b) Ako $A \in \mathcal{H}$, onda A je dobra.

(c) Ako $s \in S$ i formula $s \Rightarrow u$ je dobra, onda $u \in S$.

(d) Ako $s \in S$ i ako je dobra formula oblika

$A_s \Rightarrow u$ (s, u slova; A_s je konjunkcija slova medju kojima se nalazi i slovo s)
tada je dobra i formula

$$A \Rightarrow u$$

gde A nastaje iz A_s izostavljanjem slova s („brisanjem").

31. Navesti primer neprotivurečnog skupa iskaznih formula $\mathcal{F}$ za koji se definicijom

$$\tau p = \top \quad \text{akko} \quad \mathcal{F} \vdash p \qquad (p \text{ je ma koje iskazno slovo})$$

ne odredjuje model skupa $\mathcal{F}$.

32. **Produžetak 29–og zadatka.** Model odredjen definicijom (Δ) označimo sa $\Delta(\mathcal{H})$ – zvaćemo ga deduktivni model za $\mathcal{H}$. Neka je, dalje, M ma koji podskup od $P_{\mathcal{H}}$.

(i) Dokazati da je $\Delta(\mathcal{H} \cup M)$ model skupa $\mathcal{H}$.

(ii) Svaki model skupa $\mathcal{H}$ je oblika $\Delta(\mathcal{H} \cup M)$. Dokazati.

33. Dokazati ekvivalencije

$\mathcal{F}$ je neprotivurečan $\longleftrightarrow$ $\mathcal{F}, A$ je neprotivurečan ili $\mathcal{F}, \neg A$ je neprotivurečan

$\mathcal{F}$ ima model $\longleftrightarrow$ $\mathcal{F}, A$ ima model ili $\mathcal{F}, \neg A$ ima model

$\mathcal{F}$ je konačno zadovoljiv $\longleftrightarrow$ $\mathcal{F}, A$ je konačno zadovoljiv ili
$\mathcal{F}, \neg A$ je konačno zadovoljiv

τ je model za $\mathcal{F}$ $\longleftrightarrow$ τ je model za $\mathcal{F}, A$ ili τ je model za $\mathcal{F}, \neg A$,

gde je $\mathcal{F}$ skup iskaznih formula, a A izvesna iskazna formula. Da li se u tim ekvivalencijama veznik *ili* može zameniti veznikom *ili ... ili* ?

(ii) Predikatski slučaj

♦ Jezik (podrobnije predikatski jezik prvog reda), kao što smo već imali, je skup L čiji su članovi neki relacijski znaci, neki operacijski i neki znaci konstanata. Zahteva se da L sadrži najmanje jedan relacijski znak. Relacijsko–operacijska struktura na jeziku L odredjena je izvesnim nepraznim skupom – nosiocem strukture, i izvesnim relacijama i operacijama (svakom relacijsko–operacijskom znaku iz L pridružuje se po jedna relacija–operacija odgovarajuće dužine) i izvesnim nularnim operacijama (svakom znaku konstante iz L pridružuje se po jedna nularna operacija nosioca, tj. po jedan njegov utvrdjen član). Ukoliko L sadrži znak jednakosti (recimo = ili koji drugi), tada se uvodi i pojam normalne relacijsko–operacijske strukture nad L – znak jednakosti se tumači kao obična jednakost.

♦ U vezi sa nekom relacijsko–operacijskom strukturom $\mathcal{A}$ uvodi se pojam *podstrukture* i pojam $\mathcal{G}$ *–podstrukture,* gde je $\mathcal{G}$ skup izvesnih zatvorenih predikatskih formula (jezika strukture $\mathcal{A}$) ispunjenih u strukturi $\mathcal{A}$. Naime, neka je B neprazan podskup skupa A koji:

(i) *Sadrži nularne operacije strukture* $\mathcal{A}$.

(ii) *Zatvoren je u odnosu na ma koju operaciju f strukture* $\mathcal{A}$ *(tj. ako* $x_1,...,x_n \in B$, *onda* $f(x_1, ..., x_n) \in B$*).*

Tada se operaciji f prirodno dodeljuje operacija f_B skupa B:

$$f_B(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) \qquad (x_1, ..., x_n \in B)$$

tzv. *restrikcija* (na skup B) operacije f.

(iii) Slično, ali bez ikakvog prethodnog uslova o skupu B, relacijama strukture $\mathcal{A}$ se dodeljuju njihove restrikcije. Na primer, restrikcija α_B relacije α (dužine n) uvodi se jednakošću:

$$\tau\, \alpha_B\, (x_1, ..., x_n) = \tau\alpha(x_1, ..., x_n) \qquad (x_1, ..., x_n \in B)$$

Skup B, ukoliko zadovoljava uslove (i) i (ii), u odnosu na opisane relacije i operacije (uključujući i nularne operacije strukture $\mathcal{A}$ koje smatramo i operacijama skupa B) odredjuje strukturu $\mathcal{B}$ (na istom jeziku kao $\mathcal{A}$)koju nazivamo *podstrukturom* od $\mathcal{A}$. Ona podstruktura koja zadovoljava i formule $\mathcal{G}$ (koje, po pretpostavci, već zadovoljava $\mathcal{A}$) naziva se $\mathcal{G}$ *– podstruktura.*

♦ Strukture $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ (na istom jeziku) su *izomorfne* ukoliko postoji obostrano – jednoznačno preslikavanje φ skupa A na skup B takvo da za svaku operaciju f i svaku relaciju α vredi:

$$\varphi\, f(a_1, ..., a_n) = f(\varphi a_1, ..., \varphi a_n)$$

$$\mathcal{A} \models \alpha(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \mathcal{B} \models \alpha(\varphi a_1, ..., \varphi a_n)$$

za ma koje elemente $a_1, ..., a_n$ skupa A. Uz to pretpostavljamo da se nularne operacije strukture $\mathcal{A}$ prevode u odgovarajuće nularne operacije strukture $\mathcal{B}$.

♦ Neka je $\mathcal{A}$ struktura na jeziku L. Takozvana *tablica* strukture je skup izvesnih formula na jeziku $L \cup A$ koje, može se reći, formulski opisuju strukturu $\mathcal{A}$. Naime, u vezi sa svakim operacijskim znakom f (dužine n) strukture $\mathcal{A}$ tablica sadrži sve tačne formule oblika

$$f(a_1, ..., a_n) = a \qquad (a_1, ..., a_n, a \in A)$$

a u vezi sa svakim relacijskim znakom α (dužine n) sve tačne formule oblika

$$\alpha(a_1, ..., a_n), \text{ kao i oblika } \neg\alpha(b_1, ..., b_n),$$

gde $a_i, b_j \in A$. Najzad, u tablicu ulaze i sve tačne formule oblika

[1] Znaci $f, \alpha \in L$ na levim, odnosno desnim stranama označavaju odgovarajuću operaciju i relaciju strukture $\mathcal{A}$ odnosno $\mathcal{B}$.

$$a_i \neq a_j \qquad (a_i, a_j \in A)$$

U vezi sa tablicom je tzv. *dijagram* strukture $\mathcal{A}$. To je skup svih formula jezika $L \cup A$ koje su tačne na strukturi $\mathcal{A}$ i koje su elementarne ili negacije nekih elementarnih formula.

♦ U slučaju iskaznih formula postoje skupovi formula koji, u odnosu na unapred odabran skup iskazanih slova, imaju tačno jedan model. Recimo, takav je skup $\{\neg p, q, \neg r\}$ u odnosu na slova p, q, r. Šta više, za ma koju vrednost polazno odabranih slova (tj. preslikavanje skupa slova u skup $\{\top, \bot\}$) postoji skup iskaznih formula po tim slovima kome je upravo ta vrednost (preslikavanje) jedinstven model. Medjutim, u slučaju predikatskih formula nešto slično ne vredi. Tada su modeli odredjeni relacijsko–operacijskim strukturama (videti uvodni tekst tačke XI, kao i zadatak 55 tačke XIII), i pritom vredi sledeće:
Za unapred datu strukturu, izuzev kada je njen nosilac konačan skup, ne postoji nikoji skup predikatskih formula za koje bi ta struktura bila jedinstven model (zadatak 15).

♦ Stav kompaktnosti

Skup predikatskih formula ima model akko svaki njegov konačan podskup ima model

odnosno u slučaju prisustva znaka jednakosti:

Skup $\mathcal{F}$ *predikatskih formula ima normalan model akko svaki njegov konačan podskup ima normalan model.*

♦ Neka je $\mathcal{F}$ skup univerzalnih formula na jeziku L i Γ dati skup. Označimo sa T skup svih izraza gradjenih od članova skupa Γ i znakova konstanata iz L, kao polaznih izraza, i od operacijskih znakova iz L. Sa $\mathcal{F}|_\Gamma$ označimo skup svih zapisa (reči) nastalih iz formula skupa $\mathcal{F}$ zamenjujući promenljive[1)] na sve moguće načine članovima skupa T. Skup $\mathcal{F}|_\Gamma$ nazivamo *iskazni prevod* (odredjen sa $\mathcal{F}$ i Γ). Taj se skup može shvatiti i kao skup iskaznih formula. Radi toga je dovoljno da se zapisi nastali iz elementarnih formula uzmu kao iskazna slova, a logičkim znacima da se zadrži uloga.

♦ Rešavanje mnogih problema matematike može se prevesti i na traženje (iskaznih) modela nekog skupa oblika $\mathcal{F}|_\Gamma$. Stoga ćemo takav skup zvati i *iskaznim prevodom* odnosnog problema, a za sam problem ćemo govoriti da je svodljiv na problem iskazne logike (videti na primer zadatke 18–23).

---

1)Ako je reč o formuli $(\forall x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ podrazumevamo da se zamenjivanje obavlja u njenom delu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

ZADACI (nastavak)

1. Neka je jezik $L = \{c_1, c_2, \star, \alpha\}$, gde su c_1, c_2 znaci konstanata, $\star$ operacijski, a α relacijski znak dužine 2. Da li je struktura $(N, 0, 0, +, <)$ na tom jeziku. Pri tome su tumačenja jezika odredjena preslikavanjem

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \star & \alpha \\ 0 & 0 & + & < \end{pmatrix}$$

Odgovor. Jeste, iako se oba znaka konstanata tumače kao isti broj.

2. Koliko ima struktura na jeziku $L = \{\star, \alpha\}$ – $\star, \alpha$ su operacijski, odnosno relacijski znak dužine 2, čiji je skup nosilac $A = \{1, 2, 3\}$.

Odgovor. Kako tročlani skup ima 3^{3^2} binarnih operacija i 2^{3^2} binarnih relacija,

to je ukupan broj traženih struktura $3^{3^2} \cdot 2^{3^2}$, odnosno oko 10 miliona.

3. Da li je $(2N, +)$ podstruktura od $(N, +)$?

Odgovor. Prema definiciji podstrukture dosta je proveriti da li je skup $2N$ zatvoren u odnosu na sabiranje, odnosno da li vredi implikacija

$$x, y \in 2N \Rightarrow x + y \in 2N$$

Kako ona vredi, to uočena struktura jeste podstruktura od $(N, +)$.

4. Opisati sve podstrukture od $(N, <)$.

Rešenje. Pošto se u vezi sa relacijama ne zahteva nikakav uslov[1] o skupovnom delu podstrukture, to su sve tražene podstrukture oblika $(M, <)$, gde je M proizvoljan neprazan podskup od N.

5. Data je struktura $(N, +)$. Odrediti minimalnu[2] podstrukturu koja sadrži brojeve 6 i 9.

Rešenje. Zadatak se može shvatiti kao rešavanje po M ovih uslova

(i) $6, 9 \in M$,

(ii) $(M, +)$ je podstruktura od $(N, +)$,

(iii) M je minimalan podskup koji zadovoljava uslove (i) i (ii).

Primetimo da se, u skladu sa definicijom, uslov (ii) može zameniti sa

(ii') $\quad M \neq \phi, \quad M \subseteq N, \quad x, y, \in M \Rightarrow x + y \in M$

Nije teško videti da postoji više rešenja po M uslova (i) i (ii'). Jedno takvo je N.

[1] Razlog je što se u opštem slučaju od relacije zadane na nekom skupu u svakom njegovom podskupu može posmatrati restrikcija te relacije. Medjutim, za operacije slično ne važi (važi tek uz pretpostavku zatvorenosti podskupa u odnosu na operacije). Kraće rečeno: restrikcija relacije je uvek relacija, ali restrikcija operacije ne mora biti operacija.

[2] Tj. podstrukturu sa najmanjim (u smislu inkluzije) skupovnim delom.

Radi dobijanja minimalnog rešenja uočimo skup P svih prirodnih brojeva koji se prave u konačno koraka primenom (i) i (ii') kao pravila.

Članovi skupa P su, pored 6 i 9, svi prirodni brojevi koji su zbirovi konačno mnogo šestica i devetki, tj. brojevi oblika

$$6a + 9b,$$

gde $a, b \in N$, izuzimajući slučaj kada su oba 0.

Lako se zaključuje da skup P zadovoljava uslove (i) i (ii). Dalje, P je minimalan takav podskup, odnosno ako je M neki podskup od N koji zadovoljava uslove (i) i (ii), tada je P podskup od M (jer M mora sadržati 6 i 9, kao i sve njihove konačne zbirove, tj. sve članove iz P).

Drugim rečima: $(P, +)$ je minimalna podstruktura koja zadovoljava uslove (i) i (ii). Dakle, traženi rezultat je $(P, +)$.

Napomena. Do članova skupa P se može doći u dva koraka. Najpre se primenom pravila (i) i (ii') obrazuje skup svih izraza gradjenih od 6 i 9 kao znakova konstanata i operacijskog znaka +. U narednom koraku svaki izraz zamenjujemo njegovom vrednošću, odnosno odgovarajućim prirodnim brojem. Primetimo i da se dešava da se više izraza svodi na jedan član skupa P. Tako, izrazi $(6+6)+6$, $9+9$ imaju oba vrednost 18.

Istaknimo i da smo za podstrukturu $(P, +)$ mogli reći da je *generisana* skupom $\{6, 9\}$.

6. Odrediti podstrukturu strukture $(N, +, <)$ generisanu skupom $\{6, 9\}$.

Odgovor. Skupovni deo te podstrukture je, kao i u prethodnom zadatku, skup P svih brojeva oblika $6a + 9b$, gde su a, b prirodni brojevi i nisu oba 0. Tražena podstruktura je $(P, +, <)$.

7. Odrediti podstrukturu od $(N, \text{NZS}, \text{NZD}, |)$ generisanu skupom $\{2, 3, 5\}$.

Rešenje. Označimo sa P skupovni deo tražene podstrukture. Kako P mora zadovoljavati uslov

$$x, y \in P \Rightarrow \text{NZD}(x, y) \in P, \qquad \text{NZS}(x, y) \in P,$$

to skupu P moraju pripadati brojevi

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$$

(jer $\text{NZS}(2,3) = 6$, $\text{NZS}(2,5) = 10$, $\text{NZS}(10,15) = 30$, $\text{NZD}(2,3) = 1$ i sl.). Nije teško proveriti da su to i svi članovi skupa P, jer se medju njima za svaka dva broja nalazi i njihov najveći zajednički delilac, kao i najmanji zajednički sadržalac. Pored toga, to je najmanji takav skup generisan skupom $\{2, 3, 5\}$. Dakle:

$$P = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$$

pa je tražena podstruktura $(P, \text{NZS}, \text{NZD}, |)$.

8. Neka je $\mathcal{A}$ data relacijsko–operacijska struktura. Da li se do svih njenih podstruktura može ovako doći:

(i) Izabere se podskup Γ skupa A,

(ii) Obrazuje se skup T – skup svih izraza u kojima su članovi iz Γ kao i sve nularne operacije strukture $\mathcal{A}$ znaci konstanata, a operacijski znaci strukture $\mathcal{A}$ su uzeti za operacijske znake.

(iii) Skup vrT – skup vrednosti u $\mathcal{A}$ svih članova iz T, uzmemo kao skupovni deo podstrukture, a operacije i relacije definišemo kao restrikcije operacija i relacija strukture $\mathcal{A}$.

Odgovor. Može. Najpre, struktura dobijena na opisan način, polazeći od izvesnog skupa Γ, jeste podstruktura od $\mathcal{A}$. Naime, ako je f neki operacijski znak dužine n (strukture $\mathcal{A}$) i $a_1, \ldots, a_n$ elementi skupa vrT, tada izraz $f(a_1, \ldots, a_n)$ pripada skupu T, a njegova vrednost skupu vrT. S druge strane, ako je $\mathcal{B}$ ma koja podstruktura od $\mathcal{A}$, ona se može dobiti opisanim postupkom. Radi toga je dovoljno za Γ uzeti skup B. U ovom slučaju je skup vrednosti odgovarajućih izraza jednak Γ, odnosno B.

9. Neka je $\mathcal{F}$ skup predikatskih formula

$$a \star a = b, \quad a \star b = a, \quad b \star a = a, \quad b \star b = b, \quad a \neq b$$

gde su a, b znaci konstanata, a $\star$ operacijski znak dužine 2. Da li se svi normalni modeli tog skupa mogu ovako opisati:

Uzmemo ma koji dvočlani skup $\{A, B\}$, dalje a, b redom tumačimo kao A, B, a znak $\star$ kao operaciju $\bar{\star}$ odredjenu tablicom

$\bar{\star}$	A	B
A	B	A
B	A	B

Odgovor je odrečan. Naime, pored dvočlanih modela (a takvi su upravo opisani) postoje i modeli i sa 3 i sa 4 i uopšte sa više od dva člana. Do takvih se modela može doći proširivanjem dvočlanih na način koji opisujemo:

Skup $\{A, B\}$ dopunimo ma kojim novim članovima, „došljacima". Dalje, a i b tumačimo po starom kao A i B, a $\star$ tumačimo kao operaciju $\bar{\star}$ odredjenu tablicom koja proširuje već navedenu tablicu, odnosno jednakosti

$$A \bar{\star} A = B, \quad A \bar{\star} B = A, \quad B \bar{\star} A = A, \quad B \bar{\star} B = B$$

zadržimo, a u ostalim slučajevima $u \bar{\star} v$ definišemo po volji – rezultat je A, B ili neki od „došljaka".

Primera radi, neka su 1, 2, 3 došljaci. Tada operaciju $\bar{\star}$ možemo, recimo, definisati tablicom

$\star$	A	B	1	2	3
A	B	A	3	A	2
B	A	B	2	1	B
1	2	3	A	1	1
2	1	2	2	2	2
3	B	A	3	1	B

U vezi sa razmatranim problemom videti i zadatak 56, tačke XIII.

10. Produžetak prethodnog. Skup $\mathcal{F}$ dopunimo formulom

$$x = a \vee x = b$$

Dokazati da dobijeni skup ima, do na izomorfizam, tačno jedan normalni model.

11. Da li grupoid zadat tablicom

$\star$	a	b
a	b	a
b	a	b

tj. odredjen uslovima: $a \star a = b$, $a \star b = a$, $b \star a = a$, $b \star b = b$, $a \neq b$ odredjuje, do na izomorfizam, sve normalne modele formule

$$(\exists x_1, x_2)\,(x_1 \neq x_2 \wedge (\forall x)\,(x = x_1 \vee x = x_2) \wedge x_1 \star x_1 = x_2 \wedge x_1 \star x_2 = x_1$$
$$\wedge x_2 \star x_1 = x_1 \wedge x_2 \star x_2 = x_2)?$$

Odgovor. Da.

12. Dokazati da za svaki konačan grupoid postoji skup predikatskih formula za koji je taj grupoid, do na izomorfizam, jedinstven normalni model.

13. Relacijska struktura je odredjena tablicom

	1	2	3
1	$\perp$	$\top$	$\perp$
2	$\top$	$\perp$	$\top$
3	$\perp$	$\top$	$\top$

Odrediti skup predikatskih formula za koji je ta struktura, do na izomorfizam, jedinstven normalni model

14. Dokazati da za svaku konačnu relacijsko–operacijsku strukturu i čiji jezik je konačan postoji jedna predikatska formula, tako da, do na izomorfizam, ta struktura je jedinstven normalni model te formule.

15. Koristeći stav kompaktnosti dokazati da za nijednu beskonačnu relacijsko–operacijsku strukturu ne postoji skup predikatskih formula kome je ta struktura jedin-

stven model (do na izomorfizam).

Rešenje. Neka je $\mathcal{S}$ beskonačna relacijsko–operacijska struktura čiji je skupovni deo :

$$S = \{s_i \mid i \in I\}$$

a jezik je L. Pretpostavimo, suprotno, odnosno da je za neki skup predikatskih formula $\mathcal{F}$ struktura $\mathcal{S}$, do na izomorfizam, jedinstven model. Označimo sa[1] $A = \{a_k \mid k \in K\}$ jedan od skupova koji je veće kardinalnosti od skupa S. Dalje, jezik L proširimo dodavanjem članova s_i, a_k kao novih znakova konstanata. Na tom širem jeziku L uočimo skup Φ svih formula oblika

$s_i \neq s_j$ (gde s_i, s_j različiti članovi iz S)
$a_k \neq a_n$ (gde a_k, a_n različiti članovi iz A)
$a_k \neq s_i$ (tj. svaki član iz A je različit od svakog člana iz S).

Dokazaćemo da skup $\mathcal{F} \cup \Phi$ ima bar jedan model. Radi toga, uočimo ma koji njegov konačan podskup P. U tom podskupu učestvuje konačno mnogo formula iz Φ, a u njima konačno mnogo članova iz S i iz A. Neka to budu članovi

(☆) $$s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_m}; \; a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}.$$

Formule skupa P pripadaju jeziku L proširenom navedenim članovima (☆). Od strukture $\mathcal{S}$, na način koji opisujemo, gradi se jedan model skupa P. U toj strukturi uočimo $m+n$ različitih članova, pa dogovorno znacima konstanata (☆) dodelimo po jedan od tih članova. Drukčije rečeno, u strukturi $\mathcal{S}$ dopunski uočavamo još $m+n$ nularnih operacija, odnosno utvrdjenih članova koji služe kao interpreti znakova (☆). Dobijena struktura $\mathcal{S}'$ je produženje strukture $\mathcal{S}$ (u ovakvom slučaju se kaže da je $\mathcal{S}'$ prosta ekspanzija, produženje za $\mathcal{S}$, budući da se $\mathcal{S}'$ razlikuje od $\mathcal{S}$ jedino u višku nularnih operacija). Struktura $\mathcal{S}'$ je model uočenog skupa P. Na taj način, svaki konačan podskup skupa $\mathcal{F} \cup \Phi$ ima model, pa prema stavu kompaktnosti, model ima i čitav skup $\mathcal{F} \cup \Phi$. Neka je Σ ma koji model za $\mathcal{F} \cup \Phi$. Jezik tog modela je $L \cup A \cup S$. Pretpostavimo da se obavi skraćivanje strukture $\mathcal{S}$ ne smatrajući članove skupa A i skupa S kao nularne operacije. Nova struktura $\mathcal{S}''$ je na jeziku L. Struktura $\mathcal{S}$ je model za $\mathcal{F} \cup \Phi$, pa je otuda $\mathcal{S}''$ model za[2] $\mathcal{F}$. Tako smo došli do jednog modela sa $\mathcal{F}$, čija je kardinalnost, u svakom slučaju, veća od kardinalnosti modela $\mathcal{S}$. Odatle sledi da $\mathcal{S}''$ i $\mathcal{S}$ nisu izomorfni, čime se završava dokaz metodom reductio ad absurdum.

Napomena. Dokazano tvrdjenje može i ovako izreći:
Nijedna beskonačna struktura ne poseduje potpun formulski opis na jeziku predikatskog računa prvog[3] reda.

[1] Pretpostavljamo da $A \cap S = \emptyset$.
[2] Jer u $\mathcal{F}$ ne učestvuje nijedan od znakova s_i, a_k, pa nam nisu potrebne vrednosti (interpreti) za njih.
[3] To je jedan od razloga uvodjenja i raznih drugih logičkih sistema.

Posebno, na osnovu tog tvrdjenja, strukturu $(N, +, \cdot, ', 0)$ prirodnih brojeva ne možemo u potpunosti opisati nikakvim skupom predikatskih aksioma. S tim u vezi, formalna aritmetika pored strukture prirodnih brojeva, poseduje i razne druge, sa tom strukturom, neizomorfne modele. Takvi se modeli nazivaju *nestandardni modeli aritmetike*. Njihovo postojanje prvi je dokazao Skolem 1934. godine.

16. Neka je $\mathcal{F}$ skup predikatskih formula u čijoj izgradnji učestvuju samo znaci konstanata, relacijski znaci (bez znaka jednakosti), a od logičkih veznika jedino iskazni. Takav se skup može shvatiti i kao skup iskaznih formula, uzimanjem njegovih elementarnih formula za slova. Dokazati:

$\mathcal{F}$ ima model u predikatskom smislu akko $\mathcal{F}$ ima model u iskaznom smislu.

Rešenje. Pretpostavimo najpre da $\mathcal{F}$ ima strukturu $\mathcal{M}$ kao predikatski model. U tom modelu svaka elementarna formula $\Phi(c_1, \ldots, c_n)$ (Φ je relacijski znak dužine n, $c_1, \ldots, c_n$ su znaci konstanata) ima odredjenu vrednost $\tau\Phi(c_1, \ldots, c_n)$. Lako se zaključuje da je preslikavanje σ, kojim se svakoj elementarnoj formuli Φ koja učestvuje u $\mathcal{F}$ kao liku dodeljuje $\tau\Phi$ kao slika, jeste model skupa $\mathcal{F}$ u iskaznom smislu. Pretpostavimo sada da $\mathcal{F}$ ima model, u oznaci recimo σ, u iskaznom smislu. Tim se preslikavanjem svakoj elementarnoj formuli Φ iz $\mathcal{F}$ dodeljuje slika $\sigma\Phi$, inače član skupa $\{\top, \bot\}$. Radi gradjenja predikatskog modela uočimo skup C svih znakova konstanata formula $\mathcal{F}$. Koristeći σ lako se gradi predikatski model čiji je nosilac C.

Najpre znacima konstanata iz $\mathcal{F}$ dodeljujemo iste znake iz C – to su nularne operacije skupa C. Zatim svakom relacijskom znaku Φ dužine n dodeljujemo relaciju $\bar{\Phi}$ skupa C definicijom

$$(\Delta_\Phi) \qquad \tau\,\bar{\Phi}(c_1, \ldots, c_n) = \sigma\,\Phi(c_1, \ldots, c_n)$$

s tim što tu definiciju primenjujemo u slučaju kada se $\Phi(c_1, \ldots, c_n)$ pojavljuje u $\mathcal{F}$ kao član, a inače za $\tau\,\bar{\Phi}(c_1, \ldots, c_n)$ uzimamo proizvoljnu vrednost (recimo sve $\top$). Na takav se način očigledno gradi jedan model skupa $\mathcal{F}$ čime se dokaz završava. Na primer, ako je $\mathcal{F}$ sačinjen od formula

$$\alpha(a, b) \Rightarrow \neg\,\alpha(b, a), \qquad \alpha(a, a) \vee \alpha(a, b)$$

za njega je $C = \{a, b\}$. Polazeći od iskaznog modela σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha(a, a) & \alpha(a, b) & \alpha(b, a) \\ \bot & \top & \bot \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c|cc} \bar{\alpha} & a & b \\ \hline a & \bot & \top \\ b & \bot & \end{array}$$

neposredno se zaključuje da je relacija $\bar{\alpha}$ odredjena navedenom tablicom, s tim što na praznom polju može stajati proizvoljna vrednost: $\top$ ili $\bot$. Znači, polazeći od uočenog iskaznog modela σ dolazi se do dva predikatska modela sa nosiocem C.

17. Opisati sve modele formule $\alpha(a, b) \Rightarrow \alpha(b, a)$, gde su a, b znaci konstanata, a α relacijski znak dužine 2.

Uputstvo. Uočimo najpre ma koji dvočlan skup $S = \{a, b\}$ i pomoću njega ovako izgradimo model:

Znake konstanata a, b tumačimo kao $\bar{a}$, $\bar{b}$, a α kao jednu od ovih relacija

$$\begin{array}{c|cc} & \bar{a} & \bar{b} \\ \hline \bar{a} & & \top \\ \bar{b} & \top & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & \bar{a} & \bar{b} \\ \hline \bar{a} & & \perp \\ \bar{b} & & \end{array}$$

gde na praznim poljima može stajati po volji $\top$ ili $\perp$. Takvih relacija ima 4 + 8, tj. 12.

Od prethodnih modela dobijaju se razni novi modeli proširivanjem skupa S ma kojim dodatnim elementima – „došljacima" i definisanjem relacije $\bar{\alpha}$ u ostalim slučajevima proizvoljno.

Pored opisanih modela postoje i oni u kojima se a, b tumače kao iste konstante. Naime, ako je $(S, \bar{\alpha})$ ma koja relacijska struktura sa jednom binarnom relacijom $\bar{\alpha}$, tada struktura $(S, \bar{\alpha}, \bar{c})$, gde $\bar{c} \in S$, pri tumačenju

$$a \to \bar{c}, \quad b \to \bar{c}, \quad \alpha \to \bar{\alpha}$$

jeste model date formule.

18. Neka je $\mathcal{F}$ skup formula (a, b, c su znaci konstanata):

$$\alpha(a, b) \Rightarrow \neg\,\alpha(b, a), \quad \beta(a, a, a), \quad \beta(a, b, c) \Rightarrow \beta(b, c, a)$$

Obrazovati skup $\mathcal{F}|_\Gamma$ odredjen izvesnim datim skupom Γ.

Odgovor. $\mathcal{F}|_\Gamma$ je jednak polaznom skupu $\mathcal{F}$.

19. Opisati sve relacije ekvivalencije datog skupa S.

Rešenje. Dati problem je svodljiv na traženje modela skupa oblika $\mathcal{F}|_\Gamma$, odnosno svodljiv na problem iskazne logike. Naime, ako $S = \{s_i \mid i \in I\}$, tada iskazni prevod $\mathcal{F}|_\Gamma$ čine sve formule oblika

$$\alpha(s_i, s_i), \quad \alpha(s_i, s_j) \Rightarrow \alpha(s_j, s_i), \quad \alpha(s_i, s_j) \wedge \alpha(s_j, s_k) \Rightarrow \alpha(s_i, s_k),$$

gde $s_i, s_j, s_k \in S$. To su iskazne formule po slovima oblika $\alpha(s_i, s_j)$. Prema tvrdjenju zadatka 17 svakom iskaznom rešenju σ skupa $\mathcal{F}|_\Gamma$ odgovara predikatski model tog skupa sa nosiocem S. Naime, relacija $\bar{\alpha}$ skupa S uvedena definicijom

$$(\Delta_{\bar{\alpha}}) \qquad \tau\,\bar{\alpha}(s_i, s_j) = \sigma\,\alpha(s_i, s_j)$$

je relacija ekvivalencije. Medjutim, definicija $(\Delta_{\bar{\alpha}})$ je takva da se njome opisuju i *sve* relacije ekvivalencije skupa S. Naime, ako je $\bar{\alpha}$ neka data relacija ekvivalencije, ona se može dobiti iz jednakosti $(\Delta_{\bar{\alpha}})$ za neki pogodan σ. Recimo, dosta je za σ uvrstiti vrednost ovako definisanu:

(Δ_σ) $\quad\quad\quad\quad \sigma\, \alpha(s_i, s_j) = \tau\, \bar{\alpha}(s_i, s_j)$

Drugim rečima, vrednost slova $\alpha(s_i, s_j)$ je $\top$ akko s_i, s_j jesu u relaciji $\bar{\alpha}$. Primećuje se da je jednakost (Δ_σ) dobijena „obrtanjem" jednakosti $(\Delta_{\bar{\alpha}})$. Neposredno se proverava da tako uvedena vrednost σ zaista jeste rešenje skupa $\mathcal{F}|_\Gamma$, kao i da je njoj odgovarajuća relacija ekvivalencija koja se dobija pomoću definicije $(\Delta_{\bar{\alpha}})$ upravo polazna relacija $\bar{\alpha}$.

Zaključak: Jednakošću $(\Delta_{\bar{\alpha}})$ se opisuju sve relacije ekvivalencije skupa S (u funkciji od rešenja skupa $\mathcal{F}|_\Gamma$).

20. Odrediti sve relacije poretka datog skupa S.

Uputstvo. Iskazni skup $\mathcal{F}|_\Gamma$ se sastoji od formula po slovima oblika $\alpha(s_i, s_j)$, $s_i = s_j$. Medjutim, budući da pretpostavljamo da je S dati skup, vrednosti slova $s_i = s_j$ su poznate ($\top$ ako su s_i, s_j isti elementi, $\perp$ ako su različiti). Zamenjujući takva slova njihovim vrednostima, skup $\mathcal{F}|_\Gamma$ se prevodi na skup formula po $\alpha(s_i, s_j)$.

Primedba. Uopšte, ako je $\mathcal{F}$ skup univerzalnih formula čiji se jezik sastoji jedino od relacijskih znakova, problem odredjivanja modela sa datim nosiocem S svodljiv je na problem rešavanja odgovarajućeg skupa $\mathcal{F}|_\Gamma$ (čiji su članovi iskazne formule po elementarnim formulama gradjenim jedino od znakova konstanata). Pri tome, ukoliko se u jeziku formula $\mathcal{F}$ nalazi i znak jednakosti, formule oblika $a = b$ zamenjujemo sa $\top$, odnosno sa $\perp$, u zavisnosti da li su a, b isti ili različiti elementi skupa S.

21. Opisati sve relacije α – dužine 3, β – dužine 2 skupa S koje zadovoljavaju uslove

$$\alpha(x, y, z) \Rightarrow x \neq y \wedge \beta(x, z), \qquad \alpha(x, y, z) \Rightarrow \alpha(y, z, x)$$

22. Odrediti sve kongruencije grupoida datog tablicom:

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

Uputstvo. Problem je svodljiv na rešavanje skupa oblika $\mathcal{F}|_\Gamma$ koga čine formule:

$$x \sim x, \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x, \quad x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z, \quad x \sim y \wedge z \sim u \Rightarrow x \star z \sim y \star u,$$

gde su x, y, z, u, v elementi skupa $\{a, b, c\}$. Tu su nepoznate vrednosti slova oblika $x \sim y$, dok je $\star$ poznata operacija. Otuda se korišćenjem date tablice, recimo formula $a \sim b \wedge c \sim a \Rightarrow a \star c \sim b \star a$ svodi na $a \sim b \wedge c \sim a \Rightarrow c \sim b$. Nije teško proveriti da su sva rešenja relacije:

$\sim_1$	a	b	c
a	$\top$	$\bot$	$\bot$
b	$\bot$	$\top$	$\bot$
c	$\bot$	$\bot$	$\top$

$\sim_2$	a	b	c
a	$\top$	$\top$	$\bot$
b	$\top$	$\top$	$\bot$
c	$\bot$	$\bot$	$\top$

$\sim_3$	a	b	c
a	$\top$	$\bot$	$\bot$
b	$\bot$	$\top$	$\top$
c	$\bot$	$\top$	$\top$

$\sim_4$	a	b	c
a	$\top$	$\top$	$\top$
b	$\top$	$\top$	$\top$
c	$\top$	$\top$	$\top$

23. Odrediti sve relacije R – dužine 3, ρ – dužine 2, datog grupoida koje zadovoljavaju uslove:

	a	b
a	b	a
b	a	b

$$R(x,y,z) \Rightarrow \rho(x,y) \vee \rho(y,z), \qquad R(x,y,x \star y)$$

$$\rho(x,x) \Rightarrow \neg R(x, x \star x, x), \quad R(x,y,z) \Rightarrow R(y,z,x).$$

24. Neka $\mathcal{A}$ data struktura na jeziku L. Problem uvodjenja dopunskih relacija na jeziku L' koje zadovoljavaju date zakone (tj. univerzalne formule na jeziku $L \cup L'$) svodljiv je na problem iskazne logike. Dokazati.

Uputstvo. Dati zakoni se najpre prevode na skup oblika $\mathcal{F}_\Gamma$ u kome pored nepoznatih relacija učestvuju i poznate relacije i operacije. Medjutim, korišćenjem tablice strukture $\mathcal{A}$ ove poslednje se mogu odstraniti. Skup $\mathcal{F}_\Gamma$ se na takav način svodi na skup iskaznih formula po slovima oblika $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ – φ je nepoznata relacija, $c_1, \ldots, c_n$ znaci konstanata. Recimo, neka je nepoznata relacija R a poznate su relacija ρ i operacija $\star$, i neka jedna od formula iz $\mathcal{F}|_\Gamma$ glasi

(1) $$R(a, b \star c) \Rightarrow \neg R(b \star c, a) \wedge \rho(a,b)$$

Tada najpre sračunavamo vrednost terma $b \star c$, recimo neka $b \star c = b$. Formula (1) prelazi u

(2) $$R(a,b) \Rightarrow \neg R(b,a) \wedge \rho(a,b)$$

Dalje, koristeći tablicu relacije ρ, formulu $\rho(a,b)$ zamenjujemo sa $\top$ ili sa $\bot$. Na primer, u prvom slučaju iz (2) dobijamo

(3) $$R(a,b) \Rightarrow \neg R(b,a)$$

U formuli (3) učestvuje samo nepoznata relacija R i znaci konstanata a, b. Slično se postupa sa svakom formulom skupa $\mathcal{F}|_\Gamma$.

25. Opisati sve modele skupa koji čini formula:

$$(\forall x, y, z)\,(\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,z) \Rightarrow \alpha(x,z)).$$

Uputstvo. Neka je Γ ma koji neprazan skup. U vezi sa njim obrazujemo skup $\mathcal{F}|_\Gamma$. Problem odredjivanja tranzitivnih relacija skupa Γ svodi se na problem iskazne logike. Neka je, dalje, σ jedno rešenje skupa $\mathcal{F}_\Gamma$. Relacija $\overline{\alpha}$ uvedena definicijom

($\star$) $$\tau\overline{\alpha}(x,y) = \sigma(x,y)$$

je tranzitivna relacija skupa Γ, što nije teško proveriti. Tako je pomoću Γ i σ odredjeno jedno rešenje – jedan model uočene formule. Medjutim, lako se dokazuje da se ,,šetanjem" Γ i σ dobijaju i svi traženi modeli. Strože, važi ekvivalencija:

$$\mathcal{M} \text{ je model za } \mathcal{F} \longleftrightarrow (\text{Za neki } \Gamma)\ (\text{Za neki } \sigma)\ \mathcal{M} \text{ je odredjen definicijom vida } (\star)$$

Primedba. Svi modeli nekog skupa univerzalnih formula $\mathcal{F}$ čiji jezik sadrži jedino relacijske znake mogu se ovako opisati:

U vezi sa ma kojim nepraznim skupom Γ uoči se skup $\mathcal{F}|_\Gamma$ i njegova rešenja σ. Skupom Γ i rešenjima σ odredjuju se svi modeli poput prethodnog primera. Pri tome, ako je α relacijski znak dužine n, njemu se dodeljuje relacija $\bar{\alpha}$ odredjena definicijom

$$\tau\bar{\alpha}(x_1, \ldots, x_n) = \sigma\alpha(x_1, \ldots, x_n) \qquad (x_1, \ldots, x_n \in \Gamma)$$

26. Opisivanjem svih normalnih modela datih univerzalnih formula. Neka je $\mathcal{F}$ skup univerzalnih formula na jeziku L koji sadrži neke znake konstanata, relacijske, operacijske znake i znak jednakosti. Sa $\mathcal{F}' \cup Ax_=$ označimo uniju skupa $\mathcal{F}$ i aksioma jednakosti koje se odnose na jezik L. Neka je, dalje, Γ izvestan skup (neprazan, ukoliko L ne sadrži znake konstanata). Skup $(\mathcal{F} \cup Ax_=)|_\Gamma$ možemo shvatiti kao skup iskaznih formula. Označimo sa σ jedno rešenje (iskazno) tog skupa. U skupu T odnosnih terma uočimo relaciju $\sim$ ovako uvedenu:

$$t_1 \sim t_2 \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \sigma(t_1 = t_2) = \top$$

Dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije saglasna sa operacijskim i relacijskim znacima iz L. Dalje, u skupu $T/\sim$ definišemo jednu strukturu, u oznaci $\mathcal{M}(\Gamma, \sigma)$ ovako:

1° Znacima konstanata dodeljuju se odnosne klase – to su nularne operacije strukture.

2° Ma kom operacijskom znaku f dužine n dodeljujemo operaciju $\bar{f}$:

$$\bar{f}(C_{t_1}, \ldots, C_{t_n}) \overset{\text{def}}{=} C_{f(t_1, \ldots, t_n)}$$

3° Ma kom relacijskom znaku φ dužine n dodeljujemo relaciju $\bar{\varphi}$:

$$\tau\bar{\varphi}(C_{t_1}, \ldots, C_{t_n}) = \sigma\varphi(t_1, \ldots, t_n)$$

(i) Dokazati da je struktura $\mathcal{M}(\Gamma, \sigma)$ normalan model skupa $\mathcal{F}$.

(ii) Dokazati da se svaki normalan model za $\mathcal{F}$ može dobiti opisanim postupkom.

27. Produžetak prethodnog. Opisati normalni model datih formula odredjen skupom $\Gamma = \phi$

$$(\forall x, y)\,(\alpha(x, f(y)) \Rightarrow \alpha(f(x), y)), \qquad f(f(a)) = a,$$

gde su a, b znaci konstanata, f operacijski znak dužine 1, α relacijski znak dužine 2.

Rešenje. Skup T odgovarajućih izraza ima članove a, fa (tj. $f(a)$), f^2a (tj. $f(f(a))$), $f^3a, \ldots$. Skup $(\mathcal{F} \cup Ax=)\vdash_T$ je skup iskaznih formula po slovima vida $\alpha(t_1, t_2)$, $t_1 = t_2$, gde $t_1, t_2 \in T$. Medjutim, zbog zakona $f^2a = a$, taj skup je ekvivalentan[1] sa svojim podskupom koji čine formule:

(☆) $\qquad \alpha(a, fa) \Rightarrow \alpha(fa, a), \quad \alpha(fa, a) \Rightarrow \alpha(a, fa), \quad f^2a = a$

kao i odnosne formule koje potiču iz aksioma jednakosti:

(☆☆)
$$t = t,\ t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1,\ \ t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3$$
$$t_1 = t_2 \Rightarrow ft_1 = ft_2,\ \ t_1 = t_1' \wedge t_2 = t_2' \Rightarrow (\alpha(t_1, t_2) \Rightarrow \alpha(t_1', t_2'))$$

Vrednost za neke nepoznate oblika $t_1 = t_2$ je potpuno odredjena. Recimo:

$$\tau(t = t) = \top, \quad \tau(f^2a = a) = \top, \quad \tau(f^3a = fa) = \top,$$

opštije $\tau(f^ka = f^na) = \top$ ukoliko je $k-n$ deljiv sa 2.

Uočimo iskazno slovo $fa = a$. Čini se da se navedeni skup formula „ne izjašnjava" po tom slovu, tj. izgleda da iz njega ne sledi ni $\tau(fa = a) = \top$ ni $\tau(fa = a) = \perp$. Stoga ćemo u traženju rešenja iskaznih formula (☆), (☆☆) prethodno tražiti ona rešenja kod kojih $\tau(fa = a) = \top$, a potom ona kod kojih $\tau(fa = a) = \perp$. U svakom od tih slučajeva ujedno ćemo videti da li takva rešenja postoje.

Slučaj $\tau(fa = a) = \top$. Tada i sva slova oblika $t_1 = t_2$ imaju vrednost $\top$, a skup iskaznih formula (☆), (☆☆) je ekvivalentan sa skupom

(☆') $\qquad \alpha(a, a) \Rightarrow \alpha(a, a), \quad fa = a$

dopunjenim odnosnim aksiomama jednakosti. Dalje nastupa raskrsnica po slovu $\alpha(a, a)$. Kako su i $\tau\alpha(a, a) = \top$ i $\tau\alpha(a, a) = \perp$ rešenja za (☆'), to u razmatranom slučaju skup iskaznih formula (☆), (☆☆) ima dva rešenja

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} t_1 = t_2 & \alpha(t_1, t_2) \\ \top & \top \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} t_1 = t_2 & \alpha(t_1, t_2) \\ \top & \perp \end{pmatrix},$$

gde su t_1, t_2 proizvoljni termi iz T. Odgovarajuće strukture $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ su:

– Skup M_1 ima jedini član C_a, tj. svi termi su medjusobno ekvivalentni. Znak a, tumačimo kao nularnu operaciju C_a, znak f kao operaciju $\bar{f}: \bar{f}(C_a) = C_a$, a znak α kao relaciju $\bar{\alpha}$ odredjenu sa

$$\tau\bar{\alpha}(C_a, C_a) = \top.$$

– Struktura $\mathcal{M}_2$ se razlikuje samo u tome što je kod nje $\tau\bar{\alpha}(C_a, C_a) = \perp$.

Slučaj $\tau(fa = a) = \perp$. Tada su odredjene sve vrednosti slova oblika $t_1 = t_2$. Tako: $\tau(f^ka = f^na) = \top$ ako je $k-n$ paran, $\quad \tau(f^ka = f^na) = \perp$ ako je $k-n$ neparan,

[1] tj. ravnosledan.

gde $k, n \in N$ smatrajući da je $f^0 a$ drugi zapis za A. Skup (☆), (☆☆) je ekvivalentan sa skupom

(☆") $\qquad \alpha(a, fa) \Rightarrow \alpha(fa, a), \alpha(fa, a) \Rightarrow \alpha(a, fa), \quad f^2 a = a, \quad fa \neq a$

uz odgovarajuće aksiome jednakosti. Ostaje još odredjivanje vrednosti slova oblika $\alpha(t_1, t_2)$. Za ta slova se lako zaključuju jednakosti:

$$\tau\alpha(f^{2k}a, f^{2n}a) = \tau\alpha(a, a), \qquad \tau\alpha(f^{2k+1}a, f^{2n}a) = \tau\alpha(fa, a),$$

$$\tau\alpha(f^{2k}a, f^{2n+1}a) = \tau\alpha(a, fa), \qquad \tau\alpha(f^{2k+1}a, f^{2n+1}a) = \tau\alpha(fa, fa),$$

gde $k, n \in N$, pa se problem svodi na odredjivanje vrednosti slova $\alpha(a, a)$, $\alpha(a, fa)$, $\alpha(fa, a)$, $\alpha(fa, fa)$. Iz uslova da zadovoljavaju (☆"), tj. zadovoljavaju formule

$$\alpha(a, fa) \Rightarrow \alpha(fa, a), \qquad \alpha(fa, a) \Rightarrow \alpha(a, fa)$$

za ta slova postoji ukupno osam mogućnosti, budući da $\alpha(a, a)$, $\alpha(fa, fa)$ mogu biti proizvoljni. Evo jednog od tih rešenja:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} \alpha(a,a) & \alpha(a,fa) & \alpha(fa,a) & \alpha(fa, fa) \\ \perp & \top & \top & \top \end{pmatrix}$$

Odgovarajuća struktura $\mathcal{M}_3$ ima skup–nosilac M_3 čiji su elementi C_a, C_{fa}. Znak a se tumači kao nularna operacija C_a, a znaci f, α kao operacija $\bar{f}$, odnosno relacija $\bar{\alpha}$ odredjene tablicama

	$\bar{f}$
C_a	C_{fa}
C_{fa}	C_a

$\bar{\alpha}$	C_a	C_{fa}
C_a	$\perp$	$\top$
C_{fa}	$\top$	$\top$

28. Opisati modele datih formula odredjene navedenim skupom Γ

a) $(\forall x, y)\,(\alpha(x, y) \vee \alpha(y, x)), \quad f(a) = b, \quad f(b) = a; \quad \Gamma = \phi$

b) $(\forall x, y)\,(\alpha(x, y) \Rightarrow x \star y = a), \quad (\forall x, y)\,(\neg\alpha(x, y) \Rightarrow x \star y = b); \quad \Gamma = \phi$

c) $\alpha(a, a), \quad \neg\alpha(a, b), \quad \alpha(b, a), \quad \neg\alpha(b, b); \quad \Gamma = \phi$

d) $\alpha(a, a), \quad \neg\alpha(a, b), \quad \alpha(b, a), \quad \neg\alpha(b, b)\,(\forall x)\,(x = a \vee x = b); \Gamma = \{C\}$

e) $(\forall x)\,(\beta(x) \Rightarrow \beta(f(x))), \quad (\forall x) f(f(f(x))) = x; \quad \Gamma = \{a, b\}$,

gde su a, b, c znaci konstanata, f, ☆ operacijski a α, β relacijski znaci odgovarajućih dužina.

29. Opisati sve modele formula

$$\alpha(x) \Rightarrow \alpha(f(x)), \qquad \alpha(a)$$

gde su f, α operacijski, odnosno relacijski znak dužine 1, a a znak konstante.

30. Opisati modele formula $\mathcal{F}$:

$(\forall x)\, x \star x = x, \quad (\forall x, y)\, x \star y = y \star x, \quad (\forall x,y,z)\, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

odredjene skupom $\Gamma = \{a, b\}$.

Rešenje. Skup $(\mathcal{F} \cup Ax_=)|_\Gamma$ kao skup iskaznih formula sastavljen je iz formula ovakvog oblika:

– iskazno slovo (recimo takve su $t = t$, $t \star t = t$ i sl.)
– konjunkcija iskaznih slova povlači slovo (takve su na primer:
$t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1$, $t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3$ i sl.).

Zbog takve posebne strukture taj skup iskaznih formula, označimo ga kraće sa $\mathcal{F}'$, ima jedan (iskazni) model odredjen definicijom

($\star$) $$\tau p = T \leftrightarrow \mathcal{F}' \vdash p,$$

gde je p ma koje od slova iz $\mathcal{F}'$ (videti zadatke 27–30 prvog dela ove tačke). Nije teško uvideti da tom rešenju odgovara slobodna algebra zakona $\mathcal{F}$ generisana skupom Γ. Za to bi se rešenje moglo reći da je ono „sa najmanja $\top$ –ova", jer definicijom ($\star$) nekom slovu se dodeljuje $\top$ jedino u slučaju kada to sledi iz $\mathcal{F}'$, tj. „kad se mora". U skladu sa pomenutim zadatkom 30 prvog dela do svih iskaznih modela skupa $\mathcal{F}'$ može se doći postupnim proširivanjem skupa slova kojima se dogovorno dodeljuje $\top$ i traženjem vrednosti ostalih slova definicijom vida ($\star$). Evo krajnjih rezultata.

U slobodnoj algebri slovima

$$a = b, \quad a = a \star b, \quad b = a \star b$$

dodeljuje se vrednost $\perp$. Potražimo zatim rešenja skupa $\mathcal{F}'$ kod kojih slovo $a = b$ ima vrednost $\top$. Nije teško uvideti da u ovom slučaju vrednost $\top$ dobijaju sva slova oblika $t_1 = t_2$. Tako smo došli do rešenja, sa najviše $\top$–ova", odnosno jednočlanog grupoida. Potražimo sada rešenja kod kojih $\tau(a = a \star b) = \top$ rukovodeći se definicijom vida ($\star$), odnosno definicijom

$$\tau p = \top \leftrightarrow \mathcal{F}', a = a \star b \vdash p$$

Ovom definicijom se dolazi do dvočlanog modela, čiji su članovi C_a, C_b a operacija je odredjena jednakostima

$$C_a \mathbin{\bar\star} C_a = C_a, \quad C_a \mathbin{\bar\star} C_b = C_a, \quad C_b \mathbin{\bar\star} C_a = C_a, \quad C_b \mathbin{\bar\star} C_b = C_b.$$

Slično, tražeći definicijom vida ($\star$) rešenja skupa $\mathcal{F}'$ kod kojih vredi $\tau(b = a \star b) = \top$ takodje se dolazi do dvočlanog modela. Nije teško videti da smo tako opisali sva rešenja skupa $\mathcal{F}'$, jer recimo ako potražimo rešenja kod kojih se slovima $a = a \star b$, $b = a \star b$ dodeljuje $\top$ onda se dolazi do već opisanog rešenja u slučaju $\tau(a = b) = \top$.

Napomena. Navedeno rasudjivanje je, u stvari, opšte prirode. Naime odredjivanje slobodne algebre zakona $\mathcal{F}$ nad skupom Γ je podzadatak odredjivanja svih modela formula $\mathcal{F}$. Slobodnoj algebri odgovara jedno, „vrhovno" rešenje odnosnog skupa iskaznih formula. Ostala rešenja tih iskaznih formula odredjuju modele koji su, u stvari, homomorfne slike slobodne algebre.

31. Opisati sve modele formule F:

$$(\forall x)\,(\exists y)\,(\alpha(x, y) \vee \alpha(y, x))$$

Rešenje. U vezi sa formulom F uočimo formulu $\hat{F}$:

$$(\forall x)\,(\alpha(x, f(x)) \vee \alpha(f(x), x))$$

gde je f novouvedeni funkcijski znak (znak Skolemove funkcije). Kao što nam je poznato izmedju modela formula F i $\hat{F}$ postoji ovakva veza (videti tačku XI, zadatke 11–19).

Svaki model za F je produživ do modela za $\hat{F}$ i obratno, *svaki model za* $\hat{F}$ *je skrativ do modela za F.*

To znači da se problem odredjivanja svih modela za F svodi na problem odredjivanja svih modela za $\hat{F}$ jer od ma kog modela $(M, \bar{\alpha}, \bar{f})$ za $\hat{F}$, ne računajući $\bar{f}$, tj. uzimanjem strukture $(M, \bar{\alpha})$, dolazi se do modela (i to svih) za F. Medjutim, $\hat{F}$ je univerzalna formula pa se njeni modeli odredjuju na način koji smo već izložili (videti zadatak 26). Naime, uzimamo ma koji neprazan skup Γ, obrazujemo skup svih terma pomoću Γ i f, i potom obrazujemo skup formula

(☆) $$(\hat{F}, Ax=)|_{\Gamma}$$

Problem odredjivanja modela za F se time svodi na traženje rešenja iskaznih formula (☆). U stvari, tako dolazimo do modela za $\hat{F}$ ali ne računajući f, svaki takav model se skraćuje do modela za F.

Napomena. U opštem slučaju se može slično postupiti. Naime, radi odredjivanja modela datog skupa formula $\mathcal{F}$, može se od tog skupa preći na skup $\hat{\mathcal{F}}$ i problem svesti na traženje modela univerzalnih formula. Na kraju još takav model treba skratiti do modela za $\mathcal{F}$.

32. Data je struktura $(Z, <)$ koja zadovoljava formulu F:

$$(\forall x)\,(\exists y)\; y < x.$$

(i) Odrediti bar jednu njenu F–podstrukturu koja sadrži skup $\{1, 3, 5\}$.
(ii) Opisati sve F–podstrukture za $(Z, <)$.

Rešenje. Struktura $(Z, <)$ zadovoljava formulu $(\forall x)\,(\exists y) y < x$. Otuda, po aksiomi izbora, postoji funkcija f takva da je zadovoljena i formula $(\forall x)\, f(x) < x$. Neke Skolemove funkcije su odredjene formulama

$$f_1(x) = x-1, \quad f_2(x) = x-2, \quad f_3(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ako je } x \text{ paran} \\ x-2, & \text{ako je } x \text{ neparan} \end{cases}$$

(i) Do jedne F–podstrukture možemo ovako doći. Uočimo jednu od Skolemovih funkcija, recimo f_2, i polazeći od datog skupa obrazujemo minimalan skup A koji sadrži skup $\{1, 3, 5\}$ i zatvoren je u odnosu na f_2, tj. zadovoljava uslove

$$1, 3, 5 \in A, \quad x \in A \Rightarrow f_2(x) \in A$$

Taj skup ima elemente $5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, \dots$. Struktura $(A, <)$ zadovoljava formulu F, budući da $(A, <, f_2)$ zadovoljava formulu $(\forall x)\, f(x) < x$, a formula F je njena posledica.

(ii) Označimo sa Sk skup svih funkcija $f : Z \to Z$ za koje važi $(\forall x) f(x) < x$, tj. skup svih Skolemovih funkcija za F. Sve F–podstrukture se mogu ovako opisati. Uočimo ma koji podskup $\Gamma \subseteq Z$ i jednu Skolemovu funkciju f. Tada, skup A koji sadrži Γ, zatvoren je u odnosu na f i još je minimalan takav, je skupovni deo jedne F–podstrukture. U stvari, tako se biranjem Γ i $f \in Sk$ dolazi do svih F–podstruktura.

Napomena. Postupak opisan pod (ii) je u stvari opšte prirode. Naime, slično se za neku datu relacijsko–operacijsku strukturu $\mathcal{M}$ koja zadovoljava neke formule $\mathcal{F}$ obrazuju sve $\mathcal{F}$–podstrukture. U tom obrazovanju učestvuju: Γ– ma koji podskup od M, operacije strukture $\mathcal{M}$ i odbir odgovarajućih Skolemovih funkcija. Skupovni deo $\mathcal{F}$–podstrukture je tada minimalni skup koji sadrži Γ i zatvoren je u odnosu na izabrane Skolemove funkcije, kao i u odnosu na operacije strukture $\mathcal{M}$. „Šetanjem" skupa Γ i Skolemovih funkcija opisuju se sve $\mathcal{F}$–podstrukture od $\mathcal{M}$.

33. Neka je $\mathcal{A}$ struktura koja zadovoljava univerzalne zakone i $\mathcal{B}$ njena podstruktura. Dokazati da $\mathcal{B}$ zadovoljava iste zakone.

34. **Stav kompaktnosti predikatskog računa.** Neka je $\mathcal{F}$ skup predikatskih formula. Dokazati:

$\mathcal{F}$ *ima (normalni) model* $\longleftrightarrow$ *Svaki konačan podskup od* $\mathcal{F}$ *ima (normalni) model*

Rešenje. Deo $\to$ sledi neposredno iz definicije pojma modela[1]. Radi dokaza dela $\leftarrow$ pretpostavimo da svaki konačan podskup od $\mathcal{F}$ ima model, što ćemo izreći i na ovaj način: $\mathcal{F}$ *ima svojstvo* K. Sa $\hat{\mathcal{F}}$ označimo skup svih univerzalnih formula koje nastaju iz formula skupa $\mathcal{F}$ „otvaranjem", tj. uvodjenjem novih (Skolemovih) funkcijskih znakova. Jasno je da i skup $\hat{\mathcal{F}}$ ima svojstvo K, tj. svaki njegov konačan podskup ima model. Dalje uočimo $\hat{\mathcal{F}} \cup Ax_=$, tj. uniju skupa $\hat{\mathcal{F}}$ i odnosnih aksima jednakosti (onih koje se odnose na jezik formula $\hat{\mathcal{F}}$). Tada i $\hat{\mathcal{F}} \cup Ax_=$ ima svojstvo K. Neka je $\Gamma = \{a\}$, jednočlan skup (može se uzeti ma koji neprazan skup) i $(\hat{\mathcal{F}} \cup Ax_=)|_\Gamma$ iskazni prevod za $\hat{\mathcal{F}} \cup Ax_=$; tu je T odgovarajući skup terma. I svaki konačan podskup tog skupa ima neki model. Zaista neka je $S = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ ma

[1] U okviru ovog zadatka, kratkoće radi, umesto normalan model govorićemo model.

koji konačan podskup. Te formule potiču od konačno mnogo formula, recimo redom od $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$, skupa $\hat{\mathcal{G}} \cup Ax_=$. Naravno, medju formulama Ψ_i može biti i jednakih, jer, na kraju, pri prelazu od $\hat{\mathcal{G}} \cup Ax_=$ na $(\hat{\mathcal{G}} \cup Ax_=)|_\Gamma$ od jedne formule može nastati više formula, u zavisnosti od skupa T. Kako skup $\hat{\mathcal{G}} \cup Ax_=$ ima svojstvo K, to formule $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ imaju bar jedan model $\mathcal{M}$. Uočimo u njemu jedan element a. Dalje, sa $\mathcal{M}'$ označimo podstrukturu od $\mathcal{M}$ generisanu sa a (videti zadatak 5). $\mathcal{M}'$ je takodje model formula $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ budući da su to univerzalne formule. Od $\mathcal{M}'$ se lako gradi model formula $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, čiji je jezik proširenje jezika L (dobijeno dodavanjem znaka konstante a). Radi toga je dosta u strukturi $\mathcal{M}'$ uočiti i nularnu operaciju $\bar{a}$ kao tumačenje za a, i zadržati tumačenje ostalih znakova. Dobijena struktura $\mathcal{M}''$ je model formula $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Kako se skup $(\hat{\mathcal{G}} \cup Ax_=)|_\Gamma$ može posmatrati i kao skup iskaznih formula, to na osnovu izloženog sledi da svaki njegov konačan podskup ima model u iskaznom smislu. Koristeći stav kompaktnosti iskaznog računa (videti zadatak 10 prvog dela ove tačke) zaključujemo da i taj čitav skup ima bar jedan iskazni model σ. Medjutim, odatle sledi da i $\mathcal{F}$ ima model, budući da se od svakog takvog rešenja σ može sagraditi model skupa $\mathcal{F}$ (videti zadatke 25, 26, 27).

35. Neka je $\mathcal{G} = (G, \star)$ grupoid. Za relaciju ρ skupa G kažemo da je istaknuta ukoliko za sve x, y, z iz G važe formule $\mathcal{F}$:

$$x \rho x, \quad x \star z \rho y \star z \Rightarrow \neg x \rho y$$

Recimo, grupoid $(N, \cdot)$ nema takvu relaciju, jer zamenom z sa 1 iz datih uslova se lako dobija protivrečnost. Dokazati:

Grupoid $\mathcal{G}$ ima neku istaknutu relaciju $\longleftrightarrow$ Svaki njegov konačno generisan[1] *podgrupoid ima istaknutu relaciju.*

Rešenje. Deo $\rightarrow$ je očigledno tačan. Dokaz dela $\leftarrow$ izvodimo pomoću stava kompaktnosti (iskaznog računa). Uočimo stoga ekvivalencije:

$\mathcal{G}$ ima istaknutu relaciju ρ

$\longleftrightarrow$ Postoji relacija ρ skupa G takva da za sve $x, y, z \in G$ važe uslovi

$$x \rho x, \quad x \star z \rho y \star z \Rightarrow \neg x \rho y$$

$\longleftrightarrow$ Skup iskaznih formula[2] $\mathcal{F}|_G$ koga čine:

Sve formule oblika $u \star u$, gde $u \in G$

Sve formule oblika $x \star z \rho y \star z \Rightarrow \neg x \rho y$, gde $x, y, z \in G$

ima bar jedno rešenje.

Uočimo dalje ma koji konačan podskup od $\mathcal{F}|_G$ i označimo ga sa $\mathcal{F}_k$:

[1] To su podgrupoidi generisani konačnim podskupovima skupa G.

[2] To su formule po slovima $u \rho v$, gde $u, v \in G$, jer pretpostavljamo da su $x \star z$, $y \star z$ zamenjeni njima jednakim elementima skupa G.

$$u_1 \rho u_1, \quad u_2 \rho u_2, \ldots, u_m \rho u_m$$

$$x_1 \star z_1 \rho y_1 \star z_1 \Rightarrow \neg x_1 \star y_1, \ldots, x_n \star z_n \rho y_n \star z_n \Rightarrow \neg x_n \rho y_n$$

Dokazujemo da takav podskup ima bar jedno rešenje. Radi toga, uočimo podgrupoid generisan sa: $u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$. On je konačno generisan pa poseduje neku istaknutu relaciju. Tom relacijom je određeno jedno rešenje iskaznih formula $\mathcal{F}_k$. Dakle, $\mathcal{F}_k$ ima bar jedan iskazni model. Stoga, prema stavu kompaktnosti (iskaznom) i čitav skup $\mathcal{F}|_G$ ima bar jedan iskazni model. Njime je odredjena istaknuta relacija za $\mathcal{G}$, čime se dokaz završava.

Napomena. Može se napraviti veoma mnogo stavova sličnih prethodnom. Recimo, jedan je:

Grupa $\mathcal{G}$ se može urediti[1] *akko se svaka njena konačno generisana podgrupa može urediti.*

Dokaz tog tvrdjenja je potpuno sličan prethodnom. Uopšte, neka je $\mathcal{A}$ relacijsko–operacijska struktura i skup univerzalnih formula na jeziku te strukture proširenim izvesnim relacijskim znacima ρ_i (nekih dužina). Tada se u skupu A mogu definisati relacije ρ_i takve da važe formule $\mathcal{F}$ akko je to moguće učiniti u svakoj konačno generisanoj podstrukturi od $\mathcal{A}$.

36. U vezi sa poljem realnih brojeva uočimo skup $\mathcal{F}$ ovakvih formula (u njima učestvuju oznake realnih brojeva, znaci $=, >, +, \cdot, -, 0, 1$ i znak jedne nove konstante ϵ):

Prvo, sve formule navedenog jezika koje su tačne u polju realnih brojeva. Medju njima su: tablice realnih brojeva, odnosno formule kao $1+2=3$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$, $5-(-3)=8$, $1 \neq 2$, $\sqrt{2} \neq \sqrt{3}$, $0<1$, $\neg(-2<-3)$, zatim aksiome polja, odnosno formule

$$(\forall x,y)x+y = y+x, \qquad (\forall x,y)x \cdot y = y \cdot x$$
$$(\forall x,y,z)(x+y)+z = x+(y+z), \qquad (\forall x,y,z)(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$
$$(\forall x)x+0 = x, \qquad (\forall x)x\cdot 1 = x$$
$$(\forall x)x+(-x) = 0, \qquad (\forall x)(x \neq 0 \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = 1)$$
$$(\quad x, y, z)x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

dalje, aksiome uredjenja

$$(\forall x)\ (\text{ili } x>0 \text{ ili } x=0 \text{ ili } x<0)$$
$$(\forall x,y)\ x>0 \wedge y>0 \Rightarrow x+y>0 \wedge x\cdot y>0)$$
$$(\forall x)\ (x>0 \Rightarrow -x<0),\ (\forall x)\ (x<0 \Rightarrow -x>0)$$

Najzad, razne tačne formule[2] kao

---

[1] Grupa $\mathcal{G}$ je uredjena relacijom ρ skupa G ukoliko je ρ relacija totalnog poretka i još za svaki x, y, u, v $\in$ G važi:

$$x \rho y \wedge u \rho v \Rightarrow x \star u \rho y \star v$$

[2] Medjutim, tu nema nijedne formule koja odgovara rečenici: S v a k i n e p r a z a n p o d s k u p r e a l n i h b r o j e v a o g r a n i č e n s a g o r n j e s t r a n e i m a s u p r e m u m, jer tu rečenicu ne možemo zapisati navedenim jezikom.

$(\exists x)x^2 = 2$, $(\forall x)(\exists y)2x + 3y = 5$, $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x < y \Rightarrow x < z \wedge z < y)$

Drugo, sve formule oblika

(☆) $0 < \epsilon$, $\epsilon < r$,

gde je r ma koji pozitivan realan broj.

Dokazati da postoji model opisanih formula.

Uputstvo. Svaki konačan podskup K tih formula ima model. Zaista, neka su $0 < \epsilon$, $\epsilon < r_1$, $\epsilon < r_2$, ..., $\epsilon < r_k$ sve formule oblika (☆) koje učestvuju u skupu K. Tada, jedan model za K se dobija iz uredjenog polja realnih brojeva ako se u njemu ϵ tumači, recimo kao broj

$$\frac{1}{2} min\,(r_1, r_2, ..., r_k)$$

Napomena. U prethodnom zadatku je opisano svojevrsno proširenje polja realnih brojeva, što je, inače, predmet proučavanja tzv. *nestandardne analize*.

37. Dokazati ekvivalencije (F je zatvorena formula[1]):

F *je valjana* $\longleftrightarrow \neg F$ *nema model*, $\neg F$ *je valjana* $\longleftrightarrow F$ *nema model*

F *nije valjana* $\longleftrightarrow \neg F$ *ima model*, $\neg F$ *nije valjana* $\longleftrightarrow F$ *ima model*.

38. Ranije smo u vezi sa ma kojom zatvorenom formulom F dodavanjem novih funkcijskih znakova (Skolemovih) prelazili na univerzalnu formulu za koju smo koristili oznaku $\hat{F}$ (videti zadatke 74–80, tačke XII). Tako, ako je F formula $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\alpha(x, y) \wedge \alpha(x, z))$ onda je $\hat{F}$: $(\forall y)(\forall z)(\alpha(a, y) \wedge \alpha(a, z))$. U vezi sa ma kojom formulom F na sličan način uvodi se egzistencijalna formula $\check{F}$:

$$\check{F} \text{ je, po definiciji, } \neg(\widehat{\neg F})$$

Za datu formulu F obrazovati formule $\hat{F}$, $\check{F}$

a) $(\forall x,y)A(x,y)$, b) $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$, c) $(\exists x)(\forall y)A(x,y)$, d) $(\exists x,y)A(x,y)$,
e) $A(c,d)$, f) $(\forall x)(\exists y,z)A(x,y,z)$, g) $(\exists x,y)(\forall z,u)A(x,y,z,u)$.

Uputstvo. Obrazovanje formule $\check{F}$ pokazujemo na primeru c). Dakle, F je $(\exists x)(\forall y) A(x,y)$. Tada najpre uočavamo formulu $\neg F$. Ona je ekvivalentna sa $(\forall x)(\exists y)\neg A(x,y)$. Dalje, za dobijenu formulu Φ obrazujemo $\hat{\Phi}$. To je formula $(\forall x)\neg A(x, f(x))$, gde je f nov funkcijski znak. Najzad, obrazujemo negaciju za $\hat{\Phi}$, preradjujući je na egzistencijalni oblik. Tako:

$$\neg(\forall x)\ \neg A(x, f(x)) \iff \neg\neg(\exists x)\ A(x, f(x)) \iff (\exists x)\ A(x, f(x))$$

Formula $(\exists x)A(x, f(x))$ je upravo $\check{F}$.

Evo rezultata (prvonavedena formula je $\hat{F}$):

---

[1] Svi zadaci do kraja tačke, osim zadatka 50, odnose se na formule bez znaka jednakosti.

a) $(\forall x, y)A(x, y),\ A(a, b)$; b) $(\forall x)A(x, f(x)),\ (\exists y)A(a, y)$;
c) $(\forall y)A(a, y),\ (\exists x)A(x, f(x))$; d) $A(a, b),\ (\exists x, y)A(x, y)$,
e) $A(c, d),\ A(c, d)$; f) $(\forall x)A(x, f(x), g(x)),\ (\exists y, z)A(a, y, z)$;
g) $(\forall z, u)A(a, b, z, u),\ (\exists x, y)A(x, y, f(x, y), g(x, y))$,

gde su a, b novi znaci konstanata za formulu F a f, g novi operacijski znaci.

39. Neka je F zatvorena formula. Dokazati ekvivalencije:

(i) F *ima model* $\longleftrightarrow$ $\hat{F}$ *ima model*
(ii) F *je valjana* $\longleftrightarrow$ $\check{F}$ *je valjana*

Rešenje. Tvrdjenje (i) je ranije već dokazano (videti zadatke 11–19, tačke XI). Koristeći to tvrdjenje primenjeno na formulu $\neg F$ izvodimo dokaz ekvivalencije (ii). Dakle, polazimo od

(1) $\neg F$ *ima model* $\longleftrightarrow$ $\widehat{\neg F}$ *ima model*

Odatle negiranjem obeju strana dobijamo

(2) $\neg F$ *nema model* $\longleftrightarrow$ $\widehat{\neg F}$ *nema model*

Koristeći, dalje, prvi i drugo tvrdjenje zadatka 37 iz prethodne ekvivalencije izvodimo

(3) F *je valjana* $\longleftrightarrow$ $\neg(\widehat{\neg F})$ *je valjana*

Najzad, koristeći definiciju formule $\check{F}$, iz (3) neposredno dobijamo ekvivalenciju (ii).

40. Formulu

$$\alpha(c_1, f(c_2)) \wedge \alpha(c_2, f(c_1)) \Rightarrow \neg\,\alpha(c_1, c_2)$$

možemo shvatiti kao iskaznu formulu po slovima $\alpha(c_2, f(c_1))$, $\alpha(c_2, f(c_1))$, $\alpha(c_1, c_2)$. Jedan njen iskazni model je

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha(c_1, f(c_2)) & \alpha(c_2, f(c_1)) & \alpha(c_1, c_2) \\ \top & \bot & \bot \end{pmatrix}$$

Koristeći σ napraviti bar jedan predikatski model te formule.

Uputstvo. Uočimo skup T svih terma gradjenih od c_1, c_2, f. Od T se može sagraditi jedan model na ovaj način:

– c_1, c_2 *tumačimo kao* c_1, c_2,
– f *tumačimo kao izrazovsku operaciju,*
– α *kao relaciju* $\bar{\alpha}$ *ovako uvedenu*

$\tau\bar{\alpha}(c_1, f(c_2)) = \top$, $\tau\bar{\alpha}(c_2, f(c_1)) = \bot$, $\tau\bar{\alpha}(c_1, c_2) = \bot$

a za $\tau\alpha(t_1, t_2)$, *gde su* t_1, t_2 *ma koji drugi termi iz* T, *uzimamo vrednost po volji (recimo sve* $\top$*).*

Napomena. Dobijeni predikatski model je primer tzv. term–modela. Uopšte, model skupa predikatskih formula je *term–model*, ukoliko njegov skupovni deo čine termi sagradjeni od izvesnog skupa Γ (u prethodnom zadatku $\Gamma = \phi$), znakova konstanata i operacijskih znakova formule $\mathcal{F}$. Uz to, sve operacije u takvom modelu su izrazovske.

41. Neka je $\mathcal{F}$ skup predikatskih formula bez promenljivih. On se može shvatiti i kao skup iskaznih formula smatrajući njegove elementarne formule slovima. Tada vredi:

Skup $\mathcal{F}$ ima bar jedan predikatski model (i to upravo term–model) akko $\mathcal{F}$ kao skup iskaznih formula ima model.

Dokazati.

42. Neka je F formula bez promenljivih. Dokazati:

F je valjana akko F, shvaćena kao iskazna formula, je tautologija.

43. Primenom tvrdjenja (ii) iz zadatka 39 dokazati da za proizvoljnu univerzalnu formulu $(\forall x_1, \dots, x_n)\, F(x_1, \dots, x_n)$ vredi ekvivalencija:

$(\forall x_1, \dots, x_n)\, F(x_1, \dots, x_n)$ *je valjana* $\longleftrightarrow$ $F(c_1, \dots, c_n)$, *shvaćena kao iskazna formula, je tautologija*

Tu su $c_1, \dots, c_n$ znaci novih konstanata.

Uputstvo. Uočenoj univerzalnoj formuli odgovara egzistencijalna formula oblika $F(c_1, \dots, c_n)$ – $c_1, \dots, c_n$ su znaci novih konstanata. Dokaz postavljene ekvivalencije se, dalje, izvodi primenom pomenutog tvrdjenja (ii), kao i tvrdjenja prethodnog zadatka.

44. Jedan model formule

$$(\forall x, y)\, (\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(f(x), f(y)))$$

je $(N, <, ')$, gde je $x' = x+1$. Koristeći taj model napraviti za istu formulu term–model odredjen sa $\Gamma = \{a, b, c\}$.

Rešenje. Treba da napravimo model čiji su elementi izrazi (umesto $f(a), f(f(a)), \dots$ pišemo $fa, f^2a, \dots$):

$$a,\ b,\ c,\ fa,\ fb,\ fc,\ f^2a,\ f^2b,\ f^2c,\ \dots$$

i čija operacija $\bar{f}$ je izrazovska, tj.

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} a & b & c & fa & fb & fc & \dots \\ fa & fb & fc & f^2a & f^2b & f^2c & \dots \end{pmatrix}$$

Ostaje još da se za svaka dva terma t_1, t_2 podesno definiše $\tau\alpha(t_1, t_2)$. Radi toga prethodno u datom modelu izaberimo tri člana koja ćemo zvati vrednostima za a, b, c. Neka, recimo, sve tri vrednosti budu 1 što zapisujemo i na ovaj način

$$vr(a) = 1, \quad vr(b) = 1, \quad vr(c) = 1$$

Koristeći te jednakosti i ma kom termu t može se dodeliti po jedan član iz N, odnosno vrednost. U tu svrhu koristimo ovu povratnu (rekurzivnu) definiciju

$$vr(ft) = (vr(t))'$$

prema kojoj, recimo: $vr(f^2 a) = (vr(fa))' = (vr(a))'' = 1'' = 3$. Relacijski znak α tumačimo tada kao narednu relaciju $\bar{\alpha}$:

$$\tau\bar{\alpha}(t_1, t_2) = \tau(vr(t_1) < vr(t_2)),$$

budući da se u datom modelu znak α tumači kao $<$. Nije teško proveriti da se na taj način dobija jedan term–model date formule. Zaista, neka su t_1, t_2 ma koji termi. Tada:

$\tau(\bar{\alpha}(t_1, t_2) \Rightarrow \bar{\alpha}(f(t_1)), f(t_2)))$
$= \tau\bar{\alpha}(t_1, t_2) \Rightarrow \tau\bar{\alpha}(f(t_1), f(t_2))$
(Sada je $\Rightarrow$ znak $\{\top, \bot\}$ – algebre)
$= \tau(vr(t_1) < vr(t_2)) \Rightarrow \tau(vr(ft_1) < vr(ft_2))$
(Koristeći definiciju relacije $\bar{\alpha}$),
$= \tau(vr(t_1) < vr(t_2)) \Rightarrow \tau(vr(t_1))' < (vr(t_2))')$
$= \tau(vr(t_1) < vr(t_2) \Rightarrow (vr(t_1))' < (vr(t_2))')$
$= \top$, budući da je $(N, <, ')$ model uočene formule.

45. Neka je $\mathcal{F}$ skup univerzalnih formula na jeziku $L = \{\alpha, f, c, \ldots\}$. Dokazati:
$\mathcal{F}$ ima model $\longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ ima term–model (Odredjen proizvoljnim skupom Γ).

Uputstvo. Naravno, $\mathcal{F}$ ima model ukoliko ima term–model. Obratno, uočimo neki model $\mathcal{M} = (M, \alpha_M, f_M, c_M, \ldots)$ formula $\mathcal{F}$. Pomoću njega obrazujemo term–model čiji je nosilac skup T svih terma obrazovanih od Γ i znakova konstanata i operacijskih znakova formula $\mathcal{F}$, a operacije, $\bar{f}$, $\bar{c}$, ..., su izrazovske. Radi uvodjenja odgovarajućih relacija, za elemente skupa Γ, slično kao u prethodnom zadatku, izaberimo neke vrednosti iz M. Tada i svakom termu iz T odgovara vrednost. Naime, ako je c znak konstante, a f operacijski znak dužine n, tada je, po definiciji:

$$vr(c) = c_M, \; vr(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_M(vr(t_1), \ldots, vr(t_n)) \;\; (t_1, \ldots, t_n \in T).$$

Najzad, relacija $\bar{\alpha}$, koja odgovara relacijskom znaku α dužine n, uvodi se na ovaj način

$$\tau\bar{\alpha}(t_1, \ldots, t_n) = \tau\alpha_M(vr(t_1), \ldots, vr(t_n))$$

Tako se dobija model $(T, \bar{\alpha}, \bar{f}, \bar{c}, \ldots)$ koji jeste term-model.

46. Neka je $\mathcal{F}$ skup univerzalnih formula, Γ dati skup i $T \neq \phi$ skup svih terma obrazovanih od Γ, znakova konstanata i operacijskih znakova iz $\mathcal{F}$. Dokazati:
$\mathcal{F}$ ima model $\longleftrightarrow$ $\mathcal{F}|_\Gamma$, shvaćen kao skup iskaznih formula, ima iskazni model

Uputstvo. Primeniti tvrdjenja zadatka 41 i zadatka 45.

47. Dokazati:

Univerzalna formula ima model akko ima prebrojiv model.

Uputstvo. Term–model odredjen prebrojivim skupom Γ je prebrojiv.

48. Neka je F egzistencijalna formula. Dokazati:

F je valjana $\longleftrightarrow$ *F je tačna na svakom term–modelu odredjenom datim skupom* Γ.

49. Neka je F ma koja predikatska formula. Dokazati ekvivalencije:

F ima model $\longleftrightarrow$ $\hat{F}$ *ima term–*model*(odredjen datim skupom* Γ*)*

F je valjana $\longleftrightarrow$ $\check{F}$ *je tačna na svakom term–modelu (odredjenim datim skupom* Γ*)*.

50. Da li formula $f(x) = x$ ima term–model?

Rešenje. Uočimo skup $\Gamma = \{a\}$. Tada je skup terma $T = \{a, fa, f^2 a, \ldots\}$. Očigledno $(T, \bar{f})$,gde je f izrazovska operacija, nije model formule $f(x) = x$. Uopšte, ta formula nema term–model ni sa proizvoljnim drugim skupom Γ.

51. Neka je $(\exists x_1, \ldots, x_n) F(x_1, \ldots, x_n)$ proizvoljna egzistencijalna formula i Γ ma koji skup (u slučaju kada u toj formuli učestvuju znaci konstanata, Γ može biti prazan skup, a inače Γ je neprazan). Neka je, dalje, T skup svih terma obrazovanih od Γ, i od znakova konstanata i operacijskih znakova uočene formule. Dokazati:

$(\exists x_1, \ldots, x_n) F(x_1, \ldots, x_n)$ *je valjana* $\longleftrightarrow$ *Postoje termi* $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kn}$ *iz* T *takvi da je tautologija formula* $F(t_{11}, \ldots, t_{1n}) \vee \ldots \vee F(t_{k1}, \ldots, t_{kn})$, *shvaćena kao iskazna.*

Rešenje. Radi kraćeg pisanja razmotrimo jedino slučaj formule $(\exists x) F(x)$. Tada važi ovaj ekvivalencijski lanac:

$(\exists x) F(x)$ *je valjana*

$\longleftrightarrow \neg (\exists x) F(x)$ *nema model*

$\longleftrightarrow (\forall x) \neg F(x)$ *nema model*

$\longleftrightarrow$ *Skup* $\{\neg F(t) \mid t \in T\}$ *nema iskazni model*

$\longleftrightarrow$ *Neki konačan podskup* $\{\neg F(t_1), \ldots, \neg F(t_k)\}$ *prethodnog skupa nema model*

(Primena iskaznog stava kompaktnosti)

$\longleftrightarrow \neg F(t_1) \wedge \ldots \wedge \neg F(t_k)$ *nema model*

$\longleftrightarrow \neg F(t_1) \wedge \ldots \wedge \neg F(t_k) \Longleftrightarrow \bot$

(Jer, u iskaznom slučaju formula koja nema model je kontradikcija).

$\longleftrightarrow F(t_1) \vee \ldots \vee F(t_k) \Longleftrightarrow \top$

$\longleftrightarrow$ *Postoje termi* $t_1, \ldots, t_k$ *iz* T *takvi da je iskazna formula* $F(t_1) \vee \ldots \vee F(t_k)$ *tautologija.*

Dakle: $(\exists x) F(x)$ *je valjana* $\longleftrightarrow$ *(Postoje* $t_1, \ldots, t_k \in T) F(t_1) \vee \ldots \vee F(t_k)$ *je tautologija*

Potpuno slično se dokazuje odgovarajuća ekvivalencija za proizvoljnu egzistencijalnu formulu.

52. Neka je F ma koja predikatska formula i $(\exists x_1, \ldots, x_n)\, H(x_1, \ldots, x_n)$ njoj odgovarajuća egzistencijalna formula $\check{F}$. Kao uopštenje prethodnog tvrdjenja dokazati ovaj tzv. *Erbranov*[1] *stav*:

F je valjana $\longleftrightarrow$ *Postoje termi* $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{kn}$ *iz T takvi da je tautologija formula*

$$H(t_{11}, \ldots, t_{1n}) \vee H(t_{21}, \ldots, t_{2n}) \vee \ldots \vee H(t_{k1}, \ldots, t_{kn}),$$

shvaćena kao iskazna.

Pri tome je T skup svih terma obrazovanih od elemenata datog skupa Γ (koji može biti i prazan ukoliko H sadrži znake konstanata, a inače je neprazan) i od znakova konstanata i operacijskih znakova formule H.

Uputstvo. Koristiti tvrdjenje prethodnog zadatka kao i zadatka 39.

53. Neka je $(\exists x_1, \ldots, x_n)\, F(x_1, \ldots, x_n)$ egzistencijalna formula u čijoj izgradnji ne učestvuju znaci konstanata niti operacijski znaci. Dokazati:

$(\exists x_1, \ldots, x_n)\, F(x_1, \ldots, x_n)$ *je valjana* $\longleftrightarrow$ $F(a, \ldots, a)$, *shvaćena kao iskazna formula, je tautologija*

Pri tome je a znak konstante.

Rešenje. Neka je $\Gamma = \{a\}$. Tada je $T = \{a\}$, budući da formula nema operacijskih znakova ni znakova konstanata. Otuda za terme o čijem se postojanju tvrdi u zadatku 51 postoji jedina mogućnost a, čime se dokaz navedene ekvivalencije završava.

54. Neka je a) $(\exists x) F(x)$, b) $(\exists x, y)\, F(x, y)$ egzistencijalna formula bez operacijskih znakova i neka je $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ skup svih njenih znakova konstanata. Dokazati:

a) $(\exists x)\, F(x)$ *je valjana* $\longleftrightarrow$ $F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_k)$ *je tautologija*

b) $(\exists x, y)\, F(x, y)$ *je valjana* $\longleftrightarrow$ $F(c_1, c_1) \vee F(c_1, c_2) \vee \ldots \vee F(c_k, c_k)$ *je tautologija*

Uputstvo. Za Γ izabrati prazan skup a potom primeniti tvrdjenje zadatka 51.

55. Ispitati koje od narednih egzistencijalnih formula jesu valjane

$(\exists x, y, z)\, (\alpha(x, y) \wedge \alpha(y, z) \Rightarrow \alpha(x, z))$, $(\exists x)\, (\alpha(a, x) \Longleftrightarrow \alpha(x, a))$,

$(\exists x)\, (\beta(a) \vee \beta(b) \Rightarrow \beta(x))$, $(\exists x, y)\, (\alpha(x,y) \wedge (\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(a, x) \wedge \alpha(y, b))$.

56. Neka je $(\forall x_1, \ldots, x_n)\, (\exists y)\, F(x_1, \ldots, x_n, y)$ formula u preneks obliku bez operacijskih znakova i bez znakova konstanata. Dokazati:

$(\forall x_1, \ldots, x_n)\, (\exists y)\, F(x_1, \ldots, x_n, y)$ *je valjana*

$\longleftrightarrow$ *Formula* $F(a_1, \ldots, a_n, a_1) \vee F(a_1, \ldots, a_n, a_2) \vee \ldots \vee F(a_1, \ldots, a_n, a_n)$, *shvaćena kao iskazna, je tautologija*

Tu su $a_1, \ldots, a_n$ znaci konstanata.

Uputstvo. Od date formule preći najpre na njoj odgovarajuću egzistencijalnu formulu, a zatim primeniti ekvivalenciju a) zadatka 54.

[1] Jacques Herbrand (1908–1931).

57. Primenom Erbranovog stava dokazati da je naredna formula valjana

$$(\exists x)(\forall y)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(y))$$

Rešenje. Egzistencijalna formula $\check{F}$ za datu formulu je $(\exists x)(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(fx))$. Neka je, dalje, $\Gamma = \{a\}$. Skup terma T je tada $\{a, fa, f^2a, f^3a, \dots\}$. Kako je disjunkcija:

$$(\alpha(a) \Rightarrow \alpha(fa)) \vee (\alpha(fa)) \Rightarrow \alpha(f^2a))$$

očigledno tautologija (ona je iskazna formula po slovima $\alpha(a)$, $\alpha(fa)$, $\alpha(f^2a)$), to je polazna formula valjana.

58. Neka je F zatvorena formula i $(\forall x_1, \dots, x_n) S(x_1, \dots, x_n)$ njoj odgovarajuća univerzalna formula $\hat{F}$. Dokazati ekvivalenciju:

F nema model $\longleftrightarrow$ *Postoje termi $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{kn}$ iz T takvi da skup*
$\{S(t_{11}, \dots, t_{1n}), S(t_{21}, \dots, t_{2n}), \dots, S(t_{k1}, \dots, t_{kn})\}$,
shvaćen kao skup iskaznih formula, nema model.

Tu je T skup svih terma obrazovanih od skupa Γ (ako F nema znakova konstanata, Γ mora biti neprazan) i od znakova konstanata i operacijskih znakova formule S.

59. **Produžetak prethodnog**. Pretpostavimo još da je formula $S(x_1, \dots, x_n)$ dovedena na sastavni oblik, tj. da vredi

$$S(x_1, \dots, x_n) \Longleftrightarrow S_1(x_1, \dots, x_n) \wedge S_2(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \; S_m(x_1, \dots, x_n)$$

gde su S_i disjunkcije elementarnih formula ili negacija elementarnih formula. Dokazati ekvivalenciju:

F nema model $\longleftrightarrow$ *Postoje termi $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{kn}$ iz T takvi da skup*

$$\begin{gathered}\{S_1(t_{11}, \dots, t_{1n}), \dots, S_m(t_{11}, \dots, t_{1n}),\\ S_1(t_{21}, \dots, t_{2n}), \dots, S_m(t_{21}, \dots, t_{2n}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ S_1(t_{k1}, \dots, t_{kn}), \dots, S_m\, t_{k1}, \dots, t_{kn})\}\end{gathered}$$

shvaćen kao skup iskaznih formula, nema model.

XVIII FORMALNE TEORIJE

♦ Ako se neka matematička teorija aksiomatski izgradjuje polazi se od nekih rečenica, formula uzetih kao tačne. Te „polaznice" drukčije nazivamo i *aksiome teorije*. Logičke posledice aksioma su tzv. *teoreme teorije*. Podrobnije rečeno, svaka teorema ima bar jedan *dokaz*, koji se sastoji iz niza koraka. Ma koji korak dokaza može biti:

– *aksioma*, ili već dokazana teorema;
– *neki logički zakon* (tautologija, valjana formula i sl.);
– *neka formula* (rečenica) koja *sledi* iz nekih prethodnih koraka dokaza po nekom pravilu izvodjenja. Recimo, ako su izvesne formule oblika $A = B$ i $B = C$ dva člana nekog dokaza, tada se u nekom sledećem koraku može uzeti formula $A = C$; pri tom se kaže da je primenjeno pravilo

$$\frac{A=B, \quad B=C}{A=C}.$$

♦ Postroženjem pojmova *aksioma, dokaz*, na način koji upoznajemo, dolazi se do pojma *formalne* (odnosno *potpuno aksiomatske*)[1] *teorije*. Formalnu teoriju odredjuju:

– *Alfabet:*[2] izvestan skup polaznih znakova koje zovemo *slovima* tog alfabeta.
– *Formule:* neke od reči obrazovanih od slova datog alfabeta. Pri tome je dat i efektivan postupak za odlučivanje da li neka reč jeste ili nije formula.
– *Aksiome:* neke od formula. Ako je još dat i efektivan postupak za odlučivanje da li neka formula jeste ili nije aksioma, tada za formalnu teoriju kažemo da je *aksiomatska*.
– *Pravila izvodjenja* (njih konačno mnogo): izvesne relacije u skupu formula. Ako je α jedno pravilo izvodjenja dužine n (tj. jedna relacija dužine n) i ako su formule $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ (tim redom) u toj relaciji, pišemo $\dfrac{A_1, \ldots, A_{n-1}}{A_n}$ i kažemo da je A_n *direktna posledica* formula $A_1, \ldots, A_{n-1}$ po pravilu izvodjenja α.

♦ *Dokaz (izvodjenje, dedukcija)* u nekoj formalnoj teoriji je konačan niz formula: $F_1, \ldots, F_m$ takav da svaki član tog niza jeste:

(i) aksioma; ili
(ii) direktna posledica nekih prethodnih formula niza po izvesnom pravilu izvodjenja.

---

[1] Pojam formalne teorije potiče od Hilberta (D a v i d H i l b e r t, 1862–1943).
[2] Za alfabet zahtevamo da zadovoljava uslove iz tačke I S l o v a i r e č i, fusnota na strani 7.

♦ Formula F je *teorema* formalne teorije, ukoliko postoji bar jedno izvodjenje te teorije čiji je poslednji član baš formula F. U slučaju kada F jeste teorema teorije $\mathcal{T}$, koristimo oznaku $\vdash_{\mathcal{T}} F$.

♦ Formalna teorija je *odlučiva,* ukoliko postoji efektivan postupak za odlučivanje da li neka formula te teorije jeste ili nije teorema.

♦ Neka je $\mathcal{T}$ skup izvesnih formula neke formalne teorije $\mathcal{T}$ i F formula te teorije. Kažemo da je F *posledica skupa hipoteza* $\mathcal{F}$, što ovako označavamo: $\mathcal{F} \vdash_{\mathcal{T}} F$, ukoliko postoji konačan niz formula čiji je poslednji član formula F, i takav da svaki član tog niza jeste:

(i) aksioma; ili

(ii) hipoteza; ili

(iii) direktna posledica nekih prethodnih formula tog niza po izvesnom pravilu izvođenja teorije $\mathcal{T}$.

♦ Pri razmatranju neke formalne teorije koristimo kao pomoćnu izvesnu intuitivnu (neformalnu) matematičku teoriju koja se, pri tome, naziva *meta–teorija.* Jezik pomoću koga je izražena meta–teorija naziva se *meta–jezik.* Taj jezik je obično govorni jezik sa uobičajenim matematičkim znacima. Sama formalna teorija koja se razmatra naziva se, pri tome, *objekt–teorija,* a njen jezik[1] *objekt–jezik.*

♦ Formalne teorije se obično izgradjuju radi istraživanja u vezi sa nekom (neformalnom) matematičkom teorijom. Za tako dobijenu formalnu teoriju polazna matematička teorija je njena tzv. *glavna interpretacija.*

♦ U algebri se često koriste tzv. *jednakosne formalne teorije.* Jednu vrstu tih teorija čine jednakosni računi, koje smo upoznali u tački XIII. U stvari, ostale jednakosne formalne teorije nastaju iz njih uzimanjem još izvesnih formula oblika

$$t_1 = t_2 \qquad (t_1,\ t_2 \text{ su izrazi})$$

kao dodatnih aksioma.

♦ Za neke vrste formalnih teorija uvodi se pojam *modela.* To je obično neka relacijsko–operacijska struktura koja, u odredjenom smislu, zadovoljava teoriju.

♦ U logici su od posebnog značaja dve formalne teorije: *iskazni račun* i *predikatski račun I reda.* Prva teorija je u vezi sa tautologijama, a druga sa valjanim formulama (videti zadatke 19, 21, 31). Pomoću predikatskog računa grade se razne formalne teorije koje se koriste za tzv. *strogo aksiomatsko (formalno)* zasnivanje matematičkih teorija.

---

[1] Jezik formalne teorije čine: polazni znaci, reči obrazovane od tih znakova, kao i konačni nizovi tih reči.

ZADACI

1. Neka je formalna teorija odredjena ovako:

Polazni znak je slovo a

Formule su sve reči obrazovane od tog slova

Aksioma je a

Pravilo izvodjenja je $\dfrac{F}{Faa}$, gde je F proizvoljna formula

(i) Dokazati da je reč $aaaaa$ teorema

(ii) Dokazati ovo meta–tvrdjenje:

Reč F je teorema, ako i samo ako se slovo a pojavljuje u njoj neparan broj puta.

(iii) Da li je data formalna teorija odlučiva?

(iv) Neka je jedna interpretacija odredjena uslovom: *Reč* $\underbrace{aa\ldots a}_{n-\text{puta}}$ *tumači se kao prirodan broj n.* Koji prirodni brojevi, pri tom tumačenju, odgovaraju teoremama?

Rešenje.

(i) Dokaz za formulu $aaaaa$ izgleda:

(1) a (Aksioma)

(2) aaa (Iz (1) po pravilu izvodjenja)

(3) $aaaaa$ (Iz (2) po pravilu izvodjenja)

Nije teško zaključiti da je navedeni dokaz i najkraći moguć.

(ii) Radi kratkoće u izražavanju, nazovimo reči u kojima se slovo a pojavljuje neparan broj puta *neparnim*. Tada tvrdjenje koje treba dokazati glasi: *Reč F je teorema ako i samo ako je neparna.*

Neposredno se uočava da je aksioma a neparna reč i da pravilo izvodjenja čuva neparnost: Ako je F neparna formula, onda je i Faa (dobijena iz F primenom pravila izvodjenja), takodje neparna. Na osnovu toga, svi članovi nekog izvodjenja moraju biti neparne formule, pa su otuda i teoreme neparne.

Obratno; neka je F neparna formula. Dokazujemo da je F teorema. Dokaz izvodimo indukcijom po n – broju pojavljivanja slova a u formuli F.

– Za $n=1$ F glasi: a. Znači, F jeste teorema.

– Neka je teorema neparna formula koja ima $2k-1$ pojavljivanja slova a i neka je $F_1, \ldots, F_s$ jedan njen dokaz. Tada je niz $F_1, \ldots, F_s, F$ dokaz za formulu F u kojoj se slovo a pojavljuje $2k+1$ puta. Obrazloženje: F se dobija iz F_s primenom pravila izvodjenja.

(iii) Data formalna teorija jeste odlučiva. To proističe iz meta–tvrdjenja dokazanog pod (ii). Efektivan postupak odlučivanja da li neka formula jeste ili nije teorema sastoji se u izbrojavanju broja pojavljivanja slova a u toj formuli. Ukoliko je taj broj pojavljivanja neparan, formula jeste teorema, a ukoliko je paran, formula nije teorema.

(iv) Kako su, prema meta–tvrdjenju dokazanom pod (ii), teoreme one i samo one reči u kojima se slovo *a* pojavljuje neparan broj puta, to pri datoj interpretaciji teoremama odgovaraju *neparni* prirodni brojevi.

2. Obrazovati formalnu teoriju polazeći od slova *a* tako da njene teoreme budu one i samo one reči u kojima se slovo *a* pojavljuje paran broj puta.

3. Obrazovati formalnu teoriju polazeći od slova *a, b* tako da njene teoreme budu: slova *a, b* i još one i samo one reči kod kojih se ta slova neizmenično redjaju. Takve su, na primer, reči: *ab, aba, bababab.*

Uputstvo. Jedna mogućnost je:

Azbuka je $\{a,b\}$

Formule su sve reči obrazovane od slova *a, b*

Aksiome su: *a, b*

Pravila izvodjenja su: $(\alpha)\ \dfrac{Fa}{Fab}$, $(\beta)\ \dfrac{Fb}{Fba}$

Drugim rečima, pomoću datih pravila se na reč koja se završava slovom *a*, može dopisati slovo *b*, dok se na reč koja se završava slovom *b* može dopisati[1] *a*.

4. Obrazovati formalnu teoriju polazeći od znakova *a, b* tako da teoreme budu tačno one reči u kojima se znak *a* pojavljuje paran broj, a znak *b* neparan broj puta.

5. Neka je alfabet $\{a, b, \star,), (\}$ i medju njegovim rečima uočimo one koje su izrazi po *a, b*. Odrediti formalnu teoriju tako da njene teoreme budu upravo ti izrazi.

Odgovor. Aksiome su *a, b*, pravilo je $\dfrac{u,\ v}{(u \star v)}$.

6. **Nastavak prethodnog.** Zamislimo da se kod prethodnih izraza svuda obrišu znaci *a, b*, $\star$ a da se ostave znaci zagrada. Tako od izraza $(a \star b)$, $(a \star (b \star a))$ redom nastaju ove reči $(\ )$, $((\ ))$ alfabeta $\{), (\}$. Odrediti formalnu teoriju čije su teoreme upravo reči tako nastale iz izraza.

Odgovor. Aksioma je $(\ )$, pravilo je $\dfrac{u,\ v}{(uv)}$.

7. Neka je *C* skup znakova konstanata, *V* skup promenljivih, *O* skup operacijskih znakova ,) (znaci zagrada i , zarez.

(i) Opisati formalnu teoriju čije su teoreme odgovarajući izrazi.

(ii) Opisati formalnu teoriju čije su teoreme reči po slovima) (, nastale iz izraza brisanjem znakova konstanata, promenljivih i operacijskih znakova.

Napomena. Ako su $t_1, \ldots, t_n$ izrazi i f operacijski znak dužine n, tada i reč $f(t_1, \ldots, t_n)$ smatramo izrazom.

---

[1] Pri tome F može biti i prazna reč, tj. Fa, Fb mogu glasiti redom a, b.

8. Definisati formalnu teoriju sa polaznim znacima a, b tako da pri interpretaciji odredjenoj uslovima:

(i) *Slova a, b se tumače kao oznake brojeva 1, −1*

(ii) *Reč $x_1 x_2 \ldots x_n$ tumači se kao proizvod $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$*

važi ovakvo meta–tvrdjenje:

Reč F je teorema formalne teorije, ako i samo ako njoj odgovarajući proizvod $F^{\star}$ ima uvek vrednost 1, za svaku vrednost brojevnih promenljivih a, b iz skupa $\{1, -1\}$.

Odgovor. Jedna mogućnost je da se tražena formalna teorija ovako definiše:

Polazni znaci su slova a, b

Formule su sve reči obrazovane od tih slova

Aksiome su reči aa, bb

Pravila izvodjenja su: $\dfrac{F,\ G}{FG}$, $\dfrac{FabG}{FbaG}$, $\dfrac{FbaG}{FabG}$

Pri tome su F, G proizvoljne formule, odnosno proizvoljne reči obrazovane od a, b od kojih jedna ili obe mogu biti i prazne reči.

9. Da li se teoreme formalne teorije iz prethodnog zadatka mogu i ovako opisati:

Reč F je teorema, ako i samo ako, ukoliko se slovo a, odnosno b uopšte pojavljuje u toj reči, onda se pojavljuje paran broj puta.

10. Da li je narednim uslovima odredjena jedna interpretacija formalne teorije iz zadatka 8:

(i) Slova a, b tumače se kao iskazna slova

(ii) Reč $x_1 x_2, \ldots, x_n$ se tumači kao iskazna formula:

$$(\ldots ((x_1 \Leftrightarrow x_2) \Leftrightarrow x_3) \ldots) \Leftrightarrow x_n$$

Dokazati meta–teoremu:

Formula F je teorema, ako i samo ako njoj odgovarajuća iskazna formula F jeste tautologija.

Da li se datom interpretacijom skup teorema uzajamno jednoznačno preslikava u skup svih tautologija obrazovanih od iskaznih slova a, b i logičkog znaka $\Leftrightarrow$?

11. Definisati formalnu teoriju čije su teoreme upravo sve iskazne formule gradjene od iskaznih slova $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots,$ iskaznih veznika $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ i znakova zagrada.

12. Definisati formalnu teoriju čije su teoreme upravo predikatske formule (I reda) u kojima učestvuju dati znaci konstanata, date promenljive i dati operacijski i relacijski znaci.

13. Formalna teorija $\mathcal{T}$ je zadana ovako:

Alfabet je $\{r, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Formule su reči oblika urv, gde su u, v reči nad alfabetom $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Aksiome su sve formule oblika uru, a pravila su sledeća

$$\frac{urv}{vru}, \quad \frac{urv,\ vrw}{urw}$$

(i) Dokazati:

$$a_1ra_2,\ a_1ra_3,\ a_2ra_4 \vdash a_3ra_4; \quad a_2ra_1,\ a_2ra_3 \vdash a_3ra_1$$

(ii) Neka je S neki skup formula teorije $\mathcal{T}$. U skupu A na ovaj način uvodimo binarne relacije σ i ρ

$$\tau(a_i\ \sigma\ a_j) = \top \longleftrightarrow a_i r a_j \in S, \qquad \tau(a_i\ \rho\ a_j) = \top \longleftrightarrow S \vdash a_i r a_j$$

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i da je to minimalna relacija ekvivalencije skupa A koja sadrži σ.

14. Neka je $\mathcal{G}$ teorija grupa, tj. jednakosna teorija kod koje je e znak konstante, $x_1, x_2, \ldots$ promenljive, $\star$ operacijski znak dužine 2, $^{-1}$, operacijski znak dužine 1, a aksiome su formule oblika

$$(t_1 \star t_2) \star t_3 = t_1 \star (t_2 \star t_3), \quad t \star e = t,\ t \star t^{-1} = e$$

Dokazati teoreme:

(i) $e \star t = t, \quad t^{-1} \star t = e$

(ii) $(t_1 \star t_2)^{-1} = t_2^{-1} \star t_1^{-1}$

gde su t_1, t_2, t ma koji izrazi.

15. Neka je A dati alfabet i $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ skup znakova koje dogovorno nazivamo relacijski znaci dužine 1. Reči oblika $\varphi_i u$, gde je u reč nad A, nazivamo *označene* i čitamo ih: *u ima svojstvo* φ_i. Takozvana *viševrsna* formalna teorija je formalna teorija odredjena izvesnim skupom označenih reči – to su njene aksiome – i izvesnim pravilima (sa označenim rečima). Ukoliko je $\varphi_i u$ kraj nekog dokaza, kažemo i: u je φ_i*–teorema*.

U vezi sa datim grupoidom definisati jednu viševrsnu formalnu teoriju sa $\Phi = \{\alpha, \beta\}$ čije će α–teoreme biti svi izrazi gradjeni od a, b, $\star$ koji imaju vrednost a, a β–teoreme oni izrazi koji imaju vrednost b.

$\star$	a	b
a	a	b
b	b	a

Uputstvo. Aksiome: αa, βb. Pravila:

$$\frac{\alpha u,\ \alpha v}{\alpha(u \star v)}, \quad \frac{\alpha u,\ \beta v}{\beta(u \star v)}, \quad \frac{\beta u,\ \alpha v}{\beta(u \star v)}, \quad \frac{\beta u,\ \beta v}{\alpha(u \star v)}$$

16. Nastavak prethodnog. Obrazovati viševrsnu formalnu teoriju sa $\Phi = \{t, \varphi\}$ čije t –, odnosno φ –teoreme su *termi*, odnosno *formule* gradjene pomoću znakova konstanata a, b, c, promenljivih $x_1, x_2, x_3, \ldots$, operacijskog znaka $\star$ dužine 2, relacijskog znaka α dužine 2 i logičkih znakova $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$.

17. Neka je $\mathcal{T}$ formalna teorija čije su aksiome $A_i (i \in I)$ a pravila su oblika

(☆) $$\frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_k}{\Phi}$$

Pretpostavimo da znak $\rightarrow$ ne pripada jeziku teorije $\mathcal{T}$. Novu teoriju $\mathcal{T}'$ napravimo ovako:

Njene formule su reči oblika

$$A, A \rightarrow B, \quad A \rightarrow B \rightarrow C, \ldots$$

pri čemu su $A, B, C, \ldots$ formule teorije $\mathcal{T}$. Kao aksiome uzimamo sve aksiome A_i teorije $\mathcal{T}$, i dalje u vezi sa svakim pravilom izvodjenja (☆) uzimamo aksiomu

$$\Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \Phi_k$$

Teorija $\mathcal{T}'$ ima jedino pravilo modus ponens (za $\rightarrow$)

$$\frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$$

Dokazati da za ma koju formulu A teorije $\mathcal{T}$ vredi ekvivalencija

$$\vdash_{\mathcal{T}} A \quad \text{akko} \quad \vdash_{\mathcal{T}'} A$$

Napomena. Drugim rečima, svaka formalna teorija može se dopuniti do formalne teorije koja ima samo jedno pravilo izvodjenja. To dopunjavanje nije kreativno, odnosno važi prethodna ekvivalencija, prema kojoj nije moguće da neka formula A teorije $\mathcal{T}$ bude teorema šire teorije $\mathcal{T}'$ a da ne bude teorema i polazne teorije.

18. Dokazati da je svaka formalna teorija ekvivalentna sa nekom teorijom koja ima tačno jednu aksiomu (ekvivalentne su u smislu da imaju iste skupove teorema).

19. Neka su $p_i (i \in I)$ znaci koje ćemo zvati *iskazna slova*. Dalje pretpostavljamo da smo na uobičajen način definisali *iskazne formule* gradjene pomoću p_i, $\top$, $\bot$, veznika $\wedge$, $\vee$, $\neg$ i znakova zagrada. Jednakosnu formalnu teoriju, u oznaci $\mathcal{B}$, uvodimo ovako. Njene formule su reči oblika $A = B$, gde su A, B iskazne formule. Aksiome su:

$$\begin{array}{rlrl}
A \vee A & = A & A \wedge A & = A \\
A \vee B & = B \vee A & A \wedge B & = B \wedge A \\
(A \vee B) \vee C & = A \vee (B \vee C) & (A \wedge B) \wedge C & = A \wedge (B \wedge C) \\
A \vee (A \wedge B) & = A & A \wedge (A \vee B) & = A \\
A \vee (B \wedge C) & = (A \vee B) \wedge (A \vee C) & A \wedge (B \vee C) & = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
A \vee \bot & = A & A \wedge \bot & = \bot \\
A \vee \top & = \top & A \wedge \top & = A \\
A \vee \neg A & = \top & A \wedge \neg A & = \bot
\end{array}$$

uz koje priključujemo i aksiomu jednakosti

$$A = A$$

Pravila izvodjenja su opšta pravila u vezi sa jednakošću

$$\frac{A=B}{B=A},\quad \frac{A=B,\ B=C}{A=C},\quad \frac{A=B}{\neg A=\neg B},\quad \frac{A=B,\quad C=D}{A \star C=B \star D} \qquad (\star \text{ je } \vee, \wedge).$$

Pri tome su A, B, C, D proizvoljne iskazne formule.

Dokazati:

(i) $A \vee C = B \vee C,\ A \wedge C = B \wedge C \vdash_{\mathcal{B}} A = B$

(ii) $A \vee B = \top,\ A \wedge B = \bot \vdash_{\mathcal{B}} B = \neg A$

(iii) $\vdash_{\mathcal{B}} \neg\neg A = A,\ \vdash_{\mathcal{B}} \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B,\ \vdash_{\mathcal{B}} \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

(iv) $\vdash_{\mathcal{B}} A = B$ akko $\vdash_{\mathcal{B}} (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) = \top$

(v) $\vdash_{\mathcal{B}} A(p) = (A(\top) \wedge p) \vee (A(\bot) \wedge \neg p)$,

U (v) je $A(p)$ iskazna formula a $A(\top)$, $A(\bot)$ su nastale iz nje zamenom slova[1] p sa $\top$, odnosno sa $\bot$. Slične jednakosti vrede i u slučaju više iskaznih slova.

Uputstvo. Mogu se izvesti dokazi poput dokaza odnosnih tvrdjenja u tački XIV. U vezi sa (i), (ii), (iii), (iv) videti zadatke 3, 4, 5, 7 a u vezi sa (v) zadatke 37, 38 pomenute tačke. Istina, u ovom slučaju dokazi treba da budu podrobniji (sa više pisanja).

20. Nastavak prethodnog. Neka je $F(p_1, \ldots, p_n)$ iskazna formula po slovima $p_1, \ldots, p_n$ i veznicima[2] $\wedge, \vee, \neg$. Dokazati:

Formula F je tautologija akko odgovarajuća formula $F = \top$ teorije $\mathcal{B}$ je teorema te teorije.

Uputstvo. Ako je $\vdash_{\mathcal{B}} F = \top$, lako se dokazuje da je F tada tautologija. Radi dokaza obrata, recimo za $n = 2$, može se koristiti ova jednakost

$$F(p_1,p_2) = (F(\top,\top) \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (F(\top,\bot) \wedge p_1 \wedge \neg p_2)$$
$$\vee (F(\bot,\top) \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (F(\bot,\bot) \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$$

koja je teorema teorije $\mathcal{B}$.

Napomena. Prema dokazanom stavu formalna teorija $\mathcal{B}$ može poslužiti da se njome formalno, odnosno potpuno aksiomatski opiše skup svih tautologija (po slovima $p_1, p_2, \ldots$). Tautologijama odgovaraju teoreme oblika $A = \top$. Medjutim, na

---

[1] A(p) može imati i neka druga iskazna slova pored p, a može i nesadržati p. Tada su $A(\top)$, $A(\bot)$ upravo A(p).

[2] Možemo uzeti da F ima i veznike $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ pretpostavljajući da su oni ovako definisani pomoću $\wedge$, $\vee$, $\neg$:
$A \Rightarrow B$ je zamena za $\neg A \vee B$, $A \Leftrightarrow B$ je zamena za $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

osnovu prethodnog zadatka, deo (iv), zaključujemo da i ma kojoj drugoj teoremi oblika $A = B$ takodje odgovara po jedna tautologija. Naime, to je iskazna formula oblika $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$, odnosno $A \Leftrightarrow B$. Napomenimo još da je u literaturi poznato više načina formalnog zasnivanja tautologija. U skoro svakoj knjizi navedene *Literature* razmatra se po jedan takav način. Videti i naredni zadatak.

21. Neka je $\mathcal{L}$ formalna teorija čije su formule sve iskazne formule obrazovane od izvesnih iskaznih slova i logičkih veznika[1] $\Rightarrow$, $\neg$. Aksiome su formule

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Pravilo izvodjenja je modus ponens: $\dfrac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$.

Pri tome su A, B, C ma koje iskazne formule. Teoriju $\mathcal{L}$ zvaćemo *iskazni račun*[2]. Dokazati da je $A \Rightarrow A$ teorema u $\mathcal{L}$.

22. Dokazati *stav dedukcije* za račun $\mathcal{L}$, tj.

$$\mathcal{F}, A \vdash B \leftrightarrow \mathcal{F} \vdash A \Rightarrow B \quad (A, B \text{ su formule, } \mathcal{F} \text{ skup formula}).$$

Uputstvo. Dokaz zdesna nalevo se izvodi neposredno, a sleva nadesno teče indukcijom po n – dužini najkraćeg dokaza:

$$F_1, F_2, \ldots, F_n \quad (F_n \text{ je } B)$$

formule B iz hipoteza $\mathcal{F}, A$. Pri tome se razlikuju slučajevi: B je aksioma, B je iz $\mathcal{F}$, B je A, B sledi po modus ponensu po nekim prethodnim članovima dokaza.

23. Korišćenjem stava dedukcije dokazati da su naredne formule teoreme računa $\mathcal{L}$

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$, $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$, $\neg\neg A \Rightarrow A$, $A \Rightarrow \neg\neg A$,

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg (A \Rightarrow B))$.

24. Dokazati da relacija $\vdash$ (računa $\mathcal{L}$) ima naredna svojstva

(i) $\vdash A,\ A \vdash B \rightarrow\ \vdash B$, (ii) $A \vdash B,\ B \vdash C \rightarrow A \vdash C$

(iii) $A \vdash B \rightarrow \neg B \vdash \neg A$, (iv) $\neg B \vdash \neg A \rightarrow A \vdash B$

(A, B, C ma koje iskazne formule).

25. Dokazati naredna tvrdjenja (koja su u vezi sa istinitosnom tablicom implikacije)

$A, B \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B$; $\neg A, B \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B$; $\neg A, \neg B \vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow B$; $A, \neg B \vdash_{\mathcal{L}} \neg (A \Rightarrow B)$

26. Dokazati tvrdjenja (za ma koje iskazne formule A, B):

---

[1] Ostali veznici se definišu: $A \vee B$ je $\neg A \Rightarrow B$, $A \wedge B$ je $\neg (A \Rightarrow \neg B)$, $A \Leftrightarrow B$ je $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

[2] Račun $\mathcal{L}$ potiče od Fregea (G o t t l o b F r e g e, 1848–1920) i Lukaševića (J a n L u k a s i e w i c z, 1878–1956).

(i) $A, B \vdash_{\mathcal{L}} A \wedge B$; $A, \neg B \vdash_{\mathcal{L}} \neg (A \wedge B)$; $\neg A, B \vdash_{\mathcal{L}} \neg (A \wedge B)$

$\neg A, \neg B \vdash \neg (A \wedge B)$

(ii) $A, B \vdash_{\mathcal{L}} A \vee B$; $A, \neg B \vdash_{\mathcal{L}} A \vee B$; $\neg A, B \vdash_{\mathcal{L}} A \vee B$; $\neg A, \neg B \vdash_{\mathcal{L}} \neg (A \vee B)$

(iii) $A, B \vdash_{\mathcal{L}} A \Leftrightarrow B$; $A, \neg B \vdash_{\mathcal{L}} \neg (A \Leftrightarrow B)$

$\neg A, B \vdash_{\mathcal{L}} \neg (A \Leftrightarrow B)$; $\neg A, \neg B \vdash_{\mathcal{L}} A \Leftrightarrow B$

27. Neka F^{α} (α je $\top$ ili $\bot$) bude oznaka za formulu F, odnosno $\neg F$. Dokazati tzv. *Kalmarovu*[1] *lemu:*

$$v_1^{\alpha_1}, \ldots, v_k^{\alpha_k} \vdash F(v_1, \ldots, v_k)^{F(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)} \quad (\alpha_i \in \{\top, \bot\})$$

Pri tome su $v_1, \ldots, v_k$ sva slova formule F.

Uputstvo. Dokaz se izvodi indukcijom po broju logičkih znakova formule F.

28. Dokazati tzv. *stav potpunosti* računa $\mathcal{L}$;

Formula računa $\mathcal{L}$ *je teorema akko je tautologija.*

Uputstvo. Da je svaka teorema tautologija proizlazi iz činjenice što su aksiome tautologije i što modus ponens čuva tautologičnost. U vezi sa obratom dokazati najpre tvrdjenje:

Ako $\mathcal{F}, A \vdash B$ *i* $\mathcal{F}, \neg A \vdash B$, *onda* $\mathcal{F} \vdash B$ (A, B formule, $\mathcal{F}$ skup formula)
a potom iskoristiti Kalmarovu lemu.

Primedba. Posledica stava potpunosti je *odlučivost* iskaznog računa, jer za utvrdjivanje tautologičnosti neke iskazne formule postoji efektivan postupak, recimo postupak obrazovanja istinitosne tablice.

29. Neka je $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ ma koja predikatska formula čije su sve slobodne promenljive $x, y_1, \ldots, y_n$. Sa $\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n)$, prema Hilbertu, označavamo term po promenljivim $y_1, \ldots, y_n$ koji treba da služi sledećem: Ako postoji x takav da važi

$$F(x, y_1, \ldots, y_n)$$

tada smatramo i da je $\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n)$ jedan od takvih x–ova (jedan „istaknuti", „najbolji"). Strože rečeno, usvajamo ovaj logički zakon[2]

(☆) $$(\exists x) F(x, y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow F(\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)$$

Koristeći taj zakon dokazati formule

$$(\exists x) F(x, y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow F(\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)$$

$$(\forall x) F(x, y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow F(\epsilon_x \neg F(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)$$

$$F(t, y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow F(\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n) \quad (t \text{ je neki term})$$

[1] Laszlo Kalmar (r. 1905).

[2] Termom $\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n)$, može se tako reći, obavlja se sveopšti izbor, odnosno navedeni logički zakon izražava opšte pravilo (C), odnosno (C_f), jer ta su se pravila odnosila na odredjenu (istina ma koju) interpretaciju (videti tačku XII V a l j a n e f o r m u l e).

30. Nastavak prethodnog. Dokazati formule

$$(\exists x)\, F(x, y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow F(\epsilon_y\, F(y, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)$$

$$(\exists x)\, F(x, y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow F(\epsilon_z\, F(z, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n),$$

gde su y, z promenljive koje ne učestvuju u $F(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Uputstvo. Važi ekvivalencija $(\exists x)\, F(x, \ldots) \Longleftrightarrow (\exists z)\, F(z, \ldots)$.

Napomena. Prema prethodnim implikacijama u vezi sa formulom $(\exists x)\, F(x, y_1, \ldots, y_n)$ može se napraviti više „istaknutih" predstavnika po x. To je očito neprirodno i proističe otuda što term $\epsilon_x\, F(x, y_1, \ldots, y_n)$ u svom zapisu sadrži x. Iz istog razloga u radu sa zapisima oblika $\epsilon_x\, F(x, y_1, \ldots, y_n)$ treba biti obazriv pri zamenjivanju promenljivih. Recimo, ako je $f(y)$ neki term sa promenljivom y, tada se zamenjujući y sa x dobija $f(x)$ – term sa promenljivom x. Medjutim, ako recimo u zapisu $\epsilon_x\, \alpha(x,y)$ zamenimo y sa x dobićemo $\epsilon_x\, \alpha(x, x)$ što predstavlja „istaknutu konstantu", a ne term po x. Pitanje je kako napraviti neku dosetljivu konstrukciju kojom se otklanjaju ti nedostaci, odnosno kojom se pri prelazu od $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ na $\epsilon_x\, F(x, y_1, \ldots, y_n)$ „gubi" x. Ukratko izlažemo jedan takav način prema knjizi [5]. Tu se radi obrazovanja $\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n)$ koriste dva pomoćna znaka[1] ϵ i $\square$. Naime, prethodno se od $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ predje na $\epsilon F(x, y, \ldots, y_n)$ – dopisivanjem ϵ ispred formule. Zatim se x svuda zameni sa $\square$ i najzad se znak ϵ poveže spojnicama sa svakim znakom $\square$. Recimo, ako je $F(x, y)$ formula $(\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(y, x))$, tada $\epsilon_x\, F(x, y)$, $\epsilon_z\, F(z, y)$ su:

$$\epsilon\, (\alpha\, (\square, y) \Rightarrow \alpha\, (y, \square))$$

Nije teško uvideti da su i uopšte $\epsilon_x\, F(x, y_1, \ldots, y_n)$, $\epsilon_z\, F(z, y_1, \ldots, y_n)$ isti zapisi, isti termi. Takodje je lako uvideti da je dozvoljeno zamenjivanje promenljivih $y_1, \ldots, y_n$ ma kojim termima $t_1, \ldots, t_n$ – bez opasnosti konfuzije.

31. Neka je L skup izvesnih znakova konstanata, operacijskih i relacijskih znakova. Sa $\mathcal{G}_L$ označimo skup svih predikatskih formula bez kvantora (tj. iskazne vrste) sagradjenih pomoću jezika L uz proizvodjenje novih terma primenom ϵ–operatora[2]. Izvesne formule skupa $\mathcal{G}_L$ uzimamo kao aksiome. To su najpre sve formule nastale iz tautologija[3] zamenama (iskaznih slova članovima iz $\mathcal{G}_L$). Dalje, aksiome su i sve

[1] Istina u [5] umesto ϵ stoji τ.

[2] Skup $\mathcal{G}_L$ se može definisati ovako (tu se javljaju dva predikata „je izraz", „je formula" – videti zadatke 15, 16):
Znaci konstanata i promenljive su termi.
Ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi i f operacijski znak dužine n, onda je $f(t_1, \ldots, t_n)$ term.
Ako su $t_1, \ldots, t_n$ termi i α relacijski znak dužine n, onda je $\alpha(t_1, \ldots, t_n)$ formula.
Ako su A,B formule, onda su formule i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Longleftrightarrow B)$, $\neg A$.
Ako je $A(x, y_1, \ldots, y_n)$ formula čije su sve promenljive $x, y_1, \ldots, y_n$, onda je $\epsilon_x\, A(x, y_1, \ldots, y_n)$ term, gde $\epsilon_x\, A(x, y_1, \ldots, y_n)$ gradimo kao u prethodnoj Napomeni (pomoću ϵ i $\square$).
Značajno je da term $\epsilon_x\, A(x, \ldots)$ uopšte ne sadrži x.

[3] U skladu sa zadatkom 21, umesto svih tautologija dosta je uzeti ove shema-aksiome
$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

formule oblika

$$(\epsilon) \qquad F(t, y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow F(\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)$$

gde su $x, y_1, \ldots, y_n$ sve promenljive formule $F(x, y_1, \ldots, y_n)$, a t je ma koji term.

Najzad, kao pravilo izvodjenja uzimamo samo modus ponens. U opisanoj formalnoj teoriji $\mathcal{K}_\epsilon$ kvantore naknadno uvodimo ovako

$(\exists x) F(x, y_1, \ldots, y_n)$ je zamena za $F(\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)$

$(\forall x) F(x, y_1, \ldots, y_n)$ je zamena za $\neg (\exists x) \neg F(x, y_1, \ldots, y_n)$

Da li su teoreme formule

$$(\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,x)) \Rightarrow (\alpha(x, \epsilon(\alpha(x,\square) \wedge \alpha(\square, x))) \wedge \alpha(\epsilon(\alpha(x,\square) \wedge \alpha(\square, x)), x))$$

$$\beta(\epsilon(\alpha(x,\square) \wedge \alpha(\square, x))) \vee \neg\beta(\epsilon(\alpha(x,\square) \wedge \alpha(\square, x)))$$

$$\beta(\epsilon\alpha(\epsilon\alpha(\square, \square), \square)) \vee \neg\beta(\epsilon\alpha(\epsilon\alpha(\square, \square), \square))$$

Rešenje. Jesu. Naime, $\epsilon(\alpha(x, \square) \wedge \alpha(\square, x))$ je ustvari $\epsilon_y (\alpha(x, y) \wedge \alpha(y, x))$, pa je prva formula slučaj aksiome[1)]

$$F(t) \Rightarrow F(\epsilon_x F(x))$$

Term $\epsilon_y (\alpha(x, y) \wedge \alpha(y, x))$ je, u stvari, term po promenljivoj x. Označimo ga stoga sa $f(x)$. Tada druga formula postaje

$$\beta(f(x)) \vee \neg\beta(f(x))$$

a to je očigledno slučaj tautologije $p \vee \neg p$. Slično, u vezi sa trećom formulom, term

$$\epsilon\alpha(\epsilon\alpha(\square, \square), \square)))$$

je $\epsilon_x \alpha(\epsilon\alpha(\square, x)), x)$, odnosno $\epsilon_x \alpha(\epsilon_y \alpha(y, x), x)$. Kako je $\epsilon_y \alpha(y,x)$, tj. $\epsilon\alpha(\square, x)$ term po x, označimo ga sa $g(x)$. Tada se $\epsilon_x \alpha(\epsilon_y \alpha(y, x), x)$ zapisuje u obliku $\epsilon_x \alpha(g(x), x)$, a to je dalje $\epsilon\alpha(g(\square), \square)$, tj. znak konstante. Uvedimo za nju oznaku c. Treća formula tada postaje $\beta(c) \vee \neg\beta(c)$ što je ponovo slučaj tautologije $p \vee \neg p$.

Napomena. Često je podesno terme oblika $\epsilon_x F(x, y_1, \ldots, y_n)$ preznačavati na uobičajeniji oblik $f(y_1, \ldots, y_n)$ uvodeći pri tom po nov funkcijski znak f.

32. Dokazati da u računu $\mathcal{K}_\epsilon$ važi *stav dedukcije*, tj.

$$\mathcal{F}, A \underset{\mathcal{K}_\epsilon}{\vdash} B \longleftrightarrow \mathcal{F} \underset{\mathcal{K}_\epsilon}{\vdash} A \Rightarrow B$$

Pri tome su A, B formule, a $\mathcal{F}$ skup izvesnih formula tog računa.

Rešenje. Dokaz neposredno sledi na osnovu iskaznog stava dedukcije izloženog u tački XVII *Počeci teorije modela*, zadatak 16. Zaista:

---

1) Formula F može imati i neke druge promenljive koje oznakom F(x) nisu istaknute. Slično skraćeno pisanje koristimo i u daljem.

$$\mathcal{F}, A \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} B \longleftrightarrow \text{ U iskaznom računu: } \mathcal{F}, A, Dod.aks.^{1)} \vdash B$$
(Definicija računa $\mathcal{K}_\epsilon$)
$$\longleftrightarrow \text{ U iskaznom računu: } \mathcal{F}, Dod.\ aks. \vdash A \Rightarrow B$$
(Prema iskaznom stavu dedukcije)
$$\longleftrightarrow \mathcal{F} \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} A \Rightarrow B$$

33. Dokazati naredna meta–tvrdjenja (A, B, ..., su formule)

$\neg B \Rightarrow \neg A \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} A \Rightarrow B$ (Pravilo kontrapozicije)

$\neg A \Rightarrow R \wedge \neg R \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} A$ (Pravilo svodjenja na protivrečnost)

$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} A \Rightarrow C$ (Pravilo tranzitivnosti implikacije)

$A \Longleftrightarrow B, B \Longleftrightarrow C \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} A \Longleftrightarrow C$ (Pravilo tranzitivnosti ekvivalencije)

$A_1 \vee A_2, A_1 \Rightarrow B, A_2 \Rightarrow B \vdash_{\mathcal{K}_\epsilon} B$ (Pravilo razlikovanja slučajeva)

Uputstvo. Ako se $\neg B \Rightarrow \neg A$ pridruži kao dodatna aksioma računa $\mathcal{K}_\epsilon$, tj. kao hipoteza, tada je

$$\neg B \Rightarrow \neg A,\ (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B),\ A \Rightarrow B$$

jedan dokaz iz hipoteza za $A \Rightarrow B$ (prva formula je hipoteza, druga je tautologija, a treća sledi iz prve i druge po modus ponensu). Slično se dokazuju i ostala tvrdjenja.

33. Neka su A, B ma koje formule. Tada su

$A(t) \Rightarrow (\exists x)\, A(x),\ (\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(t)$ (t je proizvoljan[2] term)

$(\exists x)\, (A \vee B) \Longleftrightarrow (\exists x) A \vee (\exists x) B,\ (\forall x)\, (A \wedge B) \Longleftrightarrow (\forall x) A \wedge (\forall x) B$

$(\exists x)(\exists y) A \Longleftrightarrow (\exists y)\, (\exists x) A,\ (\forall x)\, (\forall y) A \Longleftrightarrow (\forall y)(\forall x) A$

teoreme računa $\mathcal{K}_\epsilon$. Dokazati.

Uputstvo. Prva formula je, u stvari, aksioma, druga je njena kontrapozicija. U vezi sa trećom dosta je dokazati dve implikacije

$$(\exists x)\, (A \vee B) \Rightarrow (\exists x)\, A \vee (\exists x) B, \quad (\exists x) A \vee (\exists x) B \Rightarrow (\exists x)\, (A \vee B)$$

Prva sledi na osnovu ovog implikacijskog lanca

---

[1] Sa D o d. a k s. smo označili formule oblika $F(t) \Rightarrow F(\epsilon_x F(x))$.

[2] Primećuje se da se ne traži nikakav uslov o termu t kao „t ne napada x". Razlog je što formula A uopšte ne može imati vezanih promenljivih.

$(\exists x)(A(x) \vee B(x))$

$\Rightarrow A(\epsilon_x(A \vee B)) \vee B(\epsilon_x(A \vee B))$

(Slučaj aksiome (ϵ))

$\Rightarrow A(\epsilon_z A) \vee B(\epsilon_x B)$

(Jer $A(\epsilon_x (A \vee B)) \Rightarrow A(\epsilon_x A)$, $B(\epsilon_x (A \vee B)) \Rightarrow B(\epsilon_x B)$ su aksiome. Pored toga tu koristimo i saglasnosti implikacije sa disjunkcijom)

$\Rightarrow (\exists x) A(x) \vee (\exists x) B(x)$

(Definicija kvantora)

a druga na osnovu ovih dveju teorema

$$(\exists x)A \Rightarrow (\exists x)(A \vee B), \quad (\exists x)B \Rightarrow (\exists x)(A \vee B)$$

koje se lako izvode. Dalje. četvrta formula se dobija neposredno iz treće, a u vezi sa petom dosta je dokazati implikaciju

$$(\exists x)(\exists y) A(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x) A(x,y)$$

Radi lakšeg rasudjivanja pretpostavimo da formula A pored x, y ima još jedino promenljivu z. Tada, korišćenjem definicije kvantora $\exists$ i uvodjenjem oznaka $f(x,z)$, $g(z)$ za terme $\epsilon_y A(x, y)$, $\epsilon_x A(x, f(x, z))$, najpre izvodimo

(1) $$(\exists x)(\exists y) A(x,y) \Rightarrow A(g(z), f(g(z), z))$$

a potom dvostrukom primenom aksiome (ϵ) i definicije kvantora izvodimo

(2) $$A(g(z), f(g(z), z)) \Rightarrow (\exists y)(\exists x) A(x, y)$$

Iz (1) i (2) sledi naznačena implikacija. Najzad, poslednja, šesta formula neposredno sledi iz pete.

34. Za proizvoljnu formulu $A(x)$ vredi ovakvo meta–tvrdjenje

$$\vdash_{\mathcal{K}\epsilon} A(x) \rightarrow \vdash_{\mathcal{K}\epsilon} (\forall x) A(x)$$

Dokazati.

Uputstvo. Ukoliko se u dokazu formule $A(x)$ promenljiva x svuda zameni nekim termom t, dobiće se dokaz za formulu $A(t)$. Posebno, ako je t baš $\epsilon_x \neg A(x)$ polazni dokaz prelazi u dokaz za $(\forall x) A(x)$.

35. Neka su A, B proizvoljne formule, a q kvantor. Dokazati meta–tvrdjenja:

$$\vdash_{\mathcal{K}\epsilon} A \Rightarrow B \rightarrow \vdash_{\mathcal{K}\epsilon} (qx)A \Rightarrow (qx)B$$

$$\vdash_{\mathcal{K}\epsilon} A \Leftrightarrow B \rightarrow \vdash_{\mathcal{K}\epsilon} (qx)A \Leftrightarrow (qx)B$$

36. Da li je formula F tačna u odnosu na navedenu interpretaciju (sa D je označen domen):

(i) F je $\alpha(x) \Rightarrow \alpha(\epsilon_x \alpha(x))$, D je N, α je „biti prosto broj" $\epsilon_x \alpha(x)$ je broj 3.

(ii) F je ista kao pod (i), D je N, α je „biti najveći prirodan broj", $\epsilon_x \alpha(x)$ je 3.

(iii) F je $\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(\epsilon_x\, \alpha(x, y), y)$, D je R, α je relacija $<$, $\epsilon_x\, \alpha(x, y)$ je $y-1$.

Odgovor je potvrdan.

37. Da li je data formula ϵ – tačna u odnosu na datu interpretaciju, tj. da li postoje još i tumačenja ϵ – terma (kao operacija odgovarajućih dužina domena), tako da je zadovoljena data formula kao i odgovarajuće (ϵ) aksiome[1] računa $\mathcal{K}_\epsilon$.

(i) $\alpha(\epsilon_x\, \alpha(x, x), y)$, domen je N, α je $|$ (deljivost),

(ii) $\beta(\epsilon_x\, \alpha(x)) \vee \alpha(\epsilon_x\, \beta(x))$, domen je $\{1, 2, 3\}$, α je „biti različit od 1", β je „biti različit od 2".

Uputstvo. (i) Pitanje je da li postoji neka konstanta c iz N – interpretacija za $\epsilon_x\, \alpha(x, x)$, tako da važe uslovi:

$$\alpha(c, y), \qquad \alpha(x, x) \Rightarrow \alpha(c, c)$$

za sve $x, y \in N$. Odgovor je potvrdan. Dosta je za c uzeti 1.

(ii) Treba izabrati dve konstante c_1, c_2 – interpretacije redom za $\epsilon_x \alpha(x)$, $\epsilon_x\, \beta(x)$. tako da važe uslovi

$$\beta(c_1) \vee \alpha(c_2), \quad \alpha(x) \Rightarrow \alpha(c_1), \quad \beta(x) \Rightarrow \beta(c_2)$$

Odgovor je potvrdan.

38. Da li je ϵ – tačna formula $\alpha(x, \epsilon_y\, \alpha(x, y))$ pri interpretaciji: domen je N, α je $\neq$?

39. Opisati sve ϵ – modele datih formula

$1°$ $\alpha(\epsilon_x\, \alpha(x))$, $2°$ $\neg\, \alpha(\epsilon_x\, \alpha(x))$, $3°$ $\alpha(\epsilon_x \neg\, \alpha(x))$, $4°$ $\alpha(x) \Rightarrow \alpha(\epsilon_x \alpha(x))$

Rešenje. $1°$ Za domen D se može uzeti ma koji neprazan skup, a za α ma koja njegova relacija dužine 1 koja nije prazna. (Tada se za $\epsilon_x\, \alpha(x)$ može uzeti ma koji element iz D koji je u relaciji α.)

$2°$ D je ma koji neprazan skup, α je prazna relacija. (Za $\epsilon_x\, \alpha(x)$ se može uzeti ma koji element domena.)

$3°$ D je proizvoljan neprazan skup, a α njegova puna relacija. ($\epsilon_x \neg \alpha(x)$ je ma koji element iz D.)

Promenimo još da se formule $1°$, $2°$, $3°$ upotrebom kvantora zapisuju po redu:

$$(\exists x)\alpha(x), \quad \neg(\exists x)\alpha(x), \quad (\forall x)\alpha(x)$$

$4°$ Ta je formula uvek ϵ – tačna, tj. za svaki neprazan domen i svaku njegovu rela-

---

[1] Možemo se ograničiti na aksiome oblika $F(x) \Rightarrow F(\epsilon_x\, F(x))$, jer ispunjenost takve formule (u odnosu na utvrdjenu interpretaciju) povlači ispunjenost i formule $F(t) \Rightarrow F(\epsilon_x F(x))$ za proizvoljan term t.

ciju α dužine 1 postoji izbor konstante $\epsilon_x\ \alpha(x)$, tako da vredi data formula. Ona je, u stvari, jedna od (ϵ) aksioma.

40. Opisati neki ϵ – model formule

(1) $$\alpha(x, f(y)) \Rightarrow \neg\alpha(\epsilon_y\, \alpha(x, y), y)$$

Uputstvo. Pored date formule uočimo i (ϵ) aksiomu:

(2) $$\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(x, \epsilon_y\, \alpha(x, y))$$

Označimo $\epsilon_y\ \alpha(x,y)$ kraće sa $g(x)$. Formule (1) i (2) postaju

(3) $$\alpha(x, f(y)) \Rightarrow \neg\alpha(g(x), y), \quad \alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(x, g(x))$$

Neka je $(D, \bar{f}, \bar{g}, \bar{\alpha})$ ma koji model formula (3) u običnom smislu (kao predikatskih formula na jeziku: f, g, α). Tada je $(D\ \bar{f}, \bar{\alpha})$ ϵ–modela date formule. Otuda se do jednog ϵ–modela može doći, recimo, obrazovanjem nekog term–modela generisanog datim nepraznim skupom Γ (videti zadatke 44, 45, 46 tačke XVII).

Napomena. Odredjivanje svih ϵ–modela formule (1) prevodi se na odredjivanje svih modela (u običnom smislu) formula (3). O tome videti zadatke 26, 27, tačke XVII.

41. Opisati sve ϵ– modele formule

$$\alpha(\epsilon_x\,(\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(y, x)), x) \Rightarrow \alpha(\epsilon_y\, \alpha(y,x), y)$$

Uputstvo. Zadatak prevesti na odredjivanje svih običnih modela formula

$$\alpha(f(y), x) \Rightarrow \alpha(g(x), y)$$
$$(\alpha(x, y) \Rightarrow \alpha(y, x)) \Rightarrow (\alpha(f(y), y) \Rightarrow \alpha(y, f(y)))$$
$$\alpha(y, x) \Rightarrow \alpha(g(x), y)$$

gde su $f(y)$, $g(x)$ nove oznake odgovarajućih ϵ – terma.

42. Dokazati da je data formula ϵ–valjana

$$\alpha(\epsilon_x \neg\alpha(x)) \Rightarrow \alpha(x), \quad \alpha(x) \Rightarrow \alpha(\epsilon_y\,(\alpha(x) \Rightarrow \alpha(y)))$$

Uputstvo. Videti zadatak 39, pod 4°.

43. Neka je $\mathcal{F}$ neprotivurečan skup formula računa $\mathcal{K}_\epsilon$, tj. nije tačno da $\mathcal{F} \vdash \bot$, gde je $\bot$ oznaka za neku kontradikciju. Dokazati da je tada neprotivurečan i skup $\mathcal{F}, A$ ili skup $\mathcal{F}, \neg A$.

Uputstvo. Koristeći stav dedukcije (zadatak 32) dokazati da iz $\mathcal{F}, A \vdash \bot$ i $\mathcal{F}, \neg A \vdash \bot$ sledi $\mathcal{F} \vdash \bot$, što je nemoguće.

44. Dokazati da se svaki neprotivurečan skup $\mathcal{F}$ (formula računa $\mathcal{K}_\epsilon$) može dopuniti do takvog maksimalnog skupa, tj. skupa koji nije pravi podskup nijednog neprotivurečnog skupa formula.

Uputstvo. Postupiti slično kao u zadatku 27 tačke XVII dokazujući prethodno:

Ako nije $\mathcal{F} \vdash A$, *onda je* $\mathcal{F}, \neg A$ *neprotivurečan skup.*

45. Dokazati *stav postupnosti* (I oblik):

Skup formula $\mathcal{F}$ *(računa* $\mathcal{K}_\epsilon$ *) je neprotivurečan akko ima* $\mathcal{F}$ *bar jedan* ϵ – *model.*

Uputstvo. Deo *Ako* se neposredno dokazuje. U vezi sa *Samo, ako* od $\mathcal{F}$ preći na $\mathcal{F}_\epsilon$ dodajući razne (ϵ) aksiome[1] oblika $F(x) \Rightarrow F(\epsilon_x F(x))$. Uzeti skup $\Gamma = \{a\}$ (ukoliko $\mathcal{F}_\epsilon$ nema nikakvih znakova konstanta), gde je a nov znak konstante i obrazovati skup $\mathcal{F}_\epsilon | T$, odnosno skup svih formula koje nastaju iz $\mathcal{F}_\epsilon$ kada se promenljive na sve moguće načine zamene članovima iz T, tj. termima gradjenim od a, znakova konstanata i operacijskih znakova iz $\mathcal{F}$ kao i ϵ–termima učestvujućim u $\mathcal{F}$. Skupovi $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}_\epsilon|_T$ su takodje neprotivurečni. Dalje, od ma kog običnog modela za $\mathcal{F}_\epsilon|_T$ skraćenjem nastaje model za $\mathcal{F}$. Najzad, skup $\mathcal{F}_\epsilon|_T$ dopuniti do maksimalnog neprotivurečnog skupa Φ i uveriti se da taj skup ima term–model (sa svojim termima) kod koga su relacije ovako uvedene:

$$\tau\,\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \top \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Phi \vdash \varphi(t_2, \ldots, t_n)$$

46. Dokazati stav potpunosti (II oblik)

Formula F (računa $\mathcal{K}_\epsilon$*) je* ϵ – *valjana akko je ona teorema u* $\mathcal{K}_\epsilon$.

Uputstvo. Neka je F ϵ – valjana i pretpostavimo da F nije teorema za $\mathcal{K}_\epsilon$. Tada je neprotivurečan skup $\{\neg F\}$ pa, prema prethodnom stavu, ima model, što nije moguće budući da bi to bio model i za F i za $\neg F$.

47. Neka je $\mathcal{F}$ skup formula, a A formula računa $\mathcal{K}_\epsilon$. Dokazati ekvivalenciju

$$\mathcal{F} \vdash A \quad akko \quad \mathcal{F} \models A,$$

gde je $\mathcal{F} \vdash A$ znači da je A sintaktička posledica iz $\mathcal{F}$, tj. A je dokaziva u $\mathcal{K}_\epsilon$ kada se aksiomama tog računa pridruže formule $\mathcal{F}$ kao hipoteze, a $\mathcal{F} \models A$ znači da je A semantička posledica iz $\mathcal{F}$, tj. da je A ϵ – tačna na svakom ϵ – modelu skupa $\mathcal{F}$.

Završna napomena. U zadacima 31–47 upoznali smo jedan način aksiomatskog zasnivanja valjanih formula, kaže se i formalizacije *predikatskog računa I reda*[2]. U tom zasnivanju osnovnu ulogu ima Hilbertov ϵ–operator.[1] Predikatski račun I reda se koristi kao osnova za strogo aksiomatsko izlaganje raznih matematičkih teorija (na primer raznih aksiomatskih teorija skupova, formalne aritmetike idr.). Skup Ax aksioma takve teorije je skup nekih predikatskih formula. Teoreme su onda one formule koje

[1] Videti zadatak 37.

[2] U slučaju takvog računa sa jednakošću usvaja se, pored opštih aksioma jednakosti (videti tačku VI J e d n a k o s n i d o k a z i), još i ova dodatna aksioma o ϵ – termima

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \epsilon_x A = \epsilon_x B \qquad \text{(A, B su ma koje formule)}$$

su dokazive pomoću Ax kao hipoteza, uz upotrebu aksioma predikatskog računa i odgovarajućih pravila izvodjenja. Ako se koristi aksiomatizacija $\mathcal{K}_\epsilon$ koju smo naveli, tada je jedino pravilo izvodjenja modus ponens:

$$\frac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$$

Medjutim, ako se recimo, koristi aksiomatizacija sa aksiomama navedenim[1] u zadatku 21 dopunjenim sa još dvema aksiomama

$(\forall x)\, A(x) \Rightarrow A(t)$ (term t „ne napada" x u formuli $A(x)$,

$(\forall x)\, (A \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)\, B(x))$ (x nije slobodna u A)

tada se kao pravila uzimaju modus ponens i *generalizacija:*

$$\frac{A}{(\forall x)\, A}$$

Tako dopunjena formalna teorija se obično naziva *predikatski račun* $\mathcal{K}$.
U vezi sa dokazima pomenimo da se obično ne izlažu dokazi koji su potpuno formalni, tj. u kojima se koriste isključivo formule Ax, odnosno odabrane aksiome predikatskog računa i odgovarajuća pravila. U gradjenju dokaza pridržavamo se onoga što smo naveli na samom početku uvodnog teksta ove tačke. Naravno, svaki takav dokaz se može lako preraditi, dopuniti do odgovarajućeg formalnog dokaza.

[1] S tim što sada znake A, B, C koji učestvuju u aksiomama treba shvatiti kao zamene ma kojih predikatskih formula.

XIX RAZNI PRIMERI

1. Dokazati implikaciju (o realnim brojevima)

$$(\star) \qquad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow b^2 - 4\,ac \geqslant 0$$

Rešenje. Dokaz je, recimo, ovaj implikacijski lanac

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \\
&\quad \text{(Množenje sa } 4a\text{)} \\
&\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0 \\
&\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \\
&\Rightarrow b^2 - 4ac \geqslant 0
\end{aligned}
$$

2. Dokazati da za ma koje realne brojeve a, b, c vredi implikacija

$$a + b + c = 0 \Rightarrow b^2 - 4\,ac \geqslant 0$$

Uputstvo. U formuli ($\star$) iz prethodnog zadatka zameniti 1 umesto x.

3. Neka je x ma koje realno rešenje jednačine $x^3 + px + q = 0$, gde su p, q realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$p^2 - 4\,xq \geqslant 0$$

4. Neka realna kvadratna jednačina

$$x^2 + px + q = 0$$

ima realan koren x. Dokazati da x zadovoljava nejednakost

$$(p + t)^2 - 4(q - tx) \geqslant 0$$

gde je t ma koji realan broj.

Uputstvo. Datu jednačinu svesti na ekvivalentan oblik:

$$x^2 + (p + t)x + (q - tx) = 0$$

i potom primeniti formulu ($\star$) zadatka 1.

5. Dokazati implikaciju

$$a > 0 \wedge ax^2 + bx + c \leqslant 0 \Rightarrow b^2 - 4\,ac \geqslant 0 \qquad (a, b, c, x \in R)$$

6. Koristeći ekvivalenciju

$$((\exists\ x \in R)x^2 = a) \Longleftrightarrow a \geqslant 0$$

dokazati: Realna kvadratna jednačina (po x) $x^2 + px + q = 0$ ima bar jedno realno rešenje ako i samo ako $p^2 - 4q \geqslant 0$.

Rešenje. Dokaz sledi iz ovog ekvivalencijskog lanca

$$(\exists x \in R) x^2 + px + q = 0$$
$$\Longleftrightarrow (\exists x \in R) x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$
$$\Longleftrightarrow (\exists x \in R) (x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$$
$$\Longleftrightarrow \frac{p^2}{4} - q \geqslant 0.$$

7. Dokazati implikaciju o realnim brojevima

$$((\exists x \in R)\ x^2 = a \wedge (\exists x \in R)\ x^2 = b) \Rightarrow (\exists x \in R)\ x^2 = ab$$

Rešenje. Dokaz sledi iz ovog implikacijskog lanca

$$((\exists x \in R)\ x^2 = a \wedge (\exists x \in R)\ x^2 = b)$$
$$\Rightarrow (\exists x \in R)\ x^2 = a \wedge (\exists y \in R) (y^2 = b)$$
$$\Rightarrow (\exists x, y \in R)(x^2 = a \wedge y^2 = b)$$
$$\Rightarrow (\exists x, y \in R) x^2 y^2 = ab$$
$$\Rightarrow (\exists x, y \in R) (xy)^2 = ab$$
$$\Rightarrow (\exists z \in R) z^2 = ab$$

(Za xy smo uveli oznaku z)

$$\Rightarrow (\exists x \in R) x^2 = ab$$

(Preznačavanje)

8. Dokazati formulu:

$$(\forall x, y \in R) (x + y < 3 \wedge x - y > 1 \Rightarrow x > 2y)$$

Rešenje. Jedan dokaz je

$$(\forall x, y \in R) (x + y < 3 \wedge x - y > 1 \Rightarrow x > 2y)$$
$$\Longleftrightarrow (\forall x, y \in R)((\exists p, q > 0) (x + y = 3 - 2p \wedge x - y = 1 + 2q) \Rightarrow x > 2y)$$

(Jer $a < b \Longleftrightarrow ((\exists p > 0)\ a = b - p)$ i sl. Umesto p smo uzeli $2p$ – radi lakšeg budućeg računanja)

$$\Longleftrightarrow (\forall x, y \in R) (\forall p, q > 0) (x+y=3-2p \wedge x-y=1+2q \Rightarrow x > 2y)$$

(Koristimo dvaput valjanu formulu oblika

$((\exists p) A(p) \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\forall p) (A(p) \Rightarrow B)$

pri čemu p nije slobodno u B – u stvari, uopšte i ne učestvuje)

$$\Longleftrightarrow (\forall p, q > 0)(\forall x, y \in R) (x=2-p+q \wedge y=1-p-q \Rightarrow x > 2y)$$

(Zamenjivanje sistema po x, y: $x+y=3-2p \wedge x-y=1+2q$ njegovim rešenim oblikom)

$$\Longleftrightarrow (\forall p, q > 0)\ 2-p+q > 2(1-p-q)$$

(Korišćenje jednakosno valjane formule oblika

$(\forall x, y \in S) (x=a \wedge y=b \Rightarrow F(x,y)) \Longleftrightarrow F(a,b)$)

$\Leftrightarrow (\forall\ p, q > 0)\ p + 3q > 0$

$\Leftrightarrow \top.$

9. Dokazati implikacije $(x, y \in R)$:

a) $x > 1 \wedge y < 2 \Rightarrow y - 5x + 3 < 0$, b) $2x + y < 3 \wedge x - 3y > 1 \Rightarrow 7y < 1$

10. Odrediti potreban i dovoljan uslov za brojeve A, B, C tako da važi implikacija

$$(\forall\ x, y \in R)\ (x + y < 3 \wedge x - y > 1 \Rightarrow Ax + By + C > 0)$$

11. Dokazati da formula $F(n)$: $4^n \geqslant n^2$ zadovoljava uslov[1]

(☆) $$(\forall\ n \in N)\ (F(n) \Rightarrow F(n+1))$$

Rešenje. *Prvi način:* Uočimo implikacijski lanac sa početkom $F(n)$:

$4^n \geqslant n^2 \Rightarrow 4 \cdot 4^n \geqslant 4n^2$

(Množenjem obe strane sa 4)

$\Rightarrow 4^{n+1} \geqslant (n+1)^2 + 4n^2 - (n+1)^2$

$\Rightarrow 4^{n+1} \geqslant (n+1)^2 + (2n + n + 1)(2n - n - 1)$

$\Rightarrow 4^{n+1} \geqslant (n+1)^2 + (3n + 1)(n-1)$

$\Rightarrow 4^{n+1} \geqslant (n+1)^2$

(Jer $(3n + 1)(n-1) \geqslant 0$, za $n \in N$)

Iz tog lanca proizlazi implikacija

$4^n \geqslant n^2 \Rightarrow 4^{n+1} \geqslant (n+1)^2$ (n je ma koji prirodan broj).

Drugi način: Formulu (☆) dokazujemo metodom svodjenja na protivurečnost, odnosno dokazujemo da je nemoguće da vredi $\neg$(☆). Zaista:

$\neg(☆) \Rightarrow \neg(\forall\ n \in N)\ (4^n \geqslant n^2 \Rightarrow 4^{n+1} \geqslant (n+1)^2)$

$\Rightarrow (\exists\ n \in N)\ \neg(4^n \geqslant n^2 \Rightarrow 4^{n+1} \geqslant (n+1)^2)$

$\Rightarrow (\exists\ n \in N)\ (4^n \geqslant n^2 \wedge \neg 4^{n+1} \geqslant (n+1)^2)$

$\Rightarrow (\exists\ n \in N)\ (4^n \geqslant n^2 \wedge (n+1)^2 > 4^{n+1})$

$\Rightarrow (\exists\ n \in N)\ (4^n (n+1)^2 \geqslant 4^{n+1}\ n^2)$

(Množenjem obe nejednakosti)

$\Rightarrow (\exists\ n \in N)\ ((n+1)^2 > 4n^2)$

$\Rightarrow (\exists\ n \in N)\ n+1 > 2n$

$\Rightarrow (\exists\ n \in N)\ 1 > n$

$\Rightarrow \perp.$

Dakle: $\neg$(☆) $\Rightarrow \perp$, pa je formula (☆) dokazana.

12. Dokazati implikaciju

$$a > 0 \wedge b > 0 \wedge k > 0 \wedge a > b \wedge a \geqslant 2^k \Rightarrow (\forall\ n \in N)\ (a^n > bn^k).$$

Rešenje. Uočimo sledeći lanac ekvivalencija, pod pretpostavkama $a, b, k > 0$

[1] U ovom i narednom zadatku skup prirodnih brojeva N je „počev od 1”

$(\forall\, n\in N)\,(a^n > bn^k) \iff a> b \wedge (\forall\, n\in N)\,(a^n > bn^k \Rightarrow a^{n+1} \geqslant b(n+1)^k)$

(Princip indukcije u obliku:
$(\forall\, n\in N)\, F(n) \iff F(1) \wedge (\forall\, n\in N)(F(n) \Rightarrow F(n+1)))$

$\iff a > b \wedge (\forall\, n\in N)\, [(\exists\, p>0)\,(a^n=bn^k+p) \Rightarrow a^{n+1} > b(n+1)^k]$

$\iff a > b \wedge (\forall n\in N)\,(\forall p>0)\,[a^n=bn^k+p \Rightarrow a^{n+1} > b(n+1)^k]$

$\iff a > b \wedge (\forall n\in N)\,(\forall p>0)\,[a^n=bn^k+p \Rightarrow abn^k+ap > b(n+1)^k]$

(Korišćenje ekvivalencije oblika
$(x=y \Rightarrow ax > z) \iff (x=y \Rightarrow ay > z))$

$\iff a> b \wedge (\forall\, n\in N)(\forall\, p>0)[a^n=bn^k+p \Rightarrow ap > b((n+1)^k - an^k)]$

Jedan dovoljan uslov da bude tačna dobijena formula, pa sledstveno, i polazna, jeste:

$(U) \qquad a> b \wedge (\forall\, n\in N)\,(\forall\, p\geqslant 0)\,[ap > b((n+1)^k - an^k)]$

Za taj uslov važi:

$$U \iff a > b \wedge (\forall n\in N)[(n+1)^k - an^k \leqslant 0]$$
$$\iff a > b \wedge (\forall\, n\in N)\,(1+\frac{1}{n})^k \leqslant a$$
$$\iff a > b \wedge \max_{n\in N}\,(1+\frac{1}{n})^k \leqslant a$$
$$\iff a > b \wedge (1+\frac{1}{1})^k \leqslant a$$
$$\iff a > b \wedge a \geqslant 2^k.$$

13. Neka su $\alpha \subseteq S^2$, $\beta \subseteq S^2$ binarne relacije skupa S i $\alpha \circ \beta$ njihov proizvod, a α^{-1}, β^{-1}, ... inverzna relacija relacije α, odnosno β i sl.

Dokazati jednakost

$$(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$$

Rešenje. Dokazujemo ekvivalentnost te jednakosti sa $\top$. Jedan dokaz glasi:

$(\alpha \circ \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$

$\iff (\forall x, y\in S)\,((x,y)\in(\alpha\circ\beta)^{-1} \iff (x,y)\in\beta^{-1}\circ\alpha^{-1})$

(Definicija jednakosti dva skupa)

$\iff (\forall x,y\in S)((y,x)\in\alpha\circ\beta \iff (\exists\; z\in S)((x,z)\in\beta^{-1} \wedge (z,y)\in\alpha^{-1}))$

(Definicija inverzne relacije, kao i definicija proizvoda relacija)

$\iff (\forall x, y\in S)\;((\exists\, z\in S)\,((y,z)\in\alpha \wedge (z,x)\in\beta)$

$\iff (\exists\, z\in S)\,((z,x)\in\beta \wedge (y,z)\in\alpha))$

$\iff (\forall\; x, y\in S)\,((\exists\; z\in S)\,(p\wedge q) \iff (\exists\, z\in S)\,(q\wedge p))$

(p,q su druge oznake za $(y,z)\in\alpha$, $(z,x)\in\beta$)

$\iff \top$

14. Neka su α, β, $\gamma \subseteq S^2$ binarne relacije skupa S. Dokazati jednakost

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$$

gde $\circ$ označava proizvod relacija.

Rešenje. Dokaz izvodimo preradjujući datu jednakost na $\top$. Radi kraćeg pisanja izostavljamo deo oblika $\in S$, odnosno umesto, recimo, $(\forall\ x \in S)$ pišemo $\forall\ x$ i sl. Jedan dokaz glasi:

$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$

$\Longleftrightarrow (\forall\ x,y)\,((x,y) \in (\alpha \circ \beta) \circ \gamma \Longleftrightarrow (x,y) \in \alpha \circ (\beta \circ \gamma))$

$\Longleftrightarrow (\forall\ x,y)\ [(\exists\ z_1)((x,z_1) \in \alpha \circ \beta \wedge (z_1,y) \in \gamma)$

$\Longleftrightarrow\ (\exists\ z_2)((x, z_2) \in \alpha \wedge (z_2, y) \in \beta \circ \gamma)]$

(Definicija proizvoda)

$\Longleftrightarrow (\forall\ x,y)\,[(\exists\ z_1)\,((\exists\ z_3)\,((x,z_3) \in \alpha \wedge (z_3, z_1) \in \beta) \wedge (z_1, y) \in \gamma)$

$\Longleftrightarrow\ (\exists\ z_2)\,((x,z_2) \in \alpha \wedge (\exists\ z_4)\,((z_2, z_4) \in \beta\ \wedge (z_4, y) \in \gamma))]$

$\Longleftrightarrow (\forall\ x,y)\ (\exists\ z_1, z_3)\,(((x, z_3) \in \alpha \wedge (z_3, z_1) \in \beta) \wedge (z_1, y) \in \gamma)$

$\Longleftrightarrow\ (\exists\ z_2, z_4)\,((x, z_2) \in \alpha \wedge ((z_2, z_4) \in \beta \wedge (z_4, y) \in \gamma))]$

(Promenljiva z_3 ne učestvuje u formulu $(z_1, y) \in \gamma$, pa, otuda vredi ekvivalencija

$(\exists z_3)((x, z_3) \in \alpha \wedge (z_3, z_1) \in \beta) \wedge (z_1, y) \in \gamma$

$\Longleftrightarrow (\exists\ z_3)\,(((x, z_3) \in \alpha \wedge (z_3, z_1) \in \beta) \wedge (z_1, y) \in \gamma)$

Slično zapažanje se odnosi na promenljivu z_4)

$\Longleftrightarrow (\exists x,y)[(\exists z_1, z_2)\,(((x, z_2) \in \alpha \wedge (z_2, z_1) \in \beta) \wedge (z_1, y) \in \gamma)$

$\Longleftrightarrow (\exists z_2, z_1)\,((x, z_2) \in \alpha \wedge ((z_2, z_1) \in \beta \wedge (z_1, y) \in \gamma))]$

(Umesto promenljivih z_3, z_4 upotrebili smo redom z_1, z_2 sa ciljem približavanja leve i desne strane ekvivalencije u zagradi)

$\Longleftrightarrow (\forall\ x,y)[(\exists z_1, z_2)\,((p \wedge q) \wedge r) \Longleftrightarrow (\exists z_2, z_1)\,(p \wedge (q \wedge r))]$

(Formule $(x, z_2) \in \alpha$, $(z_2, z_1) \in \beta$, $(z_1, y) \in \gamma$ smo označili sa p, q, r)

$\Longleftrightarrow (\forall\ x,y)[(\exists z_1, z_2)\,((p \wedge q) \wedge r) \Longleftrightarrow (\exists z_1, z_2)\,(p \wedge (q \wedge r))]$

(Obrtanje redosleda kvantora $(\exists\ z_2)$, $(\exists\ z_1)$)

$\Longleftrightarrow\ \top$

Primedba. Na sličan se način dokazuje asocijativnost proizvoda relacija i u opštijem slučaju:

$$\alpha \subseteq A \times B,\ \beta \subseteq B \times C,\ \gamma \subseteq C \times D$$

gde su A, B, C, D ma koji skupovi.

15. Neka je $f : A \to B$ i neka $f^{-1}(S)$, za $S \subset B$, bude skup svih onih elemenata skupa A čija slika pripada skupu S, tj.

$$f^{-1}(S) = \{x | f(x) \in S\}$$

Dokazati jednakost

$$f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$$

gde su P, Q ma koji podskupovi skupa B.

Rešenje. Jedan dokaz je sledeći niz ekvivalencija

$f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$

$\iff (\forall x \in A)(x \in f^{-1}(P \cup Q) \iff x \in f^{-1}(P) \vee x \in f^{-1}(Q))$

$\iff (\forall x \in A)(f(x) \in P \cup Q \iff f(x) \in P \vee f(x) \in Q)$

(Jer, uopšte: $x \in f^{-1}(S) \iff f(x) \in S$)

$\iff (\forall x \in A)(f(x) \in P \vee f(x) \in Q \iff f(x) \in P \vee f(x) \in Q)$

(Definicija unije)

$\iff \top$.

16. Neka je $\leqslant$ relacija poretka skupa S, i pretpostavimo da svaki podskup tog skupa ima infimum. Šta je onda infimum praznog skupa?

Rešenje. Neka je A neki podskup skupa S i $x = \inf A$. Na osnovu definicije infimuma imamo

$x = \inf A \iff (\forall u)(u \in A \Rightarrow x \leqslant u) \wedge (\forall z)[(\forall u)(u \in A \Rightarrow z \leqslant u) \Rightarrow z \leqslant x]$

Stavljajući ϕ umesto A i koristeći činjenicu sa $u \in \phi \iff \perp$ neposredno dobijamo

$x = \inf \phi \iff (\forall u)(\perp \Rightarrow x \leqslant u) \wedge (\forall z)[(\forall u)(\perp \Rightarrow z \leqslant u) \Rightarrow z \leqslant x]$

$\iff (\forall u) \top \wedge (\forall z)((\forall u)\top \Rightarrow z \leqslant x)$

$\iff \top \wedge (\forall z)(\top \Rightarrow z \leqslant x)$

$\iff (\forall z)(z \leqslant x)$.

Dakle:

$$x = \inf \phi \iff (\forall z)(z \leqslant x),$$

tj. $\inf \phi$ je najveći element skupa S.

17. Neka je $\leqslant$ relacija poretka skupa S i neka, po pretpostavci, svaki podskup tog skupa ima supremum. Šta je onda supremum praznog skupa?

18. Neka je $\cdot$ asocijativna operacija skupa S. Jednakostima

$$\prod_{i=1}^{1} x_i = x_1, \quad \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot x_{n+1}$$

gde $x_i \in S$, a n može biti $1, 2, 3, \ldots$ rekurzivno se definiše tzv. *proizvod* redom članova $x_1, \ldots, x_n$, odnosno $\prod_{i=1}^{n} x_i$. Dokazati jednakost

$$(\varphi_m) \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod_{j=1}^{m} y_j = \prod_{k=1}^{n+m} z_k$$

gde su $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots, z_{n+m}$ dogovorno druge oznake redom za

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$$

Rešenje. Formulu (φ_m) dokazujemo indukcijom po *m*. Za *m=1* formula (φ_m) se svodi na definiciju. Formula (φ_{m+1}) glasi

$$(\varphi_{m+1}) \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod_{j=1}^{m+1} y_j = \prod_{k=1}^{n+m+1} z_k$$

i iz formule (φ_m) se ovako izvodi na osnovu asocijativnog zakona

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod_{j=1}^{m+1} y_j = \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot ((\prod_{j=1}^{m} y_j) \cdot y_{m+1})$$

$$= (\prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod_{j=1}^{m} y_j) \cdot y_{m+1} \qquad \text{(Asocijativni zakon)}$$

$$= (\prod_{k=1}^{n+m} z_k) \cdot y_{m+1} \qquad \text{(Formula } (\varphi_m))$$

$$= \prod_{k=1}^{n+m+1} z_k \qquad \text{(Definicija)}$$

U dokazu je obavljano preznačavanje promenljivih $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ redom sa $z_1, z_2, \ldots$.

Napomena. Često se umesto znaka Π koristi znak Σ, posebno ako je + oznaka operacije.

19. **Nastavak predhodnog.** Neka je $\cdot$ asocijativna operacija skupa S i $t(x_1, \ldots, x_n)$ ma koji izraz gradjen pomoću operacijskog znaka $\cdot$ a $x_1, \ldots, x_n$ su sve promenljive tog izraza navedene po redu učestvovanja (sleva nadesno). Recimo, primeri izraza t su:

$$x_1, \quad x_1 \cdot x_2, \quad x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), \quad (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4)$$

Dokazati jednakost *(uopšteni asocijativni zakon)*:

$$(\psi_n) \qquad t(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Uputstvo. Dokaz se može izvesti potpunom indukcijom po *n*. Za *n=1* jednakost (ψ_n) glasi: $x_1 = \prod_{i=1}^{1} x_i$, i tačna je. Dalje, pretpostavimo tačnost svih formula oblika $(\psi_1), (\psi_2), \ldots, (\psi_{n-1})$ i dokažimo tačnost formule (ψ_n). Prema definiciji izraza, za $n > 1$ izraz t je vida

$$u(x_1, \ldots, x_r) \cdot v(x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

pa se mogu koristiti jednakosti (indukcijska hipoteza)

$$u(x_1, \ldots, x_r) = \prod_{i=1}^{r} x_i, \quad v(y_1, \ldots, y_{n-r}) = \prod_{j=1}^{n-r} y_j$$

$(y_1, \ldots, y_{n-r}$ su druge oznake redom za $x_{r+1}, \ldots, x_n)$ iz kojih dalje, na osnovu prethodnog zadatka neposredno sledi formula (ψ_n).

20. Neka je S neprazan skup i $+, \cdot$ dve binarne operacije tog skupa takve da:

(i) I $+$ i $\cdot$ su asocijativne operacije

(ii) $\cdot$ je distributivna prema $+$, tj. tačne su formule

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \ (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

U takvom slučaju kažemo da S u odnosu na $+$ i $\cdot$ čini tzv. *ADA*–strukturu[1].

Dokazati naredni *stav o sleganju izraza ADA–strukture:*

Za ma koji izraz t gradjen pomoću nekih promenljivih i operacijskih znakova $+$ i $\cdot$ vredi jednakost oblika

(φ_k) $\quad t = P + Q + \ldots + R \quad$ (za sve vrednosti promenljivih iz skupa S)

pri čemu su $P, Q, \ldots, R$ proizvodi, odnosno svaki od njih je oblika $\prod_{i=1}^{n} z_i$.

Prethodni stav se i ovako iskazuje:

U *ADA*–strukturi svaki izraz je svodljiv na „zbir monoma".

Uputstvo. Sa k označimo broj svih operacijskih znakova izraza t. Dokaz izvesti potpunom indukcijom po k. Pri tome će se pojaviti i ovakva formula (o množenju dva zbira)

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot (y_1 + y_2 + \ldots + y_m) = {} & x_1 y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_1 y_m \\ & + x_2 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_2 y_m \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + x_n y_1 + x_n y_2 + \ldots + x_n y_m\end{aligned}$$

koja se lako dokazuje (recimo indukcijom po m).

Napomena 1. Stav o sleganju koristi se, na primer, u algebri brojeva, algebri skupova (tada su $+, \cdot$ operacije $\cup, \cap$ ili obratno $\cap, \cup$ a S je neki skup skupova), opštije u Bulovoj algebri. U stvari i logičke operacije $\vee$, $\wedge$ a takodje i $\wedge$, $\vee$ poseduju *ADA* –svojstva (pri tome $\Longleftrightarrow$ ima ulogu jednakosti), pa otuda iz stava o sleganju slede dva stava o sleganju iskaznih formula. Videti tačke VIII *Ekvivalentnost iskaznih formula,*

[1] ADA zbog dva asocijativna i jednog para distributivnih zakona.

XIV *Bulove algebre*[1].

Napomena 2. Evo još nekoliko primera ADA–strukture $(S, +, \cdot)$: (R, max, min), (R, min, max), $(N$, NZD, NZS $)$, $(N$, NZS, NZD $)$, $(R[x], +, \cdot)$ – gde je $R[x]$ skup svih realnih polinoma po x, $(Z_n, +_n, \cdot_n)$,– gde je Z_n skup $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ a $+_n, \cdot_n$ su sabiranje i množenje po modulu n, uopšte neki prsten.

21. Milan, Petar, Zoran i Dragan učestvovali su na šahovskom takmičenju i zauzeli prva četiri mesta. O svojim mestima dobili su tri različita odgovora

(i) Dragan prvi, Zoran drugi;

(ii) Dragan drugi, Petar treći;

(iii) Milan drugi, Petar četvrti;

Znajući da je u svakom odgovoru bar jedan deo tačan, odrediti njihov redosled na tabeli.

Uputstvo. Dodelimo takmičarima, Milanu, Petru, Zoranu i Draganu redom takmičarske brojeve $1,2,3,4$. Neka dalje, A_i^j $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ označava da je takmičar sa rednim brojem i zauzeo mesto j. Na primer, A_3^2 označava da je takmičar sa rednim brojem 3, tj. Zoran, zauzeo drugo mesto. Kako jedan takmičar može zauzeti samo jedno mesto, to su hipoteze sve jednakosti oblika

$$(\star)\quad \tau(A_i^j \wedge A_i^k) = \bot\,, \qquad \tau(A_j^i \wedge A_k^i) = \bot \qquad (i, j, k \in \{1,2,3,4\};\ j \neq k)$$

Dalje, odgovorima (i), (ii), (iii) odgovara formula F:

$$(A_4^1 \vee A_3^2) \wedge (A_4^2 \vee A_2^3) \wedge (A_1^2 \vee A_2^4)$$

Svodjenjem te formule na rastavni oblik i korišćenjem pretpostavljenih jednakosti $(\star)$ nije teško zaključiti da vredi ekvivalencija

$$F \Longleftrightarrow A_4^1 \wedge A_1^2 \wedge A_2^3$$

što se može ovako čitati: Dragan, Milan i Petar zauzeli su redom prva tri mesta, a Zoran četvrto.

22. Pri sastavljanju rasporeda nastavnici su izrazili sledeće želje za redosled časova:

(i) Matematičar: prvi ili drugi čas;

(ii) Istoričar: prvi ili treći;

(iii) Fizičar: drugi ili treći.

---

[1] U navedenim slučajevima sreću se istina i operacije $-$ (suprotan broj), $'$ (komplement), $\neg$ (negacija). Njihovo prisustvo bitno ne smeta napomenutim sleganjima budući da vredi:

$-(-x) = x,\quad -(x+y) = -x-y$ (u algebri brojeva)

$(x')' = x,\quad (x \cup y)' = x' \cap y'\,,\ (x \cap y)' = x' \cup y'$ (u Bulovoj algebri)

$\neg\neg p \Longleftrightarrow p,\quad \neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q,$

$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (za iskazne formule).

Da li je moguće udovoljiti željama sva tri nastavnika?

23. Neka lice A drži u ruci dinar (ne zna se da li u levoj ili desnoj). Zna se da lice A ili uvek laže ili uvek govori istinu (ali se ne zna šta je od ta dva). Kako možemo pomoću jednog pitanja saznati u kojoj se ruci nalazi moneta?

24. Na nekom košarkaškom turniru igra 8 klubova. U svakom kolu tog turnira ima 4 susreta. Označimo moguće ishode po izvesnom redu sa r_1, r_2, r_3, r_4. (Neka r_i bude 1 ukoliko domaćin pobedjuje gosta, odnosno 2 u suprotnom slučaju). Ako $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ označava „kombinaciju" mogućih ishoda, onda se u svakom kolu realizuje jedna od 16 mogućnosti:

$$1111,\ 1112,\ 1121,\ 1122,\ 1211,\ 1212,\ 1221,\ 1222,$$
$$2111,\ 2112,\ 2121,\ 2122,\ 2211,\ 2212,\ 2221,\ 2222$$

Pretpostavimo da je u vezi sa turnirom organizovana sportska prognoza. Koliko najmanje i koje moguće ishode treba igrač prognoze da prognozira da bi, bez obzira šta se stvarno dogodilo u narednom kolu, pogodio ishode u bar tri susreta.

Uputstvo. Označimo navedene kombinacije redom sa p_i $(i = 1, 2, ..., 16)$. Da bi igrač prognoze imao tri pogotka u kombinaciji p_1, on mora prognozirati bar jednu od sledećih kombinacija

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_5,\ p_9$$

odnosno mora prognozirati disjunkciju F_1:

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_5 \vee p_9$$

Slično, u vezi sa tri pogotka u kombinaciji p_2 javlja se disjunkcija F_2:

$$p_2 \vee p_1 \vee p_4 \vee p_6 \vee p_{10}$$

a zatim $F_3, F_4, ...$ i najzad F_{16}. Zahtevu da igrač prognoze ima po tri pogotka u svakoj kombinaciji odgovara konjunkcija

$$(\star) \qquad F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_{16}$$

pa se zadatak svodi na odredjivanje svih vrednosti slova p_i za koje ta konjunkcija ima vrednost $\top$. Za to je dovoljno formulu $(\star)$ dovesti na rastavni oblik. Recimo jedan član tog oblika je

$$p_1 \wedge p_5 \wedge p_{12} \wedge p_{16}$$

Dakle, dovoljno je da igrač prognoze prognozira ishode p_1, p_5, p_{12}, p_{16} da bi, bez obzira šta se dogodilo na terenu, imao sigurno bar tri pogotka.

25. Uočimo formulu

$$(\forall x \in A)\ (\exists\ y \in B)\alpha\ (x,y) \Longleftrightarrow (\exists\ f{:}A \to B)\ (\forall x \in A)\alpha\ (x, f(x))$$

To je, u stvari, jedan oblik aksiome izbora. U konačnom slučaju, ta se formula ne mora uzeti za aksiomu, već se može dokazati. Uveriti se u to na primeru skupova $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a,b\}$.

Uputstvo. Uočimo ekvivalencijski lanac

$$(\forall x \in \{1, 2, 3\})(\exists y \in \{a, b\})\, \alpha(x,y)$$
$$\Longleftrightarrow (\forall x \in \{1, 2, 3\})(\alpha(x, a) + \alpha(x, b))$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha(1, a) + \alpha(1, b)) \cdot (\alpha(2, a) + \alpha(2, b)) \cdot (\alpha(3,a) + \alpha(3, b))$$

(umesto znakova $\wedge$, $\vee$ koristili smo $\cdot$ i $+$. Dalje obavljamo „množenje")

$$\Longleftrightarrow \alpha(1,a)\cdot \alpha(2,a) \cdot \alpha(3,a) + \ldots + \alpha(1,b) \cdot \alpha(2,b) \cdot \alpha(3,b)$$

(Tu se pojavljuje $2 \cdot 2 \cdot 2$ tj. 8 „sabiraka". Ma koji ima oblik $\alpha(1,p) \cdot \alpha(2,q) \cdot \alpha(3,r)$ gde $p, q, r \in \{a, b\}$. Taj sabirak se može i ovako shvatiti:

$$\alpha(1, f(1)) \cdot \alpha(2, f(2)) \cdot \alpha(3, f(3))$$

gde je f preslikavanje

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix}$$

U stvari, svakom sabirku na sličan način odgovara po jedna funkcija $f: A \to B$)

$$\Longleftrightarrow \bigvee_{f:A \to B} \alpha(1, f(1)) \cdot \alpha(2, f(2)) \cdot \alpha(3, f(3))$$
$$\Longleftrightarrow (\exists f: A \to B)(\forall x \in A)\, \alpha(x, f(x)).$$

26. Obrazovati konačan grupoid koji ne zadovoljava zakon

$$(x \star y) \star z = (z \star x) \star (y \star z)$$

Uputstvo. Pođimo od jezika $L = \{a, b, c, \star\}$, gde su a, b, c znaci konstanata. Uočimo skup M svih terma koji imaju najviše tri znaka $\star$. Operaciju $\star_M$ definišemo, recimo, ovako

$$t_1 \star_M t_2 = \begin{cases} (t_1 \star t_2), & \text{ako term } (t_1 \star t_2) \text{ pripada } M \\ t_1, & \text{inače} \end{cases}$$

Dobijeni grupoid $(M, \star_M)$ ne zadovoljava uočeni zakon u tački (a, b, c).

27. Neka je $t_1 = t_2$ ma koji algebarski zakon različit od zakona $t = t$. Dokazati da postoji konačna algebarska struktura koja ne zadovoljava taj zakon.

28. Označimo sa B_{16} Bulovu algebru reda 16 koja je direktni četvrti stepen[1] algebre B_2 čiji su elementi $\top$, $\bot$. Uočimo u toj algebri ova dva člana

$$\alpha = (\top, \top, \bot, \bot), \qquad \beta = (\top, \bot, \top, \bot)$$

Dokazati:

[1] Znači članovi iz B_{16} su oblika $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, gde $\alpha_i \in B_2$ a operacije se uvode ovako $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \wedge (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_2 \wedge \beta_2, \alpha_3 \wedge \beta_3, \alpha_4 \wedge \beta_4)$ i sl.

Ma koja iskazna formula $F(p, q)$ po slovima p, q je tautologija akko u algebri B_{16} vredi jednakost $F(\alpha, \beta) = (\top, \top, \top, \top)$.

29. Neka je $t_1 = t_2$ algebarski zakon na jeziku $L = \{\star\}$ u kome učestvuju upravo promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $\mathcal{G} = (G, \star)$ dati grupoid. Dokazati:

Postoji takav direktan stepen $\mathcal{G}^m$ tog grupoida i u njemu elementi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takvi da zakon $t_1 = t_2$ vredi u $\mathcal{G}$ akko $t_1 = t_2$ je ispunjen u tački $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tj. kada $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$.

30. Koristeći jedino definicije zadovoljivosti, odnosno valjanosti, dokazati:

(i) Algebarski zakon $t_1 = t_2$ jezika $L = \{\star\}$ važi u datom grupoidu akko važi u svakom njegovom konačno generisanom podgrupoidu.

(ii) Univerzalna formula F je valjana akko je tačna na svakom konačnom ili prebrojivom domenu.

Uputstvo. Ispunjenje zakona $t_1 = t_2$ kada promenljive imaju redom vrednosti $a_1, \ldots, a_n$ sledi iz pretpostavke važenja tog zakona u podgrupoidu generisanom za $a_1, \ldots, a_n$.

31. Naredne formule na jeziku $\{\leqslant, =\}$ su tzv. aksiome *svuda gustog poretka bez krajeva*

$$(\forall x)\, x = x,\ (\forall x,y)(x = y \Rightarrow y = x),\ (\forall x,y,z)\,(x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z),$$
$$(\forall x,y,z,u)(x = y \wedge z = u \Rightarrow (x \leqslant z \Rightarrow y \leqslant u))$$
$$(\forall x)x \leqslant x,\ (\forall x,y)(x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y,\ (\forall x,y,z)(x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$$
$$(\forall x,y)(x \leqslant y \vee y \leqslant x),\ (\forall x)\,(\exists y)x < y,\ (\forall x)(\exists y)x > y,\ (\forall x,y)\,(x < y$$

$\Rightarrow (\exists z)(x < z < y)$, u kojima su korišćene definicije:

$$x < y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \leqslant y \wedge x \neq y,\ x > y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} y < x,\ x < y < z \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x < y \wedge y < z$$

Jedan model tih aksioma je skup svih racionalnih brojeva u odnosu na uobičajeni poredak, a takodje i interval $(0,1)$ racionalnih brojeva u odnosu na isti poredak.

Dokazati da su formule

(i) $x \leqslant y \Longleftrightarrow x < y \vee x = y$, (ii) $x < y \vee x = y \vee x > y$

(iii) $x \neq y \Longleftrightarrow x < y \vee y < x$, (iv) $\neg(x \leqslant y) \Longleftrightarrow x > y$

(v) $(\exists z)\,(x < z < y) \Longleftrightarrow x < y$

posledice tih aksioma.

32. **Nastavak prethodnog.** Dokazati da je ma koja iskazna formula po slovima oblika $u \leqslant v$, $u = v$ ekvivalentna sa nekom iskaznom formulom po slovima oblika $u < v$, $u > v$, $u = v$ koja od logičkih znakova sadrži jedino $\wedge$, $\vee$.

Uputstvo. Za eliminaciju negacije koriste se formule (iii), odnosno (iv).

33. **Nastavak prethodnog.** Dokazati da je svaka formula oblika $(\exists x)H$, gde je H

konjunkcija izvesnih formula oblika $x = u$, $x > u$, $x < u$, ekvivalentna ili sa $\top$ ili sa $\bot$ ili sa izvesnom konjunkcijom po slovima oblika $u = v$, $u > v$, $u < v$ u kojoj ne učestvuje x.

Uputstvo. Razlikovati slučajeve:

(i) U formuli se pojavljuje bar jedna jednakost oblika $x = u$. (Tada koristiti opštu formulu eliminacije $A(y) \Longleftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge x = y)$).

(ii) Formula je oblika $(\exists x)(x < y_1 \wedge \ldots \wedge x < y_k)$. (Tada najpre uvesti min[1] a potom primeniti aksiomu $(\forall x)(\exists y)x > y$).

(iii) Formula je oblika $(\exists x)(x > y_1 \wedge \ldots \wedge x > y_k)$. (Uvesti max pa primeniti aksiomu $(\forall x)(\exists y)x < y$).

(iv) Formula je oblika $(\exists x)((x > y_1 \wedge \ldots \wedge x > y_m) \wedge (x < z_1 \wedge \ldots \wedge x < z_n)$. (Uvesti min i max pa primeniti ekvivalenciju (v) zadatka 31).

34. **Nastavak prethodnog.** Dokazati da svaka predikatska formula F na jeziku $\{\leqslant, =\}$ dopušta *eliminaciju kvantora*, odnosno da je F ekvivalentna sa nekom formulom G koja ne sadrži kvantore, gde se za $\leqslant$ pretpostavljaju aksiome gustog poretka bez krajeva.

Uputstvo. Formulu F svesti na preneks formu, potom eliminisati negaciju i bezkvantorski deo dovesti na rastavni oblik. Tako se dolazi do formule

$$(q_1 u_1) \ldots (q_n u_n)(H_1 \vee \ldots \vee H_m)$$

Dalje, sve kvantore izraziti pomoću egzistencijalnog i eliminisati ih postupno počev od q_n. Tako se problem svodi na eliminaciju kvantora u formulama oblika $(\exists x)H$ razmatranim u prethodnom zadatku.

35. Dokazati da se svaki prsten $\mathcal{R}$ može potopiti[2] u neki prsten sa jedinicom.

Rešenje. Neka je T skup svih terma gradjenih od članova skupa R i e (pretpostavka je da $e \notin R$) kao znakova konstanata i operacijskih znakova $+, \cdot, -$ prstena $\mathcal{R}$. Tražićemo prsten $\mathcal{R}_1$ nadprsten za $\mathcal{R}$ koji ima jedinični element e i čiji su članovi termi[3] iz T, s tim što su neki od njih, kao članovi skupa $\mathcal{R}_1$, medjusobno jednaki[4]. U skladu sa tim, radi odredjivanja prstena $\mathcal{R}_1$ uočimo skup uslova $\Phi(T)$:

---

[1] $\min(x,y) \overset{\text{def}}{=} x$ (ako $x \leqslant y$), $\min(x,y) \overset{\text{def}}{=} y$ (ako $y \leqslant x$)
Slično se uvodi i max. Pri tome vrede ekvivalencije
$z \leqslant \min(x,y) \Longleftrightarrow z \leqslant x \wedge z \leqslant y, \qquad z \geqslant \max(x,y) \Longleftrightarrow z \geqslant x \wedge z \geqslant y.$

[2] To znači da postoji neki prsten $\mathcal{R}_1$ takav da je $\mathcal{R}$ izomorfan sa izvesnim njegovim podprstenom. Slično se i u opštem slučaju definiše pojam i z o m o r f n o g p o t a p a n j a operacijskih, odnosno relacijskih struktura.

[3] Jer ako postoji ikakav prsten sa jedinicom u koji je T potopljen, onda postoji i takav.

[4] Raspravljanje pitanja jednakosti članova iz T je, u stvari, i osnovno pitanje.

(i) Sve tačne formule prstena $\mathcal{R}$ vida

$$a_1 + a_2 = a_3, \quad a_1 \cdot a_2 = a_4, \quad -a_1 = a_5, \quad a_6 = a_7, \quad a_8 \neq a_9,$$

gde $a_i \in R$. To su tablice datog prstena.

(ii)

$$t_1 + t_2 = t_2 + t_1$$
$$(t_1 + t_2) + t_3 = t_1 + (t_2 + t_3) \qquad (t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$$
$$t_1 + 0 = t_1$$
$$t_1 + (-t_1) = 0$$
$$t_1 \cdot (t_2 + t_3) = t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3$$
$$(t_1 + t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_3$$

za ma koje t_1, t_2, t_3 iz T.

(iii) $t \cdot e = t$, $e \cdot t = t$ za ma koji t iz T.

kao i aksiome jednakosti $Ax_=$ u odnosu na +, ·, –

$$t_1 = t_1, \; t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1, \; t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3,$$
$$t_1 = t_2 \wedge t_3 = t_4 \Rightarrow t_1 + t_3 = t_2 + t_4 \wedge t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4, \; t_1 = t_2 \Rightarrow -t_1 = -t_2$$

gde $t_1, t_2, t_3 \in T$.

Do prstena $\mathcal{R}_1$ može se doći traženjem nekog rešenja u iskaznom smislu skupa formula

$$\Phi(T) \cup Ax_=$$

shvaćenih kao iskaznih formula po slovima vida $t_1 = t_2$ (gde $t_1, t_2 \in T$). Osnovna ideja u rešavanju je da se postupno obrazuje ekvivalencijski[1] lanac sve jednostavnijih i jednostavnijih skupova. Najpre primetimo da iz $\Phi(T) \cup Ax_=$ sledi[2]:

(☆) *Svaki term t iz T ekvivalentan je sa nekim termom σ (tj. jednakost $t = \sigma$ sledi iz $\Phi(T) \cup Ax_=$) vida a ili vida λe ili vida $a + \lambda e$ gde $a \in R$, a λ je ceo broj različit od 0.*

Terme σ nazivamo naznačeni, a njihov skup označavamo sa Σ. Radi jednobraznosti pisanja, dogovorno umesto a, e pišemo redom $a+0$, $0 + \lambda e$, pa se članovi skupa Σ sada uopšte javljaju u obliku $a + \lambda e$ (gde $a \in R$, $\lambda \in Z$). Dalje se neposredno zaključuje[3] da vredi

$$\Phi(T) \cup Ax_= \;\; \models\!\!\!\dashv \;\; \Phi(\Sigma) \cup Ax_=$$

tj. u daljem se skupu $\Phi(T)$ sužava na svoj podskup $\Phi(\Sigma)$.

---

[1] Podsećamo da je $\models\!\!\!\dashv$ oznaka relacije r a v n o s l e d n o s t.

[2] Dokaz nije teško izvesti indukcijom po broju operacijskih znakova u t.

[3] Recimo, iz činjenice da za neki σ_1, σ_2 iz Σ vrede jednakosti $t_1 = \sigma_1$, $t_2 = \sigma_2$ i zakona zamene

$$t_1 = \sigma_1 \wedge t_2 = \sigma_2 \Rightarrow (t_1 + t_2 = t_2 + t_1 \Longleftrightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_2 + \sigma_1)$$

sledi ekvivalencija

$$t_1 + t_2 = t_2 + t_1 \Longleftrightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_2 + \sigma_1 .$$

U skladu sa tvrdjenjem (☆) iz skupa $\Phi(\Sigma) \cup Ax=$ neposredno se izvode formule $Tab(\Sigma)$:

$$(a_1 + \lambda_1 e) + (a_2 + \lambda_2 e) = \overline{a_1 + a_2} + \overline{\lambda_1 + \lambda_2} e$$

$$(a_1 + \lambda_1 e) \cdot (a_2 + \lambda_2 e) = \overline{a_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + \lambda_1 a_2} + \overline{\lambda_1 \lambda_2} e$$

$$-(a_1 + \lambda_1 e) = -\overline{a}_1 + -\overline{\lambda}_1 e$$

Sve tačne različitosti $a_1 \neq a_2$ prstena

gde $a_1 + a_2$ označava onaj element polaznog prstena koji je jednak $a_1 + a_2$, $\lambda_1 + \lambda_2$ označava ceo broj jednak zbiru $\lambda_1 + \lambda_2$ i sl.[1)]

Dakle, skup $\Phi(\Sigma) \cup Ax=$ ekvivalentan je sa

$$\Phi(\Sigma) \cup Tab(\Sigma) \cup Ax=$$

Dalje, a to je bitan momenat u rasudjivanju, dokazuje[2)] se da vredi

$$Tab(\Sigma) \cup Ax= \ \models \Phi(\Sigma)$$

na osnovu čega sledi

$$\Phi(\Sigma) \cup Ax = \ \models\!\mid \ Tab(\Sigma) \cup Ax=$$

Time je problem sveden na traženje modela skupa

$$Tab(\Sigma) \cup Ax=$$

$Tab(\Sigma)$ je jedna skoro–tablica[3)] (istina sa dodatkom nekih različitosti, odnosno formula oblika $a_i \neq a_j$, što bitno ne menja rasudjivanje. Prvo je pitanje da li je ona „slegnuta", tj. da li iz formula $Tab(\Sigma)$ sledi neka jednakost $a_1 + \lambda_1 e = a_2 + \lambda_2 e$ a da pri tome ne važe obe jednakosti $a_1 = a_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$. To se lako raspravlja načinom kao u zadatku 63 poglavlja XIII. Naime, dovoljno je proveriti da u odno-

---

1) Istaknimo da se medju formulama $Tab(\Sigma)$ nalaze i sve formule oblika (i) iz $\Phi(T)$, odnosno tablice prstena $\mathcal{R}$. Recimo formula

$$a_1 + a_2 = a_3 \qquad (a_1, a_2, a_3 \in R)$$

je u $Tab(\Sigma)$ predstavljena zapisom

$$(a_1 + 0e) + (a_2 + 0e) = (a_3 + 0e)$$

Dalje, u $Tab(\Sigma)$ se nalaze i ovakve formule

$2e + (-5)e = (-3)e$	(One su predstavljene zapisima:
$e + (-e) = 0$	$(0+2e) + (0+(-5)e) = 0+(-3)e$
	$(0+1e) + (0+(-1)e) = 0+(0)$

U stvari, u $Tab(\Sigma)$ se nalaze formule kojima se „medjusobno sabiraju, množe i nalaze suprotni termi" naznačenih terma:

$$0, a, b, c, \ldots, e, 2e, \ldots, -e, -2e, \ldots, a+e, b+e, \ldots \ (a, b, c \in R).$$

Pri tome, opšti zapisi $a + \lambda e$ su upotrebljeni radi kraćeg pisanja.

2) Evo, recimo, dokaza za komutativan zakon sabiranja

$$\begin{aligned}(a_1 + \lambda_1 e) + (a_2 + \lambda_2 e) &= \overline{a_1 + a_2} + \overline{\lambda_1 + \lambda_2} e \\ &= \overline{a_2 + a_1} + \overline{\lambda_2 + \lambda_1} e \\ &= (a_2 + \lambda_2 e) + (a_1 + \lambda_1 e)\end{aligned}$$

3) Videti poglavlje XIII, posebno zadatak 63.

su na $Tab(\Sigma)$ svaki složen izraz „čuva svoje poreklo". To, recimo, za izraz $a+2e$ znači sledeće:

Ako se koriste formule $Tab(\Sigma)$, tada se pomoću njih (shvaćenih „kao pravila računanja sa naznačenim izrazima") može „izračunati" $a+(e+e)$. I rezultat mora biti izraz $a+2e$. Zaista

$$\begin{aligned} a+(e+e) &= (a+0e)+((0+1e)+(0+1e)) \\ &= (a+0e)+(\overline{0+0}+\overline{1+1}e) = (a+0e)+(0+2e) \\ &= \underline{a+0}+\underline{0+2e} = a+2e \end{aligned}$$

Dakle, $Tab(\Sigma)$ „poštuju poreklo izraza" $a+2e$. Posle ustanovljavanja da je $Tab(\Sigma)$ „slegnuta" neposredno se dolazi – zamisao je opšte prirode – do jednog modela[1] $\mathcal{R}_1$. Za članove prstena $\mathcal{R}_1$ uzimamo sve naznačene izraze[2] $a+\lambda e(a\in R, \lambda\in Z)$ a operacije $+, \cdot, -$ definišemo preobraćanjem jednakosti $Tab(\Sigma)$ u definicije, odnosno

$$(a_1+\lambda_1 e)+(a_2+\lambda_2 e) \overset{\text{def}}{=} \overline{a_1+a_2}+\overline{\lambda_1+\lambda_2}\, e \quad \text{i sl.}$$

Napomena 1. Osnovni koraci u rešavanju su bili:

– uočavanje skupa naznačenih terma
– obrazovanje „tablice" tih terma
– proveravanje slegnutosti tablice i zadovoljivosti polaznih zahteva.

Napomena 2. Dobijeni prsten $\mathcal{R}_1$, je u stvari, nadprsten prstena $\mathcal{R}$.

36. Neka je $(S, +)$ komutativna semigrupa generisana članom a koja zadovoljava zakon skraćivanja, tj. važi implikacija

$$x+z=y+z \Rightarrow x=y \qquad (x,y,z\in S)$$

Proširujući jezik sa 0 i $-$ (0 je znak konstante, $-$ operacijski znak dužine 1) uočimo skup T svih odnosnih terma[3]. Odrediti sva rešenja ovog skupa $\mathcal{G}$ iskaznih formula po slovima vida $t_1 = t_2$

$$\begin{aligned} &t_1+t_2=t_2+t_1, \qquad (t_1+t_2)+t_3=t_1+(t_2+t_3) \\ &t_1+0=t_1, \qquad t_1+(-t_1)=0 \\ &a\neq 2a,\ a\neq 3a, \ldots, 2a\neq 3a,\ \ 2a\neq 4a, \ldots\ldots^{4)} \\ &t_1=t_1,\ t_1=t_2\Rightarrow t_2=t_1,\ t_1=t_2\wedge t_2=t_3\Rightarrow t_1=t_3 \\ &t_1=t_2\wedge t_3=t_4\Rightarrow t_1+t_3=t_2+t_4,\ t_1=t_2\Rightarrow -t_1=-t_2 (t_1,t_2,t_3,t_4\in T) \end{aligned}$$

[1] Slobodnije rečeno to je „vrhovni" model. Ostali modeli za $Tab(\Sigma)$, gradjeni pomoću e i članova iz $\mathcal{R}$, su onda njegove homomorfne slike koje čuvaju članove iz $\mathcal{R}$.

[2] Ili, što je izomorfno, za članove prstena $\mathcal{R}_1$ se uzmu uredjene dvojke (a, λ), tj. elementi skupa $R\times Z$. U Knjigama algebre obično se tako i postupa.

[3] (i) $a, 0\in T$; (ii) $u, v\in T \Rightarrow (u+v), -u\in T$

[4] tj. formule kojima se izražava različitost članova skupa S.

Uputstvo. Kao naznačene možemo uzeti

$$0,\ a,\ -a,\ 2a,\ -2a, \ldots..$$

Skup $\mathcal{F}$ ima, inače, tačno jedno rešenje.

Napomena. Skup $\mathcal{F}$ se prirodno pojavljuje pri traženju grupa koje su proširenje semigrupe $(S, +)$. U stvari je dokazano da se semigrupa $(S, +)$, navedenih odlika, može proširiti u grupu.

37. **Produžetak prethodnog.** Dokazati da se svaka komutativna semigrupa u kojoj važi zakon skraćivanja, može potopiti u grupu (komutativnu).

38. Opisati prelaz od strukture prirodnih brojeva $(N, +, \cdot)$ na strukturu celih brojeva $(Z, +, \cdot, -, 0)$ smatrajući da je prva struktura odredjena ovako:

(i) Članovi su $1, (1+1), (1+1)+1, \ldots$, odnosno $1, 2, 3, \ldots$.

(ii) Tačne su sve formule

$$x+y = y+x \qquad\qquad x\cdot y = y\cdot x$$
$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad\qquad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$
$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

i smatrajući da struktura celih brojeva treba da zadovoljava uslove

(j) To je nadstruktura za $(N, +, \cdot)$

(jj) U njoj treba da važe zakoni

$$x+y = y+x \qquad\qquad x\cdot y = y\cdot x$$
$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad\qquad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$
$$x+0 = x \qquad\qquad x\cdot 1 = x$$
$$x+(-x) = 0$$
$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

Uputstvo. Postupiti kao u zadacima 36, 37.

39. Dokazati da se dato polje može proširiti u polje u kome jednačina

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (1 \text{ jedinični element datog polja})$$

ima rešenja.

40. Dokazati da se prsten $\mathcal{R}$ može potopiti u polje ako i samo ako se svaki njegov konačno generisan podprsten može potopiti u polje.

Uputstvo. Primeniti stav kompaktnosti.

41. Neka je $\mathcal{F}$ skup predikatskih formula bez kvantora, Γ dati skup a $\mathcal{F}|\Gamma$ odnosni iskazni prevod (videti uvodni tekst tačke XVII). To je skup iskaznih formula po slovima vida

$$\rho(t_1, \ldots, t_n) \qquad (t_1 \ldots, t_n \in T)$$

gde je ρ relacijski znak dužine n a T skup odgovarajućih terma.
Neka vredi:

(1) $$\mathcal{G}|_\Gamma \vdash \Phi(\gamma_1, \dots \gamma_n)$$

gde je Φ formula bez promenljivih a $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ su n e k i članovi iz Γ. Dokazati da tada vredi i:

(2) $$\mathcal{G}|_\Gamma \vdash \Phi(t_1, \dots, t_n)$$

za m a k o j e terme $t_1, \dots, t_n$ iz T.

Uputstvo. Neka je

(3) $$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$$

jedan dokaz formule $\Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. U dokazu se javljaju: članovi iz $\mathcal{G}|_\Gamma$, tautologije ili formule dobijene primenom modus ponensa. Preslikavanje

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & & \gamma_n \\ t_1 & t_2 & \dots\dots & t_n \end{pmatrix}$$

prevodi dokaz (3) u dokaz formule $\Phi(t_1, \dots, t_n)$.

42. Dokazati ekvivalenciju:

Semigrupa $\mathcal{S} = (S, \cdot)$ se može proširiti u grupu $\longleftrightarrow$ *U $\mathcal{S}$ važe sve one posledice aksioma grupe koje su na jeziku $\{\cdot\}$*

Uputstvo. Dokaz dela $\rightarrow$ je jednostavan. Navodimo dokaz dela $\leftarrow$, odnosno njegove kontrapozicije. Radi toga, sa $Tab(\mathcal{S})$ označimo tablicu semigrupe[1]) a sa $Ax\mathcal{G}|_\Gamma$ skup formula oblika

$$(t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3) \qquad t_1 = t_1,\ t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1,\ t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3$$
$$t_1 \cdot e = t_1 \qquad t_1 = t_2 \wedge t_3 = t_4 \Rightarrow t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4$$
$$t_1 \cdot t_1^{-1} = e \qquad t_1 = t_2 \Rightarrow t_1^{-1} = t_2^{-1}$$

gde $t_1, t_2, \dots$ prelaze preko skupa svih terma obrazovanih pomoću e, članova iz S, i operacijskih znakova $\cdot$, $^{-1}$. Rasudjivanje tada izgleda:

Semigrupa $\mathcal{S}$ se ne može potopiti u grupu
- $\rightarrow$ Skup $Tab(\mathcal{S}) \cup Ax\,\mathcal{G}|_\Gamma$ nema model
- $\rightarrow$ Postoji konačan podskup K od $Tab(\mathcal{S})$ takav da:
  Skup $K \cup Ax\,\mathcal{G}|_\Gamma$ nema model
  (Primena stava kompaktnosti)
- $\rightarrow$ Postoji formula $F(s_1, \dots, s_n)$ takva da:
  Skup $\{F(s_1, \dots, s_n)\} \cup Ax\,\mathcal{G}|_\Gamma$ nema model
  (F je konjunkcija formula iz K, $s_1, \dots, s_n$ su iz S i to su svi oni koji učestvuju u F)

---

1) Nju čine sve tačne formule oblika $s_i \star s_j = s_k$ $(s_i, s_j, s_k \in S)$ kao i sve formule oblika $s_i \neq s_j$ $(i \neq j)$ kojima se tvrdi različitost elemenata skupa S.

→ Postoji formula F takva da:

$Ax\ \mathcal{G}|_{\Gamma} \vdash \neg F(s_1, \ldots, s_n)$

→ Postoji formula F takva da:

$Ax\ \mathcal{G}|_{\Gamma} \vdash \neg F(t_1, \ldots, t_n)$

gde su t_i ma koji termi sagradjeni pomoću s_i
(Videti prethodni zadatak)

→ Postoji univerzalna formula na jeziku $\{\cdot\}$:

$(\forall x_1, \ldots, x_n) \neg F(x_1, \ldots, x_n)$

koja je posledica aksioma grupe i koja
nije tačna na semigrupi $\mathcal{S}$
(Jer na $\mathcal{S}$ je tačna formula $F(s_1, \ldots, s_n)$ kao
konjunkcija konačno formula iz $Tab(\mathcal{S})$.

XX O DEFINICIJAMA

♦ U matematici se koristi veliki broj raznolikih definicija. Sve su one jezički izrazive u obliku:

A je zamena za B

A je deo koji se definiše[1] – tzv. *definiendum*, *B* je *definiens* – deo kojim se definiše. Takva je, na primer, definicija:

Duž PQ je (zamena za) skup svih tačaka izmedju P i Q, uključujući i te tačke.

♦ Često se, radi lakšeg delanja, u nekoj teoriji ili u meta–teoriji, pomoću izvesnih polaznih pojmova definicijama uvode novi. Budući da su definicije svojevrsna dodatna tvrdjenja (aksiome), za njih se traže ova dva uslova (uslovi ispravnosti definicije[2]):

– da *ne bude kreativna*, tj. da se pomoću nje ne može izvesti nijedno tvrdjenje o polaznim pojmovima koje bez nje ne bi bilo izvodljivo,

– da *bude otklonjiva*, tj. da je svaka formula (rečenica) koja se odnosi na novouvedeni pojam zamenljiva sa nekom formulom (ili skupom formula) u kojoj učestvuju samo imena polaznih pojmova.

♦ U definiensu se često koristi pojam *skupa* u više ili manje aksiomatskom smislu[3]. Takva je definicija neke teorije, a slično i neke relacijsko–operacijske strukture. Naime, neka *matematička teorija* (I reda), kakve su, recimo: elementarna teorija brojeva, teorija skupova ZF, je odredjena skupom[4] izvesnih predikatskih formula I reda – aksiomama, pa se može i sam taj skup aksioma zvati teorijom, što se često i čini. Slično, neka *relacijsko–operacijska struktura* se može shvatiti (definisati) kao skup odgovarajućih formula I reda, ali jedino sa znacima konstanata (tj. bez promenljivih i kvantora – videti zadatak 12).

♦ Neka je $\mathcal{T}$ neka teorija odredjena izvesnim formulama (I reda) kao aksiomama. U takvom slučaju često se pojavljuju ove tri vrste definicija kojima se uvodi znak:

– *nove konstante,*

– *nove operacije (funkcije),*

– *nove relacije.*

---

[1] tj. A sadrži n o v p o j a m.

[2] Njih je prvi formulisao S.Lesniewski (1886–1939).

[3] U vezi sa rečima: više ili manje aksiomatski videti zadatke 64, 65, 66.

[4] Videti poglavlja XV, XVI, a u ovom poglavlju zadatke 1, 7, 22, 27, 28.

Za te definicije pomenimo još da mogu biti *eksplicitne* (neposredne) i *implicitne* (posredne), i da su jednog od oblika:

$$a \overset{\text{def}}{=} b, \text{ gde su } a, b \text{ izrazi}$$

$$A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B, \text{ gde su } A, B \text{ formule}$$

Videti zadatke 1, 2, 3, 6, 10.

♦ Neka je $\mathcal{M}$ neka relacijsko–operacijska struktura. U vezi sa njom se uvode definicije sličnih vidova kao u prethodnom slučaju, ali i definicije kojima se uvode nove konstante, operacije, relacije koje se odnose jedino na članove strukture, odnosno na konstante (to su, može se reći, *dijagramske* ili *tablične* definicije – videti zadatke 13, 14, 15), pa nisu same po sebi produžive i na slučaj proizvoljnih terma sa promenljivim.

♦ Pored skupa u definiensu se često koriste, u većoj ili manjoj meri aksiomatizovani, i neki od pojmova kao:

uredjena dvojka, trojka i sl. *niz, funkcija, relacija.*

Tako, novi pojmovi koji su odredjeni sa dve, tri ili više odrednica mogu se definisati kao odgovarajuće uredjene dvojke, trojke i sl. Na primer, grupoid odredjen skupom G i operacijom $\star$ (tog skupa) može se definisati kao uredjena dvojka $(G, \star)$. Slično se odnosi na pojmove grupa, polje, formalna teorija itd.

Posebno opisujemo jedan važan slučaj nizovskih definicija – tzv. *induktivne definicije.*

♦ U matematici se često prirodno pojavljuju pojmovi medju čijim odrednicama se nalazi i neka koja je prirodan broj[1]. Neka dogovorno P_n označava pojam u slučaju kada pomenuta odrednica ima vrednost n (n je neki prirodan broj $0, 1, 2, ...$). U slučaju *induktivne definicije* (podrobnije rečeno *induktivne po n*) postupa se na ovakav način:

(i) *Definiše se šta je*[2] P_0.
(ii) *Za svaki prirodan broj n* $(n>0)$ *definiše se* P_n *pomoću nekih od prethodnih* $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$.

Recimo, jedna induktivna definicija stepena a^n $(a \in R,\ n = 1, 2, 3, ...)$ glasi:

(i) $a^1 = a$
(ii) $a^{n+1} = a^n \cdot a$

Tu se, u stvari, definiše jedna funkcija $f: R \times \{1, 2, 3, ...,\} \to R$, jer se a^n

[1] Recimo, takvi su pojmovi stepena a^n, formule dužine n, teoreme koja ima dokaz dužine n i sl.

[2] U tom delu se definiše P_n za početnu vrednost n, odnosno za n=0. Moguće je da ta početna vrednost bude i neki drugi prirodan broj kao 1,2 i sl. Takodje ima i slučajeva induktivnih definicija sa nekoliko početnih vrednosti (videti zadatke 48, 52).

može shvatiti kao $f(a, n)$.

Pored *funkcijskih* (operacijskih) definicija prirodno se javljaju i induktivne *relacijske* definicije (kakve su definicije izraza, formule, teoreme – videti zadatke 52, 53, 54).

♦ Ispravnost neke induktivne definicije počiva na odnosnoj matematičkoj indukciji. Recimo, navedena definicija stepena je ispravna blagodareći indukciji[1] $n \to n+1$. Naime, koristeći se tom indjkcijom, lako se dokazuje da je uslovima (i), (ii) odredjena tačno jedna funkcija $f(a, n)$.

♦ U matematici se takodje pored istaknutih, koriste i razne druge vrste definicija kao definicije *operacija i relacija sa relacijama i sl.* (videti zadatak 55–58).

ZADACI

1. Na jeziku $\{0, 1, +, \cdot, -\}$, gde su 0, 1 znaci konstanata, $+$ i $\cdot$ operacijski znaci dužine 2, $-$ operacijski znak dužine 1, uočena je teorija[2] $\mathcal{T}$, tj. skup aksioma (podrazumevajući i aksiome jednakosti):

$$x+y = y+x \qquad x\cdot y = y\cdot x$$
$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$
$$x+0 = x \qquad x\cdot 1 = x$$
$$x+(-x) = 0 \qquad x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

Koja od datih definicija[3] je ispravna

a) $c \overset{\text{def}}{=} 1 + 1$, c je nov znak konstante

b) $f(x,y) \overset{\text{def}}{=} (x+y) + (x\cdot y)$, f je nov operacijski znak

c) $f(x,y) \overset{\text{def}}{=} (x\cdot y) + z$, f je nov operacijski znak.

Uputstvo. Skup $\mathcal{T}$ je neprotivurečan, budući da ima (normalan) model.

---

[1] Ispravnost induktivne definicije može se oslanjati i na nekoj drugoj indukciji za prirodne brojeve. Pomenimo još da se sreću i opštije induktivne definicije po članovima nekog dobro uredjenog skupa ili još opštije, skupa koji zadovoljava uslov minimalnosti. Ispravnost takve definicije se tada dokazuje korišćenjem t r a n s f i n i t n e indukcije. Videti zadatak 36 tačke XVI.

[2] Jedan model je struktura celih brojeva. To su, inače, aksiome prstena (komutativnog sa jedinicom).

[3] Na definiciju vida a) se nailazi, recimo, kada se u aritmetici 2 definiše kao 1+1. Slične su i definicije za 3, 4, 5, ... Inače, definicija a) se lako izražava u obliku A j e z a m e n a z a B:

2 je zamena za 1+1

Slično vredi i za definiciju b).

a) Jasno je da je c otklonjivo, jer je ma koja formula $F(c)$ jezika $\{0, 1, +, \cdot, -, c\}$ – na osnovu aksioma jednakosti – ekvivalentna sa $F(1+1)$. Ta definicija je i nekreativna. Zaista, neka važi

$$\mathcal{P}, c = 1+1 \models F \tag{1}$$

gde je F formula na jeziku $\{0, 1, +, \cdot, -\}$. Označimo sa $\mathcal{M}$ ma koji model za $\mathcal{P}$. Taj je model produživ do modela $\mathcal{M}'$ za $\mathcal{P}$, $c = 1+1$, uzimanjem da se c tumači kao vrednost za $1+1$. Prema (1) u $\mathcal{M}'$ mora važiti F, odakle sledi da u $\mathcal{M}$ važi F (budući da c ne učestvuje u F). Dakle, iz (1) sledi

$$\mathcal{P} \models F \tag{2}$$

pa je definicija $c=1+1$ nekreativna.

b) Slično kao pod a), jer je ma koji model $\mathcal{P}$ produživ do modela za

$$\mathcal{P},\ f(x, y) = (x+y) + (x \cdot y)$$

c) Kreativna je, jer zamenom x, y, z sa $0, 0, 0$, a potom sa $0, 0, 1$ iz $\mathcal{P}, f(x,y) = (x \cdot y) + z$ slede jednakosti

$$f(1, 1) = 0, \qquad f(1, 1) = 1$$

Odatle sledi jednakost $0 = 1$, a ona nije teorema, odnosno posledica aksioma $\mathcal{P}$, što se lako dokazuje. Osnovni razlog kreativnosti je što definiens ima više promenljivih od definienduma.

Napomena. Dokaz nekreativnosti definicije a), a slično i uopšte definicije takve vrste, može se izvesti i direktno – bez pozivanja na model.

Naime, uočimo funkciju f (zvaćemo je „brišuća funkcija") kojom se formule jezika $L' = \{0, 1, +, \cdot, -, c\}$ prevode u formule polaznog jezika $L = \{0, 1, +, \cdot, -\}$:

$f(A)$ se dobija iz A kada se u toj formuli konstanta c svuda zameni sa $1+1$.

Tim se preslikavanjem aksiome $\mathcal{P}$, budući da u njima c ne učestvuje, prevode u same sebe, a definicija $c = 1+1$ u formulu $1+1 = 1+1$ (koja je slučaj aksiome jednakosti $x=x$). Dalje, ako je A valjana formula jezika L', valjana je i formula $f(A)$ – videti lemu o promenljivoj konstanti, zadatak 100 tačke XII. Najzad, logička, a takodje i matematička pravila izvodjenja prevode se u pravila izvodjenja. Recimo, ako je reč o pravilu (1), koje je slučaj pravila saglasnosti jednakosti sa +, ono se preslikavanjem f prevodi u pravilo (2), odnosno u (2'):

$$(1)\ \frac{x=y,\ c=1+1}{x+c=y+(1+1)}, \qquad (2)\ \frac{x=y,\ 1+1=1+1}{x+(1+1) = y+(1+1)} \qquad (2')\ \frac{x=y}{x+(1+1) = y+(1+1)}$$

Na osnovu rečenog, preslikavanjem f se svaki dokaz iz aksioma $\mathcal{P}$, $c = 1+1$ prevodi u neki dokaz samo iz aksioma $\mathcal{P}$. Otuda, ako je F formula na jeziku L i to takva da $\mathcal{P}, c = 1+1 \vdash F$, onda se njen dokaz prevodi u dokaz iste formule, ali samo iz aksioma $\mathcal{P}$. Dakle:

$$\mathcal{P}, c = 1+1 \vdash F \rightarrow \mathcal{P} \vdash F$$

Obratna implikacija sledi neposredno

2. Na datom jeziku L uočene su izvesne aksiome $\mathcal{T}$. Koje od narednih definicija su ispravne

a) $c \overset{\text{def}}{=} t$, gde je t izraz jezika L koji ne sadrži promenljive, a c je znak konstante koji ne pripada L.

b) $f(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} t$, gde je t izraz jezika L čiji skup promenljivih je podskup skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$, a f je operacijski znak koji ne pripada L.

c) $g(x, y, z) \overset{\text{def}}{=} t(x, y, z, u)$, gde je t izraz jezika L po promenljivim x, y, z, u i gde g ne pripada L.

Odgovor. Ispravne su a) i b).

Napomena. Delovima a) i b) opisuje se izgled tzv. *eksplicitne (neposredne) definicije nove konstante*, odnosno *nove operacije*, u slučaju predikatskog računa I reda. U zadatku 3 se slično opisuje izgled *implicitne definicije nove konstante*, a u zadatku 6 *implicitne definicije nove funkcije*. Najzad, u zadatku 10 se izlaže opšti oblik *eksplicitne definicije nove relacije*.

3. Neka je $\mathcal{T}$ teorija jezika L i neka je $a \notin L$ znak konstante, tj. a je nova konstanta. Dokazati da je definicija[1] vida

$$(\Delta) \qquad x = a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F$$

ispravna, za svaku teoriju $\mathcal{T}$, akko:

(i) Formula F ima tačno jednu slobodnu promenljivu x.

(ii) F je na jeziku L

(iii) Formula $(\exists_1 x)F$ je teorema teorije

Rešenje. Otklonjivost sledi neposredno na osnovu samog oblika definicije (Δ) i uslova (ii). Videti i zadatak 5. Da bismo dokazali da uslovi (i), (ii), (iii) obezbedjuju i nekreativnost, uočimo proizvoljnu neprotivurečnu[2] teoriju $\mathcal{T}$ jezika L, neku formulu $\boldsymbol{A}$ istog jezika, i pretpostavimo da vredi

$$(1) \qquad \mathcal{T}, (\Delta) \models A$$

Neka je, dalje, $\mathcal{M}$ jedan model teorije $\mathcal{T}$. Na tom modelu tačna je formula $(\exists_1 x)F$, budući da je to teorema za $\mathcal{T}$. Sa a_M označimo taj „jedinstveno postojeći" element domena. Model $\mathcal{M}$ se može produžiti do modela $\mathcal{M}'$ za

$$\mathcal{T}, (\Delta)$$

[1] To je, u stvari, implicitna definicija nove konstante – definiendum je x = a.

[2] Slučaj kada je $\mathcal{T}$ protivurečna teorija razmatra se neposredno.

Naime, dosta je a interpretirati[1] kao a_M. Na osnovu (1), $\mathcal{M}'$ je model i za A. Kako je formula A na jeziku L, to je njen model i skraćenje od $\mathcal{M}'$ dobijeno odstranjivanjem interpretacije za a, tj. model za A je i $\mathcal{M}$. Time je dokazano da da iz (1) sledi

$$(2) \qquad \mathcal{T} \models A$$

tj. „modelskim" postupkom je dokazano da je (Δ) nekreativna definicija za ma koju teoriju.

Da su uslovi (i), (ii), (iii) neophodni uočava se na ovaj način. Neka je jezik $L = \{0, 1, +, \cdot, -\}$ i $\mathcal{P}$ teorija prstena iz zadatka 1. Lako se dokazuje da su za tu teoriju neispravne, recimo, definicije

(1) $x=a \Longleftrightarrow x=0 \vee y=1$, (2) $x=a \Longleftrightarrow a+x=0$, (3) $x=a \Longleftrightarrow x\cdot(x-1)=0$

u kojima su uslovi (i), (ii), (iii) po redu narušeni.

4. Na jeziku $\{\star\}$ uočimo formulu (aksiomu)

$$(\exists y)(\forall x)(x \star y = x \wedge y \star x = x)$$

i ekvivalencijom

$$(\Delta) \qquad y = e \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)(x \star y = x \wedge y \star x = x)$$

uvedimo novu konstantu e. Dokazati ispravnost te definicije.

Rešenje. Dosta je dokazati

$$(\exists_1 y)(\forall x)(x \star y = x \wedge y \star x = x)$$

P o s t o j a nj e sledi iz aksiome. U vezi sa j e d i n s t v e n o š ć u, iz pretpostavki

$$(\forall x)(x \star y_1 = x \wedge y_1 \star x = x), \quad (\forall x)(x \star y_2 = x \wedge y_2 \star x = x)$$

stavljajući umesto x najpre y_1, a potom y_2 neposredno se izvodi $y_1 = y_2$.

5. Produžetak prethodnog.

(i) Definiciju (Δ) izraziti u obliku

A je zamena za B

(ii) Otkloniti e iz formula

$$x \star e = x, \quad (x \star e) \star y = x \star (y \star e)$$

Rešenje. (i) $y = e$ *je zamena za* $(\forall x)(x \star y = x \wedge y \star x = x)$

(ii) Otklanjanje se vrši primenom jednog od zakona zamene:

$$A(x) \Longleftrightarrow (\exists y)(y = x \wedge A(y)), \quad A(x) \Longleftrightarrow (\forall y)(y = x \Rightarrow A(y))$$

---

[1] jer tada, u slučaju da x ima vrednost a_M, obe strane ekvivalencije (Δ) su tačne, a u slučaju da je ta vrednost različita od a_M, obe strane su netačne.

gde je y nova promenljiva za formulu $A(x)$.
Najpre se formula oblika $A(e)$ zameni jednom od ekvivalentnih formula

$$(\exists y)(y = e \wedge A(y)), \qquad (\forall y)(y = e \Rightarrow A(y))$$

a potom se koristi ekvivalencija (Δ). Tako, postupak eliminacije u vezi sa drugom formulom izgleda:

$$\begin{aligned}
&(x \star e) \star y = x \star (y \star e)\\
&\Longleftrightarrow (\exists z)(z = e \wedge (x \star z) \star y = x \star (y \star z))\\
&\Longleftrightarrow (\exists z)((\forall x)(x \star z = x \wedge z \star x = x) \wedge (x \star z) \star y = x \star (y \star z))
\end{aligned}$$

6. Neka je L neki jezik i $f \notin L$ operacijski znak dužine n, dakle nov znak. Dokazati da je definicija vida

$$f(u_1, \ldots, u_n) = v \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F$$

ispravna za svaku teoriju $\mathcal{G}$ jezika L akko:

(i) $u_1, \ldots, u_n, v$ su različite promenljive,
(ii) Formula F nema drugih slobodnih promenljivih izuzev (možda) $u_1, \ldots, u_n, v$,
(iii) F je na jeziku L,
(iv) Formula $(\forall u_1, \ldots, u_n)(\exists_1 v)F$ je teorema teorije $\mathcal{G}$.

7. Na jeziku $\{\star\}$ uočimo *aksiome grupe:*

$$(\forall x,y,z)(x \star y) \star z = z \star (y \star z), \; (\exists z)((\forall x) x \star z = x \wedge (\forall x)(\exists y) x \star y = z)).$$

Dokazati da su definicije znaka konstante e (jedinični element) i operacijskog znaka $^{-1}$ (operacija inverznog elementa) ispravne

$$z = e \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)(x \star z = x \wedge z \star x = x), \quad y = x^{-1} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \star y = e \wedge y \star x = e$$

Rešenje. Ovde je reč o paru uzastopnih[1] definicija (najpre se uvodi e a potom $^{-1}$). U skladu sa zadacima 3 i 6 dosta je dokazati:

$$(\exists_1 z)((\forall x)(x \star z = x \wedge z \star x = x) \wedge (\forall x)\;(\exists_1 y)(x \star y = z \wedge y \star x = z))$$

Uočimo najpre jedan desni jedinični element ϵ i za element a jedan njegov desni inverzni element b (u odnosu na ϵ). Dakle, pretpostavke su

(1) $\qquad (\forall x) x \star \epsilon = x, \quad a \star b = \epsilon$

Tada vrede i jednakosti

(2) $\qquad b \star a = \epsilon, \quad (\forall x) \epsilon \star x = x$

Evo jednog dokaza prve

[1] One se mogu zameniti dvema jednovremenim definicijama:

$$z = e \Longleftrightarrow (\forall x)(x \star z = x \wedge z \star x = x)$$

$$y = x^{-1} \Longleftrightarrow (\forall z)((\forall x)(x \star z = x \wedge z \star x = x) \Rightarrow x \star y = z \wedge y \star x = z)$$

$$b \star a = (b \star a) \star \epsilon = (b \star a) \star (b \star c)^{1)}$$
$$= (b \star (a \star b)) \star c = (b \star \epsilon) \star c = b \star c = \epsilon$$

Slično se dokazuje i druga jednakost. Znači, desni jedinični element je i levi, a svaki desni inverzni (u odnosu na uočenu jedinicu) je takodje i levi inverzni. Odatle i na osnovu aksioma sledi p o s t o j a nj e, odnosno formula

$$(\exists z)((\forall x)(x \star z = x \wedge z \star x = x) \wedge (\forall x)(\exists y)(x \star y = z \wedge y \star x = z))$$

Dokaz j e d i n s t v e n o s t i izvodi se jednostavno, slično kao u zadatku 4.

8. U teoriji prstena $\mathcal{P}$ (zadatak 1) uočene su definicije znaka konstante c i operacijskog znaka $\star$ (oba su novi znaci):

a) $y = c \Longleftrightarrow y = (1+1)+1,$ b) $y = c \Longleftrightarrow (\exists x) x + y = 1$
c) $y = c \Longleftrightarrow (\forall x) x \cdot y = x,$ d) $y = c \Longleftrightarrow (\forall x) x + (1+1) \cdot y = -1$
e) $x \star y = z \Longleftrightarrow z = x \cdot (x + y),$ f) $x \star y = z \Longleftrightarrow x = y + z,$
g) $x \star x = z \Longleftrightarrow x + y + z = 0,$ h) $x \star y = z \Longleftrightarrow x = y \cdot z$
i) $x \star y = z \Longleftrightarrow (\exists q) x = y \cdot q + z,$ j) $x \star y = z \Longleftrightarrow (\exists q) x + y = (1+1) \cdot q + z$

Ispitati njihovu ispravnost.

9. Aksiomama grupe (zadatak 7) dodata je definicija

$$(\Delta) \qquad x \star^{-1} y = z \Longleftrightarrow x = z \star y$$

kojom se uvodi nov operacijski znak $\star^{-1}$. Dokazati ispravnost te definicije i otkloniti znak $\star^{-1}$ iz formula

$$(x \star^{-1} y) \star^{-1} z = x \star^{-1} (z \star y), \quad (x \star y) \star^{-1} z = x \star (y \star^{-1} z)$$
$$x \star^{-1} (y \star^{-1} u)) = ((x \star z) \star^{-1} u) \star^{-1} y$$

Uputstvo. Osnovna ideja pri eliminaciji, koja je inače opšte prirode, sastoji se u sledećem. Najpre se, slično kao pri otklanjanju konstante (zadatak 5), primenom jednog od zakona zamene

$$A(x) \Longleftrightarrow (\exists y)(y = x \wedge A(y)), A(x) \Longleftrightarrow (\forall y)(y = x \Rightarrow A(y))$$

(y je nova promenljiva za $A(x)$)

predje na formulu čije su elementarne formule ili takve da u njima znak $\star^{-1}$ ne učestvuje, ili su to formule oblika $t_1 \star^{-1} t_2 = t_3$, gde su t_1, t_2, t_3 izrazi bez $\star^{-1}$, a potom se postupno vrši eliminacija[2] primenom ekvivalencije (Δ). Pokazujemo to na primeru prve formule:

---

[1] c je desni inverzni za b (u odnosu na ϵ). On postoji na osnovu druge aksiome.

[2] Kratko rečeno, najpre se uvodi definiendum a potom se on zamenjuje definiensom.

$$(x \star^{-1} y) \star^{-1} z = x \star^{-1} (z \star y)$$
$$\Longleftrightarrow (\exists u)((x \star^{-1} y) \star^{-1} z = u \wedge x \star^{-1} (z \star y) = u)$$
$$\Longleftrightarrow (\exists u, v)(x \star^{-1} y = v \wedge v \star^{-1} z = u \wedge x \star^{-1} (z \star y) = u)$$
$$\Longleftrightarrow (\exists u, v)(x = v \star y \wedge v = u \star z \wedge x = u \star (z \star y))$$

Dobijena ,,eliminanta" je takva da se iz nje, još jednom primenom zakona zamene (ali sada zdesna nalevo), može izbaciti promenljiva v. Tako se dobija:

$$(\exists u)(x = (u \star z) \star y \wedge x = u \star (z \star y))$$

odnosno, budući da je $\star$ asocijativna, prethodna formula je ekvivalentna sa

(1) $$(\exists u)\, x = u \star (z \star y)$$

Ukoliko se koristi drugi zakon zamene dobiće se ova eliminanta

(2) $$(\forall u)(x = (u \star z) \star y \Rightarrow x = u \star (z \star y))$$

Primetimo da su obe formule (1) i (2) teoreme teorije grupa (odnosno posledice aksioma zadatka 7), pa je otuda teorema i formula:

$$(x \star^{-1} y) \star^{-1} z = x \star^{-1} (z \star y)$$

10. Neka je L izvestan jezik i α nov relacijski znak dužine n. Dokazati da je definicija oblika (eksplicitna definicija novog relacijskog znaka):

$$\alpha(u_1, \ldots, u_n) \Longleftrightarrow F$$

ispravna, za svaku teoriju $\mathcal{G}$ uočenog jezika, akko:

(i) Sve promenljive $u_1, \ldots, u_n$ su različite.
(ii) Formula F nema drugih slobodnih promenljivih izuzev (možda) $u_1, \ldots, u_n$.
(iii) F je na jeziku L.

11. U elementarnoj teoriji brojeva (poglavlje XV) novi relacijski znaci $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ uvode se nizom uzastopnih definicija:

$$x > y \Longleftrightarrow (\exists z \neq 0)\, x = y + z, \qquad x < y \Longleftrightarrow y > x$$
$$x \geqslant y \Longleftrightarrow x > y \vee x = y, \qquad x \leqslant y \Longleftrightarrow y \geqslant x$$

Dokazati njihovu ispravnost.

12. Tablicama

$\star$	a	b
a	b	a
b	a	b

α	a	b
a	$\top$	$\perp$
b	$\top$	$\perp$

odredjena je jedna relacijsko–operacijska struktura jezika $\{\star, \alpha\}$. Dokazati da su ispravne ove definicije

(1) $$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x \star x) \star x$$

(2) $$\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha(x, y) \wedge \neg\, \alpha(y, x)$$

novog operacijskog znaka f, odnosno relacijskog znaka ρ.

Uputstvo. U postavci je slobodnije rečeno da je struktura „odredjena tablicama" Strože rečeno, to znači da pod strukturom treba smatrati skup $\mathcal{T}$ odnosnih formula na jeziku $\{\star, \alpha, a, b\}$:

$$\begin{array}{llll} a \star a = b, & a \star b = a & \alpha(a, a), & \neg\alpha(a, b) \\ b \star a = a, & b \star b = b & \alpha(b, a), & \neg\alpha(b, b) \end{array}$$
$$a \neq b$$

tj. u stvari, dijagram strukture. Budući da definicije (1) i (2) očigledno zadovoljavaju uslov otklonjivosti, preostaje da se, slično kao u zadacima 1, 3, dokaže implikacija oblika

$$\mathcal{G}, (1), (2) \models A \rightarrow \mathcal{G} \models A$$

gde je A ma koja formula jezika $\{\star, \alpha, a, b\}$.

Primedba. I u opštem slučaju, za dati jezik L i izvestan skup S, pod relacijsko–operacijskom strukturom jezika L sa skupom S kao nosiocem smatramo ma koji dijagramski skup formula na jeziku $L \cup S$, tj. r a z n i h jednakosti vida

(1) $$f(c_1, \ldots, c_n) = c,$$

gde $f \in L$, $c_1, \ldots, c_n, c \in S$ i gde za svaku n–torku, $(c_1, \ldots, c_n)$ postoji tačno jedan c;

d a lj e formula vida

(2) $$\rho^{\alpha}(c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha \text{ je } \top \text{ ili } \bot)$$

gde $\rho \in L$, $c_1, \ldots, c_n \in S$, i gde za svaku n–torku $(c_1, \ldots, c_n)$ postoji tačno jedan α (inače, ρ, $\rho^{\bot}$ su redom drugi zapisi za ρ, $\neg\rho$);

n a j z a d, formula vida $c_i \neq c_j$ kojima se govori o različitosti članova skupa S.

To je, moglo bi se tako reći, logički najviše odgovarajuća definicija relacijsko–operacijske strukture. Obično se, medjutim, navedena definicija skraćenije izražava isticanjem odredjenim redom osnovnih odrednica pojma relacijsko–operacijska struktura, odnosno skupa S, i njegovih odgovarajućih (u vezi sa jezikom L) operacija i relacija. Tako, u skladu sa tim, grupoid se obično kratko definiše kao uredjena dvojka $(S, \star)$ gde je $\star$ binarna operacija skupa S. Podrobnije:

Dvojka $(S, \star)$ je grupoid akko je S skup a $\star$ binarna operacija tog skupa.

13. Produžetak prethodnog zadatka. Dokazati da su nekreativne definicije

(i) $f(a)=b$, $f(b)=a$, f je nov operacijski znak

(ii) $\tau\rho(a,a) = \top$, $\tau\rho(a, b) = \top$, $\tau\rho(b, a) = \top$, $\tau\rho(b, b) = \bot$, gde je ρ nov relacijski znak.

Da li su te definicije otklonjive?

Uputstvo. Nekreativnost se može dokazati na uobičajeni način (zadaci 1, 3), budući da je svaki model za $\mathcal{F}$ produživ do nekog modela za $\mathcal{F}$, (i), (ii).

Što se tiče otklonjivosti, primetimo da je znak f u termima oblika $f(a)$, $f(b)$, $(b \star f(a))$, $f(f(b))$ i sl. očigledno otklonjiv. Medjutim, u termima kao $f(x)$, $(a \star f(y))$, $(f(f(x)) \star y) \star a$, odnosno u proizvoljnim termima na jeziku $\{a, b, \star, f\}$ (u kojima *učestvuju* i promenljive) znak f u opštem slučaju nije otklonjiv[1]. Slično stoji i sa otklonjivošću znaka ρ.

Napomena. Definicijama (i), (ii) iz prethodnog zadatka uvedene su, u stvari, *parcijalna* funkcija, odnosno relacija u skupu terma na jeziku $\{a, b, \star, f\}$. Naime, $f(t)$ je definisano za terme t koji ne sadrže promenljive. Slično se odnosi na $\rho(t_1, t_2)$. Pri tome su t, odnosno t_1, t_2 proizvoljni termi proširenog jezika. I u opštem slučaju dijagramskim definicijama se uvode parcijalna operacija, odnosno parcijalna relacija.

14. **Produžetak zadatka 12.** Ako se dijagramu $\mathcal{F}$ doda i aksioma $x=a \vee x=b$, definicije iz prethodnog zadatka:

(i) $f(a) = b$, $f(b) = a$, *gde je f nov operacijski znak*

(ii) $\tau\rho(a,a) = \top$, $\tau\rho(a,b) = \top$, $\tau\rho(b,a) = \top$, $\tau\rho(b,b) = \bot$, *gde je* ρ *nov relacijski znak*

postaju otklonjive. Dokazati.

Uputstvo. Iz $\mathcal{F}$, (i), (ii), $x=a \vee x=b$ slede formule

$$y=f(x) \Longleftrightarrow (x=a \wedge y=b) \vee (x=b \wedge y=a)$$

$$\rho(x,y) \Longleftrightarrow (x=a \wedge y=a) \vee (x=a \wedge y=b) \vee (x=b \wedge y=a)$$

15. Neka je $\mathcal{A}$ izvesna relacijsko–operacijska struktura jezika L čiji je skup nosilac A beskonačan (recimo prebrojiv, sa elementima a_1, a_2, a_3, ...), i f operacija uvedena dijagramskom definicijom:

$$f(a_1) = a_1', \qquad f(a_2) = a_2', \qquad f(a_3) = a_3', \ldots$$

gde su a_1', a_2', a_3', ... članovi skupa A. Dokazati da je takva definicija nekreativna, ali da nije otklonjiva.

Da li se neotklonjivost može izbeći dodavanjem novih aksioma jezika $L \cup \{a_1, a_2, \ldots\}$, slično kao u prethodnom zadatku?

Odgovor. Ne može, a glavni razlog je što se formulama I reda na jeziku $L \cup \{a_1, a_2, \ldots\}$ ne može zapisati rečenica:

Članovi skupa A su upravo a_1, a_2, ...

16. Uočimo strukturu celih brojeva $(Z, +, \cdot, 0, 1)$ na jeziku $\{+, \cdot, 0, 1\}$ i oduzi-

[1] Strog dokaz te činjenice navodimo u zadatku 29.

manje uvedimo definicijom

$$x - y = z \Longleftrightarrow x = y + z$$

Dokazati njenu ispravnost i otkloniti znak – iz formula:

$$(x-y) - z = x - (y+z), \qquad x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$$
$$x = y \Longleftrightarrow x - y = 0, \qquad x-y = z-u \Rightarrow x+u = y+z$$

17. U teoriji skupova, recimo teoriji ZF razmatranoj u tački XVI, posebnu ulogu imaju formule oblika

$$(1) \qquad (\forall x)(x \in s \Longleftrightarrow S(x_1, ..., x_n, x))$$

gde je S formula čije su jedine slobodne promenljive $x_1, ..., x_n, x$. Recimo, takve su formule

$$(\forall x)(x \in s \Longleftrightarrow x=a \vee x=b), \quad (\forall x)(x \in s \Longleftrightarrow (\exists z)(z \in y \wedge x \in z))$$

koje učestvuju u definicijama dvočlanog skupa, odnosno unije skupa. Na osnovu opštih razmatranja u zadatku 6 implicitna definicija novog *skupovnog* terma $f(x_1, ..., x_n)$:

$$s = f(x_1, ..., x_n) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall x)(x \in s \Longleftrightarrow S(x_1, ..., x_n, x))$$

je ispravna, akko je formula

$$(\forall x_1, ..., x_n)(\exists_1 s)(\forall x)(x \in s \Longleftrightarrow S(x_1, ..., x_n, x))$$

teorema teorije ZF, s tim što se u opštem slučaju, taj novi term obično označava[1] sa $\{x \mid S(x_1, ..., x_n, x)\}$. Tako, budući da je formula

$$(\forall a, b)(\exists_1 s)(\forall x)(x \in s \Longleftrightarrow x = a \vee x = b)$$

teorema teorije ZF, odgovarajuća definicija dvočlanog skupa je ispravna. Slično je sa definicijama praznog skupa, unije, preseka itd.

(i) Neka su S, S_1, S_2 skupovna svojstva (po x). Otkloniti odgovarajuće skupovne terme iz formula:

$$u \in \{x \mid S(x_1, ..., x_n, x)\}, \qquad \{x \mid S(x_1, ..., x_n, x)\} \in u,$$
$$\{x \mid S_1(x_1, ..., x_n, x)\} \in \{x \mid S_2(x_1, ..., x_n, x)\},$$
$$\{x \mid S_1(x_1, ..., x_n, x)\} = \{x \mid S_2(x_1, ..., x_n, x)\}$$

(ii) Dokazati da je definicija (skupa s):

$$s = \{x \mid x \notin x\} \Longleftrightarrow (\forall x)(x \in s \Longleftrightarrow x \notin x)$$

kreativna.

---

[1] U takvom slučaju smo govorili i da je svojstvo S skupovno (po x), odnosno da klasa $\{x \mid S(x_1, ..., x_n, x)\}$ jeste skup.

Uputstvo. (i) Postupak eliminacije je kao u opštem slučaju. Na primer, u vezi sa drugom formulom imamo:

$$\{x \mid S(x_1, \ldots, x_n, x)\} \in u$$
$$\Longleftrightarrow (\exists v)(v = \{x \mid S(x_1, \ldots, x_n, x)\} \wedge v \in u)$$
$$\Longleftrightarrow (\exists v)(\forall x)(x \in v \Longleftrightarrow S(x_1, \ldots, x_n, x)) \wedge v \in u)$$

(ii) Videti zadatak 19, tačke II.

18. **Produžetak prethodnog.** Da li se u postupku eliminacije koriste aksiome teorije ZF?

Odgovor. Ne koriste se. Otuda se formule oblika (1) mogu razmatrati i u nekoj drugoj teoriji (umesto $\in$ će tada doći neka druga relacija). Tako, ukoliko je $\leqslant$ relacija poretka izvesnog skupa, ali takva da vredi

$$(\forall x_1, x_2)(\exists_1 s)(\forall x)(x \leqslant s \Longleftrightarrow x \leqslant x_1 \wedge x \leqslant x_2)$$

onda je

$$s = inf(x_1, x_2) \Longleftrightarrow (\forall x)(x \leqslant s \Longleftrightarrow x \leqslant x_1 \wedge x \leqslant x_2)$$

ispravna definicija infimuma – videti zadatak 18 tačke XIV. Formula

(2) $$(\forall x)(x \leqslant s \Longleftrightarrow x \leqslant x_1 \wedge x \leqslant x_2)$$

je, očigledno, oblika (1), a postupak eliminacije znaka *inf* je potpuno sličan prethodnom.

19. Koristeći opisani postupak eliminacije novog operacijskog znaka, odnosno nove konstante (zadaci 5 i 9) dokazati direktno, bez pozivanja na model, da su implicitne definicije nove konstante i nove operacije (zadaci 3 i 6) nekreativne.

Uputstvo. Postupiti slično kao u Napomeni posle zadatka 1. Naime, uočiti „brišuću funkciju" kojom se formula A novog, proširenog jezika prevodi u formulu $f(A)$ starog jezika. Pri tome je formula $f(A)$ dobijena eliminacijom novog znaka iz formule A. Na primer, ako je A formula $(x^2 - y^2) = (x+y)\cdot(x-y)$ iz zadatka 16, onda se za formulu $f(A)$ može uzeti:

$$(\exists u, v)(x^2 = y^2 + u \wedge x = y + v \wedge u = (x+y)\cdot v)$$

Preslikavanjem f se dokaz prevodi u dokaz.

20. Uočimo uobičajene definicije funkcija *moduo* i *signum* za realne brojeve

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{ako } x < 0 \end{cases} \qquad sgn\, x = \begin{cases} 1, & \text{ako } x > 0 \\ 0, & \text{ako } x = 0 \\ -1, & \text{ako } x < 0 \end{cases}$$

Da li se te definicije mogu izraziti u obliku

$$y = |x| \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ldots, \qquad y = sgn\, x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ldots$$

Uputstvo. Najpre primetimo da data definicija modula zapisana korišćenjem logičkog jezika glasi

(Δ_1) $\quad (x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x) \wedge (x < 0 \Rightarrow |x| = -x)$

Dokazaćemo da je ona ekvivalentna sa definicijom)

(Δ_2) $\quad y = |x| \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x \geqslant 0 \Rightarrow y = x) \wedge (x < 0 \Rightarrow y = -x)$

koja je očigledno traženog oblika.

Najpre dokazujemo da je definicija (Δ_2) ispravna. Prema zadatku 6 dosta je dokazati

$(\star)$ $\quad (\forall x)(\exists_1 y)((x \geqslant 0 \Rightarrow y = x) \wedge (x < 0 \Rightarrow y = -x)$

Dokaz se izvodi razlikovanjem slučajeva:

$$1^\circ \ x \geqslant 0, \qquad 2^\circ \ x < 0$$

Naime, u prvom slučaju, za x jedinstveno postojeći y je upravo x a u drugom je to $-x$.

Da su definicije (Δ_1) i (Δ_2) ekvivalentne[1] sledi iz ovog rasudjivanja. Naime, zamenjujući u formulu (Δ_2) umesto y baš $|x|$, neposredno se dobija (Δ_1). Obratno, iz pretpostavke (Δ_1), na osnovu svojstava jednakosti, neposredno sledi implikacija

$$y = |x| \Rightarrow (x \geqslant 0 \Rightarrow y = x) \wedge (x < 0 \Rightarrow y = -x),$$

dok obratna implikacija sledi na osnovu dokazane formule $(\star)$. Traženi ekvivalencijski oblik za definiciju funkcije *signum* je:

$$y = \operatorname{sgn} x \Longleftrightarrow (x > 0 \Rightarrow y = 1) \wedge (x = 0 \Rightarrow y = 0) \wedge (x < 0 \Rightarrow y = -1)$$

21. Neka je $\mathcal{T}$ neka teorija i $F(x, y)$ formula na jeziku te teorije, čije su jedine slobodne promenljive x, y. Neka je, dalje, $(\forall x)(\exists_1 y)\, F(x, y)$ teorema za $\mathcal{T}$. Dokazati da je tada u teoriji $\mathcal{T}$ teorema i ova ekvivalencija

$$F(x, f(x)) \Longleftrightarrow (\forall y)(y = f(x) \Longleftrightarrow F(x, y)),$$

gde je f nov operacijski znak.

Napomena. Prema toj ekvivalenciji implicitna definicija operacije f

(Δ_1) $\quad y = f(x) \Longleftrightarrow F(x, y)$

može se zameniti sa

(Δ_2) $\quad F(x, f(x))$

i obratno, umesto (Δ_2) za definiciju operacije f može se upotrebiti (Δ_1).

22. Na jeziku $\{\leqslant, =\}$ uočimo *aksiome totalnog poretka:*

[1] Tačnije, ekvivalentne su formula (Δ_1) i formula dobijena iz (Δ_2) generalizacijom po y.

$$x \leqslant x,\ x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x=y,\ x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z,\ x \leqslant y \vee y \leqslant x$$
$$x = x,\ x=y \Rightarrow y=x,\ \ x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z,\ \ x=y \wedge z=u \Rightarrow (x \leqslant z \Rightarrow y \leqslant u)$$

Nove relacijske znake $\geqslant, <, >$ i nove operacijske znake *min, max* (svi su dužine 2) uvodimo nizom uzastopnih definicija:

$$x \geqslant y \Longleftrightarrow y \leqslant x,\quad x < y \Longleftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y,\quad x > y \Longleftrightarrow y < x$$
$$(x \leqslant y \Rightarrow min(x,y) = x) \wedge (x > y \Rightarrow min(x,y) = y)$$
$$(x \leqslant y \Rightarrow max(x,y) = y) \wedge (x > y \Rightarrow max(x, y) = x)$$

Dokazati njihovu ispravnost.

23. **Produžetak prethodnog.** Otkloniti znake *min* i *max* iz formula

$$max(x, y) = max(y, x),\qquad max(x, min(x, y)) \geqslant x$$
$$min(x, y) = x \wedge min(y, z) = y \Rightarrow x \leqslant z$$

Uputstvo. Definicije operacija *min, max* izraziti u obliku ekvivalencije.

24. U teoriju $\mathcal{T}$ na jeziku $\{\rho, =\}$ – ρ je relacijski znak dužine 2, = znak jednakosti – uvodimo nov operacijski znak f formulama:

$$\rho(x, y) \Rightarrow f(x, y) = x,\qquad \neg\, \rho(x, y) \Rightarrow f(x, y) = y$$

Dokazati ispravnost te definicije.

25. Neka je $\{\leqslant, =\}$ jezik teorije $\mathcal{T}$ a aksiome su

$$x=x,\quad x=y \Rightarrow y=x,\quad x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z$$
$$x \leqslant x,\ x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x=y,\quad x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$$

Dokazati da se relacijski znak $\leqslant$ ne može definisati pomoću =.

Rešenje. Uočimo ovakve dve interpretacije

(i) Domen je skup svih realnih brojeva, = je *jednakost*, $\leqslant$ je *biti manji ili jednak.*

(ii) Domen i tumačenje za = su isti kao u prethodnoj interpretaciji, a $\leqslant$ se tumači kao relacija *veći ili jednak.*

Očigledno obe interpretacije su modeli datih aksioma. Ukoliko bi se znak $\leqslant$ mogao izraziti pomoću =, tj. ako bi postojala formula $F(x, y; =)$ na jeziku $\{=\}$ koja nema drugih slobodnih promenljivih do x, y, i takva da je ekvivalencija

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow F(x, y; =)$$

posledica datih aksioma, tada u slučaju kada x, y imaju, recimo, vrednosti 1, 2, formula F bi u prvoj interpretaciji imala vrednost $\top$ a u drugoj $\perp$. To je nemoguće, budući da se = u oba slučaja tumači na isti način.

Napomena. U stvari je opisan tzv. *Padoin*[1] *metod* za utvrdjivanje nezavisnosti polaznih znakova izvesne teorije. Kratko rečeno, metod se sastoji u ovome:

---

[1] Aleksandro Padoa (1868–1937).

Da bi se dokazala nezavisnost nekog polaznog znaka od preostalih znakova, dosta je naći dva modela te teorije koji imaju isti domen i u kojima se preostali znaci interpretiraju na *isti* način a uočeni znak (čija se nezavisnost dokazuje) na *dva različita*[1] načina.

26. Produžetak prethodnog. Dokazati da se = može izraziti pomoću $\leqslant$.

Odgovor. Jedna mogućnost je:

$$x = y \iff x \leqslant y \wedge y \leqslant x$$

27. Aksiome su

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z), \quad x \star e = x$$

Dokazati da je znak e nezavisan od $\star$.

28. Aksiome su

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad x+y = y+x, \quad -(-x) = x.$$

Dokazati da je $-$ nezavisan od $+$.

29. Data je relacijsko–operacijska struktura

$\star$	a	b
a	b	a
b	a	b

α	a	b
a	$\top$	$\bot$
b	$\top$	$\bot$

jezika $\{\star, \alpha\}$, i nova operacija f, odnosno relacija ρ uvedene su definicijama

(i) $f(a) = b, \quad f(b) = a$

(ii) $\tau\rho(a,a) = \top, \ \tau\rho(a,b) = \top, \ \tau\rho(b,a) = \top, \ \tau\rho(b,b) = \bot$

Dokazati da te definicije ne zadovoljavaju uslov otklonjivosti.

Rešenje. Budući da se data relacijsko–operacijska struktura može shvatiti kao teorija $\mathcal{T}$:

$$a \star a = b, \ a \star b = a \quad \alpha(a,a), \quad \neg\,\alpha(a,b)$$
$$b \star a = a, \ b \star b = b \quad \alpha(b,a), \quad \neg\,\alpha(b,b)$$
$$a \neq b$$

to da bismo dokazali da je definicija (i) neotklonjiva, dosta je dokazati da se f ne može izraziti pomoću $\star, \alpha, a, b$ nikakvom implicitnom definicijom (jer, otklanjanje terma $f(x)$ iz proizvoljne formule može se svesti na otklanjanje elementarnih formula oblika $y = f(x)$ – videti zadatak 9).

Pretpostavimo suprotno, odnosno da se f može izraziti implicitnom definicijom oblika:

(Δ) $\qquad y = f(x) \iff F(x, y)$

[1] tj. njemu odgovaraju dve različite konstante (ako je reč o znaku konstante), dve različite operacije (ako je reč o operacijskom znaku) i sl.

gde su $f(x, y)$ formula na jeziku $\{ \star, \alpha, a, b \}$ čije su jedine slobodne promenljive x, y, i uočimo neki nestandardni model formula $\mathcal{F}$ – recimo s jednim „došljakom" d:

$\star$	a	b	d
a	b	a	d
b	a	b	d
d	a	d	d

α	a	b	d
a	$\top$	$\bot$	$\top$
b	$\top$	$\bot$	$\top$
d	$\bot$	$\bot$	$\top$

Taj se model može na više načina produžiti do modela za $\mathcal{F}$, (i). Recimo, uočimo ova dva:

(1)

	a	b	d
f	b	d	a

(2)

	a	b	d
f	b	a	b

Ukoliko bi jednakost (Δ) važila, onda bi, kad promenljive x, y dobiju vrednosti d, a, u prvom slučaju formula $F(x, y)$ imala vrednost $\top$ a u drugom $\bot$, što je nemoguće budući da je $F(x, y)$ na starom jeziku.

Slično se i za relaciju ρ dokazuje da nije otklonjiva za šta je dovoljno dokazati da se $\rho(x, y)$ ne može izraziti definicijom oblika:

(Δ_2) $$\rho (x, y) \Longleftrightarrow G(x, y)$$

gde je $G(x, y)$ formula na jeziku $\{ \star, \alpha, a, b\}$ čije su jedine slobodne promenljive x, y. U tu svrhu može poslužiti uočeni model formula $\mathcal{F}$ i neka dva njegova produženja do modela za $\mathcal{F}$, (ii).

30. Dokazati da se sve operacije $\{\top, \bot\}$ – algebre mogu izraziti pomoći:

(i) Negacije i konjunkcije
(ii) Negacije i disjunkcije
(iii) Negacije i implikacije
(iv) Implikacije i negacije ekvivalencije
(v) Konjunkcije, ekvivalencije i $\bot$
(vi) Disjunkcije, ekvivalencije i negacije ekvivalencije
(vii) Šeferove[1] operacije $\uparrow$
(viii) Lukaševićeve operacije $\downarrow$

31. Dokazati da je nemoguće sve operacije $\{\top, \bot\}$–algebre izraziti pomoću:

(i) Konjunkcije i disjunkcije,
(ii) Implikacije i ekvivalencije,
(iii) Negacije i ekvivalencije

Uputstvo. (i) Ako bi za neki izraz $f(x)$ izgradjen pomoću $\wedge$, $\vee$ i x važila jedna-

[1] Podsećamo da je $\uparrow$, u stvari, negacija konjunkcije, a $\downarrow$ negacija disjunkcije.

kost

$$\neg x = f(x) \qquad (x \in \{\top, \bot\})$$

onda bi važilo i

$$f(\top) = \bot, \qquad f(\bot) = \top$$

što je nemoguće, budući da $\top \wedge \top = \top$, $\top \vee \top = \top$, $\bot \wedge \bot = \bot$; $\bot \vee \bot = \bot$.

(ii) Rasudjivanje je slično prethodnom.

(iii) Ne može se definisati implikacija, budući da je svaki izraz $f(x,y; \Longleftrightarrow, \neg)$ sagradjen od x, y, $\Longleftrightarrow$, $\neg$ jednak nekom od izraza: $\top$, $\bot$, x, y, $\neg y$, $\neg x$, $x \Longleftrightarrow y$, $\neg (x \Longleftrightarrow y)$. U vezi sa tim, videti zadatak 59, tačke VII.

32. Neka je L neki jezik i f nov znak uslovne operacije dužine n (uslov izvodljivosti je U). Dokazati da je definicija oblika:

$$(\Delta) \qquad U \Rightarrow (f(u_1, \ldots, u_n) = w \Longleftrightarrow F)$$

nekreativna za ma koju teoriju $\mathcal{G}$ jezika L akko:

(i) U i F su na jeziku L,

(ii) $u_1, \ldots, u_n$, w su različite promenljive,

(iii) $u_1, \ldots, u_n$ su sve slobodne promenljive u U,

(iv) $u_1, \ldots, u_n$, w su sve slobodne promenljive u F,

(v) Formula $U \Rightarrow (\forall u_1, \ldots, u_n)(\exists_1 w)F$ je teorema teorije $\mathcal{G}$

Uputstvo. Svaki model $\mathcal{M}$ teorije $\mathcal{G}$ produživ je do modela $\bar{\mathcal{M}}$ za $\mathcal{G}$, (Δ). Naime, operacija f se može uvesti definicijom[1]:

$$(\Delta') \qquad U \Rightarrow (f(u_1, \ldots, u_n) = w \Longleftrightarrow F), \qquad \neg U \Rightarrow f(u_1, \ldots u_n) = d,$$

gde je d jedan utvrdjen element domena.

33. Da li definicija (Δ) iz prethodnog zadatka zadovoljava uslov otklonjivosti?

34. Dokazati nekreativnost definicija:

$$x > y \Rightarrow (x-y = z \Longleftrightarrow x=y+z) \qquad (x, y, z \in N)$$
$$y \mid x \Rightarrow (x : y = z \Longleftrightarrow x = y \cdot z) \qquad (x, y, z \in N)$$
$$y \neq 0 \Rightarrow (x : y = z \Longleftrightarrow x = y \cdot z) \qquad (x, y, z \in Q)$$

35. Uočimo aksiome polja (zadatak 58, tačke VI) i deljenje uvedimo definicijom

$$y \neq 0 \Rightarrow (x : y = x \cdot \frac{1}{y})$$

Dokazati da je ona nekreativna.

36, Da li se deljenje u polju može dodefinisati ovako:

$$(\forall x)\, x : 0 = 0$$

[1] U stvari je uslovna operacija f uvedena definicijom (Δ) d o d e f i n i s a n a za one n-torke koje ne zadovoljavaju uslov U, tako da rezultat bude d.

Odgovor. Može, budući da su svi zakoni koji se odnose na deljenje uslovni. Tako tada, recimo, aksioma $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = 1$ za $x = 0$ postaje $0 \neq 0 \Rightarrow 0 = 1$, a to je tačna formula. Videti i zadatak 32.

37. Za pojam grupe se sreću i ovakve dve definicije:

(i) Dvojka $(G, \star)$, gde je G skup a $\star$ njegova operacija, je grupa akko važe formule

$$
(1) \qquad \begin{array}{l} (\forall x,y,z)(x \star y) \star z = x \star (y \star z) \\ (\exists z)\,((\forall x)\, x \star z = x \wedge (\forall x)(\exists y)\, x \star y = z) \end{array}
$$

(ii) Dvojka $(G, \star)$ gde je G skup, a $\star$ operacija je grupa akko važe formule

$$
(2) \qquad \begin{array}{l} (\forall x,y,z)(x \star y) \star z = x \star (y \star z) \\ (\forall x, y)(\exists z)\, x \star z = y, \quad (\forall x, y)(\exists z) z \star x = y \end{array}
$$

Dokazati da su te dve definicije *ekvivalentne* u ovakvom smislu: Aksiome (2) su teoreme za grupu po prvoj definiciji i obratno aksiome (1) su teoreme za grupu po drugoj definiciji. Drugim rečima, skupovi aksioma (1) i (2) su ravnosledni (tj. imaju iste skupove teorema).

Napomena. Definicije (i) i (ii) razlikuju se samo u odbiru aksioma. U vezi sa odbirom aksioma, pri definisanju neke vrste relacijsko–operacijske strukture uopšte, primetimo da se umesto izvesnog skupa aksioma $\mathcal{T}_1$ može uzeti i svaki drugi skup $\mathcal{T}_2$ ekvivalentan (ravnosledan) sa $\mathcal{T}_1$.

38. **Nastavak prethodnog.** Za pojam grupe navodi se i ovakva definicija:

(iii) Četvorka $(G, \star, e, {}^{-1})$, gde je G skup, $\star$ i ${}^{-1}$ njegove operacije (prva dužine 2, druga dužine 1), e konstanta iz G, je grupa akko važe formule

$$
(3) \qquad \begin{array}{l} (\forall x,y,z)(x \star y) \star z = x \star (y \star z) \\ (\forall x)\ x \star e = x \\ (\forall x)\, x \star x^{-1} = e \end{array}
$$

U kakvom smislu bi bile ekvivalentne, recimo definicije (i) i (iii) ?

Rešenje. U definiciji (i) se koristi jezik $L_1 = \{\star\}$, a u definiciji (iii) njegov nadjezik $L_2 = \{\star, e, {}^{-1}\}$, tako da su, strogo rečeno, definiendumi kod obe definicije posve različiti. Medjutim, te su definicije ekvivalentne u smislu koji nadalje objašnjavamo.

U odnosu na sistem aksioma (1) uvedimo najpre definiciju

$$
(\Delta_1) \qquad z = e \Longleftrightarrow (\forall x) x \star z = x \qquad (e \text{ je nov znak konstante})
$$

a potom definiciju

(Δ_2) $\qquad y = x^{-1} \Longleftrightarrow x \star x^{-1} = e$ $\qquad$ ($^{-1}$ je nov operacijski znak dužine 1)

Lako se proverava da su obe definicije nekreativne (zadatak 7). Označimo sa T skup svih teorema koje slede iz

$$(1),\ (\Delta_1),\ (\Delta_2)$$

Taj je skup j e d n a k sa skupom teorema koje slede iz aksioma (3). Upravo u takvom su smislu definicije (i) i (iii) ekvivalentne.

Napomena. Zamislimo da uopšte imamo dve definicije neke vrste relacijsko–operacijskih struktura, poput (i) i (ii), i to jedna je na nekom jeziku L_1 a druga na jeziku L_2 koji su različiti. Takve dve definicije smatramo *ekvivalentnim*, ukoliko se dati skupovi aksioma mogu dopuniti nekreativnim definicijama do takvih skupova aksioma koji su:

– na istom[1] jeziku L

– ekvivalentni su, odnosno ravnosledni (što znači da su im skupovi teorema isti).

39. Pretpostavimo da je u nekoj vrsti relacijsko–operacijskih struktura, može se reći i teoriji, odredjenoj aksiomama $\mathcal{G}$ na jeziku L_1, teorema formula oblika

$(\forall x)\,(\forall y)\,(\exists_1 z)\, F(x, y, z)$ $\qquad$ (x, y, z su jedine slobodne promenljive formule F)

Da li je ta teorija ekvivalentna sa teorijom dobijenom iz polazne dodavanjem aksiome:

$F(x, y, f(x, y))$ $\qquad$ (f nov operacijski znak)

Odgovor. Da (videti zadatke 20, 21).

40. Neko je u izvesnom istraživanju definisao $\mathcal{A}$*–struktura* ovako:

(i) Trojka $(S, \star, e)$ – S je skup, $\star$ njegova binarna operacija, e konstanta iz S – je $\mathcal{A}$ *struktura* akko važe formule

(1) $$\begin{aligned} z \star (x \star y) &= (y \star z) \star x \\ x \star e = x, &\quad e \star x = x \end{aligned} \qquad (x, y, z \in S)$$

a neko drugi ovako:

(ii) Četvorka $(S, \star, \circ, e)$ – S je skup, $\star$ i $\circ$ njegove binarne operacije, e konstanta iz S – je $\mathcal{A}$*–struktura* akko važe formule

(2) $$\begin{aligned} (x \star y) \circ z &= (y \star z) \circ x \\ x \circ e = x, &\quad e \star x = x \end{aligned} \qquad (x, y, z \in S)$$

Dokazati ekvivalentnost tih dveju definicija (u smislu napomene navedene posle

[1] L je, dakle, nadjezik i za L_1 i za L_2.

zadatka 38).

Napomena. Zadatak smo mogli i ovako postaviti. Date su dve definicije:

(i) Trojka $(S, \star, e)$ – S je skup, $\star$ njegova binarna operacija, e konstanta iz S – je $\mathcal{A}$*–struktura* akko važe formule (1).

(ii) Četvorka $(S, \star, \circ, e)$ – S je skup, $\star$ i $\circ$ njegove binarne operacije, e konstanta iz S – je $\mathcal{B}$*–struktura* akko važe formule (2).

Dokazati da je tim definicijama odredjen i s t i pojam.

41. Dokazati ekvivalentnost dveju definicija mreže – algebarske i relacijske:

(i) Trojka $(M, \cup, \cap)$ – M je skup, $\cup$ i $\cap$ njegove binarne operacije – je *mreža* akko:

$$\begin{array}{lll} x \cap x = x & x \cup x = x & \\ x \cap y = y \cap x & x \cup y = y \cup x & \\ (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) & (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) & (x,y,z \in M) \\ x \cap (x \cup y) = x & x \cup (x \cap y) = x & \end{array}$$

(ii) Dvojka $(M, \leqslant)$ – M je skup, $\leqslant$ binarna operacija tog skupa – je *mreža* akko je $\leqslant$ relacija poretka takva da za svaka dva člana x, y iz M postoji njihov supremum i infimum.

Uputstvo. Videti zadatak 38, kao i zadatak 19 tačke XIV.

42. Pored definicija oblika

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ldots, \ y = f(x) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ldots \quad \text{(gde } f \text{ ne učestvuje u definiensu)}$$

nova operacija (a slično se odnosi i na relacije) može se uvesti i drugim komplikovanijim (implicitnim) definicijama. Takva je, recimo, definicija[1] realne funkcije f:

$$f(x) + sgn\, x \cdot f(-x) = x^2 \tag{1}$$

Dokazati njenu ispravnost.

Uputstvo. Najpre zamenom x sa $-x$ iz (1) izvesti

$$f(-x) - sgn\, x \cdot f(x) = x^2 \tag{2}$$

potom razlikovati slučajeve $x \geqslant 0$, $x \leqslant 0$. U prvom slučaju jednakosti (1) i (2) postaju

$$f(x) + f(-x) = x^2, \qquad f(-x) - f(x) = x^2$$

Rešavanjem tog sistema po $f(x)$, $f(-x)$ dobijamo

$$f(x) = 0, \quad f(-x) = x^2 \qquad (\text{Ako } x \geqslant 0) \tag{3}$$

Slično se u drugom slučaju dobija

$$f(x) = x^2, \quad f(-x) = 0 \qquad (\text{Ako } x \leqslant 0) \tag{4}$$

[1] To je primer tzv. f u n k c i o n a l n e jednačine.

Iz (3) i (4) se neposredno zaključuje da je funkcija f odredjena formulom

(5) $$f(x)=\begin{cases}0, \text{ ako } x\geqslant 0\\ x^2, \text{ ako } x\leqslant 0\end{cases}$$

Naravno vredi i obratno: Ako je funkcija f odredjena formulom (5), ona zadovoljava jednakost (1). Znači, formule (1) i (5) su ekvivalentne. Budući da je definicija (5) ispravna (zadatak 24), ispravna je i sa njom ekvivalentna definicija (1).

43. Dokazati ispravnost naredne implicitne definicije relacije α

$$\alpha(x,y)\wedge\alpha(y,x)\iff x<y\vee y<x \qquad (x,y \text{ realni brojevi})$$

Uputstvo. Razlikovanjem slučajeva $x=y$, $x\neq y$ dokazati da je data definicija ekvivalentna sa

$$\alpha(x,y)\iff x\neq y$$

44. Neka je $\mathcal{T}$ izvesna teorija na jeziku L i α, α' novi relacijski znaci dužine n. Uočimo, dalje, skup $\mathcal{F}(\alpha)$ izvesnih formula na jeziku $L\cup\{\alpha\}$, i sa $\mathcal{F}(\alpha')$ označimo skup koji se dobija iz uočenog kada se α svuda zameni sa α'. Za skup $\mathcal{F}(\alpha)$ kažemo da *implicitno* definiše relaciju α akko u teoriji $\mathcal{T}$ vredi:

(I) $\mathcal{F}(\alpha), \mathcal{F}(\alpha')\models(\forall x_1,\ldots,x_n)(\alpha(x_1,\ldots,x_n)\iff\alpha'(x_1,\ldots,x_n))$

Slično, u skladu sa ranijim pojmom eksplicitne definicije relacije, kažemo da $\mathcal{F}(\alpha)$ definiše α *eksplicitno* ukoliko postoji formula $F(x_1,\ldots,x_n)$ jezika L takva da:

(E) $\mathcal{F}(\alpha)\models(\forall x_1,\ldots,x_n)(\alpha(x_1,\ldots,x_n)\iff F(x_1,\ldots,x_n))$

Dokazati, ako skup $\mathcal{F}(\alpha)$ definiše α eksplicitno, onda je definiše i implicitno.

Uputstvo. Dokazati kontrapoziciju $\neg(\mathrm{I})\Rightarrow\neg(\mathrm{E})$ na kojoj se, u stvari, zasniva Padoin metod (videti Napomenu posle zadatka 25).

45. **Nastavak prethodnog**. Dokazati obratno[1] tvrdjenje, odnosno:

Ako $\mathcal{F}(\alpha)$ definiše α implicitno definiše je i eksplicitno.

Rešenje. Dokaz se zasniva na tzv. *Kregovoj teoremi interpolacije* [8] koju navodimo bez dokaza:

Neka su A, B zatvorene formule takve da je $A\Rightarrow B$ valjana (ili jednakosno valjana, ukoliko jezik sadrži i znak jednakosti). Tada postoji zatvorena formula C takva da:

(i) Formule $A\Rightarrow C$, $C\Rightarrow B$ su valjane (jednakosno valjane).

(ii) Jezik formule C je podskup jezika ove formule A i B.

Primenom te leme dokaz tvrdjenja izgleda:

Pretpostavimo da $\mathcal{F}(\alpha)$ definiše α implicitno, odnosno da važi (I). Na osnovu leme o promenljivom konstanti (zadatak 100 tačke XII), odatle zaključujemo

[1] To je tzv. Betova teorema [8], Evert W. Beth (1908–1965).

(1) $\mathcal{F}(\alpha),\ \mathcal{F}(\alpha') \models \alpha(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow \alpha'(c_1, \ldots, c_n),$

gde su $c_1, \ldots, c_n$ znaci novih konstanata. Dalje, na osnovu stava kompaktnosti, zaključujemo da postoje konačni podskupovi $\mathcal{F}(\alpha)$, $\mathcal{F}(\alpha')$ – podskupovi redom od $\mathcal{K}(\alpha)$, $\mathcal{K}(\alpha')$ – takvi da:

(2) $\mathcal{K}(\alpha), \mathcal{K}(\alpha') \models \alpha(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow \alpha'(c_1, \ldots, c_n)$

Označimo sa $A(\alpha)$ konjunkciju svih formula $\varphi(\alpha)$ takvih da $\varphi(\alpha)$ pripada $\mathcal{K}(\alpha)$ ili $\varphi(\alpha')$ pripada $\mathcal{K}(\alpha')$. Lako se zaključuje da vredi

(3) $A(\alpha) \wedge A(\alpha') \models \alpha(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow \alpha'(c_1, \ldots, c_n)$

odnosno, na osnovu stava dedukcije (jer su $A(\alpha)$, $A(\alpha')$, $\alpha(c_1, \ldots, c_n)$ zatvorene formule), vredi[1]:

(4) $\models A(\alpha) \wedge \alpha(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow (A(\alpha') \Rightarrow \alpha'(c_1, \ldots, c_n))$

Na formule $A(\alpha) \wedge \alpha(c_1, \ldots, c_n)$, $A(\alpha') \Rightarrow \alpha'(c_1, \ldots, c_n)$ primenjujemo Kregovu lemu i zaključujemo da postoji formula $F(c_1, \ldots, c_n)$ jezika $L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ za koju

(5) $\models A(\alpha) \wedge \alpha(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow F(c_1, \ldots, c_n)$

(6) $\models F(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow (A(\alpha') \Rightarrow \alpha'(c_1, \ldots, c_n))$

Budući da ni α ni α' ne učestvuju u $F(c_1, \ldots, c_n)$, to se iz (6) zamenom α' sa α dobija

(7) $\models F(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow (A(\alpha) \Rightarrow \alpha(c_1, \ldots, c_n))$

Iz (5) i (7) neposredno sledi

(8) $A(\alpha) \models \alpha(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow F(c_1, \ldots, c_n)$

Budući da su $c_1, \ldots, c_n$ bile nove konstante a $A(\alpha)$ je konjunkcija formula iz $\mathcal{F}(\alpha)$, to najzad dobijamo[2]

(9) $\mathcal{F}(\alpha) \models (\forall x_1, \ldots, x_n)\ (\alpha(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n))$

46. Ako se u prethodna dva zadatka umesto proizvoljne relacije α uoči relacija oblika

$y = f(x_1, \ldots, x_n)$ (f je operacijski znak koji ne učestvuje u L).

kako u takvom slučaju glase navedena tvrdjenja?

47. Preslikavanje $f{:}N \to N$ je induktivno definisano ovako

---

[1] Ovde $\models$ znači da je F valjana, odnosno jednakosno valjana.

[2] Ponovo primenom leme o promenljivoj konstanti.

$$f(0) = 0, \quad f(n+1) = f(n) + 2n+1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Da li je tim preslikavanjem, u stvari, induktivno definosano n^2, odnosno da li važi jednakost

$$(\star) \qquad f(n) = n^2$$

za sve $n = 0, 1, 2, \ldots$?

Odgovor. Da. Jednakost ($\star$) dokazati indukcijom $n \to n+1$.

48. Dokazati da postoji tačno jedan niz (a_n) koji zadovoljava uslove

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1,$$
$$a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$$

tj. koji je tim uslovima induktivno definisan.

Napomena. Opštije, ako su a, b dati prirodni brojevi, f data operacija dužine 2 skupa N, tada postoji tačno jedan niz (a_n) takav da:

$$a_0 = a, \quad a_1 = b,$$
$$a_{n+2} = f(a_n, a_{n+1})$$

49. Neka je m prirodan broj a (a_n) niz definisan induktivno

$$a_0 = 0$$
$$a_{n+1} = a_n + m \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(i) Odrediti članove a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

(ii) Da li za sve $m, n \in N$ važi formula $a_n = n \cdot m$?

50. Neka su zadane dve operacije skupa N : g dužine k i h dužine $k+2$. Dokazati da postoji tačno jedna operacija f dužine $n+1$ koja za sve $x_1, \ldots, x_n, y \in N$ zadovoljava jednakosti

$$(\star) \quad \begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_k, 0) = g(x_1, \ldots, x_k) \\ &f(x_1, \ldots, x_k, y+1) = h(x_1, \ldots, x_k, y, f(x_1, \ldots, x_k, y)) \end{aligned}$$

Napomena. Operacija f je, u stvari, jednakostima ($\star$) definisana induktivno po y. Na ovom mestu se obično umesto induktivno kaže *rekurzivno;* tačnije, kaže se da je f nastala redom iz g i h *operacijom rekurzije* (piše se i ovako: $f = R(g,h)$). Operacija rekurzije igra ključnu ulogu u tzv. teoriji rekurzivnih funkcija (to su, grubo govoreći, funkcije skupa N koje nastaju iz nekoliko polaznih primenom izvesnog broja operacija nad funkcijama, medju kojima je i operacija rekurzije). O njima videti podrobnije, recimo u [39].

51. Nastavak prethodnog. Odrediti $R(g, h)$ u ovim slučajevima

1° $k=1$, $g(x_1)=0$, $h(x_1, y, z) = x_1 + z$

2° $k=0$ (tada je $g(\ldots)$ konstanta), $g=1$, $h(y, z) = 2z$

Odgovor. 1° $f(x_1, y) = x_1 y$, 2° $f(y) = 2^y$

52. Uočimo alfabet $A = \{a, b, \star, (,)\}$ gde su a, b znaci konstanata, $\star$ operacijski znak dužine dva. Izrazi sagradjeni pomoću, a, b i $\star$ su, kao što znamo, izvesne reči nad tim alfabetom. Ističući i dužinu izraza, a to je broj svih njegovih znakova, definicija izraza glasi:

(i) *a, b su izrazi dužine 1.*

(1) (ii) *Ako su u, v izrazi redom dužine p, q, tada je reč $(u \star v)$ izraz dužine $p + q + 3$.*

(iii) *Izrazi dužine n (gde $n \in N$) su jedino one reči za koje se to može ustanoviti primenom pravila (i), (ii) konačno puta.*

Dokazati njenu induktivnost.

Rešenje. Radi lakšeg izražavanja uvedimo oznaku: $\rho_n(x)$ za rečenicu: *x je izraz dužine k.* Pravilima (i), (ii), (iii) u skupu svih reči nad alfabetom A definiše se niz relacija

$$\rho_1(x), \quad \rho_2(x), \quad \rho_3(x), \ldots$$

Recimo, tačne su formule $\rho_1(a), \neg\rho_2(b), \rho_5((a \star b))$ i sl. Navedena definicija (1) niza ρ_n je induktivna po n, budući da je definisana relacija ρ_1, a takodje je ρ_n (gde $n > 1$) definisana pomoću prethodnih relacija $\rho_{n-1}, \rho_{n-2}, \ldots$, odnosno upravo pomoću dve prethodne.

Napomena 1. Definicija niza ρ_n može se i ovako zapisati

$$\rho_1(x) \Longleftrightarrow x \in \{a, b\}$$

$$\rho_n(x) \Longleftrightarrow (\exists\, p,q \in N)\ (\exists\ u, v)\ (n{=}p{+}q{+}3 \wedge \rho_p(u) \wedge \rho_q(v) \wedge x{=}(u \star v))$$

Napomena 2. Sa ρ označimo relaciju „biti izraz sagradjen sa a,b i $\star$". Ta se relacija, kao što znamo, ovako definiše

(j) *a, b su izrazi*

(2) (jj) *Ako su u, v izrazi, tada je i reč $(u \star v)$ izraz.*

(jjj) *Izrazi su jedino one reči za koje se to može ustanoviti primenom pravila (j), (jj) konačno puta.*

Izmedju relacija ρ i ρ_n postoji ova veza

$$\rho(x) \Longleftrightarrow (\exists\, n \in N)\ \rho_n(x)$$

Istaknimo da se obično i za definiciju (2) relacije ρ kaže da je induktivna, recimo, po dužini izraza, što strogo govoreći, znači da je induktivna definicija (1) koja se odnosi na niz $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$. Slično tome, za definiciju (2) možemo reći da je induktivna recimo i po broju znakova $\star$ učestvujućih u izrazu x. To znači da se definicija (2) može tako doraditi, preinačiti do definicije relacije:

x *je izraz sa* n *znakova* ☆

koja zaista jeste induktivna po takvom n.

Ta preinaka definicije (2) glasi

(k) $a, b,$ *su izrazi sa 0 znakova* ☆.

(3) (kk) *Ako su* u, v *izrazi redom sa* p, q *znakova* ☆, *tada je reč* $(u \star v)$ *izraz sa* $p+q+1$ *znakova* ☆.

(kkk) *Izraz sa* n *znakova* ☆ *(gde* $n \in N$*) je jedino ona reč za koju se to može dokazati primenom pravila (k), (kk) konačno puta.*

53. Produžetak prethodnog. Da li je definicija (2) induktivna i po broju k – broju koraka obrazloženja („dužini dokaza") odnosno:

$\rho_k(x)$ znači x *je izraz i za to postoji obrazloženje (dokaz) sa korišćenjem* k *puta pravila (j), (jj).*

Odgovor. Da.

54. Dokazati induktivnost pojma teoreme kod neke formalne teorije.

Uputstvo. Videti napomenu 2 zadatka 52. Sa $\tau_n(x)$ označiti rečenicu: x *je teorema koja ima bar jedan dokaz dužine* n.

55. Navesti primere definicija relacija sa binarnim relacijama[1].

Odgovor. Takve su definicije:

ρ je *simetrična* zamena za $(\forall x,y)(\rho(x,y) \Rightarrow \rho(y,x))$

ρ je *relacija ekvivalencije* zamena za $(\forall x)\rho(x,x) \wedge (\forall x,y)(\rho(x,y) \Rightarrow \rho(y,x))$
$\wedge (\forall x,y,z)(\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \Rightarrow \rho(x,z))$

ρ je *podrelacija* za σ zamena za $(\forall x,y)(\rho(x,y) \Rightarrow \sigma(x,y)$

ρ je *saglasno* sa σ zamena za $(\forall x,y,u,v)(\rho(x,y) \wedge \rho(u,v) \Rightarrow (\sigma(x,u) \Rightarrow \sigma(y,v))$

56. Za relacije dužine jedan definisati relacije II reda iskazane rečima: „tačno jedan predmet je u datoj relaciji", „tačno dva su u relaciji" „tačno tri" itd.

odnosno definisati *konačne kardinalne brojeve* kao relacije II reda.

Rešenje. Koristićemo oznake $1(\alpha)$, $2(\alpha)$, $3(\alpha)$, ... Tada definicije glase:

$1(\alpha)$ z.z. $(\exists_1 x)\, \alpha(x)$, tj. $(\exists x)(\alpha(x) \wedge (\forall y)\, (\alpha(y) \Rightarrow y = x))$

$2(\alpha)$ z.z. $(\exists_2 x)\, \alpha(x)$, tj. $(\exists x,y)(\alpha(x) \wedge \alpha(y)\, x \neq y \wedge (\forall z)(\alpha(z) \Rightarrow z = x \vee z = y))$

$3(\alpha)$ z.z. $(\exists_3 x)\, \alpha(x)$ i slično dalje.

57. Navesti primere definicija operacija sa binarnim relacijama.

---

[1] To su tzv. relacije II reda.

[2] z.z. je skraćenica za reči z a m e n a z a.

Odgovor.

$(\rho \wedge \sigma)(x,y)$ z.z. $\rho(x,y) \wedge \sigma(x,y)$, $(\rho \vee \sigma)(x,y)$ z.z. $\rho(x,y) \vee \sigma(x,y)$
$(\rho \Rightarrow \sigma)(x,y)$ z.z. $\rho(x,y) \Rightarrow \sigma(x,y)$, $(\rho \Leftrightarrow \sigma)(x,y)$ z.z. $\rho(x,y) \Leftrightarrow \sigma(x,y)$
$(\neg \rho)(x,y)$ z.z. $\neg \rho(x,y)$, $(\rho \circ \sigma)(x,y)$ z.z. $(\exists z)(\rho(x,z) \wedge \sigma(z,y))$

58. Neka je S neka relacija II reda dužine 1 (koja se odnosi na binarne relacije) kakve su, na primer, „biti relacija ekvivalencije", „biti relacija poretka" itd. Kažemo da S *prolazi kroz (konačan) presek*, tj. da je S u relaciji $\mathcal{P}$ (III reda) ako i samo ako za proizvoljne binarne relacije α, β vredi:

Ako su i α i β u relaciji S, onda je $\alpha \wedge \beta$ takodje u toj relaciji.

Ukoliko &, →, $\forall$ koristimo kao meta–oznake za reči *i*, *povlači*, *svaki*, onda prethodna definicija dobija oblik:

$$\mathcal{P}(S) \text{ z.z.} (\forall \alpha, \beta)(S(\alpha) \ \& \ S(\beta) \rightarrow S(\alpha \wedge \beta))$$

Na primer, ako E označava svojstvo „biti relacija ekvivalencije" nije teško dokazati da vredi:

$$(\forall \alpha, \beta)(E(\alpha) \ \& \ E(\beta) \rightarrow E(\alpha \wedge \beta))$$

(Rečima: ako su α, β relacije ekvivalencije, onda je i njihov presek $\alpha \cap \beta$ takodje relacija ekvivalencije).

Navesti još neke primere relacija II reda koje prolaze kroz presek.

59. U teoriji skupova, kao što znamo, uredjena dvojka (a, b) uvodi se pomoću skupovnih izraza ovako

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Dokazati ispravnost te definicije u smislu da na osnovu nje sledi ekvivalencija

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$$

Uputstvo. Videti zadatke 31 i 34 tačke IX.

60. Produžetak prethodnog. Da li se (a, b) može definisati i nekim od ovih skupovnih izraza

$$\{\{\{a\}\}, \{a, b\}\}, \{a, \{a, b\}\}$$

61. Da li se uredjena trojka (a, b, c) može definisati pomoću uredjene dvojke svakim od izraza

$$(a, (b, c)), \quad ((a, b), c), \quad ((a, b), (b, c))$$

Odgovor. Može.

62. Prema Kantoru skup je celina različitih predmeta (članova), pa sledstveno, važe razne jednakosti kao:

$$\{a, a\} = \{a\}, \ \{a, b, a\} = \{b, a\} \text{ i sl.}$$

Da li se nekako pomoću Kantorovih skupova mogu uvesti i „skupovi sa ponavljanjem" – koji poštuju višestrukost učestvovanja svojih članova. Takav „skup" S_1 čiji su članovi:

a, tri puta
b, dva puta

treba da se razlikuje od skupa S_2 čiji su članovi takodje a, b ali:

a je dva puta član
b je pet puta

Uputstvo. Skupove S_1, S_2 možemo shvatiti kao preslikavanja:

$$S_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Uopšte, „skup" čiji su članovi $a_1, a_2, \ldots$ sa učestalošću $n_1, n_2, \ldots$ može se definisati kao preslikavanje

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ n_1 & n_2 & \ldots \end{pmatrix}$$

63. U nekom istraživanju se pojavljuje potreba korišćenja „kružnih skupova" $[a, b, c]$ koji treba da zadovoljavaju uslove

$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$$
$$[a, b, c] \neq [b, a, c], \text{ ako } a \neq b$$

Definisati ih pomoću običnih (Kantorovih) skupova.

64. Neka je u svojim razmišljanjima o skupovima uveo u razmatranje:

(U) *skup svih skupova, prazan skup, za svaka dva skupa je govorio o postojanju unije i preseka, smatrao je da su skupovi jednaki upravo u slučaju kad imaju iste elemente.*

Medjutim, pored toga, u vezi sa takvim skupovima, nije imao i neke druge dodatne zahteve kao: postojanje partitativnog skupa za dati skup i sl.

Da li je moguće govoriti o takvim skupovima?

Rešenje. Pitanje je, u stvari, da li su zahtevi (U) neprotivurečni. Radi toga, najpre obrazujemo njihov formulski prevod. Jedan mogući prevod glasi (znaci =, ∈ odgovaraju rečima *jednak, pripada*):

$$(\mathrm{U_{for}}) \quad \begin{array}{c} (\exists s)\,(\forall x)\, x \in s, \quad (\exists v)\,(\forall x)\, x \notin v \\ (\forall a, b)\,(\exists u)\,(\forall x)\,(x \in u \Longleftrightarrow x \in a \vee x \in b) \\ (\forall a, b)\,(\exists p)\,(\forall x)\,(x \in p \Longleftrightarrow x \in a \wedge x \in b) \\ a = b \Longleftrightarrow (\forall x)\,(x \in a \Longleftrightarrow x \in b) \end{array}$$

Jedan model tih formula je odredjen ovako:

Članovi modela su 0, 1 a relacija odredjena je tablicom

$\in$	0	1
0	$\perp$	$\top$
1	$\perp$	$\top$

pa je sledstveno tome, smisleno govoriti o predmetima za koje su postavljeni zahtevi (U).

65. Neka je u skupu W svih reči po slovima a, b, tzv. *dobre reči* odredio pravilima:

(i) a je dobra, b nije dobra

(ii) Ako je u dobra, onda uba nije dobra.

(iii) Ako u nije dobra, onda aua jeste.

Da li je relacija „biti dobar" ispravno definisana?

Odgovor. Nije, jer se, na primer, za reč aba može izvesti i da jeste i da nije dobra. Može se i ovako reći: Uslovi postavljeni za relaciju „biti dobar" su protivurečni, pa ona, otuda, ne postoji.

66. U meta–teoriji (pomoćnoj teoriji koja se koristi pri razmatranju raznih pitanja, na primer, u vezi sa nekom relacijsko–operacijskom strukturom, nekom teorijom I reda, nekom formalnom teorijom i dr.) često se polazi od izvesnog alfabeta, potom uočava skup W svih reči i najzad se uočavaju izvesni podskupovi odredjeni nekim definicijama koje su najčešće induktivne. Neka, primera radi, članovi alfabeta[1)] budu

$$\wedge \quad \neg \quad \forall \quad) \quad (\quad \alpha \quad x \quad y \quad ,$$

U skupu W svih reči uočimo skup $\mathcal{F}$ reči – zvaćemo ih *formule* – koje su odredjene ovim uslovima:

(i) $\alpha(x,x),\ \alpha(x,y),\ \alpha(y,x),\ \alpha(y,y)$ su članovi skupa $\mathcal{F}$

(ii) Ako A, B pripadaju $\mathcal{F}$, onda i

$$(A \wedge B),\quad \neg A,\quad (\forall x)A,\quad (\forall y)A$$

takodje pripadaju $\mathcal{F}$.

(iii) $\mathcal{F}$ je najmanji skup reči datog alfabeta koji zadovoljava uslove (i), (ii).

Da li je tako korišćen pojam skupa (u vezi sa definicijom skupa $\mathcal{F}$) meren „aksiomatskim metrom" ekvivalentan sa pojmom skupa koji se opisuje ZF sistemom aksima?

Rešenje. Sledeći zapisi, uz uobičajena skraćenja u pisanju, opisuju skup $\mathcal{F}$:

$$\alpha(x,x),\ \alpha(x,y),\ \alpha(y,x),\ \alpha(y,y) \in \mathcal{F}$$

$$(\forall A,B)\ (A,B \in \mathcal{F} \to (A \wedge B),\ \neg A,\ (\forall x)A,\ (\forall y)A \in \mathcal{F})$$

$$(\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F})\ [\alpha(x,x),\ \alpha(x,y),\ \alpha(y,x),\ \alpha(y,y) \in \mathcal{S}$$
$$\&\ (\forall A,B)\ (A,B \in \mathcal{S} \to (A \wedge B),\ \neg A,\ (\forall x)A,\ (\forall y)A \in \mathcal{S}) \ \to\ \mathcal{S} = \mathcal{F}]$$

[1)] Iz tehničkih razloga nismo uzeli i logičke znake $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\exists$ a uzeli smo samo dve promenljive.

gde znaci &, →, $\forall$ odgovaraju rečima *i, povlači, svaki* a A, B su korišćene kao oznake formula, tj. kao meta–promenljive.

Reči $\alpha(x,x)$, $\alpha(x,y)$, $\alpha(y,x)$, $\alpha(y,y)$ dogovorno nazivamo znaci konstanata: možemo ih i na neki drugi način preznačiti, recimo, redom sa a, b, c, d. Tada se, u okviru jednog novog predikatskog računa I reda, prethodni zapisi mogu shvatiti kao formule obrazovane od:

– znakova konstanata a, b, c, d, $\mathcal{F}$

– promenljivih[1] A, B, $\mathcal{S}$,

– operacijskih znakova $\wedge$, $\neg$, $(\forall x)$, $(\forall y)$ – prvi je dužine 2 a ostali su dužine 1; možemo i za njih uvesti nove oznake, recimo: $\star$, f, g, h.

– relacijskog znaka $\in$

Postojanje skupa $\mathcal{F}$ koji zadovoljava date uslove, recimo napisane podrobno, sa novim oznakama:

$a \in \mathcal{F} \,\&\, b \in \mathcal{F} \,\&\, c \in \mathcal{F} \,\&\, d \in \mathcal{F}$

$(\forall A,B)\,(A \in \mathcal{F} \,\&\, B \in \mathcal{F} \to (A \star B) \in \mathcal{F} \,\&\, f(A) \in \mathcal{F} \,\&\, g(A) \in \mathcal{F} \,\&\, h(A) \in \mathcal{F})$

$(\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F})\,[a \in \mathcal{S} \,\&\, b \in \mathcal{S} \,\&\, c \in \mathcal{S} \,\&\, d \in \mathcal{S}$

$\&\,(\forall A,B)\,(A \in \mathcal{S} \,\&\, B \in \mathcal{S} \to (A \star B) \in \mathcal{S} \,\&\, f(A) \in \mathcal{S} \,\&\, g(A) \in \mathcal{S} \,\&\, h(A) \in \mathcal{S}) \to \mathcal{S} = \mathcal{F}]$

može se dokazati korišćenjem *samo jednog dela* aksioma[2] ZF, pa je, otuda, pojam takvog skupa u „slabijem" aksiomatskom smislu.

Napomena. Slično, „slabi" skupovi, u smislu da tom pojmu prethodi malo pretpostavljenih aksioma, se sreću pri definisanju pojma teorije I reda (kao skupa izvesnih formula), relacijsko–operacijske strukture (kao skupa dijagramskih formula) i dr.

---

[1] U stvari, javlja se još jedna promenljiva, recimo X, jer smatramo da je relacija $\subseteq$ uvedena definicijom: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ z.z. $(\forall \mathcal{X})\,(\mathcal{X} \in \mathcal{S} \to \mathcal{X} \in \mathcal{F})$.

[2] Jer, postojanje skupa $\mathcal{F}$ koji zadovoljava prva dva uslova, je u stvari, jedna varijanta aksiome beskonačnosti, dok treći uslov – uslov minimalnosti skupa $\mathcal{F}$ – sledi iz činjenice da prva dva uslova „prolaze kroz presek" (videti zadatke 15, 16 tačke XVI).

LITERATURA

[1] J.L. Bell, A.B. Slomson
Models and Ultraproducts: An Introduction, North–Holland, Amsterdam, 1969.

[2] P. Bernays, A.A. Fraenkel
Axiomatic Set Theory, North–Holland, Amsterdam, 1968.

[3] E.W. Beth
The Foundations of Mathematics, North–Holland, Amsterdam, 1959.

[4] G. Boole
The Mathematical Analysis of Logic, MacMillan, Barclay and MacMillan, Cambridge, 1847.

[5] N. Bourbaki
Théorie des ensembles, Herman, Paris, 1960.

[6] G. Cantor
Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers (prevod na engleski), Dover Publications, New York, 1915.

[7] R. Carnap
Introduction to Symbolic Logic and its Applications, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

[8] C.C. Chang, H.J. Keisler
Model Theory, North–Holland, Amsterdam, 1973.

[9] A.Church
Introduction to Mathematical Logic, Vol. 1, Princeton Univ. Press, Princenton, N.J., 1956.

[10] P.J. Cohen
Set Theory and Continuum Hypothesis, Benjamin, New York, 1966.

[11] P.M. Cohn
Universal Algebra, Harper and Row, London, 1965.

[12] J.N. Crossley and others
What is Mathematical Logic? Oxford University Press, London–Oxford–New York, 1972.

[13] V. Devidé
Matematička logika I, Matematički institut, Beograd, 1964.

[14] S. Feferman
The Number Systems. Foundations of Algebra and Analysis, Addison–Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass.–Palo Alto–London, 1963.

[15] Р. Фейс
Модальная логика (prevod sa engleskog), „Nauka", Moskva, 1974.

[16] A.A. Fraenkel, Y.Bar–Hillel
Foundations of Set Theory, North–Holland, Amsterdam, 1958.

[17] G. Frege
The Foundations of Arithemetic. A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number, Philosophical Library, Inc., New York, 1950 (prvo izdanje 1884).

[18] K.Gilezan, B.Latinović
Bulova algebra i primene, Matematički institut, Beograd, 1977.

[19] K.Gödel
The Consistency of the Continuum Hypothesis, Ann. Math. Studies 3, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 7 izdanje, 1966.

[20] R.L. Goodstein
Mathematical Logic, Leicester, 1957.

[21] G.Gratzer
Universal Algebra, Van Nostrand, New York, 1968.

[22] P. Halmos
Naive Set Theory, Van Nostrand, Princeton, N.J. 1960.

[23] P.Halmos
Lectures on Boolean algebras, Van Nostrand, Princeton, 1963.

[24] D.Hilbert, W. Ackermann
Principles of Mathematical Logic, Chelsea Publishing Company, New York, 1950.

[25] D. Hilbert, P. Bernays
Grundlagen der Mathematik, I, II, Springer, Berlin, 1934, 1939.

[26] A. Heyting
Intuitionism. An Introduction, North–Holland, Amsterdam, 1956.

[27] H. Hermes
Introduction to Mathematical Logic, Springer, Berlin, 1973.

[28] T.J. Jech
Lectures in Set Theory with Particular Emphasis on the Method of Forcing, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[29] H.J. Keisler
Model Theory for Infinitary Logic, North–Holland, Amsterdam, 1971.

[30] S.C. Kleene
Introduction to Metamathematics, North Holland, Amsterdam; Van Nostrand, Princeton, N.J., 1952.

[31] S.Knjazeva
Logika u praksi, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1969.

[32] G. Kreisel, J.L. Krivine
Elements of Mathematical Logic: Model Theory, Nort Holland, Amsterdam, 1967.

[33] L. Krivine
Aksiomatička teorija skupova, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

[34] K. Kuratowski, A. Mostowski
Set Theory, North–Holland, Amsterdam, 1968.

[35] Đ. Kurepa
Teorija skupova, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

[36] И. А. Лавров, Л. Л. Максимова
Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, Наука, Москва, 1975.

[37] А. И. Мальцев
Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, Москва, 1965.

[38] А. И. Мальцев
Агебраические системы, Наука, Москва, 1970.

[39] E. Mendelson
Introduction to Mathematical Logic, Van Nostrand, Princeton, 1964.

[40] A. Morse
A Theory of Sets, Academic Press, New York, 1965.

[41] A. Mostowski
Constructible Sets with Applications, North–Holland, Amsterdam, 1969.

[42] П. С. Новиков
Элементы математической логики, Физматгиз, Москва, 1959.

[43] П. С. Новиков
Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, Наука, Москва, 1977.

[44] S. B. Prešić
Elementi matematičke logike, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1968.

[45] N. Prijatelj
Uvod v matematično logiko, Sigma, Ljubljana, 1960.

[46] W.V. Quine
Mathematical Logic, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1951.

[47] H. Rasiowa, R.Sikovski
The mathematics of metamathematics, Panstowe Wydawnictwo Naukowe, Warsawa, 1963.

[48] A. Robinson
Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra, Nort–Holland, Amsterdam, 1963.

[49] A. Robinson
Non–Standard Analysis, North–Holland, Amsterdam, 1966.

[50] H. Rubin, J.E. Rubin
Equivalents of the Axiom of Choise, North–Holland, Amsterdam, 1963.

[51] S. Rudeanu
Boolean Functions and Equations, North–Holland, Amsterdam – London, Amer. Elsevier Publ. Comp., Inc., New York, 1974.

[52] B. Russell, A.N. Whitehead
Principia Mathematica, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Vol. 1, 1910; Vol. 2, 1912; Vol. 3, 1913.

[53] J.R. Shoenfield
Mathematical Logic, Addison–Wesley, Reading, Mass., 1967.

[54] W. Sierpiński
Hypothèse du Continue, Warszawa – Lwów, 1934.

[55] W. Sierpiński
Cardinal and Ordinal Numbers, Panstowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958.

[56] R. Sikorski
Boolean Algebras, drugo izdanje, Springer, Berlin, 1964.

[57] R.M. Smullyan
Theory of Formal Systems, Princeton Univ. Press, Princeton, 1961.

[58] M. Stojaković
Algoritmi i automati, Rad. Univ. Ćirpanov, Novi Sad, 1972.

[59] P. Suppes
Axiomatic Set Theory, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1960.

[60] G. Takeuti
Proof Theory, North–Holland, Amsterdam, 1975.

[61] G. Takeuti, W.M. Zaring
Introduction to Mathematic Set Theory, Springer, Berlin, 1971.

[62] G. Takeuti, W.M. Zaring
Axiomatic Set Theory, Springer, Berlin, 1973.

[63] P. Vopěnka, P. Hàjek
The Theory of Semisets, North–Holland, Amsterdam, 1972.

[64] H. Wang, Mc Naughton R.
Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles, Gauthier–Villars, Paris, 1953.

Navodimo i izvesne knjige pisane poglavito u metodičkom duhu. Medju navedenim takve su [12], [14], [22], [31], [45].

[65] L. A. Kalužnin
Što je matematička logika, Školska knjiga, Zagreb, 1971.

[66] Đ. Kurepa
Skupovi, što su i kakva im je uloga, Školska knjiga, Zagreb, 1967.

[67] S.B. Prešić
Savremeni pristup nastavi matematike, Naučna knjiga, Beograd, 1975.

[68] P. Suppes
Introduction to Logic, Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, Toronto, London, New York, 1957.

[69] А. Столяр
Логические проблемы преподавания математики, Высшая школа, Минск, 1965.

GDE JE ŠTA

MATEMATIČKI VIDICI

Knjiga 1. —

Rade Dacić: ELEMENTARNA KOMBINATORIKA, Beograd 1977. str. 195.

Knjiga 2. —

Marica i Slaviša Prešić: UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU — TEORIJA I ZADACI, Beograd 1979, str. 398.

(Rasprodano)

Knjiga 3. —

Slaviša Prešić, Zvonimir Šikić, Marica Prešić, Žarko Mijajlović, Mirko Mihaljinec, Kajetan Šaper: PROBLEM POSTOJANJA U MATEMATICI, Beograd 1979, str. 76.

Knjiga 4. —

Tatomir P. Anđelić: UVOD U ASTRODINAMIKU, Beograd 1983, str. 158.

Knjiga 5. —

Marica i Slaviša Prešić: UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU — TEORIJA I ZADACI, Beograd 1984, str. 399 (Drugo dopunjeno izdanje)