MATEMATIČKI INSTITUT

POSEBNA IZDANJA

KNJIGA 14

U r e d n i k
Akademik *MIRKO D. STOJAKOVIĆ*

VELJKO A. VUJIČIĆ

Kovarijantna dinamika

BEOGRAD
1981.

MATEMATIČKI INSTITUT

POSEBNA IZDANJA

KNJIGA 14

Urednik
Akademik *MIRKO D. STOJAKOVIĆ*

VELJKO A. VUJIČIĆ

Kovarijantna dinamika

BEOGRAD
1981.

ПОСЕБНА ИЗДАЊА МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА У БЕОГРАДУ

Математички институт у Београду у својим *Посебним издањима* објављиваће: монографије актуалних питања из математике и механике, оригиналне чланке већег обима итд. Ова публикација није периодична.

Проблематика монографије мора бити прихваћена у светској литератури и актуална или уводити нове путеве и идеје, пружати могућности даљих истраживања и указивати на нерешене проблеме, на могућности њиховог решавања и слично. Она мора бити приказана целовито, водећи рачуна о најновијој литератури. По обиму, она може обухватити читаву једну математичку област, али, исто тако, и само један њен заокругљени део.

L'Institut mathématique de Beograd dans ses *Éditions spéciales* (Посебна издања) fera paraître des monographies sur des problèmes de Mathématiques et de Méchanique, des articles plus étendus etc. Les *Éditions spéciales* ne sont pas périodiques.

La problématique des monographies doit être soit admise dans la littérature mondiale, soit-reconnue d'actualité; elle doit ou servir d'introduction à des idées novuelles, ou ouvrir des possibilitiés aux nouvelles recherches, ou mettre en évidence les problèmes non résolus, ainsi que les possibilitiés de leur solution. Elle doit être présentée dans son intégrité, en tenant compte toujours des dernières acquisitions Quant à son format, elle peut embrasser toute une region des sciences mathématiques, mais elle peut aussi n'en traiter qu'une de ses parties.

MATEMATIČKI INSTITUT

POSEBNA IZDANJA

KNJIGA 14

Urednik
Akademik *MIRKO D. STOJAKOVIĆ*

VELJKO VUJIČIĆ

Kovarijantna dinamika

BEOGRAD
1981.

Recenzenti:
Dr Stevo Komljenović, viši naučni saradnik Matematičkog instituta u Beogradu
Dr Marko Leko, profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu

Primljeno na 119. sednici Naučnog veća Matematičkog instituta 25. decembra 1980. godine.

Tehnički urednik: *Milan Čavčić*

Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema mišljenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije, ova publikacija je oslobođena poreza na promet.

PREDGOVOR

Ideja o potrebi pisanja jedne ovakve opsežnije studije javila se u men početkom sedamdesetih godina i nametnula mi se naročito na XII jugoslovenskom kongresu racionalne i primenjene mehanike. Na tom naučnom skupu u Ohridu 1974. godine u uvodnom delu svog saopštenja pod naslovom „KOVARIJANTNOST U DINAMICI" iskazao sam misao, koju sam razvio i u ovoj monografiji, i to: „Polazeći od stanovišta da mehanika kao teorijska nauka određuje izvesne prirodne zakone kretanja objekata, koji realno ne zavise od sistema posmatranja i opisivanja, logično je postaviti zahtev da isti dinamički zakoni kretanja budu jednako ili slično opisani u svim sistemima koordinata. To je donekle postignuto za diferencijalne izraze pojedinih karakteristika kretanja ali ne i u potpunosti; pogotovo ne ako je reč o rezultatima koje dobijamo integralenjem diferencijalnih jednačina kretanja. Ovim radom se ukazuje na rezultate koji sa tog stanovišta upotpunjuju dinamiku; čine je kovarijantnom teorijom koja u raznim sistemima koordinata opisuje pojedina kretanja istim ili sličnim matematičkim izrazima. To se uspelo zahvaljujući uvođenju apsolutnog sintegrala u tenzorski račun, koji ima svojstvo kovarijantnosti. S obzirom da je bila vektorska, to jest tenzorska invarijanta, te da su i drugi diferencijalni izrazi u kojima se javljaju sile, vektorskog karaktera, pokazalo se relativno lakim da se pomoću ovog apsolutnog integrala otkloni ta nedorađenost mehanike i da dobijemo jednu celovitu kovarijantnu dinamiku".

Naučna analiza ovog pitanja na samom Kongresu, kao i kasnija u krugu svojih kolega u Institutu za mehaniku Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu i matematičkog instituta u Beogradu, pokazali su da je problem kovarijantnosti mehanike znatno složenije prirode, nego što bi moglo izgledati sa stanovišta Lagranžove analitičke mehanike; to naročito kad se kretanje sistema posmatra na Rimanovim mnogostrukostima.

Ova studija u najvećem delu sadrži rezultate mojih istraživanja koji su objavljeni u radovima navedenim u spisku literature, ali su povezani dodatnim znanjem, tako da čini jednu celinu koja odgovara naslovu knjige. Osnovne rezultate, koji su objavljeni u naučnim časopisima iz ove oblasti, mogla je zbog svoje uobičajene konciznosti da prati izvesna nejasnost, kao i omaške u računima ili primenama. Opširnije objašnjenje tih rezultata moguće je bilo napisati samo u okviru jedne opsežnije studije, kao što je ova, ali ne ni ovde toliko da bi gradivo knjige moglo biti pristupačno čitaocu bez visoke učenosti iz oblasti mehanike i matematike.

U krugu svojih veoma uvaženih kolega pri razmatranju opisane problematika nailazio sam na veoma korisnu naučnu kritiku koja je doprinela rešenju pojedinih pitanja i otklanjanju nekih grešaka. Ključna pitanja su se u suštini odnosila na vektorsku prirodu vektora položaja tačke i na stepen valjanosti apsolutnog integralenja u raznim prostorima i koordinatnim sistemima u kojima se opisuje mehaničko kretanje. Zbog toga je tim pitanjima dato dodatno objašnjenje na kraju knjige.

Rukopis knjige u celosti su pročitali: akademik prof. dr Tatomir P. Anđelić, prof. dr Marko Leko, viši naučni saradnik dr Stevo Komljenović, a pojedine delove dopisni član Akademije nauka SSSR prof. dr Valentin V. Rumjancev (deo o zakonu energije reonomnog sistema) i prof. dr Jovo Jarić (deo o kretanju krutog tela), koji su svojim primedbama mnogo doprineli poboljšanju teksta i otklanjanju nedostataka. Posebno sam dužan da istaknem trud recezenta kolege dr Marka Leko, koji je analizirao skoro svaku rečenicu uvodnog i prvog dela ove knjige i dao najveći broj prihvatljivih primedbi. Takođe sam zahvalan prof. dr Zlatku Jankoviću na povoljnom opštem mišljenju o sadržaju knjige koju je imao prilike da pregleda u rukopisu.

Na tehničkoj pripremi rukopisa za štampu nesebično su mi pomogli Mirjana Filipović i Milan Čavčić na čemu im mnogo zahvaljujem. Posebno sam zahvalan i kolektivu Beogradskog grafičkog zavoda za uspešan rad na štampanju ove knjige.

Štampanje i izdavanje ove monografije omogućeno je finansijskim sredstvima Matematičkog instituta u Beogradu i Republičke zajednice nauke Srbije, što više obavezuje od toplih reči zahvalnosti.

Otkucani tekst monografije predat je Matematičkom institutu u Beogradu 7. septembra 1979. godine. Štampanje je počelo marta 1981. a završeno septembra 1981. godine.

Veljko A. Vujičić

S A D R Ž A J

UVOD U KOVARIJANTNU DINAMIKU

Pojmovi. Pod pojmom *dinamika* podrazumevamo onu prirodnu i matematičku nauku koja se sastoji od racionalno-logički povezanih stavova o kretanju ili relativnom mirovanju geometrijski modeliranih objekata u prostoru i vremenu pod dejstvom onog prirodnog fenomena koje je čovek nazvao sila. Kao takva je logičko-matematička teorija koja sa velikom tačnošću odražava objektivne zakone kretanja i mirovanja realnih tela u prirodi. Zbog toga je ne samo teorijska nego i primenjena nauka te njeni stavovi zalaze i u druge oblasti primenjenih nauka. Nazvana je i klasičnom, ne zato što je prevaziđena ili njena teorija završena, nego što se njeni otkriveni zakoni koriste sada kao i u prošlosti. Subjektivno uvedeni pojam sile, po kojem je dinamika i dobila naziv, podložan je izmeni formulacije u smislu racionalnih teorija samo toliko, koliko uopštava utvrđene zakone kretanja.

U postojećoj dinamici, međutim, dokazi se ne izvode jednako u različitim sistemima koordinata. Izmena koordinatnih sistema posmatranja bez sumnje ne može uticati na promenu prirodnog kretanja realnog objekta, te i dinamici kao i svakoj teoriji predstoji upotpunjavanje novim saznajnim rezultatima. Takav prilog predstavlja i ova studija, kojom se nastoje otkloniti nedostaci dinamike pri transformacijama u raznim koordinatnim sistemima i matematičkim prostorima.

Zato pod pojmom *kovarijantna dinamika* podrazumevamo onu dinamiku čije se tvrdnje o kretanju njenih objekata iskazuju po obliku jednakim izrazima, istim uopštenim združenim matematičkim oblicima (varijantama) u svim koordinatnim sistemima.

Pod *dinamičkim objektom* podrazumevamo model tela ili skup tela koja dejstvuju jedno na drugo. Dinamički objekt u našem razmatranju je dinamička tačka, dinamički sistem i dinamičko kruto telo. Nije slučajno izostao termin materijalna tačka, a upotrebljen termin dinamičke tačka; služićemo se i pojmom mehanička tačka. Mi ćemo razlikovati ova tri pojma, kao i pojmove kinematička tačka i reprezentativna tačka.

Materijalna tačka je, za nas, svaka tačka materijalnog sveta pa ma kako se materija manifestovala u njoj.

Mehanička tačka je element mnoštva svih tačaka, ili tačkom predstavljenih više međusobno povezanih tačaka, čije stanje kretanja ili ravnoteže izučava mehanika. Pojam mehanička tačka je uži od pojma materijalne tačke.

Kinematička tačka je svaka tačka u prostoru i vremenu nezavisno od sila.

Dinamička tačka je element mnoštva mehaničkih tačaka u kojem dejstvuju sile, ili pak, tačka koja reprezentuje napadnu tačku rezultantne sile. Prema ovom opredeljenju za dinamičku tačku je uvek vezan pojam sile. Tako, dok kinematičkoj tački pripisujemo prostorno koordinate i vreme, dotle dinamičkoj tački. pored položaja u prostoru i vremenu ili samo u prostoru, pridružujemo masu ili vektor sile.

Reprezentativna dinamička tačka ili samo reprezentativna tačka je izračunata ili izvedena tačka koja se podudara sa skupom najmanjeg broja koordinata kojim se određuje položaj jedne i više dinamičkih tačaka. Ona može ali ne mora da pripada mnoštvu tačaka dinamičkog objekta.

Dinamički sistem ili *sistem dinamičkih tačaka* je mnoštvo dinamičkih tačaka koje su povezane među sobom određenim vezama. Pojam dinamičkog sistema u opštem smislu je blizak pojmu dinamičkog objekta, ali ti pojmovi nisu identični. Dinamički sistem je uži pojam od pojma dinamičkog objekta samo utoliko, ukoliko njim izražavamo mnoštvo dinamičkih tačaka, pa makar to bila samo jedna, u prisustvu veza; dinamički objekt ne mora da uključuje i pojam veze u svoje poimanje. Isto tako i ako je pojam dinamičkog sistema opštiji od pojma dinamičkog tela, ipak ćemo i pojam tela izdvojiti kao poseban dinamički objekat.

Dinamičko telo ili *telo*, ako se izlaže u okviru dinamike, je svako telo koje se nalazi u uzajamnom dejstvu se drugim telima.

Svi definisani pojmovi ostaju sačuvani u transformacijama koje ovde razmatramo, te kao takvi ostaju invarijantni u smislu naše uslovljenosti.

Pojmovi kao što su: *prostor*, *vreme*, *masa*, *sila* ne predstavljaju objektivno samostalne, za sebe izdvojene, činioce kretanja tela, nego su uzajamno povezane kategorije. Njih ćemo okarakterisati zakonima kojima su oni povezani u uzajamnom dejstvu tela. Te uzajamne odnose mehaničkih objekata koje iskazujemo kinematičkim pojmovima: položajem jednog objekta prema drugom, pojmovima brzine i ubrzanja, ili dinamičkim pojmovima impulsa kretanja i sile opisujemo vektorima ili tenzorima sa zahtevom da pri svim upotrebljenim matematičkim transformacijama oni zadrže svoju objektivnu, a to znači tenzorsku prirodu, tj. da budu kovarijantni. Pri tome se svakako mora voditi računa o objektivnoj osobini svakog pojedinačnog vektora, jer dok su za jedne vektore njihovi krajevi u posmatranoj tački koja se kreće, dotle je za druge vektore ta tačka početak vektora. U jednom slučaju mehanika posmatra sve osobine datog kretanja, a u drugom, geometrizovanom, uzima u razmatranje samo pojedine komponente prisutnih vektora. U zavisnosti od toga pomoću kojih i koliko koordinata — parametara, koordinata vektora ili tenzora se proučava kretanje sistema mi, u cilju kraćeg i jasnijeg sporazumevanja, koristimo matematičke pojmove pojedinih skupova čiji su elementi: 1. koordinate položaja dinamičkih tačaka sistema, ili 2. koordinate dinamičkih tačaka i vreme, 3. koordinate dinamičkih tačaka i koordinate vektora impulsa kretanja; 4. koordinate položaja dinamičkih tačaka, koordinate vektora impulsa kretanja i vremena. Umesto naziva "skupovi" u mehanici su stariji i rasprosranjeniji nazivi „prostori". Zato ćemo u daljem izlaganju koristiti i pojam prostora sa nastojanjem da, gde je god to u našoj mogućnosti, u ovom razmatranju odrazimo opažajni prostor, koji je trodimenzioni a vreme jednodimenziono.

1. Vektor položaja mehaničke tačke

Za određivanje položaja mehaničke tačke neophodno je da odredimo bazu iz koje se posmatra kretanje date tačke, odnosno prema kojoj se određuje kretanje. Ta baza u svakom objektivnom slučaju predstavlja neko materijalno telo, koje je na neki način orjentisano prema drugim telima i koje se nekako kreće. U teorijskom slučaju baza može da bude uređeni sistem matematičkih pojmova koji zadovoljava uslove posmatranog mehaničkog kretanja. Dok ne bude drugačije rečeno mi ćemo pretpostaviti da se ta baza kreće tako da su na njoj svi sistemi, koji su mogući, smešteni ravnopravno. To znači da objektivno kretanje ostaje u svojoj prirodi onakvo kakvo je, bez obzira koji sistem koordinata posmatrač izabere. Ograničenje pravimo samo u tom smislu što biramo inercijsku bazu. Pod *inercijskom bazom*, prema tome i inercijskim koordinatnim sistemima, mi ćemo podrazumevati onu bazu čiji se impuls kretanja ne menja ako se međusobni uticaji sila na njoj poništavaju; odsutno je dejstvo sila. Za uređenje sistema, koji misaono uzimamo kao inercijsku bazu, potrebno je i dovoljno da se izabere jedna tačka i od nje tri orijentisana pravca. Tačka može biti proizvoljno izabrana u inercijskoj bazi i pripada oblasti inercijske baze, što znači da se kreće isto kao i inercijska baza. Ta, recimo bazna tačka je presek tri prave koje, svaku ponaosob, orjentiše po jedan od tri linearno nezavisna vektora. Neka to budu bazni *vektori* e_1, e_2, e_3, koji zadovoljavaju sledeće relacije skalarnih proizvoda vektora

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{1.1}$$

U realnosti, na primer, pri posmatranju kretanja tela prema Zemlji orjentisani pravci mogu biti približno tačno usmereni prema tri zvezde nekretnice.*) Vektori pomoću kojih je orjentisana baza ostaju nepromenjivi u odnosu na prividno nepokretna inercijska tela u posmatranom intervalu vremena, što ćemo iskaziti izrazom $e_i = \text{const}$ i ujedno uslovom da je izvod po vremenu baznih vektora jednak nuli,

$$\frac{de_i}{dt} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1.2}$$

Pomoću baznih vektora i *skupa realnih brojeva R* određujemo položaje tačaka u odnosu na izabranu inercijsku bazu. Označimo izabranu polaznu tačku slovom P, a tačku čiji položaj određujemo u odnosu na P slovom M. Paru tačaka (PM) odgovara jedinstvena prava; neka to bude prava y^1, koja je orjentitana jediničnim vektorom e_1. U skupu R postoji takav broj $r^1_M = y^1_M$ čiji proizvod sa vektorom e_1 čini vektor r koji polazi od tačke P do tačke M, tj. $r_M = r^1_M e_1 = y^1_M e_1$. Ako tačka M ne pripada pravoj y^1, uvek je moguće u ravni E_2, kojoj pripadaju prava y^1 i tačka M, povući kroz tačku P neku drugu pravu $y^2 \subset E_2$, koju ćemo orjentisati pomoću baznog vektora e_2 tako da zbir $y^1_M e_1 + y^2_M e_2$, $y^2_M \in R$, određuje vektor $r_M = y^1_M e_1 + y^2_M e_2$ koji polazi od tačke P u tačku M, te određuje položaj tačke M u odnosu na tačku P. Ukoliko pak tačka M ne pripada ravni E_2 i nalazi se u prostoru E_3 izvan ravni $E_2 \subset E_3$, njen položaj ćemo odrediti pomoću još trećeg broja $r^3_M = y^3_M \in R$, $y^3_M \in y^3$, i trećeg baznog vektora e_3, koji orjentiše pravu y^3, $r_M = y^1_M e_1 + y^2_M e_2 + y^3_M e_3 = y^i_M e_i = r^i_M e_i$ gde

*) Vidi [15]

su ovde $r^i_M = y^i_M (i=1, 2, 3)$, a ponovljeni indeksi su indeksi sabiranja. Na taj način i položaje drugih tačaka u E_3 određujemo vektorom

$$\boldsymbol{r} = y^i \boldsymbol{e}_i \quad \text{ili} \quad \boldsymbol{r} = r^i \boldsymbol{e}_i \tag{1.3}$$

čija je dimenzija $d(\boldsymbol{r}) = 3$. Taj vektor kojim određujemo položaj tačke M u odnosu na tačku P nazivamo *vektor položaja tačke*.

Ako je inercijska baza uređena pomoću neke druge tačke P_1 i nekih drugih baznih vektora $\boldsymbol{э}_i (i=1, 2, 3)$, koji usmeravaju neke druge prave, recimo $z^i (i=1, 2, 3)$, $P_1 = z^1 \cap z^2 \cap z^3$, položaj tačke M, u odnosu na tačku P_1 i bazne vektore $\boldsymbol{э}_i$ određuje vektor položaja te tačke $\boldsymbol{r} = z^i \boldsymbol{э}_i = r^i \boldsymbol{э}_i$, gde je $r^i = z^i$. Ako oba koordinatna sistema $(P, y, \boldsymbol{e})$ i $(P_1, z, \boldsymbol{э})$ uređuju pojedinačno inercijsku bazu, položaj tačke M određujemo bilo pomoću baznih vektora $\boldsymbol{e}$ bilo pomoću vektora $\boldsymbol{э}$ i skupa realnih brojeva R, jer uređenom paru tačaka (PM) odgovara vektor

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1 M} = \overrightarrow{PP_1} + z^i \boldsymbol{э}_i = y^i \boldsymbol{e}_i,$$

a paru tačaka $(P_1 M)$ vektor

$$\overrightarrow{P_1 M} = \overrightarrow{P_1 P} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{P_1 P} + y^i \boldsymbol{e}_i = z^i \boldsymbol{э}_i.$$

Odavde se jasno vidi da se vektor položaja, recimo

$$\boldsymbol{r} = y^i \boldsymbol{e}_i = z^i \boldsymbol{э}_i - \overrightarrow{P_1 P},$$

kao razlika druga dva vektora, ne određuje jednoznačno skupom tri realna broja i tri linearno nezavisna vektora. Neophodno je za to još izabrati baznu tačku P ili P_1 kao početak vektora položaja, što i činimo izborom bazne tačke, tim što ćemo toj tački pridružiti jedinstveni prazan skup $\theta = \{0, 0, 0\}$. S obzirom na proizvoljnost izbora tačaka P i P_1 u inercijskoj bazi, izaberimo neka je $P = P_1$ u kom slučaju je vektor $\overrightarrow{P_1 P} = \boldsymbol{0}$. Na taj način jedinstveno uređeni sistem $(P, y, \boldsymbol{e})$ pisaćemo prostije $(y, \boldsymbol{e})$.

Skup brojeva $y = \{y^1, y^2, y^3\}$ nazivamo *koordinate tačke M*, a skup brojeva $r^i \in R$ *koordinate vektora položaja* $\boldsymbol{r}$; za skup baznih vektora $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ uobičajen je naziv *vektorska baza* ili samo *baza*. Bazne vektore često nazivaju osnovni koordinatni vektori ili samo osnovni vektori, a ose tih vektora koordinatne ose. Uređeni par $Y = (y, \boldsymbol{e})$, na način kako je to opisano nazivaćemo *koordinatni sistem*. Svi vektori koje obrazuju linearno bazni vektori pripadaju linearnom vektorskom prostoru ili samo linearnom ili afinom prostoru $\mathbf{A}^n$, gde n pokazuje broj dimenzija tog prostora; za prostor $\mathbf{A}^n$ koji generiše trodimenziona baza afini prostor je $\mathbf{A}^3$. Za linearni vektorski prostor u kojem je fiksiran koordinatni početak kažu *realni linearni prostor* $\mathbf{R}^n$, podrazumevajući pri tom da su koordinate vektora realni brojevi. Tako za dosadašnja naša razmatranja možemo da kažemo da je vektor položaja tačke element trodimenzionog realnog vektorskog prostora $\mathbf{R}^3$.

Parcijalni izvodi vektora (1.3) po koordinatama y^k i z^k $(k=1, 2, 3)$ tačke M dovode do zakona linearne transformacije jednih baznih vektora u druge, i to:

$$e_k = \frac{\partial z^i}{\partial y^k} э_i \quad \text{i} \quad э_k = \frac{\partial y^i}{\partial z^k} e_i \tag{1.4}$$

Ako vektore (1.4) zamenimo u relaciju (1.3) dobijamo i zakon transformacije koordinata vektora položaja r^i u koordinatnom sistemu (y, e), u kojem je $r^i = y^i$, pomoću koordinata vektora $\bar{r}^i$ iz koordinatnog sistema (z, e), u kojem je $\bar{r}^i = z^i$, i obratno, tj.

$$z^i = \frac{\partial z^i}{\partial y^k} y^k \quad \text{i} \quad y^i = \frac{\partial y^i}{\partial z^k} z^k, \tag{1.5}$$

ili, što je u ovom slučaju isto,

$$\bar{r}^i = \frac{\partial z^i}{\partial y^k} r^k \quad \text{i} \quad r^i = \frac{\partial y^i}{\partial z^k} \bar{r}^k. \tag{1.6}$$

Skalarnim množenjem vektora (1.3) vektorom e_k dobijamo projekciju vektora $\boldsymbol{r}$ na osi koju orjentiše vektor e_k, i to

$$\delta_{ik} y^i = z^i э_i \cdot e_k,$$

a odavde

$$y_k = c_{ik} z^i \tag{1.7}$$

gde je $c_{ik} = э_i \cdot e_k$. Isto tako skalarnim množenjem vektora (1.3) vektorom $э_k$ dobijamo projekciju vektora $\boldsymbol{r}$ na koordinatnoj osi vektora $э_k$, i to

$$c_{ki} y^i = э_{ik} z^k = \bar{r}_k, \tag{1.8}$$

gde je

$$э_{ik} = э_i \cdot э_k, \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{1.9}$$

Zamenimo li parcijalne izvode $\frac{\partial y^i}{\partial z^k} = c_{ik}$, koje možemo da dobijemo iz (1.7), u izraz (1.8) dobićemo zakon transformacije projekcija r_k i $\bar{r}_k$ vektora $\boldsymbol{r}$ iz jednog koordinatnog sistema u drugi, i to

$$\bar{r}_k = \frac{\partial y_i}{\partial z^k} y^i = \frac{\partial y^i}{\partial z^k} y_i = \frac{\partial y^i}{\partial z^k} r_i. \tag{1.10}$$

Relacije (1.7) i (1.8) pokazuju da projekcije $r_k \in E_3$ vektora $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^3$ u koordinatnom sistemu $(z, э)$ nisu jednake koordinatama tačke z^k, kao što je to slučaj sa koordinatama r^k tog vektora ukoliko je $э_{ik} \neq \delta_{ik}$, odnosno ako koordinatni sistem $(z, э)$ nije ortonormiran, kao što je to po našem izboru koordinatni sistem (y, e). Projekcije vektora (1.10) podležu transformacijama kao i kovarijantni bazni vektori (1.4), pa ih nazivamo *kovarijantnim koordinatama vektora položaja*, za razliku od koordinata ili kontravarijantnih koordinata vektora r^k koje podležu transformacijama oblika (1.5). Bazni vektori $э_i$ u transformacijama (1.4) zadovoljavaju uslov inercijske baze (1.2). Zaista, u posmatranim koordinatnim sistemima Y i Z elementi matrice transformacije $\left\{\frac{\partial y^i}{\partial z^k}\right\} = \{c_{ik}\}$ su konstantni, pa je, prema (1.4) i (1.2),

$$\frac{d\mathfrak{z}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y^i}{\partial z^k}\right) \mathrm{e}_i + \frac{\partial y^i}{\partial z^k}\frac{d\mathrm{e}_i}{dt} = 0 \tag{1.11}$$

jer je $\frac{dc_{ik}}{dt} = 0$.

Koordinatni sistemi Y i Z su pravolinijski. Međutim, nameće se potreba da se izabere takav koordinatni sistem prema kojem je najlakše opisivati i posmatrati kretanje dinamičkog objekta. Pravolinijsko kretanje lakše je opisivati prema pravolinijskom koordinatnom sistemu nego u krivolinijskom, ali je lakše posmatrati sferno kretanje tačke prema polarno sfernom sistemu koordinata, ili spiralno kretanje prema polarno-cilindarskom sistemu koordinata, nego prema pravolinijskom. Ako smo već orijentisali inercijsku bazu koordinatnim sistemom (y, e) koji podleže uslovima (1.1) i (1.2) i ako postoji preslikavanje koordinata y^i tačke M u njene *krivolinijske koordinate* $x = \{x^1, x^2, x^3\}$, nema smetnji za preslikavanje koordinata vektora položaja $\boldsymbol{r}$ tačke M iz koordinatnog sistema (y, e), u neki koordinatni sistem (x, g), gde su $g = \{g_1, g_2, g_3\} \subset R^3$ osnovni koordinatni vektori, s obzirom da se vektor preslikava preslikavanjem krajnjih tačaka. Krivolinijske koordinate orijentisaćemo osnovnim koordinatnim vektorima g_i s tim da između koordinatnih vektora g_i i baznih vektora e_i postoji transformacija oblika (1.4) pri čemu treba da budu zadovoljeni uslovi (1.2).

Pomoću novih koordinatnih vektora g_i vektor položaja $\boldsymbol{r}$ napišimo, kao i do sada, u obliku

$$\boldsymbol{r} = r^i g_i, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1.12}$$

gde su r^i koordinate vektora položaja u krivolinijskom koordinatnom sistemu $X = (x, g)$. Rezervišemo li za oznake koordinata vektora položaja $\boldsymbol{r}$ u koordinatnom sistemu Y *Dekartove koordinate* y^i, s obzirom da su u tom sistemu Y koordinate tačke y^i i koordinate vektora r^i jednake, možemo da pišemo

$$\boldsymbol{r} = y^i e_i = r^i g_i. \tag{1.13}$$

Imajući u vidu zavisnost koordinata tačaka

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3), \qquad x^i = x^i(y^1, y^2, y^3), \tag{1.14}$$

sledi

$$\boldsymbol{r} = y^i e_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y^i} y^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^i} y^i, \tag{1.15}$$

odakle se vidi da je vektor $\boldsymbol{r}$ razložen pomoću tri vektora $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}$ koje uzimamo za osnovne *koordinatne vektore*

$$g_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1.16}$$

Zbog (1.15) i (1.16) relaciju (1.13) možemo da pišemo u obliku

$$y^i e_i = y^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k} = y^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i} g_k = r^i g_i. \tag{1.17}$$

Odavde se vidi da koordinate r^i vektora položaja $\boldsymbol{r}$ tačke u krivolinijskom koordinatnom sistemu X možemo da izračunavamo pomoću linearne transformacije

$$r^k = y^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\bigg|_{y^i = y^i(x)} = r^k (x^1, x^2\ x^3), \tag{1.18}$$

i transformacija (1.14). Isto tako iz relacije (1.17) sledi transformacija baznih vektora e_k pomoću koordinatnih vektora g_k

$$e_k = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} g_i \Leftrightarrow g_k = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} e_i, \tag{1.19}$$

pri uslovu da je

$$\left| \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right| \neq 0. \tag{1.20}$$

Kovarijantne transformacije vektora (1.19) su opštije od relacija (1.4) samo toliko što su u relacijama (1.19) elementi matrice transformacije*) $\left\{ \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right\}$ funkcije koordinata x. Prema tome i koordinatni vektori g_i su funkcije koordinata x,

$$g_i = g_i (x^1, x^2, x^3) \tag{1.21}$$

što nije slučaj sa konstantnim baznim vektorima $э_i$ koji, kao takvi, zadovoljavaju uslove (1.11), tj. (1.2).

Projekciju ili *kovarijantnu koordinatu* r_k vektora položaja $\boldsymbol{r} = r^i g_i$ na osu koordinatnog vektora g_k dobijamo kao proizvod skalarnog množenja vektora $\boldsymbol{r}$ i g_k, tj.

$$\boldsymbol{r} \cdot g_k = r^i g_i \cdot g_k = r_k,$$

ili

$$r_k = g_{ik} r^i, \qquad r_k \in E_3, \tag{1.22}$$

gde je, s obzirom na (1.21),

$$g_{ik} = g_i \cdot g_k = g_{ik} (x^1, x^2, x^3), \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{1.23}$$

metrički tenzor prostora E_3. Pri postojanju preslikavanja $y : x \to y$, ako se uzme u obzir (1.1) i (1.16), kovarijantne koordinate metričkog tenzora g_{ik} određujemo relacijama

$$g_{kl} = \delta_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l}, \qquad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \tag{1.24}$$

*) Vidi, na primer, [1], str. 29.

Uzmemo li još u obzir (1.18), pri (1.14), kovarijantne koordinate r_k vektora položaja $\boldsymbol{r}$ mogu da određuju relacije

$$r_k = \delta_{ij} y^i \frac{\partial y^j}{\partial x^k}. \tag{1.25}$$

Između koordinata r^i vektora položaja tačke i njegovih kovarijantnih koordinata r_i postoje ekvivalentne relacije

$$r_k = g_{kl} r^l \Leftrightarrow r^i = g^{ik} r_k, \tag{1.26}$$

jer je pri $|g_{ik}| \neq 0$,

$$g_{ki} g^{ij} = \delta^j_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases} \tag{1.27}$$

Pogledajmo još šta relacije (1.2) o nepromenljivosti baznih vektora $\boldsymbol{e}_i$ u toku vremena t impliciraju kod koordinatnih vektora $\boldsymbol{g}_i$. Pođimo od relacija (1.19) i odredimo izvod po vremenu od $\boldsymbol{g}_k = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^k} \boldsymbol{e}_i$; s obzirom na (1.2) dobijamo

$$\frac{d\boldsymbol{g}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right) \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^l \partial x^k} \frac{dx^l}{dt} \boldsymbol{e}_i.$$

Pri tom da su y^i Dekartove pravougle koordinate, što smo i mi usvojili, postoje relacije povezanosti $\dfrac{\partial^2 y^i}{\partial x^l \partial x^k} = \Gamma^j_{lk} \dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}$, pa dalje sledi

$$\frac{d\boldsymbol{g}_k}{dt} - \Gamma^j_{lk} \boldsymbol{g}_j \frac{dx^l}{dt} = \frac{D\boldsymbol{g}_k}{dt} = 0. \tag{1.28}$$

To pokazuje da je apsolutni izvod po vremenu uvedenih koordinatnih vektora $\boldsymbol{g}_k$ jednak nuli.

Na taj način pri usvojenim koordinatnim vektorima $\boldsymbol{g}_i$, koji mogu biti određeni relacijama (1.14) i (1.19), mi posmatramo vektor položaja $\boldsymbol{r}$ tačke M u prostoru E_3 pomoću njegovih koordinata r^i i kovarijantnih koordinata r_i. Tako na primer:

1. U pravolinijskom sistemu koordinata z^i $(i = 1, 2, 3)$ tačke M, koje su sa Dekartovim koordinatama y^i povezane linearnim relacijama $y^i = A^i_j z^j$, $A^i_j = \text{const.}$ i kad za koordinate x uzmemo z, na osnovu (1.25) sledi da su kovarijantne koordinate vektora položaja

$$r_k = \delta_{il} A^i_j A^l_k z^j = g_{jk} z^j, \quad |g_{jk}| \neq 0$$

gde je

$$g_{kj} = \delta_{il} A^i_k A^l_j = \text{const.}$$

2. U cilindarskom sistemu koordinata $x^1=r,\ x^2=\varphi,\ x^3=z$.

$$y^1=r\cos\varphi,\quad y^2=r\sin\varphi,\quad y^3=z;$$

$$r_1=r,\quad r_2=0,\quad r_3=z;$$

$$g_{ij}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix}\Leftrightarrow g^{ij}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Bmatrix},$$

$$r^1=r,\quad r^2=0,\quad r^3=z.$$

3. U sfernom sistemu koordinata $x^1=r,\ x^2=\varphi,\ x^3=\theta$,

$$y^1=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y^2=r\sin\varphi\sin\theta,\quad y^3=r\cos\varphi;$$

$$r_1=r,\quad r_2=0,\quad r_3=0;$$

$$g_{ij}=\begin{Bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\varphi\end{Bmatrix},$$

$$r^1=r,\quad r^2=0,\quad r^3=0.$$

4. U obrtno-elipsoidnom sistemu koordinata $x^1=3,\ x^2=\eta,\ x^3=\theta$.

$$y^1=b\operatorname{ch}\zeta\sin\eta\cos\theta,\quad y^2=b\operatorname{ch}\zeta\sin\eta\sin\theta,\quad y^3=b\operatorname{ch}\zeta\cos\eta,$$

$$r_1=b^2\operatorname{ch}\zeta\operatorname{ch}\zeta,\quad r_2=b^2\sin\eta\cos\eta,\quad r_3=0;$$

$$g_{ij}=b^2\begin{Bmatrix}\operatorname{ch}^2\zeta+\sin^2\eta & 0 & 0\\ 0 & \operatorname{ch}^2\zeta+\sin^2\eta & 0\\ 0 & 0 & \operatorname{ch}^2\zeta\sin\eta\end{Bmatrix},$$

$$r^1=\frac{\operatorname{ch}\zeta\ \operatorname{sh}\zeta}{\operatorname{ch}^2\zeta+\sin^2\eta},\qquad r^2=\frac{\sin\eta\cos\eta}{\operatorname{ch}^2\zeta+\sin^2\eta},\qquad r^3=0.$$

5. U obrtno-paraboloidnom sistemu koordinata $x^1=\zeta,\ x^2=\eta,\ x^3=\theta$.

$$y^1=\zeta\eta\cos\theta,\quad y^2=\xi\eta\sin\theta,\quad y^3=\frac{1}{2}(\zeta^2-\eta^2);$$

$$r_1=\frac{\zeta}{2}(\zeta^2+\eta^2),\quad r_2=\frac{\eta}{2}(\eta^2+\zeta^2),\quad r_3=0;$$

$$g_{ij}=\begin{Bmatrix} \zeta^2+\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2+{}^2\eta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2\eta^2 \end{Bmatrix}$$

$$r^1=\frac{\zeta}{2},\quad r^2=\frac{\eta}{2},\quad r^3=0.$$

6. U bipolarnom sistemu koordinata $x^1=\zeta$, $x^2=\eta$, $x^3=\theta$ $(0\leqslant\zeta\leqslant\infty$, $0\leqslant\eta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.

$$y^1=b\frac{\operatorname{sh}\zeta\cos\theta}{\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta}\quad y^2=b\frac{\operatorname{sh}\zeta\sin\theta}{\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta},\quad y^3=b\frac{\sin\eta}{\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta};$$

$$r_1=b^2\frac{\operatorname{sh}\zeta\cos\eta}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta^2)},\quad r_2=-b^2\frac{\operatorname{ch}\zeta\sin\eta}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta^2)},\quad r_3=0;$$

$$g_{ij}=b^2\begin{Bmatrix} \dfrac{\operatorname{ch}\zeta}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\operatorname{ch}\zeta}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\operatorname{sh}^2\zeta}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)^2} \end{Bmatrix}$$

$$r^1=\operatorname{sh}\zeta\cos\eta,\quad r^2=-\operatorname{ch}\xi\sin\eta,\quad r^3=0.$$

7. U cilindarsko-ortogonalnom sistemu koordinata x^1, x^2, $x^3=z$.

$$y^1=f^1(x^1,x^2),\quad y^2=f^2(x^1,x^2),\quad y^3=z;$$

$$r_1=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}[(f^1)^2+(f^2)^2],\quad r_2=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}[(f^1)^2+(f^2)^2],$$

$$r_3=z;$$

$$g_{ij}=\begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$r^1=\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial}{\partial x^1}[(f^1)^2+(f^2)^2]}{\left(\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}\right)^2},\quad r^2=\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial}{\partial x^2}[(f^1)^2+(f^2)^2]}{\left(\dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}\right)^2},$$

$$r^3=z.$$

2. Kovarijantni izvod koordinata vektora položaja

Pod nazivom kovarijantni izvod koordinata vektora položaja tačke podrazumevamo kovarijantni izvod bilo kovarijantnih r_i, bilo kontravarijantnih koordinata r^i ovog vektora $\boldsymbol{r}$ po koordinatama x^k tačke u posmatranom koordinatnom sistemu X u kojem se razlaže vektor $\boldsymbol{r}$. U cilju jasnijeg sagledavanja ovog kovarijantnog izvoda pođimo od izraza (1.25) i izračunajmo njegov parcijalni izvod po koordinatama x^l, tj.

$$\frac{\partial r_k}{\partial x^l}=\delta_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^l}\frac{\partial y^j}{\partial x^k}+\delta_{ij}y^i\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^l\partial x^k},\qquad (l=1,\,2,\,3). \tag{2.1}$$

U osnovi tenzorske analize za koordinatne sisteme Y i X, koje mi posmatramo, leži relacija povezanosti

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^l\partial x^k}=\Gamma^m_{lk}\frac{\partial y^i}{\partial x^m},\qquad (m=1,\,2,\,3), \tag{2.2}$$

gde koeficijenti povezanosti $\Gamma^m_{lk}=\Gamma^m_{kl}$ u ovom slučaju predstavljaju Kristofelove simbole druge vrste nad osnovnim kovarijantnim tenzorom (1.24). Ako zamenimo (2.2) u (2.1) i uzmemo u obzir (1.24) dobijamo izraz za kovarijantni izvod kovarijantnih koordinata r_k vektora položaja $\boldsymbol{r}$ u obliku

$$\frac{\partial r_k}{\partial x^l}-\Gamma^m_{lk}r_m=g_{lk}, \tag{2.3}$$

što možemo kraće da napišemo

$$\nabla_l r_k=g_{lk}(x), \tag{2.4}$$

jer operator $\nabla_l f_k=\dfrac{\partial f_k}{\partial x^l}-\Gamma^u_{lk}f_u$ predstavlja kovarijantni izvod.

Komponovanjem jednačina (2.4) kontravarijantnim metričkim tenzorom g^{km} $(k,\,m=1,\,2,\,3)$ dobijamo

$$\nabla_l g^{km}r_k=g^{km}g_{lk},$$

odnosno

$$\nabla_l r^m=\delta^m_l=\begin{cases}1, & l=m\\ 0, & l\neq m,\end{cases}$$

jer je $\nabla_l g^{mk}=0$. Ove relacije u koordinatnom sistemu X odražavaju onu osobinu koju u pravolinijskom koordinatnom sistemu Y pišemo kao

$$\frac{\partial y^i}{\partial y^k}=\delta^i_k. \tag{2.5}$$

To pokazuje da parcijalnom izvodu koordinata vektora položaja u pravolinijskom koordinatnom sistemu Y odgovara kovarijantni izvod u krivolinijskom koordinatnom sistemu X.

Ako imamo u vidu simetričnost metričkog tenzora $g_{ik}=g_{ki}$ iz jednačina (2.3) nalazimo da je

$$\frac{\partial r_k}{\partial x^i}-\Gamma^j_{ik}r_j=\frac{\partial r_i}{\partial x^k}-\Gamma^j_{ki}r_j.$$

Međutim, kako je u posmatranom prostoru $\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ik}$, sledi da je rotor vektora položaja $\boldsymbol{r}$ jednak nuli, tj.

$$\frac{\partial r_k}{\partial x^i} - \frac{\partial r_i}{\partial x^k} = 0. \qquad (2.6)$$

3. Paralelno pomeranje vektora

Pri razmatranju transformacija paralelnog pomeranja vektora iz jedne tačke u drugu u dva koordinatna sistema, pored dosta velike algebarske i geometrijske složenosti, potrebno je da se vodi računa i o prirodi vektora. Za jednoznačno određivanje slobodnog vektora, na primer, potreban je jedan broj parametara, a za određivanje vektora vezanog za pravu drugi. Takođe pri tom treba razlikovati jedan vektor od polja vektora. Zato dok ne bude drukčije naglašeno pod paralelnim pomeranjem vektora $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3$ podrazumevamo paralelno pomeranje slobodnih vektora. Vektor koji se paralelno pomera sam sebi u koordinatnom sistemu $\boldsymbol{Y}$, ne preslikava se tako u koordinatnom sistemu $\boldsymbol{X}$ da bi bio sam sebi paralelan pri pomeranju iz jedne tačke u drugu. Zato ćemo razlikovati pojam paralelno pomeranje vektora od pojma paralelno pomeranje vektora u koordinatnom sistemu $\boldsymbol{X}$. Pod pojmom *paralelno pomeranje vektora* podrazumevamo paralelno pomeranje vektora u odnosu na inercijsku bazu, dakle u koordinatnom sistemu $\boldsymbol{Y}$, a pod pojmom *paralelno pomeranje vektora u koordinatnom sistemu* $\boldsymbol{X}$ podrazumevamo ono paralelno pomeranje vektora samom sebi tako da pri pomeranju iz jedne tačke u drugu zadržavaju jedne te iste uglove sa koordinatnim vektorima $\boldsymbol{g}$. I jedan i drugi paralelizam mogu se preslikavati iz jednog koordinatnog sistema u drugi, te u tom smislu je potrebno razlikovati preslikavanje paralelnog pomeranja vektora iz jednog koordinatnog sistema u drugi od paralelnih pomeranja vektora u tim koordinatnim sistemima. Slike paralelnih vektora iz koordinatnog sistema $\boldsymbol{Y}$, u opštem slučaju, nisu paralelni vektori u koordinatnom sistemu $\boldsymbol{X}$. Dok ne bude drugačije rečeno mi govorimo o preslikavanju paralelnog pomeranja.

Posmatrajmo vektor $\boldsymbol{u}$ istovremeno u dva koordinatna sistema i to pravolinijski $\boldsymbol{Y} = (y, \boldsymbol{e})$ i krivolinijski $\boldsymbol{X} = (x, \boldsymbol{g})$. Neka to bude

$$\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{e}_i = u^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha, \qquad (i, \alpha = 1, 2, 3), \qquad (3.1)$$

gde su u^i koordinate vektora $\boldsymbol{u}$ u pravolinijskom $\boldsymbol{Y}$, a u^α odgovarajuće koordinate tog vektora u krivolinijskom koordinatnom sistemu $\boldsymbol{X}$. Koordinate u^i vektora $\boldsymbol{u}$ neće se promeniti pri njegovom paralelnom pomeranju. Međutim to nije slučaj sa koordinatama u^α. Kako je $u^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha$ vektorska invarijanta, a $\boldsymbol{g}_\alpha = \boldsymbol{g}_\alpha(x)$ se menja od tačke do tačke, to se i koordinate u^α vektora menjaju u zavisnosti od koordinata x. Ako vektor $\boldsymbol{u}$ u tački A napišemo u obliku $\boldsymbol{u} = u^\alpha(A)\boldsymbol{g}_\alpha(A)$, isti možemo na odgovarajući način napisati i u tački B, tj.

$$\boldsymbol{u}(B) = u^\alpha(B)\boldsymbol{g}_\alpha(B). \qquad (3.2)$$

Kako se vektor $\boldsymbol{u}(A)$ paralelnim pomeranjem iz tačke A u tačku B nije promenio ni po pravcu, ni smeru, a pogotovo ne po veličini, možemo da napišemo

$$\boldsymbol{u}(A) = \boldsymbol{u}(B),$$

odnosno

$$u^\alpha(A)\boldsymbol{g}_\alpha(A) = u^\alpha(B)\boldsymbol{g}_\alpha(B).$$

Odavde sada lako dobijamo relacije

$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}(B)=u^{\alpha}(A)g_{\alpha}(A)\cdot g_{\beta}(B), \tag{3.3}$$

koje pokazuju kakav odnos stoji između koordinata $u^{\alpha}(B)$ vektora $\boldsymbol{u}$ u tački B i tih koordinata u tački A. Ako skalarni proizvod $g_{\alpha}(A)\cdot g_{\beta}(B)$ vektora g_{α} i g_{β} u dvema tačkama označimo kao osnovni dvotačkasti tenzor

$$g_{\alpha\beta}(A, B)=g_{\alpha}(A)\cdot g_{\beta}(B), \tag{3.4}$$

relacije (3.3) možemo prostije da napišemo u obliku

$$u_{\beta}(B)=g_{\alpha\beta}(A, B)u^{\alpha}(A). \tag{3.5}$$

Ako znamo vezu između koordinata y^i i x^{α} pri kojim postoji jednoznačno preslikavanje $y: x\rightarrow y$ tenzor (3.4) u tačkama A i B možemo napisati u obliku

$$g_{\alpha\beta}(A, B)=\delta_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^{\alpha}}\bigg|_{x^{\alpha}=x^{\alpha}_A}\frac{\partial y^j}{\partial x^{\beta}}\bigg|_{x^{\beta}=x^{\beta}_B}. \tag{3.6}$$

Tačku $A(x^1_A, x^2_A, x^3_A)$ smatrajmo fiksnom tačkom, a tačku B za bilo koju tekuću tačku $X(x^1, x^2, x^3)$. U cilju prostijeg obeležavanja izaberimo i različite indekse za različite tačke. Tako tenzore u tački A obeležavaćemo indeksima $a, b, c, d=1, 2, 3$, a tenzore u tački X odgovarajućim indeksima $\alpha, \beta, \gamma=1, 2, 3$. Prema tome možemo tenzor (3.6) pisati u obliku

$$g_{a\beta}=\delta_{ij}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^{\alpha}}\right)_{x^{\alpha}=x^{a}}\frac{\partial y^j}{\partial x^{\beta}}=\delta_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^{a}}\frac{\partial y^j}{\partial x^{\beta}} \tag{3.7}$$

i nazivaćemo ga *bipunktualni fundamentalni tenzor* ili *osnovni dvotačkasti tenzor*. U ovoj notaciji paralelno preneseni vektor (3.5) iz tačke A u bilo koju drugu tačku $X\subset E_3$ biće

$$u_{\beta}=g_{a\beta}u^{a}. \tag{3.8}$$

Na isti način*) se mogu paralelno prenositi i tenzori višeg reda, kao

$$T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(X)=g^{\alpha a}g^{\beta b}g_{\gamma c}g_{\delta d}T^{cd}_{ab}(A) \tag{3.9}$$

gde su $g^{\alpha a}=g^{\alpha a}(x_A, x)$ kontravarijantne koordinate fundamentalnog bipunktualnog tenzora.

Dok kovarijantni bipunktualni ili dvotačkasti tenzor izračunavamo prema obracsu (3.7), tj. pomoću zbira proizvoda parcijalnih izvoda Dekartovih koordinata po krivolinijskim, dotle kontravarijantne koordinate ovog tenzora, određujemo, kao i kod kontravarijantnog metričkog tenzora, na osnovu relacije

$$g^{\alpha a}=\frac{G_{\alpha a}}{|g_{\alpha a}|}\qquad (\alpha=1, 2, 3;\ a=1, 2, 3) \tag{3.10}$$

gde su $G_{\alpha a}$ kofaktori člana $g_{\alpha a}$ determinante $|g_{\alpha a}|$. Jednom tako izračunati dvotačkasti tenzori za neki sistem koordinata mogu kasnije služiti za sva razmatranja paralelnog prenosa vektora u tom sistemu koordinata. Zato navedimo primere tih tenzora pre nego pokažemo još neke njihove važne osobine.

*) Vidi [39]

1. *Cilindarski sistem koordinata*

Veze između Dekartovih pravolinijskih koordinata y^1, y^2, y^3 i cilindarskih $x^1=r$, $x^2=\varphi$, $x^3=z$ pokazane su na strani 13, pa možemo neposredno na osnovu tih veza pomoću izraza (6.7) izračunati kovarijantne koordinate dvotačkastog tenzora $g_{\alpha a}$. Ako koordinate fiksne tačke O označimo donjim nultim indeksom tj. $O(r_0, \varphi_0, z_0)$ a tekuće koordinate tačke X bez indeksa, za koordinatu, recimo g_{1I} dobićemo

$$g_{1I}=\frac{\partial y^1}{\partial r}\left(\frac{\partial y^1}{\partial r}\right)_o+\frac{\partial y^2}{\partial r}\left(\frac{\partial y^2}{\partial r}\right)_o+\frac{\partial y^3}{\partial r}\left(\frac{\partial y^3}{\partial r}\right)_o=$$

$$=\cos\varphi\cos\varphi_0+\sin\varphi\sin\varphi_0=\cos(\varphi-\varphi_0).$$

Na isti način određujemo i druge koordinate, te tenzor $g_{\alpha a}$ za cilindarski sistem koordinata u E_3 možemo da napišemo u obliku matrice

$$g_{\alpha a}=\left\{\begin{matrix}\cos(\varphi-\varphi_0) & r_0\sin(\varphi-\varphi_0) & 0\\ -r\sin(\varphi-\varphi_0) & rr_0\cos(\varphi-\varphi_0) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\}. \tag{3.11}$$

2. *Sferni sistem koordinata*

$$x^1=r,\quad x^2=\varphi,\quad x^3=\theta$$

U sfernom sistemu kooıdinata koje su povezane sa Dekartovim:

$$y^1=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y^2=r\sin\varphi\sin\theta,\quad y^3=r\cos\varphi,$$

dvotačkasti osnovni tenzor je:

$$g_{\alpha a}=\left\{\begin{matrix}\sin\varphi\sin\varphi_0\cos(\theta-\theta_0)+ & r_0\sin\varphi\cos\varphi_0\cos(\theta-\theta_0)- \\ +\cos\varphi\cos\varphi_0 & -\cos\varphi\sin\varphi_0 \\ r\cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\theta-\theta_0)- & rr_0\cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\theta-\theta_0)+ \\ -\sin\varphi\cos\varphi_0 & +rr_0\sin\varphi\sin\varphi_0 \\ -r\sin\varphi\sin\varphi_0\sin(\theta-\theta) & -rr_0\sin\varphi\cos\varphi_0\sin(\theta-\theta_0)\end{matrix}\right. \tag{3.12}$$

$$\left.\begin{matrix}r_0\sin\varphi\sin\varphi_0\sin(\theta-\theta_0)\\ rr_0\cos\varphi\sin\varphi_0\sin(\theta-\theta_0)\\ rr_0\sin\varphi\sin\varphi_0\cos(\theta-\theta_0)\end{matrix}\right\}$$

3. *Obrtno-elipsoidne koordinate*

$$x^1=\zeta,\quad x^2=\eta,\quad x^3=\theta$$

$$y^1=b\,\mathrm{ch}\,\zeta\sin\eta\cos\theta,\quad y^2=b\,\mathrm{ch}\,\zeta\sin\eta\sin\theta,\quad y^3=b\,\mathrm{ch}\,\zeta\cos\eta$$

$$g_{\alpha a}=b^2\left\{\begin{array}{lll}
\mathrm{sh}^2\zeta\sin\eta\sin\eta_0\cos(\theta-\theta_0) & \mathrm{sh}^2\zeta\sin\eta\cos\eta_0\cos(\theta-\theta_0)- & \mathrm{sh}\,\zeta\,\mathrm{ch}\,\zeta\sin(\theta-\theta_0)\\
+\,\mathrm{ch}^2\zeta\cos\eta\cos\eta_0 & -\,\mathrm{ch}^2\zeta\cos\eta\sin\eta_0 & \\
\mathrm{sh}\,\zeta\,\mathrm{ch}\,\zeta\sin\eta\cos\eta_0\cos(\theta-\theta_0) & \mathrm{ch}^2\zeta\cos\eta\cos\eta_0\cos(\theta-\theta_0)+ & \mathrm{ch}^2\zeta\cos\eta\cos\eta_0\sin(\theta-\theta_0)\\
-\,\mathrm{ch}\,\zeta\,\mathrm{sh}\,\zeta\cos\eta\sin\eta_0 & +\,\mathrm{sh}^2\zeta\sin\eta\sin\eta_0 & \\
-\,\mathrm{ch}\,\zeta\,\mathrm{sh}\,\zeta_0\sin(\theta-\theta_0) & -\,\mathrm{ch}^2\zeta\sin\eta\cos\eta_0\sin(\theta-\theta_0) & \mathrm{ch}^2\zeta\sin\eta\sin\eta_0\cos(\theta-\theta_0)
\end{array}\right\}, \tag{3.13}$$

4. *Obrtno-paraboloidne koordinate*

$$x^1=\zeta,\quad x^2=\eta,\quad x^3=\theta$$

$$y^1=\zeta\eta\cos\theta,\quad y^2=\zeta\eta\sin\theta,\quad y^3=\frac{1}{2}(\zeta^2-\eta^2) \tag{3.14}$$

$$g_{\alpha a}=\left\{\begin{array}{lll}
\eta\eta_0\cos(\theta-\theta_0)+\zeta\zeta_0 & \zeta_0\eta\cos(\theta-\theta_0)-\zeta\eta_0 & \eta\zeta_0\eta_0\sin(\theta-\theta_0)\\
\zeta\eta_0\cos(\theta-\theta_0)-\zeta_0\eta & \zeta\zeta_0\cos(\theta-\theta_0)+\eta\eta_0 & \zeta\zeta_0\eta_0\sin(\theta-\theta_0)\\
-\,\zeta\eta\eta_0\sin(\theta-\theta_0) & -\,\zeta\zeta_0\eta\sin(\theta-\theta_0) & \zeta\eta\zeta_0\eta_0\cos(\theta-\theta_0)
\end{array}\right\}.$$

5. *Bipolarni sistem koordinata*

$$x^1=\zeta,\quad x^2=\eta,\quad x^3=\theta$$

$$y^1=b\,\frac{\mathrm{sh}\,\zeta\cos\theta}{\mathrm{ch}\,\zeta-\cos\eta},\qquad y^2=b\,\frac{\mathrm{sh}\,\zeta\sin\theta}{\mathrm{ch}\,\zeta-\cos\eta}.\qquad y^3=b\,\frac{\sin\eta}{\mathrm{ch}\,\zeta-\cos\eta}.$$

Kovarijantne koordinate bipunktualnog tenzora $g_{\alpha a}$ su:

$$g_{1\underset{0}{1}}=b^2\,\frac{\mathrm{sh}\,\zeta\,\mathrm{sh}\,\zeta_0\sin\eta\sin\eta_0+(1-\mathrm{ch}\,\zeta\cos\eta)(1-\mathrm{ch}\,\zeta_0\cos\eta_0)\cos(\theta-\theta_0)}{(\mathrm{ch}\,\zeta-\cos\eta)^2\,(\mathrm{ch}\,\zeta_0-\cos\eta_0)^2},$$

$$g_{1\underset{0}{2}}=b^2\,\frac{\mathrm{sh}\,\zeta_0\sin\eta_0(\mathrm{ch}\,\zeta\cos\eta-1)\cos(\theta-\theta_0)-\mathrm{sh}\,\zeta\sin\eta\,(\mathrm{ch}\,\zeta_0\cos\eta_0-1)}{(\mathrm{ch}\,\zeta-\cos\eta)^2\,(\mathrm{ch}\,\zeta_0-\cos\eta_0)^2},$$

$$
\begin{gathered}
g_{1\underset{0}{3}}=b^2\,\frac{\operatorname{sh}\zeta_0(1-\operatorname{ch}\zeta\cos\eta)\sin(\theta-\theta_0)}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)^2(\operatorname{ch}\zeta_0-\cos\eta_0)},\quad g_{3\underset{0}{1}}=b^2\,\frac{\operatorname{sh}\zeta(1-\operatorname{ch}\zeta_0\cos\eta_0)\sin(\theta_0-\theta)}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)(\operatorname{ch}\zeta_0-\cos\eta_0)^2}\\
g_{2\underset{0}{1}}=b^2\,\frac{(\operatorname{ch}\zeta_0\cos\eta_0-1)\operatorname{sh}\zeta\sin\eta\cos(\theta-\theta_0)-\operatorname{sh}\zeta_0\sin\eta_0(\operatorname{ch}\zeta\cos\eta-1)}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)^2(\operatorname{ch}\zeta_0-\cos\eta_0)^2}\\
g_{2\underset{0}{2}}=b_2\,\frac{\operatorname{sh}\zeta\operatorname{sh}\zeta_0\sin\eta\sin\eta_0\cos(\theta-\theta_0)+(1-\operatorname{ch}\zeta\cos\eta)(1-\operatorname{ch}\zeta_0\cos\eta_0)}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)^2(\operatorname{ch}\zeta_0-\cos\eta_0)^2}\\
g_{2\underset{0}{3}}=b^2\,\frac{\operatorname{sh}\zeta\sin\eta\sin(\theta_0-\theta)}{(\operatorname{ch}\zeta_0-\cos\eta_0)(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)^2},\quad g_{3\underset{0}{2}}=b^2\,\frac{\operatorname{sh}\zeta_0\sin\eta_0\sin(\theta-\theta_0)}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)(\operatorname{ch}\zeta_0-\cos\eta_0)^2},\\
g_{3\underset{0}{3}}=b^2\,\frac{\operatorname{sh}\zeta\operatorname{sh}\zeta_0\cos(\theta-\theta_0)}{(\operatorname{ch}\zeta-\cos\eta)(\operatorname{ch}\zeta_0-\cos\eta_0)}.
\end{gathered}
\tag{3.15}
$$

Primetimo još na osnovu (3.7) da je za slučaj Dekartovih pravouglih koordinata $y^i = x^i$ $(i = 1, 2, 3)$ dvotačkasti tenzor $g_{\alpha a}$ jednak Kronekerovom simbolu,

$$
g_{\alpha a}=\delta_{\alpha a}=\begin{cases}1, & \alpha=a,\\ 0, & \alpha\neq a.\end{cases}
\tag{3.16}
$$

Upoređenjem metričkog tenzora (1.19) i dvotačkastog (3.4) možemo da zaključimo da je $g_{\alpha\beta}(x)=g_{\alpha b}(A, X)|_{A=X}$, tj. da dvotačkasti tenzor $g_{\alpha b}(A, X)$ postaje osnovni metrički ako se tačke u kojima leži dvotačkasti tenzor poklapaju. Tako se iz izračunatih dvotačkastih tenzora od (3.11) do (3.15) izjednačenjem koordinata tačaka O i X dobijaju kovarijantni metrički tenzori napisani na stranama 15 i 16.

Pored kovarijantnog i kotıavarijantnog dvotačkastog tenzora (3.7) i (3.10), često ćemo koristiti u paralelnom prenosu vektora i mešoviti dvotačaksti tenzor. To je kovarijantni dvotačkasti tenzor $g_{\alpha b}$ kome je pomoću kontravarijatnog metričkog tenzora $g^{\alpha\beta}$ ili g^{ab} podignut jedan indeks gore, tj.

$$
\begin{cases} g_{\alpha b}\,g^{\alpha\beta}=g^{\beta}_{b},\\ g_{\alpha b}\,g^{ab}=g^{a}_{\alpha}.\end{cases}
\tag{3.17}
$$

Izjednačenjem koordinata dveju tačaka bipunktualnog tenzora i ovde, kao i u (3.16) dobijamo Kronekerove simbole

$$
g^{a}_{\alpha}(O, X)|_{O=X}=\delta^{a}_{\alpha}=\begin{cases}1, & \alpha=a,\\ 0, & \alpha\neq a.\end{cases}
\tag{3.18}
$$

To pokazuje da dvotačkasti tenzor možemo smatrati vektorom ponaosob u njegovim dvema tačkama, što se u ostalom vidi i iz (3.4), te na kao takav moguće je primeniti sve operacije tenzorske algebre.

4. Integralenje kovarijantnog diferencijala vektora položaja

Parcijalne diferencijalne jednačine (2.4) ili (2.3), pokazali smo, jednako važe u pravolinijskom koordinatnom sistemu Y kao i u krivolinijskim koordinatnim sistemima X, s tim što se za pravolinijske koordinate y tačke, za koje je $g_{ik}=\text{const.}$ kovarijantni izvodi svode na obične parcijalne izvode. U tom slučaju, s obzirom na (1.8),

$$\frac{\partial r_i}{\partial z^k}=э_{ik}, \quad э_{ik}=\text{const}, \quad |э_{ik}|\neq 0, \tag{4.1}$$

očigledno možemo da odredimo kovarijantne koordinate vektora položaja r_i pomoću običnog integralenja. Zaista, pomnožimo li postupno jednačine (4.1) odgovarajućim diferencijalima dz^k, a zatim saberemo po indeksu k, dobićemo

$$dr_i=э_{ik}\,dz^k. \tag{4.2}$$

Odavde sledi

$$r_i=э_{ik}\,z^k, \quad (i,\, k=1,\, 2,\, 3), \tag{4.3}$$

gde su A_i integracione konstante.

S obzirom da smo pokazali da su svi uvedeni koordinatni sistemi X ravnopravni sa Y, javlja se kao posledica toga da se integrali (4.3), koje smo odredili u pravolinijskom koordinatnom sistemu $Z=(z,\, э)$, mogu odrediti i u odnosu na krivolinijske koordinatne sisteme X. To je moguće postići na dva načina, i to:

1. Primenom transformacije (1.18) i (1.24) na (4.3), u kom slučaju nije potrebno da se koriste kovarijantne relacije (2.4);

2. Primenom kovarijantnog integrala tenzora, pri kojem je očuvana tenzorska priroda vektora $\boldsymbol{r}$ u koordinatnom sistemu X, što nije slučaj i kod običnog integralenja.

Kovarijantno integralenje u krivolinijskom koordinatnom sistemu X odgovara običnom integralenju u koordinatnom sistemu Y. S obzirom da kovarijantni integral tenzora ovde primenjujemo prvi put, ovaj odeljak ćemo izložiti nešto detaljnije. Pomnožimo postupno parcijalne diferencijalne jednačine (2.3) diferencijalima dx^l krivolinijskih koordinata x^l i zatim saberimo. Dobićemo kovarijantne diferencijale

$$Dr_k=dr_k-\Gamma^j_{kl}\,r_j\,dx^l=g_{kl}\,dx^l, \quad (j,\, k,\, l=1,\, 2,\, 3), \tag{4.4}$$

gde su, kao što je poznato, u opštem slučaju

$$\begin{cases} r_k=r_k(x), \\ \Gamma^j_{kl}=\Gamma^j_{kl}(x), \\ g_{kl}=g_{kl}(x), \end{cases} \tag{4.5}$$

funkcije koordinata x. Diferencijalne jednačine (4.4), kao što se vidi, u odnosu na koordinate x su nelinearne, ali u odnosu na koordinate vektora položaja r_k su linearne i pišemo ih u obliku

$$Dr_k=g_{kl}\,dx^l, \quad (k,\, l=1,\, 2,\, 3) \tag{4.6}$$

gde kovarijantni ili apsolutni diferencijal Dr_k ima ono svojstvo u krivolinijskom sistemu X, koje ima obični diferencijal dz_k u pravolinijskom koordinatnom sistemu Z ili Y. Komponujemo li (4.6) kontravarijantnim tenzorom g^{ki} dobijamo da je

$$g^{ki} Dr_k = Dg^{ki} r_k = g^{ki} g_{kl} dx^l = \delta^i_l dx^l,$$

tj.

$$Dr^i = dr^i + \Gamma^i_{kl} r^k dx^l = dx^i \tag{4.7}$$

Diferencijalne jednačine (4.6) možemo, prema tome, da napišemo u obliku

$$Dr_k = g_{kl} Dr^l. \tag{4.8}$$

Primetimo pri tom da se metrički tenzor $g_{kl} = g_{kl}(x)$ ponaša prema apsolutnom diferencijalu, kao konstanta prema običnom diferencijalu. Drugim rečima, kordinate $g_{kl}(x)$ su konstante δ_{ij} iz koordinatnog sistema Y, ili $э_{ij} = \text{const.}$ iz koordinatnog sistema Z, preslikane na krivolinijski koordinatni sistem X, i kao takve zavise od koordinata x. Zato ih i nazivamo *kovarijantno konstantni tenzori*, a kriterijum kovarijantne konstantnosti jeste da je kovarijantni izvod tog tenzora jednak nuli.

Kovarijantni integral tenzora*), koga označavamo znakom $\widehat{\int}$, od jednačina (4.8) biće

$$\widehat{\int} Dr_k = \widehat{\int} g_{kl} Dr^l,$$

odnosno

$$r_k = g_{kl} r^l + A_k, \tag{4.9}$$

gde su $A_k = A_k(x_0, x)$ kovarijantne koordinate kovarijantno konstantnog vektora, koji u ovom slučaju određujemo paralelnim pomeranjem vektora $r_k - g_{kl} r^l$ iz tačke $O(x_0)$ u tačku $X(x)$ tog istog prostora. Na ime, to je

$$A_k = g^b_k r_b - g^b_k g_{bc} r^c, \tag{4.10}$$

gde su $g^b_k = g^b_k(x_0, x)$ koordinate mešovitog osnovnog dvotačkastog tenzora. Uzeli smo da indeksi iz skupa slova a, b, c, d, kojima odgovara skup brojeva *1, 2, 3* napisani u kurzivu, pokazuju da dvotačkasti tenzor, ili drugi vektor sa indeksima a, b, c, d leže tom svojom valencijom u tački x_0. Dvotačkasti tenzor g^b_k ponaša se kao vektor u odnosu na indekse jedne tačke, pa se u odnosu na isti mogu primeniti pravila tenzorske algebre.

Kako na koordinate vektora (4.10) možemo, pored ostalog, primeniti sledeće algebarske operacije

$$r_b = g_{bc} r^c, \quad g^b_k g_{bc} = g_{kc},$$

to za kovarijantno konstantni vektor A_k iz (4.10) dobijamo da je jednak nuli,

$$A_k = g^b_k g_{bc} r^c - g^b_k g_{bc} r^c = g_{kc}(r^c - r^c) \equiv 0, \tag{4.11}$$

što je inače sledilo u ovom slučaju i iz (1.22) i (4.9), i što pokazuje da je očuvano svojstvo vektora položaja $\boldsymbol{r}$ pri kovarijantnom integralenju vektorskih diferencijalnih relacija u krivolinijskom koordinatnom sistemu X. Inače za vektor $\boldsymbol{r}$ čiji početak nije fiksiran u koordinatnom sistemu X ili Y, vektor paralelnog pomeranja $A = (A_1, A_2, A_3)$ zajedno sa vektorom $\boldsymbol{r}$ obrazuje afini prostor $A + \boldsymbol{r} \in A^3$, koji proizvodi afine transformacije koordinata oblika (4.3) ili njihove odraze (4.9) u koordinatnom sistemu X.

---

*) Vidi prilog na strani **190**.

5. Kovarijantna brzina tačke

Pod pojmom *kovarijantna brzina tačke* mi podrazumevamo vektor brzine tačke čije koordinate izražavamo pomoću izvoda koordinata vektora položaja $\boldsymbol{r}$ tačke. Promena vektora položaja $\boldsymbol{r}$ mehaničke tačke po vremenu t u bilo kom trenutku t^* prema inercijskoj bazi naziva se brzina mehaničke tačke ili kraće brzina $\boldsymbol{v}$ tačke i jednaka je

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Big|_{t=t^*}=\lim_{\tau=0}\frac{\boldsymbol{r}(t^*+\tau)-\boldsymbol{r}(t^*)}{\tau}. \tag{5.1}$$

Kako vektor $\boldsymbol{r}$ ima svoju početnu tačku za svako t, to vektor brzine (5.1) tačke M ima početak u krajnjoj tački M vektora položaja $\boldsymbol{r}$ tačke M. Ako za inercijsku bazu uzmemo uvedeni koordinatni sistem $Y=(y, \boldsymbol{e})$, u kojem je razložen vektor $\boldsymbol{r}$ kao u (1.14), što je uvek moguće, vektor brzine $\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{R}^3$ biće

$$\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}(y^i\boldsymbol{e}_i)=\frac{d}{dt}(r^k\boldsymbol{g}_k),$$

pri čemu postoje veze (1.14) između Dekartovih pravolinijskih y i krivolinijskih koordinata x tačke M. S obzirom da je inercijska baza nepromenljiva u toku vremena t iz prednjih relacija sledi

$$v^k\boldsymbol{g}_k=\frac{dy^i}{dt}\boldsymbol{e}_i=\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_i=\frac{dr^k}{dt}\boldsymbol{g}_k+r^k\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l}\frac{dx^l}{dt}. \tag{5.2}$$

Razložimo li još i vektor $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l}$ na koordinatne vektore $\boldsymbol{g}$, kao u (2.2), odnosno,

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l}=\Gamma^j_{kl}\boldsymbol{g}_j, \tag{5.3}$$

dobićemo vektor brzine izražen pomoću koordinata vektora položaja $\boldsymbol{r}$ tačke u krivolinijskom koordinatnom sistemu X,

$$v^k=\frac{dx^k}{dt}=\frac{dr^k}{dt}+r^j\Gamma^k_{jl}\frac{dx^l}{dt}=\frac{Dr^k}{dt}. \tag{5.4}$$

Skalarnim množenjem relacije (5.2) j-tim koordinatnim vektorom $\boldsymbol{g}_j$ ako se ima u vidu povezanost (4.3) dobijamo kovarijantne koordinate vektora brzine mehaničke tačke,

$$v_j=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}_j=\frac{d}{dt}(r^k\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}_j)-r^k\boldsymbol{g}_k\cdot\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt},$$

odnosno u obliku

$$v_j=\frac{dr_j}{dt}-\Gamma^k_{ji}r_k\frac{dx^i}{dt} \tag{5.5}$$

Na osnovu izvedenih izraza (5.4) i (5.5) možemo da kažemo: koordinate vektora brzine jednake su apsolutnom izvodu koordinata vektora položaja po vremenu, a kovarijantne koordinate vektora brzine tačke apsolutnom izvodu odgovarajućih koovarijantnih koordinata vektora položaja po vremenu u istom koordinatnom sistemu.

Relacije (5.4) pokazuju još da su koordinate vektora brzine u koordinatnom sistemu X i izvodi koordinata x tačke po vremenu t; pa prema tome i kovarijantne koordinate vektora brzine v su linearne kombinacije koordinata vektora $\frac{dx^k}{dt}$,

$$v^k=\frac{dx^k}{dt} \Leftrightarrow v_i=g_{ik}\frac{dx^k}{dt}. \tag{5.6}$$

P r i m e r. Odredimo direktno pomoću formula (5.4) i (5.5) kontravarijatne i kovarijantne koordinate brzine tačke u sfernom sistemu koordinata $x^1=r$, $x^2=\varphi$, $x^3=\theta$.

Na strani 15. u primeru 3. pokazano je za taj sistem koordinata da je $r_1=r^1=r$, $r_2=r_3=r^2=r^3=0$, pa za izračunavanje traženih koordinata vektora brzine potrebno je još da se znaju Kristofelovi simboli u sfernom sistemu koordinata. Različiti su od nule sledeći simboli*)

$$\Gamma^1_{22}=-r,\quad \Gamma^1_{33}=r\sin^2\varphi,\quad \Gamma^2_{33}=-\frac{1}{2}\sin 2\varphi,$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\varphi.$$

Prema tome (5.4) će biti:

$$v^1=\frac{dr^1}{dt}+r^1\Gamma^1_{1l}\frac{dx^l}{dt}=\frac{dr}{dt},$$

$$v^2=\frac{dr^2}{dt}+r^1\Gamma^2_{1l}\frac{dx^l}{dt}=r\,\Gamma^2_{12}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\varphi}{dt},$$

$$v^3=\frac{dr^3}{dt}+r^1\Gamma^3_{1l}\frac{dx^l}{dt}=r\,\Gamma^3_{13}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}.$$

Na isti način mogu se pomoću (5.5) dobiti kovarijantne koordinate brzine v_j. Zaista, $v_1=\frac{dr}{dt}-\Gamma^1_{1l}r\frac{dx^l}{dt}=\frac{dr}{dt}$, $v_2=-\Gamma^1_{2l}r\frac{dx^l}{dt}=r^2\frac{d\varphi}{dt}$, $v_3=-\Gamma^1_{3l}r\frac{dx^l}{dt}=$ $=r^2\sin^2\varphi\frac{d\theta}{dt}$, a to se i tražilo.

*) Vidi, na primer [22] str. 119 i 111.

6. Impuls kretanja dinamičke tačke

Dok god smo govorili o vektoru $\boldsymbol{r}$ tačke M imali smo u vidu geometrijske parametre tačke $M \in E_3$ u odnosu na izabranu inercijsku bazu. Već pri uvođenju vektora brzine $\boldsymbol{v}$ tačke M, za koji smo govorili brzina mehaničke tačke, podrazumevajući pri tom kinematičku tačku, uveli smo i novi parametar $t \in R$; dakle kinematičkoj tački pridruženo je pored koordinata x i vreme t. Dinamičkoj tački, međutim, pored vektora brzine pridružujemo masu m tačke M. Tako već uvedeni pojmovi vektora položaja i vektora brzine dobijaju nove kvalitete s obzirom na novu dimenziju mase m. Proizvod mase i vektora položaja $m\boldsymbol{r}$ nazivaćemo *linearni polarni moment inercije* tačke, a proizvod $m\boldsymbol{v}$ mase m i vektora brzine $\boldsymbol{v}$ nazivaju ili vektor količine kretanja ili vektor impulsa. Kada je reč o vektoru $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, nezavisno od koordinatnog sistema, češće ga nazivaju količinom kretanja, a ako se govori o istom vektoru posredstvom njegovih projekcija na koordinatne ose, onda je češće u upotrebi naziv impulsi ili generalisani impulsi. S obzirom da je pojam impulsa obuhvatniji od pojma količine kretanja mi ćemo, ako ne bude drugačije rečeno, upotrebljavati naziv *impuls kretanja* podrazumevajući pod tim pojmom kovarijantne koordinate vektora $\boldsymbol{p}$ količine kretanja na koordinatne ose, kao i odgovarajuće implikacije koje iz tog vektora slede pri algebarskim transformacijama vektora brzine. U krivolinijskom koordinatnom sistemu $X = (x, \boldsymbol{g})$ vektor $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, u skladu sa relacijama (5.2), (5.4) i (5.6) možemo da napišemo u obliku

$$\boldsymbol{p} = m \frac{Dr^i}{dt} \boldsymbol{g}_i .$$

Pomnožimo li skalarno ovaj vektor $\boldsymbol{p}$ koordinatnim vektorima $\boldsymbol{g}_k$ dobijamo kovarijantne koordinate p_k vektora $\boldsymbol{p}$, tj.

$$p_k = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{g}_k = m \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_k \frac{Dr^i}{dt},$$

ili

$$p_k = a_{ik} \frac{Dr^i}{dt} = a_{ik} \frac{dx^i}{dt}, \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{6.1}$$

gde su a_{ik} kovarijantne koordinate tenzora

$$a_{ik} = m \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_k = a_{ik}(x). \tag{6.2}$$

Kovarijantne koordinate (6.1) vektora $\boldsymbol{p}$ upravo nazivamo impulsi kretanja dinamičke tačke mase m ili kraće *impulsi kretanja tačke*. U Dekartovom pravolinijskom koordinatnom sistemu $Y = (y, \boldsymbol{e})$ koordinate tenzora (6.2) su jednake masi m, tj.

$$a_{ik} = \begin{cases} m \\ 0 \end{cases} \forall \begin{cases} i = k \\ i \neq k \end{cases} \tag{6.3}$$

U odnosu na koordinatni sistem Z, koeficijenti a_{ik} su proporcionalni koeficijentima (1.9),

$$a_{ik} = m\, \ni_{ik}, \qquad (\forall\, i, j = 1, 2, 3), \tag{6.4}$$

a u krivolinijskom koordinatnom sistemu X, kao što se vidi iz (1.23), koeficijenti a_{ik} proporcionalni su odnosnim koordinatama metričkog tenzora g_{ik} prostora E_3,

$$a_{ik} = m g_{ik}. \tag{6.5}$$

S obzirom da koeficijenti (6.5) imaju i inercioni i tenzorski karakter za njih ćemo upotrebljavati naziv *inercioni koeficijenti* ili *inercijski tenzor**). U klasičnoj mehanici, napomenimo, za tenzor (6.5) najrasprostranjeniji je naziv metrički tenzor konfiguracionog prostora, koji se kao takav može prihvatiti tek posle uvođenja pojma konfiguracionog prostora. Za tenzor inercije su uobičajene drugačije relacije, ali ćemo kasnije pokazati da se one izvode iz relacija (6.5), te čine uži skup od skupa koordinata tenzora (6.5).

Za slučaj kada je masa m tačke M konstantna veličina, $m=\text{const.}$ iz definicije linearnog polarnog momenta inercije

$$\rho = m\boldsymbol{r} = mr^i \boldsymbol{g}_i = \rho^i \boldsymbol{g}_i \tag{6.6}$$

dobijamo impulse kretanja kao izvode vektora (6.6) po vremenu. Stvarno, izvod po vremenu vektora (6.6), ako se ima u vidu prethodno izlaganje, dovodi do

$$\frac{d\rho}{dt} = \boldsymbol{p} = m\frac{Dr^i}{dt}\boldsymbol{g}_i = \frac{D\rho^i}{dt}\boldsymbol{g}_i$$

gde su $\rho^i = mr^i$ koordinate linearnog polarnog momenta inercije ρ. Odavde skalarnim množenjem koordinatnim vektorom $\boldsymbol{g}_k$ dobijamo

$$m\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_k \frac{Dr^i}{dt} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_k \frac{D\rho^i}{dt},$$

odnosno, s obzirom na (1.23) i (6.5),

$$p_k = g_{ik}\frac{D\rho^i}{dt} = \frac{D\rho_k}{dt} = a_{ik}\frac{Dr^i}{dt}. \tag{6.7}$$

Kako su ρ_k kovarijantne koordinate vektora ρ linearnog polarnog momenta inercije, možemo reći da su impulsi kretanja p_k dinamičke tačke jednaki apsolutnim izvodima kovarijantnih koordinata ρ_k vektora linearnog polarnog momenta inercije po vremenu t. S obzirom na (6.5) tenzor a_{ik} ima sve osobine metričkog tenzora g_{ik}, pri $m=\text{const.}$, pa iz relacija (6.6) lako određujemo koordinate $\frac{Dr^i}{dt}$ vektora brzine $\boldsymbol{v}$ dinamičke tačke pomoću impulsa kretanja. Komponujemo li relacije (6.1) i (6.6) kontravarijantnim koordinatama tenzora a^{kj} slediće

$$\frac{Dr^j}{dt} = \frac{dx^j}{dt} = a^{kj}p_k = a^{kj}\frac{D\rho_k}{dt}, \tag{6.8}$$

jer je, kao i u (1.27),

$$a_{ik}a^{kj} = \delta_i^j. \tag{6.9}$$

Tako na osnovu izraza (6.1) i (6.5) ako su poznate koordinate metričkog tenzora možemo da odredimo impulse kretanja.

---

*) U literaturi je uobičajen naziv metrički tenzor konfiguracionog prostora.

Na primer u bipolarnom sistemu koordinata $x^1 = \zeta$, $x^2 = \eta$, $x^3 = \theta$ $(0 \leqslant \zeta < \infty,\ 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, koje su povezane sa Dekartovim y kao u 6. primeru na strani 16, imamo određene koordinate metričkog tenzora, pa možemo napisati da je

$$p_1 = a_{11}\dot{x}^1 = \frac{mb^2 \operatorname{ch}\zeta}{(\operatorname{ch}\zeta - \cos\eta)^2}\dot{\zeta}, \qquad \left(\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}\right),$$

$$p_2 = a_{22}\dot{x}^2 = \frac{mb^2 \operatorname{ch}\zeta}{(\operatorname{ch}\zeta - \cos\eta)^2}\dot{\eta},$$

$$p_3 = a_{33}\dot{x}^3 = \frac{mb^2 \operatorname{ch}^2\zeta}{(\operatorname{ch}\zeta - \cos\eta)^2}\dot{\theta}.$$

Mnoštvo koordinata x^i položaja tačke X, kovarijantnih koordinata p_i vektora impulsa kretanja dinamičke tačke i vreme t nazvaćemo *stanje kretanje* dinamičke tačke. Uočimo odmah da između koordinata vektora impulsa p_i i koordinata položaja x^i dinamičke tačke postoje uvek diferencijalne veze (6.1). Impulsi kretanja u inercionom sistemu ne postoje ako nema promene položaja dinamičke tačke u datom trenutku vremena prema tom sistemu. U tom slučaju za stanje kretanja tačke kažemo *ravnotežno stanje* dinamičke tačke, koju definiciju zamenjujemo zapisom $x^i = \text{const.}$ $p_i = 0$. Tada su i koordinate vektora položaja tačke r^i konstantne, jer kao što se vidi iz (1.18) funkcije od konstantnih argumenata su konstantne.

7. Mehanička tačka na potprostorima

U realnosti mehanička tačka često leži na potprostorima $R_m \subset E_3$ čija je dimenzija $m < 3$. Smeštavanje potprostora u prostor E_3 ostvaruje se koordinatnim vezama $f(x) = 0$. U bilo kojem koordinatnom sistemu X ma kakvo ograničavanje intervala rasprostranjenosti makar jedne koordinate x ograničava potprostor na kojem se nalazi mehanička tačka. U tom slučaju ograničava se i oblast postojanja koordinata vektora $\boldsymbol{r}$ položaja tačke M, jer je tada, na primer, $r_i = r_i(x^1, x^2, x^3 = \text{const.})$ ili $r_i = r_i(x^1, x^2, x^3 = f(x^1, x^2))$. Vektor položaja $\boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^3$ tačke M u opštem slučaju je izvan potprostora R_m, jer njegova početna tačka u opštem slučaju ne pripada potprostoru R_m; samo u pojedinim i početna tačka vektora položaja može da pripada posmatranim potprostorima. Ograničenošću svojih koordinata vektor položaja $\boldsymbol{r}$ određuje tačke M potprostora u odnosu na početnu $P \notin R_m$, ali u tom slučaju ne govorimo o potprostoru R_m, nego o položaju tačaka $M \in E_3$ pri postojanju veza $f(x) = 0$. A kad govorimo o potprostoru mi u suštini podrazumevamo te veze ili njihove preseke. Tako, na primer, ako je samo jedna koordinata $x^3 = \text{const.}$, za taj potprostor kaže se *koordinatna površ*, a za slučaj dve konstantne koordinate, recimo $x^3 = \text{const.}$ i $x^2 = \text{const.}$ kaže se *koordinatna linija.* U pravolinijskom sistemu koordinata y, koordinata $x^i = x^i =$ const. određuje ravan; u sfernom koordinata $x^1 = r = \text{const.}$ određuje sferu, a u bipolarnom koordinatna površ $x^1 = \zeta = \text{const.}$ $(0 \leqslant \zeta < \infty)$ je torus. Prema tome, na tim površima potrebne su i dovoljne dve nezavisne koordinate, a na koordinatnoj liniji samo jedna za određivanje položaja tačke. Označimo li te nezavisne koordinate slovom q^α gde je α prirodni broj manji od 3, onda za određivanje položaja mehaničke tačke na datom potprostoru usvajamo upravo te koordinate q čiji skup, za sve vrednosti koje one uzimaju iz skupa realnih brojeva, nazivamo potprostor R_m.

Brzinu kretanja tačke na potprostorima R_m određujemo prema uvedenoj definiciji (5.1) iz koje sledi relacija (5.2), pri novoj činjenici da postoji povezanost među koordinatama x. Ako se radi o koordinatnim površima ili koordinatnim linijama ($x^i=\text{const.}$; $i=1, 2, 3$), onda na osnovu (5.4) sledi da je $v^i=\frac{dx^i}{dt}=0$, pa vektor brzine (5.2) pišemo u obliku

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha \qquad \left(\dot{x}^\alpha=\frac{dx^\alpha}{dt}; \quad \alpha\in N_m, \; m<3\right) \tag{7.1}$$

gde su $\boldsymbol{g}_\alpha$ koordinatni vektori (1.16) a N_m ograničeni skup prirodnih brojeva $\{1, 2, \ldots, m\}$. Na sličan način određujemo brzinu i u opštijem slučaju kretanja tačke $M(q)$ na potprostoru R_m. U tom slučaju vektor položaja $\boldsymbol{r}$ je vektorska funkcija koordinata q tačke $M\in R_m$, tj. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q)$, a vektor brzine te tačke je

$$\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha=\dot{q}^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha=v^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha, \qquad \left(v^\alpha=\frac{dq^\alpha}{dt}=\dot{q}^\alpha\right), \tag{7.2}$$

gde su koordinatni vektori $\boldsymbol{g}_\alpha=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}$ funkcije koordinata q, a leže na svojim koordinatnim osama koje tangiraju potprostor R_m u posmatranoj tački. Tako svi vektori u tački $M(q)\in R_m$, koji su linearne kombinacije koordinatnih vektora $\boldsymbol{g}_\alpha=\boldsymbol{g}_\alpha(q)$, obrazuju linearni vektorski *tangentni prostor* $\mathbf{R}^m$; bazu ovog tangentog prostora čine koordinatni vektori $\boldsymbol{g}_\alpha$. U opštem slučaju vektor položaja $\boldsymbol{r}$ tačke $M(q)$ ne pripada tangentnom prostoru, $\boldsymbol{r}\notin\mathbf{R}^m$, kao što to pripada njegov diferencijal

$$d\boldsymbol{r}(q)=\boldsymbol{g}_\alpha dq^\alpha, \tag{7.3}$$

i vektor brzine $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^m$ tačke $M(q)\in R_m$.

Koordinatni vektori $\boldsymbol{g}_\alpha\in\mathbf{R}^m (m<3)$ kvalitativno se razlikuju od koordinatnih vektora $\boldsymbol{g}_i\in\mathbf{R}^3$, jer ne zadovoljavaju uslove inercijske baze (1.2). odnosno (1.28). Tako vektori $\boldsymbol{g}_\alpha$ čine novu neinercijsku bazu pa i vektore $\boldsymbol{g}_\alpha$ nazivamo *bazni vektori*, pri čemu se misli na bazne vektore tangentnog prostora $\mathbf{R}^m$. Zato ćemo mi pisati *bazni vektori prostora* $\mathbf{R}^m$. Apsolutni izvod ovih baznih vektora prostora $\mathbf{R}^m$ po vremenu različit je od nule i kao vektor upravan je na tangentnom prostoru $\mathbf{R}^m$. Vezu između vektora $\boldsymbol{g}_\alpha=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}$ i vektora $\boldsymbol{e}_i$ inercijske baze možemo da ostvarimo pomoću vektora položaja (1.15) i to

$$\boldsymbol{g}_\alpha=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha}=\frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}\boldsymbol{e}_i, \qquad \left(i=1, 2, 3; \text{ rang}\left|\frac{\partial y^i}{\partial q^\alpha}\right|_m^3=m<3\right) \tag{7.4}$$

Ako uzmemo u obzir nepromenjivost inercijske baze (1.2) izvod po vremenu baznih vektora prostora $\mathbf{R}^m$ je

$$\frac{d\boldsymbol{g}_\alpha}{dt}=\frac{\partial^2 y^i}{\partial q^\beta \partial q^\alpha}\dot{q}^\beta \boldsymbol{e}_i. \tag{7.5}$$

Vektore $\dfrac{\partial^2 y^i}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} e_i \in \mathbf{R}^3$ možemo da razložimo po vektorima g_α i jednom vektoru n upravnom na vektorima g_α, $n \perp g_\alpha$, kao

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} e_i = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} g_\gamma + b_{\beta\alpha} n. \tag{7.6}$$

U smislu takve povezanosti (7.6) izvod (7.5) postaje

$$\frac{D g_\alpha}{dt} = \frac{d g_\alpha}{dt} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} g_\gamma \frac{dq^\beta}{dt} = b_{\alpha\beta} \frac{dq^\beta}{dt} n, \tag{7.7}$$

što se bitno razlikuje od uslova (1.2) i (1.28). S obzirom da između puta s i vremena t postoji kinematička veza $s = s(t)$ izvodi (7.7) mogu da se napišu u obliku

$$\frac{D g_\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = b_{\alpha\beta} \frac{dq^\beta}{ds} \frac{ds}{dt} n,$$

odnosno

$$\frac{D g_\alpha}{ds} = b_{\alpha\beta} \frac{dq^\beta}{ds} n. \tag{7.8}$$

Relacije (7.7) ili (7.8) pokazuju da se uslovi (1.28) mogu da ispune jedino na potprostorima R_m za koje je

$$b_{\alpha\beta} \dot{q} = 0 \Rightarrow b_{\alpha\beta} \frac{dq^\beta}{ds} = 0, \tag{7.9}$$

a za ovo je dovoljno da drugi osnovni tenzor $b_{\alpha\beta}$ bude jednak nuli.

8. Autoparalelno pomeranje vektora brzine

Pod autoparalelnim pomeranjem vektora brzine podrazumevamo paralelno pomeranje vektora brzine samom sebi u tangentom vektorskom prostoru. Ako se mehanička tačka kreće po potprostoru R_m, a vektor brzine $v = \dot{q}^\alpha g_\alpha(q)$ tačke $M(q) \in R_m$ se ne menja na putu $s \subset R_m$, pri prelazu iz tačke s_0 u njoj susednu tačku $s + \Delta s$, tada su vektori brzine u tim dvema susednim tačkama međusobno paralelni u tangentnom prostoru $\mathbf{R}^m$. Ta definicija autoparalelizma vektora brzine na putu s uslovljava da je izvod vektora brzine po putu s jednak nuli, tj. $\dfrac{dv}{ds} = 0$. S obzirom na (7.2) sledeće

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v^\alpha g_\alpha) = \frac{dv^\alpha}{dt} g_\alpha = v^\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dq^\beta}{dt} = 0, \qquad (\alpha, \beta \in N_m,\ m < 3) \tag{8.1}$$

Međutim, kako je*)

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} g_\gamma + b_{\alpha\beta} n,$$

*) Vidi [1].

gde je vektor n upravan na vektor g_α u svakoj tački $M(q)\in R_m$, a $b_{\alpha\beta}$ drugi osnovni tenzor potprostora, imaćemo

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\left(\frac{dv^\gamma}{dt}+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{dq^\beta}{dt}\right)\boldsymbol{g}_\gamma+b_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{dq^\beta}{dt}\boldsymbol{n}=0. \tag{8.2}$$

Skalarnim množenjem ovog izraza koordinatnim vektorima g_δ dobijamo uslove autoparalelnog pomeranja vektora brzine u koordinatnom obliku

$$g_{\gamma\delta}\frac{Dv^\gamma}{ds}=\frac{Dv_\delta}{ds}=0 \Leftrightarrow \frac{Dv^\beta}{dt}=0, \tag{8.3}$$

a to je: vektor brzine tačke na potprostoru autoparalelno se pomera u tangentnom prostoru ako je apsolutni izvod koordinata vektora brzine po luku putanje jednak nuli.

Iz uslova (8.2) i (8.3) sledi još da je i

$$b_{\alpha\beta}v^\alpha\frac{dq^\beta}{ds}=0,$$

a odavde, pri $s=v\neq 0$,

$$d_{\alpha\beta}\frac{dq^\alpha}{ds}\frac{dq^\beta}{ds}=0.$$

To pokazuje*) da vektor brzine ne napušta tangentni prostor ni u jednoj tački $M(q)\in R_m$.

9. Rastojanje između tačaka

Rastojanje između mehaničkih tačaka na putu s bilo na konačnoj razdaljini $l=s_1-s_0$, bilo između dve neposredno blize tačke, je od bitne važnosti u mehanici. Za vektor položaja $\mathbf{r}=\overrightarrow{PM}$ tačke M vezane su dve tačke i to početna P i poslednja M čije rastojanje čini veličina r vektora $\boldsymbol{r}$. S obzirom da imamo metrički tenzor g_{ij} prostora E_3 i koordinate r^i vektora položaja $\boldsymbol{r}$ u bilo kojem koordinatnom sistemu $X=(P, x, g)$ udaljenje tačke M od tačke P određujemo obrascem

$$r^2=g_{ij}r^ir^j, \qquad (i, j=1, 2, 3), \tag{9.1}$$

s tim da treba imati u vidu da koordinate tačke P čine prazan skup. U protivnom ako određujemo rastojanje $l=MM$ između tačaka $M_1(x_1)$ i $M_2(x_1)$ u krivolinijskom koordinatnom sistemu X ne možemo da koristimo metrički tenzor $g_{ij}(x)$, s obzirom da su koordinate tog tenzora funkcije samo jedne tačke. Samo u slučaju da je $g_{ij}=\text{const.}$, kao u (1.1) i (1.9), tj. pravolinijskom koordinatnom sistemu Y ili Z možemo da pišemo

$$l^2=\delta_{ij}(y_2^i-y_1^i)(y_2^j-y_1^j), \tag{9.2}$$

ili

$$l^2=\ni_{ij}(z_2^i-z_1^i)(z_2^j-z_1^j).$$

*) Vidi [12], str. 195.

Ako su tačke M_2 i M_1 u neposrednoj blizini, tako da je $y_2^i = y_1^i + \Delta y_1^i$, te da položaj tačke M_2 možemo da odredimo približnom tačnošću pomoću položaja tačke M_1, koristimo metrički tenzor $g_{ij}(x)$, te rastojanje između dve neposredno blize tačke $M_1(x)$ i $M_2(x+\Delta x)$ u koordinatnom sistemu X određujemo obrascem

$$(d\boldsymbol{r})^2 = ds^2 = g_{ij} Dr^i Dr^j = g_{ij} dx^i dx^j, \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{9.3}$$

Ovaj obrazac za kvadrat duži obuhvata i rastojanja između dve neposredno blize tačke na koordinatnim potprostorima (koordinatnim površima i koordinatnim linijama) pri čemu treba uzeti u obzir veze $x^\nu = \text{const.}$ ($\nu \in N$ $\nu < 2$). U tom slučaju pišemo

$$ds^2 = g_{ij} Dr^i Dr^j|_{x^\nu = \text{const.}} = g_{ij} dx^i dx^j|_{x^\nu = \text{const.}} \tag{9.4}$$

Inače, opštije, na potprostoru R_m ($m \in N$, $m < 3$), u tački $M(q)$ element luka određujemo obrascem

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(q)\, dq^\alpha dq^\beta, \qquad (\alpha, \beta \in N, \alpha < 3), \tag{9.5}$$

do kojeg se lako dolazi međusobnim skalarnim množenjem $d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}$ diferencijala $d\boldsymbol{r}$ vektora položaja $\boldsymbol{r}(q)$ tačke $M(q)$, koji je predstavljen izrazom (7.3).

DINAMIKA TAČKE

Axiomata

Sive

leges motus*)

1.

Svaka dinamička tačka poseduje impuls kretanja koga zadržava u stanju mirovanja ili ravnomernog kretanja po najkraćem mogućem putu u nasleđenom smeru sve dok silom bude prinuđeno da promeni stečeno stanje kretanja.

2.

Promena impulsa kretanja dinamičke tačke po vremenu jednaka je sili koja dejstvuje na nju i zbiva se u trenutno orijentisanom pravcu sile.

3.

Ako na dinamički objekt dejstvuje više od jedne sile reprezentativna tačka objekta se kreće kao da na nju dejstvuje ekvivalenta rezultantna sila.

4.

Sve materijalne tačke dinamičkog objekta dejstvuju jedna na drugu jednakim i suprotno usmerenim silama.

---

*) Ovim Njutnovim naslovom iz njegovog fundamentalnog dela „Philosophia naturalis principia Mathematica", želimo da istaknemo da ova kovarijantna dinamika počiva na temeljima klasične mehanike. Uočljive uzmene Njutnovih (Newton), Galilejevih (G. Galilei) i (Hertz) Herecovih formulacija su takve da omogućavaju dalje izvođenje cele dinamike a da pri tom ostanu sačuvani njeni klasični stavovi.

10. Kretanje tačke u odsutnosti sila

Kretaje dinamičke tačke u odsutnosti sila određuje prvi zakon kretanja. Realna odsutnost sila u prirodi je rasprostranjena, ako pod odsutnošću sila podrazumevamo međusobno poništavanje sila kojim dva ili više objekata dejstvuju jedan na drugi. Čak i u polju sila gravitacije, ili konkretnije, u polju sile Zemljine teže možemo posmatrati dinamičku tačku u odsutnosti sile ako drugi objekt neutrališe tu silu teže. Na primer, za tešku loptu na horizontalnoj glatkoj ravni u izolovanoj sredini možemo kazati da je u stanju odsutnosti sila, jer se ravan opire lopti silom kojom kugla pritiska ravan. Slično se mogu navesti mnogi drugi primeri na koje ne dejstvuju nikakve sile. Prema prvom zakonu dinamike pri odsutnosti sila dinamička tačka će se kretati po najkraćem putu s, i to iz tačke s_0 u trenutku t_0 ka tački s u trenutku t, $\forall\, t > t_0$. Metriku prostora E_3, shodno formulama (1.23) i (4.7), možemo da napišemo u obliku

$$ds^2 = g_{ij} Dr^i Dr^j, \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

te pređeni put u intervalu vremena (t_0, t) je

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij} \frac{Dr^i}{dt} \frac{Dr^j}{dt}}\, dt, \tag{10.1}$$

gde je t parametar od koga zavisi $s = s(t)$.

U slučaju da je $t = s$ očigledno je

$$f^2 = g_{ij} \frac{Dr^i}{ds} \frac{Dr^j}{ds} = 1, \tag{10.2}$$

a integral (10.1)

$$s = s_1 - s_0 = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{ij} \frac{Dr^i}{ds} \frac{Dr^j}{ds}}\, ds. \tag{10.3}$$

Prema provm zakonu tačka će se kretati po najkraćem putu u odsutnosti sila. Najkraći put između dve tačke s_0 s_1 odredimo iz (10.3) pomoću prve varijacije uz uslov da je druga varijacija veća od nule. Pretpostavljajući da sve krive prolaze kroz tačke $x^i(\lambda, s_0)$ i $x^i(\lambda, s_1)$ kovarijantna ili apsolutna varijacija $\mathfrak{D}$ koordinata vektora položaja r^i, kao i varijacija koordinata x^i u tim tačkama biće jednaka nuli, tj. $\delta x_1^i = \delta x_1^i = \mathfrak{D} r_0^i = \mathfrak{D} r_1^i = 0$. Ekstremnu vrednost ima onaj put koji zadovoljava uslov

$$\delta s = \int_{s_0}^{s_1} \delta \sqrt{g_{ij} \frac{Dr^i}{ds} \frac{Dr^j}{ds}}\, ds = 0, \quad s_0 \leqslant s < s_1. \tag{10.4}$$

Odavde dobijamo u prvom koraku variranja

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{2f} \delta \left(g_{ij} \frac{Dr^i}{ds} \frac{Dr^j}{dr} \right) ds = 0,$$

gde je f određeno izrazom (10.2).

S obzirom da je varijacija δ invarijante f, tj. promena po parametru λ, jednaka apsolutnoj varijaciji te invarijante po istom parametru, možemo dalje napisati

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{2} \mathcal{D}\left(g_{ij} \frac{Dr^i}{ds} \frac{Dr^j}{dr}\right) ds = 0.$$

Odavde dalje sledi:

$$\int_{s_0}^{s_1} g_{ij} \frac{Dr^i}{ds} \mathcal{D}\left(\frac{Dr^j}{ds}\right) ds = 0. \tag{10.5}$$

gde je

$$\mathcal{D}\left(\frac{Dr^j}{ds}\right) = \delta \frac{Dr^j}{ds} + \Gamma^j_{ik} \frac{Dr^i}{ds} \delta x^k.$$

Ako se ima u vidu da je $Dr^j = dx^j$, kao i to da je $\delta dx^j = d \delta x^j$, lako se pokazuje da je i

$$\mathcal{D}\left(\frac{Dr^j}{ds}\right) = \frac{D}{ds}(\mathcal{D} r^j), \tag{10.6}$$

pa (10.5) možemo napisati u obliku

$$\int_{s_0}^{s_1} D\left(g_{ij} \frac{Dr^j}{ds} \mathcal{D} r^i\right) - \int_{s_0}^{s_1} g_{ij} D\left(\frac{Dr^j}{ds}\right) \mathcal{D} r^i = 0.$$

Kako je

$$\int_{s_0}^{s_1} D\left(g_{ij} \frac{Dr^j}{ds} \mathcal{D} r^i\right) = g_{ij} \frac{Dr^j}{ds} \mathcal{D} r^i \Big|_{s_0}^{s_1} = 0,$$

tražena varijacija (10.4) se svodi na

$$\delta s = - \int_{s_0}^{s_1} g_{ij} D\left(\frac{Dr^j}{ds}\right) \mathcal{D} r^i = 0,$$

ili

$$\delta s = - \int_{s_0}^{s_1} \frac{D}{ds}\left(g_{ij} \frac{Dr^j}{ds}\right) \mathcal{D} r^i ds = 0.$$

Kako su u opštem slučaju $\mathcal{D} r^i \neq 0$, iz prethodne jednačine dobijamo kovarijantne diferencijalne jednačine puta

$$\frac{D}{ds}\left(g_{ij} \frac{Dr^j}{ds}\right) = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{10.7}$$

ili

$$\frac{D^2 r^i}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{Dr^i}{ds}\right) + \Gamma^i_{jk}\frac{Dr^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{10.8}$$

U pravolinijskom sistemu koordinata y apsolutni izvod $\frac{D}{ds}$ jednak je izvodu $\frac{d}{ds}$, a koordinate vektora r^i, kao što se vidi is (1.3), koordinatama y^i, odnosno $r^i = y^i$, pa diferencijalne jednačine (10.8) dobijaju klasični oblik diferencijalnih jednačina prave kao najkraće linije u E_3, tj.

$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} = 0, \tag{10.9}$$

a odavde

$$y^i - y^i_0 = \acute{y}^i_0 (s - s_0), \qquad (i = 1,\, 2,\, 3). \tag{10.10}$$

U krivolinijskom sistemu koordinata diferencijalne jednačine (10.7) najkraćeg puta takođe se mogu integraliti u opštem obliku pomoću kovarijantnog integrala (P2.18). Tako iz (10.7) dobijamo:

$$\widehat{\int} D\left(\frac{Dr^j}{ds}\right) = g_{ij}\frac{Dr^j}{ds} - A_i,$$

gde je $A_i(X_0,\, X)$ kovarijantno konstantni vektor, tj. vektor $g_{ij}\frac{Dr^j}{ds}$ paralelno prenošen iz tačke $X(x_0)$ u tačku $X(x)$. To ostvarujemo pomoću osnovnog dvotačkastog tenzora (3.7) i to:

$$A_i = g^a_i\, g_{ab}\frac{Dr^b}{ds}, \tag{10.11}$$

gde je $g^a_i = g^a_i(\overset{1}{x_0},\, \overset{2}{x_0},\, \overset{3}{x_0};\; x^1,\, x^2,\, x^3)$ mešoviti dvotačkasti tenzor u tačkama $\overset{i}{x_0} = x^i(s_0)$ i $x^i = x^i(s)$.

Tako se prethodni integrali svode na

$$g_{ij}\frac{Dr^j}{ds} = g^a_i\, g_{ab}\left(\frac{Dr^b}{ds}\right)_0, \qquad (i,\, j = 1,\, 2,\, 3;\; a,\, b = 1,\, 2,\, 3).$$

odnosno

$$g_{ij}\, Dr^j = g_{ib}\left(\frac{Dr^b}{ds}\right)_0 ds.$$

Primenimo li ponovo na ove kovarijantne diferencijalne jednačine kovarijantni integral, tj.

$$\widehat{\int} g_{ij}\, Dr^j = \widehat{\int} g_{ib}\frac{Dr^b}{ds}\, ds,$$

dobićemo

$$g_{ij} r^j = g_{ib} \frac{Dr^b}{ds} s + \mathscr{B}_i \tag{10.12}$$

jer se tenzor $g_{ij} = g_{ji}(x)$ i dvotačkasti osnovni tenzor $g_{ib} = g_{ib}(x_0, x)$ ponašaju kao konstantne veličine u kovarijantnom diferenciranju i integralenju, a diferencijal ds od s jednak je apsolutnom diferencijalu Ds. Određivanjem vektora $\mathscr{B}_i$, kao u postupku određivanja vektora (10.11), nalazimo

$$\mathscr{B}_i = g_i^a \left(g_{ab} r^b - g_{ab} \frac{Dr^b}{ds} s_0 \right). \tag{10.13}$$

Zamenom u (10.12) dobijamo *konačne jednačine najkraćeg puta* po kojem se, saglasno prvom zakonu, kreće dinamička tačka, a to su:

$$g_{ij} r^j = g_{ib} \frac{Dr^b}{ds} s + g_{ib} r^b - g_{ib} \frac{Dr^b}{ds} s_0,$$

ili posle sređivanja,

$$g_{ij} r^j = g_{ib} \left[\left(\frac{Dr^b}{ds} \right) (s - s_0) + r^b \right] \qquad \begin{pmatrix} i, \ j = 1, \ 2, \ 3 \\ a, \ b = 1, \ 2, \ 3 \end{pmatrix}. \tag{10.14}$$

U razvijenijem obliku ove jednačine možemo napisati kao:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{Bmatrix} \left[\begin{Bmatrix} \dot{x}_0^1 \\ \dot{x}_0^2 \\ \dot{x}_0^3 \end{Bmatrix} (s - s_0) + \begin{Bmatrix} r_0^1 \\ r_0^2 \\ r_0^3 \end{Bmatrix} \right] \tag{10.15}$$

gde je saglasno (4, 4) $\dot{x}^i = \dfrac{dx^i}{ds} = \dfrac{Dr^i}{ds}$.

Konačne jednačine (10.15) su u stvari odgovarajuće kovarijantne jednačine (10.10) u krivolinijskom koordinatnom sistemu, što čitalac može sam proveriti korišćenjem transformacija (1.18) ili (1.19) i izraza za osnovni dvotačkasti kovarijantni tenzor (3.7).

Iz jednačina (10.15) ili (10.14), što je isto, moguće je eliminisati luk $(s - s_0)$ i dobiti liniju puta dinamičke tačke. Bilo iz koje jednačine, recimo iz poslednje, treće

$$g_{3j} r^j = g_{3b} \dot{x}_0^b (s - s_0) + g_{3b} r^b,$$

odredimo luk

$$s - s_0 = \frac{g_{3j} r^j - g_{3b} r^b}{g_{3b} \dot{x}_0^b}, \qquad \begin{matrix} (j = 1, \ 2, \ 3) \\ (b = 1, \ 2, \ 3) \end{matrix}, \tag{10.16}$$

te zamenom u ostale dve jednačine iz (10.15) ili (10.14), dobijamo konačne jednačine linije najkraće putanje.

$$g_{\nu j} r^j - g_{\nu b} r^b = g_{\nu b} \dot{x}^b \frac{g_{3j} r^j - g_{3b} r^b}{g_{3b} \dot{x}_0^b}, \qquad (\nu = 1, \ 2). \tag{10.17}$$

Na taj način jednačine (10.15) mogu biti pretstavljene i u obilku

$$\frac{g_{1j}r^j - g_{1b}r^b}{g_{1b}\overset{\prime}{x}{}_0^b} = \frac{g_{2j}r^j - g_{2b}r^b}{g_{2b}\overset{\prime}{x}{}_0^b} = \frac{g_{3j}r^j - g_{3b}r^b}{g_{3b}\overset{\prime}{x}{}_0^b}. \tag{10.18}$$

P r i m e r. U Dekartovom sistemu koordinata y kao što se vidi iz (3.16) je $g_{ib} = \delta_{ib} = \begin{cases} 1 & i=b \\ 0 & i \neq b \end{cases}$, pa se jednačine (10.18) sve uprošćavaju na poznate jednačine prave

$$\frac{y^1 - y_0^1}{\overset{\prime}{y}{}_0^1} = \frac{y^2 - y_0^2}{\overset{\prime}{y}{}_0^2} = \frac{y^3 - y_0^3}{\overset{\prime}{y}{}_0^3}. \tag{10.19}$$

U cilindarskom sistemu koordinata $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ jednačine (10.18) svakako će biti složenije, i to

$$\frac{r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{\overset{\prime}{r}_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0 \overset{\prime}{\varphi}_0 \sin(\varphi - \varphi_0)} = \frac{r_0 \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)\overset{\prime}{\varphi}_0 - \overset{\prime}{r}_0 \sin(\varphi - \varphi_0)} =$$

$$= \frac{z - z_0}{\overset{\prime}{z}_0} = s - s_0 \tag{10.20}$$

pri čemu smo iskoristili rezultate sa 15. i 20. strane gde su određene koordinate vektora r^i i osnovnog dvotačkastog tenzora g_{ia} za cilindarski sistem koordinata.

Za kretanje tačke po potprostorima u odsutnosti sila prva aksioma o najkraćem putu ostaje na snazi, ali je zadatak kvalitativno nov u pogledu određivanju tog puta. Ako je potprostor jednodimenzioni R_1, linija puta je sama sobom određena.

Najkraći put u dvodimenzionom potprostoru R_2 potražimo iz uslova da put (9.5), tj.

$$s = s_1 - s_0 = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dq^\alpha}{ds}\frac{dq^\beta}{ds}}\, ds \tag{10.21}$$

bude najmanji. A da bi našli taj najmanji put s_{min} dovoljno je, pri uslovu

$$\mathcal{F} = \sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dq^\alpha}{ds}\frac{dq^\beta}{ds}} = +1 \tag{10.22}$$

da odredimo prvu varijaciju puta (10.21) i izjednačimo sa nulom. Istim postupkom kao od (10.2) do (1.8) dolazimo do diferencijalnih jednačina najkraćeg puta i to

$$\frac{D}{ds}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dq^\beta}{ds}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{D}{ds}\left(\frac{dq^\gamma}{ds}\right) = 0, \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2), \tag{10.23}$$

koje pokazuju da je najkraća putanja tačke u odsutnosti sila na potprostoru $\mathbf{R}_2$ geodezijska linija tog potprostora. Zaista, variramo li (10.21) za uslov stacionarnosti dobijamo

$$\delta s=\mathcal{D} s=\int_{s_0}^{s_1}\frac{1}{2\mathcal{T}}\,\mathcal{D}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dq^\alpha}{ds}\frac{dq^\beta}{ds}\right)=$$

$$=\int_{s_0}^{s_1} D\left(g_{\alpha\beta}\frac{dq^\beta}{ds}\,\delta q^\alpha\right)-\int_{s_0}^{s_1} g_{\alpha\beta}\, D\left(\frac{dq^\beta}{ds}\right)\delta q^\alpha=0,$$

jer je

$$\mathcal{D}\left(\frac{dq^\beta}{ds}\right)=\delta\left(\frac{dq^\beta}{ds}\right)+\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{dq^\alpha}{ds}\,\delta q^\gamma=\frac{d}{ds}(\delta q^\beta)+\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\,\delta q^\alpha\frac{dq^\gamma}{ds}=\frac{D}{ds}(\delta q^\beta).$$

Iz razloga što je $\delta q^\alpha(s_0)=\delta q^\alpha(s_1)=0$ sledi

$$\int_{s_0}^{s_1} g_{\alpha\beta}\, D\left(\frac{dq^\beta}{ds}\right) dq^\alpha=\int_{s_0}^{s_1}\frac{D}{ds}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dq^\beta}{ds}\right)\delta q^\alpha\, ds=0,$$

a odavde diferencijalne jednačine (10.23).

Primenom apsolutnog integrala tenzora (P 1.1) na diferencijalne jednačine (10.23) snizujemo red tih dijerencijalnih jednačina i dobijamo *diferencijalne jednačine geodezijske linije prvog reda*

$$\frac{dq^\gamma}{ds}=A^\gamma, \tag{10.24}$$

gde je A^γ integralni kovarijantno konstantni ili autoparalelni vektor. Dalje integralenje diferencijalnih jednačina (10.24), u cilju određivanja geodezijske linije, a tim i putanje tačke u odsutnosti sila na potprostoru R_2, u opštem slučaju nije rešeno, s obzirom na 1. apsolutni integral tenzora se ne može koristiti, jer na levim stranama jednačina nije reč o diferencijalu, pogotovo ne o apsolutnom diferencijalu vektora ili tenzora i 2. integralni kovarijantno konstantni vektor A nije određen u opštem slučaju, izuzev toliko što je poznato da su njegove kovarijantne koordinate A_α funkcije koordinata q tačke $M\in R_2$, kao i to da je njihov apsolutni diferencijal jednak nuli. Metod paralelnog prenošonja vektora pomoću dvotačkastog tenzora u raznim koordinatnim sistemima u E_3 ovde ne važi jer, kao što smo pokazali, autoparalelno prenošenje vektora u tangentnom prostoru $\mathbf{R}^2$ u suštini se razlikuje od paralelnog prenošenja vektora $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^3$ u E_3. Paralelni vektori u koordinatnom sistemu (y, e) ne moraju biti paralelni u tangentnom prostoru $\mathbf{R}^2$ potprostora $R_2\subset E_3$. Ni sami potprostori po svojoj strukturi nisu jednaki, pa pri određivanju koordinata A_α autoparalelnog vektora $A\in\mathbf{R}^2$, ako je to moguće, neophodno je o tome voditi računa.

P r i m e r. Neka se tačka kreće po kružnom cilindru $r=$const. pri odsutnosti sila. Poznato je da je to zavojnica ako se posmatra u odnosu na koordinatni sistem (y, e). Međutim u odnosu na cilindarski koordinatni sistem $(\varphi, z; g_1, g_2)$ to je prava. Koordinatni vektori g_α su konstantni zbog $r=$const. Vektor

$A=A^{\alpha}g_{\alpha}$ je paralelno prenosljiv u $\mathbf{R}^2$ ako su mu kovarijantne koordinate $A_{\beta}=A\cdot g_{\beta}=A^{\alpha}g_{\alpha}\cdot g_{\beta}=\text{const.}$, pa iz diferencijalnih jednačina (10.24) za ovaj primer lako dobijamo konačnu jednačinu najkraćeg puta i to

$$z-z_0=\frac{\dot{z}_0}{\dot{\varphi}}(\varphi-\varphi_0).$$

Primer. Ako se tačka kreće takođe u odsutnosti sila po sferi $r=\text{const.}$ zadatak postaje složeniji jer vektor $g_1\in\mathbf{R}^2$ nije konstantan, pa ni kovarijantna koordinata A_1 autoparalelnog vektora $A=A^1g_1+A_2g_2$ tada nije konstantna. Izaberemo li za koordinate q sferne koordinate $q^1=\theta$, $q^2=\varphi$, $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0<\varphi<\pi)$, tada je $g_1=g_{\theta}(\varphi)=r\sin\varphi\, e_{\theta}$, $|e|=1$. Da bi se vektor A prenosio paralelno u tangentnom prostoru kome inače pripada, dovoljno je da je njegova projekcija na koordinatnoj osi vektora g_1 konstanta, a to je $A_1=(A^1g_1)\cdot g_1=\text{const.}$ Kako je vektor A tangentni vektor $\tau=\frac{d\theta}{ds}g_1+\frac{d\varphi}{ds}g_2$, koga autoparalelno prenosimo u tangentnom prostoru $\mathbf{R}^2$, svakako na posmatranoj sferi, iz neke tačke $M_0(q_0)$, u kojoj je taj vektor na neki način poznat, u tačku $M(q)$ biće

$$A_1=\left(\frac{r\sin\varphi\, d\theta}{ds}\right)_0 r\sin\varphi=\frac{ds_1}{ds}r\sin\varphi=r\sin\varphi\sin\alpha=K=\text{const.},^{*)} \qquad (10.25)$$

gde je α ugao koga tangentni vektor zaklapa sa meridijanom. Dalje sledi:

$$A^1=\frac{K}{r^2\sin^2\varphi}, \qquad A_2=r\cos\alpha, \qquad A^2=\frac{\cos\alpha}{r}.$$

Zamenom ovako određenih kovarijantnih koordinata A_{α} vektora A u diferencijalne jednačine (10.24) dobijamo diferencijalne jednačine geodezijske linije na sferi i to

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{ds}=\dfrac{\cos\alpha}{r},\\[2mm] \dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{K}{r^2\sin^2\varphi}.\end{cases} \qquad (10.26)$$

Odavde sledi, ako se uzme u obzir da je $r\sin\varphi\sin\alpha=K=\text{const.}$,

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{r\cos\alpha\sin^2\varphi}{K}=\frac{\sin\varphi\sqrt{r^2\sin^2\varphi-K^2}}{K},$$

a odavde integral

$$\theta=\int f(\varphi)\,d\varphi+c$$

gde je $f(\varphi)=\dfrac{K}{\sin\varphi\sqrt{r^2\sin^2\varphi-K^2}}$, a c integraciona konstanta.

*) Ovo je u saglasnosti sa Klerovom teoremom.

U posebnim slučajevima ako je $\alpha=\frac{\pi}{2}$ iz diferencijalnih jednačina (10.26) i jednačine (10.25) dobijamo da je najkraća putanja ekvator, a za $\alpha=0$ to su meridijani.

11. Jednačine ravnoteže tačke

Prvi zakon dinamike govori da je sila uzrok promene ravnomernog kretanja ili mirovanja dinamičke tačke, tj. da dinamička tačka zadržava zatečeno stanje ravnomernog kretanja ili mirovanja sve dok silom ne bude prinuđeno da ga promeni. Drugim rečima, ako se dinamička tačka nalazila u stanju mirovanja ostaće da miruje u odsutnosti sila. Odsutnost sila može se shvatiti kao njihovo međusobno ponašanje s obzirom da sva tela dejstvuju silama jedni na druge. I ako prvi zakon ne govori ništa o kakvoći sile, izuzev te osobine da menja stanje kretanja, to je dovoljno da postavimo uslov ravnoteže tačke. Izraz „odsustvo sile" možemo da zamenimo ekvivalentnim izrazom „sila je jednaka nuli". Ako još silu označimo slovom $\boldsymbol{F}$, za koju iz ostalih zakona proizilazi da je vektor, tada iskaz o „odsutnosti sila" zamenjujemo relacijom

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{O} \tag{11.1}$$

koja čini uslov mirovanja ili ravnomernog kretanja dinamičke tačke. Pretpostavljamo da je tačka u relativnom mirovanju pod dejstvom više sila koje se uravnotežuju pa jednačinu (11.1) nazivamo uslovom ili vektorskom jednačinom ravnoteže dinamičke tačke ili jednačina ravnoteže tačke. Kovarijantne jednačine ravnoteže tačke u bilo kom koordinatnom sistemu lako dobijamo iz jednačine (11.1). U tom cilju posmatrajmo vektor sile $\boldsymbol{F}$ koja dejstvuje na tačku $M\in E_3$ uporedo prema pravolinijskom Y i krivolinijskom koordinatnom sistemu X. Ako koordinate vektora sile $\boldsymbol{F}$ u koordinatnom sistemu $Y=(y, \boldsymbol{e})$ označimo slovima Y^i, a u koordinatnom sistemu $X=(x, \boldsymbol{g})$ slovima X^i, vektor sile $\boldsymbol{F}$ možemo da pišemo u invarijantnom obliku

$$\boldsymbol{F}=X^i\boldsymbol{g}_i=Y^i\boldsymbol{e}_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{11.2}$$

Zamenimo li bazne vektore $\boldsymbol{e}_i$ pomoću koordinatnih vektora $\boldsymbol{g}_i$, kao u (1.19), imaćemo

$$X^i\boldsymbol{g}_i=Y^j\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\boldsymbol{g}_i, \tag{11.3}$$

što daje zakon transformacije koordinata vektora sile iz jednog koordinatnog sistema u drugi

$$X^i=\frac{\partial x^i}{\partial y^i}Y^i \Leftrightarrow Y^k=\frac{\partial y^k}{\partial x^i}X^i. \tag{11.4}$$

Skalarnim množenjem vektora u (11.2) koordinatnim vektorima $\boldsymbol{g}_k$ dobijamo i zakon transformacije kovarijantnih koordinata

$$g_{ik}X^i=g_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}Y^j \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3),$$

ili s obzirom na zakon transformacije metričkog tenzora,

$$X_k = \delta_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} Y^j = \delta_{\mu\nu} \delta^\mu_j \frac{\partial y^\nu}{\partial x^k} Y^j = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^k} Y_\nu, \tag{11.5}$$

$$(\mu,\ \nu,\ i,\ j,\ k = 1,\ 2.\ 3).$$

Napišemo li sada jednačinu (11.1) pomoću koordinatnih vektora g_i, $F = X^i g_i$, to skalarnim množenjem vektorima g_k dobijamo jednačine ravnoteže tačke u koordinatnom obliku i to

$$X_k = g_{ik} X^i = 0, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{11.6}$$

Ove *kovarijantne jednačine ravnoteže dinamičke* tačke $M \in E_3$ važe u svim koordinantnim sistemima u odnosu na koje se razlaže vektor sile $F \in \mathbf{R}^3$.

U potprostorima $R_m \subset E_3$ za dinamičku tačku $M \in R_m$ kažemo da je u ravnoteži ako su projekcije vektora sile ili kovarijantne koordinate Q_α vektora sile F na koordinatne ose vektora g_α u tangentnom prostoru $\mathbf{R}^m (m \in N_2)$ jednake nuli

$$Q_\alpha = 0 \qquad (\alpha \in N_2) \tag{11.7}$$

gde je m dimenzija posmatranog potprostora. Ove jednačine ravnoteže tačke na potprostorima nisu u fizičkom smislu ekvivalentne jednačinama (11.1) jer nisu uzete u obzir sve komponente vektora sile $F \in \mathbf{R}^2$. Stvarno, dejstvuje li sila u tački $M(q) \in R_m$ $(m < 3)$ vektor te sile F možemo uvek da razložimo na komponentu u tangentnom prostoru $Q = Q^\alpha g_\alpha \in \mathbf{R}^m$ i drugu komponentu $F_n n$ normalnu na tangentni prostor u tački $M(q)$, tj

$$F = Q^\alpha g_\alpha + F_n n.$$

Odavde skalarnim množenjem koordinatnim vektorima $g_\beta \in \mathbf{R}^m$ dobijamo jednačine (11.7). Međutim, da bi bila zadovoljena jednačina (11.1) treba da bude i $F_n = 0$. Ako pak posmatramo tačku $M(q)$ potprostora R_m za koji često kažemo m-dimenzioni prostor, onda uzimamo u obzir samo one komponente sile koje leže u tom potprostoru $\mathbf{R}^m$, pretpostavljajući da je zadovoljena i jednačina

$$F_n = 0,$$

koja govori da je dejstvo sile normalne na potprostor poništeno. Kako komponenta $F_n n$ sile F sadrži reakcije veza tada, kad god su te sile relevantne za ravnotežu tačke, koristimo jednačine ravnoteže (11.6), kao i transformacije (11.4). Inače, ako se ima u vidu izraz (7.2) iz kojeg sledi da su koordinatni vektori potprostora dati pomoću vektora položaja tačke, tj.

$$g_\alpha = \frac{\partial r}{\partial q^\alpha},$$

dobijamo formule za izračunavanje kovarijantnih koordinata vektora sile F, koje još nazivaju generalisane sile, i to

$$Q_\alpha = F \cdot \frac{\partial r}{\partial q^\alpha}, \qquad (\alpha \in N_2). \tag{11.8}$$

Za slučaj da su potprostori koordinatne površi ili koordinatne linije $x^i = \text{const.}$ za generalisane koordinate q^α valja birati upravo koordinate x

Kovarijantne jednačine ravnotežnog oblika nerastegljive niti

Nerastegljivu homogenu nit konstantnog poprečnog preseka u polju konstantnog polja sila, recimo polja sile Zemljine teže, možemo posmatrati kao mnoštvo međusobno povezanih dinamičkih tačaka koje dejstvuju silama po samoj niti u svakoj tački. U tom smislu na beskonačno mali element laučanice, čiji je luk Δs dejstvuju tri sile*) i to: $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}^l+\boldsymbol{R}^d=-\Delta \boldsymbol{R}$ gde je $\boldsymbol{P}$ specifično opterećenje niti, a $\boldsymbol{R}$ sila reakcije niti. U graničnom slučaju $\Delta s \to 0$ shodno uslovu (11.1) dobijamo vektorsku jednačinu ravnoteže niti u obliku

$$d\boldsymbol{R}+\boldsymbol{P}\,ds=0. \tag{11.9}$$

Ako se ima u vidu da unutrašnja sila $\boldsymbol{R}=R\boldsymbol{\tau}$ ima pravac tangentnog vektora $\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ diferencijalnu vektorsku jednačinu (11.9) lako je transformisati na kovarijantni koordinatni oblik.

Zaista, posmatrajmo ravnotežni oblik nerastegljive niti prema krivolinijskom sistemu koordinata $x^i\,(i=1,2,3)$ orjentisanim vektorima $\boldsymbol{g}_i$. U tom opštem slučaju tangentni vektor $\boldsymbol{\tau}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}$ možemo napisati, s obzirom na (1.16) i (4.7) kao $\boldsymbol{\tau}=\frac{dx^i}{ds}\boldsymbol{g}_i=\frac{Dr^i}{ds}\boldsymbol{g}_i$, a diferencijalnu jednačinu (11.9) kao

$$\frac{d}{ds}\left(R\frac{Dr^i}{ds}\boldsymbol{g}_i\right)+P^i\boldsymbol{g}_i=0,$$

gde su P^i kontravarijantne koordinate specifičnog opterećenja $\boldsymbol{P}$. Skalarnim množenjem ove jednačine vektorom $\boldsymbol{g}_k$ dobijamo, s obzirom na (1.23),

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ik}R\frac{Dr^i}{ds}\right)-R\frac{Dr^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^j}\boldsymbol{g}_i+g_{ik}P_i=0,$$

odnosno, zbog (5.3),

$$\frac{d}{ds}\left(Rg_{ik}\frac{Dr^i}{ds}\right)-Rg_{il}\Gamma^l_{jk}\frac{Dr^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=-g_{ik}P^i.$$

Leva strana jednačina čini apsolutni izvod po luku vektora $Rg_{ik}\frac{Dr^i}{ds}$, tj.

$$\frac{D}{ds}\left(Rg_{ik}\frac{Dr^i}{ds}\right)=-g_{ik}P^i \qquad (i,k=1,2,3) \tag{11.10}$$

te, kao takve predstavljaju kovarijantne diferencijalne jednačine nerastegljive niti u polju sile $P(x)$.

---

*) Vidi, na primer, Vujičić, V. A. — Statika, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd.

Za pretpostavljeno konstantno polje sila, vektor $\boldsymbol{P}$ je kovarijantno konstantan, pa je moguće pomoću kovarijantnog integrala integraliti sistem diferencijalnih jednačina (11.10). U tom cilju prvo ćemo isti sistem napisati u obliku

$$\widehat{\int} D\left(R g_{ik}\frac{Dr^i}{ds}\right) = -\widehat{\int} g_{ik}P^i ds,$$

jer je $Ds = ds$ kao diferencijali skalara. S obzirom da se i $g_{ik} = g_{ik}(x)$ i $P^i = P_i(x)$ pod kovarijantnim integralom ponašaju kao konstante dobićemo

$$R g_{ik}\frac{Dr^i}{ds} = -g_{ik}P^i s + A_k,$$

gde je A_k kovarijantni konstantni vektor, koji ćemo odrediti iz graničnih uslova paralelnim prenošenjem vektora $R g_{ik}\dfrac{Dr^i}{ds} + P_k s$ iz tačke $s = s_0 = 0$ u tačku s. Sledi da je

$$A_k = g_k^b\left(R_0 g_{ab}\frac{Dr^a}{ds}\right),$$

gde je R_0 reakcija niti u njenom temenu $s = s_0 = 0$.

Dalje imamo sistem diferencijalnih jednačina prvog reda

$$R\frac{Dr_k}{ds} + P_k s = R_0 g_{ka}\frac{Dr^a}{ds}\bigg|_{s = s_0 = 0},$$

ili u razvijenom obliku

$$R\left(\frac{dr_k}{ds} - \Gamma^l_{kj}r_l\frac{dx^j}{ds}\right) + P_k s = R_0 g_{ka}\frac{Dr^a}{ds}\bigg|_{s_0 = 0}.$$

Tako, ovaj sistem diferencijalnih jednačina pretstavlja kovarijantne diferencijalne jednačine prvog reda u polju konstantnog polja sila.

Zapazimo uzgred na osnovu diferencijalnih jednačina (11.10) da pri odsutnosti ili poništenju spoljnjeg polja sila $\boldsymbol{P}$ nerastegljiva zategnuta nit ima oblik ekstremalne linije u komformnom prostoru što se vidi upoređenjem diferencijalnih jednačina (11.10) i (10.7).

12. Kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja tačke i njihovi integrali

Drugi zakon dinamike dovodi od formiranja diferencijalnih jednačina kretanja dinamičkog objekta, pa je logično proučiti i kovarijantnu prirodu istih. U relacijama (6.1), (6.7) i (6.8) data je definicija pojma impulsa kretanja $\boldsymbol{p}$ i njegove veze sa brzinama i koordinatama položaja tačke. Pod promenom po vremenu podrazumevamo u matematičkom smislu izvod po vremenu, pa iskaz drugog zakona se može izraziti jednačinom

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}. \tag{12.1}$$

U koordinatnom obliku umesto izvoda $\frac{d}{dt}$ promenu vektora odražava apsolutni izvod $\frac{D}{dt}$ koordinata vektora, pa će drugom zakonu odgovarati diferencijalne jednačine kretanja tačke oblika

$$\frac{D p_i}{dt} = F_i, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{12.2}$$

To se lako pokazuje. Prema koordinatnom sistemu X diferencijalnu jednačinu (12.1) možemo napisati kao

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = X^i \mathbf{g}_i.$$

Pomnožimo li skalarno ovu jednačinu vektorima $\mathbf{g}_k$ imaćemo, s obzirom da je $\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}_k = p_k$,

$$\frac{dp_k}{dt} - \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = X^i g_{ik}$$

odnosno, zbog (5.3),

$$\frac{D p_k}{dt} = \frac{dp_k}{dt} - \Gamma^i_{jk} p_i \frac{dx^j}{dt} = X_k, \tag{12.3}$$

a to i jesu *kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja tačke* (12.2).

Ako uzmemo u obzir kovarijantnu definiciju impulsa kretanja (6.7) diferencijalne jednačine kretanja tačke (12.3) možemo napisati i u drugom kovarijantnom obliku

$$\frac{D^2 \rho_k}{dt^2} = X_k, \tag{12.4}$$

ili

$$a_{kj} \frac{D^2 r^j}{dt^2} = X_k, \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{12.5}$$

Očigledno je da kompozicijom pomoću kontravarijantnog tenzora a^{ik} dobijamo kontravarijantni oblik ovih jednačina

$$\frac{D^2 r^i}{dt^2} = a^{ik} X_k = \overset{*}{X}{}^i, \tag{12.6}$$

gde su $\overset{*}{X}{}^i = a^{ik} X_k$ kontravarijantne koordinate vektora sile $\boldsymbol{F}$. Zvezdica nad X označava da koordinata X^i vektora sile $\boldsymbol{F}$ sadrži masu m tačke, koja joj je pridružena preko tenzora a^{ik}, kao što se vidi iz relacije (6.5).

Kovarijantni integrali kretanja tačke

Osnovno pitanje našeg proučavanja kovarijantne dinamike postavlja se upravo u očuvanju jednog te istog značenja integrala diferencijalnih jednačina kretanja dinamičke tačke u svim posmatranim koordinatnim sistemima pri linearnoj transformaciji koordinata vektora. Poznato je da u klasičnoj mehanici integralenje „razara“ prirodu objekta. Naime postupno integralenje diferencijalnih jednačina (12.5) ili (12.6) u jednom sistemu koordinata y ne dovodi uvek do istih kovarijantnih integrala u drugom sistemu koordinata x. Smisao ove tvrdnje pojasnimo jednim prostim primerom.

P r i m e r. Kretanje dinamičke tačke konstantne mase po inerciji. Posmatrajmo ovo kretanje uporedo u odnosu na pravolinijski koordinatni sistem Y i u odnosu na cilindarski koordinatni sistem X. Diferencijalne jednačine kretanja (12.5), koje se iz koordinatnog sistema Y prevode pomoću linearne transformacije T u koordinatni sistem X simbolički ćemo napisati relacijom $Y \rightarrow X$. Kako je moguća i inverzna transformacija $X \rightarrow Y$, imaćemo ekvivalentnu relaciju

$$Y \rightarrow X$$

U razvijenom obliku za posmatrani primer ove diferencijalne jednačine i njeni integrali će biti:

$$\begin{array}{ccc}
\left.\begin{array}{l} m\ddot{y}^1 = 0 \\ m\ddot{y}^2 = 0 \\ m\ddot{y}^3 = 0 \end{array}\right\} & \overset{T}{\Leftrightarrow} & \left\{\begin{array}{l} m[\ddot{x}^1 - x^1(\dot{x}^2)^2] = 0, \\ m[x^1\ddot{x}^2 + 2\dot{x}^1\dot{x}^2], \\ m\ddot{x}^3 = 0 \end{array}\right. \\
\downarrow\ \uparrow & & \overset{*}{\downarrow}\ \underset{*}{\uparrow} \\
\left.\begin{array}{l} \dot{y}^1 = \dot{y}_0^1 \\ \dot{y}^2 = \dot{y}_0^2 \\ \dot{y}^3 = \dot{y}_1^3 \end{array}\right\} & \Leftarrow T \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \dot{x}^1 = \sqrt{(\dot{x}_0^1)^2 + \dot{x}_0^2\left(1 - \left(\frac{x_0^1}{x^1}\right)^2\right)} \\ \dot{x}^2 = \dot{x}_0^2\left(\frac{x_0^1}{x^1}\right)^2 \\ \dot{x}^3 = \dot{x}_0^3 \end{array}\right.
\end{array} \tag{12.7}$$

Znakom $\Leftarrow T \Rightarrow$ označili smo da odnosni integrali nisu dobijeni transformacijom T kao i odnosne diferencijalne jednačine, a znak $\underset{*}{\uparrow}$ pokazuje da postoji razlika u postupku koji je prikazan strelicom $\uparrow$. Na ime oznakom $\downarrow\ \uparrow$ pokazujemo da se integrali svake ponaosob jednačine dobijaju, kao i u normalnom obliku i obratno direktno diferenciranjem jednog integrala dobija se odgovarajuća diferencijalna jednačina kretanja; to ujedno znači da se jednim integralenjem jednačina $m\ddot{y} = 0$ u koordinatnom obliku dobijaju sva tri integrala $\dot{y}^i = \dot{y}_0^i$. Međutim, oznaka $\overset{*}{\downarrow}\ \underset{*}{\uparrow}$ pokazuje da se takvim postupkom ne dobijaju ni izračunati integrali; iz njih bez uzajamnih dopuštenih zamena i algebarskih transformacija ne slede ni diferencijalne jednačine kretanja kao u prvom slučaju sledbenosti $\downarrow\ \uparrow$.

Taj najprostiji mogući primer dovoljno jasno pokazuje da integralenje istih diferencijalnih jednačina kretanja u dva sistema koordinata neće imati iste rezultate pre svega po formi. Važnije od toga je što se bez većeg udubljenja u sistem stvari, u prirodu koordinata vektora, stiče utisak da je jednom vektor brzine $\dot{y}^i$ konstantan, a drugi put $\{\dot{x}^1 = f^1(x^1),\ \dot{x}^2 = \varphi(x^1),\ \dot{x}^3 = \text{const.}\}$ funkcija koordinata, kao da nije reč o istoj mehaničkoj veličini pri jednom te istom kretanju.

Ovim primerom našu početnu konstataciju ovog odeljka možemo opštije predstaviti shematski na sledeći način. Neka su $N_i (i=1, 2, 3)$ diferencijalne jednačine kretanja u Y, a u X neka to budu $\mathcal{P}_i$. Integrali diferencijalnih jednačina kretanja N_i neka budu I_i, a integrali od $\mathcal{P}_i$ neka bude J_i; postoji ova neuređenost

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ N_i & \Leftrightarrow & \mathcal{P}_i \\ \downarrow\uparrow & & \overset{*}{\downarrow}\underset{*}{\uparrow} \\ I_i & \Leftarrow T \Rightarrow & J_i \end{array} \tag{11.8}$$

To veoma jasno ukazuje da primena običnog integrala nad vektorskim diferencijalnim jednačinama u koordinatnom obliku ne dovodi do kovarijantnih integrala u tom smislu da bude

$$\begin{array}{ccc} N_i & \Leftrightarrow & \mathcal{P}_i \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \\ I_i & \Leftrightarrow & \widehat{I}_i \end{array} \tag{12.9}$$

tj. da integrali $\widehat{I}_i$, koje dobijamo integralenjem kovarijantnih diferencijalnih jednačina kretanja (12.4) ili (12.5) ili (12.6), budu ravnopravni u svim sistemima koordinata, da postoje veze

$$I_i = \widehat{I}_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}. \tag{12.10}$$

U opštem slučaju to ne možemo da postignemo pomoću običnog integrala, jer u diferencijalnim jednačinama kretanja, recimo (12.4), tj.

$$\frac{D\rho_i}{dt} = \frac{d\rho_i}{dt} - \Gamma^k_{ij}\rho_k \frac{dx^j}{dt} = X_i,$$

nezavisno od $X_i = X_i(x, \dot{x}, t)$, kao što se vidi, postoje funkcije $\Gamma^k_{ij}(x)\rho_k(x)$ koje obrazuju linearne forme $f_{i1}(x)dx^1 + f_{i2}(x)dx^2 + f_{i3}(x)dx^3$, pa ne možemo da integralimo ove jednačine u opštem obliku u sistemu koordinata x kao što se to može u sistemu koordinata y. Zato da bi mogli da određujemo opšte kovarijantne integrale $\widehat{I}_i$ kovarijantnih jednačina (12.4) ili (12.5) primenićemo kovarijantni integral (P 2.9).

U konkretnom slučaju primera kretanja tačke po inerciji diferencijalne jednačine (12.4), odnosno

$$\frac{D^2\rho_i}{dt^2} = \frac{D}{dt}\left(\frac{D\rho_i}{dt}\right) = X_i = 0, \qquad (i=1, 2, 3),$$

veoma prosto integralimo, kao i u slučaju (10.10). Na ime, primenom kovarijantnog integrala dobijamo

$$\widehat{\int} D\left(\frac{D\rho_i}{dt}\right) = \frac{D\rho_i}{dt} - A_i,$$

odnosno, kao i u (10.11), sledi da je

$$\frac{D p_i}{dt} = a_{ib} \frac{Dr^b}{dt}, \qquad (i=1,\, 2,\, 3;\; b=1,\, 2\; 3). \tag{12.11}$$

U ovakvom načinu integralenja otklanja se neuređenost (12.8), odnosno na datom primeru umesto integrala (12.7) dobijamo:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\dot y^1}{dt}=0 \\ \dfrac{d\dot y^2}{dt}=0 \\ \dfrac{d\dot y^3}{dt}=0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{D\dot x^1}{dt}=0 \\ \dfrac{D\dot x^2}{dt}=0 \\ \dfrac{D\dot x^3}{dt}=0 \end{array}\right.$$

$$\downarrow\uparrow \qquad\qquad \downarrow\uparrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot y^1=\dot y_0^1 \\ \dot y^2=\dot y_0^2 \\ \dot y^3=\dot y_0^3 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot x^1=\dot x_0^1\cos(x^2-x_0^2)+x_0^1\dot x_0^2\sin(x^2-x_0^2) \\ \dot x^2=\dfrac{\dot x_0^1\dot x_0^2}{x^1}\cos(x^2-x_0^2)+\dot x_0^1\sin(x^2-x_0^2) \\ \dot x^3=\dot x_0^3. \end{array}\right.$$

Znak ekvivalentnosti između prvih integrala pokazuje da se isti u dva koordinatna sistema (Dekartov pravougli i neki krivolinijski) mogu dobiti trasformacijom T, kao što se u X mogu dobiti primenom kovarijantnog integrala, koji ćemo u daljem tekstu ovog odeljka i primenjivati.

1. *Kovarijantno konstantni impulsi kretanja*

Na osnovu prvog zakona dinamike pokazano je u 10. odeljku da se dinamička tačka kreće po najkraćoj liniji i određene su kovarijantne jednačine te linije. U mogućnosti smo sada, na osnovu drugog zakona i kovarijantnog integrala da pokažemo kovarijantni izraz kojim opisujemo postojanost impulsa u slučaju odsutnosti ili međusobnom poništenju sila. U potpunoj analogiji sa postupkom od (10.7) do (10.11) možemo da integralimo diferencijalne jednačine kretanja tačke (12.2) za slučaj da je $X_i=0$, tj.

$$\frac{Dp_i}{dt}=0 \;\Rightarrow\; Dp_i=0. \tag{12.12}$$

Kovarijantni integral ovih diferencijalnih jednačina je

$$p_i=A_i \tag{12.13}$$

gde je A_i kovarijantno konstantan vektor. Tim se matematički iskazuje tvrdnja da objekt poseduje jedan te isti impuls u stanju mirovanja ili kretanja. Njegov koordinatni izraz u bilo kom krivolinijskom koordinatnom sistemu X dobićemo određivanjem vektora A_i kao i u (10.11), odnosno.

$$A_i = g_i^b p_b, \tag{12.14}$$

gde je $g_i^b = g_i^b[x(t_0);\ x(t)]$ dvotačkasti fundametalni mešoviti tenzor, a p_b kovarijantne koordinate vektora impulsa kretanja u tački $t = t_0$.

Zamenom (12.14) u (12.13) dobijamo

$$p_i = g_i^b p_b \tag{12.15}$$

iz kojeg se vidi da je impuls kretanja p u bilo kom trenutku t, jednak vektoru impulsa tog kretanja $p(t_0)$ u početnom trenutku t_0 koji je autoparalelno prenešen u tačku t.

2. *Kovarijante jednačine Galilejovih transformacija.* Ako uzmemo u obzir izraz (6.1) za impuls kretanja, zamenimo u (12.15) i kovarijantno integralimo, tj.

$$\hat{\int} a_{ij} Dr^j = \hat{\int} g_i^b a_{bc} \left(\frac{Dr^c}{dt}\right) dt, \tag{12.16}$$

dobićemo:

$$a_{ij} r^j = g_i^b a_{bc} \dot{x}^c t + B_i, \tag{12.17}$$

gde je B_i kovarijantni konstantan vektor. Razlikujući samo parametre vremena t i luka s, vektor B_i određujemo kao i u (10.13) te izraz (12.17) postaje sličan izrazu (10.14), i to zbog (6.2)

$$g_{ij} r^j = g_{ic} [\dot{x}^c (t - t_0) + r^c] \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{12.18}$$

odnosno,

$$r_i = g_{ib} [\dot{x}^b (t - t_0) + r^b]. \qquad (b = 1, 2, 3) \tag{12.19}$$

Jednačine (12.18) ili (12.19) pokazuju ravnomernost kretanja u toku vremena $t = t_0$, i čine Galilejove transformacije izražene u krivolinijskom sistemu koordinata.

Upoređivanjem podintegralnog izraza (12.16) i (10.11), s obzirom da odražavaju isto kretanje, lako se pokazuje da je u posmatranom kretanju veličina vektora brzine konstantna. Zaista, s obzirom da postoji zavisnost luka i vremena $s = s(t)$ možemo jednačine iz (12.16),

$$a_{ij} \frac{Dr^j}{dt} = g_i^b a_{bc} \left(\frac{Dr^c}{dt}\right)_{t=t_0},$$

da napišemo u obliku

$$a_{ij} \frac{Dr^j}{ds} \frac{ds}{dt} = g_i^b a_{bc} \left(\frac{Dr^c}{ds}\right)_0 \left(\frac{ds}{ds}\right)_{t=t_0},$$

tj.

$$a_{ij} \frac{Dr^j}{ds} v = a_{ic} \left(\frac{Dr^c}{ds}\right)_0 v_0,$$

gde je v veličina brzine v tačke, *a* $v_0 = v(t_0)$ ta veličina brzine u početnom trenutku t_0, Upoređenjem poslednjih jednačina sa jednačinama sa (10.11) vidimo da sledi tražena postojanost $v = v_0$ što ćemo ubuduće uvek podrazumevati kao zakonom iskazanu tvrdnju.

3. *Opštiji kovarijantni integrali diferencijalnih jednačina kretanja tačke* mogu lako da se dobiju i u slučaju dejstva sile

$$X_i = G_i + B_{ij}\dot{x}^j + C_{ij}F^j(t), \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \qquad (12.20)$$

gde su: $G_i = G_i(x)$ koordinate kovarijantno konstantnog vektora sile, a $B_{ij} = B_{ij}(x)$ i $C_{ij} = C_{ij}(x)$ kovarijantne koordinate kovarijantno konstantnog tenzora; $F^j(t)$ su integrabilne funkcije vremena t.

Diferencijalne jednačine kretanja (12.5) u tom slučaju su:

$$a_{ij}\frac{D^2 r^j}{dt^2} = G_i + B_{ij}\dot{x}^j + C_{ij}F^j(t). \qquad (12.21)$$

S obzirom da je $\dot{x}^j = \dfrac{Dr^j}{dt}$, ove diferencijalne jednačine možemo napisati u obliku

$$a_{ij}D\left(\frac{Dr^j}{dt}\right) = [G_i + C_{ij}F^j(t)]\,dt + B_{ij}Dr^j.$$

Imajući u vidi da se kovarijatno konstantni tenzori u kovarijatnom diferencijalu i integralu ponašaju kao i konstantne prema običnom diferencijalu i integralu, a da skalari imaju isti tretman i u jednom i drugom diferencijalu i integralu, tj. $dt = Dt$, $\int dt = \widehat{\int} Dt$, posmatrane diferencijalne jednačine kretanja lako integralimo jer je

$$\widehat{\int} a_{ij}D\left(\frac{Dr^j}{dt}\right) = \widehat{\int} D\left(a_{ij}\frac{Dr^j}{dt}\right) = a_{ij}\frac{Dr^j}{dt} - \overset{*}{A}_i,$$

$$\widehat{\int} G_i(x)\,Dt = G_i(x)\int dt = G_i t + C_i,$$

$$\widehat{\int} B_{ij}Dr^j = \widehat{\int} D(B_{ij}r^j) = B_{ij}r^j + B_i,$$

$$\widehat{\int} C_{ij}F^j(t)\,Dt = C_{ij}(x)\int F^j(t)\,dt = C_{ij}f^j(t) + D_i,$$

gde su $\overset{*}{A}_i$, B_i, C_i, D_i integracioni kovarijantno konstantni vektori.

Na taj način dobijamo tri kovarijantna integrala diferencijalnih jednačina kretanja, i to

$$a_{ij}\frac{Dr^j}{dt} = G_i t + B_{ij}r^j + C_{ij}f^j(t) + A_i, \qquad (12.22)$$

gde je $A_i = \overset{*}{A} + B_i + C_i + D_i$ integralni kovarijantno konstantni vektor, koji određujemo iz početnih uslova paralelnim pomeranjem dobijenog vektora

$$a_{ij}\frac{Dr^j}{dt} - G_i t - B_{ij}r^j - C_{ij}f^j(t)$$

iz tačke $O(x(t_0))$ u tačku $X(x(t)$ tj. kao što smo pokazali u (3.8)

$$A_i = g_i^c\left(a_{bc}\frac{Dr^b}{dt} - G_c t_0 - B_{cb} r^b - C_{cb} f^b(t_0)\right).$$

Na taj način kovarijantni integrali su u potpunosti određeni. To podrazumeva, naravno, poznavanje dvotačkastog mešovitog tenzora g_i^c.

13. Kovarijatno linearne jednačine kretanja

Posmatrajmo kretanje dinamičke tačke pod istovremenim dejstvom sila proporcionalnih vektoru položaja **r** i vektoru brzine **v** u odnosu na neki krivolinijski koordinatni sistem X. U tom slučaju diferencijalne jednačine kretanja tačke (12.5) imaće oblik:

$$a_{ij}\frac{D^2 r^j}{dt} = -b_{ij}\frac{Dr^j}{dt} - c_{ij} r^j \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{13.1}$$

gde su b_{ij} kovarijantne koordinate jednog kovarijatno konstantnog tenzora, koji se razlikuje od tenzora a_{ij} samo za član proporcionalnosti. Konkretnije ako između koeficijenta otpora μ i mase tačke m postoji odnos $\frac{\mu}{m} = \varkappa = \text{konst.}$ tada će i između b_{ij} i a_{ij} postojati relacija*)

$$b_{ij} = \varkappa a_{ij} = b_{ji}(x). \tag{13.2}$$

Diferencijalne jednačine (13.1) u datom prikazu su nelinearne. To se jasnije vidi ako ih napišemo u obliku:

$$a_{ij}\left(\frac{d\dot{x}^j}{dt} + \Gamma^j_{ik}\dot{x}^i\frac{dx^k}{dt}\right) + b_{ij}\frac{dx^j}{dt} + c_{ij} r^j = 0, \tag{13.3}$$

gde u opštem slučaju figurišu nelinearne funkcije koordinata

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ji}(x^1, x^2, x^3), \qquad & b_{ij} &= b_{ji}(x^1, x^2, x^3) \\ c_{ij} &= c_{ji}(x^1, x^2, x^3), \qquad & \Gamma^j_{ik} &= f^j_{ik}(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \tag{13.4}$$

pa jednačine (13.3) u opštem obliku sadrže nelinearne članove i po koordinatama tačke x i po koordinatama vektora brzine $\dot{x}^i$.

Međutim, ako imamo u vidu da izraz u srednjoj zagradi možemo da napišemo kao $\frac{D\dot{x}^j}{dt}$ ili $\frac{D}{dt}\left(\frac{Dr^j}{dt}\right)$, gde se gube javno svi znaci nelinearnosti, a kovarijantno konstantni tenzori pred apsolutnim diferencijalom i apsolutnim

*) Vidi: V. Vujičić, Teorija oscilacija „Naučna knjiga", Beograd 1977

integralom ponašaju se kao konstante pred običnim diferencijalom, onda diferencijalne jednačine kretanja (13.1) u suštini nisu nelinearne; one su *kovarijantno linearne*. Pod ovim pojmom podrazumevamo sve vektorske funkcije koje se pomoću linearnih transformacija, ili njoj inverznih, mogu svesti u nekom posebnom ili opštem sistemu koordinata na linearni oblik. U tom smislu i diferencijalne jednačine kretanja (13.1) su kovarijatno linearne bez obzira što, kako se vidi iz (13.3) i (13.4), sadrže nelinearne funkcije koordinata x. Ove kao nelinearne bi se javljale pri posmatranju diferencijala i izvoda koordinata tačke $M(x)$ i njihovih izvoda. Međutim u kovarijantno linearnim diferencijalnim jednačinama nelinearnost funkcija ili jednačina određuje stepen vektora i njegovih kovarijantnih ili apsolutnih izvoda. Pomoću kovarijantnog integrala možemo da integralimo kovarijantno linearne diferencijalne jednačine slično načinu rešavanja običnog sistema linearnih diferencijalnih jednačina. Da bi u tom smislu integralili diferencijalne jednačine (13.1) napišimo ih prvo u obliku

$$a_{ij}\frac{D^2 r^j}{dt^2}+b_{ij}\frac{Dr^j}{dt}+c_{ij}r^j=0, \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{13.5}$$

i pretpostavimo rešenje u obliku vektora

$$r^j=A^j e^{\lambda t}, \tag{13.6}$$

gde je $A^j=A^j(x^1,\ x^2,\ x^3)$ neodređeni kovarijantno konstantni vektor, a λ neodređeni karakteristični broj. Zamenom pretpostavljenog rešenja (13.6) i (13.5) dobijamo sistem jednačina

$$(a_{ij}\lambda^2+b_{ij}\lambda+c_{ij})A^j=0. \tag{13.7}$$

Jedno je da će postojati rešenje $A^j \neq 0$ za slučaj da je determinanta sistema

$$\Delta(\lambda,\ x^1,\ x^2,\ x^3)=\sum_{k=1}^{6} a_{6-k}\lambda^k=0.$$

Odavde dobijamo karakteristične brojeve

$$\lambda_k=\lambda_k(x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{13.8}$$

u funkciji od koordinata x. S obzirom da λ_k zavisi od x posredstvom kovarijantno konstantnih tenzora a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} i oni sami će sada biti kovarijatno konstantne veličine.

Ako je zadovoljena relacija (13.2), a to za dinamičku tačku možemo uvek postaviti, jednačine (13.7) možemo transformisati na oblik

$$\delta_j^k(\lambda^2+\varkappa\lambda)A^j+c_j^k A^j=0, \tag{13.9}$$

gde je $c_j^k=a^{ik}c_{ij}$. Za slučaj da je $c_j^k=a^{ik}c_{ij}=\begin{cases}\omega_k^2 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$, što se često sreće u mehanici, jednačine (3.9) bi dobile još prostiji oblik

$$(\lambda^2+\varkappa\lambda+\omega_k^2)\delta_j^k A^j=0. \tag{13.10}$$

Svakom broju λ_k u (13.7) će odgovarati i vektor A_k, pa u opštem slučaju imamo tri sistema (13.7), odnosno

$$(a_{ij}\lambda_k^2 + b_{ij}\lambda_k + c_{ij}) A_k^j = 0,$$

gde su pored koeficijenata a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} koji su funkcije koordinata x, i sami brojevi $\lambda_k = \lambda_k(x)$ funkcije tih koordinata. Sledi postupak kao pri rešavanju sistema običnih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, pri čemu dobijamo kovarijantna rešenja

$$r^j = \sum_{\nu=1}^{3} (A_\nu^j e^{\lambda_\nu t} + B_\nu^j e^{\lambda_\nu t}), \tag{13.11}$$

gde su A_ν i B_ν kovarijantno konstantni vektori koje treba odrediti pomoću početnih uslova i autoparalelnog pomeranja vektora $\frac{Dr^j}{dt}$ iz tačke $t = t_0 = 0$ u tačku t pomoću dvotačkastog osnovnog tenzora. Pokažimo to na primeru kovarijatno linearnog oscilatora u kojem je $b_{ij} = 0$ a $c_{ij} = c_i^k a_{kj} = \begin{cases} \omega_i^2 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Diferencijalne jednačine kretanja (13.1) u tom slučaju su

$$a_{ij}\frac{D^2 r^j}{dt^2} + c_{ij} r^j = 0,$$

odnosno

$$\frac{D^2 r^k}{dt^2} + a^{ik} c_{ij} r^j = 0,$$

a karakteristični brojevi (13.8) $\lambda_k^2 = -\omega_k^2 \qquad (k = 1, 2, 3)$.

Rešenja (13.11) u ovom slučaju su

$$r^k = A^k e^{\omega_k it} + B^k e^{-\omega_k it} \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

U cilju korišćenja početnih uslova odredimo brzinu $\frac{Dr^k}{dt} = \omega_k\, i\, A^k e^{\omega_k it} - i\,\omega_k B^k e^{-\omega_k it}$. Kovarijantno konstantne vektore A^k i B^k sada ćemo odrediti slično prethodno izraženom postupku za $t = t_0 = 0$, tj.

$$g_b^k r^b = A^k + B^k,$$

$$g_b^k \left(\frac{Dr^b}{dt}\right) = \omega_k\, i\,(A^k - B^k),$$

odakle sledi da je

$$A^k = \frac{1}{2} g_b^k \left(r^b + \frac{\dot{x}^b}{\omega_k i}\right), \qquad B^k = \frac{1}{2} g_b^k \left(r^b - \frac{\dot{x}^b}{\omega_k i}\right),$$

čime je izvršeno integralenje diferencijalnih jednačina (13.12) u svim dopustivim koordinatnim sistemima X.

14. Invariantni integrali

U celokupnom dosadašnjem izlaganju predmet naše pažnje bili su vektorske i tenzorske veličine i njihovo očuvanje pri diferenciranju i integralenju u različitim koordinatnim sistemima. Broj slobodnih indeksa određivao je red tenzora. Kao što je poznato tenzor prvog reda jeste vektor, a tenzor nultog reda skalar ili skalarna invarijanta. Adekvatno tome našoj analizi sistema mogli bi, kao prirodno, da odgovaraju pojmovi kovarijante nultog, prvog i višeg reda. Kovarijanta višeg reda bi prestavljala tenzore u transformaciji, kovarijanta provg reda odgovara vektorskim izrazima, i kovarijanta nultog reda bi bila skalar ili skalarna invarijanta. Sledeći tenzorski račun u kojem se prema broju indeksa određuje i broj koordinata posmatranog tenzorskov objekta.predstoji nam da u ovom poglavlju odredimo kovarijantne integrale nultog reda.

Pomnožimo li skalarno diferencijalne jednačine kretanja tačke (12.5) vektorom iz (3.7), odnosno $dx^i = \frac{dr^i}{dt} dt$, pa ćemo dobiti:

$$a_{ij} \frac{Dr^i}{dt} \frac{D}{dt} \left(\frac{Dr^j}{dt} \right) dt = X_i \, dx^i,$$

tj.

$$a_{ij} \frac{Dr^i}{dt} D \left(\frac{Dr^j}{dt} \right) = X_i \, dx^i, \tag{14.1}$$

što predstavlja invarijantu u diferencijalnom obliku. Ako su zadovoljene jednačine

$$\frac{\partial X_i}{\partial x^j} - \frac{\partial X_j}{\partial x^i} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{14.2}$$

imaćemo totalni diferencijal od skalarne invarijante $\mathcal{T}$, tj.

$$d\mathcal{T} = X_i \, dx^i \tag{14.3}$$

pa diferencijalnu jednačinu (14.1) možemo da napišemo u obliku

$$a_{ij} \frac{Dr^i}{dt} D \left(\frac{Dr^j}{dt} \right) = d\mathcal{T} = D\mathcal{T} \tag{14.4}$$

jer je diferencijal skalara jednak apsolutnom diferencijalu tog skalara.

Primenimo li sada kovarijantni 'ntegral

$$\widehat{\int} a_{ij} \frac{Dr^i}{at} D \left(\frac{Dr^j}{dt} \right) = \widehat{\int} D\mathcal{T}, \tag{14.5}$$

dobićemo

$$\frac{1}{2} a_{ij} \frac{Dr^i}{dt} \frac{Dr^j}{dt} = \mathcal{T} + A, \tag{14.6}$$

jer je

$$\widehat{\int} a_{ij} \frac{Dr^i}{dt} D \left(\frac{Dr^j}{dt} \right) = \frac{1}{2} \widehat{\int} D \left(a_{ij} \frac{Dr^i}{dt} \frac{Dr^j}{dt} \right).$$

Integralna invarijanta A je očigledno konstantna veličina, što se može pokazati njenim određivanjem pomoću početnih uslova, kao i do sada, ili prostije konstatacijom da je kovarijantni integral invarijante jednak običnom integralu te invarijante. U tom slučaju integral (14.5) se može napisati

$$\int d\left(\frac{1}{2}\, a_{ij}\, \frac{Dr^i}{dt}\, \frac{Dr^j}{dt}\right) = \int d\mathcal{T},$$

odakle jasno sledi invarijantni integral (14.6) u kojem je A integraciona konstanta.

Integral energije kretanja mehaničke tačke

Neka sila X_i ima potencijal V koja zadovoljava sledeće relacije

$$X_i = \frac{d}{dt}\, \frac{\partial V}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial V}{\partial x^i}. \tag{14.7}$$

Dok se zadržavamo u okviru napisanih aksioma sile X_i ne mogu zavisiti od drugih izvoda koordinata. Zato, pretpostavimo da je V linearna funkcija brzine, a može biti nelinearna funkcija koordinata x, tj.

$$V = \Pi_i\, \frac{Dr^i}{dt} + \Pi \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{14.8}$$

gde su

$$\Pi_i = \Pi_i\,(x^1,\ x^2,\ x^3), \qquad \Pi = \Pi\,(x^1,\ x^2,\ x^3)$$

funkcije koordinata x.

Diferencijalna jednačina (14.1) u ovom slučaju biće

$$a_{ij}\, \frac{Dr^i}{dt}\, D\left(\frac{Dr^j}{dt}\right) = \left\{\frac{d}{dt}\, \frac{\partial V}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial V}{\partial V^i}\right\} dx^i = \left\{d\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}^i}\, \dot{x}^i\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}^i}\, d\dot{x}^i + \frac{\partial V}{\partial x^i}\, dx^i\right)\right\}$$

ili, s obzirom da se zbog (14.8) desna strana svodi na

$$d\,(\Pi_i\, x^i) - dV = d\,(\Pi_i\, \dot{x}^i) - (\Pi_i\, \dot{x}^i + \Pi) = -\, d\,\Pi,$$

imaćemo

$$a_{ij}\, \frac{Dr^i}{dt}\, D\left(\frac{Dr^j}{dt}\right) + d\,\Pi = 0.$$

S obzirom da je $D\,\Pi = d\,\Pi$ odavde kao i iz (14.5) dobijamo invarijantni integral

$$\frac{1}{1}\, a_{ij}\, \frac{Dr^i}{dt}\, \frac{Dr^j}{dt} + \Pi = \frac{1}{2}\, a_{ab}\, \frac{Dr^a}{dt}\, \frac{Dr^b}{dt} + \Pi_0 = \mathrm{contt}, \tag{14.9}$$

gde je $\Pi_0 = \Pi\,(x\,(t_0))$.

Integral (14.9) iskazuje zakon o održanju mehaničke energije dinamičke tačke u polju konzervativnih sila, jer je

$$T = \frac{1}{2}\, a_{ij}\, \frac{Dr^i}{dt}\, \frac{Dr^j}{dt} \tag{14.10}$$

kinetička energija dinamičke tačke, a Π potencijalna energija.

15. Fazni bivektor

Pod *Faznim bivektorom* Φ dinamičke tačke podrazumevamo vektor impulsa kretanja $\boldsymbol{p}$ te tačke, čiji je položaj određen vektorom položaj $\boldsymbol{r}$. Kako je u odnosu na jedan te isti koordinatni sistem $X=(x, \mathrm{g})$ vektor položaja $\boldsymbol{r}$ tačke $M(x)$ određen njegovim koordinatama r^i, a vektor impulsa kretanja $\boldsymbol{p}$ njegovim kovarijantnim koordinatama p_i, to ćemo fazni bivektor Φ dinamičke tačke predstavljati koordinatama r^i vektora položaja tačke $M(x)$ i kovarijantnim koordinatama p_i vektora impulsa kretanja te tačke

$$\Phi=(r^i, p_i; g), \qquad \forall\, i \in N_3. \tag{15.1}$$

Šest koordinata $r^i \wedge p_i$ bivektora Φ u trodimenzionom koordinatnom sistemu $X=(x, g)$ nisu nezavisne, nego su koordinate r^i vektora $\boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^3$ i koordinate p_i vektora $\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^3$ u svakoj tački $M(x)$ u fazi i povezane diferencijalnim vezama (6.7) i (6.8). Algebarske relacije između kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata vektora $\boldsymbol{r}$ i vektora $\boldsymbol{p}$ moguće su samo za svaki vektor posebno i to

$$\begin{aligned} r_i &= g_{ij} r^j \Leftrightarrow r^i g^{ij} r_j \\ p_i &= g_{ij} p^j \Leftrightarrow p^i = g^{ij} p_j . \end{aligned} \tag{15.2}$$

Vektor impulsa kretanja $\boldsymbol{p}(x)$ u tački $M(x)$ opisan unijom skupa koordinata $x=(x^1, x^2, x^3)$ i skupa kovarijantnih koordinata $p_i(x)$ naziva se *fazni prostor* $\Phi_{2\cdot 3}=(x, p)$. I ovde ćemo zadržati taj pojam, a naročito ako je reč o kretanju tačke nad potprostorima, na kojim fazni bivektor nije definisan. Inače za slobodnu dinamičku tačku pojmom faznog bivektora ističemo njegovu delimičnu vektorsku prirodu, jer sve njegove koordinate $r^i \wedge p_i$, kao i koordinatne vektore $\boldsymbol{g}_i$ prevodimo iz jednog koordinatnog sistema u drugi pomoću linearnih transformacija oblika (1.15) i (1.19).

Fazni bivektor dinamičke tačke i vreme t odražavaju *stanje kretanja* te tačke $(r^i(t), p_i(t))$. Ako su sve koordinate $p_i(t)=0$, a $r^i=\text{const.}$ dinamička tačka miruje u odnosu na inercijsku bazu, pa kažemo da koordinate $r^i=\text{const.}$ i $p_i=0$ predstavljaju *ravnotežno stanje* dinamičke tačke.

Kovarijantna fazna brzina je skup apsolutnih izvoda po vremenu od svih koordinata faznog bivektora, tj.

$$\left\{\frac{Dr^i}{dt}, \frac{Dp_i}{dt}\right\}, \qquad \forall\, i \in N_3. \tag{15.3}$$

Ako se imaju u vidu relacije (12.1) i (11.1) jasno sledi da fazna brzina, kod koje je $\dfrac{Dp_i}{dt}=0$, određuje ravnomerno kretanja dinamičke tačke. Fazna brzina, inače, kao promena faznog bivektora po vremenu, kao promena stanja kretanja u vezi je sa silama koje izazivaju promenu kretanja stanja. Ako uzmemo u obzir relacije (6.7) i (12.3), za koordinate fazne brzine (15.3) dobijamo kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja tačke u obliku

$$\frac{D\rho_i}{dt}=p_i,\qquad \frac{Dp_i}{dt}=X_i. \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{15.4}$$

Sada jasno sledi da se za kovarijantne koordinate fazne brzine mogu uzeti kovarijantne koordinate impulsa kretanja i kovarijantne koordinate vektora sile, tj.

$$\left\{\frac{D\rho_i}{dt},\ \frac{Dp_i}{dt}\right\}=\{p_i,\ X_i\}.$$

Na diferencijalne jednačine kretanja (15.4) možemo, kao što se vidi iz (12.11) (12.13) ili (12.22), primeniti kovarijantni integral, odrediti prve integrale, a po određivanju integralnog kovarijantno konstantnog vektora A_i iz početnih uslova i eliminacijom vremena t odrediti i jednačinu fazne trajektorije. U diferencijalnom obliku takođe je moguće da eliminišemo vreme dt ako generalisane sile ili metričk: tenzor ne zavise od njega. U tom slučaju iz (15.4) možemo da dobijemo sledeće diferencijalne jednačine

$$\frac{Dp_i}{D\rho_j}=\frac{X_i}{p_j}, \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$

koje čine sistem *diferencijalnih jednačina fazne trajektorije.*

Komponujemo li ove difeıencijalne jednačine vektorom $a^{ij}\,D\rho_i\,p_j$, dobićemo

$$a^{ij}\,p_j\,Dp_i=a^{ij}\,X_i\,D\rho_j$$

ili

$$a^{ij}\,p_j\,Dp_i=X_i\,Dr^i. \tag{15.6}$$

Primenom kovarijantnog integrala (p 1.4) odavde, kao i u (14.6), dobijamo integral faznih krivih

$$a^{ij}\,p_i\,p_j=2\widehat{\int} X_i\,Dr^i+A, \tag{15.7}$$

a posle određivanja veličine A iz početnih uslova i integrala $\widehat{\int} X_i\,Dr^i$ sledi jednačina fazne trajektorije. Za uslov (14.7) sledi da jednačinu fazne trajektorije čini jednačina integrala energije tačke (14.9).

16. Invarijantni kriterij o stabilnosti kretanja i ravnotežnog stanja tačke

Invarijanta kojom ovde iskazujemo uslov o stabilnosti ravnotežnog stanja mehaničke tačke ili o stabilnosti kretanja te tačke u matematičkom smislu čini tenzor nultog reda, te u odnosu na bilo koji sistem koordinata zadržava jedan te isti oblik. Uslove koje ta invarijanta zadovoljava nazivamo invarijantni kriterij. Stabilnost shvatamo u Ljapunovskom smislu, ali zbog vektorskih formulacija uvedimo i definicije stabilnosti kretanja i ravnotežnog stanja tačke.

Stabilnost ravnotežnog stanja

Ravnotežno stanje $r_0^i = \text{const.}$, $p_i = 0$ kažemo da je stabilno ako za neki pozitivan broj $\delta > 0$, za koji u početnom trenutku

$$|r^i(t_0) - r_0^i| \leqslant \delta, \qquad |p_i(t_0)| \leqslant \delta \tag{16.1}$$

možemo da izaberemo potrebni broj $\varepsilon > 0$ u datoj oblasti S takav da su za svako $t \geqslant t_0$ zadovoljni sledeći uslovi

$$|r^i(t) - r_0^i| < \varepsilon \text{ i } |p_i(t)| < \varepsilon. \tag{16.2}$$

Ako pri uslovima (16.1) fazni bivektor $\{r^i, p_i\}$ teži nuli kad $t \to \infty$ kažemo da je ravnotežno stanje dinamičke tačke asimptotski stabilno.

Ako položaj tačke određujemo pomoću koordinata x, a ne pomoću vektora položaja r^i, definicija ravnotežnog stanja x, $(p = 0)$ se menja samo utoliko što umesto r^i u prethodnoj definiciji, pišemo koordinate x, a to je:

Ravnotežno stanje $x_0^i = const.$, $p_i = 0$ kažemo da je stabilno ako za neki pozitivan broj $\delta > 0$, za koji je u početnom trenutku $t = t_0$

$$|x^i(t_0) - x_0^i| \leqslant \delta, \qquad |p_i(t_0)| \leqslant \delta, \tag{16.3}$$

možemo da izaberemo potrebni broj $\varepsilon > 0$ u datoj oblasti S takav da su za svako $t \geqslant t_0$ zadovoljeni sledeći uslovi

$$|x^i(t) - x_0^i| < \varepsilon \; i \; |p_i(t)| > \varepsilon. \tag{16.4}$$

Kad pri uslovima (16.1) elementi skupa (x^i, p_i) teže nuli pri $t \to \infty$ kažemo da je ravnotežno stanje dinamičke tačke asimptotski stabilno.

Prema prvoj definiciji može se iskazati sledeći invarijantni kriterij o stabilnosti i asimptotskoj stabilnosti ravnotežnog stanja dinamičke tačke:

Ako postoji takva pozitivno-definitna funkcija $W = W(r^1, r^2, r^3; t)$ u oblasti S ravnotežnog položaja takva da je izraz

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{ij}\left(\frac{\partial W}{\partial r^i} + X_i\right)p_j \tag{16.5}$$

negativna funkcija ili identički jednak nuli ravnotežno stanje sistema je stabilno; ukoliko je izraz (16.5) negativno definitna funkcija ravnotežno stanje dinamičke tačke je asimptotski stabilno.

Zaista, funkcija W pripada oblasti S kojoj pripadaju i fazne krive, pa možemo tvrditi da se funkcija W može izabrati tako: $\frac{1}{2}\, a^{ij} p_i p_j + W = V(p_i, r^i, t)$ da fnnkciji V pripadaju sve ili samo neke tačke integralne fazne krive Funkcija

$a^{ij} p_i p_j$ je pozitivno definitna, kao i funkcija $W>0$. Neka je vrednost funkcije V na oblasti S jednaka $C>0$, pri $\delta<C$, $\varepsilon<c$.

Promene ove funkcije po vremenu t,

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{1}{2}a^{ij}p_i p_j + W\right) = a^{ij} p_i \frac{Dp_j}{pt} + \frac{\partial W}{\partial r^i}\frac{Dr^i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t},$$

tj. u smislu jednačina (15.4) poremećenog ravnotežnog stanja,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{ij}\left(X_i + \frac{\partial W}{\partial r^i}\right)p_j$$

pokazuje da će vektor fazne brzine tačke ostati na posmatranoj funkciji ako je njen izvod po vremenu jednak nuli, odnosno da će da prod're spolja unutar posmatranu površ ako je taj izvod manji od nule. To pokazuje da će sve koordinate faznog vektora po apsolutnoj vrednosti biti jednake nekom pozitivnom broju $\varepsilon<C\subset V$ ili manje od njega, a to u smislu 1. definicije dokazuje stabilnost ravnotežnog stanja.

Ukoliko je kriterijski izraz (16.5) negativno definitna funkcija, vektor fazne brzine u svakoj tački seći će pod tupim uglom prema normali svaku krivu $V=C$, pa ma kako bilo malo C, tj. tokom vremena t reprezentativna tačka fazne trajektorije teži ka ravnotežnom stanju; koordinate faznog vektora teže nuli pri $t\to\infty$, što pokazuje da je ravnotežno stanje dinamičke tačke asimptotski stabilno.

Tim je kriterijum dokazan.

Njegova invarijantnost se ne dovodi u sumnju s obzirom da je kriteijski izraz (16.5) skalarna funkcija ili tenzor nultog reda.

Ako je generalisana sila $X_i = X_i(x, p, t)$ data u funkciji od koordinata tačke x, a ne od koordinata vektora položaja tačke, što je u klasičnoj mehan'ci veoma čest slučaj, funkciju W treba birati u zavisnosti od koordinata x tj. $W=W(x^1, x^2, x^3; t)$.

U tom slučaju kriterijski izraz (16.5) dobijamo u obliku

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{ij}\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} + X_i\right)p_j, \tag{16.6}$$

do čega dolazimo kao i u prethodnom postupku s tim što treba uzeti u obzir (6.8), jer je $\dfrac{dW}{dt} = \dfrac{\partial W}{\partial x^i}\dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{\partial W}{\partial x^i}\dfrac{Dr^i}{dt} = a^{ij}\dfrac{\partial W}{\partial x^i}p_j$.

Kada je sila data u funkciji od koordinata vektora brzine $\dot{x}^1$, $\dot{x}^2$, $\dot{x}^3$, a ne od koordinata vektora impulsa kretanja p_1, p_2, p_3, tj. $X_i = X_i(x, \dot{x}, t)$ kriterijski izraz prostije je pisati u obliku

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} + X_i\right)\dot{x}_i \tag{16.7}$$

jer je

$$\dot{x}^i = a^{ij} p_j.$$

Ako koordinate vektora generalisane sile ne zavise od vremena funkciju W tražićemo samo u zavisnosti od koordinata tačke, ili koordinata vektora položaja tačke, tj.

$$W = W(x^1, x^2, x^3) \quad \text{ili} \quad W = W(r^1, r^2, r^3)$$

pa kriterijski izraz dobija prostiji oblik, i to:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} + X_i\right)\dot{x}^i \quad \text{ili} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r^i} + X_i\right)\frac{Dr^i}{dt}. \tag{16.8}$$

Za slučaj kretanja tačke u potencijalnom polju sila pogodno je za funkciju W izabrati upravo potencijal sile ako je to pozitivno-definitna funkcija.

Primer. Na dinamičku tačku dejstvuje vektor sile

$$X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x^i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}^i} \tag{16.9}$$

gde je $\Pi = \Pi(x^1, x^2, x^3)$ pozitivno-definitni potencijal sile a R disipativna funkcija $R = b_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$. Uzmemo li da je $W = \Pi > 0$ i zamenimo zajedno sa (16.9) u (16.8) dobijamo da je uslov stabilnosti ravnotežnog stanja ove tačke

$$R > 0 \quad \text{ili} \quad R \equiv 0.$$

Ukoliko je R pozitivno definitna funkcija ravnotežni položaj tačke je asimptotski stabilan. To će i da bude pojava ako se tačka kreće u sredini koja se protivi kretanju sili proporcionalnoj prvom stepenu brzine $\boldsymbol{v}$. Tada je, kao što se vidi iz (13.2) $R = b_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ pozitivno definitna funkcija koordinata x^i i brzina $\dot{x}^j$ jer je b_{ij} pozitivno definitni tenzor.

Za slučaj da su $b_{ij} = -b_{ji}$ antisimetrični koeficijenti, što je slučaj sa giroskopskim koeficijentima, funkcija R bi bila indentički jednaka nuli, pa jasno sledi da giroskopske sile ne utiču na stabilnost stabilnog ravnotežnog stanja tačke.

Stabilnost kretanja

Analitički invarijantni izraz definisanog kriterija ostaje očuvan i za tvrdnje o stabilnosti kretanja tačke. I u suštini i u formi menja se samo poremećaj kretanja. Ako se zadato kretanje tačke podudara sa rešenjima diferencijalnih jednačina kretanja, tj. $p^i = p^i(t, r_0, p_0)$ $p_i = p_i(t, r_0, p_0)$, onda je poremećeno kretanje

$$\begin{cases} \overset{*}{r}{}^i = r^i + \xi^i, \\ \overset{*}{p}_i = p_i + \eta_i, \end{cases} \tag{16.10}$$

gde su ξ^i vektor poremećaja vektora r^i položaja, a η_i vektor poremećaja impulsa kretanja tačke, odnosno vektor (ξ^i, η_i) poremećaja faznog bivektora (r^i, p_i).

Diferencijalne jednačine poremećenog kretanja biće:

$$\begin{cases} \dfrac{D\overset{*}{r}{}^i}{dt} = a^{ij}\overset{*}{p}_j, \\[2ex] \dfrac{D\overset{*}{p}_i}{dt} = X_i(\overset{*}{r}{}^i, \overset{*}{p}_i, t). \end{cases} \tag{16.11}$$

Uzmemo li u odzir (16.10) i diferencijalne jednačine kretanja (15.4), jednačine poremećenog kretanja (16.11) svodimo na:

$$\begin{cases} \dfrac{D\xi^i}{dt} = a^{ij}\eta_j, \\ \dfrac{D\eta_i}{dt} = \psi_i(\xi, \eta, t), \end{cases} \tag{16.12}$$

gde su ψ_i poremećajni faktori. ove jednačine nazivamo kovarijantne diferencijalne jednačine poremećenog kretanja. Uočimo poređenjem sa (15.4) da su one po formi iste kao i diferencijalne jednačine (15.4) poremećenog ravnotežnog stanja, čija je vektorska kovarijantna forma dokazana. Razlika je samo u faznom bivektoru poremećaja (ξ^i, η_i).

Pod neporemećenim stanjem kretanja podrazumevamo takvo kretanje kod koga su svi poremećaji faznog bivektora jednaki nuli, tj. $\xi^i = 0$, $\eta_i = 0$. Zato kažemo:

Neporemećeno kretanje $\xi^i = 0$, $\eta_i = 0$ tačke nazivamo stabilnim ako možemo naći takav broj $\delta > 0$, za koji je u početnom trenutku $t = t_0$

$$|\xi^i(t_0)| \leqslant \delta, \qquad |\eta_i(t_0)| \leqslant \delta, \tag{16.13}$$

a za $t \geqslant t_0$

$$|\xi^i(t)| < \varepsilon, \qquad |\eta_i(t)| < \varepsilon \tag{16.14}$$

pri potrebnom izboru broja $\varepsilon > 0$.

Ovu definiciju zadovoljava analitički invarijantni kriterij o stadilnosti kretanja tačke koji tvrdi:

Ako postoji takva pozitivno-definitna funkcija $W(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ za koju je izraz

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{ij}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi^i} + \psi_i\right)\eta_j \tag{16.15}$$

negativna funkcija koordinata faznog vektora i vremena t ili je identički jednaka nuli, neporemećeno kretanje tačke $\xi^i = 0$, $\eta_i = 0$ je stabilno.

Ukoliko je kriterijski izraz (16.15) negativno-definitna funkcija neporemećeno kretanje tačke je asimptotski stabilno.

Dokaz je analogan dokazu ovog kriterija o stabilnosti ravnotežnog stanja. Adekvatno izrazu (16.8) i ovde za slučaj da ψ_i ne zavisi od vremena t funkciju W ne treba birati u zavisnosti od t, pa izraz (16.15) se svodi na

$$a^{ij}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi^i} + \psi_i\right)\eta_i. \tag{16.16}$$

Veću opštost kriterija [21] pokazaćemo pri razmatranju stabilnosti kretanja mehaničkih sistema, što se naravno sve odnosi i na kretanje jedne dinamičke tačke.

DINAMIKA TAČKE PROMENLJIVE MASE

17. Uticaj promene mase na kovarijantnu dinamiku

U opštem slučaju masa tačke je funkcija koordinate x, brzine v i vremena t. Međutim ovde pretpostavljamo da masa zavisi samo od vremena i proučavamo uticaj tog faktora na kovarijantne veličine i jednačine dinamike. Sama činjenica da je masa skalar ona se javlja invarijantom u svim koordinatnim sistemima

$$m = m(t), \tag{17.1}$$

kao i njena promena po vremenu u diferencijalnom obliku

$$\frac{dm}{dt} = \mu(t), \tag{17.2}$$

ili u integralnom

$$m(t) = m_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\, d\tau, \tag{17.3}$$

gde je $m_0 = \text{const}$. Zapazimo da masa m_0 odgovara masi m, koju smo uveli u relacije (6.5) i (6.6). Tako ako je $\mu(t) = 0$ sva naša prethodna razmatranja ostaju kao što su izložena. Za $\mu(t) \neq 0$ očigledno je da linearni polarni moment inercije (6.6), inercijski tenzor (6.5), impuls kretanja tačke (6.1), kao i diferencijalne jednačine kretanja tačke, imaju sada složeniju strukturu s obzirom da se ranije izloženim i usvojenim relacijama pridružuje nova (17.2) ili (17.3). Izvod mase dinamičke tačke po vremenu (17.2) najčešće se naziva „sekundarni rashod" ili „sekundarni pritok". Mi ćemo za izvod (17.2) u daljem tekstu upotrebljavati upravo pojam izvod mase po vremenu ili *brzina promene mase*.

Masa $m(t)$ tačke $M(x)$ sadržana je, kao što pokazuju relacije (6.5) u tenzoru (6.5) tj.

$$a_{ij} = m\, \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i = m(t)\, g_{ij}(x) = a_{ij}(x,\ t), \tag{17.4}$$

Prema tome i kovarijantne koordinate linearnog polarnog momenta inercije (6.6) zavise od koordinata x tačke $M(x)$ i vremena t, jer je

$$\rho_k = m(t)\, r^i \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k = a_{ik} r^i = \rho_k(x,\ t). \tag{17.5}$$

Kovarijantni izvod kovarijantnih koordinata ρ_j vektora (6.6) tačke promenljive mase, jednak je kao i za tačku konstantne mase, inercijskom tenzoru a_{ij}, tj.

$$\Delta_i \rho_j = a_{ij}(x, t), \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{17.6}$$

Isto tako i kovarijantni izvod tenzora a_{ij} po koordinatama x^k jednak je nuli,

$$\Delta_k a_{ij} = 0, \tag{17.7}$$

kao za slučaj inercijskog tenzora konstante mase (6.5). Međutim, tako nije i u slučaju kovarijantnog diferencijala tenzora a_{ij} koji sadrži promenljivu masu. Zaista, potražimo kovarijantni diferencijal tenzora (17.4). Dobićemo

$$Da_{ij} = D(m(t)\, g_{ij}) = g_{ij}\, Dm(t), \tag{17.8}$$

jer je $Dg_{ij} = 0$. Kako je kovarijantni diferencijal $Dm(t)$ skalara m jednak diferencijalu dm tog skalara, možemo da pišemo

$$Da_{ij} = g_{ij}\, dm(t), \tag{17.9}$$

što očigledno nije jednako nuli, kao za slučaj kada je masa tačke konstantna. Iz (17.9) sledi da je apsolutni izvod inercijskog tenzora tačke promenljive mase po vremenu proporcionalan metričkom tenzoru g_{ij}, gde je faktor proporcionalnosti brzina promena mase. Stvarno, podelimo li relacije (17.9) na dt dobijamo

$$\frac{Da_{ij}}{dt} = g_{ij} \frac{dm}{dt} \tag{17.10}$$

odnosno zbog (17.2)

$$\frac{Da_{ij}}{dt} = \mu(t)\, g_{ij}. \tag{17.11}$$

Potražimo li, s druge strane, parcijalni izvod po vremenu od tenzora (17.2) dobićemo

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = g_{ij} \frac{\partial m}{\partial t} = g_{ij} \frac{\partial m}{dt} \tag{17.12}$$

jer $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, x^3)$ ne zavisi od t, a masa m zavisi samo od t, pa je

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{dm}{dt}.$$

Upoređenjem (17.10) i (17.12) dobijamo da je apsolutni izvod kovarijantnog tenzora a_{ij} za tačku promenljive mase po vremenu, tj.

$$\frac{Da_{ij}}{dt} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \tag{17.13}$$

jednak parcijalnom izvodu tog tenzora po vremenu.

Ovaj zaključak se odnosi i na kontravarijantne koordinate ovog tenzora, jer i one sadrže masu $m(t)$ dinamičke tačke. To možemo i pokazati, ako pođemo od uslova

$$a_{ij}\, a^{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k. \end{cases} \tag{17.14}$$

Ako je kovarijantni tenzor a_{ij} proporcionalan metričkom tenzoru g_{ij}, što se vidi iz (17.4), to treba da bude i kontravarijantni tenzor a^{ik}. Neka je taj faktor proporcionalnosti λ tj.

$$a^{jk} = \lambda g^{jk} \tag{17.15}$$

Zamenom (17.4) i (17.15) u (17.4) dobijamo

$$a_{ij} a^{jk} = m(t) \cdot \lambda g_{ij} g^{jk}.$$

Kako je

$$g_{ij} g^{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

mora biti

$$m(t) \cdot \lambda = 1,$$

odakle se vidi da je $\lambda = \dfrac{1}{m(t)}$.

Prema tome kontravarijante koordinate inercijskog tenzora slobodne tačke promenljive mase su

$$a^{ij} = \frac{g^{ij}}{m(t)}. \tag{17.16}$$

Odavde se vidi da je kovarijantni izvod $\Delta_k{}^*$ po koordinatama x^k od kontravarijantnog tenzora a^{ij} jednak nuli, kao i u (17.8), jer je

$$\Delta_k a^{ij} = \frac{\Delta_k g^{ij}}{m(t)} = 0. \tag{17.17}$$

Apsolutni izvod po vremenu, prema tome, biće

$$\frac{Da^{ij}}{dt} = g^{ij} \frac{D}{dt}\left(\frac{1}{m}\right) = g^{ij} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\right) = -g^{ij} \frac{\mu(t)}{m^2(t)} = \chi(t) g^{ij} \tag{17.18}$$

gde smo sa $\chi(t)$ obeležili količnik

$$\chi = -\frac{\mu(t)}{m^2(t)}.$$

Posle ovako izvedenih osnova za geometrijsko kovarijantno razmatranje jednačina kretanja tačke promenljive mase može se pristupiti izlaganju kovarijantne dinamike tačke promenljive mase.

18. Kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja

Kretanje tačke promenljive mase karakteriše, pored promene mase tačke, i sila koja se javlja zbog promene mase. Ta činjenica ne bi smela da se previdi pri razvijanju teorije na formulisanim aksiomama, jer bi dovelo u sumnju prvi zakon dinamike. Mi ćemo upravo od njega poći da bi pokazali da na tačku kojoj se masa menja dejstvuje sila i ako prividno ne postoji. Prvi zakon dinamike tvrdi da dinamička tačka poseduje impuls kretanja $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ i zadržava ga u stanju mirovanja i ravnomernog kretanja. Drugim rečima njegova promena po vremenu je jednaka nuli, tj.

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=0 \tag{18.1}$$

ako neka sila ne izmeni to stanje kretanja.

Iz (18.1) jasno je da sledi da je zadovoljena tvrdnja da je impuls

$$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{p}(t_0) \tag{18.2}$$

konstantan za svako $t \geqslant t_0$. Međutim, baš iz (18.2), se vidi da očuvanje impulsa je nemoguće za $t \neq t_0$, ako je kretanje ravnomerno, tj. pri $\boldsymbol{v}=\text{const}$. Zaista, (18.2) može biti napisano u obliku

$$m(t)\,\boldsymbol{v}(t)=m(t_0)\,\boldsymbol{v}(t_0), \tag{18.3}$$

odakle sledi da se brzina $\boldsymbol{v}$ mora menjati ako se masa $m(t)$ menja u toku vremena jer je

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{m(t_0)}{m(t)}\,\boldsymbol{v}(t_0), \tag{18.4}$$

a to protivreči prvom zakonu dinamike. Pokazali smo da postoji promena brzine. Ali čemu je ona jednaka u diferencijalno malom intervalu vremena i što je prouzrokuje, ako smo pretpostavili da su sve sile jednake nuli? Na to pitanje treba da nađemo odgovor. Iz (18.4) se vidi da je promena brzine u intervalu vremena $dt=t-t_1$ kad $t_1 \to t$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\frac{\boldsymbol{v}}{m(t)}\,\frac{dm}{dt}. \tag{18.5}$$

Odavde je očevidno da je sila inercije $-m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ jednaka proizvodu brzine kretanja tačke $\boldsymbol{v}$ i brzine $\frac{dm}{dt}$ promene mase m, koji ima dimenziju sile. Dakle pored sile inercije postoji i druga sila čije je izvorište upravo u samoj tački i po smeru je suprotna sila inercije; oblika je

$$\frac{dm}{dt}\,\boldsymbol{v}. \tag{18.6}$$

Jasno je da je $\boldsymbol{v}$ brzina tačke mase m, ali s odzirom da stoji uz masu dm može se pomisliti da je i brzina objekta sa masom dm. Takav objekt — „čestica" postoji kod tačke promenljive mase. Ako se ta „čestica" posmatra iz koordinatnog početka kao i dinamička tačka mase m, onda brzina $\boldsymbol{v}$ „čestice" mase dm može biti samo prenosna brzina te „česticu" u odnosu na posmatrača izvan tačke promenljive mase. To sve ukazuje na osnovu prvog zakona da postoji sila, koja se sastoji iz proizvoda brzine čestice mase dm i brzine promene μ mase m, te da valja primeniti drugi zakon dinamike za postavljanje diferencijalnih jednačina kretanja.

Drugi zakon dinamike tvrdi da je promena impulsa kretanja p dinamičke tačke po vremenu, u ovom slučaju tačke promenljive mase, jednaka sili koja na nju dejstvuje. Ako svim silama koje dejstvuju na tačku dodamo i silu koja nastaje zbog promene mase tačke, onda ćemo u skladu sa drugim i trećim zakonom dinamike imati diferencijalnu jednačinu slično kao i u (12.1), tj.

$$\frac{dp}{dt}=F+P \tag{18.7}$$

gde je P sila koja nastaje zbog promene mase tačke. Iz analize od (18.4) do (18.6), kao i radova Meščerskog [21] sledi da sila P mora biti oblika

$$P=\frac{dm}{dt}u \tag{18.8}$$

gde je u brzina čestice mase dm, koja se odvaja ili pripaja dinamičkoj tački mase $m(t)$. Uzme li se još pretpostavka, u cilju jasnijeg zaključka, da tačka kreće iz mirovanja $v=v_0=0$, jasno je da je u apsolutna brzina „čestice".

Diferencijalnoj vektorskoj jednačini (18.7) odgovaraće, slično diferencijalnim jednačinama (12.2), kovarijantne jednačine kretanja tačke promenljive mase u obliku

$$Dp_i=(X_i+P_i)\,dt \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{18.9}$$

gde su P_i kovarijantne koordinate vektora (18.8) a ostale veličine imaju značenje kao i u (12.2). U poređenju sa odgovarajućim kovarijantnim jednačinama (12.2) tačke konstantne mase diferencijalne jednačine (18.9) u razvijenom obliku imaju i kvalitetnih razlika od jednačina (12.2) pa ćemo ih izvesti.

Kovarijantne koordinate P_i vektora P dobijamo skalarnim množenjem vektora (18.8) koordinatnim vektorima g_i, tj.

$$P_i=\mathbf{P}\cdot\mathbf{g}_i=\frac{dm}{dt}\mathbf{u}\cdot\mathbf{g}_i=\frac{dm}{dt}u^j\mathbf{g}_j\cdot\mathbf{g}_i, \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{18.10}$$

gde se vidi da su u^j kontravarijantne koordinate vektora apsolutne brzine $\mathbf{u}$ čestica u odnosu na koordinatni sistem $X=(x,\ g)$.

S obzirom da imamo izraze (17.4) i (17.12) kovarijantne koordinate (18.10) vektora P možemo da napišemo u obliku

$$P_i=\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}u^j. \tag{18.11}$$

Uzmemo li u obzir i izraz (6.7) za impuls kretanja dinamičke tačke, tj.

$$p_i=a_{ij}\frac{Dr^j}{dt}, \tag{18.12}$$

diferencijalne jednačine (18.9) napisaćemo u razvijenijem obliku, i to

$$\frac{D}{dt}\left(a_{ij}\frac{Dr^j}{dt}\right)=X_i+\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}u^j,$$

a odavde

$$a_{ij}\frac{D}{dt}\left(\frac{Dr^j}{dt}\right)+\frac{Da_{ij}}{dt}\frac{Dr^j}{dt}=X_i+\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}u^j.$$

Uskladimo li ovo još sa (17.13) dobićemo

$$a_{ij}\frac{D^2 r^j}{Dt^2}=X_i+\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\left(u^j-\frac{Dr^j}{dt}\right),\qquad (i, j=1,\ 2,\ 3),$$

ili

$$a_{ij}\frac{Dv^j}{dt}=X_i+\psi_i, \tag{18.13}$$

gde je

$$\psi_i=\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}(u^j-v^j)=\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}v_j^r \tag{18.14}$$

kovarijantni vektor reaktivne sile tačke promenljive mase, a

$$v_r^j=u^j-v^j \tag{18.15}$$

ıelativna brzina čestice mase dm.

Diferencijalne jednačine (18.13) kretanja tačke promenljive maze koje su napisane u kovarijantnom obliku lako mogu uobičajenim postupkom dobiti kontravarijantni oblik. Kompozicijom jednačina (18.13) kontravarijantnim tenzorom a^{ik}, ako imamo u vidu (17.14), biće

$$\delta_j^k\frac{Dv^j}{dt}=X^k+\psi^k,$$

odnosno

$$\frac{Dv^k}{dt}=X^k+\psi^k, \tag{18.16}$$

gde je

$$\frac{Dv^k}{dt}=\frac{dv^k}{dt}+\Gamma_{ij}^k v^i\frac{dx^j}{dt}=\frac{D^2 r^k}{dt^2},$$

a

$$\psi^k=a^{ik}\psi_i=a^{ik}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}v_r^j \tag{18.17}$$

kontıavarijantni vektor reaktivne sile, koji u skladu sa (17.16) i (17,12), možemo da svedemo na

$$\psi^k=\frac{1}{m}g^{ik}g_{ij}\frac{dm}{dt}v_k^j=\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}v_r^k. \tag{18.18}$$

Ovaj izraz je najpogodniji pri kovarijantnom integralenju diferencijalnih jednačina kretanja tačke promenljive mase u kovarijantnom i kontravarijantnom obliku.

19. Neki primeri kovarijantnog integralenja

Kovarijantno integralenje diferencijalnih jednačina kretanja tačke promenljive mase je složenije od integralenja odnosnih dijerencijalnih jednačina konstante mase. To iz razloga što se tenzor (6.2) ne ponaša prema apsolutnom diferencijalu kao njemu odgovarajući tenzor (17.4).

1, Primer. Neka se tačka kreće samo pod dejstvom potisne sile (18.17) ili (18.18), što je isto, pri uslovu da je vektor (18.15) relativne brzine $v^j{}_r = v^j{}_r(x^1, x^2, x^3)$ kovarijantno konstantan. Diferencijalne jednačine (18.16) kretanja dinamičke tačke mase $m = m(t)$ u tom slučaju se svode na

$$Dv^k = \frac{dm}{m} v_r^k \tag{19.1}$$

odakle, primenom kovarijantnog integrala

$$\widehat{\int} Dv^k = \widehat{\int} \frac{dm}{m} v_r^k$$

sledi*)

$$v^k = v_r^k \ln m(t) + A^k, \tag{19.2}$$

gde je A^k kovarijantno konstantni vektor koji određujemo iz početnih uslova postupkom kao u (10.11). To je vektor $v^k(t) - v_r^k \ln m(t_0)$ prenešen pomoću dvotačkastog tenzora g_a^k u tačku t, tj.

$$A^k = g_a^k(v^a - v_r^a \ln m(t)).$$

Tako je sada brzina v^k određena u svakoj tački $t \geqslant t_0$, i to

$$v^k = g_a^k(v^a - v_r^a \ln m(t_0)) + v_r^k \ln m(t). \tag{19.3}$$

Za slučaj Dekartovih pravolinijskih koordinata u kojim je, prema (6.7), $g_a^k = \delta_a^k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & a \neq k \end{cases}$ sledi rešenje „prvog zadatka" Ciolkovskog [21]

$$v^k(t) = v^k(t_0) - v_r^k \ln \frac{m(t_0)}{m(t)}$$

*) Čitalac koji želi detaljnije dokaze treba da zapazi da je diferencijal dm od skalara jednak apsolutnom diferencijalu Dm, a da je po uslovu zadatka $Dv_r^k = dv_r^k + \left\{ {k \atop ij} \right\} v_r^i dx^j = 0$ pa je integral

$$\widehat{\int} \frac{dm}{m} v_r^k = \widehat{\int} v_r^k \, d \ln m = \widehat{\int} v_r^k \, D \ln m = \widehat{\int} D(v_r^k \ln m(t))$$

pomoću čega je dobijena desna strana relacije (19.2)

S obzirom da je $v^k = \frac{Dr^k}{dt}$ $(k=1, 2, 3)$, a da je $v_r^k \ln \frac{m(t_0)}{m(t)} = f(t)$ skalarna funkcija, dalje integralenje se svodi na tri diferencijalne jednačine

$$Dr^k = v^k(t_0)\,dt - v_r^k \left(\ln \frac{m(t_0)}{m(t)}\right) dt.$$

Odavde pomoću kovarijantnog integrala nalazimo

$$r^k = v^k(t_0)\,t - v_{(r)}^k \widehat{\int} \ln \frac{m(t_0)}{m(t)}\,Dt + B^k$$

gde autoparalelni vektor B^k određujemo kao od (19.2) do (19.3).

2. Primer. Na sličan način mogu se dobiti i kovarijantni integrali diferencijalnih jednačina kretanja tačke promenljive mase za „drugi zadatak" Ciolkovskog, tj. za slučaj kretanja rakete u konstantnom polju Zemljine teže. Izvedimo i to polazeći od kovarijantnih jednačina (18.13), u kojim osnovni tenzor a_{ij} nije kovarijantno konstantan, tj. nije $Da_{ij} \neq 0$, što smo pokazali u (17.13).

U ovom zadatku o kretanju rakete Ciolkovskog pretpostavlja se da se tačka promenljive mese kreće pod dejstvom reaktivne sile (12.14), a u polju sile Zemljine teže $-m\boldsymbol{G}$ gde je vektor $\boldsymbol{G}$ konstantan. U tom slučaju, koordinate vektora sile X_i odredimo uobičajenim postupkom prema krivolinijskom koordinatnom sistema X, tj, prema koordinatnim vektorima $\boldsymbol{g}_i$. Ako vektor $\boldsymbol{G}$ razložimo na $\boldsymbol{G} = G^i \boldsymbol{g}$. onda je, prema (17.4),

$$X_i = -m\,\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j \cdot G^j = -a_{ij} \cdot G^j.$$

Tako sada diferencijalne jednačine (18.13) se konkretizuju i postaju

$$a_{ij} \frac{Dv^j}{dt} = -a_{ij} G^j + \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} v_r^j, \tag{19.4}$$

gde su G^j kontravarijantne koordinate vektora ubrzanja $\boldsymbol{G}$ Zemljine teže, a $v^j{}_r$ kontravarijantne koordinate vektora relativne brzine „čestice"; oba vektora su kovarijantno-konstantni. Da bi i osnovni tenzor a_{ij} sveli na kovarijantno-konstantne tenzore iskoristimo relacije (17.12) i (17.9). Pomoću njih jednačine (19.4) svodimo na

$$g_{ij} \frac{Dv^j}{dt} = -G^j + \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} g_{ij} v_r^j,$$

odnosno

$$g_{ij}\,Dv^j = -g_{ij}\,G^j\,dt + \frac{dm}{m} g_{ij} v_r^j. \qquad (i, j=1, 2, 3). \tag{19.5}$$

Za kovarijantni integral tenzora bez obzira na $g_{ij} = g_{ij}(x)$ kao i na $G^j(x)$, $v_r^j(x)$, ove diferencijalne jednačine predstavljaju kovarijantne diferencijalne jednačine u kojima su razdvojene promenljive v i t, pa dobijemo

$$\widehat{\int} g_{ij}\,Dv^j = -\widehat{\int} g_{ij}\,G^j\,dt + \widehat{\int} \frac{dm}{m} g_{ij} v_r^j,$$

odnosno

$$g_{ij}\widehat{\int} Dv^j = -g_{ij}G^j\widehat{\int} Dt + g_{ij}v_r^j\widehat{\int}\frac{dm}{m},$$

jer su g_{ij}, G^j, v_r^j kovarijantno-konstantne veličine, a diferencijali skalara jednaki su apsolutnim diferencijalima tih skalara. Sada je jasno da dobijamo kovarijantne integrale u obliku

$$g_{ij}v^j = -g_{ij}G^j t + g_{ij}v_r^j \ln m(t) + A_j$$

gde je A_j kovarijantno konstantni vektor koga treba da odredimo iz početnih uslova slično postupku od (19.2) do (19.3).

DINAMIKA SISTEMA

20. **Uvodne napomene**

U uvodnom delu na 8. strani usvojili smo klasičnu definiciju o sistemu dinamičkih tačaka. Pod nazivom *kovarijantna dinamika sistema* mi podrazumevamo onaj deo kovarijantne mehanike koja proučava kretanje i mirovanje tačke ili više dinamičkih tačaka, čije je kretanje ograničeno bilo kakvim vezama, a sve relacije kojim se opisuje to kretanje su po formi jednake ili slične u svim koordinatnim sistemima prostora u kojem se kretanje događa. Taj fakt ograničavanja kretanja tačaka čini teoriju složenijom, naročito u kovarijantnom smislu, tj. u smislu zadržavanja oblika relacija i prirode dinamičkih objekata pri transformaciji iz jednog koordinatnog sistema u drugi, bilo da se radi o konačnim, diferencijalnim ili integralnim matematičkim izrazima. Da bi to ostvarili pristupamo apstrahovanju opažajnog trodimenzionog prostora mnoštvom koordinata dinamičkih tačaka sistema, koje nazivamo višedimenzionim koordinatnim prostorom. Neka imamo n dinamičkih tačaka $M_\nu\,(\nu=1,\,2,\ldots,\,n)$. Svaka tačka $M_\nu \in E_3$ ima po tri koordinate $x=(x^1_\nu,\ x^2_\nu,\ x^3_\nu)$; $x^i_\nu \in R$. Skup od $m=3\,n$ koordinata u jednom te istom trenutku vremena čini određenu *konfiguraciju sistema* tačaka, pa takav skup koordinata nazivaju m-dimenzioni *konfiguracioni prostor*, a kretanje sistema tačaka u tom prostoru nazivamo kretanje reprezentativne tačke, za koju po dogovoru kažemo da ima m koordinata.

U slučajevima kada se pogodnim izborom koordinata oslobađamo veza, odnosno kad kretanje posmatrano na potprostorima, broj dimenzija konfiguracionog prostora je manji od $3\,n$, pa kažemo da konfiguracioni prostor ima m dimenzija, podrazumevajući pod tim da je $m \leqslant n$, gde je n broj dinamičkih tačaka sistema.

Uticaj veza na smanjenje dimenzija konfiguracionog prostora izložićemo u gradivu koje slede, a ovde istaknimo još nekoliko opštih napomena o vezama, pogotovo onih gde mi odstupamo od prihvaćene konvencije u klasičnoj mehanici o vezama.

Veze u dinamičkom smislu su najčešće realni objekti, bilo da su to geometrijski modeli izraženi analitičkim relacijama, bilo kinematičke ili dinamičke jednačine ili nejednakosti. U najopštijem smislu, prema tome možemo reći da imamo *realne* ili *stvarne veze* i *idealne* ili *zadate veze*. Idealne ili zadate veze bi bili matematički modeli realnih ili stvarnih veza.

Za razliku od realnih veza zadate veze su uvek idealno glatke. Zato realne ili stvarne veze drugačije dejstvuju na kretanje tačke od idealnih veza. Prema predmetnim oblastima mehanike mi ćemo razlikovati veze:

(20.1) geometrijske $g(\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}, s) \geqslant 0$, ili $g(x, dx, s) \geqslant 0$,

(20.2) kinematičke $k(\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}, t) \geqslant 0$, ili $k(x, dx, t) \geqslant 0$,

(20.3) dinamičke $\mathcal{D}(m, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{F}, t) \geqslant 0$, ili $\mathcal{D}(m, p, X, t) \geqslant 0$.

Prema ovoj klasifikaciji sve vrste veza (geometrijske, kinematičke i dinamičke) mogu biti razdeljene na konačne, diferencijalne i integralne, i obrnuto sve konačne, diferencijalne i integralne veze mogu biti podeljene na geometrijske, kinematičke i dinamičke.

U zavisnosti od toga da li su diferencijalne i integralne veze integrabilne ili neintegrabilne razlikovaćemo i ostaćemo pri nazivu holonomne i neholonomne veze, a prema zavisnosti od vremena zadržaćemo ustaljene nazive skleronomnih i reonomnih veza. Isto tako upotrebljavaćemo uobičajene pojmove zadržavajućih (bilaterarnih) i nezadržavajućih (unilaterarnih) veza.

21. Vektor položaja reprezentativne tačke

Posmatrajmo ν-tu tačku $M_\nu \in E_3$ čiji je položaj u odnosu na inercijsku bazu određen vektorom položaja $\boldsymbol{r}_\nu$ koji možemo da pišemo u obliku (1.12),

$$\boldsymbol{r}_\nu = r^i_{(\nu)} \boldsymbol{g}_{(\nu)i}, \qquad (i=1, 2, 3) \tag{21.1}$$

ili u obliku (1.22) kovarijantnih koordinata

$$r_{(\nu)k} = r^i_{(\nu)} \boldsymbol{g}_{(\nu)i} \cdot \boldsymbol{g}_{(\nu)k} = g_{(\nu)ik}\, r^i_{(\nu)}, \tag{21.2}$$

gde su, kao i u (1.18), koordinate r^i_ν vektora $\boldsymbol{r}_\nu$ i kovarijantni koordinatni vektori $\boldsymbol{g}_{(\nu)i}$ funkcije koordinata $x_\nu = (x^1_\nu, x^2_\nu, x^3_\nu)$ tačke $M_\nu(x)$ u odnosu na koordinatni sistem $X = (x, \boldsymbol{g})$ i to

$$r^i_{(\nu)} = r^i_{(\nu)}(x_\nu), \tag{21.3}$$

$$\forall \nu \in N_n.$$

$$\boldsymbol{g}_{(\nu)i} = \boldsymbol{g}_{(\nu)i}(x_\nu), \tag{21.4}$$

Ako su poznate veze između Dekartovih pravouglih koordinata y i krivolinijskih x, koordinaate vektora položaja u odnosu na krivolinijski koordinatni sistem za svaku tačku mogu biti određene relacijama (1.18) i (1.25), tj.

$$r^k_{(\nu)} = y^i_{(\nu)} \frac{\partial x^k_{(\nu)}}{\partial y^i_{(\nu)}}\Big|_{y^i_\nu = y^i_\nu(x)}, \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{21.5}$$

i kao u (1.25)

$$r_{(\nu)k} = \delta_{ij}\, y^i_{(\nu)} \frac{\partial y^j_{(\nu)}}{\partial x^k_{(\nu)}}, \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{21.6}$$

Po ponovljenim indeksima u zagradi se ne sabira ako nema znaka za sabiranje.

Dvojne indekse (ν) i k u izrazima za vektore položaja tačaka M_ν možemo bez uticaja na izmenu strukture bilo kog vektora $\boldsymbol{r}_\nu$ uprostiti svođenjem na jedan indeks, tj.

$$\overset{1}{r}_{(1)}=r^1,\ \overset{2}{r}_{(1)}=r^2,\ \overset{3}{r}_{(1)}=r^3;\ \overset{1}{r}_{(2)}=r^4,\ \overset{2}{r}_{(2)}=r^5,\ \overset{3}{r}_{(2)}=r^6$$

ili kraće

$$\overset{1}{r}_{(\nu)}=r^{3\nu-2},\ \overset{2}{r}_{(\nu)}=r^{3\nu-1},\ \overset{3}{r}_{(\nu)}=r^{3\nu}$$

$$g_{(\nu)1}=g_{3\nu-2},\ g_{\nu 2}=g_{3\nu-1},\ g_{(\nu)3}=g_{3\nu}.$$

Na taj način n tripleta $\overset{k}{r}_{(\nu)}$ pisaćemo kao skup od n koordinata r^i ($\forall\, i\in N_m$, $m=3\,n$) ovde uvedenog vektora

$$\mathfrak{r}=\{r^1,\ r^3,\ \dots,\ r^m\},$$

koji ćemo nazivati *vektor reprezentativne tačke sistema.*

Proširimo li te indekse na koordinate $y_{(\nu)}$ i $x_{(\nu)}$, izraz (21.5) možemo sad da napišemo kao

$$r^i=y^j\frac{\partial x^i}{\partial y^j},\qquad (i,\ j=3\,\nu-2,\ 3\,\nu-1,\ 3\,\nu;\ \forall\,\nu\in N_n) \tag{21.7}$$

pri čemu se ima u vidu da između koordinata y i x tačke M postoji jednoznačno preslikavanje $y\colon x\to y$, tj. postoje veze

$$y^i=y^i\,(x^{3\nu-2},\ x^{3\nu-1},\ x^{3\nu}),$$

i obratno

$$x^i=x^i\,(y^{3\nu-2},\ y^{3\nu-1},\ y^{3\nu}).$$

Ako na primer, treba da izračunamo koordinatu vektora r^7, ($\nu=3$, $3\,\nu-2=7$), biće

$$r^7=y^7\frac{\partial x^7}{\partial y^7}+y^8\frac{\partial x^7}{\partial y^8}+y^9\frac{\partial x^7}{\partial y^9},$$

što, prema (21.7), odgovara prvoj koordinati vektora položaja $\boldsymbol{r}_3$ tačke M_3. Na isti način možemo da određujemo kovarijantne koordinate vektora (21.6), tako da imamo

$$r_k=\delta_{ij}\,y^i\frac{\partial y^j}{\partial x^k},\qquad (k=3\,\nu-2,\ 3\,\nu-1,\ 3\,\nu), \tag{21.8}$$

za svako x koje zadovoljava jednačiuu

$$\left|\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right|_3^3\neq 0. \tag{21.9}$$

Na taj način uvedeni vektor položaja tačaka sistema, bilo u kovarijantnom (21.8), bilo u kontravarijantnom obliku (21.7) predstavlja skup od n

tripleta (1.18) ili (1.25). Iz navedenih relacija se vidi da su koordinate i kovarijantne koordinate r_k vektora reprezentativne tačke sistema funkcije u opštem slučaju krivolinijskih koordinata x. Ako je bilo koja tačka M ograničena u kretanju tako da jedna ili više njenih koordinata x ne mogu uzimati sve vrednosti iz skupa realnih brojeva R, kao što je to opisano u 7. poglavlju onda i vektor položaja posmatrane tačke mora da bude funkcija tih ograničenih vrednosti, na primer $x^k = \text{const}$. Ta ili druga ograničenja nad koordinatama x, pa prema tome i nad vektorom $\boldsymbol{r}$ su geometrijske konačne veze čije prisustvo se ne sme zaboraviti pri opisivanju kretanja tačaka sistema, jer one imaju i dinamičkog odraza na posmatrano kretanje. Geometrijske veze (21.9) mogu biti, svakako, složenije strukture, i to

$$f_\mu (x^1, \dots, x^{3n}) = 0, \qquad (\mu = 1, \dots, k \leqslant 3n) \tag{21.10}$$

koje uspostavljaju međuzavisnost koordinata x. Pri usvojenoj pretpostavci da su veze (21.10) međusobno nezavisne, tj. da je jakobijan

$$\left| \frac{\partial f_\mu}{\partial x^i} \right| \neq 0, \tag{21.11}$$

iz k jednačina (21.10) određujemo k koordinata $x^s = x^s(x^{k+1}, \dots, x^n)$, $(s = 1, 2, \dots, k)$, u funkciji od ostalih $n-k$ koordinata. Tako određene zavisne koordinate x^s zamenimo u (21.1), tj.

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu (x^1, \dots, x^k; x^{k+1}, \dots, x^{3n}) \Big|_{x^s = x^s (x^{k+1}, \dots, x^{3n})}, \tag{21.12}$$

pa dobijamo da su koordinate vektora položaja tačaka sistema funkcije $3n-k$ nezavisnih koordinata posredstvom zavisnih $x^{k+1}, \dots, x^{3n}$, tj.

$$x^s = x^s (x^{k+1}, \dots, x^{3n}), \tag{21.13}$$

i to tako da možemo pisati

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}[x^1 (x^{k+1}, \dots, x^{3n}), \dots, x^k (x^{k+1}, \dots, x^{3n}), x^{k+1}, \dots, x^{3n}] = \\ &= \boldsymbol{r}_\nu (x^{k+1}, \dots, x^{3n}). \end{aligned} \tag{21.14}$$

Prema tome, položaj tačaka M_ν tako povezanog sistema određen je skupom od $3n-k$ nezavisnih koordinata $x^{k+1}, \dots, x^{3n}$ ili pomoću $3n$ koordinata r^i vektora $\mathfrak{r}$ reprezentativne tačke i k veza (21.10). Koordinate r^i vektora $\mathfrak{r}$ su u stvari koordinate vektora $\mathbf{r}_\nu$ položaja pojedinih tačaka, uređenih po indeksima $i = 3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu$; to se vidi iz (21.7) i (21.8). Za takvu indeksnu uređenost metrički tenzor iz (21.2), tj.

$$g_{(\nu)\, ik} = \boldsymbol{g}_{(\nu)\, i} \boldsymbol{g}_{(\nu)\, k}, \tag{21.15}$$

možemo da pišemo u obliku

$$g_{lk} = \delta_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^l} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = g_{lk} (x^{3\nu-2}, x^{3\nu-1}, x^{3\nu}), \tag{21.16}$$

$$(i, j, k, l = 3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu;\ \forall \nu \in N_n)$$

Za slučaj uzimanja u obzir veza (21.10) i zavisnosti koordinata (21.13), pri čemu nije više zadovoljena jednačina (21.9), sve izvedene relacije valjalo bi svesti na nezavisne koordinate kojih ima manje nego koordinata vektora reprezentativne tačke. To dovoljno govori da se vektori položaja u opštem slučaju nalaze izvan mnogostrukosti koju čine preseci veza (21.10). Ako $3n-k$ nezavisnih koordinata označimo, kao i u 7. poglavlju, slovima q^α, $\alpha=1, 2, \ldots, m$, tj.

$$q=\{q^1, q^2, \ldots, q^m\} \tag{21.17}$$

tada su i vektori položaja tačaka (21.14) funkcije koordinata q, što pišemo u obliku

$$r_\nu=r_\nu(q^1, \ldots, q^m)=r_\nu(q). \tag{21.18}$$

Tih m koordinata q^α u svakom trenutku vremena t imaju određene vrednosti $q^\alpha=q^\alpha(t)$ i čine određenu konfiguraciju sistema, pa i tu mnogostrukost nazivamo konfiguracioni m-dimenzioni prostor R_m, $\forall m\leqslant 3n$, gde je n broj dinamičkih tačaka sistema. Tačku $M(q)\in R_m$ nazivamo reprezentativna tačka sistema. U zavisnosti od toga da li položaj dinamičkih tačaka M_ν određujemo vektorima položaja r_ν, a prema tome i položaj reprezentativne tačke vektorom reprezentativne tačke, ili pomoću skupa nezavisnih koordinata, koje inače nazivaju generalisane koordinate q, mi ćemo imati kvalitativno različite kovarijantne relacije kojima se opisuje kretanje tačaka sistema.

22. Brzina sistema

Pod pojmom *brzina sistema* podrazumevamo brzinu reprezentativne tačke sistema. U zavisnosti od toga da li je vektor reprezentativne tačke sistema izražen kao skup koordinata vektora (21.3) svih tačaka sistema M_ν, $\forall_\nu\in N_n$ tj. u obliku

$$\mathfrak{R}=\{r^1, \ldots, r^{3n}\}, \tag{22.1}$$

ili su vektori položaja tačaka izraženi kao funkcije nezavisnih koordinata q, tj.

$$r_\nu=r_\nu(q) \qquad \forall_\nu\in N_n, \tag{2.22}$$

a reprezentativna tačka $M(q)\in R_m$ skupom koordinata q, brzinu sistema određujemo ili kao

1. Skup apsolutnih izvoda $3n$ koordinata vektora položaja n tačaka sistema po vremenu, tj.

$$v^i=\frac{Dr^i}{dt}=\frac{dr^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}\, r^j\frac{dx^k}{dt}, \qquad (i, j, k=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu), \tag{22.3}$$

gde su Γ^i_{jk} Kristofelovi simboli nad tenzorom (21.16), ili kao

2. skup izvoda m nezavisnih generalisanih koordinata q reprezentativne tačke sistema po vremenu i to

$$v^\alpha=\dot{q}^\alpha=\frac{dq^\alpha}{dt}, \qquad \forall\alpha\in N_m. \tag{22.4}$$

Veze između kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata vektora brzine (22.3) uspostavljamo pomoću tenzora (21.16) i to

$$v_i = g_{ij} v^j = g_{ij} \frac{Dr^j}{dt}, \tag{22.5}$$

odakle pri $|g_{ij}| \neq 0$ slede ekvivalentne relacije

$$v^i = \frac{Dr^i}{dt} = g^{ij} v_j, \qquad (i, j = 3\nu - 2,\ 3\nu - 1,\ 3\nu;\ \forall \nu \in N_m). \tag{22.6}$$

Pitanje kovarijantnih koordinata q_α vektora brzine $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^m$ reprezentativne tačke sistema uvedimo uz pomoć vektora (21.18) kao za vektor (7.2). Izvod vektora (21.18) po vremenu će biti brzina ν-te tačke sistema i to

$$\boldsymbol{v}_\nu = \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{22.7}$$

Pomnožimo li skalarno ove relacije vektorima $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta}$ postupno i saberemo po indeksu ν dobićemo zbir projekcija brzina svake tačke M_ν na ose koordinatnih vektora $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$, tj.

$$\sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{v}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta} \dot{q}^\alpha.$$

Usvojimo li da su

$$\dot{q}_\beta = \sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{v}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta} \tag{22.8}$$

kovarijantne koordinate vektora brzine reprezentativne tačhe $M(q) \in R_m$ sistema tada su relacije između kovarijantnih $\dot{q}_\beta$ i kontravarijantnih koordinata $\dot{q}^\alpha$ vektora brzine $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^m$ reprezentativne tačke,

$$\dot{q}_\beta = g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha, \tag{22.9}$$

gde je

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta} = q_{\alpha\beta}(q), \tag{22.10}$$

osnovni metrički tenzor konfiguracionog prostora R_m.

23. **Impuls kretanja sistema**

Pod *impulsom kretanja sistema* podrazumevamo vektor $p = (p_1, \ldots, p_m)$ čije su kovarijantne koordinate p_α jednake zbiru projekcija vektora impulsa kretanja svake dinamičke tačke sistema na ose odnosnih koordinatnih vektora g_α tangentnog prostora $\mathbf{R}^m$ u tački $M(q)$ konfiguracionog prostora $\mathbf{R}_m$. Impuls kretanja ν-te tačke $M_\nu(q)$, $\forall \nu \in N_n$, mase m_ν, je

$$\boldsymbol{p}_\nu = m_\nu \boldsymbol{v}_\nu. \tag{23.1}$$

Prema datoj definiciji kovarijantne koordinate p_α impulsa sistema dobićemo ako vektore (23.1) pomnožimo skalarno postupno koordinatnim vektorima $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$ i saberemo po indeksu ν, i to

$$p_\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}. \tag{23.2}$$

Uzmemo li u obzir (22.7), odakle vidimo da je $\boldsymbol{v}_\nu = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta} \dot{q}^\beta$, sledi

$$p_\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \dot{q}_\beta = a_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta, \tag{23.3}$$

gde su

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\beta} = a_{\beta\alpha}(q) \tag{23.4}$$

kovarijantne koordinate *inercijskog tenzora sistema* tačaka. Relacije (23.3) pokazuju da su koordinate impulsa kretanja sistema linearne kombinacije koordinata $\dot{q}^\alpha$ vektora brzine reprezentativne tačke sistema. Postoji i ekvivalentna relacija

$$\dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta, \tag{23.5}$$

koja pokazuje da su koordinate $\dot{q}^\alpha$ vektora brzine linearne kombinacije impulsa sistema.

Ako kretanje sistema tačaka predstavljamo pomoću vektora položaja tačaka tada možemo i impuls kretanja sistema da definišemo pomoću pojma vektora reprezentativne tačke sistema. Po definiciji (23.1), a u skladu sa (5.2) i (5.4) imamo $\boldsymbol{p} = m_\nu \dfrac{Dr_\nu^k}{dt} \mathbf{g}_{(\nu)k}$, $(k = 1, 2, 3)$. Pomnožimo li ovaj izraz vektorima $\boldsymbol{g}_{(\nu)j}$ dobićemo

$$p_{(\nu)j} = m_\nu \boldsymbol{g}_{(\nu)k} \cdot \boldsymbol{g}_{(\nu)j} \frac{Dr_\nu^k}{dt}, \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{23.6}$$

Upotrebimo indekse od (21.6) do (21.7) i u skladu sa tim uvedimo, bez ikakvih promena na prirodu impulsa (23.6), simboličke veze

$$m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}, \qquad \forall \nu \in N_n. \tag{23.7}$$

Pomoću tih simbola kovarijantne koordinate impulsa p_i pišemo u obliku

$$p_i = a_{ij} \frac{Dr^j}{dt} \qquad (i,\ j = 3\nu - 2,\ 3\nu - 1,\ 3\nu;\ \forall \nu \in N_n) \tag{23.8}$$

gde je, a_{ij} kao u (6.2) ili (6.5), inercijski tenzor

$$a_{ij} = m_i\, g_i \cdot g_j, \tag{23.9}$$

uz uslove (23.7). Impulsi (23.8) su očigledno impulsi kretanja pojedinih tačaka sistema, ali za ceo njihov skup

$$p = \{p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{3n}\}$$

kazaćemo impuls sistema ili impuls reprezentativne tačke sistema, kao i za slučaj (23.3).

Ukoliko uvedemo pojam linearnog polarnog momenta inercije reprezentativne tačke sistema kao skup

$$\rho = (\rho^1,\ \ldots,\ \rho^{3n}) \tag{23.10}$$

od $3n$ koordinata linearnih polarnih momenata inercije $\rho_\nu = m_\nu \boldsymbol{r}_\nu$ pojedinih dinamičkih tačaka, kao u (6.6), impuls kretanja sistema tačaka, masa $m_\nu = \text{const.}$, možemo da izrazimo i pomoću apsolutnih izvoda koordinata linearnog polarnog momenta inercije po vemenu. Upotrebimo li korišćene indekse $i, j = 3\nu - 2$, $3\nu - 1$, 3ν; $\forall \nu \in N_n$ i uzmemo u obzir simboličke veze (23.7), slediće kao i u (6.7)

$$p_i = g_{ij} \frac{D\rho^j}{dt}, \tag{23.10}$$

gde je $g_{ij}(x)$ metrički tenzor (21.16).

24. Kovarijantne diferencijalne jednačine kretanje holonomnog sistema

Kretanje sistema uzrokuju aktivne sile koje dejstvuju na svaku dinamičku tačku M_ν mase m_ν ponaosob i veze koje ograničavaju kretanja takaka. Pri postavljanju kovarijantnih difericijalnih jednačina kretanja sistema treba se, pre svega, opredeliti za koordinatni sistem u odnosu na koji se posmatra kretanje, kao i prostor u kojem leže tačke dinamičkog sistema. S obzirom da smo uveli pojam reprezentativne tačke sistema koju određuje $3n$ koordinata vektora položaja $r^1, \ldots, r^{3n}$ u koordinatnim sistemima $X = (x,\ g)$, ili m generalisanih koordinata q^α, $(\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ mi ćemo kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja sistema opisati i u $3n$-dimenzionom prostoru E_{3n} i u m-dimenzionom potprostoru R_m. Ako kretanje holonomnog sistema dinamičkih tačaka posmatramo kao kretanje reprezentativne tačke čiji je impuls kretanja dat relacijama (23.3) ili (23.8), kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja sistema i u jednom i u drugom slučaju možemo da postavimo na osnovu drugog zakona dinamike, prema kojem je promena po vremenu $\frac{D}{dt}$ impulsa kretanja sistema p_α jednaka sili koja dejstvuje na reprezentativnu tačku sistema. Neka je rezultantna sila, koje dejstvuje na reprezentativnu tačku sistema, $F=(F_1, F_2, \ldots, F_m)$. Prema drugom zakonu dinamike mora da bude

$$\frac{Dp_\alpha}{dt}=F_\alpha \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, m \leqslant 3n), \tag{24.1}$$

gde broj $m \leqslant 3n$ ukazuje na dimenziju konfiguracionog prostora u kome posmatramo kretanje reprezentativne tačke, kad je n broj dinamičkih tačaka sistema. Pokazatelj m je od bitnog značaja za korektno opisivanje kretanja sistema, jer komponente vektora $\boldsymbol{F}$ i vektora $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \Rightarrow \frac{Dp_\alpha}{dt}$ ne mogu u svim slučajevima biti smeštene u svim potprostorima. Jednačine (24.1) predstavljaju opšte *kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja sistema.* One su očigledno istog oblika kao diferencijalne jednačine kretanja dinamičke tačke (12.2). U raznim vektorskim i koordinatnim prostorima postojaće razlike i u broju jednačina i u njihovoj funkcionalnoj strukturi, ali kovarijantni oblik (24.1) ostaje isti.

1. Kovarijantne diferencijalne jednačine sa reakcijama veza

Neka sistem od n dinamičkih tačaka M_ν masa m_ν, čije položaje određuju vektori $\boldsymbol{r}_\nu$, a kretanje ograničava k geometrijskih bilateralnih veza

$$f_\mu(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n)=0 \qquad (\mu=1, \ldots, k<3n). \tag{24.2}$$

Veze odstranimo i njihovo dejstvo zamenimo reakcijama veza $\boldsymbol{R}_\mu$. Tako na svaku ν-tu dinamičku tačku sistema dejstvuje rezultantna sila

$$\boldsymbol{F}_\nu=\sum_{\sigma=1} \boldsymbol{F}_{\sigma\nu}+\sum_{\mu=1}^{k} \boldsymbol{R}_{\mu\nu}=\boldsymbol{F}_\nu+\boldsymbol{R}_\nu, \tag{24.3}$$

gde je $\boldsymbol{F}_\nu$ rezultanta aktivnih sila, a

$$\boldsymbol{R}_\nu=\sum_{\mu=1}^{k} \boldsymbol{R}_{\mu\nu} \tag{24.4}$$

rezultanta sila relacije.

Diferencijalnu jednačinu kretanja ν-te tačke napišimo u obliku (12.1), tj.

$$\frac{d\boldsymbol{p}_\nu}{dt}=\boldsymbol{F}_\nu+\boldsymbol{R}_\nu \qquad (\nu=1, \ldots, n). \tag{24.5}$$

Razložimo vektore sila F_ν i $\mathbf{R}_\nu$ na komponente duž vektora $g_{(\nu)1}$, $g_{(\nu)2}$, $g_{(\nu)3}$ koordinatnog sistema X, tako da imamo

$$\frac{dp_{(\nu)}}{dt}=X^k_{(\nu)}g_{(\nu)k}+R^k_{(\nu)}g_{(\nu)k}, \qquad (k=1,\ 2,\ 3;\ \forall\,\nu\in N_n). \tag{24.6}$$

Ovu vektorsku diferencijalnu jednačinu kretanja ν-te dinamičke tačke postavimo u skalarnom obliku. Pomnožimo li tu diferencijalnu jednačinu vektorom $g_{(\nu)j}$ možemo u skladu sa (21.15) da pišemo

$$\frac{d}{dt}(p_{(\nu)}\cdot g_{(\nu)j})-p_{(\nu)}\cdot\frac{d\,g_{(\nu)j}}{dt}=g_{(\nu)kj}\,(X^k_{(\nu)}+R^k_{(\nu)}). \tag{24.7}$$

Leve strane jednačine transformišemo na sledeći način:

$$p_{(\nu)}\cdot \mathbf{g}_{(\nu)j}=m_{(\nu)}\,v_{(\nu)}\cdot \mathbf{g}_{(\nu)j}=m_{(\nu)}\,v^k_{(\nu)}\,\mathbf{g}_{(\nu)k}\cdot \mathbf{g}_{(\nu)j}=a_{(\nu)jk}\,v^k_{(\nu)}=p_{(\nu)j}$$

i

$$p_{(\nu)}\cdot\frac{\partial\,\mathbf{g}_{(\nu)}}{\delta x^k}\cdot\frac{dx^k}{dt}=p_{(\nu)}\,\Gamma^l_{kj}\,\mathbf{g}_{(\nu)l}\,\frac{dx^k_{(\nu)}}{dt}=p_{(\nu)l}\,\Gamma^l_{kj}\,\frac{dx^k_{(\nu)}}{dt}.$$

Zato dobijamo tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja ν-te dinamičke tačke sistema u obliku

$$\frac{dp_{(\nu)j}}{dt}-\Gamma^l_{kj}\,p_{(\nu)l}\,\frac{dx^k}{dt}=X_{(\nu)j}+R_{(\nu)j},$$

odnosno

$$\frac{Dp_{(\nu)j}}{dt}=X_{(\nu)j}+R_{(\nu)j}, \qquad (j=1,\ 2,\ 3;\ \forall\,\nu\in N_n), \tag{24.8}$$

a to odgovara postavljenim diferencijalnim jednačinama kretanja (24.1) ako je $\alpha=1,\dots,3n$. Uzmemo li u obzir i (23.8) diferencijalne jednačine (24.8) postaju kovarijantne i po drugom apsolutnom izvodu $\frac{D}{dt}$ tj.

$$a_{(\nu)jk}\,\frac{D^2 r^k_{(\nu)}}{dt^2}=X_{(\nu)j}+R_{(\nu)j}. \tag{24.9}$$

Opredelimo se za indekse koji će čuvati uređene triplete jednačina (24.6) ili (24.9) diferencijalne kovarijantne jednačine kretanja sistema tačaka (24.8) dobiće upravo oblik (24.1), tj.

$$\frac{Dp_i}{dt}=X_i+R_i, \qquad (i=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu;\ \forall\,\nu\in N_n) \tag{24.10}$$

a jednačine (24.9) oblik

$$a_{il}\,\frac{D^2 r^l}{dt^2}=X_i+R_i, \qquad (l=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu). \tag{24.11}$$

Za sistem koji ima n tačaka, ovih jednačina ima $3n$ pomoću kojih valja da odredimo $3n$ koordinata $r^i = r^i(x(t))$, odnosno $3n$ koordinata $x(t)$ tačaka. To je moguće ostvariti ukoliko su poznate sile $\boldsymbol{F}$ i sile reakcija $\boldsymbol{R}$. Međutim, kako sile reakcije u opštem slučaju treba da odredimo pomoću „odbačenih" veza (24.2), njih treba dodati ovom sistemu diferencijalnih jednačina kretanja (24.7), tako da zajedno sa njima čine sistem od $3n+k$ jednačina. To pruža mogućnost da se odredi i k reakcija veza (24.11).

Primetimo li da diferencijalna jednačina kretanja tačaka sistema u prisustvu holonomnih stacionarnih zadržavajućih veza obuhvataju Langražove diferencijalne jednačine prvog reda, i to u kovarijantnom obliku, onda će i put za određivanje reakcija veza ići preko množilaca veza ako su veze idealno glatke.

2. Kretanje sistema u potprostoru

Posmatramo sistem od n dinamičkih tačaka M_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ masa $m_\nu = \text{const}$, čija su kretanja ograničena vezama (24.2). Presek veza (24.2), kome inače pripadaju sve tačke M_ν, obrazuje m-dimenzioni konfiguracioni prostor R_m, $m \leqslant 3n$. Tačke $M_\nu(q) \in R_m$ poseduju impulse kretanja $\boldsymbol{p}_\nu(q)$ koji leže u tangentnom prostoru $\mathbf{R}^m$ u tački $M_\nu(q)$ na R_m. Položaj tačaka u R_m određuju koordinate (21.17). Diferencijalne jednačine kretanja svake ν-te tačke (24.5) sistema važe nezavisno od koordinatnih prostora, pa iste važe i za svaku tačku $M_\nu(q)$. Znajući da koordinatni vektori $\mathbf{g}_{(\nu)\alpha} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}$ generišu vektorski prostor $\mathbf{R}^m$, u mogućnosti smo da vektorske jednačine (24.5) projektujemo na ose tih vektora. U tom cilju razvijmo jednačine (24.5) u skladu sa (23.1), tj.

$$\frac{d}{dt}\left(m_{(\nu)} v^\alpha \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}\right) = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu, \tag{24.12}$$

ili razvijenije

$$\frac{d}{dt}\left(m_{(\nu)} v^\alpha\right) \mathbf{g}_{(\nu)\alpha} + m_{(\nu)} v^\alpha \frac{d\mathbf{g}_{(\nu)\alpha}}{dt} = \boldsymbol{F}_{(\nu)} + \boldsymbol{R}_{(\nu)}, \tag{24.13}$$

gde je

$$\frac{d\mathbf{g}_{(\nu)\alpha}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta. \tag{24.14}$$

Gledano iz obvojnog prostora u kome inače leže vektori sila $\boldsymbol{F}_\nu$ i $\boldsymbol{R}_\nu$, imamo

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}}{\partial q^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\, \mathbf{g}_{(\nu)\gamma} + b_{\alpha\beta}\, \mathbf{n}_{(\nu)} \tag{24.15}$$

gde je $\mathbf{n}_\nu$ vektor normale na potprostoru u tački M_ν, $\mathbf{n}_\nu \perp \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}$; $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ su očigledno koeficijenti povezanosti, za koje se može pokazati da su Kristofelovi simboli nad metričkim tenzorom potprostora R_m; a $b_{\alpha\beta}$ je drugi osnovni tenzor tog potprostora. Zamenom (24.15) u (24.13) dobićemo

$$m_{(\nu)}\,\mathbf{g}_{(\nu)\gamma}\frac{dv^\gamma}{dt}+m_{(\nu)}\,v^\alpha\,\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\beta\,\mathbf{g}_{(\nu)\gamma}+m_{(\nu)}\,b_{\alpha\beta}\,\mathbf{n}_{(\nu)}\,\dot{q}^\beta\,v^\alpha=\boldsymbol{F}_{(\nu)}+\boldsymbol{R}_{(\nu)} \tag{24.16}$$

Množenjem skalarno postupno vektorima $\mathbf{g}_{(\nu)\delta}$ i sabiranjem po indeksima ν dobijamo, s obzirom na (23.4),

$$a_{\delta\gamma}\left(\frac{dv^\gamma}{dt}+v^\alpha\,\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{dq^\beta}{dt}\right)=Q_\delta+R^{(\tau)}_\delta, \tag{24.17}$$

ili

$$a_{\delta\gamma}\,\frac{Dv^\gamma}{dt}=Q_\delta+R^{(\tau)}_\delta,\qquad(\gamma,\ \delta=1,\ 2,\ldots,\ m) \tag{24.18}$$

gde je $a_{\delta\gamma}$ inercijski tenzor sistema, a Q_δ kovarijantne koordinate vektora sile, koje nazivaju *generelisane sile* i jednake su

$$Q_\delta=\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{F}_{(\nu)}\cdot\mathbf{g}_{(\nu)\delta}. \tag{24.19}$$

Kovarijantne koordinate R_δ predstavljaju projekcije sila reakcije veza na ose koordinatnih vektora i jednake su

$$R^{(\tau)}_\delta=\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{R}_{(\nu)}\cdot\mathbf{g}_{(\nu)\delta}. \tag{24.20}$$

Pomnožimo li jednačine (24.16) vektorima normale $\boldsymbol{n}_{(\nu)}$ i saberemo li indeksima ν dobijamo relaciju

$$b_{\alpha\beta}\,\dot{q}^\alpha\,\dot{q}^\beta=Q^{(N)}+R^{(N)}, \tag{24.21}$$

gde su, očigledno, $Q^{(N)}$ i $R^{(N)}$ koordinate vektora sile, čije su komponente

$$Q^{(N)}\,\mathbf{n}\quad\text{i}\quad R^{(N)}\,\mathbf{n}$$

upravne na tangentni prostor $\mathbf{R}^m$.

Diferencijalne jednačine kretanja (24.18), koje možemo da napišemo u obliku

$$a_{\delta\gamma}\,\frac{D\dot{q}^\gamma}{dt}=Q_\delta+R^{(\tau)}_\delta,\qquad(\gamma,\ \delta=1,\ldots,\ m), \tag{24.22}$$

ili zbog (23.3)

$$\frac{Dp_\delta}{dt}=Q_\delta+R^{(\tau)}_\delta, \tag{24.23}$$

predstavljaju kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja holonomnog sistema u konfiguracionom potprostoru R_m. Treba primetiti da ove diferencijalne jednačine ne sadrže one komponente vektora koje su normalne na tangentnom prostoru $\mathbf{R}^m$; To pokazuje jednačina (24.21).

25. Reakcije holonomnih veza sistema

Pri posmatranju kretanja sistema tačaka u potprostoru Q_m kovarijantne diferencijalne jednačine (24.22) pokazuju da se posmatraju samo one komponente aktivnih sila i sila reakcija veza koje leže u tangentnom prostoru $\mathbf{R}^m$. Za slučaj idealnih veza reakcije u tangentnom prostoru ne postoje jer je

$$R^{(\tau)}_{\alpha}=\sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{R}_{(\nu)}\cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}=0, \tag{25.1}$$

pa se pomoću diferencijalnih jednačina (24.22) kretanja sistema u potprostoru R_m ne mogu ni određivati. Međutim, ako se izvan ovog potprostora ima u vidu jednačina (24.21) jasno je da je za određivanje koordinate $R^{(N)}$ generalisane sile reakcije $R^{(N)}=\sum_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{R}_\nu\cdot\mathbf{n}_\nu$ potrebno znati: Q_α, koordinate $q^\alpha=q^\alpha(t)$, kao i brzinu sistema $\dot{q}^\alpha=\dot{q}^\alpha(t)$ u svakom trenutku vremena. A to se upravo određuje pomoću diferencijalnih jednačina kretanja holonomnog sistema sa idealnim vezama,

$$a_{\alpha\beta}\frac{Dq^\beta}{dt}=Q_\alpha, \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ldots,\ m).$$

Prema tome, ako se traži generalisana reakcija idealnih veza pomoću jednačine (24.21), potrebno je da se koriste i ove diferencijalne jednačine kretanja. Inače za određivanje reakcija veza češće se koriste diferencijalne jednačine (24.8) — (24.11). Da bi to pokazali razmotrimo prvo prirodu i definiciju reakcije veza, a zatim izvedimo opšte formule za određivanje reakcija holonomnih skleronomnih zadržavajućih veza. Navedimo, pre svega, jedan primer holonomne bilateralne skleronomne veze, recimo

$$y_1^2+y_2^2+y^3=r^2=\text{const.}$$

gde su y_1, y_2, y_3 Dekartove pravolinijske pravougle koordinate. Ova veza može da odražava

1. klizanje tačke po nepokretnoj lopti poluprečnika $r=\text{const}$, kao i
2. kretanje sfernog klatna dužine $l=r=\text{const}$.

U prvom slučaju, poznato je, sila reakcije leži na konusu reakcije, čija se osa simetrije podudara sa normalom na sferi. To će reći da sila reakcije lopte ima jednu komponentu koja leži u tangentnoj ravni, a drugu koja je se poklapa sa normalom lopte u položaju dinamičke tačke, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^\tau+\boldsymbol{R}^N$.

Ma kako da je lopta glatka postojaće $\boldsymbol{R}^\tau$ ukoliko pri modeliranju ne zanemarimo taj vektor zbog malog modula $R^\tau=0$. Za takvu loptu matematički idealiziranu, uz dodatni pojam da se ne javlja sila trenja, reakcija ima pravac gradijenta sfere. Ako je pak reč o kretanju klatna, obešenog o fiksnoj tački pomoću tanke nerastegljive niti, reakcija veze ne obrazuje konus reakcije veze, nego se sila reakcije nalazi u koncu, tj. u pravcu gradijenta veze sfernog klatna.

Kao što primer pokazuje mi ćemo razlikovati: realne, idealizirane i idealne veze.

Za *realne veze* ili samo za veze podrazumevamo da sila reakcije leži na konusu reakcije veze, a za *idealizirane* i *idealne veze* da imaju reakciju veze proporcionalnu gradijentu prisutne veze $f=0$

$$\boldsymbol{R}=\lambda \operatorname{grad} f, \tag{25.2}$$

gde faktor proporcionalnosti λ ili množitelj veze podleže određivanju.

U skladu sa usvojenim opredeljenjem reakciju realne veze tada možemo da napišemo u obliku

$$\boldsymbol{R}=\lambda \operatorname{grad} f+\boldsymbol{R}^{(\tau)} \tag{25.3}$$

gde je $\boldsymbol{R}^{(\tau)}$ komponenta reakcije $\boldsymbol{R}$ veze $f=0$ koja leži u tangentnoj ravni veze u tački $M(x)$, a koja se javlja kao sila trenja. Ako je reč o ν-toj dinamičkoj tački sistema čije kretanje ograničavaju k veza $f_\mu(r^1, r^2, \ldots, r^{3n})=0$, pisaćemo kao u (24.4), da je

$$\boldsymbol{R}_{(\nu)}=\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \operatorname{grad} \boldsymbol{r}_\nu f_\mu+\sum_{\mu=1}^{k} \boldsymbol{R}^{(\tau)}_{(\nu)\mu}, \tag{25.4}$$

ili u koordinatnom obliku

$$R_{(\nu)j}=\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial r^j_{(\nu)}}+R^{(\tau)}_{(\nu)j}, \tag{25.5}$$

gde je $R^{(\tau)}_{(\nu)j}=\sum\limits_{\mu=1}^{k} R^{(\tau)}_{(\nu)\mu j}$. Zamenom u (24.9), sledi

$$a_{(\nu)jk} \frac{D^2 r^k_{(\nu)}}{dt^2}=X_{(\nu)j}+R^{(\tau)}_{(\nu)j}+\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial r^j_{(\nu)}}, \tag{25.6}$$

te smo dobili zajedno sa jednačinama veza (24.2) sistem od $3n+k$ jednačina za određivanje $3n$ koordinata vektora $r^i_{(\nu)}$ i k množilaca veza λ_ν. Ovde razlikujemo pojedine opšte slučajeve i to:

a) Veze su oblika:

$$r^M_{(\nu)}=\text{const}. \tag{25.7}$$

U tom slučaju diferencijalne jednačine (25.6) će biti:

$$a_{(\nu)Mk} \frac{D^2 r^k_{(\nu)}}{dt^2}=X_{(\nu)M}+R^{(\tau)}_{(\nu)M}+\sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \delta^\mu_M,$$

a odavde

$$\lambda=-m \Gamma_{ij,M} \frac{Dr^i_{(\nu)}}{dt} \frac{dx^j_{(\nu)}}{dt}-(X_{(\nu)M}+R^{(\tau)}_{(\nu)M}). \tag{25.8}$$

P r i m e r. Kretanje dinamičke tačke mase m po idealno glatkoj sferi. U tom slučaju sila trenja $R^{(\tau)}$ je jednaka nuli, $\dfrac{\partial f}{\partial r^1}=1$ jer postoji veza, saglasno podacima na 15. strani,

$$f=r_1-r=0.$$

Na osnovu relacije (5.6) i podataka na strani 26, potrebnih za ovaj primer, nalazimo da je

$$\frac{Dr^1}{dt}=0,\quad \frac{Dr^1}{dt}=r^2\dot{\varphi},\quad \frac{Dr^3}{dt}=r^2\sin^2\varphi\dot{\theta},\quad \frac{dx^1}{dt}=0,\quad \frac{dx^2}{dt}=\dot{\varphi},\quad \frac{dx^3}{dt}=\dot{\theta}$$

pa zamenom u (25.8) dobijamo da je množilac veze

$$\lambda=-(\Gamma_{22,1}\,\dot{\varphi}^2+\Gamma_{33,1}\,\dot{\theta}^2)-X_1$$

odnosno,

$$\lambda=-mr(\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2\sin^2\varphi)-X_1$$

gde je X_1 koordinata vektora aktivnih sila na poluprečniku sfere.

b) Isto tako kada su veze date u obliku koordinatnih površi

$$x^\mu=\text{const} \tag{25.9}$$

reakciju veza tražićemo u obliku (25.8) s tom razlikom da brzine tačaka budu izražane izvodima koordinata x^i, pa će biti

$$\lambda_M=\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\eta\,\delta^\mu_M=-m\,\Gamma_{ij,M}\dot{x}^i_{(\nu)}\frac{dx^j_{(\nu)}}{dt}-X_{(\nu)M}-R^{(\tau)}_{(\nu)M}. \tag{25.10}$$

c) Ukoliko su veze oblika (21.10) u najopštijem pogledu ili (24.2) diferencijalne jednačine (25.6) omogućuju određivanje množilaca veza. Ako napišemo da je

$$c_{(\nu)\mu j}=\frac{\partial f_\mu}{\partial r^j_{(\nu)}},\qquad (j=1,\ 2,\ 3;\ \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ k),\quad \forall\,\nu\in N_n$$

ili

$$c_{\mu l}=\frac{\partial f_\mu}{\partial r^l},\qquad (l=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu),$$

tada iz (25.6) i (24.11) dobijamo

$$\lambda^\sigma=c^{l\sigma}\left(a_{li}\frac{D^2r^i}{dt^2}-X_l-R^{(\tau)}_l\right) \tag{25.11}$$

pod uobičajenim uslovima da je $|c_{\mu l}|^k_k\neq 0$. Za slučaj idealnih veza to je

$$\lambda^\sigma=c^{l\sigma}\left(a_{li}\frac{D^2r^i}{dt^2}-X_l\right),\qquad \begin{array}{l}(\sigma=1,\ 2,\ \ldots,\\ i,\ l=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu)\\ \forall\,\nu\in N_n.\end{array} \tag{25.12}$$

d) Pri posmatranju kretanja u potprostoru R_m pomoću diferencijalnih jednačina kretanja (24.18) iz istih možemo da odredimo samo "tangentnu" komponentu sile reakcije veze reprezentativne tačke

$$R^{(\tau)}_\delta=a_{\delta\gamma}\frac{Dv^\gamma}{dt}-Q_\delta,\qquad (\gamma,\ \delta=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{25.13}$$

Međutim sile $R^{(\tau)}_{\sigma}$ pre se određuju transformacijom

$$R^{(\tau)}_{\sigma}=\sum_{\nu=1}^{n} R_{\nu}\cdot g_{(\nu)\sigma}=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{k} R^{(\tau)}_{(\nu)\sigma}.$$

gde se sile trenja $R^{(\tau)}_{(\nu)\sigma}$ najčešće određuju eksperimentalno. Što se tiče normalne komponente sile trenja $R^{(N)}$ reprezentativne tačke, koja je upravna na potprostor ona je određena relacijom (24.21), tj.

$$R^{(N)}=b_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}-Q^{(N)}, \tag{25.14}$$

gde je

$$Q^{(N)}=\sum_{\nu=1}^{n} F_{\nu}\cdot \mathbf{n}_{\nu} \tag{25.15}$$

generalisana sila usmerena po normali, a

$$b_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} \tag{25.16}$$

druga metrička forma potprostora R_m.

26. Kovarijantne diferencijalne jednačine nestacionarnog sistema

Pod nestacionarnim sistemom dinamičkih tačaka mi podrazumevamo sistem tačaka koje su povezane vezama zavisnim i od vremena. U cilju opšteg razmatranja mi ćemo pretpostaviti prisustvo:

a) holonomnih reonomnih bilateralnih veza

$$f_{\mu}(r_1,\ldots,r_n,t)=0, \qquad (\mu=1,\ldots,k), \tag{26.1}$$

b) neholomnih reonomnih linearnih veza oblika

$$C_{(\sigma\nu)i}\frac{Dr^{i}_{(\nu)}}{dt}+C_{(\sigma\nu)}=0, \qquad (i=1,2,3), \tag{26.2}$$

c) dinamičkih

$$m_{(\nu)}=m_{(\nu)}(t_0)-\int_{t_0}^{t}\mu_{(\nu)}(\tau)\,d\tau, \tag{26.3}$$

gde je $\mu_{(\nu)}(t)$ brzina promene mase m_{ν} tačke M_{ν}.

Pri izvođenju diferencijalnih kovarijantnih jednačina kretanja neholonomnog i reonomnog sistema promenljive mase i ovde ćemo, kao i u prethodnom poglavlju posmatrati kretanje, prvo u $3n$-dimenzionom obvojnom prostoru, ili proširenom tom prostoru od $3n+1$ dimenzije, a zatim na potprostorima.

Kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja. Kretanje ν-te tačke promenljive mase opisuju diferencijalne jednačine (18.7), tj.

$$\frac{dp_{(\nu)}}{dt}=F_{(\nu)}+P_{(\nu)}, \qquad (\nu=1,2,\ldots,n), \tag{26.4}$$

gde ν uzima vrednosti skupa tačaka sistema kojih ima n. Odstranjivanjem holonomnih veza (26.1) njihovo dejstvo zamenjujemo, kao i u (25.5), reakcijama veza

$$\boldsymbol{R}_{(\nu)}=\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu \operatorname{grad}_{r\nu} f_\mu+\sum_{\mu=1}^{k}\boldsymbol{R}^{(\tau)}_{(\nu)\mu}=\sum_{\mu=1}^{k}\boldsymbol{R}_{(\nu)\mu} \tag{26.5}$$

kao sile koju treba pridati sa desne strane jednačine (26.4).

Isto tako, kao što je poznato, tim silama reakcije treba dodati reakcije neholonomnih veza

$$\overset{*}{\boldsymbol{R}}_{(\nu)}=\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_\sigma \mathbf{C}_{\sigma(\nu)}. \tag{26.6}$$

Tako diferencijalne jednačine kretanja (26.4) tačaka sistema pišemo u vidu

$$\frac{d}{dt}(m_{(\nu)}\boldsymbol{v}_{(\nu)})=\boldsymbol{F}_{(\nu)}+\boldsymbol{P}_{(\nu)}+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu \operatorname{grad}_{r\nu} f_\mu+\sum_{\mu=1}^{k}\boldsymbol{R}^{(\tau)}_{(\nu)\mu}+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_\sigma \mathbf{C}_{\sigma(\nu)}. \tag{26.7}$$

gde su λ_μ i χ_σ množitelji veza.

U poređenju sa izvođenjem kovarijantnih diferencijalnih jednačina (24.9), odnosno (24.10), u jednačinama (26.7) javlja se u suštini novi samo taj fakt što su mase $m_\nu(t)$ dinamičkih tačaka funkcije vremena t. A to pitanje je posebno obrađeno u 17. podglavlju. Pomnožimo li skalarno redom diferencijalne jednačine (26.7) koordinatnim vektorima $\mathbf{g}_{(\nu)i}$ dobićemo i-tu kovarijantnu diferencijalnu jednačinu kretanja ν-te dinamičke tačke, i to

$$\frac{d}{dt}(m_{(\nu)}\boldsymbol{v}_{(\nu)}\cdot\mathbf{g}_{(\nu)i})-m_{(\nu)}\boldsymbol{v}_{(\nu)}\frac{d\mathbf{g}_{(\nu)i}}{dt}=$$

$$=\left(\boldsymbol{F}_{(\nu)}+\boldsymbol{P}_{(\nu)}+\sum_{\nu=1}^{N}\lambda_\mu \operatorname{grad}_{r\nu} f_\mu+\sum_{\mu=1}^{k}\boldsymbol{R}^{(\tau)}_{(\nu)\mu}+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\mathbf{C}_{\sigma(\nu)}\chi_\sigma\right)\mathbf{g}_{(\nu)i}.$$

Kako je

$$\boldsymbol{v}_{(\nu)}=\frac{Dr^j_{(\nu)}}{dt}\mathbf{g}_{(\nu)j},\qquad (j=1,\ 2,\ 3)$$

$$\frac{d\mathbf{g}_{(\nu)i}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{g}_{(\nu)i}}{\partial x^k_{(\nu)}}\frac{dx^k}{dt}=\Gamma^j_{ik}\mathbf{g}_{(\nu)j}\frac{dx^k}{dt},\qquad (k=1,\ 2,\ 3)$$

biće s obzirom na (17.4)

$$\frac{d}{dt}\left(a_{(\nu)ij}\frac{Dr^j_{(\nu)}}{dt}\right)-a_{(\nu)jl}\Gamma^j_{ik}\frac{Dr^l_{(\nu)}}{dt}\frac{dx^k}{dt}=$$

$$=X_{(\nu)i}+P_{(\nu)i}+R^{(\tau)}_{(\nu)i}+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial r^i_{(\nu)}}+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_\sigma C_{(\nu)i}$$

gde su očigledno,

$$X_{(\nu)i}=\mathbf{F}_{(\nu)}\cdot\mathbf{g}_{(\nu)i},\quad P_{(\nu)i}=\mathbf{P}_{(\nu)}\cdot\mathbf{g}_{(\nu)i},\quad R^{(\tau)}_{(\nu)i}=\sum_{\mu=1}^{k}\mathbf{R}^{(\tau)}_{(\nu)\mu}\cdot\mathbf{g}_{(\nu)i}$$

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial r^i_{(\nu)}}=\operatorname{grad}_{r_\nu} f_\mu\cdot\mathbf{g}_{(\nu)i}\quad \text{i}\quad C_{\sigma(\nu)i}=\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_\sigma\mathbf{C}_{(\nu)(\sigma)}\cdot\mathbf{g}_{(\nu)i}.$$

Uzmimo li još u obzir osobinu (17.12) i izraz za reaktivnu silu (18.14) dobićemo sistem od $3n$ diferencijalnih jednačina kretanja

$$a_{(\nu)ij}\frac{D^2 r^j_{(\nu)}}{dt^2}=X_{(\nu)i}+\psi_{(\nu)i}+R^{(\tau)}_{(\nu)i}+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial r^i_\nu}+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_\sigma C_{(\nu)\sigma i},\tag{26.8}$$

gde je $\psi_{(\nu)i}$ reaktivna sila ν-te dinamičke tačke.

Ako pak usvojimo indeksə kao i u (21.16), tj. $i=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu$; $\forall\nu\in N_n$, ove diferencijalne jednačine kretanja neholonomnog reonomnog sistema tačaka promenljive mase svodimo na traženi kovarijantni oblik:

$$a_{kl}\frac{D^2 r^l}{dt^2}=X_k+\psi_k+R^{(\tau)}_k+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial r^k}+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_\sigma C_{\sigma k}.\tag{26.9}$$

$$(k,\ l=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu;\ \forall\nu\in N^n).$$

Ove jednačine zajedno sa vezama (26.1), (26.2) i (26.3) određuju kretanje posmatranog sistema.

Za slučaj da su mase $m_\nu=\text{const}$, a holonomne veze idealne diferencijalne jednačine (26.9) se svode na prostiju strukturu:

$$a_{kl}\frac{D^2 r^l}{dt^2}=X_k+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial r^k}+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_\sigma C_{\sigma k}.\tag{26.10}$$

Ovakav oblik diferencijalnih jednačina kretanja je kovarijantan u odnosu na krivolinijske sisteme koordinata. Jednačine (26.9) predstavljaju kretanje pojedinih tačaka sistema M_ν. Međutim isti oblik kovarijantnih diferencijalnih jednačina kao (26.10) ćemo da dobijemo ako posmatramo kretanje centra inercije sistema. U tom slučaju saberimo po ν sve diferencijalne jednačine (26.8) pa, s obzirom na (21.15) i (23.9), možemo da pišemo

$$a_{ij}\frac{D^2 r^j}{dt}=X_i+\psi_i+R^{(\tau)}_i+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}\chi_\mu\frac{\partial f}{\partial r^i_\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_\sigma C_{(\nu)\sigma i},\tag{26.11}$$

$$(j,\ i=1,\ 2,\ 3),$$

gde su sada:

$$r^i=\sum_{\nu=1}^{n}r^i_\nu,\quad R^{(\tau)}_i=\sum_{\nu=1}^{n}R^{(\tau)}_{(\nu)i},\quad X_i=\sum_{\nu=1}^{n}X_{(\nu)i},$$

$$a_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n}a_{(\nu)ij}=\sum_{\nu=1}^{n}m_{(\nu)}\mathbf{g}_{(\nu)i}\cdot\mathbf{g}_{(\nu)j}.$$

Kao što se vidi kovarijantni oblik diferencijalnih jednačina (26.11) i (26.9) je isti, samo se mora voditi računa o dimenzijama prostora u kome se posmatra kretanje sistema. Dok je kod jednačina (26.11) osnovni tenzor $\sum_{\nu} m_{(\nu)}\, \mathbf{g}_{(\nu)i}\cdot \mathbf{g}_{(\nu)j}$ dotle kod jednačina (26.9) taj tenzor je $m_{(\nu)}\, \mathbf{g}_{(\nu)i}\cdot \mathbf{g}_{(\nu)j}$. Prema tome i koeficijenti povezanosti prostora su različiti.

Kretanje neholonomnog sistema na potprostorima

Prisustvo holonomnih veza (24.2), pokazalo se u (24.16), (24.18) i (24.20), smanjilo je broj diferencijalnih jednačina kretanja sistema za broj veza. Ako za transformaciju posmatranog nestacionarnog neholonomnog sistema sada uzmemo samo u obzir holonomne veze (26.1) i dinamičke (26.3) mi ćemo, slično postupku za izvođenje jednačina (24.20) izvesti i kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja neholonomnog sistema s tim što pri tom treba voditi računa o reonomnosti veza. Kao što je sve češće uobičajeno u analitičkoj mehanici mi ćemo za vreme uzeti nultu nezavisnu koordinatu $q^{0}=t=x^{0}$, te na taj način nestacionarne holonomne veze (26.1) svesti na oblik veza (21.10) kod kojih funkcije f_{μ} zavise od $3n+1$ koordinate, tj.

$$f_{\mu}(x^{0}, x^{1}, \ldots, x^{3n})=0, \qquad (\mu=1, \ldots, k), \tag{26.12}$$

pa koordinate vektora položaja (21.19) reprezentativne tačke sistema zavise od $3n+1-k$ koordinate q. Tako se i dimenzija potprostora proširuje na $m+1$, te kretanje sada posmatramo na potprostorima R_{m+1}. Koordinatni vektori na tom potprostoru za ν-tu dinamičku tačku $M_{\nu}(q)$ su:

$$\mathbf{g}_{(\nu)\alpha}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\nu}}{\partial q^{\alpha}}\in \mathbf{R}^{m}, \qquad (\alpha=0, 1, \ldots, m), \tag{26.13}$$

među kojima je i $\mathbf{g}_{(\nu)0}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_{\nu}}{\partial t}$. Pomnožimo li diferencijalne jednačine (26.7) koordinatnim vektorima (26.13) i saberemo po ν dobićemo $m+1$ diferencijalnu jednačinu kretanja sistema.

Zaista,

$$\frac{d}{dt}(m_{(\nu)}\boldsymbol{v}_{(\nu)}\cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha})-m_{(\nu)}\boldsymbol{v}_{(\nu)}\cdot\frac{\partial \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}}{\partial q^{\beta}}\dot{q}^{\beta}=$$

$$=\boldsymbol{F}_{(\nu)}\cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}+\boldsymbol{P}_{(\nu)}\cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}+\mathbf{g}_{(\nu)\alpha}\cdot\sum_{\mu=1}^{k}\boldsymbol{R}_{(\nu)\mu}+\mathbf{g}_{(\nu)\alpha}\cdot\sum_{\sigma=1}^{k}\chi_{\sigma}\mathbf{C}_{\sigma(\nu)}, \tag{26.14}$$

gde je $\boldsymbol{R}_{(\nu)\mu}$ određeno izrazom (26.5).

Kako je u ovom proširenom potprostoru

$$\boldsymbol{v}_{(\nu)}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_{(\nu)}}{\partial q^{\gamma}}\dot{q}^{\gamma}=\dot{q}^{\gamma}\mathbf{g}_{(\nu)\gamma} \qquad (\gamma=0, 1, \ldots, m)$$

a

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}}{\partial q^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}\, \mathbf{g}_{(\nu)\delta} + b_{\alpha\beta}\, \mathbf{n}_{(\nu)};\quad \mathbf{g}_{(\nu)\alpha} \perp \mathbf{n}_{(\nu)}$$

levu stranu prethodnih jednačina (26.14) posle sabiranja po ν možemo da uređujemo na sledeći način:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{d}{dt} (m_{(\nu)}\, \mathbf{v}_{(\nu)} \cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}) = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_{(\nu)}\, \mathbf{g}_{(\nu)\gamma} \cdot \mathbf{g}_{(\nu)}\dot{q}^\gamma =$$

$$= \frac{d}{dt}\, a_{\gamma\alpha}\dot{q}^\gamma = \frac{dp_\alpha}{dt},$$

gde je

$$a_{\gamma\alpha} = \sum_{\nu=1}^{N} m_{(\nu)}(t)\, \frac{\partial \mathbf{r}_{(\nu)}}{\partial q^\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{(\nu)}}{\partial q^\alpha} = a_{\gamma\alpha}(q^0, q^1, \ldots, q^n) \tag{26.15}$$

inercijski tenzor posmatranog sistema dinamičkih tačaka;

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_{(\nu)}\, \mathbf{v}_{(\nu)} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}}{\partial q^\beta}\, \dot{q}^\beta = \sum_{\nu=1}^{N} m_{(\nu)}\, \mathbf{g}_{(\nu)\gamma} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}}{\partial q^\beta}\, \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_{(\nu)}\, \mathbf{g}_{(\nu)\gamma} \cdot \mathbf{g}_{(\nu)\delta}\, \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}\, \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = a_{\gamma\delta}\, \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}\, \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}\, p_\delta\, \frac{dq^\beta}{dt}$$

gde su $\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}$ Kristifelovi simboli nad tenzorom (26.15). Uzimajući u vidu ova svođenja, kao i to da sa desne strane dobijamo kovarijantne koordinate vektora sile:

$$\left\{ \begin{aligned} &Q_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_{(\nu)} \cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}, \quad R_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\sum_{\nu=1}^{k} \mathbf{R}_{(\nu)\mu} \right) \cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha} \\ &P_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{P}_{(\nu)} \cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha}, \quad C_{(\sigma)\alpha} = \mathbf{C}_{(\sigma)\nu} \cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha} \end{aligned} \right. \tag{26.16}$$

jednačine (26.14) dobijaju traženi oblik

$$\frac{dp_\alpha}{dt} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}\, p_\delta\, \frac{dq^\beta}{dt} = Q_\alpha + P_\alpha + R_\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha},$$

odnosno

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha + P_\alpha + R_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha}. \tag{26.17}$$

$$(\alpha = 0,\ 1, \ldots, m).$$

Ovih $m+1$ diferencijalnih jednačina predstavljaju kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja reonomnog sistema tačaka promenljive mase sa holonomnim i neholonomnim vezama.

Kod ovakvog nestacionarnog sistema čije su i mase tačaka i veze zavisne od vremena potrebno je uočiti razliku između osnovnog tenzora (26.15) i tenzora (17.4). I to ne samo zbog broja koordinata, nego zbog načina zavisnosti od vremena. To otuda što su kod reonomnog sistema i parcijalni izvodi $\frac{\partial r_{(\nu)}}{\partial q^\alpha}$ u izrazu (26.15) funkcije vremena, dok kod sistema sa skleronomnim vezama to nije slučaj, nego se u strukturi osnovnog tenzora javlja vreme samo posredstvom masa [40].

Zbog toga ako su veze skleronomne, a mase tačaka funkcije vremena t, diferencijalne jednačine kretanja sistema (26.17) zadržavaju isti oblik samo što indeksi uzimaju vrednosti od 1 do m, tj.

$$\frac{Dp_{\beta'}}{dt}=Q_{\beta'}+P_{\beta'}+R_{\beta'}+\sum_{\mu=1}^{k_1}\chi_{(\sigma)\beta'}, \qquad (26.18)$$

$$(\beta'=1,\ldots,m).$$

U slučaju skleronomnih veza ako mase zavise od vremena apsolutni izvod po vremenu osnovnog tenzora $a_{\alpha\beta}$ različit je od nule i jednak je, kao i u slučaju (17.13),

$$\frac{Da_{\beta'\gamma'}}{dt}=\frac{\partial a_{\beta'\gamma'}}{\partial t}, \qquad (\beta'\ \gamma'=1,\ 2,\ldots,m), \qquad (26.19)$$

gde ovim parcijalnim izvodom predstavljamo izraz

$$\frac{\partial a_{\beta'\gamma'}}{\partial t}=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{dm_{(\nu)}}{dt}\frac{\partial r_{(\nu)}}{\partial q^{\beta'}}\cdot\frac{\partial r_{(\nu)}}{\partial q^{\gamma'}}. \qquad (26.20)$$

I u slučaju reonomnih veza ako se posmatra kretanje u $\mathbf{R}^{m+1}$ relacije (26.19) i (26.20) biće očuvane. U protivnom ako se kretanje reonomnog sistema posmatra na potprostoru R_m struktura izvoda (26.19) postaje kud i kamo složenija. Pri tim činjenicama i

$$p_\alpha=a_{\alpha\beta}\,\dot q^\beta, \qquad (\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ldots,m), \qquad (26.21)$$

diferencijalne jednačine (26.17), kao i (26.18), svode se na

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot q^\beta}{dt}=Q_\alpha+\psi_\alpha+R_\alpha+\sum_{\sigma=1}^{N}\chi_{(\sigma)}\,C_{(\sigma)\alpha}, \qquad (26.22)$$

gde je

$$\psi_\alpha=P_\alpha-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\,\dot q^\beta, \qquad (\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ldots,m),$$

reaktivna sila posmatranog sistema. Iz jednačina (26.7) od kojih smo počeli izvođenje jednačina (26.22), iz (18.8) i (18.10) vidi se da je

$$\boldsymbol{P}_\nu=\dot m_{(\nu)}(t)\,\mathbf{u}_{(\nu)}=\mu_{(\nu)}(t)\,u^{\beta}_{(\gamma)}\cdot\mathbf{g}_{(\nu)\beta}$$

pa je, s obzirom na (26.16),

$$P_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \mu_{(\nu)}(t)\, \mathbf{g}_{(\nu)\beta} \cdot \mathbf{g}_{(\nu)\alpha} u^\beta = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} u^\beta. \tag{26.23}$$

Zamenom u ψ_α dobijamo konačan izraz i za sile

$$\psi_\alpha = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} (u^\beta - \dot{q}^\beta), \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, m). \tag{26.24}$$

Kovarijantne diferencijalne jednačine (26.22) lako transformišemo na kontravarijantnu formu. Kompozicijom pomoću kontravarijantnog tenzora $a^{\alpha\gamma}$ slediće

$$\frac{D\dot{q}^\gamma}{dt} = Q^\gamma + \psi^\gamma + R^\gamma + \sum_{\sigma=1}^{N} \chi_{(\sigma)} C^{\gamma}_{(\sigma)}, \tag{26.25}$$

gde su Q^γ, ψ^γ, R^γ, $\chi_{(\sigma)} C^{\gamma}_{(\sigma)}$ kontravarijantne koordinate odgovarajućih sila iz jednačina (26.22).

Ako su kod nestacionarnog posmatranog sistema mase tačaka $m_{(\nu)}$ konstantne, sile (26.23) i (26.24) su jednake nuli, pa se jednačine (26.17) svode na oblik

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha + R_\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha}, \tag{26.26}$$

a jednačine (26.22) na

$$a_{\alpha\beta} \frac{Dq^\beta}{dt} = Q_\alpha + R_\alpha + \sum_{\sigma=1}^{N} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha}, \tag{26.27}$$

$$(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, m).$$

Ukoliko su holonomne veze skleronomne i idealne, reakcije veza R_α su jednake nuli, pa ove diferencijalne jednačine dobijaju još prostiji oblik

$$\frac{Dp_{\alpha'}}{dt} = Q_{\alpha'} + \sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha'}, \tag{26.28}$$

ili $$(\alpha' = 1, \ldots, m)$$

$$a_{\alpha'\beta'} \frac{D\dot{q}^{\beta'}}{dt} = Q_{\alpha'} + \sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha'}. \tag{26.29}$$

Za holonomni skleronomni sistem tačaka diferencijalne jednačine kretanja svode se na oblik (24.1), jer ne postoje reakcije veza $\sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha}$. Inače za reonomni sistem, čak i ako su holonomne veze idealne, reakcije veza ne iščezavaju iz diferencijalnih jednačina kretanja. Zaista, analiziramo li reakcije veza (26.5) pri njihovom preslikavanju u generalisane sile reakcija veza (26.16) na potprostoru R_{m+1}, doći ćemo do jasnijeg zaključka. Zamenimo sile (26.5) u izraze (26.16) za R_α, tj.

$$R_\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{k} (\lambda_\mu \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\mu + R_{(\nu)\mu}) \cdot g_{(\nu)\alpha}. \tag{26.30}$$

Prvih m koordinata $R_{\alpha'}$ će biti

$$R_{\alpha'} = \sum_{\nu=1}^{n} R^{(\tau)}_{(\nu)} \cdot g_{(\nu)\alpha'} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{k} R^{(\tau)}_{(\nu)\mu} \cdot g_{(\nu)\alpha'}, \tag{26.31}$$

s obzirom da je $\sum_\nu \sum_\mu \lambda_\mu \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\mu \cdot g_{(\nu)\alpha} = 0$. Međutim nulta koordinata

$$R_0 = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{k} (\lambda_\mu \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\mu + R^{(\tau)}_{(\nu)\mu}) \cdot g_{(\nu)o} \tag{26.32}$$

sadrži, kao što se vidi, komponente reakcija $R^{(\tau)}_{(\nu)\mu} \in \mathbf{R}^m$ i komponente $\lambda_\mu \operatorname{grad}_{r_\nu} f_\mu \perp \mathbf{R}^m$. Tako, čak i kad su holonomne veze idealne, za koje su tangentna koordinata reakcija

$$R^{(\tau)}_0 = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{k} R_{(\nu)\mu} \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial t}, \qquad \left(g_{(\nu)0} = \frac{\partial r_\nu}{\partial t}\right), \tag{26.33}$$

jednaka nuli, postoji reakcija veza

$$R_0 = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{k} \chi_\mu \operatorname{grad}_{r_\nu} \cdot \frac{\partial r_\nu}{\partial t}, \tag{26.34}$$

koja odgovara nultoj koordinati $q^0 = t$.

Na taj način kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja (26.27), pri dejstvu idealnih holonomnih veza, za koje je $R^{(\tau)}_\alpha = 0$, biće

$$a_{\alpha\beta} \frac{Dq^\beta}{dt} = Q_\alpha + \psi_\alpha + R_\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha}, \tag{26.35}$$

gde su sve koordinate $R_1 = R_2 = \cdots = R_m$ jednake nuli, izuzev

$$R_0 \neq 0. \tag{26.36}$$

27. Opšti apsolutni integrali sistema

Pod naslovnim pojmom *Opšti apsolutni integrali sistema* ovde podrazumevamo svaki integral kovarijantnih diferencijalnih jednačina kretanja sistema dinamičkih jednačina koji je dobijen za neke opšte uslove, a da u raznim sistemima koordinata istog prostora zadržava jedan te isti oblik, pri čemu se integralenje svodi do nepoznatog integralnog kovarijantno-konstantnog tenzora.

Pod istim ovim naslovom obuhvatamo i invarijantne integrale do kojih možemo da dođemo pomoću apsolutnog, odnosno kovarijantnog integrala tenzora.

Integral energije sistema. Posmatrajmo sistem kovarijantnih diferencijalnih jednačina kretanja (26.22) u cilju određivanja njihovih apsolutnih integrala ako takvi postoje i ako se mogu odrediti našim pristupom.

Pretpostavimo da generalisane sile Q_α imaju potencijal sila $\Pi = \Pi(q^0, \ldots, q^m)$, te da je $Q_\alpha = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}$. Diferencijalne jednačine kretanja (26.22) u tom slučaju su

$$a_{\alpha\beta}\frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(u^\beta - \dot{q}^\beta) + R_\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha}. \tag{27.1}$$

Pomnožimo ovaj sistem jednačina diferencijalima $\dot{q}^\alpha dt = dq^\alpha$ tako da je

$$a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha D\dot{q}^\beta = -d\Pi + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(u^\beta - \dot{q}^\beta)\, dq^\alpha + R_\alpha dq^\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha}. \tag{27.2}$$

Tom kompozicijom sveli smo sistem od $m+1$ diferencijalne jednačine (27.1) na jednu jedinu invarijantnu diferencijalnu jednačinu (27.2), čije rešenje predstoji da tražimo. Da bi postojao integral jednačine (27.2) uslovićemo da bude integrabilan svaki združeni*) sabirak.

Integral $\int a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha D\dot{q}^\beta$ pri uslovu (26.19) ne može se kvadraturom izračunati. Isti slučaj i sa integralom $\displaystyle\int \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(u^\beta - \dot{q}^\beta)\, dq^\beta$. Međutim, za slučaj da je

$$u^\beta = \frac{1}{2}\dot{q}^\beta \tag{27.3}$$

oba navedena integrala mogu se svesti na:

$$\int a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha D\dot{q}^\beta - \int \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}(u^\beta - \dot{q}^\beta)\, dq^\alpha = \int D\left(\frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\right),$$

jer je u skladu sa (26.19)

$$D\left(\frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot{q}^\beta dq^\alpha + a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha D\dot{q}^\beta$$

Imajući u vidu (P1.11) odavde sledi da je

$$\hat{\int} D\left(\frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\right) = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + A_0, \qquad (A = \text{const.}). \tag{27.4}$$

---

*) Po združenim sabirkom podrazumevamo zbir povezan indeksima sabiranja, na primer $R_\alpha dq^\alpha = R_0 dq^0 + R_1 dq^1 + \cdots + R_n dq^m$

Na isti način dobijamo,

$$\int d\Pi = \Pi + B_0, \qquad (B_0 = \text{const}). \tag{27.5}$$

Integral $\int R_\alpha dq^\alpha$ označimo slovom S, tj.

$$S = \int R_\alpha dq^\alpha = \int R_\alpha \dot{q}^\alpha dt. \tag{27.6}$$

Poslednji združeni sabirak

$$\sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)\alpha} dq^\alpha$$

jednak je nuli pod uslovom da su neholonomne veze (26.2) oblika $C_{(\sigma)\alpha'} dq^{\alpha'} + C_{(\sigma)0} dt = 0$, $(\alpha' = 1, 2, \ldots, m)$.

Prema tome, za uslove (27.3) i (26.2), kao i uslove egzistencije potencijala $\Pi(q^0, \ldots, q^n)$, tj.

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial q^\beta}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}\right) = 0,$$

zbir integrala (27.4), (27.5) i (27.6) čine integral diferencijalne jednačine (27.2) i to

$$\frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \Pi = S + h, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, m) \tag{27.7}$$

gde je $h = \text{const.} = A_0 + B_0$, a $\frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = T = \frac{1}{2} a_{\alpha'\beta'} \dot{q}^{\alpha'} \dot{q}^{\beta'} + a_{\alpha' 0} \dot{q}^{\alpha'} \dot{q}^0 + \frac{1}{2} a_{00} \dot{q}^0 \dot{q}^0 = T_2 + T_1 + T_0$ kinetička energija reonomnog sistema; $\Pi = \Pi(q^0, \ldots, q^m)$ je opšti reonomni potencijal.

U slučaju da je $S = 0$, dobijamo integral energije

$$T + \Pi = h \tag{27.8}$$

za nestacionarni potencijalni sistem.

Potpunija analiza relacije (27.7) sa mehaničke tačke gledišta ukazuje da se u opštem slučaju ne može odrediti (27.6) kao prvi integral, pa ni opšta relacija (27.7) ne predstavlja prvi integral diferencijalnih jednačina (27.1.) Samo za posebne sisteme možemo da dobijemo prve integrale, koji se javljaju kao posledica opšte relacije (27.7) koja u integralnom obliku čini *zakon energije nestacionarnog dinamičkog sistema.*

1. Za holonomni reonomni sistem tačaka konstantne mase postoji prvi integral energije:

a) ako je Q_0 jednako nuli, $Q_0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$;

b) ako je Q_0 integrabilna funkcija vremena, $Q_0 = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial t} = Q_0(t)$.

U slučaju pod a) integral (27.7) se svodi na

$$T + \Pi = \int R_0 \, dt + \text{const.}, \tag{27.9}$$

gde je R određeno izrazom (36.34), a $T = T_2 + T_1 + T_0$ je kinetička energija čiji su sabirci

$$T_2 = a_{\alpha' \beta'} \dot{q}^{\alpha'} \dot{q}^{\beta'}, \qquad (\alpha', \beta' = 1, 2, \dots, m), \tag{27.10}$$

$$T_1 = a_{0\beta'} \dot{b}^{\beta'}, \tag{27.11}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} a_{00}. \tag{27.12}$$

Diferencijalna jednačina kretanja sistema (26.35) u kojoj figuriše funkcija R_0 za ovaj slučaj pod a) je

$$a_{0\beta} \frac{D\dot{q}^\beta}{dt} = Q_0 + R_0 = R_0, \qquad (Q_0 = 0). \tag{27.13}$$

Zamenom R_0 iz ove diferencijalne jednačine u (27.6) lako dobijamo integral

$$S = \int R_0 \, dt = \int a_{0\beta} D\dot{q}^\beta = \int D(a_{0\beta} \dot{q}^\beta) =$$

$$= \int D(a_{0\beta'} \dot{q}^{\beta'} + a_{00}) = \hat{\int} D(T_1 + 2T_0) = T_1 + 2T_0 + \text{const.}$$

Uzmemo li u obzir ovaj integral i sabirke (27.10), (27.11) i (27.12) kinetičke energije T, iz (27.9) sledi prvi integral

$$T_2 - T_0 + \Pi = \text{const.} \tag{27.14}$$

Za slučaj pod b) za koji je $Q_0 = Q_0(t)$ iz (27.13) sledi da je

$$R_0 = a_{0\beta} \frac{D\dot{q}^\beta}{dt} - Q_0(t),$$

pa intengral (27.6) postoje

$$S = T_2 + 2T_0 - \int Q_0(t) \, dt =$$

$$= T_1 + 2T_0 - U(t) + \text{const.}$$

Zamenom u (27.9) dobijamo integral energije u obliku

$$T_2 - T_0 + \Pi + U(t) = \text{const.} \tag{27.15}$$

gde je $U(t) = \int Q_0(t) \, dt$.

2. Ako su holonomne veze skleronomne i idealne; neholonomne veze linearne, skleronomne te i homogene $C_{\sigma\alpha'} q^{\alpha'} = 0$, a mase tačaka sistema konstantne, iščezava $m+1$. diferencijalna jednačina kretanja koja odgovara koordinatnom vektoru $g_{(v)0}$, a sa njom i funkcija R_0, pa će S biti jednako nuli ako je i $Q_0 = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$. Pod tim uslovima važi prvi integral (27.8) koji predstavlja *zakon o održanju mehaničke energije.*

3. U klasičnoj mehanici kretanje reonomnog holonomnog sistema tačaka konstantne mase posmatra se uglavnom na potprostorima $R_m \subset R_{m+1}$. U tom slučaju ako su reonomne holonomne veze idealne integral (27.6) je indentički jednak nuli. Međutim, tada je inercijski tenzor zavisan od $m+1$ koordinate i to od m koordinata $q^{\alpha'}$ i vremena t, a prostor je m-dimenzioni. Zato u tom potprostoru R_m apsolutni izvod inercijskog tenzora nije jednak nuli, pa se od (27.2) do (27.4) ne može doći ako inercijski tenzor $a_{\alpha\beta}$ zavisi od vremena t. Saglasno tome, da bi postojao integral (27.4), a prema tome i integral

$$T_2 - T_0 + \Pi(q) = \text{const.} \tag{27.16}$$

potrebno je da inercijski tenzor ne zavisi od vremena, te da bude

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

4. Za sve uslove iz prethodne tačke i uz dodatni uslov da je $\dfrac{\partial T}{\partial t} = P'(t)$ slediće integral oblika (27.15), s tim što ćemo umesto funkcije U, koja je poticala od potencijalne energije, imati funkciju $P(t)$ koja, kako se vidi, potiče od kinetičke energije, i to

$$T_2 - T_0 + \Pi = P(t) - \text{const.} \tag{27.17}$$

Kovarijantno konstantni impulsi kretanja

Za slučaj kada su mase dinamičkih tačaka sistema konstantne, $m_v = \text{const.}$, iz diferencijalnih jednačina kretanja (26.27) možemo da dobijemo $m+1$ apsolutni integral pod uslovom da je zbir svih aktivnih sila reakcija veza jednak nuli, tj.

$$Q_\alpha + R_\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} C_{(\sigma)\alpha} = 0.$$

Za taj statički slučaj vidimo da je apsolutni diferencijal vektora impulsa kretanja jednak nuli

$$Dp_\alpha = dp_\alpha - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} p_\gamma \, dq^\beta = 0,$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots, m).$$

Primenom apsolutnog integrala tenzora (P1.4) dobijamo da su svi impulsi kretanja

$$p_\alpha = A_\alpha, \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, m). \tag{27.18}$$

Smanjenje broja dimenzija prostora od $m+1$ na m nema bitnog uticaja na dobijanje istim postupkom apsolutnih integrala (27.18). Kako ne postoji opšti postupak za određivanje integralnog kovarijantno konstantnog vektora A_α na potprostorima R_{m+1} to ćemo se ovde zadovoljiti relacijom (27.18). Za specijalan prost slučaj potprostora R_m u kojem su Kristifelovi simboli jednaki nuli, koordinate vektora A_α su konstante, a u slučaju da je R_m euklidski prostor, vektor A_α je paralelno prenošljiv vektor koga određujemo pomoću dvotačkastog tenzora (P2.6) kao i u slučaju (12.14)

Do takvog stepena određenosti, što nije lišeno realnog smisla, možemo da odredimo širu klasu apsolutnih integrala kovarijantnih diferencijalnih jednačina kretanja sistema.

Neki kovarijantni integrali

Neka su ponovo mase tačaka konstantne, $m_{(\nu)}=\text{const}$. Tada je $\psi_i=0$. Ne gubeći mnogo od opštosti u smislu našeg razmatranja, pretpostavimo da su date veze skleronomne, pri čemu se diferencijalne jednačine (26.9) u formi ne pojednostavljuju i napisaćemo ih prema (6.7) u obliku

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{D\rho_i}{dt}\right)=X_i+R_i^{(\tau)}+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial r^i}+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_{(\sigma)}C_{(\sigma)i}, \tag{27.19}$$

$$(i=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu;\ \forall\,\nu\in N_n).$$

Ako je moguće uravnoteženje sila trenja holonomnih veza i reakcija neholonomnih veza, tj.

$$R_i^{(\tau)}+\sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial r^i}+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_{(\sigma)}C_{(\sigma)i}=0 \tag{27.20}$$

i ako su aktivne sile $\mathbf{F}_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,N)$ konstantni vektori, pa koordinate vektora sile

$$X_i=X_i(x^{3\nu-2},\ x^{3\nu-1},\ x^{3\nu}),\qquad \begin{pmatrix}(i=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu;\\ \forall\,\nu\in N_n\end{pmatrix}$$

čine kovarijantno konstantni vektor, diferencijalne jednačine (27.19)

$$D\frac{D\rho_i}{dt}=X_i dt, \tag{27.21}$$

možemo da integralimo. Kako je apsolutni diferencijal skalara jednak običnom diferencijalu, pisaćemo

$$\hat{\int} D\left(\frac{D\rho_i}{dt}\right)=\hat{\int} X_i\,Dt. \tag{27.22}$$

Kako je X_i kovarijantno konstantni vektor, tj. $DX_i=0$, biće

$$\hat{\int} X_i Dt=X_i\hat{\int} Dt=X_i t+A_i$$

pa iz (27.22) sledi

$$\frac{D\rho_i}{dt}=X_i t+A_i, \qquad \begin{pmatrix} i=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu \\ \forall \nu\in N_n \end{pmatrix}. \tag{27.23}$$

gde je A_i kovarijantno konstantni integralni vektor, koga određujemo, kao i u poglavlju 12. Na sličan način mogu da se dobiju kovarijantni integrali za sistem tačaka opisanih diferencijalnim jednačinama kretanja (27.19), kao za kretanje pojedine tačke sistema što je opisano u poglavlju 12 s tim što osnovni tenzor u ovom slučaju je (22.16).

28. Kretanje sistema u faznom prostoru

Fazni prostor. U skladu sa definicijama datih u 15. poglavlju pod pojmom *fazni prostor* podrazumevamo uniju Φ_{2m} skupa $q=\{q^1, \ldots, q^m\}$ koordinata q^α reprezentativne tačke $M(q)\in R_m$ i skupa $p=\{p_1, \ldots, p_m\}$ kovarijantnih koordinata vektora impulsa kretanja $\mathbf{p}\in\mathbf{R}^m$. To su impulsi kretanja sistema p_α u tački $M(q)\in R_m$. Ako se uzme vreme t kao koordinata q^0, $q^0=t$, fazni prostor se proširuje za jednu dimenziju pa se naziva *prošireni fazni prostor*. Za tako prošireni $2m+1$ dimenzioni fazni prostor $\Phi_{2m+1}=\{q^0, q^1, \ldots, q^m; p_1, \ldots, p_m\}$ često se kaže *prostor stanja* s obzirom da određuje stanje kretanja $q^\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$ sistema u svakom trenutku vremena t. Takav prostor odražava kretanje skleronomnog sistema na m-dimenzionim potprostorima R_m. Međutim, kretanju reonomnog sistema, kao što smo videli u prethodnom poglavlju, odgovara $m+1$ dimenzioni prostor $\mathbf{R}^{m+1}$ u kojem vektor impulsa kretanja ima $m+1$ koordinatu $p_0, p_1, \ldots, p_m$, koje odgovaraju generalisanim nezavisnim koordinatama $q^0, q^1, \ldots, q^m$ gde je q^0 vreme t, $q^0=t$. Dakle stanju kretanja reonomnog sistema odgovara $2m+2$ *dimenzioni fazni prostor* Φ_{2m+2}. Zato se i ovaj prostor može da nazove prostor stanja. Bitnija od naziva je činjenica o kakvom se mehaničkom sistemu radi, te koliko ima nezavisnih impulsa kretanja p_α. Zato ćemo mi u daljem tekstu pod pojmom fazni prostor podrazumevati sve navedene fazne prostore s tim što ćemo pri tom isticati dimenziju prostora.

Kretanje sistema u faznom prostoru opisujemo pomoću $2m$ ili $2m+2$ diferencijalnih jednačina prvog reda, zavisno od toga da li se posmatra prostor Φ_{2m} ili Φ_{2m+2}, od kojih je pola u kontravarijantnom, a pola u kovarijantnom obliku. To su u stvari diferencijalne jednačine kretanja sistema (26.17) kojima se pridružuju izrazi za impulse kretanja (26.21) u rešenom obliku po generalisanim brzinama. Tako za kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja imamo

$$\frac{dq^\alpha}{dt}=a^{\alpha\beta}p_\beta, \tag{28.1}$$

$$\frac{Dp_\alpha}{dt}=Q_\alpha+P_\alpha+R_\alpha+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_{(\sigma)}C_{(\sigma)\alpha}, \tag{28.2}$$

$(\alpha,\ \beta=0,1, \ldots, m)$,

koje češće pišemo u razvijenom obliku

$$\frac{dq^\alpha}{dt}=a^{\alpha\beta}p_\beta, \tag{28.3}$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}p_\gamma\frac{dq^\beta}{dt}+Q_\alpha+P_\alpha+R_\alpha+\sum_{\sigma=1}^{k_1}\chi_{(\sigma)}C_{(\sigma)\alpha}.$$

Ako je sistem holonoman diferencijalne jednačine (28.2) gube reakcije neholonomnih veza pa posmatrani sistem jednačina je

$$\begin{cases}\dfrac{dq^\alpha}{dt}=a^{\alpha\beta}p_\beta, \\ \dfrac{Dp_\alpha}{dt}=Q_\alpha+P_\alpha+R_\alpha.\end{cases} \qquad (\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ \ldots,\ m) \tag{28.4}$$

Ako su holonomne veze idealne otpada i R_α pa imamo i dalje sistem od $2m+2$ jednačine

$$\begin{cases}\dfrac{dq^\alpha}{dt}=a^{\alpha\beta}p_\beta \\ \dfrac{Dp_\alpha}{dt}=Q_\alpha+P_\alpha\end{cases} \qquad (\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ \ldots,\ m). \tag{28.5}$$

U slučaju kada su holonomne veze skleronomne otpadaju dve diferencijalne jednačine, koje odgovaraju vremenskim faznim koordinatama q^0 i p_0, tj.

$$\begin{cases}\dot{q}^0=1=a^{0\beta}p_\beta, & (28.6)\\ & (\beta=0,\ 1,\ \ldots,\ m)\\ \dfrac{Dp_0}{dt}=Q_0+P_0, & (28.7)\end{cases}$$

pa se broj diferencijalnih jednačina (28.5) smanjuje za 2, tako da imamo sistem od $2m$ diferencijalnih jednažina istog oblika (28.5)

$$\begin{cases}\dfrac{dq^\alpha}{dt}=a^{\alpha\beta}p_\beta \\ \dfrac{Dp_\alpha}{dt}=Q_\alpha+P_\alpha\end{cases} \qquad (\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{28.8}$$

samo što indeksi α, β uzimaju vrednosti od 1 do broja stepena slobode kretanja sistema m.

Ako su mase dinamičkih tačaka konstantne ovaj sistem jednačina se još uprošćava

$$\begin{cases} \dfrac{dq^\alpha}{dt} = a^{\alpha\beta} p_\beta, \\ \\ \dfrac{Dp_\alpha}{dt} = Q_\alpha, \end{cases} \tag{28.9}$$

jer je $P_\alpha \equiv 0$. U ovom slučaju i kovarijantni $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}(q^1, \ldots, q^m)$ i kontravarijantni tenzor $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}(q^1, \ldots, q^m)$ ne zavise od vremena t kao u prethodnim slučajevima.

Ako ni sile $Q_\alpha = Q_\alpha(q^1, \ldots, q^n; p_1, \ldots, p_m)$ ne zavise od vremena t, iz diferencijalnih jednačina (28.9) lako eleminišemo diferincijal vremena dt pa dobijamo diferencijalne jednačine fazne trajektorije reprezentativne tačke sistema i to:

$$\frac{dq^\alpha}{a^{\alpha\beta} p_\beta} = \frac{Dp_\alpha}{Q_\alpha} = dt, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m), \tag{28.10}$$

gde se ponavljeni indeksi u broijocu i imeniocu ne smatraju indeksima sabiranja. To znači da su u jednačinama indeksi α slobodni indeksi, pa imamo n diferencijal jednačina

$$\frac{dq^M}{a^{M\beta} p_\beta} = \frac{Dp_M}{Q_M} \qquad (M = 1, \ldots, m). \tag{28.11}$$

Za slučaj da je forma $Q_\alpha dq^\alpha$ integrabilna, iz ovih diferencijalnih jednačina dolazimo do invarijantne forme

$$a^{\alpha\beta} p_\beta Dp_\alpha = Q_\alpha dq^\alpha, \tag{28.12}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

a odavde apsolutni invarijantni integral

$$\hat{\int} a^{\alpha\beta} p_\alpha Dp_\beta = \int Q_\alpha dq^\alpha,$$

koji je kao tablični (P1.11)

$$a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = 2 \int Q_\alpha dq^\alpha + A_0; \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m) \tag{28.13}$$

gde je $A_0 = \text{const}$. Ako generilisane sile imaju potencijal sila $\Pi = \Pi(q^1, \ldots, q^m)$ za koje je $Q_\alpha = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}$, integral (28.13) je integral energije dat u Hamiltonovim promenljivim

$$\frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \Pi = h = \text{const}. \tag{28.14}$$

za konzervativni sistem tačaka. Ovaj integral, kao i opštije (28.13) kod koga se koordinate $a^{\alpha\beta}$ osnovnog tenzora u opštem slučaju javljaju kao nelinearne funkcije koordinata $q^1, \dots, q^m$, a koordinate vektora generalisane sile $Q_\alpha = Q_\alpha(q^1, \dots, q^m; p_1, \dots, p_m)$ nelinearne funkcije faznih promenljivih, može poslužiti kao što je poznato za kvalitativnu analizu oscilatornog kretanja i stabilnosti ravnoteže sistema.

Male oscilacije. Za oscilatorna kretanja tačaka sistema, koja su poznata pod nazivom male oscilacije, koordinate inercijskog tenzora su konstantni inercioni koeficijenti*. Zbog toga su Kristofelovi simboli jednaki nuli, apsolutni diferencijal $D*$ jednak običnom diferencijalu $d*$ te i apsolutni integral $\hat{\int} *$ jednak običnom integralu $\int *$ vektora. Generalisane sile su, u najopštijem slučaju, linearne funkcije faznih koordinata, tj.

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta \\ \dot{p} = -c_{\alpha\beta} q^\beta - b^\beta_\alpha p_\beta \end{cases} \tag{28.15}$$

gde su $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} = \text{const.}$ $b^\alpha_\beta = \text{konst.}$ Zato iz (28.9) veoma prosto dobijamo sistem od $2m$ linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta, \\ \dot{p}_\alpha = -c_{\alpha\beta} q^\beta - b^\beta_\alpha p_\beta. \end{cases} \tag{28.16}$$

Za pretpostavljena rešenja

$$q^\alpha = A^\alpha e^{\lambda t}, \qquad p_\alpha = B_\beta e^\lambda \tag{28.17}$$

sledi sistem od $2m$ homogenih algebarskih jednačina:

$$\lambda A^\alpha - a^{\alpha\beta} B_\beta = 0, \tag{28.18}$$

$$(\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

$$\lambda B_\alpha + b^\beta_\alpha B_\beta + c_{\alpha\beta} A^\beta = 0. \tag{28.19}$$

Iz sistema jednačina (2818) uočavamo da između koordinata vektora B_α i A^α postoje veze

$$B_\gamma = \lambda a_{\alpha\gamma} A^\alpha, \tag{28.20}$$

jer je $a^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = \delta^\beta_\gamma = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$. Zato se (28.19) svodi na

$$(\lambda^2 a_{\alpha\beta} + \lambda b_{\alpha\beta} + c_{\beta\beta}) A^\beta = 0,$$

---

*) Vidi: Vujičić V, Teorija oscilacija, „Naučna knjiga", Beograd, 1977.

odnosno

$$(\lambda_k^2 a_{\alpha\beta}+\lambda_k b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\beta}) A_k^\beta=0, \tag{28.21}$$

jer za egzistenciju netrivijalnih rešenja A^β postojaće m kvadrata λ_k^2 karakterističnih λ_k kojima odgovaraju vektori $A_{(k)}^\beta$, a zbog veze (28.20) i vektori $B_{(k)\beta}$. S obzirom da je $a_{\alpha\beta}$ pozitivno-definitivna matrica, jasno je da će vektori $A_{(k)}$ i $B_{(k)}$ ostati ograničeni po modulu ili težiti nuli ako je

$$\begin{cases} (b_{\alpha\beta} A_{(k)}^\alpha A_{(k)}^\beta)^2-(4\, a_{\alpha\beta} A_{(k)}^\alpha A_{(k)}^\beta)(c_{\alpha\beta} A_{(k)}^\alpha A_{(k)}^\beta)\leqslant 0, \\ b_{\alpha\beta} A_{(k)}^\alpha A_k^\beta>0, \end{cases}$$

te za te uslove kretanje sistema je oscilatorno, a ravnotežno stanje sistema $q=0 \wedge p=0$ je stabilno ili asimptotski stabilno.

Kvazinelinearne oscilacije sistema

U faznom prostoru Φ_{2m} moguće je u konačnom obliku izraziti približno tačna rešenja sistema od m stepena slobode oscilavanja i za slučaj kada su generalisane nelinearne funkcije, ali sa malim parametrom [44] i to:

$$Q_\alpha=-\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}+f_\alpha(t)+\varepsilon R_\alpha(q^1, \ldots, q^m; p_1, \ldots, p_m; \varepsilon), \tag{28.22}$$

gde su $f_\alpha(t)$ periodne funkcije, ε mali parametar, a R_α nelinearne funkcije faznih promenljivih i malog parametra ε.

Skalarna funkcija Π je potencijal sila, oblika pozitivno-definitivne kvadratne forme

$$\Pi=\frac{1}{2} c_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta \tag{28.23}$$

čiji su koeficijenti $c_{\alpha\beta}$ simetrični i konstantni. S obzirom da i ovde pretpostavljamo nelinearnost samo sila R_α proizilazi da su inercioni koeficijenti $a_{\alpha\beta}$ konstantni te da su Kristofelovi simboli nad njima jednaki nuli. Zbog takvih pretpostavki diferencijalne jednačine oscilatornog kretanja ovog sistema (28.9) su

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha=a^{\alpha\beta} p_\beta, \\ \dot{p}_\alpha+c_{\alpha\beta} q^\beta=f_\alpha(t)+\varepsilon R_\alpha. \end{cases} \tag{28.24}$$

Za $\varepsilon=0$ dobijamo generalisani sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, koje predstavljaju sopstvene oscilacije sistema pod dejstvom prinudnih sila $f_\alpha(t)$ i to:

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha=a^{\alpha\beta} p_\beta, \\ \dot{p}_\alpha+c_{\alpha\beta} q^\beta=f_\alpha(t). \end{cases} \qquad (\alpha, \beta=1, \ldots, m), \tag{28.25}$$

Rešenja $q^\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$ ovog osnovnog genratornog sistema diferencijalnih jednačina označićemo nultim indeksom q_0^α i $p_{0\alpha}$ te ih kao takve možemo da napišemo u obliku

$$q^\alpha = q_0^\alpha(t) = \sum_{k=1}^{m}\left\{\Delta_k^\alpha(A_{0k}\sin\omega_k t + B_{0k}\cos\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k}\int_0^t f^\alpha(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

$$(28.26)$$

$$p_\alpha = p_{0\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{m}\left\{\omega_k a_{\alpha\beta}(A_{0k}\cos\omega_k t - B_{0k}\sin\omega_k t) + \int_0^t f_\alpha(\tau)\cos\omega_k(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

gde su $\omega_k\,(k=1,\ldots,m)$ učestanosti sopstvenih oscilacija sistema, A_{0k} i B_{0k} integralne konstante, a $f^\alpha(t)=a^{\alpha\beta}f_\beta(t)$ kontravarijantne koordinate vektora sile $f(t)$.

Ma kakve da su sile R_α, pretpostavka o malom parametru ε, čini ih toliko po modulu malim da one εR_α samo remete kretanje sistema (28.25), pa se rešenje sistema diferencijalnih kvazinelinearnih jednačina (28.24) nalazi u blizini rešenja (28.26), tj.

$$\begin{cases} q^\alpha(t) = q_0^\alpha(t) + \sum\limits_{s=1} \varepsilon^s q_{(s)}^\alpha(t), \\ p_\alpha(t) = p_{0\alpha}(t) + \sum\limits_{s=1} \varepsilon^s p_{(s)\alpha}(t), \end{cases} \tag{28.27}$$

gde su $q_{(s)}^\alpha(t)$ i $p_{(s)\alpha}(t)$ periodne zasad još nepoznate funkcije vremena t.

Razvijmo funkcije R_α do onog stepena po $(q^\alpha - q_0^\alpha)$, $(p_\alpha - p_{0\alpha})$ i ε do kojeg su razložene potencijalne sile i inercioni koeficijenti, kako bi za sve funkcije imali isti stepen aproksimacije, a to je:

$$R_\alpha = R_{0\alpha} + (q^\beta - q_0^\beta)R_{\alpha\beta} + (p_\beta - p_{0\beta})R_\alpha^\beta + S_\alpha\varepsilon + \cdots,$$

gde su

$$R_{0\alpha} = R_\alpha(t, q_0^1(t), \ldots, q_0^m(t);\ p_{0_1}(t), \ldots, p_{0m}(t);\ 0),$$

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}(t, q_0^1(t), \ldots, q_0^m(t);\ p_{01}(t), \ldots, p_{0m}(t)) = \left.\frac{\partial R_\alpha}{\partial q^\beta}\right|_{\substack{q^\alpha = q_0^\alpha(t) \\ p_\alpha = p_{0\alpha}(t) \\ \varepsilon = 0}},$$

$$R_\alpha^\beta = R_\alpha^\beta(t, q_0^1(t), \ldots, q_0^m(t);\ p_{01}(t), \ldots, p_{0m}(t)) = \left.\frac{\partial R_\alpha}{\partial p_\beta}\right|_{\substack{q^\alpha = q_0^\alpha(t) \\ p_\alpha = p_{0\alpha}(t) \\ \varepsilon = 0}},$$

$$S_\alpha = S_\alpha\big(t, \overset{1}{q_0}(t), \ldots, \overset{m}{q_0}(t); p_{01}(t), \ldots, p_{0m}(t)\big) = \frac{\partial R_\alpha}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{q^\alpha = q_0^\alpha(t)\\ p_\alpha = p_{0\alpha}(t)\\ \varepsilon = 0}}$$

Sa ovako razloženim funkcijama diferencijalne jednačine kretanja (28.24) postaju

$$\begin{cases} \dot q^\alpha = a^{\alpha\beta} p_\beta \\ \dot p_\alpha + c_{\alpha\beta} q^\beta = f_\alpha(t) + \varepsilon\,[R_{0\alpha} + (q^\beta - q_0^\beta) R_{\alpha\beta} + \\ \qquad\qquad + (p_\beta - p_{0\beta}) R_\alpha^\beta + S_\alpha \varepsilon + \cdots]. \end{cases} \tag{28.28}$$

Pretpostavljena stepena rešenja (28.27) treba da zadovolje diferencijalne jednačine (28.28), pa je:

$$\sum_{i=0} \varepsilon^i \dot q_{(i)}^\alpha = a^{\alpha\beta} \sum_{i=0} \varepsilon^i p_{(i)\beta}$$

$$\sum_{i=0} \varepsilon^i \dot p_{(i)\alpha} + c_{\alpha\beta} \sum_{i=0} \varepsilon^i q_{(i)}^\beta = f_\alpha(t) + \varepsilon\,[R_{0\alpha} + R_{\alpha\beta} \sum_{s=1} \varepsilon^s q_{(s)}^\beta +$$

$$+ R_\alpha^\beta \sum_{s=1} \varepsilon^s p_{(s)\beta} + S_\alpha \varepsilon + \cdots].$$

Izjednačenjem koeficijenata uz jednake stepene ε^i dobijamo prvo za $i=0$, $\varepsilon^0 = 1$ generatorni sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima (28.25), a to je

$$\begin{cases} \dot q_0^\alpha - a^{\alpha\beta} p_{0\beta} = 0, \\ \dot p_{0\alpha} + c_{\alpha\beta} q_0^\beta = f_{0\alpha}(t); \end{cases} \tag{28.29}$$

zatim za svaki stepen $\varepsilon^1 = \varepsilon$, ε^2, $\varepsilon^3, \ldots$ sledi po jedan sistem diferencijalnih jednačina oblika (28.25) sa indeksima s odgovarajućih stepena ε^s $(s = 1, 2, 3, \ldots)$, tj.

$$\begin{cases} \dot q_{(s)}^\alpha - a^{\alpha\beta} p_{(s)\beta} = 0 \\ \dot p_{(s)\alpha} + c_{\alpha\beta} q_{(s)}^\beta = f_{(s)\alpha}\big(t, \overset{1}{q}_{(s-1)}, \ldots, \overset{m}{q}_{(s-1)}; p_{(s-1)1}, \ldots, p_{(s-1)m}\big), \end{cases} \tag{28.30}$$

gde su:

$$f_{0\alpha} = f_\alpha(t),$$

$$f_{(1)\alpha} = R_{0\beta}\big(\overset{0}{q_1}, \ldots, \overset{m}{q_0}; p_{01}, \ldots, p_{0m}\big),$$

$$f_{(2)\alpha} = R_{\alpha\beta} q_{(1)}^\beta + R_\alpha^\beta p_{(1)\beta} + S_\alpha,$$

. . . .

. . . .

$$f_{(j)\alpha} = R_{\alpha\beta} q_{(j-1)}^\beta + R_{\alpha(j-1)}^\beta p_\beta, \qquad (j = 3, 4, \ldots).$$

Rešenja sistema diferencijalnih jednačina (28.29) su oblika (28.26) tako da imamo $q_0^\alpha = q_0^\alpha(t)$, $p_{0\alpha} = p_{0\alpha}(t)$. Zamenom ovih funkcija u $R_{0\beta}(q_0^1, \dots, p_{0m})$ dobijamo da je $f_{(1)\alpha} = R_{0\beta}(t, A_{01}, \dots, A_{0m}; B_{01}, \dots, B_{0m}) = f_{(1)\alpha}(t)$ tako da sledeći sistem iz (28.30) je istog oblika kao i (28.29), tj.

$$\begin{cases} \dot{q}^\alpha_{(1)} - a^{\alpha\beta} p_{(1)\beta} = 0 \\ \dot{p}_{(1)\alpha} + c_{\alpha\beta} q^\beta_{(1)} = f_{(1)\alpha}(t). \end{cases} \tag{28.31}$$

Konstante $A_{0(k)}$ i $B_{0(k)}$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ određujemo iz $2m$ uslova egzistencije periodnih rešenja $q^\alpha_{(1)}(t) = q^\alpha_{(1)}(t+T)$ i $p_{(1)\alpha}(t) = p_{(1)\alpha}(t-T)$ tj. uslova odstranjivanja rezonantnih članova u desnim stranama diferencijalnih jednačina (28.31). To je zahtev da bude ispunjeno sledećih $2m$ uslova:

$$\begin{cases} \int_0^T \Delta_k^\alpha f_{(1)\alpha}(t) \cos \omega_k t \, dt = 0, \\ \int_0^T \Delta_k^\alpha f_{(1)\alpha}(t) \sin \omega_k t \, dt = 0. \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \dots, m) \tag{28.32}$$

Periodna rešenja sistema (28.31) nalazimo ponovo u obliku (28.26), odnosno

$$\begin{cases} q^\alpha_{(1)} = \sum_{k=1}^m \Big\{ \Delta_k^\alpha (A_{(1)k} \sin \omega_k t + B_{(1)k} \cos \omega_k t) + \\ \qquad + \dfrac{1}{\omega_k} \int_0^t f^\alpha_{(1)}(\tau) \sin \omega_k (t-\tau) \, d\tau \Big\}, \\ p_{(1)\alpha} = \sum_{k=1}^m \Big\{ \omega_k a_{\alpha\beta} \Delta_k^\beta (A_{(1)k} \cos \omega_k t - B_{(1)k} \sin \omega_k t) + \\ \qquad + \int_0^t f_{(1)\alpha}(\tau) \cos \omega_k (t-\tau) \, dt \Big\}. \end{cases} \tag{28.33}$$

Zamenjujući ova rešenja i rešenja (28.26) u drugi sistem $(s = 2)$ diferencijalnih jednačina (28.30), tj. u $f_{(2)\alpha}$, ponovo dobijamo sistem jednačina oblika (28.31). Eliminacijom rezonantnih članova

$$\begin{cases} \int_0^T \Delta_k^\alpha f_{(2)\alpha}(t) \cos \omega_k t \, dt = 0, \\ \int_0^T \Delta_k^\alpha f_{(2)\alpha}(t) \sin \omega_k t \, dt = 0, \end{cases}$$

sada možemo da odredimo periodna rešenja $q_2^{\alpha}(t)$, $p_{2\alpha}(t)$ u obliku (28.33).

Na isti taj način postupno određujemo i naredna $q_{3\alpha}$, $p_{3\alpha}$ približna rešenja do željenog n-tog. Posle određivanja periodnih rešenja $q_{(n-1)}^{\alpha}(t)$ i $p_{(n-1)\alpha}(t)$ transformišemo n-ti sistem diferencijalnih jednačina (28.30) na oblik (28.31) za $s=n$. Rešenja takvog sistema u obliku (28.33) sadrže $2m$ konstanata $A_{(n)k}$ i $B_{(n)k}$. Prema tome i traženo rešenje i obliku stepenog reda po ε^s sadržaće taj broj konstanata, tj.

$$
\begin{aligned}
q^{\alpha} &= \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon^s \left\{\omega_k \Delta_k^{\beta}(A_{(s)k}\sin\omega_k t + B_{(s)k}\cos\omega_k t + \int_0^t f_{(s)\alpha}(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau\right\} \\
p_{\alpha} &= \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \varepsilon^s \left\{\omega_k a_{\alpha\beta}\Delta_k^{\beta}(A_{(s)k}\cos\omega_k t - B_{(s)k}\sin\omega_k t) + \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^t f_{(s)\alpha}(\tau)\cos\omega_k(t-\tau)\,d\tau\right\}.
\end{aligned}
\tag{28.34}
$$

Konstante $A_{(n)k}$ i $B_{(n)k}$, $(k=1,\dots,m)$ određujemo iz $2m$ početnih uslova $q^{\alpha}=q^{\alpha}(t_0)$ i $p_{\alpha}=p_{\alpha}(t_0)$. Eventualnu proveru da li rešenja (28.34) zadovoljavaju diferencijalne jednačine (28.30) lako je izvršiti. Ako su ω_k koreni frekventne jednačine $|c_{\alpha\beta}-\omega^2 a_{\alpha\beta}|=0$ sopstvenih oscilacija sistema, što ovde pretpostavljamo, zamena rešenja (28.34) u diferencijalne jednačine (28.30) pokazaće valjanost dobijenih rešenja (28.34).

29. Kovarijantne diferencijalne jednačine poremećenog kretanja

Upoređivanje stvarnog i zadatog tj. poremećenog i neporemećenog kretanja sistema možemo činiti u prostorima u kojim je opisano neporemećeno kretanje. Ako je kretanje opisano diferencijalnim jednačinama (24.21) u kojim su koordinate p_j vektora impulsa kretanja reprezentativne tačke opisane relacijama (23.8), tj. $p_i=a_{ij}\dfrac{Dr^j}{dt} \leftrightarrow \dfrac{Dr^i}{dt}=a^{ij}p_j$ za neporemećeno kretanje sistema kažemo da je zadato upravo pomoću tih $2n$ diferencijalnih relacija (24.10) i (23.8) tj.

$$
\begin{aligned}
&\frac{Dr^i}{dt}=a^{ij}p_j, \\
& && (i,j=3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu) \\
&\frac{Dp_i}{dt}=F_i(r,p,t), && (\forall \nu\in N_n)
\end{aligned}
\tag{29.1}
$$

gde su F_i koordinate rezultantne sile u odgovarajućoj tački. Rešenja sistema (29.1.) neka su $r^i(t)$, $p_i(t)$ te sa pravilno i tačno izabranim početnim uslovima predstavljaju neporemećeno kretanje. Ukoliko dinamička tačka odstupa od zadatog kretanja iz bilo kog razloga, poremećeno kretanje možemo predstaviti vektorima

$$\overset{*}{r}{}^i = r^i(t) + \xi^i(t), \qquad \overset{*}{p}_i = p_i(t) + \eta_i(t). \tag{29.2}$$

Diferencijalne jednačine stvarnog kretanja u trenutku t možemo da napišemo kao

$$\frac{D\overset{*}{r}{}^i}{dt} = a^{ij}\overset{*}{p}_j,$$

$$\frac{D\overset{*}{p}_i}{dt} = F_i(\overset{*}{r}, \overset{*}{p}, t),$$

odnosno, ako imamo u vidu (29.1.) i (29.2),

$$\begin{aligned} &\frac{D\xi^i}{dt} = a^{ij}\eta_j, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (i, j = 3\nu-2,\ 3\nu-1,\ 3\nu), \\ &\frac{D\eta_i}{dt} = \theta_i(\xi, \eta, t), \qquad\qquad (\forall \nu \in N_n), \end{aligned} \tag{29.3}$$

gde su θ_i kovarijantne koordinate vektora

$$\theta_i = \frac{\partial F_i}{\partial r^j}\Bigg|_{\substack{r^j = r_0^j(t) \\ p_j = p_{0j}(t)}} \xi^j + \frac{\partial F_i}{\partial p_j}\Bigg|_{\substack{r^j = r_0^j(t) \\ p_j = p_{0j}(t)}} \eta_j + \cdots \tag{29.4}$$

Očigledno je da su diferencijalne jednačine (29.1) i (29.3) istog oblika; ukoliko u diferencijalnim jednačinama (29.3) poremećaje ξ^i i η_i zamenimo odgovarajućim veličinama r^i i p_i dobićemo diferencijalne jednačine (29.1). Kako r^i i p_i mogu biti smatrani poremećajima ravnotežnog stanja $r^i = r_0^i = \text{const.}$ i $p_i = 0$ to diferencijalne jednačine kretanja (29.1) možemo da smatramo kao diferencijalne jednačine poremećenog ravnotežnog stanja.

Diferencijalne jednačine poremećenog stanja kretanja sistema u faznom prostoru Φ_{2m} takođe možemo da svedemo na kovarijantni oblik kao i (29.3) što ćemo u daljem izlaganju i uraditi.*

Napišimo diferencijalne jednačine neporemećnog kretanja u obliku (28.3), tj.

$$\frac{Dp_\alpha}{dt} = F_\alpha, \qquad (\alpha = 1, \ldots, m), \tag{29.5}$$

gde je

$$F_\alpha = Q_\alpha + P_\alpha + R_\alpha + \sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} c_{(\sigma)\alpha}. \tag{29.6}$$

Ako rešenja $q^\alpha = q^\alpha(t, c_1, \dots, c_{2n})$ i $p_\alpha = p_\alpha(t, c_1, \dots, c_{2n})$ opisuju zadato neporemećeno kretanje sistema pod dejstvom sila (29.6) za poremećaje možemo da uzmemo odstupanja η_α i ξ^α gde je

$$\eta_\alpha = \overset{*}{p}_\alpha - p_\alpha \tag{29.7}$$

vektor poremećaja impulsa kretanja sistema, a ξ^α poremećaji vektora položaja tačaka sistema. Iskažimo to postupkom kojim smo došli do relacija (28.1), odnosno (23.2). Kao što se vidi, ova relacija (23.2) uspostavlja vezu između vektora brzine $\boldsymbol{v}_\nu$ i impulsa kretanja tačaka sistema $\boldsymbol{p}_\nu = m_\nu \boldsymbol{v}_\nu = m_\nu \dfrac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt}$, $(\nu = 1, \dots, n)$. Zato pretpostavimo neka je $p_\alpha = \sum\limits_{\nu=1}^{n} m_{(\nu)} \boldsymbol{v}_{(\nu)} \cdot \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha}$ impuls neporemećenog kretanja, a $\overset{*}{p}_\alpha = \sum\limits_{\nu=1}^{n} m_{(\nu)} \overset{*}{\boldsymbol{v}}_{(\nu)} \cdot \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha}$ poremećenog kretanja. U tom smislu možemo da pišemo da je

$$\overset{*}{\boldsymbol{p}}_{(\nu)} = m_\nu \overset{*}{\boldsymbol{v}}_\nu = m_\nu \frac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} + m_\nu \frac{d\boldsymbol{\xi}_\nu}{dt} \tag{29.8}$$

gde je $\boldsymbol{\xi}_\nu$ vektor poremećaja vektora $\boldsymbol{r}_\nu = \overset{*}{\boldsymbol{r}}_\nu - \boldsymbol{\xi}_\nu$ položaja ν-te tačke. Razložimo li vektore $\boldsymbol{\xi}_\nu$ po baznim vektorima $\boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha}$ tangentnog prostora na kojim leži i vektor $\dfrac{d\boldsymbol{r}_\nu}{dt} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha}$ tj.

$$\boldsymbol{\xi}_\nu = \xi^\alpha \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha} \tag{29.9}$$

imaćemo iz (29.8)

$$\overset{*}{\boldsymbol{p}}_\nu = m_\nu \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha} \dot{q}^\alpha + m_\nu \frac{d}{dt}(\xi^\alpha \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha}),$$

ili

$$\overset{*}{\boldsymbol{p}}_\nu = m_\nu \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha} \dot{q}^\alpha + m \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{dt} + m_\nu \xi^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha}}{\partial q^\beta} \frac{dq^\beta}{dt}. \tag{29.10}$$

Ako uzmemo u obzir i (26.13) biće

$$\overset{*}{\boldsymbol{p}}_\nu = m_\nu \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha} \dot{q}^\alpha + m_\nu \boldsymbol{g}_{(\nu)\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{dt} + m_{(\nu)} \Gamma^\delta_{\alpha\beta} \boldsymbol{g}_{(\nu)\delta} \xi^\alpha \frac{dq^\beta}{dt} + b_{\alpha\beta} \boldsymbol{n}_{(\nu)},$$

a posle skalarnog množenja vektorom $\boldsymbol{g}_{(\nu)\gamma}$ i sabiranjem po ν slediće

$$\overset{*}{p}_\gamma = a_{\alpha\gamma} \dot{q}^\alpha + a_{\alpha\gamma} \frac{d\xi^\alpha}{dt} + a_{\delta\gamma} \Gamma^\delta_{\alpha\beta} \xi^\alpha \frac{dq^\beta}{dt}$$

odnosno,

$$\overset{*}{p}_\gamma = a_{\alpha\gamma} \dot{q}^\alpha + a_{\alpha\gamma} \left(\frac{d\xi^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\delta\beta} \xi^\delta \frac{dq^\beta}{dt} \right) = p_\gamma + a_{\alpha\gamma} \frac{D\xi^\alpha}{dt}, \tag{29.11}$$

jer je $p_\gamma = a_{\alpha\gamma}\dot{q}^\alpha$. Uvedimo li sada ovde poremećaj impulsa (29.7) iz (29.11) dobijamo

$$\eta_\gamma = a_{\alpha\gamma}\frac{D\xi^\alpha}{dt}, \qquad (\alpha, \gamma = 1, \dots, m). \tag{29.12}$$

Komponovanjem tenzorom $a^{\gamma\beta}$ dolazimo do prve polovine sistema diferencijalnih jednačina poremećaja, i to

$$\frac{D\xi^\beta}{dt} = a^{\beta\gamma}\eta_\gamma, \qquad (\beta, \gamma = 1, 2, \dots, m). \tag{29.13}$$

Ako uporedo sa diferencijalnim jednačinama neporemećenog kretanja (29.5) napišemo i odgovarajuće jednačine za stvarno ili poremećeno kretanje i uzmemo u obzir (29.7), dobićemo i drugih m diferencijalnih jednačina poremećaja

$$\frac{D\eta_\alpha}{dt} = \theta_\alpha, \tag{29.14}$$

gde je

$$\Theta_\alpha = \overset{*}{F}_\alpha - F_\alpha = \left.\frac{\partial F_\alpha}{\partial q^\beta}\right|_{\substack{\xi^\beta = 0 \\ \eta^\beta = 0}} \xi^\beta + \left.\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\beta}\right|_{\substack{\xi^\beta = 0 \\ \eta_\beta = 0}} \eta_\beta + \cdots \tag{29.15}$$

Diferencijalne jednačine (29.14) i (29.13), kao što se vidi, po obliku su iste kao i diferencijalne jednačine (29.3). Razlika je u broju jednačina, karakteru poremećaja i strukturi poremećajnih faktora θ_α. Jednačina (29.17) i (29.12) ima $2\,m$, a toliko i koordinata faznog vektora poremećaja $\xi^1, \dots, \xi^m; \eta_1, \dots, \eta_m$. Jednačine (29.14) zajedno sa relacijama (29.13) nazivamo *kovarijantne diferencijalne jednačine poremećenog kretanja.*

30. Invarijantni kriterij o stabilnosti

Izvedene kovarijantne diferencijalne jednačine poremećenog kretanja u prethodnom poglavlja omogućuju da se postavi jedan opšti invarijantni kriterij o stabilnosti kretanja i stabilnosti ravnotežnog stanja sistema dinamičkih tačaka. Kriterij je primenjiv za sve dinamičke sisteme koji su razmatrani u ovoj studiji i to tako da nije potrebno da se sastavljaju diferencijalne jednačine poremećenog kretanja ili poremećenog ravnotežnog stanja sistema. Kriterij se zasniva na znakoodređenosti izraza oblika

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a^{\alpha\beta}\left(\Theta_\alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi^\alpha}\right)\eta_\beta \tag{30.1}$$

u kojem figurišu poremećajni faktori Θ_α i pozitivno definitna funkcija $W = W(t, \xi^1, \dots, \xi^m)$ koja zavisi od poremećaja ξ^α i vremena t. Izraz (30.1) nazivamo *kriterijski izraz.* Vektor Θ_α u opštem slučaju određujemo pomoću relacija (29.15) kao aproksimativne sile u okolini tačaka trajektorije neporemećenog kretanja, ili kao generalisane sile za slučaj da se razmatra stabilnost ravnotežnog stanja sistema. Invarijantni kriterijski izraz (30.1) ima isti oblik i za stabilnost ravnotežnog stanja sistema i za stabilnost kretanja. Razlikuje se svakako po tome što su poremećaji i poremećajni faktori različiti. Zato razmotrimo posebno stabilnost ravnotežnog stanja sistema, a posebno stabilnost kretanja mehaničkog sistema.

Stabilnost ravnotežnog stanja sistema

Pretpostavimo da je kretanje n dinamičkih tačaka ograničeno holonomnim reonomnim vezama. Neporemećeno ravnotežno stanje iskazujemo faznim promenljivim

$$q^0=t,\ \overset{1}{q_0},\ \overset{2}{q_0},\ \ldots,\ \overset{m}{q_0};\ p_0=a_{00},\ p_1=p_2=\cdots=p_m=0. \tag{30.2}$$

Svaka druga vrednost koordinata $q^\alpha(t)\neq q_0$, $p_\alpha(t)\neq 0$, $(\alpha=1, \ldots, m)$, predstavlja poremećaj ravnotažnog stanja. Primećuje se iz $q^0=t$ da vreme ne podleže poremećaju. Diferencijalne jednačine kretanja u faznom prostoru (29.2) i (28.1) predstavljaće diferencijalne jednačine poremećenog kretanja. Za pretpostavljeni holonomni sistem svakako će otpasti reakcije neholonomnih vaza, $\sum_{\sigma=1}^{k_1} \chi_{(\sigma)} \overset{*}{c_{(\sigma)\alpha}}=0$, jer je u tom slučaju $c_{(\sigma)\alpha}=0$.

Izaberemo li sada Ljapanljevu pozitivno-definitnu funkciju u obliku zbira dve pozitivno-definitne funkcije i to:

$$V=T+W(q^0, q^1, \ldots, q^m) \tag{30.3}$$

gde je

$$T=\frac{1}{2}a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta>0$$

kinetička energija sistema, a

$$W=W(q^0, q^1, \ldots, q^m)$$

neka pogodno izabrana pozitivno-definitna skalarna funkcija koja zavisi od m koordinata $q^1, \ldots, q^m$ i vremena t.

Izvod po vremenu funkcije (30.3) je

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dT}{dt}+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\frac{dq^\alpha}{dt}+\frac{\partial W}{\partial t},$$

odnosno,

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\frac{Dp_\alpha}{dt}+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha, \qquad (\alpha=0, 1, \ldots, m),$$

*) Pitanje stabilnosti ravnotežnog stanja i kretanja neholomnih sistema, čija kovarijantna i invarijantna forma nija sporna, obradio je A. Bakša u svojoj doktorskoj disertaciji; „Stabilnost neholonomnih sistema“

jer je

$$\frac{dT}{dt}=\frac{DT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\frac{Dp_\alpha}{dt}=a^{\alpha\beta}p_\beta\frac{Dp_\alpha}{dt}.$$

Uzmemo li u odzir i diferencijalne jednačine kretanja (28.2) i (28.1) izvod funkcije V po vremenu će biti

$$\frac{dV}{dt}=a^{\alpha\beta}p_\beta F_\alpha+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}a^{\alpha\beta}p_\beta,$$

a to je kriterijski izraz (30.1) sa faznim promenljivim q^α i p_α tj.:

$$a^{\alpha\beta}\left(F_\alpha+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right)p_\beta, \qquad (\alpha,\ \beta=0,\ 1,\ \ldots,\ m). \tag{30.4}$$

Imajući u vidu da je ovaj izraz izveden kao izvod po vremenu u smislu kovarijantnih diferencijalnih jednačina poremećenog ravnotežnog stanja, možemo formulisati sledeću tvrdnju:

Ravnotežno stanje (30.2) *holonomnog reonomnog sistema je stabilno ako je kriterijski izraz* (30.4) *manji ili identički jednak nuli, pri čemu je* $W=W(q^0, q^1, \ldots, q^m)$ *pozitivno definitna funkcija,* $F_\alpha=F_\alpha(q^0, q^1, \ldots, q^m; p_0, p_1, \ldots p_m)$ *vektor generalisane sile u* $m+1$ *dimenzionom konfiguracionom prostoru, čiji je inercijski tenzor* $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}(q^0, q^1, \ldots, q^n)$. *Ako je kriterijski izraz negativno-denitna funkcija ravnotežno stanje sistama je asimptotski stabilno.*

Ovu tvrdnju koju nazivamo *invarijantni kriterij stabilnosti* možemo da primenimo za opšte mehaničke sisteme, te u tom smislu je i opšti. Kriterijski izraz (30.4) s obzirom na (28.1) možemo da napišemo i u funkciji generalisanih brzina

$$\left(F_\alpha+\frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha \tag{30.5}$$

u kom slučaju i generalisane sile F_α treba posmatrati kao funkcije Lagranžovih promenljivih q^α i generalisanih brzina $\dot{q}^\alpha$ $(\alpha=0, \ldots, m)$. Invarijantnost kriterija je očevidna s obzirom da je kriterijski izraz skalarna invarijanta. Opštost prikažimo kroz opšte posledice koje izviru iz kriterijuma.

1. Ako su veze sistema skleronomne, a sile ne zavise od vremena, kriterijski izraz zadržava oblik (30.5) samo što indeksi α uzimaju vrednost $1, 2, \ldots . m$. U tom slučaju ni funkciju $W=W(q^1, \ldots, q^m)$ ne treba tražiti u zavisnosti od $q^0=t$.

2. Ako sila zavisi od vremena t, a veze su skleronomne, kriterijski izraz se konkretizuje na

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\left(F_{\alpha'}+\frac{\partial W}{\partial q^{\alpha'}}\right)\dot{p}^{\alpha'} \qquad (\alpha'=1, \ldots, m),$$

jer je $F_0=0$, a $\dot{q}^0=1$.

3. Ako su sile $F_\alpha=-\dfrac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}$ potencijalne i poseduju potencijal $\Pi=\Pi(q^0, q^1, \ldots, q^m)>0$ koji je pozitivno-definitna funkcija koordinata q^α, tada se za funk-

ciju W može izabrati upravo potencijal Π, $W=\Pi$; u tom slučaju je kriterijski izraz identički jednak nuli

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial W}{\partial p^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha \equiv 0. \tag{30.6}$$

pa je ravnotežno stanje sistema stabilno.

4. Neka su sile $F_\alpha = Q_\alpha + R_\alpha$, gde je $Q_\alpha = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}$, a $R_\alpha = -b_{\alpha\beta}\dot{p}^\beta$ su dispativne sile. I u ovom slučaju valja funkciju W izabrati kao potencijal $W=\Pi>0$. Pokazaće se da se kriterijski izraz svodi na kvadratnu formu

$$-b_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \tag{30.7}$$

koja je negativna definitna ukoliko su koeficijenti otpora svake tačke istog znaka, tj. pozitivni. Tada je ravnotežno stanje posmatranog sistema asimptotski stabilano.

5. Ako pored potencijalnih sila $Q_\alpha = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}$ i disipativnih $R_\alpha = -b_{\alpha\beta}\dot{q}$ dejstvuju i giroskopske $G_\alpha = g_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta = -g_{\alpha\beta}\dot{q}$, kriterijski izraz svodi se ponovo na (30.3), iz čega sledi poznati stav da giroskopske sile ne remete stabilno ili asimptotski stabilno ravnotežno stanje sistema.

Stabilnost stacionarnih kretanja sistema takođe se može utvrđivati pomoću kriterijskog izraza (30.7) kada se prethodno izaberu poziciore koordinate q^r $(r=1, \ldots, m-n)$, gde je n broj cikličkih koordinata. Ako posmatramo holonomni skleronomni sistem koji je opisan pomoću m generalisanih koordinata q^α $(\alpha=1, \ldots, m)$ i m generalisanih impulsa p_r, od čega je n pozicionih impulsa p_r, a ostalih $m-n$ koordinata q^μ $(\mu=n+1, \ldots, m)$ su cikličke sa toliko cikličkih brzina $\dot{q}^\mu$ pokazuje se [29] valjanost sledeće tvrdnje:

Ako postoji takva pozitivno definitna funkcija W koja zavisi od pozicionih koordinata q^r $(r=1, \ldots, M)$ da je kriterijski izraz

$$\left(Q_r+\frac{\partial W}{\partial q^r}\right)\dot{p}^r$$

negativna funkcija ili identički jednak nuli stacionarno kretanje sistema pod dejstvom generalisanih sila Q_r je stabilno.

Stabilnost kretanja sistema. Poređenjem definicije ravnotežnog stanja sistema: $q^\alpha=0$, $p_\alpha=0$ i neporemećenog kretanja posmatranog sistema $\xi^\alpha=0$, $\eta_\alpha=0$, kao i diferencijalnih jednačina poremećenog ravnotežnog stanja (28.9) i diferencijalnih jednačina poremećenog kretanja (29.13) i (29.17) samo po sebi se nameće ideja da je moguće postaviti kriterij o stabilnost neporemećenog kretanja isto kao i za ravnotežno stanje. Razlika će postajati samo, kao što se može videti iz tih poređenja, samo u vrsti poremećaja. Tako možemo da dokaženo valjanost sledećeg invarijantnog kriterija o stabilnosti kretanja mehaničkog sistema:

Ako postoji takva pozitivno-definitna funkcija $W=W(t, \xi^1, \ldots, \xi^m)$ za koju je kriterijski izraz

$$a^{\nu\mu}\left(\Theta_\nu+\frac{\partial W}{\partial \xi^\nu}\right)\eta_\mu+\frac{\partial W}{dt} \qquad (\nu, \mu=1, 2, \ldots, m) \tag{30.8}$$

negativan ili identički jednak nuli, neporemećeno kretanje

$$\xi^1 = \xi^2 = \cdots = \xi^n = 0, \qquad \eta_1 = \cdots = \eta_m = 0$$

holonomnog sistema pod dejstvom poremećajnih faktora Θ_ν je stabilno; Ako je kriterijski izraz (30.8) negtivno-definitna funkcija, neporemećeno kretanje tog sistema je asimptotski stabilno.

Dokaz ovog kriterijuma za neporemećeno kretanje identično je dokazu kriterijuma o stabilnosti ravnotežnog stanja sistema [36] [42] s tim što umesto jednačine (28.9) pri traženju izvoda funkcije $W = W(t, \xi^1, \ldots, \xi^m)$ po vremenu treba uzeti u obzir diferencijalne jednačine (29.13) i (29.11).

KOVARIJANTNE JEDNAČINE KRETANJA KRUTOG TELA

U završnom delu ove studije navodimo kratak prikaz mogućnosti opisivanja kretanja krutog tela računom i metodom kao u dosad izloženom gradivu o kretanju dinamičke tačke i sistema tačaka. Kruto telo prihvatimo kao okolinu dinamičke tačke čiji je tenzor brzine deformacije jednak nuli, tj. takav sistem tačaka čija se međusobna ostojanja ne menjaju.

31. Kovarijantni integrali Kilingovih jednačina

U radu [10] pokazano je da se korišćenjem kovarijantnog integrala tenzora mogu integraliti Kilingove kovarijantne jednačine i odrediti kovarijantni integrali u opštem obliku za bilo koji krivolinijski sistem koordinata. Neka je $v_i(x^1, x^2, x^3)$ vektor brzine bilo koje tačke $M(x)$ krutog tela. Tada za posmatrano telo važe kovarijantne Kilingove jednačie

$$\nabla_i v_j + \nabla_j v_i = 0, \tag{31.1}$$

jer je tenzor brzine deformacije

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$$

za kruto telo jednak nuli.

Kovarijantnim diferenciranjem (31.1) po koordinati x^k dobijamo

$$\nabla_k \nabla_i v_j + \nabla_k \nabla_j v_i = 0. \tag{31.2}$$

Cikličkom permutacijom indeksa u ovoj relaciji slede sistemi jednačina

$$\nabla_i \nabla_j v_k + \nabla_i \nabla_k v_j = 0, \tag{31.3}$$

$$\nabla_j \nabla_k v_i + \nabla_j \nabla_i v_k = 0. \tag{31.4}$$

S obzirom na komutativnost kovarijantnih izvoda, jer je reč o krutom telu u prostoru E_3, oduzimanjem (31.3) od zbira (31.2) i (31.4) dobijamo

$$\nabla_k \nabla_j v_i = 0$$

a odavde, sledbeno tome,

$$D \nabla_j v_i = 0. \tag{31.5}$$

Integracijom ovog kovarijantnog sistema diferencijalnih jednačina, kao u (P2.9), dobija se

$$\nabla_j v_i = A_{ji} \tag{31.6}$$

gde je A_{ji} kovarijantno konstantni tenzor koga možemo da odredimo postupkom kao u radu [10] ili kao u (P2.10) ili (3.9) pomoću dvotačkastog tenzora (3.7). Ako za koordinate x^i tekuće tačke $M(x)$ vežemo indekse $i, j, k=1, 2, 3$, a za koordinate x^a fiksne tačke A indekse $a, b, c=1, 2, 3$, imaćemo u saglasnosti sa (31.6) da je

$$A_{ji}=g_j^a g_i^b w_{ab}, \qquad (w_{ab}=\nabla_a v_b). \tag{31.7}$$

Tako kovarijantna promena $\nabla_j v_i$ vektora brzine v_i u tački $M(x)\in E_3$ postaje određena ako je ta promena bila poznata u bilo kojoj tački A, jer je

$$\nabla_j v_i=g_j^a g_i^b w_{ab}. \tag{31.8}$$

Komponovanjem ovih jednačina vektorom (4.7) dobijamo

$$D v_i=\nabla_j v_i dx^j=A_{ji} D r^j. \tag{31.9}$$

Odavde ponovnom primenom kovarijantnog integrala na (31.9), tj.

$$\hat{\int} D v_i=\hat{\int} A_{ji} D r^j=A_{ji} \hat{\int} D r^j,$$

dobijamo

$$v_i=A_{ji} r^j+B_i \tag{31.10}$$

gde je B_i kovarijantno konstantni vektor. Sledeći postupak određivanja tenzora (31.7) nalazimo i kovarijantno konstantni integralni vektor

$$B_i=g_i^c(v_c-A_{dc} r^d), \tag{31.11}$$

gde su v_c i r^d koordinate vektora brzine $\boldsymbol{v}$ i položaja $\boldsymbol{r}$ u tački A. Zamenom (31.7) u (31.11) vektor B_i postaje

$$B_i=g_i^c(v_c-g_d^a g_c^b w_{ab} g^d)=g_i^c v_c-g_d^a g_i^b w_{ab} g^d$$

te zamenom u (31.10), pri relacijama (31.7), nalazimo kovarijantne koordinate vektora

$$v_i=g_i^c v_c+w_{ab}(g_j^a g_i^b r^j-g_d^a g_i^b r^d),$$

ili

$$v_i=g_i^a v_a+g_j^a g_i^b w_{ab}(r^j-g_c^j r^c). \tag{31.12}$$

A to su kovarijantne koordinate vektora brzine tačaka krutog tela. Za slučaj da je ugaona brzina krutog tela jednaka nuli, jasno sledi da je

$$v_i=g_i^a v_a \qquad (i=1, 2, 3;\ a=1, 2, 3) \tag{31.13}$$

vektor brzine tačaka tela pri translatarnom kretanju, a u izrazu (31.12) pri $w_{ab}\neq 0$ vektor $g_i^a v_a$ je translatarna komponenta vektora brzine v_i. Druga zbirna komponenta

$$g_j^a g_i^b w_{ab}(r^j-g_c^j r^c) \tag{31.14}$$

predstavlja rotacionu komponentu brzine krutog tela. U radu [10] pokazana je svodljivost izraza (31.12) na poznati vektorski obrazac za brzinu tačke krutog tela. Na taj način, posredstvom relacija od (31.1) do (31.12) pokazana je veza između sistema tačaka čiji se međusobni položaji menjaju i sistema tačaka čija međusobna rastojanja ostaju ista, a koji sistem nazivamo kruto telo.

32. Diferencijalne jednačine kretanja krutog tela

Polazeći od činjenice da (31.12) određuje kovarijantne koordinate vektora brzine bilo koje tačke krutog tela, kao što i izraz (5.5) određuje brzinu kretanja svake slobodne tačke, mi ćemo i vektor $\boldsymbol{v}$ napisati u obliku kovarijantnog izvoda vektora položaja tačke $\boldsymbol{r}$ po vremenu, tj.

$$v_i = \frac{Dr_i}{dt} \tag{32.1}$$

stim što treba odrediti inercijski tenzor a_{ij} kako bi mogli uspostavljati vezu između impulsa i vektora brzine.

Pri tom dovljno je da formiramo generalisani impuls (6.1) za posmatrano telo, da bi na osnovu drugog zakona mehanike mogli da postavimo diferencijalne jednačine kretanja krutog tela. Relacije (32.1) pokazuju da je položaj svake tačke M_ν krutog tela određen posredstvom jedne tačke A, tj.

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_A + (\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_A) = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}'_{(\nu)},$$

kao i to da imamo tri komponente brzine (31.13) translatarnog i tri komponente (31.14) brzine obrtnog kretanja, tj. da promena vektora položaja $\boldsymbol{r}_\nu$ tačke krutog tela izaziva promenu 6 parametara x^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, 6$).

Ta konstatacija nam je potrebna da bi mogli da odredimo inercijski tenzor (23.4), a pomoću njega generalisani impuls. Dakle, potrebno je da znamo koordinantne vektore $\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^\alpha}$ u skladu sa datim veličinama. Označimo ih sa $\boldsymbol{e}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, 6$), a vektor položaja tačke M_ν pomoću $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r}'_i$, gde je $\boldsymbol{r}_c$ vektor položaja centra inercije tela. Slediće

$$\boldsymbol{v}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial x^{\alpha''}}\dot{x}^{\alpha''} + \frac{\partial \boldsymbol{r}'_\nu}{\partial x^{\alpha'}}\dot{x}^{\alpha'} = \dot{x}^{\alpha''}\boldsymbol{e}_{(\nu)\alpha''} + \dot{x}^{\alpha'}(\boldsymbol{e}_{(\nu)\alpha'} \times \boldsymbol{r}'_\nu),$$

$$(\alpha'' = 1, 2, 3;\ \alpha' = 4, 5, 6),$$

a odavde zbog nezavisnosti osnovnih vektora

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}'_\nu}{\partial x^{\alpha'}} = \boldsymbol{e}_{(\nu)\alpha} \times \boldsymbol{r}'_\nu; \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial x^{\alpha''}} = \boldsymbol{e}_{(\nu)\alpha''}.$$

Sada nije teško da odredimo koordinate osnovnog dinamičkog tenzora (23.4), i to:

$$\begin{aligned} a_{\alpha''\beta''} &= \int_m \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{\alpha''}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{\beta''}}\, dm = \int_m \boldsymbol{e}_{\alpha''} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta''}\, dm = m g_{\alpha''\beta''}, \\ a_{\alpha'\beta'} &= \int_m \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{\alpha'}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{\beta'}}\, dm = \int_m (\boldsymbol{e}_{\alpha'} \times \boldsymbol{r}') \cdot (\boldsymbol{e}_{\beta'} \times \boldsymbol{r}')\, dm = \\ &= \int_m [(\boldsymbol{e}_{\alpha'} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta'})(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}') - (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{e}_{\alpha'})(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{e}_{\beta'})]\, dm. \end{aligned} \tag{32.2}$$

Znamo li da je: $r' = r^{\alpha'} e_{\alpha'}$, te $r' \cdot e_{\alpha'} = r^{\beta'} g_{\alpha'\beta'}$, imaćemo

$$a_{\alpha'\beta'} = \int_m (g_{\alpha'\beta'} g_{\gamma'\delta'} - g_{\alpha'\gamma'} g_{\beta'\delta'}) r^{\gamma'} r^{\delta'} dm = J_{\alpha'\beta'}, \tag{32.3}$$

a to je *tenzor inercije krutog tela*. Tako inercijski tenzor $a_{\alpha\beta}$ možemo da prestavimo u obliku inercione matrice

$$a_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} m g_{\alpha'\beta'} & 0 \\ 0 & J_{\alpha'\beta'} \end{Bmatrix}. \tag{32.4}$$

Sada impuls kretanja krutog tela pišemo kao i u relacijama (23.8), tj.

$$p_\alpha = a_{\alpha\beta} \frac{Dr^\beta}{dt}, \tag{32,5}$$

čije tri koordinate

$$p_{\alpha''} = m g_{\alpha''\beta''} \frac{Dr^{\beta''}}{dt} \qquad (\alpha,'' \ \beta'' = 1, 2, 3), \tag{32,6}$$

predstavljaju impulse kretanja centra inercije tela, a druge tri kordinate

$$p_{\alpha'} = J_{\alpha'\beta'} \frac{Dr^{\beta'}}{dt} = J_{\alpha'\beta'} \omega^{\beta'} \qquad (\alpha' \ \beta' = 4, 5, 6), \tag{32.7}$$

impulse obrtnog kretanja tela ugaonom brzinom $\omega^{\beta'}$ $(\beta' = 4, 5, 6)$ Treba primetiti i ako je to vidljivo da tenzor $a_{\alpha''\beta''}$ određujemo kao i u (6.5), a tenzor $a_{\alpha'\beta'}$ određen je kao tenzor inercije relacijama (32.2), pa koeficijente povezanosti tog potprostora valja zasnivati na nesimetričnom tenzoru elementarne rotacije $\omega_{\alpha'\beta'}$ što se može nazreti iz relacija (31.12) — (31.14). Tako izvod po vremenu t vektora $r'_{(\nu)} = r^{\alpha'} e_{(\nu)\alpha'}$ možemo da pišemo

$$\frac{d r_\nu}{dt} = \frac{dr^{\alpha'}}{dt} e_{(\nu)\alpha'} + r^{\alpha'} \frac{d e_{(\nu)\alpha'}}{dt} = \left(\frac{dr^{\alpha'}}{dt} + r^{\beta'} \omega^{\alpha'}_{\beta'} \right) e_{(\nu)\alpha'} \tag{32.8}$$

s obzirom da je $\dfrac{d e_{(\nu)\alpha'}}{dt} = \omega^{\alpha'}_{\beta'} e_{(\nu)\alpha'}$, a $\omega^{\alpha'}_{\beta'} = \omega^{\gamma'} e^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$. Kako izvod (32.8) možemo da pišemo u obliku

$$\frac{d r_{(\nu)}}{dt} = \frac{Dr^{\alpha'}}{dt} e_{(\nu)\alpha'} = \left(\frac{dr^{\alpha'}}{dt} + r^{\beta'} \omega^{\alpha'}_{\beta'} \right) e_{(\nu)\alpha'},$$

sledi

$$\frac{Dr^{\alpha'}}{dt} = \frac{dr^{\alpha'}}{dt} + r^{\beta'} \omega^{\alpha'}_{\beta'}, \tag{32.9}$$

ali isto tako i

$$\frac{Dr^{\alpha'}}{dt} = \frac{dr^{\alpha'}}{dt} + \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} r^{\beta'} \frac{dx^{\gamma'}}{dt}, \tag{32.10}$$

pa poređenjem (32.9) i (32.10) nalazimo da je

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} \frac{dx^{\gamma'}}{dt} = \omega^{\alpha'}_{\beta'}. \tag{32.11}$$

Na taj način a pomoću drugog zakona dinamike postavljamo kovarijantne diferencijalne jednačine kretanja krutog tela

$$\frac{Dp_\alpha}{dt}=Q_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\ldots,6),$$

od kojih tri, kao što se vidi iz (32.6),

$$g_{\alpha''\beta''}\frac{D}{dt}\left(m\frac{Dr^{\beta''}}{dt}\right)=Q_{\alpha''} \qquad (\alpha''=1,2,3)$$

određuju kretanje centra inercije tela, a druge tri

$$\frac{Dp_{\alpha'}}{dt}=\frac{dp_{\alpha'}}{dt}-\Gamma^{\beta'}_{\alpha'\gamma'}p_{\beta'}\frac{dx^{\gamma'}}{dt}=Q_{\alpha'}, \tag{32.12}$$

odnosno, ako se ima u vidu (32.7), i (32.11),

$$\frac{d}{dt}(J_{\alpha'\beta'}\omega^{\beta'})-\omega^{\gamma'}_{\alpha'}J_{\gamma'\delta'}\omega^{\delta'}=Q_{\alpha'}=M_{\alpha'} \tag{32.13}$$

opisuju obrtno kretanje krutog tela. Ove diferencijalne jednačine jednačine (32.12), kao što se vidi iz (32.13) za povezanost (32.11), pokazuju kovarijantnu prirodu Ojlerovih diferencijalnih jednačina kretanja.

PRILOG

TENZORSKOM RAČUNU

0. Uvodne napomene

Tenzorski račun postao je sastavni deo mehanike. A sam taj račun obogaćen je mehaničkim tenzorskim veličinama. Pomoću tenzorske analize, kao što smo videli u prethodnim izrazima, kovarijantnim i apsolutnim izvodima tenzora uspelo se da se sačuva i matematički oblik i fizička priroda pojedinih mehaničkih objekata. To naročito dok su potrebe opisivanja pojava iscrpljene diferencijalnim računom, a i integralnim ako su objekti integralenja tenzori nultog reda ili invarijante. Međutim, integralni račun primenjen na diferencijale tenzora, a to znači i vektore kao tenzore prvog reda, menja prirodu posmatranog tenzorskog objekta. To je detaljno i jasno pokazano prostim primerom na 47. strani ove knjige. Na ime, ako imamo neki tenzor, recimo mešoviti $u_j^i\,(x)$ jednom kovarijantan i jednom kontravarijantan, njegovu apsolutnu promenu opisuje apsolutni diferencijal

$$Du_j^i = du_j^i + \Gamma_{kl}^i u_j^k \, dx^l - \Gamma_{jl}^k u_k^i \, dx^l, \tag{P0.1}$$

gde je du_j^i „lokalni diferencijal" koji, kao što se vidi, pokazuje samo delimičnu promenu tog tenzora $u_j^i(x)$ i koji nazivamo odični diferencijal; $\Gamma_{jk}^i(x)$ su koeficijenti povezanosti kao funkcije koordinata x, pomoću kojih se opisuje tenzor $u_j^i(x)$, a dx^k diferencijali izabranih koordinata tačaka prostora u kome egzistira dati tenzor. To dvojstvo diferencijala još je poznatije kod pojedinih vektora, recimo $\boldsymbol{u}$ za koje znamo da postaje apsolutni $\frac{d^*}{dt}$ i relativni izvod $\frac{d}{dt}$ koji su međusodno vezani relacijom

$$\frac{d^* \mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \omega \times \mathbf{u} \tag{P0.2}$$

gde je t neki parametar, a ω vektor koji ukazuje na promenu pravca vektora $\boldsymbol{u}$. Ako je vektor, recimo $\boldsymbol{v}$, predstavljen njegovim koordinatama v^i u nekom koordinatnom sistemu $\mathbf{X} = (x,\ \mathrm{g})$ imamo, kao i u (P0.1) dva diferencijala i to Dv^i i dv^i, koji su međusodno povezani relacijama

$$Dv^i = dv^i + \Gamma_{jk}^i v^j \, dx^k \tag{P0.3}$$

gde su Γ^i_{jk} funkcije koordinata x tačke u kojoj posmatramo vektor v^i, a definisane nad metričkim tenzorom datog prostora ako je taj prostor metrički. Jasno se vidi da se izrazi (P0.1) i (P0.2) ne mogu u opštem slučaju integraliti pomoću integralnog računa zasnovanog nad diferencijalima, koji su u izrazima (P0.1), (P0.2) i (P0.3) označenim malim slovom d, tj. du^i_j, $d\mathbf{u}$ i dv^i. To bi, opisno rečeno, moglo skoro da znači: ako smo znali tenzor $u^i_j = u^i_j(x)$ i izračunali njegov diferencijal (P0.1), a zatim zaboravili ili izvođenje zagubili, čemu je bio jednak prvobitni tenzor u^i_j, da se više iz njegovog apsolutnog diferencijala (P0.1) ne može odrediti taj tenzor. U cilju isticanja potrebe za apsolutnim i kovarijantnim integralom pokažimo na kinematičkom primeru ovu manjkavost tenzorske analize. Neka je $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ brzina neke slododne tačke. Poznat je vektor ubrzanja $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$ te tačke. Kad se zna da je diferencijal brzine $d\mathbf{v} = \mathbf{w}(t)\,dt$, lako nalazimo

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{w}(\tau)\,d\tau. \tag{P0.4}$$

Isto se to postiže ako su vektor brzine $\mathbf{v} = (\dot{y}^1, \dot{y}^2, \dot{y}^3)$ i ubrzanje $\mathbf{w} = (\ddot{y}^1, \ddot{y}^2, \ddot{y}^3)$ predstavljeni u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $\mathbf{Y} = (y, \mathbf{e})$. Tada ćemo imati

$$\dot{y}^i(t) = \dot{y}^i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \ddot{y}^i(\tau)\,d\tau, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{P0.5}$$

Ako se izostave indeksi, a naglasi se da je $\dot{y}$ vektor, onda je očigledno da se izrazi (P0.4) i (P0.5) međusobno ne razlikuju. Samo korak dalje, ako vektor brzine $\mathbf{v}$ slobodne kinematičke tačke izrazimo u krivolinijskom koordinatnom sistemu $\mathbf{X}$, tj. $\mathbf{v} = \{v^1(x), y^2(x), y^3(x)$ diferencijal $d\mathbf{v}$ vektora $\mathbf{v}$ u tom koordinatnom sistemu je

$$Dv^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j dx^k = w^i\,dt, \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{P0.6}$$

Odavde iz (P0.6) već ne možemo na isti način, kao u (P0.4) i (P0.5) da izračunamo v^i, jer je

$$dv^i = w^i\,dt - \Gamma^i_{jk} v^j dx^k,$$

pa desnu stranu ovog diferencijalnog izraza, uopšteno gledano, ne možemo da integralimo kao i (P0.5); nije u tom smislu sačuvana kovarijantna priroda vektora brzine i ubrzanja kinematičke tačke. Ta matematička nesaglasnost nastaje, kratko rečeno, otuda što u tenzorskoj analizi imamo dva međusobno različita diferencijala tenzora, a samo jedan integral. Otklanjanje ove manjkavosti uvođenjem apsolutnog integrala nije prost zadatak, jer apsolutni diferencijal tenzora jednako sretamo u prostorima i nad potprostorima, a integralanje na podprostorima je kud i kamo složenije, čak i ako se ne radi o integralenju tenzorskih diferencijalnih izraza. Teškoće izviru i iz osobina tenzorskih polja. Na primer, pri prelazu iz obvojnog prostora na potprostor gube se neke komponente vektora, pa je razumljivo da se pri bilo kom razmatranju, pa i pri integralenju, ne mogu dobiti izgubljene komponente, ako se ne uzme veza između prostora i potprostora. Ako se operatorom $D*$, koji nazivamo apsolutni diferencijal, moglo od tenzora

u_j^i da dobije izraz (P0.1) logično je da je moguće uvesti takav operator $\widehat{\int}$ koji ćemo nazvati *apsolutni integral tenzora*, da iz tenzorskog diferencijalnog izraza (P0.1) proizvodi prvobitni tenzor u_j^i. To nije integral

$$I^i = \int (dv^i + \Gamma^i_{jk}(x)\, v^j(x)\, dx^k) = v^i + \int \Gamma^i_{jk}(x)\, v^j(x)\, dx^k + C^i$$

jer je očigledno da se na taj način ne može da odredi vektor $v^i(x)$, a pogotovo ne ako su funkcije Γ^i_{jk} nepoznate ili date samo u opštem obliku. Reč je o drugom kovarijantnom ili opštije o apsolutnom integralu tenzora $\widehat{I}$. Integral I i kovarijantni integral $\widehat{I}$ jednaki su: u slučaju tezora nultog reda, tj. skalarne invarijante, vektorske invarijante, kao na primer (P0.4), kao i u slučaju prostora kod kojih su koeficijenti povezanosti jednaki nuli. Mi razlikujemo pojmove „apsolutni" i „kovarijantni" integral tenzora; apsolutni integral je opštiji od kovarijantnog, obuhvata kovarijantni integral i neodređen je do kovarijantno konstantnog tenzora istog ranga. Kovarijantni integral tenzora je u suštini preslikavanje integrala tenzora iz jednog koordinatnog sistema u drugi.

1. Apsolutni integral tenzora

Ako u n-dimenzionom linearnom prostoru R^n imamo apsolutni diferencijal nekog tenzora, recimo (P0.1), kažemo da je

$$\widehat{I}^i_j = u^i_j - A^i_j, \tag{P1.1}$$

apsolutni integral tenzora u_j^i kod kojeg ja A_j^i integralni kovarijantno konstantni tenzor. Taj integral odeležavamo znakom $\widehat{\int}$, tj. u konkretnom slučaju za (P0.1)

$$\widehat{I}^i_j = \widehat{\int} Du^i_j, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{P1.2}$$

Definisanjem apsolutnog integrala tenzora pomoću tenzora drugog reda ne gubimo ništa od opštosti, a u izlaganju ove kovarijantne mehanike i ne javljaju se tenzori višeg reda. Pre nego što pokažemo osobine ovog tenzorskog integrala istaknimo prisutnu činjenicu da nije u potpunosti i u opštem slučaju rešen problem određivanja integralnog kovarijatno konstantnog vektora. Opšta tvrdnja ostaje jedino ta da je kovarijantno-konstantan, tj. da zadovoljava diferencijalne jednačine

$$DA^i_j = dA^i_j + \Gamma^i_{lk} A^l_j\, dx^k - \Gamma^k_{jl} A^i_k\, dx^l = 0. \tag{P1.3}$$

U prostorima u kojima je moguće ostvariti i odrediti autoparalelno pomeranje vektora, odnosno tenzora o čemu govore i relacije (P1.3) između dve tačke M i X mi još znamo da je tenzor A_j^i prvobitni tenzor $u_j^i(M)$ u tački M, autoparalelno prenešen u tačku X, pa su koordinate tenzora A^i_j funkcije koordinata tačaka M i X, tj. $A^i_j = A^i_j(M, X)$

U našim primenama mi ćemo koristiti upravo ovaj integral u euklidskom prostoru u kojem možemo da odredimo integralni kovarijantno-konstantni tenzor. Ali i nezavisno od toga pokažimo one osobine apsolutnog integrala koje koristimo u primeni u mehanici. Opštiji dokazi dati su u radovima [35] i [39]. U skladu sa definicijom i pogovorom imamo da je

$$\widehat{\int} Du^i_j = u^i_j(x) - A^i_j, \tag{P1.4}$$

a odavde prema definiciji samog integrala biće i

$$D\widehat{\int} Du^i_j = Du^i_j(x), \tag{P1.5}$$

jer je, kao i (P1.3)

$$DA^i_j = 0.$$

U pravolinijskom koordinatnom sistemu $\mathbf{Y} = (y, \mathbf{e})$ nekog afinog prostora $\mathbf{A}^3$ ili $\mathbf{A}^{3N}$ apsolutni integral tenzora jednak je „običnom" neodređenom integralu tog tenzora, tj.

$$\widehat{\int} Du^i_j = \int du^i_j = u^i_j + A^i_j, \tag{P1.6}$$

jer su i apsolutni i obični diferencijali tenzora u tom slučaju jednaki; veličine A^i_j su tada konstantne veličine.

Često u diferencijalnom izrazu nailazimo na zbirove apsolutnih diferencijala, pa istaknimo tvrdnju: *apsolutni integral zbira apsolutnih diferencijala tenzora jednak je razlici zbira tih tenzora i zbira njima odgovarajućih kovarijantno-konstantnih tenzora.* To se lako pokazuje. Neka je W^i_j zbir dva tenzora u^i_j i v^i_j, odnosno neka je dat diferencijal

$$DW^i_j = Du^i_j + Dv^i_j.$$

Imamo li u vidu (P1.4), prema čemu je

$$\widehat{\int} Du^i_j = u^i_j - A^i_j, \qquad \widehat{\int} Dv^i_j = v^i_j - B^i_j, \tag{P1.7}$$

gde su A^i_j i B^i_j kovarijantno-konstantni tenzori, sledi:

$$\widehat{\int} Dw^i_j = \widehat{\int} Du^i_j + \widehat{\int} Dv^i_j = u^i_j + v^i_j - (A^i_j + B^i_j), \tag{P1.8}$$

što je i trebalo pokazati.

Ako je u^i_j kovarijantno konstantni tenzor lako se pokazuje da je

$$\widehat{\int} u^i_j\, Dv^k_l = u^i_j\, v^k_l - B^{ik}_{jl}, \tag{P1.9}$$

gde je B_{jl}^{ik} kovarijantno konstantni tenzor. Dokaz se zasnivao na činjenici da je $Du_j^i = 0$ pa se tenzor u_j^i u odnosu na operator D, a isto tako i operator $\widehat{\int}$ ponaša kao konstantna veličina u odnosu na obični integral, tj.

$$\widehat{\int} u_j^i Dv_l^k = \widehat{\int} D(u_j^i v_l^k),$$

a odavde prema (P1.5) sledi (P1.9) ili

$$\widehat{\int} u_j^i Dv_l^k = u_j^i \widehat{\int} Dv_l^k = u_j^i (v_l^k + A_l^k) = u_j^i v_l^k - B_{jl}^{ik} \tag{P1.10}$$

gde je $B_{jl}^{ik} = u_j^i A_l^k$ kovarijantno-konstantni tenzor.

Od osobina apsolutnog integrala tenzora za naša ovdašnja razmatranja interensantna je i činjenica da je *apsolutni integral od invarijantnog tenzorskog diferencijalnog izraza i sam invarijanta, a integralni kovarijantno konstantni tenzor nultog reda je neodređena konstanta.* Zaista, neka imamo diferencijal invarijante $D\psi = \frac{\partial \psi}{\partial u^i} Du^i$ gde su u^i koordinate vektora **u**, biće prema (P1.4)

$$\widehat{\int} \frac{\partial \psi}{\partial u^i} Du^i = \widehat{\int} D\psi = \psi - A. \tag{P1.11}$$

Skalar A mora biti konstanta, jer je za skalar apsolutni diferencijal DA jednak običnom diferencijalu dA pa iz (P1.3) ili (P1.6) sledi da je $DA = dA = 0$, a odavde da je $A = \text{const.}$

U uvodnom delu ovog priloga istakli smo potrebu i značaj za integralom koji će sačuvati tenzorsku prirodu objekta nad kojom se primenjuje. Tu osobinu i ima apsolutni integral tenzora što nije slučaj sa običnim integralom. Da bi to pokazali posmatrajmo apsolutni integral $\widehat{I}_j^i$ nekog dvovalentnog tenzora u sistemu koordinata, recimo $z^i (i = 1, \ldots, n)$, i taj integral $\widehat{I}_\beta^\alpha$ u sistemu koordinata $x^\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Neka je

$$\widehat{I}_j^i = \widehat{\int} Du_j^i \quad \text{i} \quad \widehat{I}_\beta^\alpha = \widehat{\int} Du_\beta^\alpha$$

i neka između u_j^i i u_β^α postoje tenzorske relacije

$$u_j^i = u_\beta^\alpha \frac{\partial z^i}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}.$$

Tada je

$$\widehat{I}_j^i = \widehat{\int} D\left(u_\beta^\alpha \frac{\partial z^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}\right) = \frac{\partial z^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial z^j} \widehat{\int} Du_\beta^\alpha,$$

jer je $D\left(\frac{\partial z^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial z^l}\right)=0$. Odatle sledi

$$\hat{I}^i_j=\frac{\partial z^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}I^\alpha_\beta$$

što smo i tvrdili.

2. Kovarijantni integral tenzora

Integrale koje možemo transformacijom (P1.12) prevesti iz jednog koordinatnog sistema u drugi mi nazivamo *kovarijantni integral.* Apsolutni integral tenzora je kovarijantan, tj. zadovoljava transformacije (P1.12) ako je izražen u koordinatnom obliku. Apsolutni integral tenzora razlikujemo od kovarijantnog i po tome što apsolutni intagral egzistira nezavisno od koordinatnog sistema na koji se posmatra dati objekt, kao na primer (P0.4). Ako je $d\boldsymbol{w}$ diferencijal vektora ubrzanja tačke i ako postoji integral $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{J}$, mi taj integral nazivamo apsolutni, a njegove moguće varijante u raznim koordinatnim sistema, koje zadovoljavaju transformacije (Pl.12), kovarijantnim integralom. Dok apsolutni integral obuhvata i skalarnu i vektorsku invarijantu, dotle se kovarijantni odnosi na koordinate te vektorske invarijante. Dok se, na primer, apsolutni integral javlja kao konstantni vektor, pa i njegove koordinate u odnosu na koordinatni sistem sa konstantnim koordinatnim vektorima, dotle kovarijantni integrali tog istog tenzorskog odjekta mogu da dudu funkcije koordinata tačaka u raznim koordinatnim sistemima. Prema tome, kovarijantni integral preslikava mogući apsolutni integral tenzora iz jednog koordinatnog sistema u drugi. To podrazumeva ako je apsolutni integral odredljiv, tj. ako su odredljivi integracioni vektori, da kovarijantni integral određuje i kovarijantno konstantni integralni vektor. Prema relacijama (Pl.12) to znači ako znamo integral $\hat{I}^i_j$ nekog tenzorskog diferencijalnog izraza u jednom koordinatnom sistemu da isti transformacijama (Pl.12) možemo prevesti u drugi koordinatni sistem. Ali ako apsolutni integral nekog tenzora postoji u nekoj tački, recimo $M(y)\in E_{3n}$, u odnosu na pravolinijski koordinatni sistem Y, postoji i u odnosu na krivolinijski koordinatni sistem, pa pomoću kovarijantnog integrala tenzora možemo da odredimo taj apsolutni integral i u odnosu na neki krivolinijski koordinatni sistem bez transformacija (Pl.12).

U tom cilju posmatrajmo neki tenzor u tački $M\in E_{3n}$ u odnosu na pravolinijski koordinatni sistem $\mathbf{Y}=(y,\ \mathbf{e})$ i u odnosu na neki krivolinijski koordinatni sistem $\mathbf{X}=(x,\ \mathbf{g})$, koje uređuju, kako je navedeno, koordinatni vektori $\mathbf{e}$ i $\mathbf{g}$. U svakoj tački M euklidskog prostora biće

$$\mathbf{e}_i(M)\cdot\mathbf{e}_j(M)=\text{const}=A_{ij}. \tag{P2.1}$$

Iz razloga što se dati koordinatni vektori $\mathbf{e}$ mogu paralelno prenositi u posmatranom prostoru iz tačke M u drugu tačku X važiće i relacije

$$\mathbf{e}_i(M)\cdot\mathbf{e}_j(X)=\text{const.}=A_{ij}. \tag{P2.2}$$

Pri prelazu iz koordinatnog sistema $\mathbf{Y}$ na koordinatni sistem $\mathbf{X}$ treba koordinatne vektore $\mathbf{e}$ izraziti pomoću koordinatnih vektora $\mathbf{g}$, što ćemo da napišemo u obliku

$$\mathbf{e}_i(M)=\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\mathbf{g}_k(M),\qquad \mathbf{e}_j(M)=\frac{\partial x^l}{\partial y_j}\mathbf{g}_l(M).$$

Zamenom u (P2.2) sledi da je

$$\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\Big|_M \frac{\partial x^l}{\partial y^j}\Big|_X \mathbf{g}_k(M)\cdot\mathbf{g}_l(X)=A_{ij}. \tag{P2.3}$$

Ako komponujemo ove relacije sa $\frac{\partial y^i}{\partial x^a}\Big|_M \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha}\Big|_X$ dobićemo

$$\mathbf{g}_a(M)\cdot\mathbf{g}_\alpha(X)=A_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^a}\Big|_M \frac{\partial x^j}{\partial x^\alpha}\Big|_X, \tag{P2.4}$$

jer su

$$\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^a}\right)_M=\delta^k_a, \qquad \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha}\right)_X=\delta^l_\alpha$$

Kronekerovi simboli.

Ako se tačke M i X podudaraju, kao što je poznato iz (P2.3) dobijamo osnovni tenzor

$$g_{ak}(X)=\mathbf{g}_a(X)\cdot\mathbf{g}_\alpha(X), \tag{P2.5}$$

prostora E_{3n} za sistem koordinata x. Za slučaj da se tačke M i X ne poklapaju, izrazi (P2.3) su koordinate navedenog proizvoda dva vektora od kojih jedan u tačku M, a drugi u tačku X, pa ćemo ga nazivati dvotačkasti osnovni tenzor i pisati

$$g_{a\alpha}(M,\ X)=\mathbf{g}_a(M)\cdot\mathbf{g}_\alpha(X). \tag{P2.6}$$

Ako se dogovorimo da indekse koordinata u tački M obeležavamo malim kurzivnim slovima adecede: $a,\ b,\ c,\ldots$ za razliku od koordinata u tački X čije indekse pišemo grčkim slovima, onda prednji dvotačkasti tenzor pisaćemo u obliku

$$g_{a\alpha}=g_{a\alpha}(M,\ X). \tag{P2.7}$$

Uporedimo li ovaj tenzor sa (3.5) videćemo da imamo operator pomoću kojeg jedan vektor iz tačke M prenosimo u tačku X.

A to je i bilo potredno da bi odredili integralni kovarijantno-konstantni tenzor apsolutnog integrala. Relacije (P1.6) pokazuju da je kovarijantno-konstantni tenzor A^i_j iz (P1.4) paralelno prenošljiv iz tačke $M\in E_{3n}$ u tačku $X\in E_{3n}$. Tako, na primer, neka imamo tenzorske jednačine

$$T^\alpha_\beta\, DU^\gamma_\delta - DI^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}=0. \tag{P2.8}$$

Na osnovu definicije apsolutnog integrala tenzora i osodine (P1.8) imaćemo,

$$\widehat{\int} T^\alpha_\beta\, DU^\gamma_\delta - \widehat{\int} DI^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}=0,$$

a odavde

$$\widehat{\int} T^\alpha_\beta\, DU^\gamma_\delta - I^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}+A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}=0.$$

Ove jednačine dalje možemo integraliti ako je

1) T^{α}_{β} kovarijantno konstantni tenzor, kada će slediti

$$T^{\alpha}_{\beta}U^{\gamma}_{\delta}-I^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}+A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}=0. \tag{P2.9}$$

Integralni kovarijantno-konstantni tenzor $A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}$ ovde određujemo tako što poznate tenzore u nekoj fiksnoj tački $M(\overset{1}{x_0}, \ldots, \overset{n}{x_0})$ prenosimo paralelno pomoću dvotačkastog tenzora (P2.7) u tačku $X(x^1, \ldots, x^n)$, i to:

$$A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}=g^{\alpha}_{a}g^{\gamma}_{g}g^{b}_{\beta}g^{d}_{\delta}(I^{ag}_{bd}-T^{a}_{b}U^{g}_{d}), \tag{P2.10}$$

gde su $I^{ag}_{bd}(M)$, $T^{a}_{b}(M)$, $U^{g}_{d}(M)$ posmatrani dati tenzori u tački M, a g^{α}_{a} mešoviti dvotačkasti tenzor. Kako su ovi tenzori funkcije koordinata $\overset{1}{x_0}, \ldots, \overset{n}{x_0}$ tačke M i koordinata $x^1, \ldots, x^n$ tačke X, to su i $A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}=A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}(M, X)$ funkcije koordinata tačke M i tačke X. Tako za kovarijantne integrale kovarijantnih diferencijalnih jednačina (P2.8) u kojima je $T^{\alpha}_{\beta}=T^{\alpha}_{\beta}(X)$ kovarijantno konstantni tenzor su

$$T^{\alpha}_{\beta}U^{\gamma}_{\delta}-I^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}=g^{\alpha}_{a}g^{\gamma}_{g}g^{b}_{\beta}d^{d}_{\delta}(T^{a}_{b}U^{g}_{d}-I^{ag}_{bd}). \tag{P2.11}$$

Kovarijantni integral ima istu valentnost kao i diferencijalni izraz.

2) Izvršimo li kontrakciju $\beta=\gamma$ jednačina (P2.8) $T^{\alpha}_{\beta}DU^{\gamma}_{\delta}|_{\gamma=\beta}=T^{\alpha}_{\beta}D^{\beta}_{\delta}$ i $I^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}=I^{\alpha\beta}_{\beta\delta}$, pod istim uslovom da je T^{α}_{β} kovarijantno konstantni tenzor, sledeće

$$\widehat{\int}(T^{\alpha}_{\beta}DU^{\beta}_{\gamma}-DI^{\alpha\beta}_{\beta\gamma})=T^{\alpha}_{\beta}U^{\beta}_{\gamma}-I^{\alpha\beta}_{\beta\gamma}-A^{\alpha}_{\gamma}=0 \tag{P2.12}$$

pa je integralni kovarijantno-konstantni tenzor A^{α}_{γ} dvovalentan. Određujemo ga zato sa dva bipunktulna tenzora i to

$$A^{\alpha}_{\gamma}=g^{\alpha}_{a}g^{g}_{\gamma}(T^{a}_{b}U^{b}_{g}-I^{ab}_{bg}), \tag{P2.13}$$

što smo mogli da dobijemo i iz (P2.11) ako se zna da je

$$g^{\gamma}_{g}g^{b}_{\beta}|_{\beta=\gamma}=g^{\beta}_{g}g^{b}_{\beta}=\delta^{b}_{g}=\begin{cases}1, & b=g\\ 0, & b\neq g\end{cases} \tag{P2.14}$$

Tako, zamenom (P2.13) i (P2.12) konačno dobijamo kovarijantne integrale

$$T^{\alpha}_{\beta}U^{\beta}_{\gamma}-I^{\alpha\beta}_{\beta\gamma}=g^{\alpha}_{a}g^{g}_{\gamma}(T^{a}_{b}U^{b}_{g}-I^{ab}_{bg}). \tag{P2.15}$$

Ova tenzorska relacija je interesantna za primene u dinamici, naročito ako je tenzor U jednovalentan, tj. vektor, a T^{α}_{β} dvovalentni osnovni tenzor. Relacije (P2.8) su tada prostijeg vektorskog kontravarijantnog odlika

$$T^{\alpha}_{\beta}DU^{\beta}-DI^{\alpha}=0 \qquad (DT^{\alpha}_{\beta}=0), \tag{P2.16}$$

ili kovarijantnog

$$T_{\alpha\beta}DU^{\beta}-DI_{\gamma}=0 \qquad (DT_{\alpha\beta}=0). \tag{P2.17}$$

Kovarijantni integral ovih jednačina (P2.17) je tada

$$T_{\beta\gamma}U^{\beta}-I_{\gamma}=g_{\gamma}^{a}(T_{ab}U^{b}-I_{a}) \tag{P2.18}$$

gde su U^b i I_a poznati vektori u nekoj fiksnoj tački.

Ponovimo, na kraju ovog priloga, da ovako određeni kovarijantni integrali kovarijantnih diferencijalnih jednačina zadržavaju iste prirodne osodine integraljenih objekata u svim koordinatnim sistemima ravnopravno. Kao takve njih je na ovaj način moguće odrediti u bilo kojem koordinatnom sistemu bez transformacija (P1.12) samo ako se znaju dvotačkasti tenzori (P2.5) i prvobitni tenzori u nekoj fiksnoj tački euklidskog prostora.

POGOVOR

Moji prvi radovi vezani su za autoparalelne linije. Otuda je i potekla ideja o integralenju diferencijalnih jednačina ovih linija u tenzorskom obliku. Uz kasnije radove o invarijantnom kriterijumu o stabilnosti, ideja o kovarijantnim integralima diferencijalnih jednačina kretanja nametala se kao potreba. Ali tu prostu ideju u više ponovljenih pokušaja nisam uspevao da dovedem do matematičkih relacija. U vremenu od 1965. do 1969. pokušao sam da na ovom zadatku angažujem neke naše talentovane naučnike ali bez uspeha. Ostvarene pismene i usmene konsultacije sa dva naučnika svetskog glasa bile su više obeshrabrujuće nego ohrabrujuće. Dana 20. marta 1970. predložio sam Odeljenju za mehaniku Matamatičkog instituta u Beogradu jedno rešenje, koje je uz izvesna skraćenja odjavljeno u radu [35], ali u kojem je integralni kovarijantno konstantni tenzor ostao neodređen. U kasnijem radu [39] taj rezultat je razvijen do kovarijantnog integrala tenzora, koji primenjujemo u ovoj knjizi, uz ispravku one greške koje se javila pri određivanju kovarijantno-konstantnog tenzora pomoću dvotačkastog tenzora na Rimanovim mnogostrukostima. Bilo je previđeno za pojedine primere da osnovni dvotačkasti tenzor (bipunktualni), koji je uveden za eukliski prostor ne može biti bukvalno primenjen na sve potprostore, kao što se to jasno sada vidi iz primera određivanja geodezijske linije na sferi (str. 41). To se uglavnom javilo zbog izvesne neusklađenosti terminologije o prostorima u teorijskoj mehanici. Linearni vektorski prostori u mehanici se najčešće predstavljaju u koordinatnom obliku, kao i sami koordinatni i metrički prostori, što ponekad dovode do nejasnosti i nesporazuma. Da bi izbegli eventualne nesporazume, u ovom radu smo na više mesta pojasnili neke pojmove koji se u mehanici upotrebljavaju bez strogih određenja. To je dovelo do nevelikog odstupanja od uobičajene stručne terminologije, kao, na primer, umesto „metrički tenzor konfiguracije prostora" ovde kažemo „inercijski tenzor", ili umesto polarni moment" ovde kažemo „linearni polarni moment inercije".

Posle objavljivanja prvih rezultata o apsolutnom integralu tenzora saznao sam da su se ovim pitajem bavili i drugi naučnici, čak i pre mene. Prvi mi je na to skrenuo pažnju dr Stevo Komljenović ukazujući na rad [26]. Nažalost, ni posle dva pokušaja nisam uspeo da uspostavim vezu sa njegovim autorom. Mnogo kasnije, februara 1980., a zatim februara 1981., dakle po završetku pripreme ove monografije za štampu, zahvaljujući ljubaznosti prof. dr Arthura Moór saznao sam i za radove [14, 17, 18, 19, 20, 23, 24]. I ako ove radove nisam proučio ili još nisam video smatram za potrebno i korisno da ih uvrstim u bibliografski spisak, ma da ovdašnje rezultate ne vezujemo za te radove.

Autor

BIBLIOGRAFSKI SPISAK

[1] Anđelić T. P., *Tenzorski račun*, Naučna knjiga, Beograd, 1967.

[2] Anđelić T P., *Teorija vektora*, Prosveta, Beograd 1947.

[3] Anđelić T. P. i Stojanović R., *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1966.

[4] Bakša A., *On the Stability of various equilibrium and stationary motion of nonholonomic systems*, Publ. Inst. Math., T. 14 (28), 1972, pp 9—14.

[5] Bakša A., *O optimalnoj stabilizaciji stacionarnih kretanja neholonomnih sistema*, Matematički vesnik (10) (25). Beograd, 1973.

[6] Bakša A., *Stabilnost kretanja neholonomnih sistema* (doktorska disertacija), Beograd, 1976.

[7] Bilimović A., *O jednom opštem fenomenološkom diferencijalnom principu*, Beograd, 1976.

[8] Bokan N., *Some propertes of fundamental bipoint tensor*, Mat. ves., 8 (23), sv. 4., 1971.

[9] Branković V., *Stabilnost stanja ravnoteže i kretanja mehaničkog sistema tačaka promenljive mase*, Tehnika, IT, god. XXVIII, br 7, 1973.

[10] Drašković Z., *O invarijantnosti integralenja u euklidskom prostoru*, 14. jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Opšta mehanika A1—9, str. 65 — 72, Portorož, 1978.

[11] Drašković *On invariance of integration in Euclidean Space*, Tensor, Vol. 35 Tokio-Fujisava) 1981.

[12] Eisenhart L. P. *An introduction to Differential Geometry with use of the Tensor Calculus* (u prevodu Anđelić T. P., *Uvod u diferencijalnu geometriju*, Naučna knjiga, Beograd, 1951).

[13] Ericksen I. L., *Double Tensor Fields* (17. Addition and integration in Euclidean Space), Handbuch der Physik, Encyclopedia of Physics, Band III/1, Vol. III/1, pp. 808.

[14] Fabian W., *Tensor Integrals*, Proc. of the Edinburg Math. Soc. (2) 10, part IV. 145—151.

[15] Фок В. А., *Теория пространства, времени и тяготения*, Москва, 1955.

[16] Гантмахер Ф, Р, *Лекции по аналитический механике*, Москва 1960. (u prevodu Vujičić V., Gantmaher F. R., *Analitička mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1963).

[17] Gottlieb J., *La tenseur-intégral et quelques unes de ses consequences pour la Physique*, Preprint F. T 2, (01. 1969), Univ. Timişoara, p. 1—14.

[18] Gottlieb J., *Tensor integral and exterior derivative of double tensorial forms*, An. şt. Univ. Iaşi (s. n) Secţ. I a. Matematică, Tom XVIII, 1972, p. 457.

[19] Gottlieb J., Latu M., Zet G., *Tensor integral and exterior derivative in parallelizable spaces*, An. şt. Univ. Iaşi (s. n), Secţ. I a. Matematica, Tom XV, 1969, p. 457.

[20] Gottlieb J., Mociutchi C., *Sur les covariantes de conservation dans la théorie de la relativité générale*. An. şt. univ. Iaşi (s. n), Secţ. I a Mathematica, Tom XVII, 1971, p. 105.

[21] Gottlieb J., Oproiu V., Zet G., *The tensor-Integral in Spaces with Affine Connection*, An. st. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, Sect. Ia Matematica, tom XX, 1974, pp. 124—126.

[22] Leko M. i Plavšić M., *Rešeni problemi iz tenzorskog računa sa primenama u mehanici*, Građevinska knjiga, Beograd, 1977.

[23] Moór A., *Einfuhrug des invarianten Differentials und Integrals in allgemeinen metrischen Raumen*, Acta Math., 86, (1951), p. 71—83.

[24] Moór A., *Uber kovariante Ableitung und partielles Tensor integral*, Monatshefte fur Mathematik, 70, 1966, p. 134—148.

[25] Седов Л. И, *Механика сплошной среды*, Том. I, изд. II, „Наука" Москва 1973.

[26] Shepelavey B., *Global Covariant Conservation Laws in Riemannian Spaces*, Journal of Mathematical Phisics, Vol. 7, N. 7, 1966, pp. 1303—1309.

[27] Вуйчич В. А., *Некоторые интегралы уравнений движения динамически меняющейся точки* ППМ Т. XXIV, вып. 4, ст. 7 2, Академия наук СССР, Москва, 1960.

[28] Вујичић В. А., *Идентификовање трајекторија тачке променљиве масе са аутопаралелама.* Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX, Мат. инст. књига 8, Београд, 1960.

[29] Vujičić V. A., *Kretanje dinamički promenljivih objekata*, Beogradski univerzitet 1961.

[30] Vujičić V. A., *Neki integrali jednačina kretanja dinamički promenljivog objekta*, Tehnika, IT, godina XVII, broj 4, 1962.

[31] Vujičić V. A. *O tenzorskim osobinama tenzora inercije*, Mat. ves, Beograd, 3 (18), sv. 2, 1966.

[32] Vujičić V. A. *On the Covariant Differential Equation of Motions of Dinamical Systems with Variable Mass*, Tensor, vol 18 (Tokio—Fujisawa), 1967, p. 181.

[33] Vujičić V. A *Über die Stabitität der stationären Bewegungen*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), Band 48, Berlin, 1968.

[34] Vujičić V. A., *General Conditions of the state of Equilibrium of the Dunamic Sysstem of a Variable mass*, Tensor, N. S. Vol. 19 (Tokio-Fijisawa), 1968.

[35] Вуйичич В. А. *Абсолютный интеграл тензора*, Publication de L' Institut Mathematique, Vol 10 (24), str. 199. Beograd, 1970·

[36] Вуйичич В. А. *Общее утверждение об устойчивости движения и состаяния равновесия механических систем*, Publ. Inst. Math T 11 (25), Beograd, 1971.

[37] Vujičić V. A. *Covariant Equations of Disturbed Motion of Mechanicol sistems*, Tensor, vol. 22, (Fujisawa), 1971.

[38] Vujičić V. A. *O realnosti prvog postulata dinamike*, Dijalektika-časopis za opšte probleme mat., prirodnih i teh. nauka br. 1 God. VII, Beograd, 1972.

[39] Vujičić V. A. *Contribution to Tensor Calculus*, Tensor, Vol. 25, p. 375—382, (Fujisawa), 1972.

[40] Вуйичич В. А. *Координатное n-мерное пространство масса которого зависит от времени*, Publ. Inst. Math., Tom 9 (23), Beograd, 1969.

[41] Вуйичич В. А. *Ковариантые интегралы в механике*, Прикладная математика и механика, Т. 40, Академия наук СССР, Москва, 1976

[42] Вујичић В. А., *Аналитички критеријум о стабилности кретања реономних система*, Глас CCCI Српске академије наука и уметности, Одељење природно-математичких наука, књига 41, 1977.

[43] Vujičić V. A. *Kovarijantno diferenciranje skalara preko vektora*, Mat. Ves. 3 (16) (31), 1979.

[44] Вуйичич В. А. *О квазилнейным колебаниям механической системы*, Teorijska i primenjena MEHANIKA, br. 4, Beograd, 1978.

[45] Vujičić V. A. *Transformacija koordinata vektora položaja*, Tehnika IT, Opšti deo, godina XXXV, br. 6, 1980.

COVARIANT DYNAMICS

Veljko A. Vujičić

Abstract

"Following the statement that mechanics as a theoretical discipline formulates certain natural laws of objects motion that do not depend on the system of reference, it is a logical requirement to formulate these laws in a form that ensures independence on the system of coordinates. It was partialy done in a case of differencial expressions that describe some properties of object motion, but not for the results that follow from intergration of the differential equations of motion. From this point of view, these results contribute to the completition of the dynamics; they formulate a covariant theory that describes certain motions with the same or similar mathematical expressions. This was achived by introduction of the absolute integral into the tensor calculus, that has a propertie of covariance. Owing to the vector nature of the force i.e. it is in fact the tensor invariance and, also, due to the vector character of other differential expressions that include the force, it was rather simple to elaborate the mechanics using the absolute integral, and to formulate a consistent covariant dynamics" (from Preface).

Some new results have been obtained. Introduction is devoted to the radius vector of point (1.12) in curvelinear coordinates. Radius vector transformations are obtained in the form given by Egs (1.18) and (1.15) that are followed by the relations (1.26). Eq. (2.4) is derived, where $\nabla_j r_i$ is covariant derivative of radius vector. Using double tensor field given by Eq (3.4) or (3.7) it is possible to shift the tensor from a point O to a point X in an arbitrary curvelinear coordinate system. After appling the tensor absolute integral on differential equations (12.12) or (12.21), covariante integrals (12.13) and (12.22) are obtained. The velocity is determined by the relations (5.4), and generalized momentum is given by Eq. (6.1) or (6.7).

Dynamics of point and system of points is based on the four axioms or laws (p. 34). The first law, given by the expression (10.4) leads to the equation of a trajectory of a given point due to the inertia (10.14) in arbitrary system of coordinates. The differential equations of the first order (20.24) of the geodisics, also, are given while a problem of the determination of covariant constant vector A is discussed. Covariant differential equations of motion of a point have the form given by (12.4) and (12.5)). Galileo's transformations are given by (12.19). For the forces (14.7) with generalized potential, the energy integral (14.9) is obtained. Differential equation (15.6) gives integrals (15.7). The invariance criteria of the stability equilibrium and motion of a system of points is determined by the sign of the expressions (16.5.—16.8) or (16.15) and (30.1). Covariant equations of a perturbed motion are given by (16.12), (29.13) and (29.17).

Generalized momentum of the system of points given by (23.8) and (23.10) in the space E_{3m}, and corresponding differential equations of motion in a Riemannian space are (24.10) and (24.11). For the constraints given by (26.1), (26.2) and (26.3) the corresponding covariant differential equations of motion in the E_{3m} and R_{m+1} space, respectively, care (26.11) and (26.17).

Energy law of a reonomous system is given by differential equation (27.1) from which, for the conditions a) and b) Eqs (27.14) and (27.15) respectively, follow as the first integrals; for the general case one can get expression (27.9).

Sections 31. and 32. are devoted to the motion of a rigid body. More details about the absolute integral (Pl.1) or (Pl.6) and corresponding covariant tensor integral (P2.11) are given. The present text has evolved from a series of published papers and articles in preparation.

КОВАРИАНТНАЯ ДИНАМИКА

Велько А. Вуйичич

Резюме

“Исходя из таго, что механика как теоретическая наука определяет некоторые законы движения объектов, реально не зависящих от наблюдения и описания, логично поставить задачу: записать одни и то же законы движения одинаковым или похожим соотношением относительно любой системы координат. Это в какой-то степени сделано для дифференциальных выражений частичных харкатеристик движения, но не полностью; если реч идет о результатах, полученных интегрированием дифференциальных уравнений движения то, как правило, они нековариантны. В этой работе указаны приложения, которые с этой точки зрения пополняют динамику, делают ее полностью ковариантной теорией, записивающей движения систем одинаковым соотношением относительно любых систем координат. Это достигнуто благодаря введению в тензорное исчисление абсолютного интеграла котроый имеет свойство ковариантности. Так како сила — векторная, а тем самым — и тензорная инварианта и другие дифференциальные выражения, в которых фигурирует сила — векторного характера, оказалось нетрудно дополнить эту теорию и получить одну целостную ковариантную динамику“ (Из предисловия).

Получены некотрые результаты, новые либо по форме, либо в качественном смысле. Во введении рассматривается радиус-вектор (1.12) в криволинейной системе координат; вводится преобразование координат r^i радиус-вектора $\mathbf{r}$ в виде (1.18) и (1.25), откуда следуют и соотношения (1.26). Получены уравнения (2.4), где $\nabla_i r_j$ ковариантная производная радиус-вектора. Пользуясь двухточечным тензором (3.4), т.е. (3.7), обеспечивается параллельный перенос тензора (3.9) из точки $A \in E_3$ в точку $X \in E_3$ в системе криволинейных координат (3.11), (3.12), . . . , (3.15). К интегрированию дифференциальных уравнений (12.12) или (12.21) применяется обсолютный интеграл тензора и получаются ковариантные интегралы (12.13), (12.22). Скорость движения определяется соотношением (5.4), а координаты вектора импульса соотношениями (6.1) или (6.7).

Динамика точки и системы точек строится при помощи четирех аксиом (стр. 34). Из первой аксиомы, выражающейся соотношением (10.4), следуют окончательные уравнения траектории движения точки по инерции (10.14) относительно любой системы координат. Приводятся дифференциальные уравнения первого порядка (10.24) для геодезической, где указыватесля на

проблему определения ковариантно — постоянного вектора A. Ковариантные дифференциальные уравнения движения точки имеют вид (12.4) и (12.5), а преобразование Галилея — (12.19). Для сил (14.7) имеет место интеграл (14.9). Интеграл (15.7) следует из дифференциального уравнения фазовой траектории (15.6). Инвариантный критерий устойчивости равновесия и движения точек системы устанавливается в силу знакоопределености выражений (15.5)—(16.8), (16.15), (30.1). Ковариантные дифференциалные уравнения возмущенного движения имеют вид (16.12), (19,13) и (29.17).

Обобщенные импульсы системы точек определяются выражениями (23.8), (23. 10) в пространстве E_{3n}, а в Римановом многообразии соотвествующие дифференциальные уравнения движения — (24.10) и (24.11). При наличии связей (26.1), (26.2) и (26.3) ковариантные диффереціальные уравнения движения в E_{3n} дают соотношения (26.11), а в пространстве R_{m+1} — (26.17). Закон энергии движения нестационарной системы записивается соотношением (27.1) и (27.9). При условиях а) и б) следуют первые интегралы энергии (27.14) и (27.15) соответственно. Части 31 и 32 посвящены движению твердого тела. В приложениях обсуждаются понятия абсолютного интеграла тензора (P1.1) или (P1.6) и ему соответственного ковариантного интеграла тензора (P2.17).

Монография предназначена ученым, занимающимся вопросами аналитической механики и тензорного исчисления.

ПОСЕБНА ИЗДАЊА МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА У БЕОГРАДУ

1 (1963) *D. S. Mitrinović* et *R. S. Mıtrinović:*
Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling. III.

2. (1963) *K. Milošević-Rakočević:*
Prilozi teoriji i praksi Bernoullievih polinoma i brojeva.

3. (1964, 1972) *V. Dévide.*
Matematička logika.

4. (1964) *D. S. Mitrinović* et *R. S. Mitrinović:*
Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling IV.

5. (1965) *D. Z. Đoković:*
Algebra trigonometrijskih polinoma.

6. (1965) *D. S. Mitrinović* et *R. S. Mitrinović:*
Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling VI.

7. (1969) *T. Peyovitch, M. Bertolino, O. Rakić:*
Quelques problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires.

8. (1969) *Б. П. Ђерасимовић:*
Правилни верижни разломци.

6. (1971) *Veselin Milovanović:*
Matematičko-logički model organizacijskog sistema

10. (1971) *Borivoj N. Rachajsky:*
Sur les systèmes en involution des équations aux dérivées partielles du premier ordre et d'ordre supérieur. L'application des systèmes de Charpit.

11. (1974) *Zlatko P. Mamuzić:*
Koneksni prostori.

12. (1974) *Z. Ivković, J. Bulatović, J. Vukmirović, S. Živanović:*
Aplication of spectral multiplicity in separable Hilbert space to stochastic processes.

13. (1975) *Milan Plavšić:*
Mehanika prostih polarnih kontinuuma.

Izdaje: Matematički institut u Beogradu

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17