МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Историја математичких и механичких наука

Књига 4

ПРИСУТНА ПРОШЛОСТ

У СПОМЕН ХУМАНИСТЕ И РАТНИКА, МАТЕМАТИЧАРА И ПРИРОДЊАКА

академика

др РАДИВОЈА КАШАНИНА

1892–1989.

БЕОГРАД

1991

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Историја математичких и механичких наука

Књига 4

ПРИСУТНА ПРОШЛОСТ

У СПОМЕН ХУМАНИСТЕ И РАТНИКА,
МАТЕМАТИЧАРА И ПРИРОДЊАКА
академика
др РАДИВОЈА КАШАНИНА
1892–1989.

БЕОГРАД

1991

ИСТОРИЈА НАУКА је све присутнија у делу савременог научника као неопходни источник у упознавању одређених резултата научне прошлости. Из ових разлога је Математички институт у Београду покренуо едицију

ИСТОРИЈА МАТЕМАТИЧКИХ И МЕХАНИЧКИХ НАУКА
HISTORY OF MATHEMATICAL AND MECHANICAL SCIENCES

Задатак ове едиције је да научним апаратом историје наука упозна читаоце са резултатима из историје математике и механике.

*

Ова публикација није периодична.

*

Рукописе опремљене за штампу слати на адресу: Математички институт, Кнеза Михаила 35, 11001 Београд, пошт. фах 367.

Manuscripts should be addressed to: Matematički institut, Kneza Mihaila 35, 11001 Beograd, p.p. 367, Yugoslavia

Издаје: Математички институт: Кнеза Михаила 35, 11001 Београд, п.п. 367

КЊИГА 4 (1991)

I 18

MATHEMATICAL INSTITUTE

History of Mathematical and Mechanical Sciences

Book 4

THE PRESENT PAST

IN MEMORY OF THE HUMANIST AND WARRIOR, MATHEMATICIAN AND NATURALIST academician dr RADIVOJ KAŠANIN 1892–1989.

BELGRADE

1991

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

Историја математичких и механичких наука

Књига 4

ПРИСУТНА ПРОШЛОСТ

*

У СПОМЕН ХУМАНИСТЕ И РАТНИКА,
МАТЕМАТИЧАРА И ПРИРОДЊАКА
академика
др РАДИВОЈА КАШАНИНА
1892–1989.

БЕОГРАД

1991

На 23. седници Научног већа Математичког института од 17. јуна 1990. године донета је одлука да се ова публикација објави.

*

Технички уредник Драган Трифуновић; Текст обрадио у TEX-у Мирко Јанц; Лектор Ивана Трифуновић; Тираж 300·

*

Класификација Америчког математичког друштва (AMS Mathematics Subject Classification 1985): 01 A 70, 04-00, 51-03, 70-03.

CIP - Катализација у публикацији

Библиотека САНУ, Београд

PRISUTNA PROŠLOST

ПРИСУТНА ПРОШЛОСТ : у спомен хуманисте и ратника, математичара и природњака академика др Радивоја Кашанина : 1892-1989. / гл. уред. Драган Трифуновић. - Београд : Математички институт, 1990. - 176 стр. : мл. : 25 цм. - (Историја математичких и механичких наука ; књ. 4)

Упоредни наслов на енглеском. - Библиографија уз сваки рад. - Извод на енглеском

YU ISBN-86-80593-06-0
51(092):929(497.11)"18/19"KAŠANIN
: Š10:512:514:517:33:531/534 (091)

1. Trifunović, Dragan
2. Kašanin, Radivoje

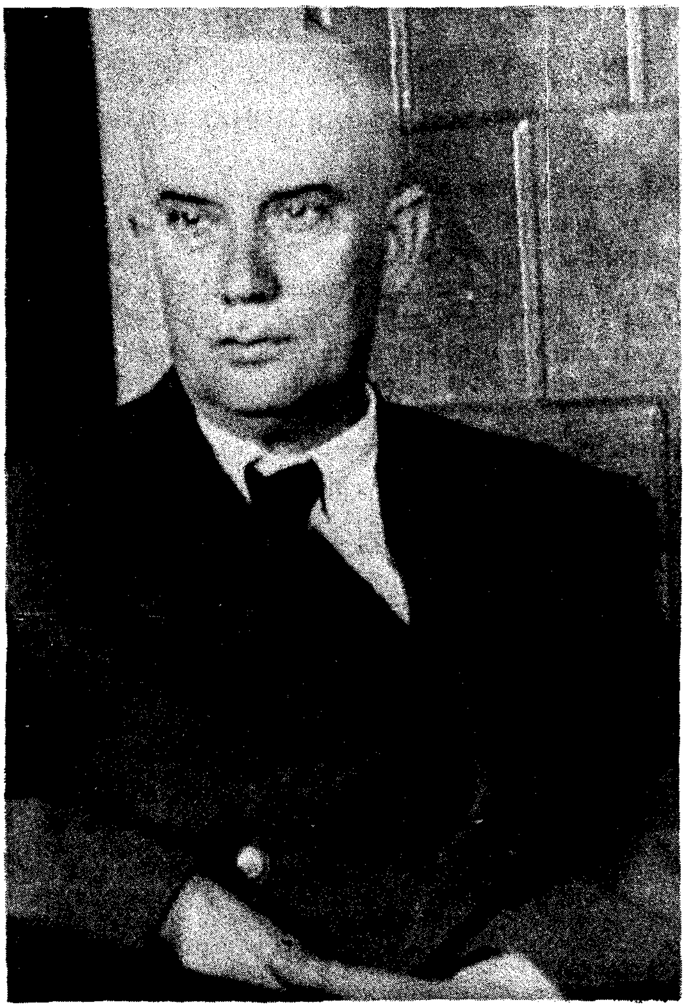
Према мишљењу Републичког секретаријата за културу СР Србије ова публикација је ослобођена пореза на промет.

САДРЖАЈ

Страна
Page

„Имао сам срећу да се развијам и радим поред њих, великих ауторитета науке и морала. Да се поносим њиховим пријатељством. Не верујем да је игде постојао такав амбијент какав су створили Гавриловић, Петровић и Миланковић."

Радивој КАШАНИН
Београд, 1974. г.



академик
др РАДИВОЈ КАШАНИН
професор универзитета
1892-1989.

Миодраг ТОМИЋ, Слободан АЉАНЧИЋ

РАДИВОЈЕ КАШАНИН КАО МАТЕМАТИЧАР*

Од математичара Срба који су предавали математику на Београдском универзитету између два рата, Радивоје Кашанин (1892–1989) једини није био ђак Михаила Петровића (1868–1943). Он је истина тезу одбранио код Петровића, али избор тезе, њен облик и резултати су Кашаниново дело. То се исто може рећи и за тезе Јована Карамате (1902–1967) и Милоша Радојчића (1903–1975). Кашанин је започео студије у Бечу, наставио у Загребу и Пешти, а завршио их у Паризу. Са сваког од тих универзитета он је понео нешто знања. Благодарећи изузетном памћењу, он је тако увећао своје велико енциклопедијско знање *Опште математике*. У Бечу код Виртингера (W. Wirtinger), он се упознао са принципима савремене Анализе. Јуриј Мајцен у Загребу указао му је на токове оновремене Геометрије. Када је после свих страдања, које му је донео први светски рат, одлучио да заврши студије, он се нашао на Сорбони у Паризу. Курсеве Гурса (E. Goursat), Пикара (E. Picard) као и Рационалну механику Апела (P. Appell) он је темељно проучио. Али његов радознали дух привукла је и Астрономија. По његовим речима, он се чак и колебао да ли да посвети више пажње и времена и Астрономији. Кашанин је стварно имао оно знање Опште математике које се сматрало основом математичких наука почетком двадесетог века. О многим проблемима он је могао да говори критички и са разумевањем, али и

* Радивоје Кашанин рођен је у Белом Манастиру 21. маја 1892. године (по старом календару). Прва три разреда учио је у класичној гимназији у Осијеку, а осталих пет у Српској православној великој гимназији у Новом Саду, где је матурирао јуна 1910. Студирао је Математику и Астрономију у Бечу (1910/11), Загребу (1911/13) и Будимпешти (1913/14). Као студент у Загребу био је 1912/13. асистент на Катедри Геометрије. По избијању првог светског рата 1914. године мобилисан је од стране аустро-угарских власти и упућен на фронт у Галицију, где је одмах прешао Русима и пријавио се за добровољца у српску војску. Када је у Одеси формирана Српска добровољачка дивизија, упућен је почетком 1916. у ову дивизију у којој је, у чину резервног пешадијског потпоручника, постављен за ађутанта I пешадијског пука. У том чину и звању био је 1916. на фронту у Добруџи, 1917. у Бесарабији, 1918. на Солунском фронту. Студије математике завршио је на Сорбони у Паризу 1921. (Licence ès Sciences mathématiques). Докторирао је код Михаила Петровића (1924). На Техничком факултету у Београду постављен је за асистента 1922, за доцента 1926, за ванредног професора 1930. и за редовног професора 1939. године. Двапут је био биран за ректора Техничке велике школе (1950/51 и 1951/1952). Био је управник Математичког института у периоду 1951–1958, а затим председник његовог Савета (1958–1961). За дописног члана Српске академије наука изабран је 2. марта 1946, а за редовног члана 10. јуна 1955. године. Радивоје Кашанин преминуо је 30. октобра 1989. године у Београду.

да оцени суштину проблема. Старији учесници на седницама Математичког института, одмах по Ослобођењу, сећају се његових многобројних примедаба и коментара. Очигледно је било, да су те примедбе биле оправдане, да су питања ишла у срж проблема, да је он лако одвајао суштину рада од спољне конструкције. Нешто од тог општег и широког знања пренело се и на његов истраживачки рад на пољу математичких наука. Његови радови нису бројни, али су по областима разноврсни. Кашанин је радио у теорији Диференцијалних једначина, Функција комплексне променљиве, Анализе, Геометрије, Интерполације и апроксимације, Механике па, чак и Астрономије. У његове последње радове долази покушај математичке интерпретације космогоничне теорије Павла Савића.

Проблем, који Кашанин посматра у својим математичким радовима, је на први поглед једноставан. Тај проблем је скоро увек изворан. Он није последица неких других резултата, а најмање уопштење познатих ставова. Његов исказ је прост, али пут до његова решења није једноставан. Кашанин је полазећи од најједноставнијих елемената, дедуктивним путем тежио да проблем раствори и да објасни његову генезу. Он је у истраживачком раду био скоро самоук, боље речено није припадао некој школи, а није имао ни неког посебног узора ни у избору области ни у начину обраде. Он је пре прихватао аксиоматски приступ научном истраживању него формализам, а још мање суптилне анализе, где су резултати често неочекиване последице неких духовитих математичких досетки. Како се ти његови радови не настављају на нечија ранија истраживања, и у њима се не преузимају већ раније утврђене чињенице, у њима скоро и да нема позива на друге ауторе. Проблем се често посматра у крајње специјалном, али карактеристичном случају, и тада иде ка општем али дотле, док то основни елементи, претпостављени у почетку рада допуштају. На тај начин, рад представља једну затворену целину. Основне претпоставке су одредиле и крајњи домет рада. То се можда најбоље види и у његовим првим радовима, где се истражују аналитички облици мултиформних функција.

Та група радова садржи и његову тезу (1924), а ти радови су објављени у ГЛАСУ (CXVII (1926), 11–49, 54–64; CXX (1926), 35–66; CXXVII (1927), 69–86). У ова четири рада он уводи један нов појам — закон *мултиформности око изоловане критичке тачке*. То је функционална веза $F(x, y_0, y_1) = 0$ која постоји између две детерминације y_0 и y_1 мултиформне аналитичке функције $y(x)$ у тачки x ако се детерминација y_1 добива из детерминације y_0 једним обиласком око изоловане критичке тачке x_0 у позитивном смеру по једноставној затвореној кривој линији. Кашанин у тим радовима као два основна проблема истиче: **Прво**. Да ли за дати закон мултиформности постоји мултиформна аналитичка функција и који је њен аналитички облик? **Друго**. За дату мултиформну аналитичку функцију, дату директно или преко диференцијалне једначине, наћи закон мултиформности, а преко њега истраживати особине саме функције. Најрепрезентативнији, а и најсадржајнији од тих радова је онај из ГЛАСА (CXX-1926), 35–66): *О мултиформним интегралима Рикатијеве диференцијалне једначине*. Размотримо ближе резултате тога рада и пут којим он долази до тих резултата. Садржина рада је у исказу:

Нека су A, B, и C аналитичке функције које су у домену D униформне и једна од њих или више заједно, имају једну сингуларну тачку x_0, тада Рикатијева диференцијална једначина

$$y' = Ay^2 + By + C, \tag{1}$$

има у D један униформан интеграл η или два η_1 и η_2 или три. У првом случају закон мултиформности општег интеграла $y(x)$ око тачке x_0 је

$$\frac{1}{y_1 - \eta} = \frac{1}{y_0 - \eta} + \beta(x), \tag{a}$$

а у другом

$$\frac{1}{y_1 - \eta} = \frac{\alpha}{y_0 - \eta} + \beta(x), \tag{b}$$

где је α константа $\neq 1$, а $\eta(x)$ и $\beta(x)$ униформне аналитичке функције у D. Ови закони мултиформности не зависе од интеграционих констаната и карактеристика су једначине (1).

С друге стране, ако је x_0 у D једина критичка тачка мултиформне аналитичке функције $y(x)$ и ако је око x_0 њен закон мултиформности дат са (b) где је $\alpha = \text{const}$, а η и β у D униформне аналитичке функције, тада свакој тачки x из D одговара једна двојна логаритамска спирала (или круг ако је $|\alpha| = 1$) на којој леже све детерминације функције $y(x)$ добивене циркулацијом око критичке тачке x_0. Према томе у y-равни за разно $x \in D$ добијамо један систем двојних логаритамских спирала. Ако су испуњене извесне особине тога система спирала, тада тим системом је потпуно одређена Рикатијева диференцијална једначина (1) чији општи интеграл је дат функцијом $y(x)$. У случају $\alpha = 1$ систем тих спирала прелази у систем кругова.

За доказ ових тврђења Кашанин полази од линеарне хомогене диференцијалне једначине другог реда

$$z'' + Pz' + Qz = 0, \tag{2}$$

на коју се (1) своди сменом $y = -A \cdot z'/z$.

Познато је које тачке могу бити критичке тачке интеграла једначине (2). То могу бити само сингуларне тачке од P и Q. Ако једна од функција P или Q (или обе заједно) имају једну сингуларну тачку (пол или есенцијални сингуларитет) онда према познатој теореми Фукса (L. Fuchs) једначина (2) има два линеарно независна партикуларна интеграла облика

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_0)^m \varphi(x) \\ \xi_1 &= (x - x_0)^n [\psi(x) + r\varphi(x)] \log(x - x_0), \end{aligned} \tag{3}$$

где су m, n и r константе, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ униформне функције у D. Бројеви m и n нису потпуно одређени. Може им се додати ма какав цео позитиван или негативан број у ком случају су функције φ и ψ само помножене са степеном од $(x - x_0)$ али се аналитички облик од ξ и ξ_1 не мења. Ставимо $\omega_1 = e^{2\pi i m}$, $\omega_2 = e^{2\pi i n}$; тада ако је $\alpha = \omega/\omega_1 \neq 1$, као што је из теорије познато, мора бити $r = 0$. Ако је $\alpha = 1$ тј. $\omega_1 = \omega_2$, r може, али не мора бити нула. На тај начин разликују се три случаја: 1° $\alpha = 1$, $r = 0$, 2° $\alpha \neq 1$, 3° $\alpha = 1$, $r \neq 0$. У првом случају из (3) користећи основну смену између y и z налази се облик општег интеграла од (1) тј. $y(x)$, и он је униформна функција у D. У другом случају, кад је $\alpha \neq 1$, према (3) и основне везе између y и z налазе се партикуларни интеграли η и η_1 од (1). Отуда следи и веза између η, η_1 и општег интеграла $y(x)$, а из те релације и једноставни однос изнеђу две узастопне циркулације y_0 и y_1 од $y(x)$:

$$\text{(m)} \qquad \frac{y_1 - \eta_1}{y_1 - \eta} = \alpha \frac{y_0 - \eta_1}{y_0 - \eta},$$

и то је закон мултиформности општег интеграла у овом случају. Он се може написати и у облику

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{y_1 - \eta} = \frac{\alpha}{y_0 - \eta} + \beta(x),$$

где α, β и η имају напред наведене вредности. Најзад у трећем случају кад је $\alpha = 1$ и $r \neq 0$ основни проблем је да се покаже да има само један униформан партикуларни интеграл и то онај који одговара интегралу ξ из (3). Исто тако у овом случају није једноставно одредити закон мултиформности. Он се одређује, будући да се у овом случају познаје један партикуларни интеграл једначине (1), трансформацијом ове једначине у линеарну једначину и дискусијом њеног општег интеграла. Одатле излази да је закон мултиформности опет облика (a) са $\alpha = 1$ тј.

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{y_1 - \eta} = \frac{1}{y_0 - \eta} + \beta(x),$$

где је β униформна функција у D. Овај резултат не би био потпун да Кашанин није показао да у околини тачке у бесконачности имамо исте законе мултиформности и да шта више закон мултиформности (b) претставља гранични случај закона мултиформности (a).

Да би могао да разматра инверзан проблем, тј. да из закона мултиформности нађе под извесним условима и саму функцију, он детаљно анализира тај закон, а то је образац (m) где за n-ту циркулацију он узима облик

$$\frac{y_n - \eta_1}{y_n - \eta} = \alpha^n \frac{y_0 - \eta_1}{y_0 - \eta}.$$

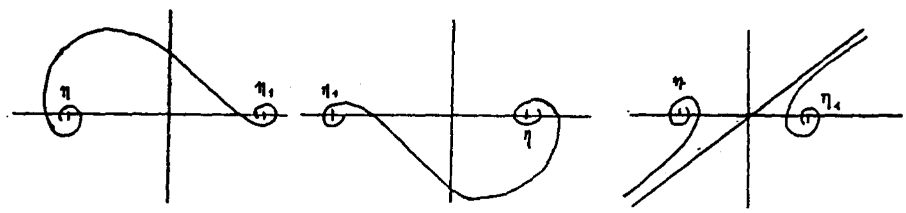
Ако се у овом изразу стави $\alpha = ae^{i\omega}$, то све вредности y_n за $n = 0, 1, \ldots,$ које има функција $y(x)$ при разниам циркулацијама око x_0 леже на кривој линији чији афикси задовољавају једначине

$$\left|\frac{y-\eta_1}{y-\eta}\right| = a\left|\frac{y_0-\eta_1}{y_0-\eta}\right|, \qquad \arg\frac{y-\eta_1}{y-\eta} = n\omega + \arg\frac{y_0-\eta_1}{y_0-\eta} + 2k\pi.$$

Последње једначине се могу написати и у облику

$$(3') \qquad \left|\frac{y-\eta_1}{y-\eta}\right| = M\exp\left\{m\left(\arg\frac{y-\eta_1}{y-\eta} + 2k\pi\right)\right\},$$
$$M = \left|\frac{y_0-\eta_1}{y_0-\eta}\right|\exp\left\{-m\arg\frac{y_0-\eta_1}{y_0-\eta}\right\}, \qquad m = \frac{\log\alpha}{\omega}.$$

Користећи биполарни координатни систем Кашанин проналази параметарски облик једначина (3′). То је крива линија позната под именом двојна логаритамска спирала, која за $\alpha = 1$ прелази у круг.



За $m > 0$ та спирала је приказана на слици, где су η и η_1 асимптотске тачке те спирале. Разни случајеви претстављени на слици јављају се када је ордината у почетку већа, мања од нуле или бесконачна.

Дискусијом параметарских једначина спирале налази се још једна основна особина разних детерминација. Поред тога што се налазе на овој спирали оне се налазе и у пресецима ортогоналних кругова одређених центара који пролазе кроз тачке η и η_1. Ти кругови секу спиралу под сталним углом. Она је њихова изогонална трајекторија. Са променом тачке x у y-равни, добијамо један систем двојних логаритамских спирала. Сада су у једначинама (3′) η и η_1 односно M функције од t и τ $(x = t + i\tau)$. За η и η_1 налази се да су униформне аналитичке функције у D, док је $\log M$ униформна хармонијска функција која у D нема вртлога и у x_0 има извор одређене јачине.

Инверзни проблем који Кашанин посматра и решава у другом делу овога рада може се сада дефинисати на следећи начин.

Ако је x_0 у D једина критичка тачка мултиформне аналитичке функције $y(x)$ и ако је око ње закон мултиформности дат са (b) односно (m) где је $\alpha \neq 1$ а $\eta(x)$ и $\beta(x)$ у D униформне аналитичке функције, тада свакој тачки у D одговара једна двојна логаритамска спирала (или круг за $\alpha = 1$). Угао под којим спирала сече систем ортогоналних кругова кроз η и η_1 је сталан. Нека је $\log M$ у обрасцу $(3')$, који претставља закон мултифомности, униформна хармонијска функција без вртлога и са датим извором одређене јачине у D, тада постоји аналитилчка функција са јединим критичком тачком x_0 чије све детерминације леже на тим спиралама и она је једнозначно одређена као решење Рикатијеве једначине (1) где су A, B и C одређене униформне функције у D.

*

Рикатијевој једначини али у реалном, Кашанин се вратио неколико година касније. Двадесетих година, Петровић се доста занимао са диференцијалним једначинама које се могу интегрисати помоћу квадратура, као и са трансформацијама које своде диференцијалне једначине на одређене типове. Делом су се тим проблемом занимали Тадија Пејовић (1892–1980) и нешто касније Драгослав Митриновић. Кашанин има један рад из тог круга проблема, али општијег облика, са различитим погледом на тај проблем. У раду *О упрошћавању диференцијалних једначина првога реда помоћу њихових партикуларних интеграла* (ГЛАС, 1929), он поставља проблем: Да ли постоји смена $y = F(y_1, Y)$, где је y_1 партикуларни интеграл диференцијалне једначине првога реда

$$\text{(A)} \qquad y' = M_1 y^{m_1} + M_2 y^{m_2} + \cdots + M_k y^{m_k} \qquad (m_1 > m_2 > \cdots > m_k),$$

која десну страну ове диференцијалне једначине своди на полином нижег степена

$$Y' = N_1 Y^{n_1} + N_2 Y^{n_2} + \cdots + N_p Y^{n_p} \qquad (n_1 > n_2 > \cdots > n_k),$$

тј. где је $m_1 > n_1$ и показује да је то у општем случају могуће само код Рикатијеве једначине. Другим речима, партикуларни интеграл y_1 не може се искористити у општем случају за снижење степена диференцијалне једначине (A) као што је то случај код линеарне хомогене једначине.

*

Међу последње Кашанинове радове из Анализе долазе два његова рада из Апроксимације и Интерполације (Publications math. de l'Université de Belgrade, T. VI, VII, 1937–39; Publications de l'Inst. math. T. I, 1947). Све поменуте особине његовог научног рада које се огледају често у једноставном проблему и где се затим испитују везе између различитих познатих резултата да би се на основу тога вршила даља истраживања налазе се можда најбоље исказана у првом од наведена два рада.

Проблем интерполације функције $f(x)$ полиномом $(n-1)$-ог степена $P_{n-1}(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ који са њом има n заједничких тачака (x_i, y_i) $(x_i \neq x_j\ (i \neq j)$, $y_i = f(x_i))$ своди се на решавање система

$$\text{(4)} \qquad P_{n-1}(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Практично решавање овог система битно зависи од тога у ком облику је написан полином $P_{n-1}(x)$. Ако га, не опредељујући се, засад, за неки конкретан облик, напишемо као линеарну комбинацију n полинома $p_0(x)$, $p_1(x)$, …, $p_{n-1}(x)$ који су сви степена $\leq n-1$, тј.

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k p_k(x), \tag{5}$$

линеарни систем (4) по n непознатих $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ имаће детерминанту

$$\begin{vmatrix} p_0(x_0) & p_1(x_0) & \cdots & p_{n-1}(x_0) \\ p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_{n-1}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_0(x_{n-1}) & p_1(x_{n-1}) & \cdots & p_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Означимо са $D(x)$ детерминанту која настаје из детерминанте (6) када у овој у првом реду x_0 заменимо са x. Како је $D(x)$ полином по x највише $(n-1)$-ог степена, а анулира се већ за $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, он се може анулирати и за $x = x_0$ само ако је идентички једнак нули. Дакле, детерминанта (6) система (4) може бити једнака нули само ако је $D(x) \equiv 0$. Развијајући детерминанту $D(x)$ по првом реду, то би значило да су полиноми $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ линеарно зависни. Према томе, ако су полиноми $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ линеарно независни (тј. ако образују базу), детерминанта (6) биће различита од нуле па ће систем (4) имати јединствено решење.

У пракси се користе различите базе:

1° **Степени**: $p_k(x) = x^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Тада полином $P_{n-1}(x)$ има врло једноставан облик, али се у систему (4) у свакој једначини јављају све непознате A_k. Овај недостатак, с практичне тачке гледишта, отклања база коју формирају.

2° **Lagrange-ови полиноми**:

$$p_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{n-1})}$$
$$\left(k = 1, 2, \ldots, n-1;\ p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_{n-1})}\right).$$

Ови имају особину

$$p_k(x_i)\begin{cases} = 0 & \text{за } i \neq k \\ = 1 & \text{за } i = k, \end{cases}$$

на основу које се систем (4) своди на

$$p_1(x_i)A_i = y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{4'}$$

где свака од једначина садржи само по једну непознату A_i. База Lagrange-ових полинома је, дакле, идеална у погледу решавања система (4), али су зато Lagrange-ови полиноми прилично компликованог облика. Трећа једна база некако лежи између ове две: није много компликована а њој одговарајући систем (4) је ипак погодан за решавање. Њу чине

3° **Newton-ови полиноми:**

$$p_0(x) = 1, \qquad p_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ови имају особину

$$p_k(x_i)\begin{cases} = 0 & \text{за } i < k \\ = 1 & \text{за } i = k \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

па се систем (4) своди на

$$(4'') \qquad \sum_{k=0}^{i} A_k p_k(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

те прва једначина садржи само A_0, друга само A_0 и A_1, трећа само A_0, A_1 и A_2, итд., па се непознате $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ сукцесивно одређују помоћу претходно већ израчунатих.

У овом раду Кашанин се не опредељује ни за један од наведених конкретних база, већ покушава да у општем случају систем (4) замени системом истог броја једначина али таквих да у свакој једначини фигурише само једна од непознатих A_k. Општа метода састоји се у томе да једначине система (4) помножимо редом са $m_i^{(\nu)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ и све тако добивене једначине саберемо. Тако ћемо добити

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} \sum_{k=0}^{n-1} A_k p_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} y_i$$

односно

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} p_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} y_i .$$

Учинимо ли то n пута за $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, (7) ће за тај скуп вредности ν представљати систем од n једначина линеарних по A_k са n^2 неодређених коефицијената $m_i^{(\nu)}$. Ове ћемо одредити тако да буде

$$(8) \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} m_i^{(\nu)} p_k(x_i)\begin{cases} = 0 & \text{за } \nu \neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu = k \end{cases} \qquad (\nu, k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Из ових n система с n једначина, коефицијенти $m_i^{(\nu)}$ одређени су за свако i и ν. Уврстимо ли њихове вредности у (7) добићемо

$$(7') \qquad A_k \sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(k)} p_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i^{(k)} y_i ,$$

што смо и хтели постићи.

Ради интерпретације и формулације резултата до којих је Кашанин дошао, он уводи неке допунске ознаке и појмове. Он означава са $q_\nu(x)$ полином степена $\leq n-1$ који у тачкама x_i има вредности $m_i^{(\nu)}$ за $i=0,1,\dots,n-1$. Тада се (8) може писати у облику

$$(8') \qquad \sum_{i=0}^{n-1} p_k(x_i)q_\nu(x_i)\begin{cases} =0 & \text{за } \nu\neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu=k. \end{cases}$$

Уведе ли се, краткоће писања ради, ознака

$$[p_k,q_\nu] := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} p_k(x_i)q_\nu(x_i)$$

може се, дакле, рећи:

За сваку базу (p_k) полинома степена $\leq n-1$ постоје полиноми (q_k) степена $\leq n-1$, тако да важи

$$(8') \qquad [p_k,q_\nu]\begin{cases} =0 & \text{за } \nu\neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu=k \end{cases}.$$

Уводећи ове, систем (4) је, према (7′), еквивалентан систему

$$(7'') \qquad A_k[p_k,q_k]=[f,q_k] \qquad (k=0,1,\dots,n-1)$$

који је непосредно решив по A_k.

За базу (q_k) каже се да је *коњугована* бази (p_k). За прелазак од система (4) написаног за базу (p_k), на систем облика (7′) неопходно је, дакле, одређивање базе (q_k) коњуговане бази (p_k). Тог посла ћемо се ослободити ако једноставно *претпоставимо* да је база (p_k) коњугована сама себи (*самокоњугована*), тј. да има особину

$$(9) \qquad [p_k,p_\nu]\begin{cases} =0 & \text{за } \nu\neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu=k \end{cases}.$$

Све у свему, важи овај исказ:

За сваки скуп вредности $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ ($x_i\neq x_j$ за $i\neq j$) постоји база $p_0,p_1,\dots,p_{n-1}$ полинома која је самокоњугована и таква да је $[p_k,p_k]=1$. За ту, тзв. Legendre-ову базу, важи

$$(10) \qquad A_k=[f,p_k].$$

Уз овај став о егзистенцији Legendre-ове базе, Кашанин је дао и рекурентни образац за њено поступно израчунавање:

$$p_0(x) = 1, \qquad p_k(x) = \frac{x^k - \sum_{\nu=0}^{k-1}[p_\nu, x^k]p_\nu(x)}{\left\{[x^k, x^k] - \sum_{\nu=0}^{n-1}[p_\nu, x^k]^2\right\}^{1/2}} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Примедба. Ради поређења Legendre-ове базе са Langrange-овом и Newton-овом базом, није на одмет, уз карактеристике последње две, написати самокоњугованост Legendre-ове у експлицитном облику

$$(9') \qquad p_k(x_0)p_\nu(x_0) + p_k(x_1)p_\nu(x_1) + \dots + p_k(x_{n-1})p_\nu(x_{n-1}) \begin{cases} = 0 & \text{за } \nu \neq k \\ \neq 0 & \text{за } \nu = k \end{cases}.$$

Ако Legendre-ову базу упоредимо са Newton-овом, видимо да је ова друга једноставнија, али је зато код ње израчунавање коефицијената A_k знатно компликованије. Ове две базе су, у извесном смислу, супротстављене једна другој: формирање Legendre-ове базе слично је одређивању коефицијената код Newton-ове (у оба случаја је реч о рекурентним обрасцима).

Уочимо сада $m+1$ $(0 \leq m \leq n-1)$ првих чланова интерполационог полинома $P_{n-1}(x)$ по бази (p_k):

$$s_m(x) := A_0p_0(x) + A_1p_1(x) + \dots + A_mp_m(x).$$

Од интереса је једино случај $m < n-1$ јер је $s_{n-1}(x) = P_{n-1}(x)$ за свако x. $s_m(x)$ називамо m-тим одсечком полинома $P_{n-1}(x)$ по бази (p_k). Поставља се питање односа одсечка $s_m(x)$ према интерполационом полиному $P_{n-1}(x)$ а тиме и према функцији $f(x)$ која се интерполира. Тај однос битно зависи од усвојене базе:

1° За базу степена (x^k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена m који у тачки $x = 0$, $y = P_{n-1}(0)$ има додир реда m са $P_{n-1}(x)$ (а са функцијом $f(x)$, у општем случају, не мора имати ничег заједничког).

2° За Lagrange-ову базу (p_k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена $n-1$ који са $P_{n-1}(x)$ (а тиме и са $f(x)$) има заједничке тачке (x_i, y_i) за $i = 0, 1, \dots, m$ $(y_i = P_{n-1}(x_i) = f(x_i))$. Заиста, за $i = 0, 1, \dots, m$ је због карактеристичне особине Lagrange-ове базе и према (4′)

$$s_m(x_i) = \sum_{k=0}^{m} A_kp_k(x_i) = A_ip_i(x_i) = y_i.$$

3° За Newton-ову базу (p_k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена m који са $P_{n-1}(x)$ (а тиме и са $f(x)$) има заједничке тачке (x_i, y_i) за $i = 0, 1, \dots, m$. Заиста, за $i = 0, 1, \dots, m$ је

$$s_m(x_i) = \sum_{k=0}^{m} A_kP_k(x_i) = \sum_{k=0}^{i} A_kp_k(x_i) = y_i,$$

користећи прво карактеристичну особину Newton-ове базе а затим (4').

4° За Legendre-ову базу (p_k) одсечак $s_m(x)$ је полином степена m. Међутим, што се тиче односа између $s_m(x)$ и $P_{n-1}(x)$ (а преко $P_{n-1}(x)$ и са $f(x)$) ту на први поглед ништа није видљиво. У општем случају нити је $s_m(x_i) = P_{n-1}(x_i)$ за нека x_i (као код Lagrange-ове и Newton-ове базе) нити има додира између $s_m(x)$ и $P_{n-1}(x)$ (као код степене базе), сем у тривијалном случају када је $f(x)$ полином степена $\leq n-1$ и $m = n-1$, тј. када су f, P_{n-1} и s_m идентични полиноми.

Да бисмо утврдили везу која постоји између f, P_{n-1} и s_m када је у питању Legendre-ова база (p_k), означимо са $r_m(x)$ произвољан полином степена m и уредимо га по Legendre-овој бази:

$$r_m(x) = B_0p_0(x) + B_1p_1(x) + \cdots + B_mp_m(x).$$

Варирајући $B_0, B_1, \ldots B_m$ добићемо све могуће полиноме степена $\leq m$, па међу њима и одсечак $s_m(x)$. Ако су задате тачке $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и тачкама (x_i) одговарајућа Legendre-ова база, израз

$$\Phi := \sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) - r_m(x_i)]^2$$

је функција променљивих $B_0, B_1, \ldots, B_m$. Како је $\Phi \geq 0$, Φ има ненегативан минимум, тј. међу полиномима степена $\leq m$ постоји један за који Φ постиже тај минимум. Потребан услов за то је

$$\frac{\partial\Phi}{\partial B_0} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial B_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial B_m} = 0. \tag{11}$$

Како је за $k = 0, 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial B_k} &= -\sum_{i=0}^{n-1} 2[f(x_i) - r_m(x_i)]\frac{\partial r_m(x_i)}{\partial B_k} = -2[f(x_i) - r_m(x_i)]p_k(x_i)\\ &= -2\left\{\sum_{i=0}^{n-1} y_ip_k(x_i) - B_0\sum_{i=0}^{n-1} p_0(x_i)p_k(x_i) - \cdots - B_m\sum_{i=0}^{n-1} p_m(x_i)p_k(x_i)\right\},\end{aligned}$$

то је на основу карактеристичне особине (9) Legendre-ове базе

$$\frac{\partial\Phi}{\partial B_k} = -2\left\{\sum_{i=0}^{n-1} y_ip_k(x_i) - nB_k\right\}.$$

Услови (11) своде се, дакле, на

$$B_k = [y_i, p_k] \qquad (k = 0, 1, \ldots, m),$$

те је, према (10), $B_k = A_k$, тј. $r_m(x) = s_m(x)$. Значи: између свих могућих полинома $r_m(x)$ степена m, одсечак $s_m(x)$ по Legendre-овој бази је тај који минимизира израз $\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) - r_m(x_i)]^2$.

Ваљаност апроксимације функције $f(x)$ одсечцима $s_m(x)$ можемо повећати, у принципу, на два начина: при *фиксираном броју интерполационих тачака*, смањивањем размака у коме оне морају лежати, све док се тај размак не сведе на једну једину тачку, или, при *фиксираном размаку*, неограниченим увећавањем броја интерполационих тачака које у њему леже. Први поступак може се спровести са Newton-овом базом и тако добити Taylor-ов образац, а други, када је у питању размак $(-1, +1)$, са Legendre-овом базом и тако добити ортогонални развитак по Legendre-овим полиномима.

*

Кашанин је студирао Математику у Паризу у време када је Рационална механика била још увек саставни део математичких студија. У раду: *Les équations générales du mouvements d'un système de points matériels aux liaisons données (Publ. de l'Inst. math. Tome II, 1948)* он посматра проблем: кад су дате спољне и унутрашње силе са везама између генералисаних координата, које се нове везе могу увести које ће омогућити кретање система материјалних тачака у сагласности са датим везама. Он издваја и карактерише такозване *идеалне везе*, које чине језгро сила веза и увек се морају узети у обзир. Дато је њихово механичко обележје. Циљ рада је да покаже које су везе саставни део принципа механике а које су условне.

Ових неколико примера показују разноврсност и област математике, а и проблема којима се Кашанин занимао, а пре свега карактер проблема који је њега привлачио.

Може се рећи, посматрајући његов научни рад, да је он начинио неколико пропуста који су га одвукли од интезивног рада на математичкој науци. Негде почетком тридесетих година он је започео да пише уџбеник *Вишу математику*. Професори Пејовић и Карамата су причали како је он савесно, скоро опседнут, данима размишљао о свакој глави, сваком параграфу своје књиге. То је прекинуло оне нити које су га повезивале са научним истраживањем. И није забадава Харди (G. H. Hardy) говорио да уџбенике треба писати на крају своје каријере.

С друге стране, велики број области, и њихова ширина није му дозвољавала да дубље понире у неки проблем и да га месецима носи и решава. Он је ишао у ширину а не у дубину.

Најзад, у његовој природи је било и сувише индивидуалности и самосталности. Он је био врло дружељубив, али научне контакте није успостављао. И у томе се он тако разликовао од Карамате који је био у кореспонденцији са са свима математичарима из области у којој је делао. Кашанин је био усамљен. Он није волео ни конгресе ни студијска путовања. После Париза, он се скоро није ни кретао по иностранству. Научну кореспонденцију није ни одржавао.

Али он није напустио Математику. У рукописима нађеним после његове смрти, он је изгледа написао низ обимних расправа — научно-историјског карактера. Можда се у тим радовима поред рефлексија, налазе и неки погледи на научне проблеме, како то, бар по садржају тих радова изгледа.

Све у свему, Кашанин претставља једног даровитог математичара широке научне културе и то не само на пољу чисте Математике. Једног од оних математичара са почетка овога века, чије је обимно знање служило млађима за ослонац на првим корацима. Јер изнад свега његово схватање Математике било је исправно. Он је правилно ценио значај резултата, разликовао суштину проблема од његове форме, раздвајао тривијално и површно од дубоког и оригиналног. И можда је зато рано престао са радом, кад је видео да оно што жели не може да достигне. Строг критеријум према научном раду је имао пре свега према себи. Али зато је ценио и без зависти признавао вредност других, а нарочито млађих. Можемо рећи да су не само млађи математичари, већ и бројни инжењери, који су желели да се посвете теоријском раду, имали његову подршку и помоћ, и то не само кроз његов уџбеник из *Више математике* који је одиграо битну улогу у издизању нивоа, како Математике, тако и других егзактних наука на техничким факултетима. Но, треба имати на уму да се он у нашој Математици појавио онда када се једна епоха завршавала — Петровићево време — и почињало ново доба. Можда је зато његов пут и био такав. Пут ка новим обалама са свим лутањима у тражњу новог.

Miodrag TOMIĆ, Slobodan ALJANČIĆ

RADIVOJ KAŠANIN AS A MATHEMATICIAN

During his studies in Vienna, Zagreb, Budapest and Paris Radivoj Kašanin acquired a broad mathematical culture. That can be seen in his creative work through the diversity of mathematical fields in which he worked: theory of differential equations, theory of functions of complex variables, analysis, geometry, interpolation and approximation, mechanics, even astronomy — which attracted him from his early days. His last works were devoted to the mathematical interpretation of the cosmogonical theory of Pavle Savić. As a professor of the Technical university Kašanin brought back before the World war II the teaching of mathematics to a high level, what has considerably influenced the progress of the engineering specialities on the Technical university. Through his whole life he was always ready to help the young scientists.

ОБЈАВЉЕНИ РАДОВИ АКАДЕМИКА РАДИВОЈА КАШАНИНА

1. *О аналитичким облицима мултиформних функција*, Београд 1925, стр. (4)+36+(1). (Докторска дисертација примљена за докторски испит на седници Филозофског факултета Универзитета у Београду 9. маја 1924, према реферату члана испитног одбора г.г. др Михаила Петровића и др Антона Билимовића редовних професора Универзитета)

2. *О аналитичким облицима мултиформних функција* (*Sur les formes analytiques des fonctions multiformes*), Српска краљевска академија, Глас CXVII, Први разред, књ. 53, Београд 1926, стр. 11—49.

3. *О међусобном утицају критичних тачака* (*Influence mutuelle des points critiques*), Српска краљевска академија, Глас CXVII, Први разред, књ. 53, Београд 1926, стр. 51—64.

4. *О мултиформним интегралима Рикатијеве диференцијалне једначине* (*Sur les intégrales multiformes de l'équation de Riccati*), Српска краљевска академија, Глас CXX, Први разред, књ. 55, Београд 1926, стр. 35—66.

5. *О једној класи мултиформних аналитичких функција* (*Sur une classe des fonctions analytiques multiformes*), Српска краљевска академија, Глас CXXVII, Први разред, књ. 58, Београд 1927, стр. 67—86.

6. *О упрошћавању диференцијалних једначина првога реда помоћу њихових партикуларних интеграла* (*Sur la simplification des équations différentielles à l'aide des leurs intégrales particulières*), Српска краљевска академија, Глас CXXXIV, Први разред, књ. 63, Београд 1929, стр. 159—174.

7. *Sur la périodicite des oppositions d'une petite planète*, Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. I, Belgrade 1932, pp. 13—22.

8. *Обвојнице кривих линија у равни* (*Sur les enveloppes des courbes planes*), Српска краљевска академија, Глас CXLVI, Први разред, књ. 72, Београд 1932, стр. 69—83.

9. *Виша математика I*, Графички завод „Славија", св. 1, Београд 1932, стр. 80.

10. *Sur un procédé de calcul direct des oppositions intermédiaires des petites planètes*, Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. II, Belgrade 1933, pp. 18—38.

11. *Виша математика I, св. 1*, Издавачка књижарница Геце Кона, Београд 1933, стр. 160.

12. *Виша математика I*, Београд 1934, стр. 627.

13. *Sur les positions relatives de deux astéroïdes*, Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. III, Belgrade 1936, pp. 5–9.

14. *Sur les divers procédes d'interpolation*, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade t. VI–VII, Belgrade 1938, pp. 240–266.

15. *Sur les erreurs des observations*, Mémoire de l'Observatoire astronomique de l'Université de Belgrade, t. IV, Belgrade 1939, pp. 1–48.

16. *Виша математика I*, Централно удружење студената технике, Београд 1946, стр. XII+791 (2. прер. и доп. издање).

17. *Др Богдан Гавриловић (1864–1947)*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski t. 2, Zagreb 1947, str. 201–204.

18. *Le coefficient d'approximation moyenne et le coefficient de corrélation*, Publications de l'Institut mathématique, Académie Serbe des Sciences, t. I, Belgrade 1947, pp. 71–87.

19. *Увођење угла, тригонометријских функција и броја π у аритметици* (*L'introduction en arithmétique de l'angle, des fonctions trigonométriques et du nombre π*), Српска академија наука, Глас CXCI, Први разред, књ. 96, Београд 1948, стр. 149–161.

20. *Les équations générales du mouvement d'un système de points matériels aux liaisons données*, Publications de l'Institut mathématique, Académie Serbe des Sciences, t. II, Belgrad 1948, pp. 116–130.

21. *Виша математика I*, Београд 1949, стр. 847 (3. издање).

22. *Виша математика II*, књ. 1, Београд 1949, стр. 624+VIII.

23. *Виша математика II*, књ. 2, Београд 1950, стр. 679+VIII.

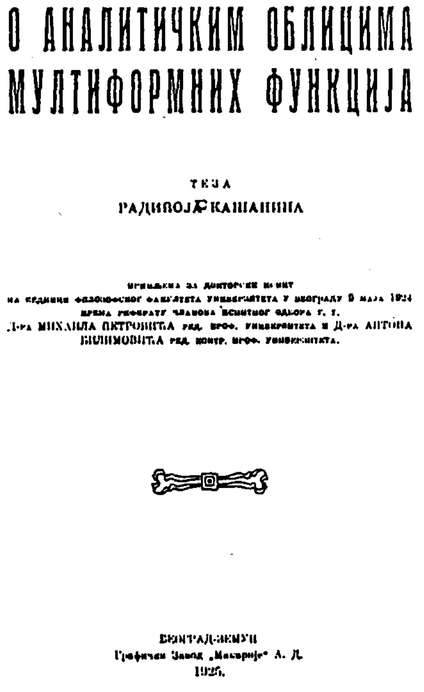
24. *Опште једначине кретања система материјалних тачака* (*Les équations générales du mouvement d'un système de points matériels*), Српска академија наука, Зборник радова књ. VII, Математички институт књ. 1, Београд 1951, стр. 17–57.

25. *Геометриска интерпретација Банахјевичеве схеме* (*Interprétation géométrique du schéma de Banachiewicz*), Српска академија наука, Зборник радова књ. VIII, Математички институт књ. 2, Београд 1952, стр. 93–96.

26. *Збирка решених задатака више математике I, књ. 2*, Географски институт ЈНА, Београд 1952, стр. 526.

27. *Интеграли диференцијабилних функција* (*Les intégrales des fonctions différentiables*), Српска академија наука, Зборник радова књ. XXXV, Математички институт књ. 3, Београд 1953, стр. 29–44.

28. *Апроксимација произвољног кретања материјалне тачке помоћу кретања по конусном пресеку* (*Approximation du mouvement arbitraire d'un point matériel par le mouvement sur une section conique*), Српска академија наука, Зборник радова, књ. XLII, Астрономско-нумерички институт, књ. 1, Београд 1954, стр. 13–52.



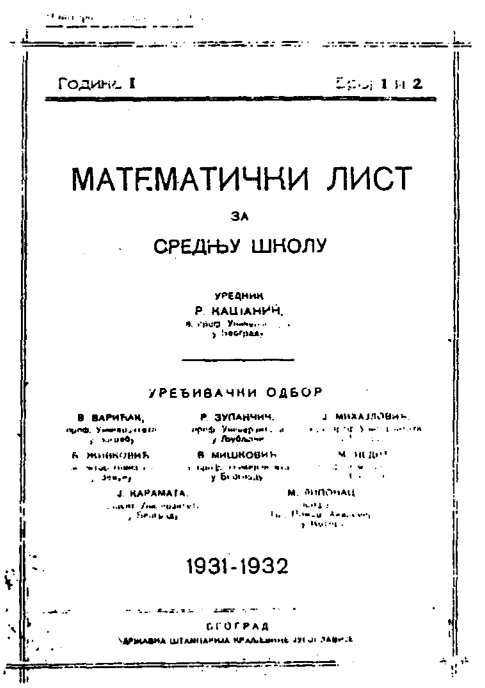
О АНАЛИТИЧКИМ ОБЛИЦИМА МУЛТИФОРМНИХ ФУНКЦИЈА

ТЕЗА

РАДИВОЈА КАШАНИНА

БЕОГРАД-ЗЕМУН

1925.



Година I — Број 1 и 2

МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ

ЗА

СРЕДЊУ ШКОЛУ

УРЕДНИК

Р. КАШАНИН,

УРЕЂИВАЧКИ ОДБОР

Ј. КАРАМАТА,

1931-1932

БЕОГРАД

Професор Радивој Кашанин полагао је докторски испит 1924. године пред комисијом професора: др Михаило Петровић и др Антон Билимовић. — Изглед насловне стране објављене дисертације.

Професор Радивој Кашанин са младим Јованом Караматом покреће 1931. године часопис *Математички лист* за ученике средњих школа.

29. *Збирка решених задатака више математике I, књ. 1*, Географски институт ЈНА, Београд 1956, стр. 588+(4).

30. *Réfraction astronomique moyenne*, Académie Serbe des Sciences, Notes et travaux de la Section d'astronomie de L'Institut mathématique, Vol. II, No. 10–20, Belgrade 1958, pp. 11–20.

31. *Збирка решених задатака више математике I, књ. 3*, Географски институт ЈНА, Београд 1959, стр. 164+(4).

32. *Земљини слојеви и њихове карактеристике* (*The Earth's layers and their characteristics*), Српска академија наука и уметности, Глас CCXLIV, Одељење природно-математичких наука, књ. 21 (н. серија), Београд 1960, стр. 73–84.

33. *The Earth's layers and their characteristics*, Académie Serbe des Sciences et des Arts, Bulletin l. XXVI (Nouvelle série), Classe des Sciences mathématique et naturelles, l. 8, Belgrade 1961, pp. 127–138.

34. *Понашање материјала под високим притисцима* (*The behaviour of the*

Др. РАДИВОЈЕ КАШАНИН
ПРОФЕСОР УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

ВИША МАТЕМАТИКА

I

ДРУГО ИЗДАЊЕ
ПРЕРАЂЕНО И ДОПУЊЕНО

ИЗДАЊЕ
ЦЕНТРАЛНОГ УДРУЖЕЊА СТУДЕНАТА ТЕХНИКЕ
БЕОГРАД — 1946

ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

RECUEIL DES TRAVAUX
T. VII
INSTITUT MATHEMATIQUE
№ 1

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

Уредник:
Дописни Д-р РАДИВОЈ КАШАНИН
управник Математичког института САН

Примљено на XII скупу Одељења природно математичких наука
7 XII 1950 године

ЗБОРНИК РАДОВА
Књ. VII

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
Књ. I

Научна књига
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ
Штампарија и књиговезница Српске академије наука, Космајска бр. 28

Уџбеник *Виша математика* професора Радивоја Кашанина највише је утицао и допринео да настава на техничким факултетима у Београду поприми строжије критеријуме и садржаје на вишем нивоу.

Основао је и десет година уређивао часопис *Зборник радова* Математичког института у Београду.

materials under high pressuress), Српска академија наука и уметности, Глас CCXLIX, Одељење природноматематичких наука, књ. 22 (н. серија), Београд 1961, стр. 279–312 (са П. Савићем).

35. *Квалитативна анализа путања пројектила теледиригованих по потегу*, Српска академија наука уметности, Гласник, књ. XII, св. 1, Београд 1961, стр. 56.

36. *The behaviour of the materials under high pressures* (*Понашање материјала под високим притисцима*), Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCLI, Одељење природно-математичких наука, књ. 29, Београд 1962, п. VI+32, in 8° (са П.

Савићем).

37. *Земљини слојеви и њихове карактеристике*, Српска академија наука и уметности, Гласник, књ. XII, св. 2, Београд 1962, стр. 188.

38. *Понашање материјала под високим притисцима*, Српска академија наука и уметности, Гласник, књ. XIV, св. 1, Београд 1962, стр. 21 (са П. Савићем).

39. *Понашање материјала под високим притиском* (*The behaviour of the materials under high pressures*), Српска академија наука и уметности, Глас CCLIX, Одељење природно-математичких наука, књ. 25 (н. серија), Београд 1964, стр. 105–164 (са П. Савићем).

40. *The behaviour of the materials under high pressures II* (*Понашање материјала под високим притисцима II*), Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCLX, Одељење природно-математичких наука, књ. 31, Београд 1964, п. 64 (са П. Савићем).

41. *The behaviour of the materials under high pressures III* (*Понашање материјала под високим притисцима III*), Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCLXXVIII, Одељење природно-математичких наука, књ. 34, Београд 1964, п. 64 (са П. Савићем).

42. *Старо и ново у нумеричкој математици*, Научно-технички преглед 7 (1965), 2, стр. 75–79.

43. *Вещество под высоким давлением*, Отдельной оттиск, Проблеми геохимии, 1965, стр. 28–33 (са П. Савићем).

44. *Понашање материјала под високим притиском III. Небеска тела на температури изнад 0°K* (*The behaviour of the materials under high pressures III*), Српска академија наука и уметности, Глас CCLXII, Одељење природно-математичких наука, књ. 27 (н. серија), Београд 1965, стр. 37–94 (са П. Савићем).

45. *The behaviour of the materials under high pressures IV* (*Понашање материјала под високим притисцима IV*), Српска академија наука и уметности (Académie Serbe des Sciences et des Arts), Посебна издања (Monographs), књ. CCCXCIII, Одељење природно-математичких наука, књ. 35, Београд 1965, п. 72 (са П. Савићем).

46. *Понашање материјала под високим притицима IV* (*The behaviour of the materials under high pressures IV*), Српска академија наука и уметности, Глас CCLXV, књ. 29 (н. серија), Београд 1966, стр. 26–82 (са П. Савићем).

47. *Предговор* за књигу Д. Ђурић-Трбуховић, *У сенци Алберта Ајнштајна*, Крушевац 1969, стр. 272.

48. *Виша математика I*, Сарајево 1969, стр. XII+836 (4 издање).

49. *Расслоение макротел из-за прериыстой структур их составных частиц*, Simpozij o Mohorovičićevom diskontinuitetu, Zagreb 1972, str. 161–187 (sa P. Savićem).

50. *Путања пројектила теледиригованих по потегу,* Научно-технички преглед 16 (1974), 3, 17–29.

51. *Поведение материалов при високих давлениях,* Наукова думка, Киев 1976, стр. 264; приредио Драган Трифуновић (са П. Савићем).

Библиографију саставио
Драган Трифуновић

PUBLISHED PAPERS OF THE ACADEMICIAN RADIVOJ KAŠANIN

(compiled by D. Trifunović)

A list of published papers of professor Dr Radivoj Kašanin is presented. The compiler of this list, professor Dr Dragan Trifunović prepares a comprehensive bibliography of the papers of academician Radivoj Kašanin.

ЗАОСТАВШТИНА

Професор Радивој Кашанин стварао је све до пред крај живота. У његовој радној соби остала су у рукопису следећа дела:

1. *О бројевима и мерењу,* 1 фасцикла
2. *Микрокосмос,* 2 свежња
3. *Основе теоријске механике,* 2 свежња
4. *Удар,* 1 фасцикла
5. *Лоренцове трансформације и Ајнштајнова теорија релативитета,* 1 фасцикла

Следећи радови су у једној фасцикли:

6. *Аритметичка средина мерења*
7. *Антиномије идеала у континууму*
8. *Мерења помоћу часовника и курира*
9. *Кардинални и ординални бројеви*
10. *О математици*
11. *Хемијски састав планета и њихова атмосфера,* 1 фасцикла
12. *Понашање материјала под високим притисцима,* 2 свежња
13. *Виша математика,* 1 свежањ
14. *Теорија кривих површи,* 1 фасцикла

Ови се рукописи налазе у Архиву Српске академије наука и уметности.

Д. Т.

ПРОФЕСОР КАШАНИН О СЕБИ

Ја сам пореклом из крајње сиротиње сељачке, што је, вероватно, и био повод да и ја и мој млађи брат Милан одемо у гимназију, јер на селу не бисмо имали од чега живети. Рођен сам у Барањи, у Белом Манастиру, и одатле сам отишао у Осијек, у класичну гимназију, први из свога села откад се за село зна! Три године сам се мучио, никад нисам имао довољно средстава, али сам био одличан ђак. После трећег разреда отишао сам у Нови Сад, у Српску православну велику гимназију — тачно се тако звала. Уредио је то, због чега сам му вечито благодаран, наш сеоски учитељ Јован Славковић. Тамо ме је свесрдно прихватио директор Васа Пушибрк. Тако сам догурао до матуре 1910. године, без материјалних брига, увек с добром стипенцијом, коју сам заслуживао не по пореклу, већ по — оценама.

Ниједан професор из ове две гимназије није ми остао у рђавој успомени. Што се тиче моје струке, за коју сам се потом определио, велики утицај имао је на мене Стеван Милованов, мој новосадски професор математике. А што сам отишао баш на студије математике, постоје два разлога: прво — био сам заљубљен у астрономију. Тако сам отишао на студије, најпре у Беч, па у Загреб. У Бечу је на мене пресудан утицај извршио онда још млади професор Вилхелм Виртингер. Он ме је на својим предавањима и колоквијумима упутио у најмодернија логичка расуђивања.

Другу и трећу годину провео сам у Загребу. Два професора остала су ми у најлепшој успомени, а за свој даљи развој лично сам им захвалан, не само за оно што сам од њих научио већ и за њихов лични однос према мени, за поверење које су ми указивали. То су били професор анализе Владимир Варићак и професор геометрије Јурај Мајцен. На трећој години био сам им, у ствари, већ асистент.

Последњу годину школовања провео сам у Будимпешти, признајем: са слабим пословањем у математици. Била је то она година између балканских ратова и првог светског рата када су нас — природно — много више од струке занимале друге ствари. Баш тада сам био председник омладинског удружења у Будимпешти које се звало „Коло младих Срба". Имао сам двадесет две године када сам био мобилисан и упућен у Галицију. Имао сам равно двадесет седам година када сам био демобилисан. За тих пет година, ни новине нисам читао, а камоли математику. Предао сам се Русима чим сам могао, и као добровољац у српској војсци био борац у Добруџи и на Солунском фронту. Било нас је у том добровољачком корпусу из свих наших крајева, свих занимања ...

Као и из школе, тако су ми и из рата остали у најлепшој успомени моји команданти, Стојан Поповић, Владимир Ковачевић, Петар Радивојевић, Петар Мартиновић, као и, у Београду још жив, Војислав Анђелковић. Може се рећи да је тих пет година за моје студије и за мој научни рад било пет изгубљених година, али, кад би се историја поновила, опет бих исто учинио.

После рата отишао сам у Париз, на Сорбону, ту сам дипломирао из математике, механике и астрономије. Предавали су тада чувени професори Адамар, Пикар, Гурса, Лебег, Монтел, Андоаје. Имао сам тако срећу да прођем кроз две математичке школе овог времена: немачку и француску. Имале су своје особености и своје квалитете, који су ми много користили. Вратио сам се у Београд и постао асистент професора Богдана Гавриловића на Техничком факултету. На Катедри су били и Михаило Петровић Алас и Милутин Миланковић, професори и академици. У њиховом пријатељском друштву био сам од 1922. године па до смрти сваког од њих. Ту сам и докторирао и напредовао од асистента до редовног професора, шефа Катедре и ректора Техничке велике школе.

Поред високе стручне спреме и оригиналних научних радова, сва тројица су се одликовала нечим што највише ценим, што сматрам за људску вредност највишег ранга: љубав према младим генерацијама, разумевање младих људи, несебичност и искрена помоћ младим, талентованим људима у њиховом напредовању. Умели су да се радују и да уживају кад се млади људи уздижу. Имао сам срећу да се развијам и радим поред њих, великих ауторитета науке и морала. Да се поносим њиховим пријатељством. Не верујем да је игде постојао такав амбијент какав су створили Гавриловић, Петровић и Миланковић.

Наравно, моји другови и ја морали смо, током времена, да уносимо неке нове ствари да бисмо држали корак с науком у свету. Оно што посебно хоћу да истакнем јесте: никад се томе нису противили, напротив, прихватали су, помагали нам у томе, храбрили да не станемо, да идемо даље.

Три су пресудна момента била у мом формирању. Прво што је на мене утицало у смислу развијања мог начина мишљења била је мала сеоска основна школа где смо се више васпитавали у духу него у знању. У духу националном, природно, јер смо ми тада живели под аустроугарском окупацијом. Друго: завршио сам класичну гимназију. Класика је, уопште, на мене учинила велики утицај. Треће: у оно доба када сам ступао на Универзитет, књижевност и историја мога народа развијале су у мени идеје и љубав према књизи уопште. Знао сам тада напамет све наше песме и песнике, све наше писце и критичаре. То што јесам, имам да захвалим управо томе: без тога бих био само робот. Стварале су ме школе, од основне до универзитета, и уживам у томе што то знам и што могу то да признам.

Ниједна наука није непопуларнија од математике, науке о бројевима и геометријским облицима, иако се они појављују одмах, на граници несвесног и свесног, одмах на почетку човековог мишљења и размишљања. Тој чудној појави непопуларности математике главни је узрок то што је у математици дилетантизам мање могућ него у било којој другој науци или уметности. Дилетантизам је врло примамљив, али — математика се не учи из брошура. „Нема краљевског пута у геометрији", прича се да је одговорио Еуклид краљу

Птоломеју Филаделфу када је овај зажелео да на неки лак начин дође до геометријских знања.

Дилетанте треба разликовати од аматера: ови су благородни, корисни и сваке пажње и похвале достојни људи. Аматер-песник крије своје стихове и чита их понеком само пријатељу; дилетант засипа све редакције и листове својим стиховима и огорчен је што их не штампају. Аматер-сликар веша своје слике у свом стану, дилетант непрекидно прави изложбе и љут је што нису посећене и што не пишу добро о њему. Аматер-музичар свира у својој собици, дилетант приређује јавне концерте и срдит је што на њима нема публике. Аматер за своје слабости и неуспехе криви себе, дилетанту су увек криви други, пријатељи, средина, прилике, цело друштво. Дилетант не зна Конфучијеву изреку, коју стручњаци и аматери поштују: „Право је знање знати шта знаш и знати шта не знаш".

Што се у једној струци, свеједно каквој, више употребљава обичан језик којим свако говори, тим је већа могућност за дилетанте: говорећи општепознате речи, имају утисак да знају и саму суштину ствари. У таквим струкама, свако је помало и дилетант, зато су оне и популарне. Математика има свој језик и своје посебности; њих прво треба научити, а зато је потребан истрајан и смишљен рад. Но, ко то научи, тај већ није дилетант: може се бавити математиком и као науком и као средством при изучавању других наука. Ако није баш прави стручњак, он је аматер. Ако ништа друго, зна да је боље прочитати једну добру књигу него написати две рђаве. Тешко је са онима који тај језик и то писмо не науче, а уобразе да су их научили, али — ређи су него у другим струкама и брзо се уоче. Мада спорије, примете се на крају и у другим струкама, јер — „све се може измислити осим талента и све се може скрити осим незнања".

Има и стручњака који оду странпутицом. То су уски специјалисти који у једном исувише скученом подручју своје струке достижу перверзну виртуозност у разним специјалним и непотребним детаљима и чињеницама, не осећајући своју науку и своју струку као целину; не виде њену везу са осталим наукама и струкама, нити знају њихов положај и значај међу осталим манифестацијама људског духа, о којима редовно немају ни појма. Они раде као роботи: хоризонт им је врло узак, а душа пуста. Такви никад не значе ништа, они никоме не могу бити пример. Имао сам срећу што сам се у свом развоју, од сеоске школе у Белом Манастиру до београдске универзитетске катедре, сусретао с правим људима који су могли да ми помогну. Познато је да као професор нисам био благ, али сам задовољан што никад нисам чуо да је о мени неко понео рђав утисак. Трудио сам се да на своје ђаке утичем онако како су на мене утицали моји васпитачи, моји професори.

(Из књиге Драгослава Адамовића, *Разговори са савременицима*, Београд 1982, стр. 131–134 (у редакцији и са предговором академика Радована Самарџића). — Академик Радивој Кашанин саопштио је овај текст аутору књиге 1974. године).

НАД УСПОМЕНАМА

Радивој Кашанин као ученик I разреда гимназије у Осијеку (1902. г.

Број 11. Превод

Гимназијска сведоџба зрелости

Радивој Кашанин

родио се у Пелмоноштору, у Барањској, маја 21. год. 1892., православне вере, свршио средњошколски течај и то I–III. разред у осечкој краљевској, IV–VIII. разред у новосадској српској великој гимназији, владао се добро и положио испит зрелости пред потписаном испитном комисијом с овим успехом:

Из српског језика и књижевности:	врло добро
Из мађарског језика и књижевности.	врло добро
Из латинског језика и књижевности:	врло добро
Из историје:	врло добро
Из математике.	врло добро
Из физике.	врло добро

У осталим предметима гимназијским показао је овај успех:

У науци вере:	врло добро
У грчком језику и књижевности:	врло добро
У немачком језику и књижевности	врло добро
У философској пропедевтици:	врло добро
У земљопису:	врло добро
У природопису:	врло добро
У геометријском цртању	врло добро

Према томе како је законитим захтевима одговорио са врло добрим успехом, проглашујемо га зрелим за науке на Великој школи.

О том му издајемо ову сведоџбу, коју својом руком потписујемо и потврђујемо печатом источно православне српске гимназије.

У Новом Саду, 17. јуна 1910.

За верност превода одговара:

Васа Пушибрк с. р.
управитељ.

Испит зрелости и крај школовања у гимназији у Новом Саду, 17. јуна 1910.

Kiegészítő érettségi bizonyítvány.

Kasanin Radivoj, aki született Pélmonostoron (Magyarorsz.) 1892. május 21. én görög keleti vallású, miután gimnáziumi érettségi vizsgálatát az ujvidéki g. k. szerb főgimnáziumnál bevégezte, az alulirt bizottság előtt kiegészítő érettségi vizsgálatot tett következő eredménnyel:

Görög nyelv és irodalomból: jeles

Ezek szerint őt a tudomány egyetem bármely karának tanulmányaira érettnek nyilvánitjuk.

Erről neki az ujvidéki g. k. szerb főgimnázium pecsétjével és saját aláirásunkkal ellátott jelen bizonyítványt kiadjuk.

Kelt Ujvidéken 1910. évi junius 17 én.

Hadzsics Antal s. k. a vizsgáló bizottság elnöke — Gimnáziumi igazgató: Pusibrk Vazul s. k. — Vizsgáló tanár: M. Dialovits [illegible]

P. H.

Превод!

Допунска сведоџба зрелости

Радивој Кашанин, родио се у Белом Манастиру у Угарској, маја 21. год. 1892, православне вере, пошто је гимназијски испит зрелости свршио, положио је допунски испит зрелости с овим успехом:

Из грчкога језика и књижевности: врло добро

Према томе проглашујемо га зрелим за науке на ма којем факултету универзитета.

О том му издајемо ову сведоџбу, коју својом руком потписујемо и потврђујемо печатом срп. православне гимназије.

У Новом Саду 17. јуна 1910.

За верност превода

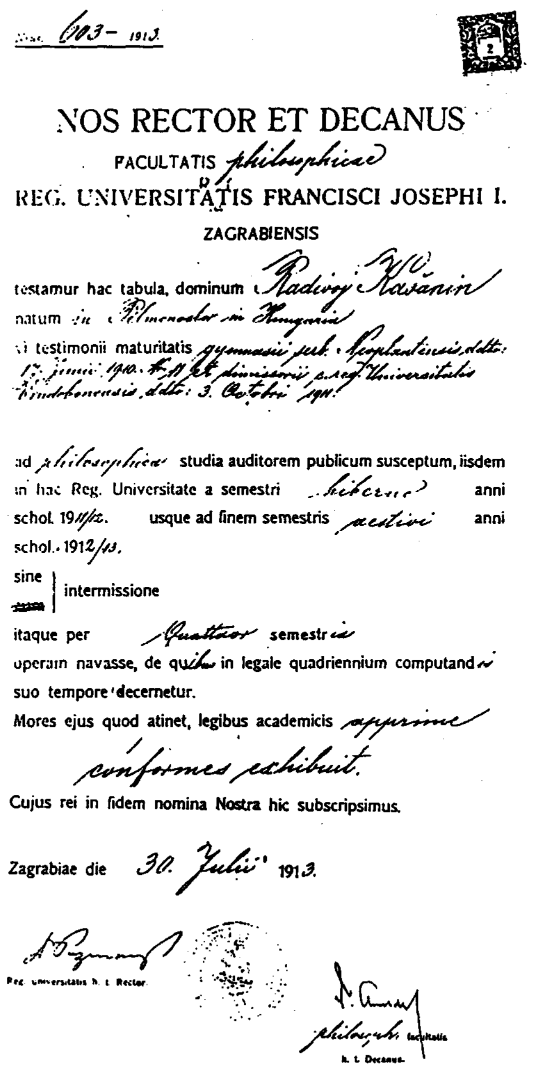
Васа Пушибрк с. р. управитељ

[illegible] 191 / 1910

Magyarnak másolata fél által eredetiként felmutatva [illegible]

На лични захтев, матурант Р. Кашанин је полагао и *грчки језик*, како би могао да студира „на ма којем факултету универзитета".

Радивој Кашанин на почетку студија, Беч 1910. година.



Num. 603 - 1913.

NOS RECTOR ET DECANUS

FACULTATIS philosophicae

REG. UNIVERSITATIS FRANCISCI JOSEPHI I.

ZAGRABIENSIS

testamur hac tabula, dominum Radivoj Kašanin

natum in Pélmonostor in Hungaria

vi testimonii maturitatis gymnasii serb. Neoplantensis, dto: 17. junii 1910. Nr. 11 et dimissorii c. reg. Universitatis Vindobonensis, dto: 3. Octobri 1911.

ad philosophica studia auditorem publicum susceptum, iisdem in hac Reg. Universitate a semestri hiberno anni schol. 1911/12. usque ad finem semestris aestivi anni schol. 1912/13.

sine intermissione

itaque per Quattuor semestria

operam navasse, de quibus in legale quadriennium computanda suo tempore decernetur.

Mores ejus quod atinet, legibus academicis apprime conformes exhibuit.

Cujus rei in fidem nomina Nostra hic subscripsimus.

Zagrabiae die 30. Julii 1913.

Reg. universitatis h. t. Rector

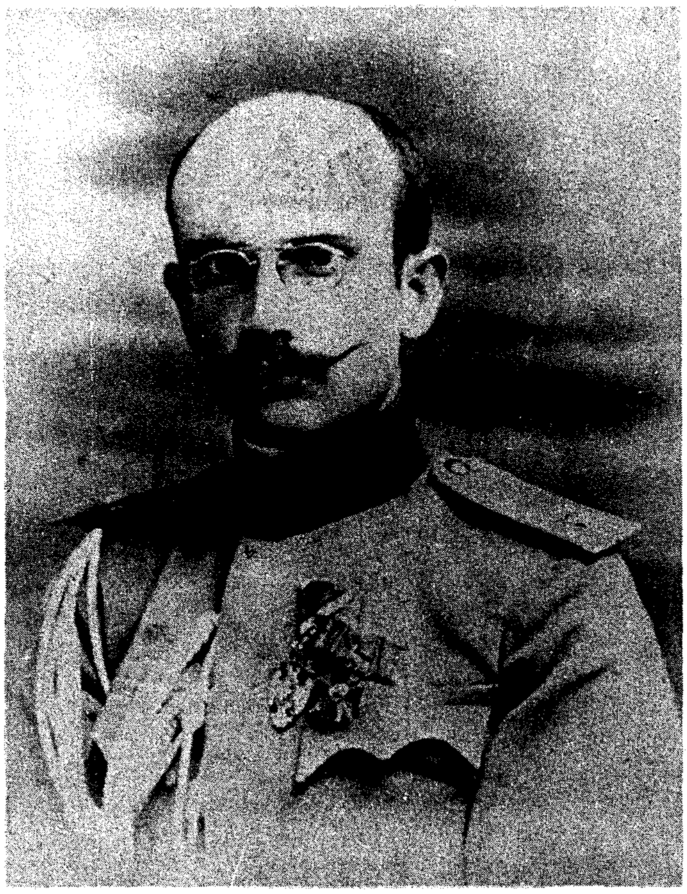
philosophicae facultatis h. t. Decanus

Изглед уверења о Р. Кашаниновим студијама на Свеучилишту у Загребу „Фрање Јосифа I“ од 1911. до 1913. године.

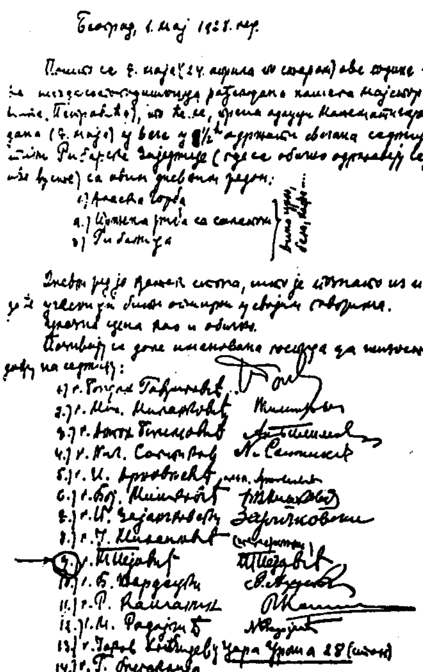
Професор Кашанин је одлично знао латински, грчки, мађарски, немачки, француски, па и енглески језик. А, знање црквенословенског језика помогло му је да на почетку рата пребегне Русима. — У друштву једног руског војника трећег позива (1915. г.).

Са вереницом Катарином — својим животним сапутником (Русија, крајем 1917. г.)

Као аћутант команданта пука на Солунском фронту (1918. г.).



Рат је завршен. Смирен и достојанствен изглед ратника.



Београд, 1. мај 1928. год.

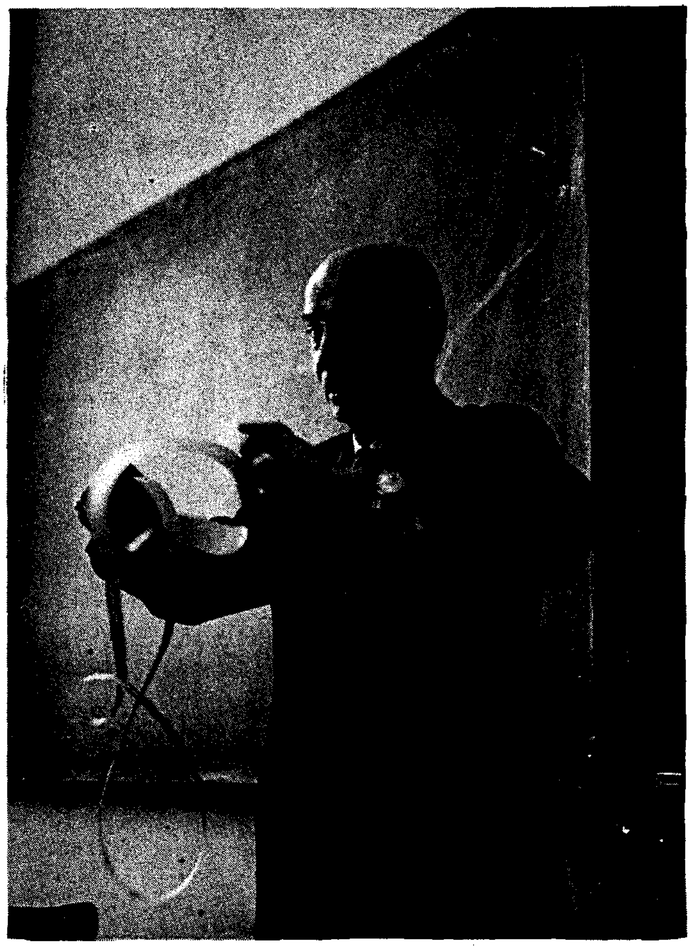
[illegible]

Заричковић

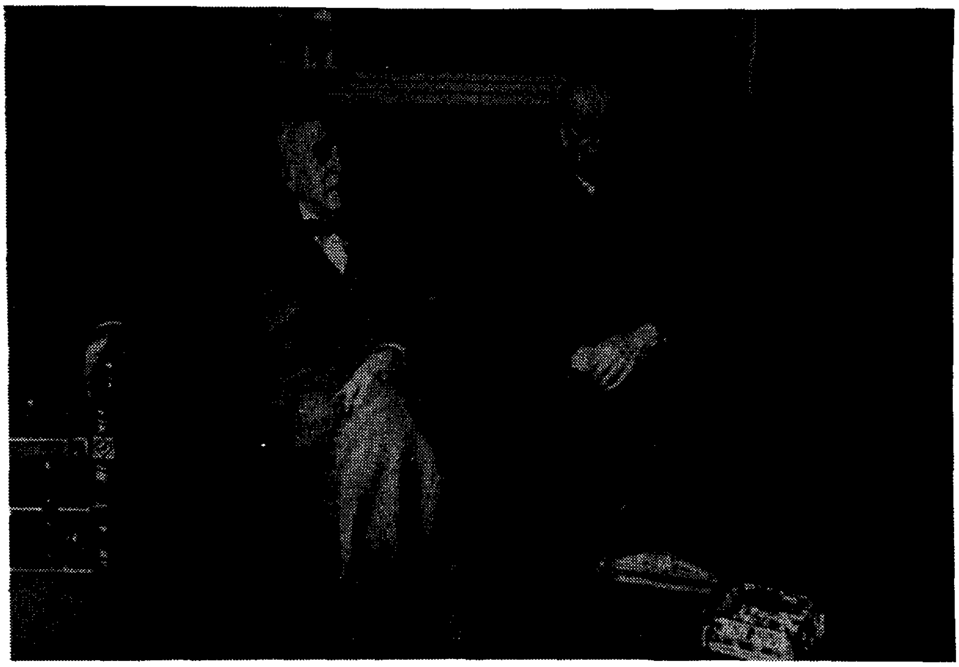
Шездесети рођендан професора Михаила Петровића, Београд 1928. година.

Студенте математике од Загреба дочекао је у Београду професор Радивој Кашанин (1925. г.).

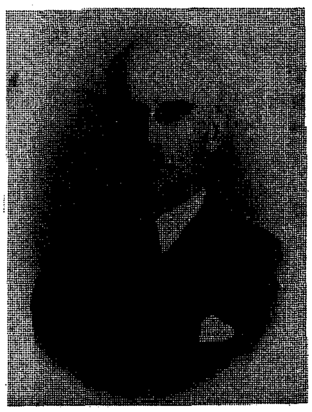
Фрушка Гора, 1928. г. — Комисија за одређивање локације за астрономску опсерваторију; слева: Радивој Кашанин, Јеленко Михаиловић, Михаило Петровић, Павле Поповић, Антон Билимовић, Милутин Миланковић, Војислав В. Мишковић.



Са часа на Архитектонском факултету у Београду; демонстрација Мебијусове површи (око 1951. г.).

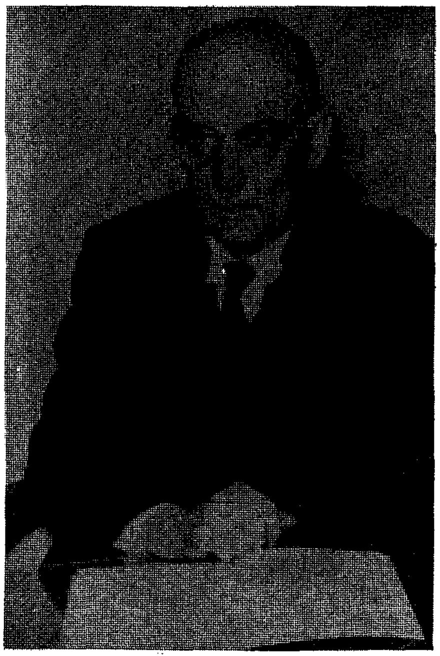


Ћилутин Миланковић и Радивој Кашанин у кабинету председника Српске кадемије наука; Београд 1951. године.

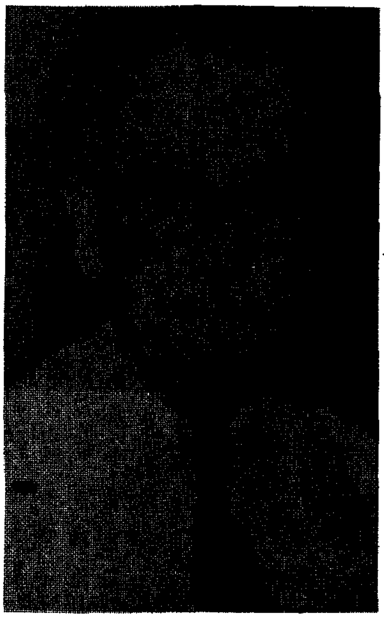


1928. година

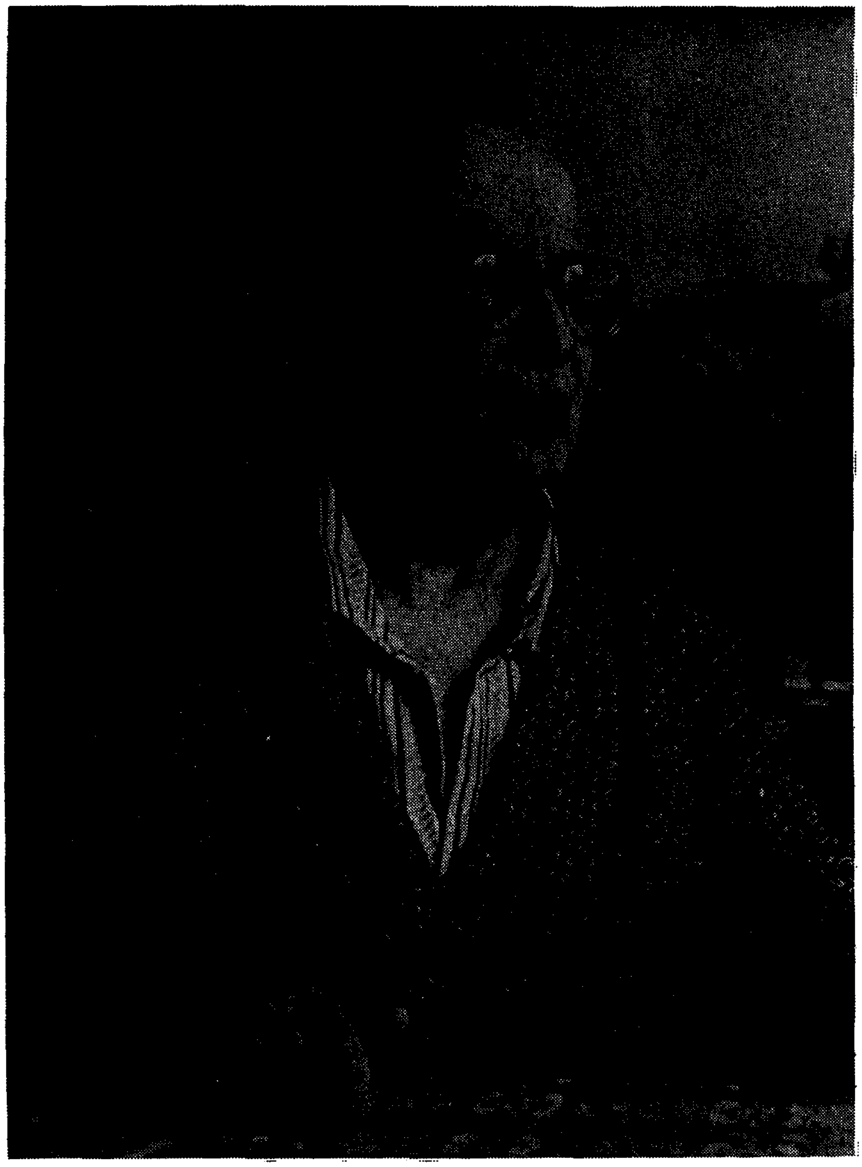
1969. година



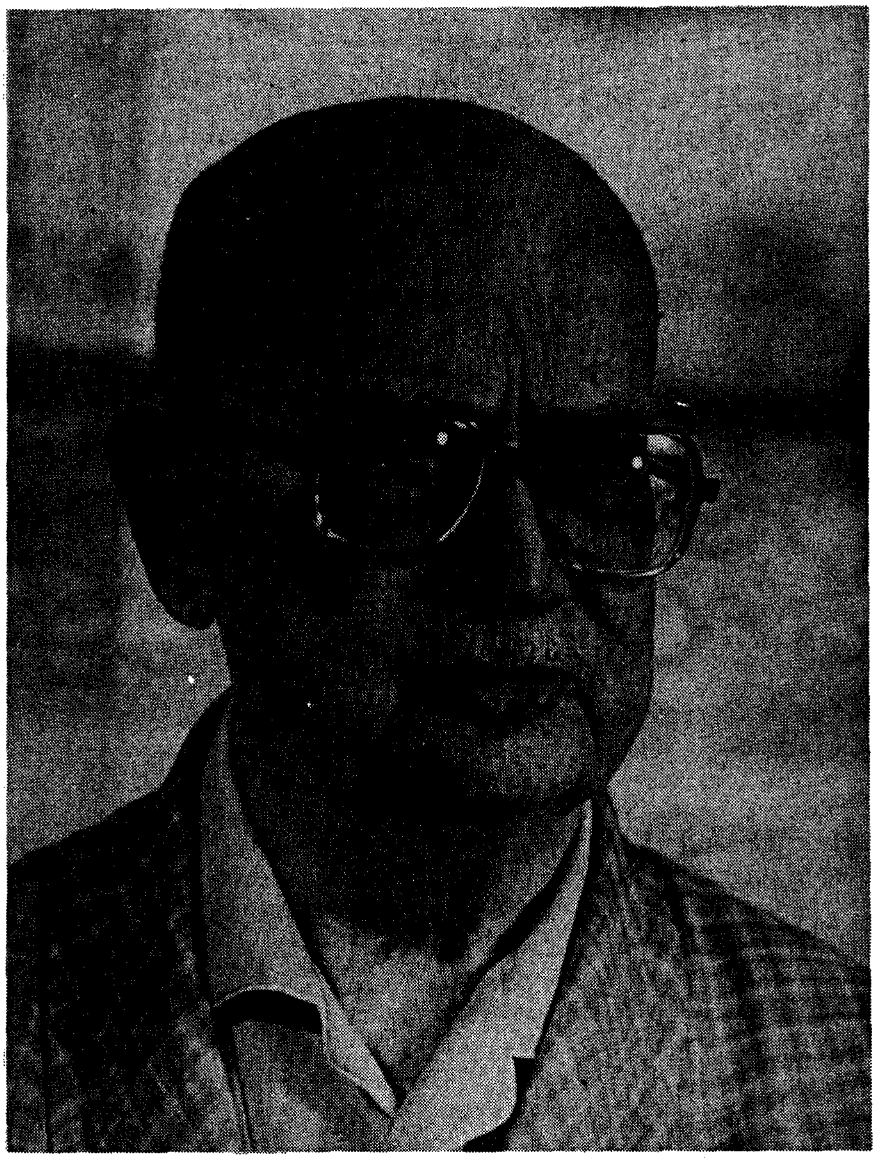
1951. година



1974. година



1980. година



1984. година

Академик Мирко Стојаковић (1915–1985) овако је видео лице Радивоја Кашанина.

Драган ТРИФУНОВИЋ

МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ КОСТЕ СТОЈАНОВИЋА

— Прилог интелектуалној биографији научника —

По нашем мишљењу Коста Стојановић је после Михаила Петровића најизразитији испитивач аналогних појава и математичких модела у науци, природи и друштву у нашем 19. веку. Студирајући у исто време и у истој генерацији са Петровићем, Стојановић је претрпео исти утицај у смислу стицања универзалног знања и налажења јединства међу природним и математичким наукама, а што се наставним планом на Великој школи и предвиђало.[1] Иако се доцније изјашњавао против слабе научне организованости и знања које даје Велика школа,[2] Стојановић је као и Михаило Петровић, на Великој школи добио почетне импулсе за истраживања природе.

У првој деценији овог века Стојановић је већ потпуно заокружио овакве погледе. Он је већ објавио своја два основна дела *Тумачење физичких и социјалних појава*[3] и *Основи теорије економских вредности*[4] која су за студију математичке феноменологије у његовом делу најобухватнија и изворна. Било нам је доступно да еволуционо пратимо ова истраживања код Стојановића[5]. При оваком раду дознали смо два основа, кључна тренутка у развитку ових проблема у Стојановићевом делу:

(i) Коста Стојановић се проблемима моделовања природних и друштвених процеса и математичког описивања економских појава бавио још на студијама на Великој школи (1885–1890) и студијском боравку у Паризу (1893);

[1] Д. Трифуновић: *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, Београд 1969, стр. 629 (даље у тексту *Летопис*).

[2] У својој аутобиографији Стојановић је писао: „Слободно се може рећи да је мало ђака прошло кроз нашу велику школу и незнајући ни суштину питања, којима се наука бави, које су они слушали, а као добри познаваоци исти оцењени" (*Заоставштина К. С.*, фас. L/12).

[3] Београд 1910, стр. 283.

[4] Београд 1910, стр. 193.

[5] Захваљујући академику Павлу Савићу аутор ове студије добио је сву научну заоставштину Косте Стојановића од породице Стојановић. Ова заоставштина садржи око 4000 листова објављених и необјављених текстова Косте Стојановића. Овај дар породице Стојановић аутор ове студије је поклонио Музеју града Београда и тако је настала *Заоставштина К. С.*

(ii) Дошколовавање, односно даље специјалистичко учење ван земље било је кобна препрека од које се Коста Стојановић до краја живота није могао да ослободи.

Образложимо ова два уочена момента у делатности Косте Стојановића.

Програм истраживања

У Паризу (1893) Стојановић је изузетно много окупиран основама математике, филозофијом математике и општим жељама да различите појаве и процесе опише математичким језиком. Рецимо, он детаљно проучава осећања код човека и после општих разматрања о осећању прелази на изналажење математичког модела за осећање. Излагање Стојановићево занимљиво је из више разлога, антиципативно у смислу неких данашњих радова, а пре свега у примени функционалних односа међу појавама које одређују осећање. „Нека су $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ количине које одређују ма коју природну појаву, која акцијом својом производи у нама ма какав осећај, преко чула. Битност саме појаве у природи условљена је нарочитим односом између тих количина. Обележимо тај однос знаком

$$A: \ \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0.$$

Овај нам знак обележава буди какав однос буди које физичке појаве. Ми знамо да од тог односа зависи сама појава, њене особине и квалитет. А квалитет је њен условљен квантитетом и релацијом квантитета тих количина.

Нека сада физичка појава, која је изражена односом $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и коју ћемо краће звати од сада φ или A, изазове какву психичку појаву, преко наших чула — извесно осећање B. Осећање B зависи такође од извесних узрока. Обележимо те узроке $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. Означимо зависност тих узрока једном функцијом

$$B: \ \psi(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) = 0.$$

Узроци $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ зависе на извесан начин од $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, јер се осећај производи физичком појавом. Између $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ и φ мора постојати извесан однос, који ћемо обележити са

$$C: \ \Phi(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \varphi) \qquad \text{или}$$
$$\Phi[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n].$$

Последња функција природом својом прецизира нам осећај произведен физичком појавом φ, а у исто време нам каже, да је Φ осећај зависан од количина $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Однос тих количина је овде измењен неком природом, то је оно субјективно што се на самом осећању опажа, док у главноме опет постоји однос количина, од чега зависи квалитет осећања“.[6]

Овакав начин математичког описивања које излаже Стојановић јесте такозвано непотпуно моделовање појаве на изабраном језику математичке симболике. И поред незавршеног моделовања, ово што је Стојановић започео још

[6] *Заоставштина К. С.*, фас. 1, 1893.

1893. године у виду студентских бележака, оваплоћује се данас у радовима из математике уметности, где се за доживљај једног уметничког дела користи нека од алгебарских структура.[7]

На истом месту грађе, где је био и рукопикс о осећању, налазимо и Стојановићев **програм** рада.

„Питања која хоћемо да решимо своде се на ово:

1. Да ли су основи математички различити или не;

2. Који су то основи: тачка (простор), време, однос, број;

3. Радње анализе математичке, доводе ли до нових односа или не;

4. Математика у служби физичких наука може ли поћи од различитих елемената или од елемената идентичких;

5. Да ли се крајњи резултат математичке анализе може неком логичком дедукцијом да изведе или не;

6. Принципи механички и основи математички;

7. Где је могућа математика и шта јој даје могућност да уђе у извесну грану науке;

8. Да ли се добија у појмовима анализом матема(тике) или не;

9. Математика сама за се. Примењена.

10. Разлика између елем(ентарне) мат(ематике) и више;

11. Прогрес у свести људској појавом … ;

12. Шта се не може да реши без инфинитез(ималног) рачуна.

То су тачке на које ћемо и одговорити".

Изложени програм из 1893. године важан је не само стога што открива Стојановићева хтења у париском периоду, већ наговештава будући рад. Ово је прави и стварни програм Стојановићевог кретања у науци. Ова питања задиру у суштину основа математичке феноменологије. Рецимо, када Стојановић поставља питање „Математика у служби физичких наука може ли поћи од различитих елемената или од елемената идентичних" он тиме наслућује **да мора** постојати „нешто" чиме би се у физичким наукама појаве ослободиле материјалног значења и тако проучавале. Он то „нешто" у програму назива „различито" и „идентично". Као што је познато, и Михаило Петровић је поставио ово питање и свео га на два основна феноменолошка појма: механизам појаве и аналошко језгро (закон активитета). Ово ћемо доцније и код Стојановића наћи када испитује економске појаве доводећи их у сличност са термодинамичким појавама.[9]

---

[7] Консултован часопис *Бит* 1(1968)–8/9(1972), Загреб.

Заоставштина К. С., Фас. 2, 1893, 2.

[9] На истом месту где је изложен овај програм, сачуван је рукопис *Да ли су основи математички различити или не* као одговор на прву тачку програма. Овај рукопис из 1893. године је веома актуелан, занимљив и заслужује да буде данас објављен.

I 18

Овај програм Стојановић ће до краја свога века успети да испуни и за собом да остави још доста отворених питања.

Као студент IV године Велике школе ради на проблему социологије, где као метод проучавања социјалних појава уводи начела физике, тачније механике са одговарајућим математичким описивањима. Тако, 12. септембра 1888. у Алексинцу наилазимо на његов рукопис *Социологија као наука*,[10] где образлаже горе наведени метод излажући „Одношај друштвених наука према осталим наукама, претрес елемената социјалне науке, неколико важнијих проблема из друштвених наука“. Са становишта наших истраживања, у овом рукопису је посебно карактеристично место, где Стојановић увиђа да се социјалне појаве могу проучавати путем сличности са физичким појавама. Он у одељку *Сличност између физ(ичких) појава и социјалних* дословно пише: „ ... Сваки човек у друштву је атом, друштво је материја, закони по којима бивају процеси социјални под уплив ... сила, слични су са законом по којима бивају процеси између материје и силе у физичком свету“.[11]

На крају студија у Београду Коста Стојановић ради на обимном рукопису *О важности математике у васпитању*, где део о математичким средствима (помагалима) има значење анологних модела.[12]

У времену приправничког стажа на Великој школи код професора Косте Алковића (1889/90 — асистент за физику),[13] Коста Стојановић спрема професорски испит,[14] интензивно ради на проучавању литературе. Овде је сачуван један рад из линеарних диференцијалних једначина $L_n(y) = 0$, а оно што је за садржај наше теме битно, он и даље не напушта своју основну преокупацију у налажењу математичких модела за друштвене и економске појаве.[15] У рукопису *О методама* излаже потпун математички модел економског тржишта које обухвата богата и сиромашна подручја[15]. Изложено моделовање је потпуно, а формални језик на коме моделује тржиште не излази из оквира математичке анализе. Овде спроведена анализа моделујућих параметара потпуно открива Стојановићево велико познавање економске науке. Овај рад из 1890. године дефинитивно је одлучио да се Стојановић у доцнијем раду определи за овакве проблеме које ће и успешно решавати.

Са неколико изложених примера покушали смо да докажемо да се проблем моделовања, као и аналогно посматрање појава у природи и друштву, јављају код Косте Стојановића још у школском периоду. Сва доцнија Стојановићева опредељења у науци и економији резултат су интезивног рада и изузетне

[10] *Заоставштина К. С.*, фас. 2, 1888.

[11] Исто, фас. 3, 1888.

[12] Исто, фас. 14, 1889.

[13] *Летопис*, стр. 78; АС, ВШ, 1889, 126 (2. октобар 1889).

[14] Октобра 6, 1890. Стојановић је постављен за професора приправника у Нишкој гимназији и убрзо полаже професорски испит. За овај испит обрадио је тему *Теорија анвелопа код кривих линија и површина* (Наставник 1 (1890), 308).

[15] *Заоставштина К. С.*, фас. лб, 1890; фас. 53, 1890.

обдарености још из студентских дана.

Однос према математичким наукама

Име Косте Стојановића било је, и данас је познато нашој јавности али је то ипак био и остао математичар о коме се најмање зна. На неки начин његов научни живот остао је обавијен тамом тако да је требало доста времена да се он реконструише у детаљнијим цртама које боље објашњавају и његово научно дело. Може се рећи да у овом тренутку остаје још понешто неразјашњено, особито из времена школовања и студија, али да касније године, поготово после повратка из Лајпцига, могу да се прате у континуитету и данас не представљају проблем за историју наука.

„Одличан успех на студијама у Београду (1889), амбициозно и темељно изучавање литературе, асистентура на Великој школи (1889/90), професорски испит (1890) стварају жељу код Стојановића ка даљем усавршавању ван земље. „Кад сам све завршио, што се је у Србији имало завршити, — писао је Стојановић — осећао сам све своје недостатке и оцене повољне мојих наставника нису ме збуњивале нити утврђивале у своjем веровању, да ли изноваваља почети студије, баш из моје струке, из које сам професорски испит положио. За овакво моје веровање, био ми је главни повод тај, што су често моји напори безуспешни били да разумем расправе из чисте математике или примењене, које сам на француском или немачком језику хтео да разумем."[16]

После три године рада у Нишкој гимназији Стојановић одлази у Париз (јун 1893) на једногодишње школовање. „Редовно сам посећивао часове из више математике, астрономије, механике и физике — писао је Стојановић. Поред ових наука, ради језика и општег образовања слушао сам, кад год сам за то времена имао, предавања на Сорбони и Колеж де Франсу из филозофије, књижевности и историје. У Паризу сам добио праве и прве основе из математичких наука и видео да је све оно, што сам на нашој великој школи учио само један недовољан увод био за озбиљније студије."[17]

Из једног писма оцу Трифуну по доласку у Париз запажају се прва разочарења, чудни Стојановићеви погледи на даља усавршавања у математичким наукама.[18] У том писму од 16. октобра 1893. пише: „Из вашег писма видим да ће и Мика доћи овамо и ја му се од свег срца надам, јер ма да овде имам доста познаника ипак ми је најмилије друштво са својим старим друговима. Мој школски друг за кога вам је Тихомир казао да је у Паризу за сада није, а по свој ће прилици доћи кроз који дан. То је један од мојих пријатеља врло добрих а после заједно се бавимо једном струком те ће ми он бити много од помоћи. Њему се као и Мики много надам.[19]

---

[16] *Аутобиографија*, наведено, стр. 6 (*Заоставштина К. С.*, фас. L/12).

[17] Исто, стр. 7.

[18] *Заоставштина К. С.*, фас. П.а.

[19] Овде Стојановић мисли на Михаила Петровића који је у Паризу већ стекао лисанс математичких и лисанс физичких наука. О Петровићу Стојановић је у својој аутобиографији

Видим да сте ствари донели из Ниша. За оне књиге, о којима ми пишете, немојте ништа сумњати, јер сам их дао на послугу једном своме колеги.

Као што сам вам пређе писао школа није још отпочела, а почеће 1-ог Новембра. Ја се редовно нећу уписивати нигде, јер за годину дана не могу ништа да свршим. После, и када бих и хтео што да свршим било би излишно јер сам ја већ професор и не могу бити ништа више. Оно што сам већ једанпут полагао морао бих још једанпут полагати изново. То је само губити време и ништа више. Све што бих могао учинити то је да се потрудим да будем доктор из своје струке, но ја то сматрам, као што јесте у самој ствари, за голу титулу, која нигде као и овде нема никакве вредности. Посећиваћу само чувеније професоре из своје струке и то из оних партија, које сам мало или ни мало слушао и то је све".

Једно доцније писмо оцу (5. март 1894) показује да поред самосталног истраживања литературе у Париским библиотекама, Стојановић прижељно похађа предавања на Париском универзитету. „Од 1-ог марта је овде почео други семестар. Кроз који ћемо се дан распустити за овдашњи Ускрс.

О Паризу за сада немам шта особито да вам пишем до то да је од 5-ог. Марта почео предавање један професор, који спада у најстарије професоре у Европи. Тај се професор зове Hermit, и има близу 80 година. Врло је чувен математичар и веома се радујем што сам га могао чути. Истог је професора наша влада ове године одликовала орденом Св. Саве II-ог степена, мислим, да се сећате ако вам је то пало онда у очи. Што је чудновато то је, што је овај старац врло свеж и паметан, а то је реткост у овим годинама. Ко зна можда му је ово последња година професоровања."[20]

Незадовољан што мора да напусти даље усавршавање, Стојановић у писму свом стрицу Ристи (24. јун 1894) износи ставове према Великој школи.[21] „Из вашег писма видим да су расписане извесне катедре на Великој школи, но све то за мене нема никаквог интереса[22]. Катедру из математике, на коју бих могао аспирирати, не интересује ме за сада. Ја налазим да би са моје стране било и сувише дрско и нескромно да се јављам за једну катедру, на коју ће већ да

забележио: „Ту сам се нашао (у Паризу — п.п.Д.Т.) са својим другом Мих. Петровићем, који је већ свршио ... и спремао за докторску тезу из математике и разговор са њим и упућивање са његове стране много су допринели моме комплетном улажењу у предмет ради кога сам дошао у Париз" (стр. 7).

[20] *Заоставштина К. С.*, фас. П.б. — Знаменити математичар, велико име француске науке Ермит (Charles Hermite, 1822–1901) изузетно је волео Србе, српску историју. Код професора Ермита у Паризу студирало је више наших математичара, рецимо Мијалко Ћирић (1862–1916) и Михаило Петровић (1868–1943). На докторском испиту Михаила Петровића (Париз, 1894) професор Ермит је био председник испитне комисије. У 1896. години професор Ермит је уредно сакупио све своје објављене радове (сепарате) и књиге и поклонио их Филозофском факултету у Београду. На сахрани професора Ермита 15. јануара 1901. у Паризу Михаило Петровић је имао запажено место заступајући српску науку.

[21] *Заоставштина К. С.*, фас. П.д.

[22] Овај конкурс за професора математике на Великој школи објавили смо у *Летопису* стр. 125 и као што је познато, добио га је Михаило Петровић.

аспирирају најмање два доктора математике.[23] Знам сигурно да сам у своје време дошао овамо, да бих и ја могао са истом компетенцијом сад да се јавим, али кад то није био случај, за сада се задовољавам само тиме што ћу моћи на страни да проучим темељно онај предмет, за који сам се толико година спремао, а то је математика.

Што се Велике школе тиче, ја на њу ни најмање не помишљам нити се спремам да на њу дођем. Као што вам рекох, имам пред очима само темељну спрему, а уверен сам да се до спреме може доћи и немајући прописне законске титуле.

Јавио сам вам да сам намеран да поново тражим још једну годину одсуства. Молбу сам већ упутио Министарству и надам се да је већ у Београду. У молби сам тражио Беч, и ако ми буде одобрено бићу идуће године ближе Србији, те ће мо се моћи чешће виђати. Тражио сам да ми се што је могуће пре пошаље путни трошак од Париза до Беча, јер сам намеран да ферије проведем у Бечу, и да се спремим за предавања идуће године".

По доласку у Београд са студија у Паризу (1894), Стојановић ради као професор математике у II београдској гимназији. Жеља да не напусти даљи рад у математичким наукама, одвела је 1897. године Стојановића у Лајпциг, али сада са циљем стицања највишег научног степена. „Био сам већ код професора и разговарао да ли ћу моћи за годину дана да положим докторат и он ми је рекао да ће ту ствар изнети у седници и да ће ми позитивно одговорити у четвртак. Надам се да ћу на ово имати право, према ранијим примерима".[24] Убрзо у Лајпцигу долази у меланхолично стање, резигнацију, пун гнева и размишљања о својој даљој судбини. У Лајпцигу се разболео и после три месеца морао је да се врати у земљу. Из овог периода сачувано је једно Стојановићево писмо рођаку Паји (9. фебруара 1897) које потпуно одређује његове погледе на живот и науку. Доносимо ово писмо у целости.[25]

„Драги мој Пајо. Чудићеш се што ти овако често пишем, али морам, јер немам ским овамо разговарати, нарочито о овоме о чему ти мислим писати.

Док сам у Срб. био бојао сам се да ме не снађу ове мисли, које су ме од јуче спопале, и које ће ме извесно бацити у апатију крајњу. А то је шта ћу добити ако баш и положим докторат па се мораднем вратити у Србију. Опет да будем професор, ах та ме мисао до лудила доводи, јер и сам знаш да је то ужасни положај, као и сви што су чиновнички положаји. Па баш и професор В. Школе, што је врло сумњива ствар јер има већ двојица за математику, који могу данас сутра то да постану, а ја опет у гимназију, не би била за мене бог зна каква утеха, нити то ласка имало мојој сујети. Ја сад као и увек, чезнем само за независан положај, за положај где ћу ја моћи радити, што ми се свиди, где

---

[23] Овде Стојановић мисли на Петра Вукићевића који је у Берлину завршавао докторску дисертацију, Ђорђа Петковића који је спремао докторски испит у Бечу и на Михаила Петровића.

[24] *Заоставштина К. С.*, фас. П.е.

[25] Исто, фас. П.ж.

ћу довољно забаве наћи и уживања у послу. Но како да будем независан, како да се оспособим, да могу независно живети, то је питање које ми се ставља и о коме ћу ти говорити. На ово бих питање знао одговорити врло лако да ми се је ставило пре 10 година, кад сам се имао решити које ћу занимање изабрати, али је данас, у овим приликама, врло тешко на њега одговорити.

Мој живот прошли требао ме је научити да не рачунам на заблуде, али ми изгледа да ја по мало још у њима живим. Ја полазим од онога што је било и од оног осећања у коме сам се у Србији налазио и питам се шта треба да урадим па да се то више не поврати. Ево како сам се решио.

Вероватноћа је већа да се морам вратити у Србију но иначе. Ове ћу године уложити огроман труд и хоћу да имам успеха. Ако тај труд уложим на изучавање математике уверен сам да оног успеха, који ја од рада захтевам нећу имати. Баш и да све постигнем, што ми је измакло за тако дуги низ година, из математичке богате литературе и да постанем чувени светски математичар, опет те чека судбина професора, а она је горка ма где. Овде ме нарочито положај S. Lie баца у ове идеје.[25'] То је један од најгенијалнијих математичара овог века, па и он је према ономе што ја тражим од уложеног рада, у мизерном положају. Сем славе никакве више утехе. Њега слуша један малени број, доиста изабраних слушалаца, а ја бих хтео да их имам на милионе. Ја не презам од борбе, од рада, од патњи ни од чега, али хоћу душевног спокојства, ако ничега другог немам од науке, а то ми математичка симболика логике неће дати. Наука тиха, спора, мртвих идеја, пуна проблема могућих и немогућих да се реше, али то нису проблеми живота, стварности, рада и борбе, већ проблеми куриозни и интересантни за мирна човека, за човека не рањеног, за онога који није прекидан у раду, и који бар није таквог склопа да је другојачије свет осетити могао, можда и у врло малим и ништавним неуспесима, какав сам ја био.

Ако се вратим у Србију и будем могао бити проф. В. Школе, решио сам се да будем професор чисте философије, математике никако. На философији сам радио много и несумњам у успех, као што несумњам у успех ни у математици, али рачунам да нема смисла уложити један огроман труд, па на крају крајева бити незадовољан. Философију волим и с тога што ћу имати више слушалаца, што ћу моћи говорити и што ћу у њој наћи оне утехе, које ми математика не може дати. На ово сам се решио и стога, што има више изгледа да ћу бити професор Вел. Школе но иначе, а то није илузија, са којом не треба рачунати. Ако философију не узмем, онда ћу бар физику узети као главни предмет али математику као главни свакако искључујем.

Друга је комбинација решења овога питања да слушам права. Не знам још колико ми семестара треба па да могу полагати докторат правни, али ако ми треба више од 3—4, на ово ћу се прво решити. Кад свршим права и у Србији постанем адвокат, онда сам тим већ добио ону самосталност, коју ми ниједно друго занимање не осигурава. Као адвокат имам и много веће поље рада и

[25'] Познати норвешки математичар Софус Ли (Sophus Marius Lie, 1842–1899).

много више борбе и кад све апсорбујем што ми наши мали заплети друштвени у Србији могу као храна пружити у томе послу, бићу по свој прилици задовољнији но иначе. С тога премишљам и ако повољни услови буду за права, тамо ћу прво отићи.

То су две комбинације. Ни једну ни другу не бих изабрао да сам раније имао могућности да бирам. У своје бих време изабрао технику или медицину и са тим бих постигао оно за чим жудим. Пут би ми био отворен на све четири стране света и ја се не бих премишљао да ли да се вратим у Србију. Али то више није случај. Ја немам средстава да једно од тога сада довршим, ма да су и године прошле, и морам престати да мислим о ономе што је требало бити, већ прећи на оно што може бити.

Ето то су те мисли о њима ти пишем јер ме ти познајеш добро и моћићеш ме разумети, свакоме би другом изгледале смешне, и за то ћеш ово чувати као велику тајну, јер би ми могло много нашкодити кад би се сазнало. Ти разумеш и моју узрујаност и од куда ова промена у гледишту предмета, јер није нова тема за нас, и ми смо о њој и раније говорили, и питали смо се чешће чим би се могло избећи професорски монотони положај.

Ако се ниједна од ових комбинација не оствари, ако све одлети у ваздух, јер је све под питањем, онда кад се у Србију вратим морам дати оставку на свој положај и бацити се на политику, као последњи терен мог дејствовања где ћу и завршити каријеру. Чак и ту, мислим, да ћу наћи у оној глупој борби, више душевног спокојства, но у макојој грани науке као професор.

О остајању на западу нема могућности. Највише што би се могло бити за првих 5—10 година то је доцент, а то је слаба утеха. Међутим самога себе без узрока, а то би морало бити кад бих и дању и ноћу радио над књигом, и борио се са формулама, па бити сиромах доцент, па чак и професор у својој 50 години, знам да би ми се отимали, чешће и чешће уздисаји неспокојства душевног, јер не бих никада био задовољан, пошто бити професор ма где, није за мене утеха. А и то је све под питањем, ако се не постигну најповољнија очекивања онда болови и удари, којима би човек морао пре времена подлећи. На западу бих могао остати кад бих се могао подухватити каквог посла, који би ме материјално осигурао и донео какве приходе, а то са нашим занатом никако не бива. Мало час сам ти рекао за S. Lie да он улива само решпекта и дивљења али не и завист његовог положаја.

Одговори ми на ово писмо да видим шта ти мислиш о мојим комбинацијама.

(Кажи Јеленку да му немам шта ново писати о киб. физ. но што сам Недељковићу писао. Ако он отидне на страну нека иде у Грац или Ерланген тамо ће за њега по најзгодније бити. Васовићу кажи да за њега овде нема ништа а може наћи оно што тражи у ма коме месту где има технике. Ја сам непрестано тражио књигу где ћу наћи уређење свих немачких универ. па да им пошаљем, али не могох наћи, ако нађем послаћу им одмах.)

Драги Пајо, мислим да ћеш све оно што ти рекох разумети, кад и ти пођеш од тога да човек није рођен да се целога века пати, или када пати да бар у изгледу има да ће се кад тад задовољити. До потпуног задовољства се долази смрћу, и то релативног пак што се са мање заблуда човек бори и рачуна.

Кроз кратко ћу ти време послати једну расправу о моралниам заблудама за „Дело".

9/II -97 у Лајпцигу Твој Коста

И поред овакве ситуације у коју је Коста Стојановић запао, париски и лајпцишки период студија изузетно су важни баш за ове теме које пратимо у овом раду. Са знањем које је понео из Београда и Ниша, Стојановић је на изворима механичког погледа на свет с краја 19. века потпуно изградио погледе о јединству међу разнородним наукама. У овим погледима и самим резултатима Стојановић се знатно приближио математичкој феноменологији Михаила Петровића, у појединим деловима је превазишао.

Феноменолошки системи

Најјачи Стојановићев резултат у феноменологији јесте његово дело *Основи теорије економских вредности.*[26] Из писма секретару Академије[27] сазнајемо да је ово Стојановићево дело Академији доставио лично Михаило Петровић: „(Универзитет — Математички кабинет, Београд, 10. окт. 1909) Господине Ковачевићу, Ако буде седнице у понедељак 12. ов. м. (Акад. прир. наука), молио бих Вас да се на дневни ред стави и ово: 1. Расправа Мих. Петровића: *Једна општа особина коефицијената Маклоренових радова, који задовољавају алгебарске диференцијалне једначине;*[28] 2. Расправа Косте Стојановића: *Основи теорије економских вредности*; 3. Расправа Д-ра Милорада Поповића: *О зависности електричне проводности течних диелектрика од температуре.*[29] Ваш поштовалац Мих. Петровић".[30] Према реферату М. Петровића и Б. Гавриловића на седници Академије природних наука од 18. XI 1909. одлучено је да се Стојановићев рад објави као посебно издање.[31]

Према архивској грађи утврђен интензивни рад на испитивању узајамних односа наука, природно је било очекивати да Стојановић објави једно обимније дело из економије, чије ће појаве повезати са физичким појавама. Ова хтења,

---

[26] Српска краљевска академија, Посебно издање XXXI, Природњачки и математички списи, књ. 7, Београд 1910, стр. IV+193.

[27] Секретар Српске краљевске академије Љубомир Ковачевић, професор универзитета.

[28] Објављено, Глас LXXIX, 32 (1909).

[29] Објављено, Глас LXXIX, 32 (1909).

[30] АСАНУ, Фонд СКА, Записници скупова АПН за 1909.

[31] Стојановићева књига објављена је из фонда Задужбине Пере К. Јанковића. У записнику скупа АПН од 14. V 1910. дословно стоји: „Задужбини пок. Пере К. Јанковића није се јавио нико на расп. стечај. Задужбина је одлучила да награди дело К. Стојановића *Основи теорије економских вредности*, пошто је дело г. Стојановића оценила ова Академија као одличну расправу" (АСАНУ, Фонд СКА, 1910).

веома блиска Стојановићевим погледима на свет, остварују се увођењем термодинамичких процеса који ће бити доведени у изоморфне односе са економским појавама. За израду ове студије Стојановић је проучио ширу литературу из економије где наводи и радове Маркса,а из термодинамике радове Апела, Поенкареа, Бринеа и др.[32] Како нам је било омогућено да пратимо стварање овог дела упоређујући објављену књигу са рукописом, утврдили смо да Стојановић унео пуно оних размишљања која је забележио још као студент у Београду и Паризу. Рецимо, приближно читав уводни део књиге налази се у студентским белешкама. На пример, када на стр. 15 пише: „Друштво узето као физичка средина, где људи играју улогу атома и молекила, ... " то у потпуности налазимо и у рукопису *Социологија као наука*, 1888. године,[33] и тд.

Оно што посебно желимо да истакнемо јесте потпуно јасна Стојановићева представа улоге математичких модела у оваквим случајевима истраживања. Једно математичко моделовање које он назива „добијање једначина" биће задовољавајуће само ако се пошло од доброг становишта у описивању процеса, а што све не искључује могућности промене модела у корист другог. Математички модел по Стојановићу само тумачи појаве а не одговара и разрешава основне догађаје и збивања у појави. „Симболистичку математику ваља разумети по вредности коју она има — писао је К. Стојановић. Она у себи не садржи основе тумачења појава већ гарантује метод тумачења, ако су поставке одакле се полази тачне. Симболистика даје могућности доћи до једначина, које служе за одредбу извесних количина, ако су друге познате, које искуство и опажање може да да".[34] Примењујући ова начела у својој књизи, Стојановић одмах наставља: „Суштина је ове расправе да се покажу извесне промене у економији, које су по све аналоге топлотним променама у физици и кад се утврди, ако не идентичност оно бар аналогија између температуре, притиска и запремине с једне стране и тражње, понуде и вредности с друге и покажу могуће аналогије у два разна домена појава, да се пређе на оне велике дедукције у примени два већ поменута става о енергији и е н т р о п и ј и".[35]

Оваква Стојановићева опаска почетком овог века веома је присутна и у данашњаиам феноменолошким истраживањима.

Рецимо, у основној структури сложеног система (математичко моделовање — критеријум управљања — скуп ограничења) од математичког модела не може се захтевати да изрази све узрочности система, тј. ових појава на које се примењује феноменолошки третман.

Зашто је Коста Стојановић изабрао термодинамику као модел науке преко чијих ће процеса и моделно објашњавати, мерити и разрешавати економске појаве, односно како каже Стојановић „апсолутну и релативну, прометну или економску вредност мерићемо увек истим јединицама физичким, јединицама

---

[32] К. Стојановић: наведено, стр. 3–4.

[33] В. белешку 10.

[34] К. Стојановић: наведено, стр. 14.

[35] Исто, стр. 15.

рада или топлоте"?[36] По нашем мишљењу Стојановићу је било у то време имплиците позната и прихватљива чињеница да је термодинамика наука у којој се микроструктура — *хаотично стање* термодинамичког система са свим одредбама отвореног/затвореног система може репрезентовати двојако: 1) применом једне статистике која ће „да уреди" ово термодинамичко хаотично стање у једну законитост и 2) макроскопске величине (p, t, v) које се мере и које су сврстане у основне законе термодинамике потпуно задовољавају репрезентацију једног термодинамичког система. Овоме бисмо и додали, а што ћемо нешто доцније и доказати, да је Стојановић наслутио право, значење термодинамике у објашњавању појава у природи и друштву са феноменолошког (кибернетичког) становишта уводећи и анализирајући појам ентропије у једном феноменолошком систему са посебним освртом на жива бића.[37]

Како се у економском систему појаве понашају „с л и ч н о" као у термодинамичком систему, а што је Стојановић образложио, он с правом успоставља моделне односе између појава термодинамике и економије. Ово је веома битно код Стојановића. Он моделне односе ових наука не успоставља на основама једноставног закључивања о јединствености аналошког језгра, тј. не користи се функционалним аналогијама где запажа да се две диспаратне појаве понашају по истом математичком моделу (закону). Напротив. Стојановић детаљно и веома прецизно образлаже у з р о ч н о с т ових аналогија и тек после установљеног узрока за феноменолошке односе Стојановић закључује и усваја једно исто аналошко језгро (у овом случају то је једначина стања термодинамичког система). Стојановић пише: „Пређимо сад на прве побуде да смо имали довољно разлога, што смо смели поћи од аналогије између физичких и економских појава и на резултате, до којих су нас аналогије довеле, што смемо помишљати на велику вероватноћу, да се истине из области физичких наука морају поклапати са истинама аналогим економских наука".[38] Ово је Стојановић урадио и доказао. И поред тога, што не наводи Петровићево изграђене ставове у оваквим случајевима, јер су они већ били објављени, Стојановић се користио истим поступком као и Петровић. Стојановићева испитивања узрочности међу појавама у смислу да се оне подвргну феноменолошком испитивању, одговарају Петровићевом проучавању механизма појава. Илуструјемо ово једним елементарним Стојановићевим примером. „Рад је у економији што и у физичкој природи. Као што радом добијамо разне процесе, тако исто рад даје разне вредности. Под капиталом се у природи разумеју сви извори из којих се може

[36] К. Стојановић: наведено, стр. 3. М. Петровић, на себи својствен начин са решењима из техничке феноменологије, за ова мерења у економији најављује примену „уопштеног термометра". „За њено је мерење (економске вредности — пр.Д.Т.), шта више, могућно удесити и једну конвенционалну скалу, потпуно аналогу оној за температуру, и где би н.пр. апсолутна нула одговарала економском стању у коме су вредности нуле, где нема никаквих размена, и где се, као што је случај у почецима јављања културе економска средина изједначује са обичном, физичком средином" (*Елементи*, стр. 734).

[37] Овде се по први пут пише о овим антиципативним елементима кибернетике у Стојановићевом делу, а које ћемо нешто доцније повезати са истраживањима Драгомира Малића, професора универзитета.

[38] К. Стојановић: наведено, стр. 7.

доћи до топлоте, електрицитета,магнетизма и других сила у које се рад може трансформисати.

Једначина, којом би се окарактерисало стање социјално, механизам који ради јесте:

$$R + Q = E = V_r + V_q = E_r + E_q,$$

R = рад, Q = капитал, E = сума вредности или енергија средине, V_r = вредност консума, V_q = вредност за јачање капитала, E_r и E_q су слични изрази за економску енергију".

Михаило Петровић је Стојановићеве резултате аналогија прихватио као врсту математичких аналогија и сврстава их у ону феноменолошку групу код које је аналошко језгро представљено једначином стања $f(p,T,v) = 0$.[39] На пет страница Петровић описује резултате као пример његове потврде у класификацији аналошких група. При овоме, Петровић излаже и таблицу хомологних елемената коју доносимо у нашем облику.

Појам Симбол	1 Економија	2 Термодинамика
p	понуда	притисак
T	тражња	температура
V	вредност	запремина
Q	капитал	количина топлоте
E	енергија	богатство
R	економски рад	механички рад

Наиме, по Петровићу овде је реч о феноменолошкој групи двеју појава (1 — економска и 2 — термодинамичка)

$$F = \{f_1, f_2\},$$

при чему је јединствено аналошко језгро A_j за целу групу. Ако ове појаве искажемо на следећи начин

$$f_1 : \; x_n^1 = A_j(x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots, x_{n-1}^1, A^1),$$
$$f_2 : \; x_n^2 = A_j(x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots, x_{n-1}^2, A^2),$$

где су A^i $(i = 1,2)$ n-димензионални вектори параметара феноменолошке групе

$$A^i = \{a_1^i, a_2^i, a_3^i, \ldots, a_n^i\},$$

тада се хомологни елементи изједначавају

$$X_k^1 = X_s^2, \qquad \forall k, s \in N,$$

[39] *Елементи*, стр. 732–736.

а компоненте вектора A су у феноменолошком односу, што пишемо

$$a_m^1 \overset{f}{\longrightarrow} a_m^2, \qquad m = 1, 2, 3 \ldots, n.$$

Применимо ово на реалну једначину стања као аналошког језгра у Стојановићевим посматрањима. Имамо

$$p^1 = A_j(T^1, V^1, A^1) = \frac{n^1 R^1 T^1}{V^1 - b^1}, \qquad p^2 = A_j(T^2, V^2, A^2) = \frac{n^2 R^2 T^2}{V^2 - b^2},$$

где је

$$A^1 = \{n^1, k^1, b^1\}, \qquad A^2 = \{n^2, k^2, b^2\}.$$

Како се обично компоненте вектора A приказују као маштабни коефицијенти, тј.

$$\frac{a_m^1}{a_m^2} = k_m, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

то се економске појаве могу изразити помоћу термодинамичких

$$p = \frac{k_1 k_2 n^2 R^2 T}{V - k_3 b^2},$$

где хомологи елементи p, T, V имају значење из наведене таблице.

Ово би била наша интерпретација Стојановићевог феноменолошког поља произашла из Петровићеве дефиниције аналошког језгра.

Михаило Петровић и Коста Стојановић нису удружили снаге у раду на феноменолошким системима. Радили су одвојено. Једино је познат случај заједничког рада када су математички обрадили проблем победника у једном дефинисаном систему игре или изборног система.[40] И поред тога, Петровић и Стојановић радећи на сличним проблемима још са студија гајили су пуно поштовање један за другог;[41] они су остали, некако, притајено повезани у науци. Све расправе које је Стојановић објавио у Српској Краљевској академији прошле су кроз Петровићеву рецензију.[42] А кад се дефинитивно увидела неспособност

[40] *Представнички систем изборни*, Дело 17 (1906); *О пропорционалном представништву*, Гласник Југ. проф. друштва, 16 (1936), 8.

[41] Нпр., када се Петровић припремао за математичка такмичења на Великој школи интересовао се и за учешће Косте Стојановићу. У писму од 16. XI 1889. свом другу Павлу Павловићу Петровић је писао: „Какав је тачан наслов темата, који је крајњи рок за израду, јеси ли чуо да га још ко ради — *а нарочито Коста Стојановић*, и још шта будеш знао о томе" (*Летопис*, стр. 84). Мишљење Стојановићево о Петровићу изнели смо у белешци 12.

[42] *Потенцијал отпора*, Глас LXVII, 26 (1903); *О условима интеграбилитета извесне балистичке једначине*, Глас LXVII, 26 (1903); *О једној генерализацији Бертрановог проблема*, Глас LXIX, 27 (1905); *Обртање једног тела око утврђене тачке у релативном кретању*, Глас LXXI, 28 (1906).

професора механике Мијалка Ћирића,[43] Петровић уочи претварања Велике школе у Универзитет, предлаже Косту Стојановића за предавача механике.[44]

Нешто што остаје отворено и што не може овде бити разрешено, јер не располажемо потребном грађом, то је питање — зашто Коста Стојановић није изабран за члана Академије? Његови веома добри и оригинални резултати у Гласу СКА,[45] расправе у Југославенској академији знаности и умјетности,[46] истраживања феноменолошких система, први преводи и истраживања дела Руђера Ј. Бошковића[47] и нееуклидске геометрије,[48] напредне идеје и углед јавног радника политичког и културног живота, — нису били довољни за признање у науци. Ако је Стојановић из чисто економских прилика и клаузуса за стипендисте у младости доживео разочарање о чему смо писали, а што га није поколебало већ узвисило да стално ради, истражује и проверава своје механичке погледе на свет, — тада је у овом периоду када је огласио веома јак резултат у феноменолошким системима могао да добије признање за тако користан и плодан рад.

У Архиву САНУ наишли смо на документ који излаже кандидатуру Косте Стојановића за редовног члана академије. Из Париза, 15. децембра 1919. Јован М. Жујовић предлаже Српској академији да бира за редовног члана Косту Стојановића, а за дописне чланове познате француске математичаре Апела, Лакроа и Пенлевеа. Жујовићев предлог је по много чему занимљив, те га доносимо у целости. „Сматрајући да прве године по ослобођењу Србије Српска Краљевска Академија треба да бира себи за чланове у првоме реду оне домаће и стране научнике, који су се одликовали и радом за нашу општу ствар — предлажем: да се за редовнога члана Академије природних наука изабере *г. Коста Стојановић* а за дописне чланове исте Академије г.г. *R. Appel*, *A. Lacroix*

---

[43] Видети Т. П. Анђелић: *Катедра за механику, Сто година Филозофског факултета у Београду*, Београд **1963**, 507–518; Д. Трифуновић: *Први професор рационалне механике*, Дијалектика 10 (**1975**), 3, 95–117.

[44] За доцента Велике школе К. Стојановић је изабран почетком школске 1903/04. године. Децембра 20, 1903. доцент К. Стојановић одржао је приступно предавање на Великој школи *О математичкој физици* (објављено у Просветном гласнику за 1904. годину, стр. 14). При претварању Велике школе у Универзитет Стојановић је изабран за ванредног професора универзитета (март 1905). Од школске 1903/04. до 1906/07. године предавао је механику и делове математичке физике на Филозофском факултету. У то време постао је већ политички радник (од 1901. године када је изабран за посланика у округу Нишком). Универзитет напушта 1906. године када постаје министар привреде. Објавио је нешто доцније уџбеник *Механика*, Београд 1912, стр. 469. Ово је први наш уџбеник механике који излаже теорију вектора и механичке принципе. Према изгледу рукописа овог уџбеника можемо закључити да је Стојановић припремао и друго издање *Механике* (*Заоставштина К. С.*, к.Т. 3047).

[45] Т. П. Анђелић: *Механика у оквиру Српске академије наука*, Глас CCXXXIX, 36 (**1974**), 189–245.

[46] К. Стојановић: *Генерализација Гринове теореме и Поасонове једначине*, Рад ЈАЗУ 161 (**1905**), 114–135.

[47] Стојановић је објавио 13 расправа о Руђеру Бошковићу и једну посебну књигу (видети *Ouvrages, Études et Articles de Costa Stoyanovitch, Paris* **1919**). У *Заоставштини К. С.* налази се већи број писама и необјављених рукописа о Руђеру Бошковићу.

[48] К. Стојановић: *Принципи нове геометрије* (*Метагеометрија*), Наставник 12 (**1901**).

и *P. Painlévé*.

У прилогу је списак свију књига, студија и чланака г. Косте Стојановића наштампаних од 1890 до 1919 год. на српском, француском и талијанском језику.

Врло темељни научни радови г.г. Апела, Лакроа и Пенлевеа добро су познати стручним члановима наше Академије. Сва тројица су врсни чланови Француске Академије и многих страних учених друштава. Г. А. Лакроа је уз то и вечити секретар Француске Академије Наука. Сва су тројица за време Рата чинили непосредне услуге или допринели да се учине велике помоћи српској школској омладини, која је у Француску била избегла. — Ако би се из којих разлога нашло да сва тројица сада не могу бити бирани, онда мислим да из кандидације може изостати прво г. Пенлеве, јер је он за услуге које нам је учинио као Министар Просвете већ одликован орденом Светога Саве".

Ентропија система

Прилажење економским и социјалним системима са становишта термодинамичких процеса довели су до тога, да Стојановић о ентропији система не пише спорадично, већ детаљно анализира своје погледе на ову термодинамичку карактеристику и то са пуно елемената савремене науке. Његова друга књига *Тумачење физичкцх и социјалних појава* која је објављена 1910. године у Београду (стр. 283) уствари је дело о закону ентропије са становишта међудисциплинарних наука. У Стојановићевој књизи наилазимо потпунао одређено излагање о систему са околином који може бити изолован и отворен, са реверзибилним и иреверзибилним процесима, у равнотежном и неравнотежном стању. У различитим случајевима система, а које је Стојановић све анализирао, њему је потпуно јасно било, да се за оцену ваљаности неког процеса може усвојити ентропија као термодинамичка величина стања. Он на око 300 страна о овоме расправља (!). Стојановић не уводи ентропију као категорију теорије информација, а што је за оно време било и немогуће тражити, али зато ентропију расправља за различите случајеве система (економски, социјални, оптички, културни, психички и др.). Посебно истичемо Стојановићев рад на анализи ентропије код живих бића а која се јавља у веома сложеном и вишеструком облику. У живом бићу по Стојановићу обављају се они процеси који доводе до опадања, па и повећања радне способности. Он дословно вели: „Мотори се анимални разликују привидно до термичких. Енергија, коју даје организам при раду, велика је, она је пети или шести део целе енергије, коју организам има. Ако би се утрошком хране загрејао термички мотор, рад би био незнатан који би се из те топлоте добио. У организму нема поред казана и рефригатор (кондензатор). Међу разним тачкама нашег организма нема ни 2–3° разлике, што је услов да се добије известан рад из топлоте по Карнотовом принципу. Ово не значи да се принцип Карнотов не да применити, само има нечег што нам се измиче од нашег опажања за потпуну примену закона ентропије. Аналогих органа рефригатору мора бити, и топлота околине има утицаја на температурне разлике".[49] О овом „измицању" примене налазимо и код Винера у следећем облику: „Када упоређујемо жив организам са таквом машином, ни за тренутак не помишљам да кажем да су специфични физички, хемијски и душевни процеси живота који познајемо исти као и код машина које опонашају живот. Хоћу једноставно да кажем да и једни и други представљају примере локалних антиентропијских процеса, који се вероватно могу испољити и у многим другим видовима, а које свакако не можемо означити као биолошке ни као механичке".[50]

У вези Клаузиусовог утврђивања да ентропија у иреверзибилним системима расте и његове грешке да „ентропија васионе" тежи својој највећој вредности, Стојановић даје лепо објашњење и оповргава највећу вредност „ентропије васионе": „Ентропија у иреверзибилних појава, ма какви они били, расте. Доказ је за ово лак, и као што смо рекли, закључак је овог става: да је мир крајња фаза свих промена. Овде нећу много на овоме инсистирати, поменућу једну појаву, поред изнетих разлога, који говори о томе да појаве све скупа сматране нису иреверзибилне и да није став ентропије исказан неједначинама општи. Појаве ритмичности и пролази кроз прошла равнотежна стања, као и осцилације у свима променама, говоре у прилог реверзибилности и у прилог тога да је ентропија васионе ритмичке природе, која кроз своје максимуме и минимуме мора пролазити аналогно енергији у њеном кружењу кроз процесе и промене.".[51]

За економске системе по Стојановићу, рашћење ентропије система значи рашћење капитала на рачун рада или вредности. „Како се на крају, у свима процесима природним, енергија не мења, јер је равна капиталу више раду, рачунајући у капитал све резервоаре снага природних, то овај последњи закон казује — пише К. Стојановић, да је тенденција економских промена у социјалним срединама, да се енергија економска у крајњој фази, после свих трансформација, огледа само у створеном капиталу. Кад нестану социјалне средине у место њих ће доћи капитали њима створени, вратиће се материја, из које се ти капитали састоје, по деструкцији њихових форми, енергији природној, која ће даље на основу истог закона, закона ентропије, после свих фаза трансформационих да да̂ топлоту, топлотне појаве униформне температуре. Вероватноће су врло мале, да се из једне средин ..отне униформне, без утицаја спољњих, могу изазвати процеси рада и топлоте и обновити прошла стања. Но, како су могуће обнове по закону промена фазастих сва је вероватноћа, да ће будућа стања из униформних, поводом спољњих узрока, или каквих промена по начину демона Максвеловог, довести будући процес до аналогих природних и социјалних процеса садашњости."[52]

На крају наведимо потпун Стојановићев текст о начину како је дошао до могућности да ентропију једног термодинамичког система доведе у аналогију

---

[49] К. Стојановић: *Тумачење физичких и социјалних појава*, Београд, **1910**, стр. 44.

[50] Н. Винер: *Кибернетика и друштво*, Београд, **1964**, стр. 49.

[51] К. Стојановић: наведено, стр. 103.

[52] К. Стојановић: *Основи теорије економских вредности*, Београд **1910**, стр. 175.

са једним социјалним системом. „Ако се нађе математички облик за социјалну енергију и капитал, за E и Q тј. ако се згодним параметрима изразе ове две количине а стање се ма какво социјално одреди параметрима, који дају нивовске разлике у разним стањима једне појаве социјалне, онда се може доћи и до облика једначине у којој се принцип деградације јавља — односно принцип ентропије.

Ако је T параметар за ниво какве социјалне појаве, као што је T температура за топлоту Q у термодинамици, онда је једначина ентропије:

$$(*) \qquad de = \frac{dQ}{T}.$$

Једначина $(*)$ би у економији била однос између капитала Q и параметра T, којим се детерминише ниво једне социјалне појаве, ниво културни (религиозни, морални, естетички). О овом смо параметру говорили већ у глави седмој.

За појаве реверзибилне из $(*)$ би дошли до односа

$$e = \int \frac{d\theta}{T} = 0,$$

што казује, да је за све процесе, где су почетна стања једнака са крајњима ентропија нула, биле те појаве социјалне или физичке. За иреверзибилне појаве је

$$e = \int \frac{d\theta}{T} < 0,$$

што значи да ентропија расте у процесима иреверзибилним, па били они социјални или физички. Овакви су готово сви природни процеси, где се губи велики део капитала и рада, управо ишчезава и нема значаја за нове процесе социјалне и економске. Докази су за ове неједначине, као и у термодинацими. Ваља само топлоту сменити капиталом, а температуру оним параметром, који је еквивалентан брзини за дотичну појаву економску или социјалну, а све остало задржати, па ћемо имати исти начин доказивања који и у топлоти. Код економских појава T је тражња, код социјалних, како код којих ваља наћи шта значи T и нарочито обратити пажњу на одредбу мерења тог параметра. За социјалне средине је T функција оних количина, које одређују ниво стања социјалног. Те су количине еквивалентне или аналоге количинама, којима се брзини код физичких кретања детерминише".[53]

О Стојановићевом коришћењу термодинамике за тумачење социјалних и природних појава, овде треба указати на две глобалне чињенице.

1° Користећи се термодинамиком као моделом науке за објашњавање економских појава, Стојановићеви резултати ушли су у феноменолошке системе са свим закономерностима које је Петровић успоставио. Са формалног становишта Стојановићева истраживања су се потпуно уклопила у пропозиције

[53] К. Стојановић: наведено, стр. 161–162.

Петровићевих математичких аналогија и то за случај када је међу појавама успостављено једно аналошко језгро (математички модел). Међутим, ова Стојановићева истраживања имају већу научну тежину стога, што је формалним уоченим аналогијама успео да дâ објашњење, тј. да тачно утврди узрочне везе ових аналогија. Значи, Стојановић се не користи туђим примерима аналогија да би изнео и доказао важност феноменолошког третмана. Код њега је п р и р о д н о формирано мишљење о сличности са доказима да су процесу у економији и термодинамици изоморфни како у макроскопском посматрању (мерењу), тако и у испитивању хаотичних структура ових система.

2° Примена термодинамике на тако широке области људских делатности код Стојановића није била случајност. Вероватно да су велике могућности термодинамике за успостављање реда у хаотичним системима дале основну покретачку идеју. Стојановић чита Гибса, Максвела, Оствалда, Дантека и др.; обузет је статистичким посматрањем интеракције међу молекулима; фасциниран је налажењем реда.

На овај начин Стојановић је почетком овог века потпуно био у домену кибернетичког разматрања појава и то феноменолошком методом. Ако се данас, последње деценије развијене кибернетике (1979—1989), говори о термодинамици као основној мултидисциплинарној науци, одржавају научни скупови о ентропији са различитих становишта и научних области,[54] тада резултати Косте Стојановића публиковани 1910. године, а до којих је дошао још 1886. године за време студија у Београду, — мораjу добити одређено место у историји ових проблема кибернетике и то у групи старих резултата који су ишли испред свог времена — антиципирали савремене резултате и погледе на свет. Ако се данас пише о термодинамичкој кибернетици или излаже организациона наука на основу аналогија са термодинамиком,[55] где су сви закони и принципи термодинамике примењени на један било који организациони систем, тада се може без икаквих претензија и мистификација, уводити величина Стојановићевих аналогија, појава економских, социјалних, естетичких, биолошких.. са онима у термодинамици.[56]

О Кости Стојановићу (2.10.1867, Алексинац – 4.1.1921, Београд) као научнику и државнику најбоље је навести речи професора Милутина Миланковића које су изговорене на погребу Косте Стојановића. Са балкона Капетан-Мишиног здања професор Миланковић је дословно рекао:

„У овај храм науке ушао је пре три деценије Коста Стојановић као побожни хаџија да у њему чује речи истине и упозна законе који управљају васионом. Ушао је у тај храм жедан науке а обдарен математичким талентом и лакоћом

[54] Нпр., *Inter. Cong. of Cybernetics, Namur* (**1967**); *Inter. Cong. of Cybernetics, London* (**1969**); итд.

[55] Д. Малић: *Елементи кибернетике у светлу термодинамичких метода*, Београд 1973, стр. 168.

[56] У обимном рукопису о животу и делу Косте Стојановића који је написао аутор ове студије на основу заоставштине, дају се прецизније анализе не само термодинамичких појава, већ и свих Стојановићевих резултата у науци. Овај рукопис не може бити објављен пре 1994. године.

схватања какве је тешко наћи. Но ондашња наша Велика школа није могла да му пружи све оно што је он тражио, што би угасило његову жеђ и задовољило све његове способности. Зато је продужио свој хаџилук и на запад и дошао оданде да као свештеник науке у овоме храму проповеда велике истине које се дотле овде још нису чуле. Његовим доласком на Универзитет за професора Примењене Математике почиње у математичким дисциплинама наше школе нова епоха. Он је први наставник математичке физике, те сјајне буктиње у егзактним наукама која дотле код нас није засветлела. Ту је буктињу Коста Стојановић унео у овај храм, запалио ју и одржавао јој пламен. Његова предавања и његови научни радови учили су наш подмладак како се природне појаве могу описивати савршеним језиком математичке анализе: како се крећу небеска тела, како трепери електрицитет, како се шире светлосне зраке, каква је веза између тих природних појава. Низ научних радова Косте Стојановића, публикованих у „Гласу“ наше, у „*Radu*“ југословенске Академије, у „Наставнику“, „Српском књижевном гласнику“ и другде, бави се овим питањима. Са великом љубави и патриотским поносом упознавао је наш свет са научним радовима Руђера Бошковића и са проналасцима Николе Тесле.

Но његов пут водио је даље. Математичка физика бави се мртвом природом, а то је било мало за живи дух Косте Стојановића. Њега је интересовао цео свет, њега је интересовао, у првом реду живот. И зато је Катедра Примењене Математике била сувише уска за његов рад. Велики државни проблеми пред којима се је наша држава нашла, одвели су га на шире поприште рада. Универзитет га је изгубио као наставника, али се је научник оличавао у њему и даље у свима бурама јавнога живота. Корачајући кроз тај живот његов радознали и проницљиви поглед тражио је у тој новој средини проблеме на којима би могао да огледа свој математски таленат. И он је те проблеме нашао. Нашао их је у појавама социјалног живота и у механизму нашега друштва. Њега је привукла она жива машина са милионима точкова коју је звао друштво и на њу је применио законе термодинамике и ову увео у једну грану науке о економским појавама. Резултате тога свога рада изложио је у своме главноме раду *Основи теорије економских вредности* којим је сазидао први мост између теоријске физике и социјалних појава. То је био велик и снажан скок. Лако је физичару испитивати природне законе када он може у својим експериментима да корача корак по корак, да у њима дозвољава само ограничен број променљивих величина, да те експерименте постепено варира и прозвољно понавља. Са живом друштвеном машином не да се експериментисати као са физичким апаратима. Само велике пертурбације друштвене мењају њен ход и дају нам њен квантитативан механизам. Оне су велики експеримент на таквој машини. Коста Стојановић доживео је такав експеримент и био је његов посматрач у току светског рата. Својим положајем, искуством, познавањем физикалних закона и математичким талентом, он је био међу најпозванијим у целом научном свету да великим искуствима овога рата даје облик математичких закона. Са најсавршенијим алатом у руци он нам је отргнут када је требао да заврши величанствену зграду којој је положио темеље.

Његова је смрт тежак ударац за нашу науку којој је он остао веран целога свога живота. Поред свих великих и тешких дужности државника којима се он предано посветио, доспео је он, благодарећи своме богоданоме таленту и ненадмашној лакоћи схватања да прати сваки прогрес егзактних наука. Сваки такав прогрес био је за њега предмет радости и он је о свима већима напретцима науке био обично пре информисан него ми који нисмо имали да подносимо бриге његовога државног положаја. Тако је он често пута долазио као гласник овамо да нам донесе радосне вести о на овим победама на пољу науке. Но није он само пратио велике скокове које је наука чинила, него је са љубави пратио и наш скромни рад и од срца се радовао сваком нашем успеху. У свако доба био је спреман да нас помогне. Када већ није више био у нашој средини, он је издао свој уџбеник „Механика" и неколико недеља пред своју смрт он ми саопштио да ће радо учествовати у издавању уџбеника за теоријску физику. Тако је он остао наш веран друг и онда када је Катедру заменио са министарском столицом. Наш је Универзитет данас завијен у црнину и ја се са болом у души у име његово опраштам са Костом Стојановићем, свештеником овога нашега просветнога храма и нашим верним и незаборавним другом. Лака му црна земља и вечан му спомен међу нама."[57]

Dragan TRIFUNOVIĆ

MATHEMATICAL MODELS IN THE WORK OF KOSTA STOJANOVIĆ

— A Contribution to the Intelectual Biography of the Scientist —

In the field of mathematical phenomenology, where by use of analogy between disparate phenomena mathematical models are constructed, mathematician Kosta Stojanović (1867–1921) obtained distinguished results. He established analogies between the economic concepts and thermodynamical quantities and in that way came upon the most modern form of economic theories. These results line up Kosta Stojanović among the world scientists who anticipated the modern cybernetical concepts of the economic theory.

In this paper are given some contributions to the intellectual biography of Kosta Stojanović as a distinguished politician of our country and an eminent professor of the Faculty of Philosophy in Belgrade.

[57] *Заоставштина академика Милутина Миланковића*, Архив САНУ, бр. 10.131, ..ут. 9/131.

Boris PAVKOVIĆ

STANKO BILINSKI

— Povodom 80. godišnjice života —

Dugi niz godina u našoj sredini živi i djeluje jedan vrstan znanstvenik i pedagog, koji je odgojio desetke generacija nastavnika i znanstvenika. Činjenica je da je on u nas manje poznat nego u svijetu, pa smatramo da je sada trenutak i da je 80. obljetnica njegovog života prilika da se to ispravi, jer njegov rad i djelo to i te kako zaslužuje.

Stanko Bilinski rođen je 1909. godine u Našicama. Klasičnu gimnaziju polazio je u Vinkovcima i Zagrebu. Diplomirao je 1932. g. na Filozofskom fakultetu u Zagrebu na grupi za teorijsku matematiku. Na istom je fakultetu stekao 1943. i doktorat iz filozofije iz područja matematičkih nauka. Kao srednjoškolski profesor služio je od 1934. do 1940. g. na Franjevačkoj klasičnoj gimnaziji u Varaždinu i na gimnazijama u Skopju i Sušaku, a od 1940. g. do 1946. g. kao asistent na Geofizičkom zavodu u Zagrebu. 1946. g. izabran je na novo osnovanom Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu u svojstvu asistenta Geometrijskog zavoda. Tu je 1948. g. postao docent, 1952. g. izvanredni, a 1956. g. redovni profesor. Tokom trideset godina obavljao je dužnost predstojnika Geometrijskog zavoda, dvije godine dužnost dekana fakulteta i osam godina dužnost direktora Instituta za matematiku Sveučilišta u Zagrebu. Godine 1963. izabran je za dopisnog (izvanrednog) člana Jugoslovenske akademije znanosti i umjetnosti, a 1985. g. za redovnog člana. Od 1980. g. je dopisni član Matematičko-prirodoslovnog Razreda Austrijske akademije nauka u Beču. Godine 1965. odlikovan je Ordenom rada sa zlatnim vijencem, a 1970. Spomen medaljom Sabora grada Zagreba „za dugogodišnji samoprijegorni rad na socijalističkom razvitku grada". Dobitnik je i dviju naučnih nagrada i to nagrade „Ruđer Bošković" za znanstveni rad iz područja prirodnih znanosti, a 1980. g. dodijeljena mu je „Nagrada za životno djelo". Od njegovih društvenih djelatnosti svakako treba istaći da je bio jedan od osnivača Društva matematičara, fizičara i astronoma Hrvatlske i prvi tajnik tog Društva, a 1961. i 1962. g. i njegov predsjednik. Od 1952. do 1968. g. bio je član upravnog odbora Saveza društava matematičara i fizičara Jugoslavije. Godine 1954. i 1961. bio je jedan od članova dvočlane jugoslovenske delegacije u Internacionalnoj matematičkoj uniji (drugi je član bio profesor Đuro Kurepa), a 1964. g. član jugoslovenske delegacije u Uniji matematičara

Balkana. Stanko Bilinski bio je i dugogodišnji glavni i odgovorni urednik časopisa „Glasnik matematički, fizički i astronomski". Tokom 1967. i 1968. g. bio je član Republičkog Savjeta za naučni rad SRH. Svojim je radom i neposredno i posredno dao vidan doprinos razvoju i organizaciji znanstvenih djelatnosti i institucija u SRH i SFRJ.

Nakon što je 1946. g. bio izabran za asistenta Geometrijskog zavoda na kojem tada nije bilo popunjeno ni jedno radno mjesto, kao jedini nastavnik tog Zavoda vršio je sve dužnosti kako asistenata tako i predavača. Tako je u prvo vrijeme držao predavanja i vodio vježbe iz svih geometrijskih kolegija sve dok nisu bili izabrani novi asistenti, a kasnije i nastavnici. Njegovi ga se učenici sjećaju kao odličnog predavača, koji se isticao ne samo minucioznošću izlaganja, sistematičnošću već i odabirom interesantnih sadržaja svojih kolegija, koje je u ono vrijeme morao sam formirati. Tu je dolazila do izražaja njegova originalnost i kreativne sposobnosti. Uvijek je nastajao biti što razumljiviji, a posebno su njegove slušače fascinirale njegove ilustracije i crteži na ploči. To je bila prava škola zorne nastave. Kasnije su mnogi od njegovih učenika tvrdili da su na predavanjima Bilinskog naučili više nego na predavanjima iz Metodike nastave matematike. To je i razlog da je među njegovim učenicima veliki broj onih koji su odlični predavači, tako da se može govoriti o pravoj školi. Njegova predavanja su za mnoge njegove učenike bila razlog što su zavoljeli geometriju i odlučili se za znanstveni rad baš u tom području. Bilinski je predavao i na ondašnjem postdiplomskom studiju, pa je kod njega magistrirao veći broj postdiplomanada, a doktoriralo je i šest doktoranada kojima je bio mentor.

Nemoguće je nabrojiti sve znanstvene skupove na kojima je Bilinski sudjelovao kao aktivni predavač. Među inim sudjelovao je referatima na Internacionalnim kongresima matematičara u Amsterdamu (1954), Edinbourghu (1958), Stockholmu (1962), Moskvi (1966) i Nici (1970). Osim toga bio je redoviti učesnik Austrijskih kongresa matematičara, koji uvijek imaju internacionalni karakter, te nacionalnih matematičkih kongresa pojedinih zemalja kao i mnogobrojnih simpozija u „Matematičkom istraživačkom institutu Oberwolfach". Dakako da je od 1948. g. i redoviti učesnik Kongresa matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije. Kao predavač gostovao je na mnogim evropskim i domaćim univerzitetima.

Do sada je S. Bilinski objavio oko pedesetak naučnih radova u domaćim i inozemnim publikacijama, a o njegovim radovima objavljeno je preko stotinu referativnih prikaza u svim najvažnijim referativnim žurnalima. U tim prikazima njegovi su radovi vrlo povoljno ocjenjivani i u mnogima od njih su recenzenti isticali njihov značaj za razvoj geometrije i na osnovi njih je S. Bilinski stekao visoka internacionalna priznanja.

Prema tematici njegovi se radovi mogu svrstati u ovih sedam skupina:

1 Teorija mreža i poliedara

2 Primjene kinematičko-geometrijskih razmatranja na fizičke i geofizičke pojave.

3 Elementarna geometrija i primjena Ptolemejskih matrica u elementarnoj geometriji.

4 Neeuklidska geometrija

5 Diferencijalna geometrija
6 Linijska geometrija
7 Primjene funkcionalnih jednadžbi i teorije invarijanata na geometrijske probleme.

Iz navedenog je očito da je ovako bogatu znanstvenu aktivnost S. Bilinskog na ovom mjestu nemoguće analiazirati. Ne radi se ovdje samo o bogatstvu njegovog opusa već i o dubini ideja prisutnih u njegovim radovima.

1. Prvoj skupini pripadaju radovi [2], [3], [6], [7], [20]. Ne može se ovdje govoriti o svakom od tih radova. Stoga kažimo nešto više o radovima [3] i [21].

Rad [3] je doktorska disertacija S. Bilinskog. U njemu se istražuju homogene mreže ravnine. Treba svakako istaći da su do tada problemi homogenih razdioba ravnine s metričko-euklidskog i kristalografskog stanovišta bili riješeni, ali u drugim, metričkim ravninama i s općeg topološkog stanovišta, koje u sam problem dublje ulazi, rješenje nije bilo potpuno pa zapravo ni započeto. U dotadašnjim radovima bili su postavljeni samo neki nužni uvjeti egzistencije, a dovoljnih uvjeta kao i dokaza egzistencije nije bilo. Ovaj rad je prilog konačnom rješenju tog problema. Tu se mogućnostima egzistencije homogenih mreža pristupa s jednog jedinstvenog i općenitijeg stanovišta. Pri tome je autor aksiomatizacijom i aritmetizacijom problema razvio jednu opću metodu, koja se pokazala primjenjivom u svim neeuklidskim geometrijama pa i u kombinatornoj geometriji ploha, pa tako i u generaliziranoj teoriji poliedara. Ta je metoda dakle dozvolila da se odrede sve pravilne homogene mreže metričkih ravnina kao i sve kombinatorički pravilne homogene mreže.

Svakako valja istaći da iz rezultata u ovoj disertaciji izlazi da postoji svega 14 polupravilnih (Arhimedovih) poliedara. Nažalost, S. Bilinski je mislio da je to već davno poznati rezultat i nije ga jasno istakao. Stoga se danas postojanje četrnaestog Arhimedovog poliedra nepravedno pripisuje sovjetskom matematičaru V. G. Aškinuzeu. L. A. Ljusternik u svojoj monografiji *Выпуклые фигуры и многогранники*, ГИТТЛ, Москва, 1956. na str. 184 piše: „Značajno je da je u teoriji polupravilnih poliedara više od 2000 godina postojao defekt kojeg je tek nedavno uočio sovjetski matematičari V. G. Aškinuze, tj. da postoji četrnaesti polupravilni poliedar, koji se razlikuje od rombokubooktaedra samo time da mu je gornji dio koji se sastoji od 5 kvadrata i 4 jednakostranična trokuta zaokrenut za $\pi/4$. Upravo to je i bio razlog da ta dva polupravilna poliedra geometri nisu razlikovali".

S. Bilinski je očito dakle bio prvi, koji je našao četrnaesti polupravilni poliedar i ne samo to već je dao i strogi dokaz da su to svi takvi poliedri.

Iz ove skupine svakako posebno treba istaći rad [2] o rombskim izoedrima. To je jedan od najvažnijih radova S. Bilinskog. Objasnimo potanje o čemu se ovdje radi. Naime izoedri su poliedri kojima su sve stranice međusobno kongruentni poligoni. U ovom se radu rješava problem određenja svih rombskih izoedara. Smatramo da dobiveni rezultat zaslužuje da skiciramo ideju koja je dovela do rješenja problema.

Da bi riješio taj problem S. Bilinski promatra poliedre jedne šire klase tzv. paralelogramske poliedre. To su oni poliedri kod kojih su plohe bilo kakvi paralelogrami. Oni pripadaju još jednoj široj klasi, koju je istraživao ruski geometar i kristalograf E. S. Fedorov i nazvao ih zonoedrima, jer su im plohe raspoređene u zone.

Kontrakcijom ili dilatacijom pojedinih zona moguće je svaki paralelogramski poliedar pretvoriti u njemu izomorfni rombski poliedar i obrnuto. Prema tome da se odrede svi rombski izoedri potrebno je najprije odrediti sve izogonalne sisteme pravaca, tj. takve skupove pravaca istog snopa kod kojih svaki pravac sa svakim drugim pravcem tog snopa zatvara jednaki kut. Pokazuje se da u euklidskom 3-dimenzionalnom prostoru postoje tri potpuna izogonalna sistema pravaca, tj. takvih sistema, kojima nije moguće dodati još jedan daljnji pravac, a da se izogonalnost ne naruši. Na ovim potpuno izogonalnim sistemima zasniva se egzistencija triju porodica rombskih izoedara. U svakoj od tih porodica, pošavši od poliedra s najvećim brojem ploha, svaki daljnji poliedar se dobiva iz pretpodnoga eliminacijom pojedine zone. Očito je da su na taj način nađeni svi mogući rombski izoedri. Ne treba posebno istaći da je ovaj rezultat odmah bio zapažen u svijetu geometara, jer se 70 godina mislilo da su kod Fedorova navedeni svi rombski izoedri što je i on sam tvrdio. Taj rad S. Bilinskog je pokazao da osim već davno poznatog rombskog dodekaedra postoji još jedan, koji je od prvog metrički bitno različit i ne samo to, već je tu i dokazano da drugih rombskih izoedara nemože biti.

Da se ilustrira važnost ovog rada bit će najbolje da se poslužimo nekim citatima. U predgovoru Coxetera monografiji M. J. Wenninger, *Polyhedron Models*, Cambridge Univ. Press, 1978, u kojem se ukratko skiciraju osnovne ideje klasične teorije poliedara stoji (u slobodnom prijevodu): „Od vremena Descartesa mnogi veliki matematičari doprinijeli su razvoju ovog područja. Euler je otkrio i dokazao čuvenu formulu, koja povezuje broj vrhova, bridova i stranica konveksnog poliedra. Gauss je koristio nepravilni sferni peterokut (pentagrama mirificum) da objasni Napierovo pravilo iz sferne trigonometrije. Cauchy je dokazao da je svaki konveksni poliedar sa krutim stranicama, koji je gibljiv duž bridova, i sam krut. Hamilton je otkrio ikosijansku igru. Von Staudt je dao novi dokaz Eulerove formule. Schläfli je poopćio teoriju poliedara na n-dimenzionalni prostor. Klein je napisao monografiju *Vorlesungen über das Ikosaeder*, koja je bila od bitnog utjecaja na daljnji razvoj teorije poliedara. Fedorov se vratio Keplerovom problemu određivanja izozonoedara otkrivši jedan čudan spljošteni rombski ikozaedar, a tek nedavno je *Bilinski (1960 g.) kompletirao spisak našavši drugi rombski dodekaedar.*

Ovaj nam citat pokazuje u kakvom se „dobrom društvu" nailazi na ime profesora Bilinskog.

Evo citata i iz poznate monografije H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, (New York, 1973, str. 31):

„Rombski dodekaedar i triakontaedar otkrio je Kepler oko 1911. g. Prvi od ovih poliedara pojavljuje se u prirodi kao kristal granata. Točnije rečeno trebalo bi ga zvati „prvi rombski dodekaedar" jer je 1960. g. Bilinski oktiro da se jedan „drugi rombski dodekaedar" (čije stranice su istog oblika kao i one rombskog triakontaedra) može izvesti iz rombskog ikozaedra".

U članku K. Miyazaki-I. Takada, *Uniform Ant-hills in the World of Golden Isozonohedra*, Structural Topology 4 (1980), 21–30, su tzv. „zlatni izozonoedri" (kako ih je nazvao Coxeter (a otkrili su ih Bilinski, Fedorov i Kepler, u njihovu čast označeni redom su B_{12}, F_{20} i K_{30}.

Ovaj isti rad profesora Bilinskog citiran je i u poznatoj monografiji B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Interscience Publ., London, New York, Sydney, 1967.

Nema danas monografije o poliedrima, gdje se ne spominju rezultati S. Bilinskog.

U ostalim radovima iz ovog područja S. Bilinski se bavi problemima morfoloških tipova Eulerovih poliedara. Daje jedno uređenje Eulerovih klasa tih poliedara i to dovodi u vezu s problemom bojenja ploha.

U novijim radovima [46], [47], [48], iz ove skupine koji su publicirani u zadnjih nekoliko godina, S. Bilinski daje afino i topološko proširenje klasične ekviformne teorije poliedara pa se tako u tim radovima razmatraju neke važnije klase tih poliedara, tako napose klase kvaziregularnih i klase vitoperih generaliziranih arhimedovih poliedara, a radi se na izučavanju još nekih drugih klasa takvih poliedara. No cilj svih ovih razmatranja je rješavanje „Osnovnog problema arhimedovih poliedara", koji se može ovako formulirati. Koji su dovoljni uvjeti za ciklus C i za rod p da bi par $\{C;p\}$ određivao barem jedan Arhimedov poliedar". Do sada su nađena dva nužna uvjeta egzistencije Arhimedovog poliedra $\{C;p\}$, no još nije dokazana slutnja da ta dva nužna uvjeta zajedno čine i dovoljni uvjet njegove egzistencije.

2. U ovu skupinu pripadaju radovi [4] i [5]. U radu [4] dano je jedno dinamičko tumačenje neobičnog oblika krivulje tlaka kod prolaza kumulonimbusa.

U radu [5] se daje kinematičko objašnjenje pojave frontogeneze.

3. U ovu skupinu pripadaju radovi [8], [9], [15], [23], [25], [35], [36] i [37]. Najznačajniji u ovoj skupini je svakako rad [35]. Dobiveni lijepi rezultati zaslužuju da se sadržaj ovog rada malo detaljnije razmotri. U radu se promatra n-dimenzionalni prostor P_n sa pripadnom grupom transformacija G_n. Neka je dalje Q_m m-dimenzionalna mnogostrukost, točaka, krivulja, ploha itd. smještena u P_n. Dakako da Q_m može biti i čitav prostor P_n. Označimo sa Γ_m grupu transformacija od Q_m induciranu grupom G_n.

Svaki konačan skup $\{e_1,\dots,e_r\}$ elemenata („točaka") skupa Q_m zove se figura. Uvode se dvije vrste figura, tzv. „D-figure" i „S-figure". D-figura $\Phi[i,j]$, $0\le i\le j\le b$ dobije se iz osnovne figure $G=\{g_1,g_2,\dots,g_b\}$, $b\ge 4$ tako da se iz G isključi par $\{g_i,g_j\}$, tj.

$$\Phi[i,j]=G\setminus\{g_i,g_j\}.$$

S-figura $\psi[i,j]$, $i<j$ dobije se polazeći od osnovne figure G tako da se njezine točke rastave u dva podskupa

$$F=\{g_{\mu_1},g_{\mu_2},\dots,g_{\mu_c}\},\qquad c\ge 0$$

kojega se elementi smatraju fiksnim i podskup

$$V=\{g_{\nu_1},g_{\nu_2},\dots,g_{\nu_d}\},\qquad d\ge 4$$

koji se sastoji iz varijabilnih elemenata. Dakle je,

$$\psi[i,j] = F \cup \{g_i, g_j\}.$$

Dalje se uvodi pojam Ptolomejske funkcije kao realne funkcije $a_{ij} = f(i,j)$ definirane na skupu $N_1 \times N_1$, gdje je $N_1 = \{1,2,\dots,b\}$, $b \geq 4$, takve da za sve $i,j,k,l \in N_1$ vrijedi tzv. Ptolomejska relacija

$$a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{lj} + a_{il}a_{jk} = 0$$

i koja u svojem području definicije ne iščezava identički.

Svaki element od Q_m određen je sa m nehomogenih koordinata, pa je D-figura $\Phi[i,j]$ određena nizom

$$u_1^1, \dots, u_m^1, u_1^2, \dots, u_m^2, \dots, u_1^b, \dots, u_m^b$$

svojih koordinata. Dakako da u ovom nizu nema koordinata kojima je jedan od gornjih indeksa i ili j. Ako je osnovna figura fiksirana onda je taj niz posve određen. Neka je

$$a_{ij} = f(u_1^1, \dots, u_m^1, u_1^2, \dots, u_m^2, \dots, u_1^b, \dots, u_m^b)$$

realna funkcija. Za a_{ij} se kaže da je Ptolomejska funkcija ako su zadovoljeni ovi uvjeti

a) a_{ij} je invarijanta grupe transformacija Γ_m,

b) a_{ij} je relativna invarijanta permutacije gornjih indeksa $1,2,\dots,i-1, i+1,\dots,j-1,j+1,\dots,b$,

c) a_{ij} je Ptolemejska relacija.

Analogno se (sa nekim modifikacijama) definira Ptolomejska funkcija S-figure $\psi[i,j]$. Dokazuje se ako je a_{ij} Ptolemejska funkcija neke D-figure, onda je ona također Ptolemejska funkcija figure koja se dobije kada se ona shvati kao S-figura i obratno. To onda omogućuje da se naprosto govori o Ptolemejskoj funkciji figure. Kososimetrične matrice ranga 2 zovu se Ptolemejske matrice.

Veza između Ptolemejskih matrice i funkcija dana je ovim teoremom:

Realna funkcija $a_{ij} = f(i,j)$ definirana na skupu $N_1 \times N_1$, gdje je $N_1 = \{1,2,\dots,b\}$, $b \geq 4$ je Ptolemejska funkcija onda i samo onda ako je matrica (a_{ij}) kososimetrična i ima rang 2.

Razvija se teorija takvih matrica i bitno koristi u daljnjem toku rada.

Relativni volumen simpleksa euklidskog ili ekviafinog prostora dimenzije $n \geq 1$ je Ptolemejska funkcija figure koja se sastoji iz njegovih vrhova.

Iz ovog teorema i njegovih ekvivalenata za D-figure i S-figure sada se kao specijalni slučajevi dobivaju mnogi već prije poznati teoremi elementarne geometrije.

Za $n = 1$ dobiva se da za četiri točke A,B,C,D orijentiranog pravca vrijedi

$$AB \cdot CD + AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0,$$

a to je dobro poznati Eulerov teorem.

Za $n = 2$ dobiva se ovaj teorem Mongea:

Ako za pet točaka $T_1, T_2, \dots, T_5$ ravnine označimo sa F_{ij} orijentiranu površinu trokuta $T_iT_jT_5$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, onda vrijedi

$$P_{12}P_{34} + P_{13}P_{42} + P_{14}P_{23} = 0.$$

Za $n = 3$ dobiva se poznati Möbiusov teorem:

Ako za šest točaka A, B, C, D, E i F, trodimenzionalnog prostora, označimo sa $ABCD$ orijentirani volumen tetraedra razapetog točkama A, B, C i D, onda vrijedi

$$ABEF \cdot CDEF + ACEF \cdot DBEF + ADEF \cdot BCEF = 0.$$

Za $n = 4$ dobiva se proširenje i poopćenje jednog teorema Laptjeve.

Svaki teorem u kojemu se govori o postojanju neke Ptolemejske funkcije zovemo Ptolemejskim teoremom.

Prvi u povijesti poznati Ptolemejski teorem je sigurno Ptolemejev teorem o tetivnom četverokutu. Ako naime za osnovnu figuru uzmemo četiri točke M_1, M_2, M_3, M_4 kružnice u izvjesnom cikličkom poretku i promotrimo D-figuru $\Phi[v, j]$, onda je relativna udaljenost a_{ij} ($a_i \gtrless 0$ za $i \gtrless j$) točaka M_i, M_j Ptolemejska funkcija. Ovaj pristup onda omogućuje da se teorem Ptolemeja generalizira na tetivni n-terokut, što je i učinjeno u radu [15].

Iz svega što je rečeno slijedi da je tu izgrađena jedna općenita Ptolemejska teorija u kojoj su mnogi, prividno posve neovisni teoremi, podređeni jednom vrlo općenitom stanovištu.

Na taj se rad nadovezuju rad [2] u kojem se dokazuje jedan teorem o specijalnim Ptolemejskim matricama pomoću kojeg se dobivaju novi Ptolemejski teoremi. U radu [37] razmatraju se Ptolemejski teoremi u prostoru Minkowskoga.

U radovima [23] i [25] govori se o stavku o četiri tjemena U svojoj klasičnoj formulaciji to je stavak globalne diferencijabilne geometrije. U novije vrijeme je pokazano da je bit tog teorema mnogo dublja jer je to teorem topološkog karaktera. U ovim radovima dana je diferencijalno-geometrijska primitivizacija tog teorema na konveksne poligone i tako je ukazano na njegovu suštinu.

4. Radovi ove skupine jesu [1], [17], [18], [27], [28], [29], [30], [31] i [33].

U radu [1] su dane neke primjene polarnog koordinatnog sistema hiperboličke ravnine na probleme diferencijalne geometrije u toj ravnini. Diskutirana je i prednost tog sistema pred mnogim drugim koordinatnim sistemima.

U radu [18] promatraju se evolute krivulja u hiperboličkoj ravnini i pokazano je da se na standarni način evoluta može definirati samo za one krivulje kojima je zakrivljenost veća od 1. Ako je ta zakrivljenost manja onda u standarnom smislu evoluta ne postoji. No tada je moguće uspostaviti jedno drugo pridruženje dviju krivulja koje vodi do pojmova bazoide i ekvidistantoide i u ovom se radu detaljno istražuje to proširenje. Te krivulje koje su ovdje prvi put definirane kasnije se istražuju i u radu G. M. M. Kallenberg, *Aequidistantoids and Basoids in plane hyperbolic Geometry*, Nieuf Archief voor Wiskunde (3) 10 (1962), 165–169.

U radu [30] S. Bilinski uvodi nove pravčaste koordinate u hiperboličkoj ravnini. Najbolje da se poslužimo citatom W. Szmielew iz Math. Rev. 37 (1969), No 3, str. 63; „In term of Bilinski's coordinates the fundamental analytic formulas of hyperbolic geometry assume a simple elegant form which is uniform with respect to both coordinates. The connections between Bilinski's coordinates and Hesse's or Hilbert's coordinates one established precisely".

U radu [31] daje se jedan novi model hiperboličke geometrije u torusnoj ravnini. Taj je model izgrađen na slijedeći način. Poznato je da je euklidsku ravninu moguće na više različitih načina nadopuniti nepravim elementima. Ako se ona upotpuni nepravim elementima tako da se dobije suvislost torusa, onda nastaje torusna ravnina. U toj torusnoj ravnini definira se H-geometrija za koju se pokazuje da je izomorfna geometriji hiperboličke ravnine. Osnovni elementi ove H-geometrije jesu orijentirani H-pravci, koji su predočeni onim točkama torusne ravnine, koje leže izvan jednog istaknutog fundamentalnog pravca. Pri tome je H-točka takva jednakostrana hiperbola, kojoj je fundamentalni pravac imaginarna os. Definiraju se i ostali osnovni pojmovi H-geometrije u torusnoj ravnini i uvodi metrika u tako definiranu geometriju. Izvode se neki teoremi i neke osnovne konstrukcije u H-geometriji.

Na ovaj rad nadovezuje se rad Б. А. Розенфельд, *О связи модели Билинского плоскости Лобачевского на торовой плоскости с двойнымы числами*, Glasnik matematički 5 (1970), 307–308. U tom se radu pokazuje interesna veza modela Bilinskog i interpretacije trodimenzionalnog hiperboličkog prostora na proširenoj ravnini dvojne varijable $a + be$, $e^2 = +1$.

Na rad Bilinskog nadovezuje se i istraživanje tog modela u radu W. Wunderlich, *Über das Bilinskische Modell der hyperbolischen Ebene*, Glasnik matematički 7 (1972).

U ovom radu je između modela Bilinskog i konformnog modela Poincaréa uspostavljena veza posredstvom ciklografskog preslikavanja. Time su dobivena i karakteristična svojstva cikala, horicikala i hipercikala u ravnini Bilinskog.

Spomenimo još i članak O. Giering, *Eine Variante des Bilinski Modells der ebenen hyperbolischen Geometrie*, Journal of Geometry, 31 (1988), 79–88, u kojem je konstruirana jedna varijanta modela Bilinskog pomoću kongruencije bisekanata prostorne krivulje 3. reda. Ta se varijanta pokazala plodotvornom za rješavanja izvjesnih problema hiperboličke geometrije.

Model Bilinskog našao je odjeka i u suvremenim monografijama o neeuklidskim geometrijama. Tako ga na primjer nalazimo citiranog i u monografiji. Neumann-Salló-Toró, *A semmiből egy új világot teremtettem*, FACLA, Temesvár 1974.

Rad [33] sadrži strogo aksiomatsko zasnivanje teorije mjerenja površina u hiperboličkoj ravnini kakvo do tada još nije bilo poznato.

5. Radovi ove skupine jesu [10], [12], [13], [14], [14a], [19], [26], [32]. Iz ove skupine radova na najviše odjeka naišli su radovi [14], [14a] i [26].

Osnovna ideja u ovim radovima sastoji se u tome da se krivulji u trodimenzionalnom prostoru osim fleksije κ i torzije τ pridruže dva niza skalarnih invarijanata $\kappa_1, \tau_1, i = 1, 2, \dots$ rekurzivnim formulama

$$\kappa_1 = \kappa, \quad \tau_1 = \tau, \quad \kappa_{i+1} = \sqrt{\kappa_i^2 + \tau_i^2}, \quad \tau_{i+1} = \frac{\kappa_i \tau_i' - \kappa_i' \tau_i}{\kappa_i^2 + \tau_i^2}.$$

Invarijante κ_i, τ_i zovu se redom i-ta fleksija, i-ta torzija krivulje. Nadalje se svakoj točki krivulje osim Frenetovog trobrida $D \equiv \{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ pridružuje niz trobrida $D_i \equiv \{\vec{t}_i, \vec{n}_i, \vec{b}_i\}$ rekurzivnim formulama

$$\vec{t}_1 = \vec{t}, \quad \vec{n}_1 = \vec{n}, \quad \vec{b}_1 = \vec{b},$$
$$\vec{t}_{i+1} = \vec{n}_i, \quad \vec{n}_{i+1} = \vec{b}_{i+1} \times \vec{t}_{i+1}, \quad \vec{b}_{i+1} = \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}} \vec{b}_i + \frac{\tau_i}{\tau_{i+1}} \vec{t}_i.$$

Pri tome derivacione formule glase

$$\begin{aligned} \vec{t}_i' &= \qquad \kappa_i \vec{n}_i, \\ \vec{n}_i' &= -\kappa_i \vec{t}_i \qquad + \tau_i \vec{b}_i, \\ \vec{b}_i' &= \qquad -\tau_i \vec{n}_i, \end{aligned}$$

dakle one su sasvim iste kao i Frenetove formule.

Odavde onda slijedi da će svaki teorem teorije krivulja koji se može dokazati samo pomoću Frenetovih formula vrijediti ako u njemu elemente D, κ, τ zamijenimo elementima D_i, κ_i, τ_i.

Tako na primjer ako je C zatvorena prostorna krivulja, onda za nju vrijedi Jacobijev teorem koji kaže da njezina sferna slika glavnih normala $\vec{n}$ dijeli sferu na kojoj ona leži na dva dijela iste površine. Iz svega rečenog odmah slijedi da to nije istina samo za sfernu sliku glavnih normala, već i za sferne slike svih vektora $\vec{n}_i$, $i = 1, 2, \dots$. Dakle postoji čitav niz vektora za koje je to istina.

U radu [26] S. Bilinski dalje razrađuje tu ideju i generalizira pojam Bertrandovih krivulja, pa B_2-krivuljama zove one krivulje koje u korespondentnim točkama imaju iste druge normale n_2 i detaljno istražuje svojstva tih krivulja.

Upravo ovi radovi su dali poticaj i ideje mnogim drugim geometričarima koji ih plodotvorno koriste, dalje razvijaju i prenose na druge prostore. Spomenimo samo neke od tih radova: J. Hoschek, *Eine Erweiterung der natürlichen Geometrie der Strahlflächen*, Österr. Akad. Wiss. Math. Naturw. Kl. S. B. II, 176 (1967), 73–92.

Evo što K. Strubecker, referent u Math. Rev. o ovom radu Hoschecka među ostalim piše: „S. Bilinski ... hat durch eine rekursive Definition einer Folge von begleitenden Dreibeinen eine sehr bemerkenswerte Erweiterung der Theorie der Raumkurven aufgestellt ... "

Na kraju rada: J. Hoschek, *Eine Verallgemeinerung der Böschungsflächen*, Math. Ann. 179 (1969), 275–284, Hoschek kaže: „Abschliessend kann bemerkt werden, dass sich durch die hier aufgezeigten Ergebnisse wieder erwiesen hat, dass die von Bilinski angegebene Erweiterung der Kurventheorie sehr sinnvoll und weitreichend ist. Allgemein gesehen, lassen sich gemäss (5a) zweifach unendlich viele Erweiterungssysteme (A) ableiten. Das von Bilinski angegebene kinematisch begründete System scheint aber das bei weitem ergiebigste zu sein". Daljni radovi Hoscheka na tu temu jesu: J. Hoschek, *Eine Verallgemeinerung der Cesàro Kurven*, Österr. Akad. Wiss. Math. Naturw. Kl. S. B. II, 177 (1969), 481–490, J. Hoschek, *Eine Verallgemeinerung der Bertrand und Mannheim Kurven*, Österr. Akad. Wiss., Math. Naturw. Kl. S. B. II, 177 (1969), 79–93; J. Hoschek, *Eine Erweiterung der Streifentheorie und Verallgemeinerung von Cesàrostreifen*, Arch. Math. 20 (1969), 88–93; Ch. Lübbert, *Verallgemeinerte Begleittetraeder von Regelflächen und Kurven im elliptischen Raum*, Österr. Akad. Wiss., Math. Naturw. Kl. S. B. II, 185 (1976), 153–166.

U ovim se radovima J. Hoscheka ideja S. Bilinskog bitno koristi i dovodi do poopćenja prirodne geometrije pravčastih ploha i do poopćenja zavojnih ploha, Bertrandovih, Mannheimovih i Cesàrovih krivulja i ploha. U radu Ch. Lübberta ta se ideja prenosi na pravčaste plohe eliptičkog prostora.

Ova ideja S. Bilinskog koristi se i u radovima sovjetskog geometričara V. G. Koppa. Tako on u radu В. Г. Копп, *Об одном обобщении линий откоса*, Уч. Зап. Гос. Пед. Ин-та 10 (1955), 137–154, uvodi i pojam „cepočka Bilinskogo". On je također te ideje prenio i na pravčaste plohe.

Na ova tri rada S. Bilinskog nadovezuju se i mnogi radovi njegovih učenika.

6. U ovoj je skupini za sada samo rad [34]. U ovom se radu na osnovi pojma Ptolemejske matrice izgrađuje analitički model jedne teorije za koju se pokazuje da je izomorfna projektivnoj linijskoj geometriji.

7. Ovoj skupini pripadaju radovi [38]–[45]. U ovim se radovima promatraju izvjesni tipovi funkcionalnih jednadžbi i u nekima od njih primijenjuju na geometrijske probleme i generaliziraju neki već od prije poznatih teorema.

No S. Bilinski nikada nije zaboravljao i na nastavnike srednjih škola i autor je više članaka iz područja metodike elementarne geometrije, koji su bili publicirani u „Nastavnom vjesniku", „Nastavi matematike i fizike" i „Matematičkoj čitanci", Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1947, koja je izašla u redakciji M. Sevdića.

Na kraju kažimo da je profesor Bilinski bio omiljen među svojim učenicima i suradnicima jer je uvijek bio smiren i imao vremena za njih i njihove probleme. Uvijek je bio spreman da pomogne savjetom i podstakne svoje suradnike koji su se bavili problematikom iz njegovog djelokruga rada. Stoga smo zahvalni da je ovakav čovjek i znanstveni radnik toliki niz godina djelovao među nama, a i sada iako u mirovini djeluje preko svojih znanstvene aktivnosti u kojoj još uvijek ne posustaje. Smatramo da je njegov jubilej prilika da mu se ovim osvrtom na njegovo djelo zahvalimo. Želimo profesoru Bilinskom još mnogo zdravlja kako bi mogao realizirati sve svoje ideje kojih ima još puni koš.

POPIS RADOVA S. BILINSKOG:

1. *Odnos kuta paralelnosti i pripadne distance*, Nastavni Vjesnik **49**, (1941).
2. *O Eulerovim poliedarskim relacijama*, Nastavni Vjesnik **51**, (1943).
3. *Homogene mreže ravnine*, „Rad" Jugosl. Akad. **271**, (1948), 7–119.
3a. *Homogene Netze der Ebene*, Bull. Inter. Acad. Jugoslave, **2**, (1949), 63–111.
4. *Prilog dinamici kumulonimbusa*, Glasnik mat. fiz. i astr., **3**, (1948), 29–51.
5. *O kinematičkim uvjetima frontogeneze*, Rad Geofizičkog zavoda u Zagrebu, II Ser., br. **2**, (1948), 5–16.
6. S. Bilinski – D. Blanuša: *Dokaz nerješivosti jedne mreže*, Glasnik mat. fiz. i astr., **4**, (1949).
7. *Homogene mreže zatvorenih orijentabilnih ploha*, „Rad" Jug. Akad. **277**, (1950), 129–164.
7a. *Homogene Netze geschlossener orientierbarer Flächen*, Bull. Inter. Acad. Yugosl., **6**, (1952), 59–75.
8. *O jednom teoremu G. Mongea*, Glasnik mat. fiz. i astr., **5**, (1950), 49–55.
9. *Generalizacija jednog Mongeovog teorema*, Glasnik mat. fiz. i astr., **5**, (1950), 175–177.
10. *Über sphärische Evolventoiden der Raumkurven*, Glasnik mat. fiz. i astr. **6**, (1951), 1–9.
11. *Diracova funkcija i jedan elementarni problem hidrostatike*, Glasnik mat. fiz. i astr., **7**, (1952), 219–227.
12. *Dokaz Jacobijevog teorema o sfernoj slici glavnih normala zatvorene krivulje*, Zbornik Mat. Inst. SAN, **2**, (1952), 143–146.
13. *Einige Eigenschaften sphärischen Evoluten und sphärischer Evolventen*, Glasnik mat. fiz. i astr., **9**, (1954), 109–114.
14. *Eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet und eine Isomorphie gewisser Teile der Differentialgeometrie der Raumkurven*, Proc. Inter. Math. Congress Amsterdam (1954).
14a. *Eine Verallgemeinerung der Formeln von Frenet und eine Isomorphie gewisser Teile der Differentialgeometrie der Raumkurven*, Glasnik mat. fiz. i astr., **10**, (1955), 175–180.
15. *Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ptolemaios*, „Simon Stevin" **50**, (1954), 90–93.
16. *O osnovama aksiomatike*, Nastava matematike i fizike **5**, (1956), 83–87.
17. *Einige Anwendungen der Polarkoordinaten in der hyperbolischen Geometrie*, Glasnik mat. fiz. i astr. **11**, (1956), 25–35.
18. *Über eine gewisse Kurvenzuordnung in der hyperbolischen Ebene*, Commentarii Mathematici Helvetici, **32**, (1957), 112–120.
19. *A Note on the Fundamental Equations of the Theory of Surfaces*, Glasnik mat. fiz. i astr., **13**, (1958), 121–124.

20. *Über die Ordnungszahl der Klassen Eulerscher Polyeder*, Archiv der Mathematik, **10**, (1959), 180–186.
21. *Über die Rhombenisoeder*, Glasnik mat. fiz. i astr., **15**, (1960), No 4.
22. *Ekonomsko i kulturno značenje matematike*, Glasnik mat. fiz. i astr., **15**, (1960), 69–72.
23. *„Der Vierscheitelsatz" für gleichseitige Polygone*, Glasnik mat. fiz. i astr., **16**, (1961), 195–201.
24. *Utjecaj otkrića neeuklidske geometrije na savremeni razvoj nauke*, Glasnik mat. fiz. i astr., **16**, (1962), 143–146.
25. *Die primitivste Form des Vierscheitelsatzes*, Glasnik mat. fiz. i astr. **18**, (1963), 85–95.
26. *Über eine Erweiterungsmöglichkeit der Kurventheorie*, Monatschefte für Mathematik, **67**, (1963), 289–304.
27. *Vektoren in der hyperbolischen Ebene*, Glasnik mat. fiz. i astr., **19**, (1964), 51–52.
28. *Eine Interpretation der ebenen hyperbolischen Geometrie in der projektiven Geometrie der Geraden*, Glasnik mat. fiz. i astr. **20**, (1965), 99–135.
29. *Einige Betrachtungen über Koordinatensysteme und Modelle der Lobatschewskischen Geometrie*, Glasnik matematički, 1 (21), (1966), 177–198.
30. *Einige Betrachtungen über Geradenkoordinaten in der hyperbolischen Ebene*, Glasnik matematički, 2 (22), (1967), 179–190.
31. *Über ein Modell der zweidimensionalen hyperbolischen Geometrie in der Torusebene*, Glasnik matematički, 2 (22), (1967), 191–200.
32. *Über einen kurventheoretischen Satz von N. Abramescu*, Glasnik matematički, **3**, (**23**), (1968), 253–256.
33. *Zur Begründung der elementaren Inhaltslehre in der hyperbolisch Ebene*, Mathematische Analen, **180**, (1969), 256–268.
34. *Ein analytisches Model der projektiven Liniengeometrie*, Monatshefte für Mathematik, **74**, (1970), 193–210.
35. *Über Ptolemäische Sätze*, Monatshefte für Mathematik, **77**, (1973), 193–205.
36. *Eine Eigenschaft der $(n+2,n)$-Matrizen und Ptolemäische Funktionen von Dreigeradenfiguren*, Demonstratio Mathematica, **6**, (1973), 471–481.
37. *Ein Ptolemäischer Satz für isotropen Kegel des Minkowskischen Raumes*, Mathematical Structures – Computational Mathemtics – Mathematical Modelling, Sofia 1975, 183–185.
38. *Ein Satz von Brahmagupta und seine Verallgemeinerungen*, „Rad" JAZU, **370**, (1975), 47–55.
39. *Die Linearadditiven Zweiindizesfunktionen*, Aequationes mathematicae, **14**, (1976), 95–104.
40. *Ein Symmetriemass von Vierecken der affinen Ebene*, „Rad" JAZU, **382**, (1978), 109–114.

41. *Funktionale von primitiven Polygonen Kleinscher Ebenen*, Commentarii Mathematici Helvetici, **54**, (1979), 288–303.

42. *Ein Regularitätsmass von Figuren in Kleinschen Räumen*, Sitzungsber. Österr. Akad. Wien, Math. – naturw. Kl., Abt. II **28** (1980), 167–177.

43. *Die Invarianten einer diskreten Transformationsgruppe endlicher Ordnung*, „Rad" JAZU, **386**, (1980), 89–93.

44. *Zur Characterisierung des Doppelverhältnissbegriffes durch Funktonalgleichungen*, „Rad" JAZU, **403**, (1983), 69–75.

45. *Die zu einer Gruppe gehörenden Funktionalgleichungen*, „Rad" JAZU, **403**, (1983), 55–67.

46. *Die quasiregulären Polyeder vom Geschlecht 2*, Sitzungsber. der Osterr. Akad. Wiss, Math. – naturw. Kl., Abt II, **194** (1985), 1–18.

47. *Die quasiregulären Polyeder zweiten Stufe*, Sitzungsber. der Osterr. Akad. Wiss., Math. – naturw. Kl., Abt. II, **196** (1987), 1–12.

48. *Die windschiefen Archimedischen Polyeder höheren Geschlechtes*, Sitzungsber. der Osterr. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., Abt. II, **197** (1988), 315–326.

Boris PAVKOVIĆ

STANKO BILINSKI

On the occasion of the 80th birthday of Stanko Bilinski the wealth of his work and the depth of the ideas involved in his papers.

The paper [21] about rhombic isohedrons is one of the most important papers of Stanko Bilinski. In the paper [35] (and also in [3], [15], [23], [25], [37]) a general Ptolemaic theory is developed. In this theory many apparently independent theorems are subordinated to a very general principle. In [18] evolutes of the curves in the hyperbolic plane are considered, in [30] new rectilinear coordinates are introduced, and in [31] a new model of the hyperbolic geometry is given. A great echo had the papers [14], [14a] and [26]. The main idea in these papers consists in associating, by means of certain reccurent relations, two sequences of scalar invariants and orthogonal coordinate systems to a curve in the three-dimensional space. The connection between the two sequences ressembles the Frenét formulas.

Јован Д. КЕЧКИЋ

О НЕКИМ ЗАБОРАВЉЕНИМ РЕЗУЛТАТИМА ИЗ МАГИСТАРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ Ј. В. СОХОЦКОГ

1. Увод. У овом чланку изнећемо неке чињенице у вези са магистарским радом Ј. В. Сохоцког[1]. Тај рад је објављен под насловом:

> *Теорія интегральныхъ вычетовъ съ нѣкоторыми приложеніями.* Разсужденіе Ю. Сохоцкаго написанное на степенъ магистра математики. С.-Петербургъ 1868, VIII+135 стр.[2]

У веома поузданој књизи [1, стр. 256] пише: Магистарска дисертација Сохоцког била је први научни рад на руском језику из теорије функција комплексне променљиве.[3] Већ сама ова чињеница даје известан значај дисертацији Сохоцког, па је заиста чудно да руски математичари (који су иначе прилично склони да важне резултате везују за руске ауторе) нису обратили више пажње на овај рад Сохоцког. Тек је 1950. године Маркушевич [3] дао кратак приказ магистарске и докторске дисертације Сохоцког, а на почетку свог рада је навео: Јулијан Васиљевич Сохоцки поделио је судбину многих руских научника чија су открића ушла у науку, али неоправдано повезана са туђим именима.

Током рада на књизи [4], односно [5], професор Д. С. Митриновић се упознао са цитираном реченицом из књиге [1], као и са чланком [3], и одмах је предузео све мере да дође до магистарске дисертације Сохоцког. То није било нимало лако, али се упорност коначно исплатила, па су, после силних перипетија, у Београд стигле (скоро истовремено) две копије те дисертације — једна од Гос. библиотеке СССР имена В. И. Ленина у Москви, а друга од Механичко-математичког факултета Московског универзитета. Доста детаљан приказ ове магистарске дисертације биће објављен у другом издању књиге [4] које треба да буде штампано ове године, а у овом чланку сконцентрисаћемо се само на два интересантна питања из тезе.

---

[1] Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842–1927)

[2] У то доба важио је стари правопис, са словима і, ѣ, ... којих у данашњем руском правопису нема.

[3] Сохоцки није први руски математичар који се бавио теоријом функција комплексне променљиве. Још Коши [2] помиње радове Остроградског и Буњаковског. Међутим, њихови радови нису писани на руском језику, већ на француском.

2. Кратки биографски подаци.[4] J. В. Сохоцки рођен је у Варшави 5. фебруара 1842. Гимназију је завршио у Варшави, а 1866. дипломирао је на Универзитету у Петрограду. Две године касније, 12. јуна 1868. Сохоцки је одбранио већ поменуту магистарску дисертацију. Од 28. септембра 1868. Сохоцки је приват-доцент на Универзитету у Петрограду, где је држао курсеве из теорије функција имагинарне променљиве и верижних разломака са применама на интеграљење. Докторску дисертацију[5] Сохоцки је одбранио 25. новембра 1873. Ванредни професор Универзитета у Петрограду постао је 29. децембра 1873, а редовни 1. јануара 1882. Поред своје магистарске и докторске дисертације које се односе на комплексне функције, Сохоцки је објавио више радова из елиптичких функција, али је био најпознатији по својим радовима из више алгебре и теорије бројева. Умро је 14. децембра 1927. у Лењинграду (преименованом Петрограду).

3. Теорема о понашању аналитичке функције у околини есенцијалног сингуларитета. Теорема о понашању аналитичке функције у околини изолованог есенцијалног сингуларитета добро је позната и присутна је у скоро свим уџбеницима комплексне анализе[6]. Она се, у данашње време, најчешће исказује у једном од следећих облика.

Варијанта 1. *Нека је* a *есенцијални сингуларитет функције* f. *Ако су* ε, δ *било који позитивни бројеви, и ако је* A *било какав комплексан број (или* $A = \infty$*) постоји тачка* z *у кругу* $|z - a| < \delta$ *у којој је* $|f(z) - A| < \varepsilon$ *(или* $|f(z)| > \varepsilon$*).*

Варијанта 2. *Нека је* a *есенцијални сингуларитет функције* f. *Тада за сваки комплексан број* A *(коначан или бесконачан) постоји низ* (z_n) *који конвергира ка* a, *такав да је* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

У математичкој литератури ова теорема је позната као Вајерштрасова теорема (тако пише, рецимо у [7], [8] где је заступљена Варијанта 1, или у [9] где је наведена Варијанта 2), при чему се наводи да је доказана 1876. у раду [10], што је тачно. Међутим, ова теорема се налази и у магистарском раду Сохоцког из 1868, а поред тога и у књизи италијанског математичара Казоратија[7] [11], такође из 1868. Према томе, Сохоцки и Казорати су (очигледно независно један од другог) објавили ову теорему осам година пре Вајерштраса[8], и теорема би требало да се

[4] Ови подаци су узети из чланка [3].

[5] Теза је објављена под насловом (на савременом руском): *Об определённых интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды.* С.-Петербург 1873, II+IV+129 стр.

[6] Ова теорема се није налазила у првих пет издања нашег стандардног уџбеника [6]. Пропуст је отклоњен у шестом издању (стр. 368–369), где су наведене обе варијанте теореме, а дати су и корисни историјски подаци.

[7] F. Casorati (1835–1890).

[8] У чланку [12] наведено је мишљење да има основа да се претпостави да је Вајерштрас доказао ову теорему пре 1868. Сматрамо да приликом утврђивања приоритета (бар кад се ради о резултатима из 19. и 20. века) треба узимати у обзир искључиво годину објављивања резултата (можда годину када је чланак стигао у редакцију часописа). Да ли је аутор резултат доказао раније, па га онда држао у фиоци (јер, рецимо, није био сигуран у свој резултат) не може бити од значаја у оваквим питањима.

зове теорема Казорати-Сохоцког. До објављивања Маркушевичевог чланка [3] и у руској, односно совјетској, литератури ова теорема се називала Вајерштрасова теорема — то је чинио и Маркушевич, у књизи [9] — али од тада, дакле у другој половини овог века, она се назива теорема Сохоцког (рецимо у књизи [13]), с тим што се понекад каже да је теорема позната и под именом Казорати-Вајерштрас (нпр. у [14]), а понекад се назива теорема Сохоцки-Вајерштрас (нпр. у [15])[9]. У западној литератури теорема и даље носи име Вајерштраса.

Наводимо формулацију Сохоцког из његове магистарске дисертације.

Ако дата функција $f(z)$ у некој тачки z_0 постаје ∞ бесконачног реда, тада у тој тачки функција $f(z)$ обавезно мора узети све могуће вредности.

Извесна објашњења су овде неопходна. На првом месту, тврђење: „Ако функција $f(z)$ у тачки z_0 постаје ∞, онда она у тој тачки узима све могуће вредности" звучи нам данас контрадикторно. Међутим, реч је само о неподесној терминологији. Наиме, кад Сохоцки разматра функцију f у околини изолованог сингуларитета, он уводи следеће појмове. Ако се функција f може приказати у облику

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} A_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(z - z_0)^k,$$

тада за функцију f Сохоцки каже да у тачки z_0 постаје ∞ реда n, а ако је

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(z - z_0)^k,$$

онда каже да функција f у тачки z_0 постаје ∞ бесконачног реда. Другим речима, термин „функција f у тачки z_0 постаје ∞" не значи да је $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, већ имамо два случаја:

(i) ако „функција постаје ∞ реда n", то значи да је z_0 пол реда n функције f;

(ii) ако „функција постаје ∞ бесконачног реда" то значи да је z_0 есенцијални сингуларитет функције f.

Дакле, није реч о контрадикцији, већ заиста само о неподесној терминологији.

Други термин који треба објаснити јесте „функција $f(z)$ у тачки z_0 мора узети све могуће вредности". То наравно не значи да $f(z_0)$ може бити било који број, већ да $\lim_{z \to z_0} f(z)$ може бити било који број. То се види како из Сохоцкијевог доказа теореме (који би, уз мале интервенције, био и данас

[9] Изгледа да у руској преводилачкој литератури није тако. Рецимо у књизи [16], а то је превод са немачког у редакцији угледног стручњака М. А. Јевграфова, на стр. 105 пише „теорема Вајерштраса", и нигде се, у фусноти или некој напомени, не помиње Сохоцки. Руси иначе често у преводима иностраних књига на такав начин исправљају „неправде" нанете њиховим математичарима (па чак знају у томе и да претерају!)

прихватљив) тако и из примера да „функција $\sin\frac{1}{z-b}$ у тачки $z=b$ узима све могуће вредности".

Интересантно је да сам Сохоцки не даје неки нарочит значај овој теореми. У предговору своје магистарске дисертације он истиче разне друге своје резултате, али овај не помиње. Но и поред тога, теорема о понашању аналитичке функције у околини есенцијалног сингуларитета треба да носи име Казорати-Сохоцки, а не Вајерштрас[10].

4. Особине збира остатака. Основна тема магистарске тезе Сохоцког јесу остаци и њихове примене. Сохоцки је прво навео стандардну (Кошијеву) дефиницију остатка у тачки, а затим је, у петнаест теорема, формулисао на веома оригиналан начин основне особине остатака. С обзиром да особине остатака нису, колико нам је познато, на такав начин навођене у литератури, навешћемо свих петнаест теорема из магистарске дисертације Сохоцког, али у модернијем облику. Претпостављамо да су f и g аналитичке функције са коначно много сингуларитета.

Теорема 1. *Важи једнакост*

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\big(f(z)+g(z)\big)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z)+\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}g(z).$$

Теорема 2. *Ако $a\in\mathbf{C}$, тада је*

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\big(af(z)\big)=a\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z).$$

Теорема 3. *Ако је $z=z_0$ сингуларитет функције две променљиве $(z,w)\mapsto f(z,w)$, при чему z_0 не зависи од w, тада важе једнакости*

$$\frac{d}{dw}\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z,w)=\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{df(z,w)}{dw};$$

$$\int\Big(\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z,w)\Big)\,dw=\operatorname*{Res}_{z=z_0}\int f(z,w)\,dw.$$

Теорема 4. *Ако функција две променљиве $(z,w)\mapsto f(z,w)$ у тачкама $z=a$ и $w=b$ има изоловане сингуларитете, тада је*

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\Big(\operatorname*{Res}_{w=b}f(z,w)\Big)=\operatorname*{Res}_{w=b}\Big(\operatorname*{Res}_{z=a}f(z,w)\Big).$$

[10] У чланку [12] пише да је Казоратијева књига [11] објављена неколико месеци пре Сохоцкијеве магистарске дисертације.

Теорема 5. *Ако је $z = a$ изоловани сингуларитет функције f, тада је*

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f'(z) = 0.$$

Теорема 6. *Ако је $z = a$ сингуларитет функције f, тада је*

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)g'(z) = -\operatorname*{Res}_{z=a} f'(z)g(z).$$

Теорема 7. *Ако тачка $z = a$ није сингуларитет функције f, тада је*

$$f(a) = \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{z-a}.$$

Теорема 8. *Ако тачка $z = a$ није сингуларитет функције f, тада је*

$$f^{(n)}(a) = n! \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}.$$

Теорема 9. *Ако је $z = a$ пол реда n функције f, тада је*

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z) \right)_{z=a}.$$

Теорема 10. *Ако је $z = a$ пол или есенцијални сингуларитет функције f, тада главни део Лорановог развоја у околини тачке $z = a$ гласи:*

$$\operatorname*{Res}_{t=a} \frac{f(t)}{z-t}.$$

Теорема 11. *Ако је $z = a$ нула или пол функције f реда n, тада је*

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{d \log f(z)}{dz} = \pm n;$$

уколико је g функција која је у тачки $z = a$ коначна, тада је

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{d \log f(z)}{dz} g(z) = \pm n g(a).$$

Узима се знак + кад је $z = a$ нула, а знак − кад је $z = a$ пол функције f.

Теорема 12. *Ако функција f има коначно много сингуларитета $z_1, \ldots,$ z_n, тада је*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=0} z^{-2} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Теорема 13. *Ако функција f има у тачки $z = a$ сингуларитет, и ако је функција g аналитичка у околини тачке $w = b$, при чему је $g(b) = a$, тада је*

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{m} \operatorname*{Res}_{w=b} f(g(w))g'(w),$$

где је m ред нуле $z = a$ функције $w \mapsto g(w) - g(a)$.

Теорема 14. *Ако за аналитичку функцију f важи $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$, тада је*

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Теорема 15. *Ако функција f има коначно много сингуларитета $z_1, \ldots,$ z_n, тада је*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{w=z_k} \frac{f(w)}{z-w} + \operatorname*{Res}_{w=0} \frac{f(1/w)}{w(1-zw)}.$$

Прокоментарисаћемо укратко ове теореме. Теореме 1 и 2 значе да је Res, односно $\sum$ Res, линеаран оператор (боље речено, линеарна функционела). Теореме 3 и 4 односе се на комутативност оператора $\frac{d}{dz}$ и Res, $\int$ и Res, односно $\operatorname*{Res}_{z=a}$ и $\operatorname*{Res}_{w=b}$. Теореме 7, 8, 9 и 14 су стандардне теореме за израчунавање остатака, док су Теореме 11 и 12 такође стандардне теореме у вези са тзв. принципом аргумента. Теореме 10 и 15 потичу од Кошија који их је често користио. Посебно су интересантне Теореме 6 и 13, јер одговарају парцијалној интеграцији, односно смени, код одређеног интеграла. С обзиром да се остатак дефинише помоћу интеграла, природно је очекивати да овакве теореме постоје, али њих нема по стандардним уџбеницима[11]. Те су теореме иначе веома корисне. Илустрације ради, извешћемо, уз помоћ Теореме 6, рекурентну формулу[12] за Лежандрове полиноме. Овај доказ је такође узет из магистарске дисертације Сохоцког.

Лежандров полином P_n степена n дефинише се као коефицијент уз t^n у развоју функције

$$t \mapsto (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$$

[11] Једна варијанта (може се рећи специјалан случај) Теореме 13 доказана је у чланку [17], скоро 100 година после Сохоцког.

[12] тзв. Бонеову формулу

у Тејлоров ред у околини тачке $t = 0$. Према томе, ако је

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(x)t^k,$$

онда је

$$\frac{1}{t^{n+1}\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(x)t^{k-n-1},$$

па је

$$P_n(x) = \operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t^{n+1}\sqrt{1 - 2xt + t^2}}.$$

Ако сада применимо Теорему 6 и приметимо да је

$$\frac{d}{dt}\sqrt{1 - 2xt + t^2} = \frac{t - x}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}},$$

добијамо

$$\begin{aligned} n \operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t^{n+1}}\sqrt{1 - 2xt + t^2} &= - \operatorname*{Res}_{t=0} \sqrt{1 - 2xt + t^2}\frac{d}{dt}(t^{-n}) \\ &= \operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t^n}\frac{d}{dt}\sqrt{1 - 2xt + t^2}, \end{aligned}$$

тј.

$$n \operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t^{n+1}}\sqrt{1 - 2xt + t^2} = \operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t^{n+1}} \frac{t(t - x)}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}},$$

одакле излази

$$\operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t^{n+1}} \frac{n(1 - t^2 - 2xt) - t^2 + tx}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} n \operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t^{n+1}\sqrt{1 - 2xt + t^2}} &- (2n - 1)x \operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t^{n}\sqrt{1 - 2xt + t^2}} \\ &+ (n - 1) \operatorname*{Res}_{t=0} \frac{1}{t^{n-1}\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = 0, \end{aligned}$$

тј.

$$nP_n(x) - (2n - 1)xP_{n-1}(x) + (n - 1)P_{n-2}(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и то је Бонеова рекурентна формула за Лежандрове полиноме.

Сохоцки је у својој магистарској дисертацији извео и друге особине Лежандрових полинома (Родригезову формулу, Лагранжеву диференцијалну једначину и др.) уз помоћ рачуна остатака. Он је био први који је применио остатке на ту класу специјалних функција, али му ни за то није одато признање у литератури. Наиме, Лоран[13] је у раду [18] такође применио рачун остатака на Лежандрове полиноме и тај поступак је приписан њему (видети, нпр. [19]) иако је Лоранов чланак објављен седам година после магистарске дисертације Сохоцког[14].

5. Формуле Сохоцког-Племеља. Предмет овог чланка били су резултати Сохоцког из његове магистарске дисертације који су годинама приписивани другим ауторима. Напоменимо да је такође један важан резултат из докторске дисертације Сохоцког имао сличну судбину. Реч је о формулама које су годинама у литератури називане Племељеве формуле, иако их је Племељ доказао 1908. године — дакле 35 година после Сохоцког — додуше у нешто општијем облику. После објављивања Маркушевичевог чланка [3] у коме каже да су те формуле „неправедно приписане Племељу", у совјетској литератури се оне називају формуле Сохоцког-Племеља.[15]

Литература[16]

[1] И. З. Штокало и др.: *История отечественной математики. Том 2.* Киев 1967.

[2] A.-L.Cauchy: *Mémoire sur des formules générales qui se déduisent du calcul des résidus et qui paraissent devoir concourir notablement aux progrès de l'analyse infinitésimale.* C. R. Acad. Sci. Paris 12 (1841), 871–878. Прештампано у: *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* (1) 6, 149–158.

[3] А. И. Маркушевич: *Вклад Ю. В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций.* Историко-математические исследования 3 (1950), 399–406.

[4] D. S. Mitrinović, J. D. Kečkić: *Cauchyjev račun ostataka sa primenama.* Beograd 1978.

[13] Ово је H. Laurent (1841–1908), а не P. Laurent (1813–1854), по коме се зове Лоранов ред.

[14] Томе је свакако допринела и чињеница да је рад [18] објављен у једном од најпознатијих математичких часописа, док је магистарска дисертација Сохоцког била (и остала) тешко доступна.

[15] Питањем приоритета ових формула бавио се В. Дајовић [20] који у том чланку каже: „Прегледајући у библиотеци Механичко-математичког факултета Московског универзитета радове Јулијана Васиљевића Сохоцког (1842–1927), а посебно редак примерак његове докторске дисертације, утврдио сам да је Ј. В. Сохоцки у својој дисертацији проучавао граничне вредности интеграла Кошијевог типа и под специјалним условима доказао формуле о којима је реч. Да би се стекла јасна представа о томе како је Сохоцки дошао до поменутих формула, навешћу неке фрагменте његове докторске дисертације." Дајовић затим заиста наводи неке делове из тезе Сохоцког, али су они дословно, од речи до речи, преписани (тачније речено, преведени на српски) из Маркушевичевог рада [3], тако да Дајовић није ни морао да консултује „редак примерак" дисертације Сохоцког. Узгред речено, Дајовић уопште не помиње чланак [3], а током преписивања учинио је и једну битну грешку. На крају чланка [20] Дајовић закључује: „Из претходног излагања види се да је Ј. Племељ не знајући за Сохоцког доказао формуле ... " Чињеница је да се „из претходног излагања" то уопште не види. Но без обзира на то, аутор ове белешке (иако није видео докторску дисертацију Сохоцког) сматра да мишљење Маркушевича има знатно већу тежину од мишљења Дајовића!

[16] Библиографске податке који су овде коришћени (изузев стандардних уџбеника и чланка [20]) прикупио је професор Д. С. Митриновић, ради припреме другог издања књиге [4].

[5] D. S. Mitrinović, J. D. Kečkić: *The Cauchy Method of Residues — Theory and Applications*. Dordrecht-Boston-Lancaster 1984.

[6] D. S. Mitrinović: *Kompleksna analiza*. Beograd, I izd. 1967; II izd. 1971; III izd. 1973; IV izd. 1977; V izd. 1981; VI izd. 1989.

[7] E. T. Copson: *An introduction to the theory of functions of a complex variable*. II ed. London 1935; Reprinted 1946.

[8] E. C. Titchmarsh: *The theory of functions*. I ed. London 1932; II ed. London 1939; Reprinted 1964.

[9] А. И. Маркушевич: *Элементы теории аналитических функций*. Москва 1944.

[10] K. Weierstrass: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Klasse) 11 (1876). Прештампано у Сабраним делима Вајерштраса: Math. Werke, Bd. 2, Berlin 1895, стр. 77–124.

[11] F. Casorati: *Teoria della funzioni di variabili complesse*. Pavia 1868.

[12] E. Neuenschwander: *The Casorati-Weierstrass theorem (Studies in the history of complex function theory)*. Historia Mathematica 5 (1978), 139–166.

[13] Б. В. Шабат: *Введение в комплексный анализ*. Москва 1969.

[14] L. Volkovysky, G. Lunts, I. Aramanovich: *Problems in the theory of functions of a complex variable*. Moscow 1972.

[15] А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич: *Введение в теорию аналитических функции*. Москва 1977.

[16] А. Гурвиц, Р. Курант: *Теория функций*. Москва 1968.

[17] R. P. Boas, Jr., L. Schoenfeld: *Indefinite integration by residues*. SIAM Review 8 (1966), 173–183.

[18] H. Laurent: *Mémoire sur les fonctions de Legendre*. J. Math. Pures Appl. (3) 1 (1875), 373–398.

[19] *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, II A 10, Leipzig 1904–1916, стр. 705–706.

[20] В. Дајовић: *О формулама Племеља, Сохоцког и Привалова*. Мат. Весник 5 (20) (1968), 367–374.

Jovan D. Kečkić

ON SOME FORGOTTEN RESULTS FROM THE MASTER'S THESIS OF J. V. SOHOCKII

Master's thesis of J. V. Sohockii was the first research paper on complex analysis published in Russian. It contains many important results which were later ascribed to other mathematicians. First of all, there is the famous theorem on the behaviuor of an analytic function in a neighbourhood of an essential singularity. This theorem was published by Sohockii (in his master's thesis) and by Casorati in 1868, whereas Weierstrass published it eight years later — in 1876.

Furthermore, Sohockii was the first to apply calculus of residues to Legendre polynomials. The credit for this procedure is usually given to H. Laurent.

Finally the so-called Plemelj formulas are also due to Sohockii who published them in his doctor's thesis in 1873, that is to say 35 years before Plemelj.

Zvonimir ŠIKIĆ

PRIRODNI LOGARITMI

Što su prirodni logaritmi? Suvremeni odgovor nalazimo u definicijama logaritamske *funkcije* $\ln x$. Tipične su dvije alterativne definicije.

Definicija 1. Funkcija $\ln x$ inverzna je funkcija eksponencijalne funkcije e^x. Eksponencijalna funkcija e^x neprekinuto je realno upotpunjenje funkcije $e^{m/n} = (\sqrt[n]{e})^m$, koja je definirana za $m \in Z$ i $n \in N$, tj. za svaki racionalni eksponent.

Definicija 2. $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Za onoga koji prihvati definiciju 1. definicija 2. će biti važan teorem; obratno, definicija 1. bit će važan teorem onome koji krene od definicije 2. Svaki odabir ima svojih prednosti i svojih nedostataka. Definicijom 1. jasno je istaknuta veza eksponencijalne realne funkcije s elementarnim (školskim) eksponenciranjem racionalnim eksponentom. S druge strane, definicija 2. može biti i definicijom kompleksne funkcije $\ln x$, dok definicija 1. to nije i ne može biti. (Neprekinutih kompleksnih proširenja funkcije e^x ima mnogo; jedinstveno je semo analitičko proširenje, usp. [Š].)

Međutim, prirodni logaritmi nisu otkriveni niti tako što je otkrivena definicija 1, niti tako što je otkrivena definicija 2. Otkrićem logaritama držimo Bürgijevo i Napierovo otkriće „logaritamskog kanona", tj. postupak za izračunavanje logaritma. Pri tome logaritmi ne pretpostavljaju pojam *realne logaritamske funkcije*, čije su oni vrijednosti, jer za opći pojam realne funkcije matematika Bürgijevog i Napierovog vremena ne zna. Naprotiv, u tom je vremenu otkriće logaritama tek važan korak za buduće formiranje općeg pojma realne funkcije. Jasno je da su definicije 1. i 2. otkrića tog budućeg vremena.

Povijesno, dakle, otkriću logaritamske funkcije prethodi otkriće logaritamskog kanona, koje danas zovemo otkrićem logaritama. Ono se iznjedrilo iz pokušaja da se precizno numerički istraži korespondencija koja veže dva niza brojeva, jedan što raste (ili opada) po aritmetičkom zakonu, $a + nq$, s druge što raste po geometrijskom zakonu $A \times Q^n$, kada n prima cjelobrojne vrijednosti. Takve su korespondencije već od 14. stoljeća upotrebljavane u pokušajima da se matematički modeliraju prirodni fenomeni. Posebno je važna njihova upotreba u pokušajima nalaženja zakona gibanja. Aristotelijanski skolastički zakon gibanja tvrdio je da je brzina (V) proporcionalna omjeru pokretačke sile (M) i otpora (R), $V \sim M/R$. Thomas Bradwardine predložio je izmjenu ovog zakona, za koju se činilo da se bolje uklapa u fizičke činjenice: „Omjeri brzina u gibanju slijede omjere omjera pokretačke sile i otpora." Dakle, za korespondentne vrijednosti, koje odgovaraju cjelobrojnim n, vrijedi, ako početna brzina V_1 korespondira početkom omjeru M_1/R, onda n puta veća brzina nV_1 korespondira sa $(M_1/R_1)^n$. Bez obzira na pitanje fizikalne korektnosti Bradwardineovog zakona, za nas je važno da taj tip korespondencije već u to doba postaje predmetom matematičkih razmatranja. Zakon u *modernoj formi* možemo iskazati kao proporcionalnost $V \sim \log(M/R)$, ali, naravno, takve mogućnosti u doba njegove formulacije nema (usp. [W] u kojem se jasno iznosi da se takva formulacija ne može naći nigdje prije 17. stoljeća, iako mnogi suvremeni tekstovi, koji se bave ovim povijesnim problemom nekritički taj zakon citiraju u modernoj formi). Ovakve su korespondencije tipične za srednjovjekovna istraživanja. Numeričke karakteristike dvaju razmatranih fenomena tabeliraju se, pa se s vjerom u temeljni princip jednostavnosti prirode, pretpostavlja da će se veza razmatranih fenomena jasno očitovati pri usporedbi numeričkih vrijednosti međusobno korespondentnih primjeraka razmatranih fenomena.

Veza aritmetičke progresije $a + nq$, s geometrijskom progresijom $A \times Q^n$ postaje, zbog jednog specifičnog razloga, posebno zanimljiva u 16. stoljeću. Naime, *zbroju* primjeraka prve progresije odgovara *umnožak* primjeraka druge, što omogućuje da se prelazom iz jedne u drugu složeno množenje zamijeni jednostavnim zbrajanjem. Veliki razvoj astronomije 16. stoljeća suočava istraživače s glomaznim računima što ih nužno usmjerava na ostvaranje te mogućnosti. Na primjer, uzmemo li $a = 0$, $A = q = 1$ i $Q = 2$ dolazimo do tablice cjelobrojnih potencija s bazom 2.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	4	8	16	32	64

Ona jasno pokazuje kako se množenje može svesti na zbrajanje. Dva broja x-retka možemo *pomnožiti* tako da *zbrojimo* odgovarajuće brojeve y-retka. Ovi „odgovarajući brojevi", koji se zbrajaju kada se njima odgovarajući brojevi množe, zovu se logaritmima. Naime, ako je $x_1 \cdot x_2 = x_3$ onda je $y_1 + y_2 = y_3$. Ipak, praktična vrijednost ovakve tablice je zanemariva zbog velikih razlika među raspoloživim x-evima. Pitanje je: kako dobiti finiju razdiobu x-eva? Ovo su si pitanje 1590-tih istovremeno i nezavisno postavili Bürgi i Napier.

Napierov odgovor pokazuje znakove dubljeg i maštovitijeg razmišljanja o problemu, uz pomoć geometrijskog modela, u koji unosi element gibanja, i tako postiže kontinuiranu razdiobu korespondentnih x-eva i y-a (neka vrsta kinematičkog surogata za pojam realne funkcije). No njegove su konstrukcije prilično dvosmislene pa povijesničari i danas nude različite rekonstrukcije njegove teorije. Bürgijev odgovor neusporedivo je jednostavniji jer on ni ne pokušava doći do finije razdiobe x-eva finijom razdiobom y-a; što bismo danas rekli razumijevanjem x-a kao kontinuirane (realne) funkcije kontinuiranog (realnog) argumenta y (npr. kao Napier uz pomoć gore spomenutog surogata). Bürgi nije matematičar Napierovog formata, on može naći samo jednostavno računsko rješenje, koje ne traži otklone od jednostavnog potenciranja cjelobrojnim pozitivnim eksponentom. Tako ga i nalazi.

Dakle, neka varijabla y prima cjelobrojne pozitivne vrijednosti. Kako ćemo potenciranjem $x = b^y$ doći do fine razdiobe x-eva? „Najfiniju" razdiobu dobijamo kada za bazu uzmemo $b = 1$. Tada se x-evi stapaju. Dakle, fina razdioba se dobiva za $b \approx 1$. Bürgi je odabrao bazu $b = 1.0001$. Za $y = 0, 1, 2, 3, \ldots$ odgovarajuće x-eve dobivamo potenciranjem $x = 1.0001^y$. Međutim, Bürgi neće potencirati 1.0001^{131} tako da broj 1.0001 pomnoži 131 puta sam sa sobom. Tko bi na takav način ikada zgotovio tablicu logaritama? On traži jednostavni algoritam: logaritamski kanon. Sigurno nam pada na pamet ideja da pri računanju vrijednosti 1.0001^{131} iskoristimo prethodno izračunatu vrijednost 1.0001^{130}. Dakle, $1.0001^{131} = (1.0001^{130}) \cdot 1.0001$. To je već mudrije. Ali Bürgi je još mudriji. On naprosto ne želi *množiti*. Naravno, iskoristiti će prethodno izračunati x, ali ne u računanju slijedećeg x-a nego u računanju *prirasta* do slijedećeg x-a. Dakle, ako je

$$x = 1.0001^y,$$

onda on traži Δx takav da je

$$x + \Delta x = 1.0001^{y+1}.$$

Dakle,

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x = 1.0001^{y+1} - 1.0001^y = 1.0001^y(1.0001 - 1) = \frac{x}{10000}.$$

Kako se dakle računa tablica logaritama? Ovako!

y	x	Δx
0	1	0.0001
1	1.0001	0.00010001
2	1.00020001	0.000100020001
3	1.000300030001	itd.

Sve u svemu: pomakni zarez za četiri mjesta ulijevo pa pribroji dobivenu vrijednost početnoj vrijednosti, u tako dobivenoj vrijednosti opet pomakni zarez četiri mjesta ulijevo pa opet pribroji tako dobivenu vrijednost itd. Naravno, Δx i x će u stvarnom računu biti zaokruženi na neki broj decimala. Jednostavan algoritam. To je Bürgijev kanon.

Uočimo da je upravo Bürgijeva nemogućnost da se odmakne od diskretnih progresija (aritmetičke $y = 0, 1, 2, \ldots$ i odgovarajuće geometrijske $x = 1, 1.0001, 1.00020001, \ldots$), prema kontinuiranoj realnoj funkciji x koja ovisi o kontinuiranom realnom argumentu y, mogla biti prirodni izvor njegove ključne ideje da se umjesto računanja vrijednosti x-ova usredsredi na računanje vrijednosti prirasta Δx. Diskretne progresije baš nastaju diskretnim prirastima, čija jednostavnost omogućava da se nađe jednostavni logaritamski kanon. Dapače, sada i korak ka kontinuiranoj logaritamskoj funkciji postaje lakši.

Naime, nakon što je stvorena gornja tablica logaritama slijedi lagani korak ka finijoj razdiobi y-a. Vrlo je jednostavan. Svi y-i se proporcionalno umanje. Bürgijev faktor je $\frac{1}{10^4}$. Tako nastaje nova tablica:

y	x
0.0000	1.0000
0.0001	1.0001
0.0002	1.00020001
0.0003	1.000300030001

Da li je i ova tablica, tablica logaritama? Da li i u njoj množenje x-eva odgovara zbrajanje y-a? Naravno da odgovara. Označimo y-e stare tablice sa $\bar{y}$, a novi neka i dalje budu označeni sa y. Tada je $y = \frac{\bar{y}}{10^4}$. Ako je $x_1 \cdot x_2 = x_3$ onda je, vidjeli smo, $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \bar{y}_3$, ali onda je i $\frac{\bar{y}_1}{10^4} + \frac{\bar{y}_2}{10^4} = \frac{\bar{y}_3}{10^4}$, tj. $y + 1 + y_2 = y_3$. Dakle i nova tablica je logaritamska tablica. Prednost nove tablice je ta da malim promjenama x-a odgovaraju male promjene y-a, i obrnuto, pa vezu x-a i y-a možemo lakše shvatiti kao kontinuiranu funkciju. Bürgi, tako daleko nije otišao. Uostalom glavna korist za računanje, a to je svođenje množenja na zbrajanje, nije ništa više sadržana u novoj tablici no što je u staroj.

Ipak, pogledajmo u svjetlu današnjega razumijevanja tablice, kao izvatka iz kontinuuma funkcijskih vrijednosti, o kakvom potenciranju i kakvim prirastima se radi u novoj tablici. Za staru tablicu (tj. za stare logaritme) vrijedi

$$x = 1.0001^{\bar{y}},$$

gdje je $\bar{y} = 0, 1, 2, 3, \ldots$ tj. $\Delta\bar{y} = 1$. Osim toga znamo da je $\Delta x = \frac{x}{10^4}$ tj. $\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}$. Budući je u novoj tablici $y = \frac{\bar{y}}{10^4}$ onda za nove logaritme vrijedi

$$x = 1.0001^{10000y} \quad \text{i} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Uočimo li da je

$$1.0001^{10000y} = (1.00001^{10000})^y,$$

vidimo da nova logaritamska tablica ima bazu

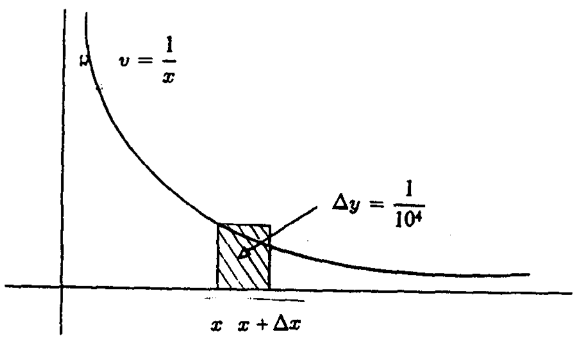
$$b = 1.0001^{10000} = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} \approx e.$$

Dakle, nova tablica je tablica funkcija $y = \log_b x$ za $b \approx e$ tj. $y = \ln x$. Nova tablica daje približne vrijednosti funkcije $y = \ln x$ i u tom smislu je Bürgi otkrio prirodne logaritme. Da je u staroj tablici odabrao bazu još bližu broju 1, npr. $b = 1 + \frac{1}{n}$, gdje je $n = 10^{100}$, i da je potom prešao na novu tablicu dijeljenjem y-a sa $n = 10^{100}$ dobio bi još finiju razdiobu x-eva, čija bi tablica, kao tablica funkcije

$$y = \log_b x \quad \text{gdje je} \quad b = \left(1 + \frac{1}{10^{100}}\right)^{10^{100}},$$

još bolje aproksimirala funkciju $y = \ln x$.

No vratimo se povijesti. Bürgi je našao nakon za izračunavanje tablice jedne diskretne progresije, računski veoma korisne, ne misleći o toj tabilici kao diskretnom izvatku iz kontinuuma vrrijednosti naše realne kontinuirane logaritamske funkcije. Napier je našao u biti isti kanon, odabravši umjesto Bürgijeve baze $b = 1.0001$, bazu $b = 0.9999999$, povezujući je s gometrijsko kinematičkim modelom, koji jest „konkretni" model naše apstraktne realne funkcije $\ln x$. Utoliko je on bliži otkriću funkcije $\ln x$. Naravno, razumijevanje realne funkcije u današnjem apstraktnom smislu pretpostavlja razumijevanje realnog kontinuuma a ono je rezultat dugog razvoja sve do sredine 19. stoljeća. Jedini analogon tom našem apstraktnom pojmu, koji možemo naći u 17. stoljeću, jest kontinuirana krivulja koja utjelovljuje kontinuirane veze uz nju vezanih kontinuiranih veličina: apcisa, ordinata, površina, tangenti, suptangenti itd. Po toj bismo analogiji otkrićem logaritamske funkcije trebali locirati kao otkriće hiperbolnih logaritama tj. kao otkriće činjenice da su površine ispod hiperbole logaritmi odgovarajućih ordinata hiperbole (u tom smislu da se površine hiperbole zbrajaju kad se njene ordinate množe). Prelaz od Bürgijevih logaritama na tako shvaćenu logaritamsku funkciju danas je obična stvar, iako je neobično da se taj prelaz (koliko je autoru poznato) nigdje u udžbenicima ne koristi kao izvanredan metodički pristup logaritamskoj funkciji.



Sl. 1

Vratimo se dakle Bürgijevim algoritmima i interpretirajmo ih geometrijski. Sjetimo se da je

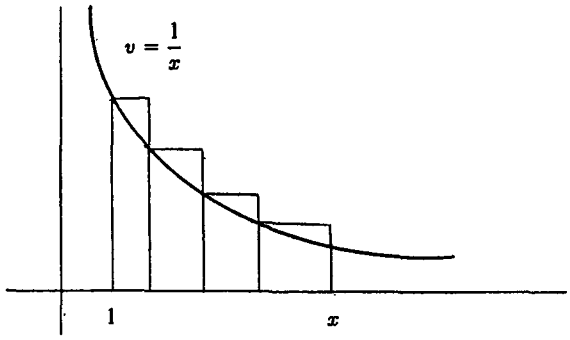
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \quad \text{tj.} \quad \Delta y = \frac{1}{x}\Delta x,$$

odakle slijedi da se prirast Δy (koji je uvijek jednak $1/10^4$) može geometrijski prikazati kao pravokutnik s visinom $v = \frac{1}{x}$ i takvom osnovicom Δx koja daje površinu pravokutnika $\frac{1}{x}\Delta x = \frac{1}{10^4}$

Naravno, sam y je suma prirasta Δy

$$y = \sum_1^x \Delta y = \sum_1^x \frac{1}{x}\Delta x,$$

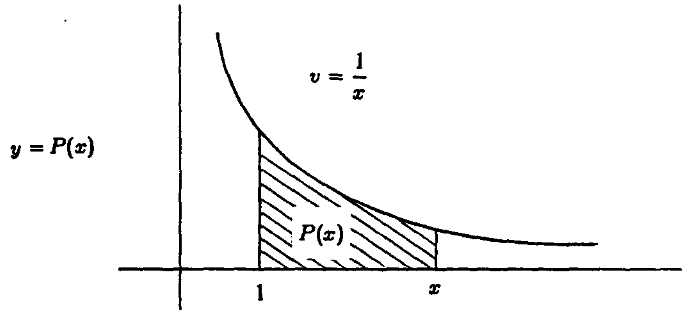
koja se geometrijski može prikazati kao suma pravokutnika, koji se protežu od 1 do x, kojima se visina proteže od osi x do grafa funkcije $v = \frac{1}{x}$ i kojima je površina $\frac{1}{10^4}$.



Sl. 2

Ako je (stara) baza bliža jedinici od Bürgijeve, npr. ako je $b = 1 + \frac{1}{10^{100}}$ onda dobivamo pravokutnike manjih površina (u našem primjeru pravokutnike površine $1/10^{100}$), čiji je zbroj još bliži površini ispod hiperbole. Dakle, gledano geometrijski, granični prijelaz na prirodne logaritme je prijelaz na površinu ispod hiperbole.

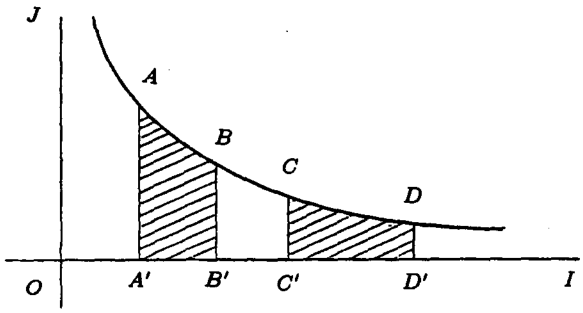
Napierov kinematički model logaritama jest neka vrsta onovremenog surogata za pojam realne logaritamske funkcije, koji ipak nije tako jednostavan kao hiperbolni logaritam. Koliko je Napier svojim modelom bio blizu hiperbolnom logaritmu pokazao je Whiteside u [W]. Ipak vezu logaritama (koji se zbrajaju kada se njima odgovarajuće vrijednosti množe) s hiperbolnim površinama tek je pola stoljeća kasnije otkrio gotovo nepoznati belgijski isusovac A. de Sarasa, čitajući *opus geometricum* svojeg prijatelja Gregoryja St. Vincenta. U stvari, u Gregoryjevom djelu možemo



Sl. 3

naći sve osim samog iskaza da hiperbolne površine imaju svojstvo logaritama. On je dokazao da za tačke A, B, C i D koje leže na pravokutnoj hiperboli s asimptotama OI i OJ vrijedi:

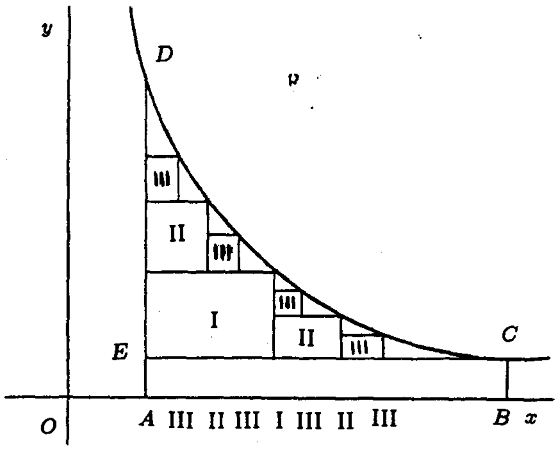
Ako je $AA' : BB' = (\lambda : \mu)^m$ *i* $CC' : DD' = (\lambda : \mu)^n$, *onda je* $\mathrm{Pov}(AA'B'B) : \mathrm{Pov}(CC'D'D) = m : n$.



Sl. 4

A. de Sarasa prvi je istaknuo da to znači da su hiperbolne površine logaritmi odgovarajućih vrijednosti na asimptoti. No iako je Gregoryjev *opus geometricum* bio poznat i čitan (najčešće zbog njegovog „dokaza“ o nemogućnosti kvadrature kruga) hiperbolni se model logaritama među matematičarima širio veoma sporo. Vjerojatno stoga što se osnovni problem nalaženja logaritamskog kanona tim modelom svodi na jednako teški problem nalaženja hiperbolnih površina. Ipak, baš je taj problem, koji je postavljen 1650-tih a od tada se sve preciznije počeo i rješavati, bio problem koji je doveo do elementarnih razvoja logaritama u beskonačne redove.

Među prvim pokušajima da se hiperbolne površine sistematski izračunaju najvažniji je Brounckerov iz sredine 1650-tih. John Wallis, koji je imao određenih uspjeha u računanju kvadrature kruga, upotrebljavajući jednadžbu $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, pokušao je iste tehnike primijeniti i na kvadraturu hiperbole preko jednadžbe $y = \sqrt{R^2 + x^2}$. Ne postigavši neki uspjeh predložio je problem Brounckeru, koji ga je riješio spretnim disekcijama. Razmatrajući hiperbolnu površinu $ABCD$ Brouncker je siječe kao na slici.



Sl. 5

Najprije je iza hiperbolne površine $ABCD$ izdvojen pravokutnik $ABCE$. Zatim slijedi I bisekcija intervala AB i izdvajanje odgovarajućeg pravokutnika I (1. korak). Tome slijede dvije bisekcije II i izdvajanje dva odgovarajuća pravokutnika II (2. korak). Zatim slijede četiri bisekcije III i izdvajanje četiri odgovarajuća pravokutnika III (3. korak). I tako dalje. Sve u svemu:

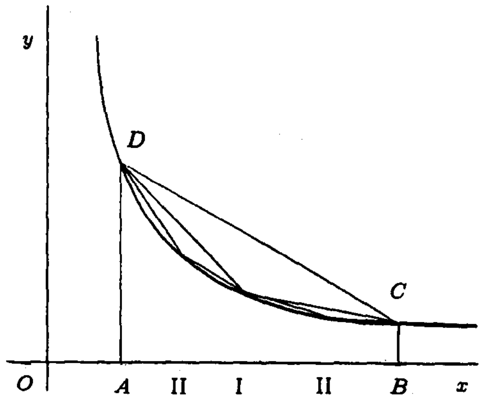
$$\mathrm{Pov}(ABCD) = \mathrm{Pov}(ABCE) + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \dots .$$

Uzmemo li jednakostraničnu hiperbolu $y = \frac{1}{x}$, te $OA = 1$ i $OB = 2$ nalazimo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pov}(ABCD) &= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{7} - \frac{4}{8}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{6}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{8}\left[\left(\frac{8}{15} - \frac{8}{16}\right) + \left(\frac{8}{13} - \frac{8}{14}\right) + \left(\frac{8}{11} - \frac{8}{12}\right) + \left(\frac{8}{9} - \frac{8}{10}\right)\right] + \cdots \\
&= \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right] + \\
&\quad + \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right] + \cdots \\
&= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{13 \cdot 14} + \frac{1}{15 \cdot 16} + \cdots .
\end{aligned}$$

što je poznati „Mercatorov" razvoj od $\ln 2$. Naravno, metoda je sasvim općenita i Brouncker je uistinu našao razvoj za mjeru svake površine koju bismo danas označili sa $\ln(1+x)$.

Do analognih je razvoja Brouncker došao polazeći i od trapeza $ABCD$, kojem je oduzimao niz u hiperbolu upisanih trokuta, kao na slici.



Sl. 6

Tako je došao do sljedećeg zanimljivog razvoja od $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \left(\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} + \cdots\right).$$

U isto vrijeme, do slične je metode došao i Pietro Mengoli. Njegova metoda, kao i prva Brounckerova, daje „Mercatorov" razvoj od $\ln 2$, no ona je zanimljiva iz jednog drugog razloga. Mengoli pokušava razviti jednu čistu *analitičku teoriju logaritama*, naravno inspiriranu geometrijskim modelom, ali logički neovisnu o tom modelu. On kreće od dva komplementarna pojma na koje ga navode njegova izračunavanja hiperbolnih površina. To su hiperlogaritam

$$\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r = \sum_{rn\leq\lambda\leq rm-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

i hipologaritam

$$\underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r = \sum_{rn+1\leq\lambda\leq rm}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Očito je

$$\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r > \underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r - \underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r\right) = 0,$$

i Mengoli *definira* logaritam od $\frac{m}{n}$ kao vrijednost koja je za svaki r smještena između $\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r$ i $\underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r$.

I Brounckerovi i Mengolijevi razvoji glomazni su i nespretni, pa je i dalje ostao otvoren problem nalaženja metode kojom bi se preko hiperbolnih površina brzo i lako računale aproksimacije logaritama. Taj je problem, naravno, riješen skorašnjim razvojem infinitezimalnog računa i njegovih tehnika integriranja, uz pomoć kojih su otkriveni mnogi relativno jednostavni i brzo konvergentni razvoji za logaritme. Takav je razvoj matematike, pomakom interesa s pojedinačnih geometrijskih metoda na općenitije analitičke metode, dodatno jačao interes za iznalaženjem potpuno analitičke definicije logaritama, posebno takve koja bi prirodno i lako vodila do već poznatih razvoja za logaritme. U tom je smislu Halleyjeva definicija logaritma iz 1695, koju bismo danas zapisali ovako

$$\ln(1 \pm x) = \pm \lim_{n \to \infty} \frac{(1 \pm x)^{1/n} - 1}{1/n}$$

(a koju je on dao verbalno, zbog odsustva mnogih pojmova iz gornjeg zapisa u to doba) veliki napredak u odnosu na Mengolijevu.

Možemo zaključiti da su krajem 17. st. logaritmi prestali biti tek sredstvo za računanje, koje su otkrili Bürgi i Napier, nego su preko hiperbolnih površina inkorporirani u geometrijski pojam logaritamske funkcije, što je učinio Sarasa ili donekle već Napier (?). Kada se u Eulerovom 18. st. geometrijski temelj računa počeo napuštati u korist čistog analitičkog računa, takozvanom algebraizacijom analize, i kada se pojam funkcije odvojio od geometrijske krivulje i vezao uz analitičke izraze, kao prototip tom razvoju poslužila je baš logaritamska funkcija koja je taj razvoj već prošla (usp. Mengolijevu i Halleyjevu definiciju).

Uočimo na kraju da i današnji student matematike u svojim susretima s logaritmima prolazi sve te faze. U srednjoj se školi susreće s Bürgijevom tablicom logaritama, koji množenje svode na zbrajanje. U prvom kursu računa susreće se s geometrijskim modelom logaritama, kao hiperbolnih površina, u obliku formule $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, budući da na tom nivou integral funkcije intuitivno razumije kao površinu ispod grafa podintegralne funkcije. U kursu analize oslobađa se geometrijskih intuicija računa, pa između ostalog savladava Riemannovu čisto analitičku definiciju integrala, što ga dovodi do toga da formulu $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ čita kao čisto analitičku definiciju prirodnog logaritma. Naravno, tu se otvara mogućnost za nalaženje mnogih ekvivalentnih definicija poput Halleyjeve i Mengolijeve, na primjer. Upozoravamo pritom da je prelaz od geometrijskog modela u prvom kursu računa na analitički u kursu analize (često su to faze istog kursa) opće mjesto matematičke visokoškolske nastave, dok se prelaz od srednjoškolske tablice logaritama na geometrijski model prvog kursa računa u matematičkoj nastavi ignorira iako je, vidjeli smo, vrlo jednostavan i povijesno opravdan. Željeli bismo da se ovaj članak shvati i kao prijedlog za uvođenje tog prelaza u našu nastavu, tim više što je to lijep primjer premošćivanja ponora koji dijeli srednjoškolsku nastavu od visokoškolske.

Literatura

[Š] Šikić, Z., *Peacock's principle and Euler's equation*, Proceedings of the conference „Algebra and logic", 165–170 (1984).

[W] Whiteside, D. T., *Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century*, Archive for history of exact sciences, 1, 179–388 (1961).

Zvonimir Šikić

NATURAL LOGARITHMS

Bürgi and Napier discovered natural logarithms, but they did not discover the real continuous logarithmic function. At that time the very notion of real function did not exist.

Bürgi found the logarithmic canon, i.e. the algorithm for computation of logarithmically corresponding values of arithmetic and geometric progressions. He did not conceive these values of a continuous function, and that even helped him to find a very simple algorithm. Napier considered the logarithms as values of a concrete geometric continuous correspondence, but we had to wait for Sarasa to conceive the logarithmic correspondence as the correspondence between ordinates and areas of the hyperbola. He discovered these hyperbolic logarithms in Gregory's Opus geometricum, Analytical definition of logarithms, which is logically independent of geometry, arose from infinite expansions of logarithms in works of Brouncker, Mercator, Mengoli, Halley and others. All this was happening at the end of 16th century and during 17th century. In 18th century Euler and others dispensed with geometric bases of calculus and tried to create a pure analytic calculus. They tried to divorce the analytic notion of function from the geometric notion of curve, and they were able to do that because they already had an example of the notion which started as a discrete numerical correspondence, turned to a geometric correspondence and finally became an analytically defined notion: the natural logarithm.

We remark, at the end, that each student of calculus repeats this whole history. In high school he works with logarithms on Bürgi's level. In his first calculus course he works with the geometric model of hyperbolic logarithms. In the analysis course he works with the analytic (geometry-independent) definition of logarithms. The gap between high school logarithms and first calculus course logarithms is usually much wider than the one between calculus and analysis logarithms.

This history can teach us how to narrow this gap.

Slavik V. JABLAN

COLORED SYMMETRY

0. Ornamental art — the prehistory of colored symmetry

As an intuitive concept, antisymmetry is present from the very beginning of ornamental art, appearing with Neolithic "black"-"white" ceramics (Figure 1) [73, 74, 259, 260, 261]. In ornamental art the color change mentioned introduces a space component, a suggestion of relations "in front"-"behind", "up"-"down", "above"-"below", or even a time component ("day"-"night"). From the artistic point of view, it introduces the contrast between repeating congruent figures and specific visual equivalence of the "figure" and "bacground". In a symbolical sense it expresses the dynamic conflict, balance of opposites and duality.

Figure 1. Antisymmetry groups of ornaments in Neolithic art: (a) p2/p1, Hacilar, ≈ 5200 B.C., (b) p2/p1, Rahmani, ≈ 4000 B.C.; (c) pmg/pg, Hacilar, (d) p4m/p4g, Hajji Mohammed, ≈ 5000 B.C.

From Neolithic art originate examples of the most of antisymmetry friezes and ornaments, to be probably completely exhausted by the ancient and some lather civilizations and cultures (e.g. Moorish), realizing the 17 antisymmetry friezes and 46 antisymmetry ornaments.

Every antisymmetry ornament can be considered as a regular desymmetrization of some symmetrical (generating) ornamental motif with the symmetry group G, resulting in its subgroup H of index 2.

Regarded from the point of view of the general N-colored symmetry, antisymmetry is its simples case ($N = 2$). Beginning from polychromatic ceramics, during the history of colored symmetry ($N \geq 3$), only a few possibilities are empirically investigated by artists and artisans, mostly that with a restricted number of colors ($N = 3, 4$) [58] (Figure 2). In such a colored symmetry group (or colored desymmetrization) we can simply visually distinguish the generating symmetry group G, its color-preserving subgroup H_1 of index N and the symmetry subgroup H — the final result of this colored desymmetrization. If H_1 is a normal subgroup of G, then $H = H_1$.

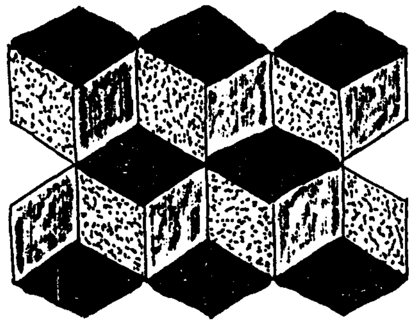


Figure 2. A three-colored Moorish ornament (Toledo, Spain), with the colored symmetry group **p6m/cmm/p2**.

Besides regular colorings with an even use of colors, in ornamental art also occur multicolored decorations with a proportional use of colors in a given ratio (e.g. $2:1:1$, $4:2:1:1$) (Figure 3). They are the result of the different values of colors used, or symbolic role they have in art.

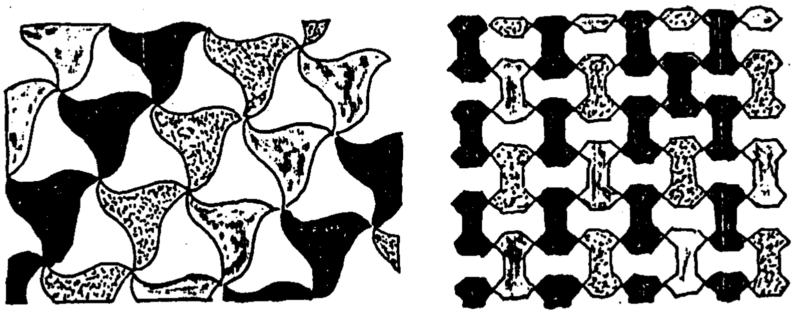


Figure 3. (a) A four-colored Moorish ornament (Alhambra, Granada) with the proportional use of colors in ratio $3:1:1:1$. If the white tiles are considered only as a "background", it is example of the three-colored symmetry group p3/p1; (b) a four-colored tiling (Alhambra, Granada) with the proportional use of colors in ratio $4:2:1:1$.

1. History of antisymmetry

For denoting symmetry group categories, the Bohm symbols $G_r \ldots$ are used [15]. Every category of symmetry groups of the space E^r is defined by the sequence $r \ldots$ of maximal invariant (sub)spaces inserted into one another in succession. The corresponding categories of simple ($l = 1$) and multiple ($l \geq 2$) antisymmetry groups are denoted by a superscript l.

As a scientific concept, the theory of antisymmetry is the achievement of the 20th century mathematics (or, more precisely, of the mathematical crystallography). It is the result of a practical need for the visual interpretation of 3-D symmetry groups (of bands G_{321} or layers G_{32}) in a 2-D plane [250, 262] (Figure 4). The idea of a more sophisticated dimensional transition (from $G_{30}{}^1$ to G_{430}; from $G_3{}^1$ to G_{43}) arises naturally [65, 66] and resulted in one of the first and most remarkable pioneeric results of H. Heesch — in the approximated number of G_{43} (less then 2000). Their correct number (1651 G_{43}) is obtained for the first time, more than 30 years later, by A. M. Zamorzaev in 1953 [274]. Hence, so-called Shubnikov groups $G_3{}^1$ are partly derived by H. Heesch in 1930 (lower singonies) [66], completely by A. M. Zamorzaev in 1953 [274], and somewhat later by N. V. Belov, N. N. Neronova, T. S. Smirnova in 1955 [10], but never by A. V. Shubnikov.

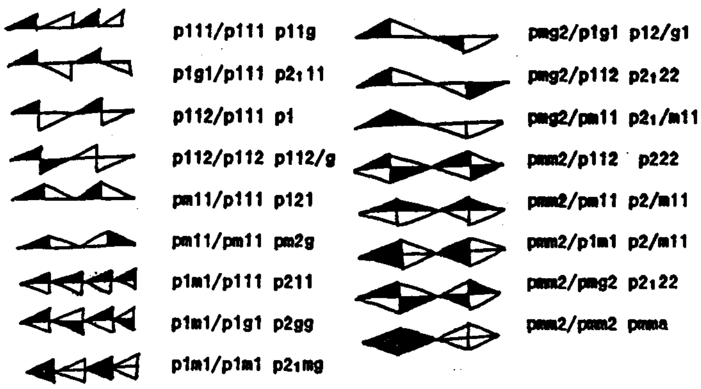


Figure 4. The seventeen junior antisymmetry groups of friezes $G_{21}{}^1$ and the corresponding symmetry groups of bands G_{321}. The remaining 14 symmetry groups of bands correspond to the 7 generating and 7 senior antisymmetry groups of friezes.

The mathematical approach to antisymetry have made possible the exact treatment of 7000 years old ornamental heritage covering almost complete history of civilization, its classification and analysis [74, 259, 261], and the future non-empirical use of antisymmetry in ornamental art and design [26, 139, 267] (Figure 5,6).

Let a symmetry group G and the permutation group $P = C_2$ generated by the antiidentity transformation $e_1 = (0\,1)$ satisfying the relation $e_1^2 = E$ and commuting with all elements of the group G, be given. If $S \in G$, $S^1 = e_1 S = S e_1$ is the antisymmetry transformation derived from S. Every group G^1 derived from G, which contains at least one antisymmetry transformation is called the antisymmetry group, and the group G is called its generating group. All antisymmetry groups derived from G, consisting of a family, can be divided into the two types: senior groups of the form $G \times C_2$ and junior groups $G^1 \cong G$. Every junior antisymmetry group G^1 is uniquely defined by its group/subgroup symbol G/H, where H is the symmetry subgroup of G^1, $G/H \cong C_2$ and $[G : H] = 2$.

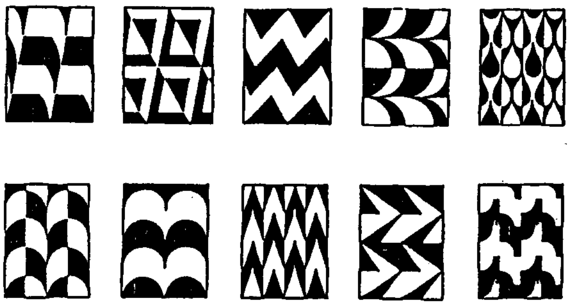


Figure 5. "Black"-"white" patterns of H. J. Woods with the antisymmetry groups p1/p1, p2/p1, p2/p2, pm/p1m, pm/pg, pm/pm, pm/cm, pg/p1, pg/pg [26, 267].

Figure 6. Antisymmetry ornament of M. C. Escher with the antisymmetry group p2/p2 [176].

The antiidentity transformation e_1 gives different possibilities for its interpretation. The first and most natural is a color-change "black"-"white", introducing a space component mentioned before: visual representation of 3-D symmetry groups in a 2-D plane. Its mathematical generalization, the established relation between the antisymmetry groups $G_r \ldots$ [1] and symmetry groups $G_{(r+1)r\ldots}$ of the $(r+1)$-dimensional space, introduced by H. Heesch for the derivation of 4-D symmetry groups was the origin of the theory of antisymmetry. In that case e_1 is identified with a hyperplane reflection in invariant 3-D hyperplane:

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

In a general sense, the antiidentity transformation e_1 can be interpreted as a change of any bivalent geometrical or non-geometrical (e.g. physical) property commuting

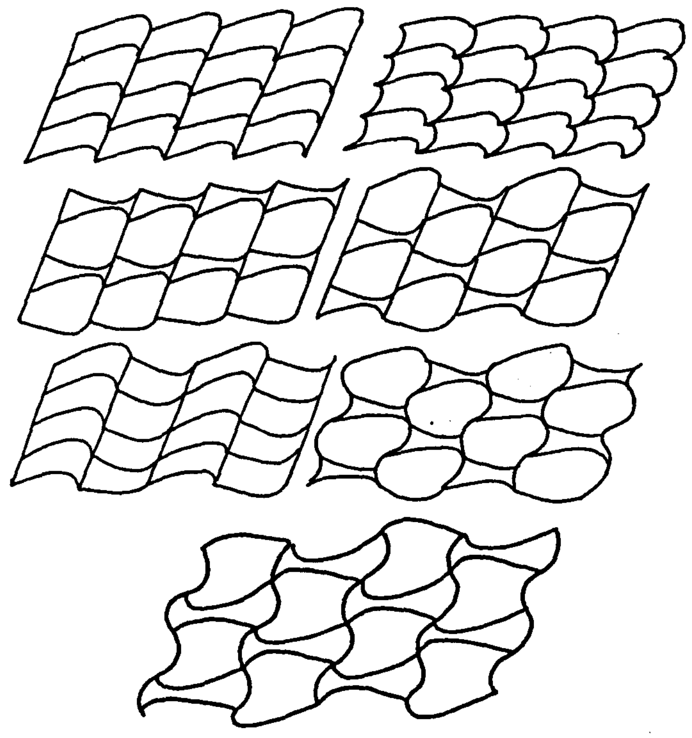


Figure 7. Curvilinear tilings derived using antisymmetry [83].

with symmetries of the generating symmetry group G (e.g. (+ −), (S N), (yes no), (convex concave), ...) [34, 35, 83] (Figure 7).

The natural extension of the (simple) antisymmetry is the multiple antisymmetry, introduced by A. M. Zamorzaev in 1957 [304]. Besides a generating symmetry group G there is the permutation group $P = C_2^l$ generated by l antiidentity transformations e_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ satisfying the relations $e_i^2 = E$, commuting between themselves and with all elements of G. In a similar way, we have the senior (S^k-), middle ($S^k M^m$-) and junior (M^m-type) multiple antisymmetry groups, where only the last ones, isomorphic to G, are non-trivial in the sense of derivation. If the groups C_2 (the components of P) are considered as the same group, we have compound groups introduced by A. L. Mackay in 1957 [140]. For denoting both, the extended group/subgroup symbols can be used. .

Multiple antisymmetry groups and compound groups well illustrate the different equality criterions for antisymmetry (or colored symmetry) groups. For example, if $e_1 = (0\ 1)$ and $e_2 =$ ([illegible]), for the friezes (Figure 8) we may have three different equality criterions: (1) "strong" criterion in the sense of multiple antisymmetry, this means $G/(H_1, H_2)/H \neq G/(H_2, H_1)/H$ $(H_1 \neq H_2)$; (2) "middle" criterion in the sense of Mackay compound groups, this means $G/(H_1, H_2)/H = G/(H_2, H_1)/H$; (3) "weak" criterion G/H. According to (1) all friezes (Figure 8) are mutually different; in line with (2) friezes (a), (b) are equal, but different from (c); and according to (3) all of them are equal. This is more evident for a larger value of l. For example, according to (1), (2) or (3), there are, respectively, 10080 $G_{321}{}^4$, 444 $G_{321}{}^4$, or the only one $G_{321}{}^4$.

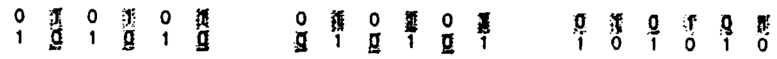


Figure 8. (a) (1) pmm2/(p1m1,p112)/p111 $\neq$ pmm2/(p112,p1m1)/p111,
(2) pmm2/(p112,p1m1)/p111 = pmm2/(p112,p1m1)/p111, (3) pmm2/p111;
(b) (1) pmm2/(p112,p1m1)/p111 $\neq$ pmm2/(p1m1,p112)/p111,
(2) pmm2/(p112,p1m1)/p111 = pmm2/(p1m1,p112)/p111, (3) pmm2/p111;
(c) (1) pmm2/(p112,pm11)/p111 $\neq$ pmm2/(pm11,p112)/p111,
(2) pmm2/(p112,pm11)/p111 = pmm2/(pm11,p112)/p111, (3) pmm2/p111.

If P_l denotes the number of all l-multiple antisymmetry groups of a certain category, and N_m $(1 \leq m \leq l)$ the number of junior multiple antisymmetry groups of the M^m-type, belonging to the same category, the following ralationship holds [279]:

$$P_l = \sum_{m=0}^{l} \sum_{k=0}^{l-m} \{C(l,k,m)\} N_m,$$

where

$$C(l,k,m) = \frac{(2^l - 1)(2^{l-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (2^{l-k-m+1} - 1)}{(2^k - 1)(2^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (2-1)(2^m - 1)(2^{m-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (2-1)}.$$

During the 30 years, mostly by the contribution of Kishinev school, the theory of multiple antisymmetry has become an integral part of mathematical crystallography and acquired the status of a complete theory extended to all categories of isometric symmetry groups of the space E^r $(r \leq 3)$, different kinds of non-isometric symmetry groups (of similarity symmetry, conformal symmetry, ...) and P-symmetry groups ((p)-, (p')-, $(p2)$-symmetry groups) [287, 290, 293, 301] (see Chapter 3). The most important results from that period are: the derivation of 1191 junior $G_3{}^1$, 9511 $G_3{}^2$, $G_2{}^l$ and $G_{32}{}^l$. However, some problems (e.g. the derivation of $G_3{}^l$ at $l \geq 3$), because of a large number of the multiple antisymmetry groups exceeding even possibilities of computers [1], remain unsolved.

This and many other problems are solved using antisymmetric characteristic (AC) of a discrete symmetry group G introduced by S. V. Jablan in 1984 [75]. Let a (generating) discrete symmetry group G be given by its presentation [25]. The groups of simple and multiple antisymmetry can be derived from it by applying the general method of Shubnikov-Zamorzaev, i.e. by replacing the generators of the group G with antigenerators of one or several independent kinds of antisymmetry.

Definition 1. Let all products of generators of a group G, within which every generator participates once at the most, be formed and then subsets of transformations equivalent with regard to symmetry, be separated. The resulting system is called the antisymmetric characteristic of the group G ($AC(G)$).

A majority of AC permit the reduction, i.e. a transformation into the simplest from. The method for obtaining AC and reduced AC can be illustrated by example of the symmetry group of ornaments **pm**, given by the set of generators $\{a,b\}(m)$, with the $AC(\mathbf{pm}) = \{m, ma\}\{b\}\{mb, mab\}\{a\}\{ab\}$ and reduced $AC(\mathbf{pm}) = \{m, ma\}\{b\}$.

Theorem 1. Two groups of simple or multiple antisymmetry G' and G'' of the M^m-type, for fixed m, with common generating group G, are equal iff they possess equal AC.

Every $AC(G)$ completely defines the series $N_m(G)$, where by $N_m(G)$ is denoted the number of groups of the M^m-type derived from G, at fixed m ($1 \leq m \leq l$). For example, $N_1(\mathbf{pm}) = 5$, $N_2(\mathbf{pm}) = 24$, $N_3(\mathbf{pm}) = 84$.

Theorem 2. Symmetry groups possessing isomorphic AC generate the same number of simple and multiple antisymmetry groups of the M^m-type for every fixed m ($1 \leq m \leq l$), which correspond to each other with regard to structure.

Corollary. The derivation of all simple and multiple antisymmetry groups can be completely reduced to the construction of all non-isomorphic AC and derivation of simple and multiple antisymmetry groups of the M^m-type from these AC.

Using the AC-method and the notion of the AC-type, the 109139 $G_3{}^3$, 1640955 $G_3{}^4$, 28331520 $G_3{}^5$ and 419973120 $G_3{}^6$ multiple antisymmetry groups of the M^m-type, are derived and given in a partial catalogue [80, 312].

The AC-method can be also used for a derivation of (P,l)-symmetry groups from P-symmetry groups (see Chapter 2). Let G^P be a junior group of P-symmetry derived from G [290, 293]. By replacing in Definition 1 the term "transformations equivalent with regard to symmetry" with a more general notion "transformations equivalent with regard to P-symmetry", the transition from G to G^P induces the transition from $AC(G)$ to $AC(G^P)$, making possible the derivation of groups of (P,l)-symmetry of the M^m-type using the AC-method.

The derivation of (P,l)-symmetry groups of the M^m-type from P-symmetry groups by use of the AC-method can be reduced to a series of successive transitions

$$G \longrightarrow G^P \longrightarrow G^{P,1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow G^{P,l}$$

and induced transitions

$$AC(G) \longrightarrow AC(G^P) \longrightarrow AC(G^{P,1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow AC(G^{P,l}).$$

Every induced AC consists of the same number of generators. Since every transition $G^{P,k-1} \to G^{P,k}$ ($1 \leq k \leq l$), is a derivation of simple antisymmetry groups using $AC(G^{P,k-1})$, for the derivation of all multiple antisymmetry groups we need only the catalogue of all non-isomorphic AC formed by l generators and simple antisymmetry groups derived from these AC [84, 87, 313].

Certain new antisymmetric characteristics with a larger number of generators and the corresponding numbers N_m can be obtained using a direct product of antisymmetric characteristics [87, 313].

Definition 2. Let AC' and AC'' with disjoint sets of generators be given. The new $AC = AC'AC''$ obtained by adding in writing AC'' to AC' is called the direct product of AC' and AC''.

Theorem 3. Let N_m, N'_m, N''_m be, respectively, the series of numbers defined by AC, AC', AC''. Then holds the relationship:

$$N_m = \sum_{\substack{k+l \geq m \\ m \geq k, l \geq 0}} 2^{(m-k)(m-l)} C(m, m-k, m-l) N'_k N''_m.$$

Some of the most important results, obtained jointly with A. F. Palistrant, are the number of non-enantiomorphic $G_3{}^l$, $G_{31}{}^l$ [190], and the derivation of the junior M^m-type groups $G_3{}^{l,p}$ from the groups $G_3{}^p$ ($p = 3, 4, 6$): 4840(4134) $G_3{}^{1,p}$, 40996(29731) $G_3{}^{2,p}$, 453881(260114) $G_3{}^{3,p}$, 5706960(2048760) $G_3{}^{4,p}$ and 59996160(1249920) $G_3{}^{5,p}$, where the numbers of complete (p, l)-symmetry are given in parentheses.

Finally, the use of such a generalized AC makes possible the reduction of the theory of multiple antisymmetry to the theory of simple antisymmetry. The basis of this reduction is the transition $G \to G^p$ and induced transition $AC(G) \to AC(G^p)$, where $AC(G)$ and $AC(G^p)$ consist of the same number of generators. This means that every step in the derivation of multiple antisymmetry groups: $G \to G^1 \to G^2 \to \ldots \to G^{k-1} \to G^k \to \ldots G^l$, i.e. the transition $G^{k-1} \to G^k$, $(1 \leq k \leq l)$, is a derivation of simple antisymmetry groups using $AC(G^{k-1})$, followed by the induced transition $AC(G^{k-1}) \to AC(G^k)$, $(1 \leq k \leq l-1)$. All AC of the induced series consist of the same number of generators.

The said can be illustrated by example of the derivation of multiple antisymmetry groups from the symmetry group of ornaments **pm**: $\{a, b\}(m)$ with the AC: $\{m, mb\}\{b\} \cong \{A, B\}\{C\}$. At $m = 1$, the five junior simple antisymmetry groups, are obtained:

$$\begin{array}{ll} \{A, B\}\{C\} & \{E, E\}\{e_1\} \longrightarrow \{A, B\}\{C\} \\ & \{e_1, e_1\}\{E\} \longrightarrow \{A, B\}\{C\} \\ & \{e_1, e_1\}\{e_1\} \longrightarrow \{A, B\}\{C\} \\ & \{E, e_1\}\{E\} \longrightarrow \{A\}\{B\}\{C\} \\ & \{E, e_1\}\{e_1\} \longrightarrow \{A\}\{B\}\{C\} \end{array}$$

In the first three cases AC remains unchanged, but in two other cases AC is transformed into the new AC: $\{A\}\{B\}\{C\}$. To continue the derivation of multiple antisymmetry groups of the M^m-type from the symmetry group **pm**, only the derivation of simple antisymmetry groups from the AC: $\{A\}\{B\}\{C\}$ is indispensable. This AC is trivial and gives the seven groups of simple antisymmetry.

If the AC: $\{A, B\}\{C\}$ is denoted by 3.2 and AC: $\{A\}\{B\}\{C\}$ by 3.1, then the result obtained can be denoted in a symbolic form by $3.2 \rightarrow 2(3.1)+3(3.2)$. Knowing that $N_1(\mathbf{pm}) = N_1(3.2) = 5$, $N_1(3.1) = 7$, we can simply conclude that $N_2(\mathbf{pm}) = 24$ and $N_3(\mathbf{pm}) = 84$ [84, 87, 313].

So, after the 30 years we are coming back to the roots of the theory of multiple antisymmetry — to the simple antisymmetry, but knowing today some more about the first.

Besides its geometrical use analyzed in detail by A. M. Zamorzaev, A. F. Palistrant [301] or applications in physics [308], some possible applications of multiple antisymmetry (e.g. in art) still await development (Figure 9).

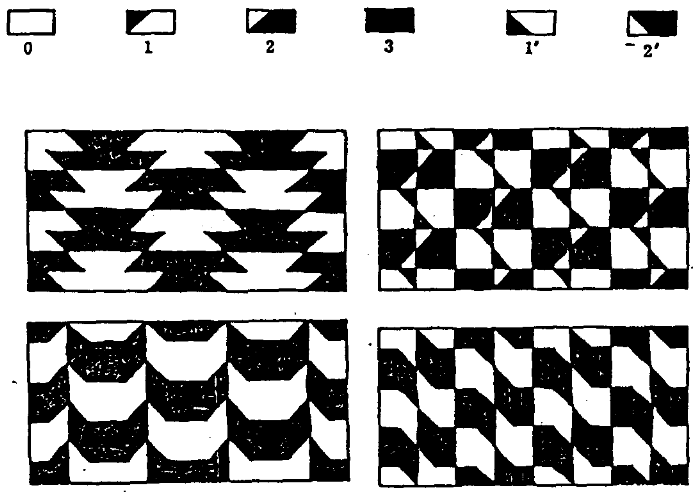


Figure 9. "Black"-"white" tilings derived from six protiles using $G_2{}^2$.

A historical survey of the theory of simple and multiple antisymmetry and their applications is given in Table 1. By an asterisk are denoted certain more general results, referring to the theory of colored symmetry as

Table 1.

1927 A. Speiser [250]
the idea of black-white plane diagrams for interpreting G_{321}.

1929 L. Weber [262]
Weber black-white diagrams of bands G_{321}.

1929–30 H. Heesch [65, 66]
antisymmetry — the possibility for a dimensional transition: $G_2{}^1$ (G_{32}), $G_{30}{}^1$ (G_{430}), $G_3{}^1$ (lower singonies), the approximated number of $G_3{}^1$ (G_{43}) < 2000.

1936 H. J. Woods [26, 267]
46 G_2^1.

1945–51 A. V. Shubnikov [234, 235, 236, 237]
physical interpretation of antisymmetry; 31 G_{320}^1, continuous G_{30}^1.

1952 W. Cochran [19, 20]
G_2^1 (G_{32}).

1953 A. M. Zamorzaev [274]
1191 G_3^1.

1955 N. V. Belov, N. N. Neronova, T. S. Smirnova [10]
1191 G_3^1.

1956 N. V. Belov [5]
117 G_{21}^1.

1957 H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser [25]*
monograph "Generators and Relations for Discrete Groups".
W. O. J. Moser [147]*
presentations of plane symmetry groups, their group-subgroup relations and the minimal indexes.
A. L. Mackay [140]
compound groups.
A. M. Zamorzaev, E. I. Sokolov [304]
multiple antisymmetry; G_{30}^l.

1958–59 A. V. Shubnikov [239, 240]
antisymmetry of continuous groups and textures.

1959 A. Niggli [153]
the group-theorethical approach to antisymmetry.
T. Roman [204]
G_{321}^1 (G_{4321}).
V. L. Idenbom [71]
antisymmetry and 1-dimensional representations of symmetry groups.

1960 W. Nowacki [158]
G_{20}^1, G_{320}^1.
A. M. Zamorzaev, A. F. Palistrant [296]
G_2^l.

1961 W. T. Holser [69]; N. N. Neronova, N. V. Belov [151]; A. V. Shubnikov [241]
classification of antisymmetry groups.
A. M. Zamorzaev, A. F. Palistrant [297]
mosaics of G_2^2.

1962 N. V. Belov, T. S. Kuntsevich, N. N. Neronova [9]; A. Pabst [160]; A. V. Shubnikov [243]

$G_{321}{}^{1}$.
E. I. Galyarskij, A. M. Zamorzaev, A. F. Palistrant [55]
$G_{3}{}^{2}$.
T. Roman [205]
friezes of $(n+1)$-dimensional space.
A. V. Shubnikov [242]
$G_{3210}{}^{1}$.
L. A. Shuvalov [249]
continuous $G_{30}{}^{2}$.

1963 E. I. Galyarskij, A. M. Zamorzaev [53]
simple and multiple antisymmetry of similarity.
A. F. Palistrant [163], A. F. Palistrant, A. M. Zamorzaev [194]
$G_{32}{}^{l}$.
A. M. Zamorzaev [279]
relationship between the number of all (P_l) and junior (N_m) multiple antisymmetry groups.

1964 A. F. Palistrant, A. M. Zamorzaev [195]
$G_{1}{}^{l}$, $G_{21}{}^{l}$, $G_{321}{}^{l}$.
A. M. Zamorzaev, A. F. Palistrant [298]
$G_{3}{}^{2}$, $G_{3}{}^{6}$.

1965 C. H. Macgillavry [139]*
monograph "Symmetry Aspects of M. C. Escher's Periodic Drawings".
E. Ascher, A. Janner [2]
subgroups of $G_{30}{}^{1}$.
E. I. Galyarskij, A. M. Zamorzaev [54]
$G_{31}{}^{l}$.
A. F. Palistrant [164]
$G_{20}{}^{l}$.

1966 J. Bohm. K. Dornberger-Schiff [15]*
nomenclature of crystallographic groups.
V. A. Koptsik [102]
monograph "Shubnikovskie gruppy".

1967 E. I. Galyarskij [44]
conical simple and multiple antisymmetry groups.
V. A. Koptsik [103]*
history of symmetry generalizations.
N. N. Neronova [150]*
classification of symmetry groups.
A. F. Palistrant [155]
space and plane multiple antisymmetry groups.

1970 P. L. Dubov [34, 35]*
curvilinear symmetry.

E. I. Galyarskij [47]*
generalized similarity symmetry.
A. M. Zamorzaev [284]*
history of generalized symmetry.

1971 A. M. Zamorzaev [285]
general theory of simple and multiple antisymmetry.

1973 S. V. Artem'ev [1]
corrections for some classes of G_3^2.
P. A. Zabolotnyj [268]
simple and multiple antihomology.

1974 A. M. Zamorzaev, A. F. Palistrant [299]
relationship between multiple antisymmetry and Mackay compound symmetry groups.

1976 A. M. Zamorzaev [287]
monograph "Teoriya prostoj i kratnoj antisymmetrii".

1977 D. K. Washburn [259]*
monograph "A Symmetry Analysis of Upper Gila Area Ceramic Design".
K. J. Köhler [117]*
subgroups of crystallographic groups.

1978 E. H. Lockwood, R. H. Macmillan [126]
monograph "Geometric Symmetry"

1979 B. K. Vajnshtejn [256]*
"Sovremennaya kristallografiya".

1980 S. V. Jablan [73]
antisymmetry in ornamental art.
A. M. Zamorzaev, A. F. Palistrant [301]
geometrical application of antisymmetry.

1984 S. V. Jablan [74]*
monograph "Teorija simetrije i ornament".
S. V. Jablan [75]
method of antisymmetric characteristics.

1985 S. V. Jablan [76]
conformal simple and multiple antisymmetry groups.

1986 S. V. Jablan (S. V. Yablan) [77, 78, 79, 310, 311]
simple and multiple antisymmetry of similarity, G_2^l, G_{32}^l, antisymmetry enantiomorphism, G_3^l.
[43]*
monograph "M. C. Escher: Art and Science".
L. K. Magalyas [142]
some antisymmetry groups of Lobachevsky space.

[26, 144, 220, 260]*
"Symmetry: Unifying Human Understanding".

1987 G. Grünbaum, G. C. Shephard [60]*
monograph "Tilings and Patterns".
S. V. Jablan [80, 312]
partial cataloguation of $G_3{}^l$, $G_{321}{}^l$.

1988 J. J. Burckhardt [16]*
monograph "Die Symmetrie der Kristalle".
S. V. Jablan [82]
antisymmetry and group presentations.
S. V. Yablan (S. V. Jablan) [313]
algebra of antisymmetric characteristics, reduction of multiple to simple antisymmetry.
D. K. Washburn, D. W. Crowe [216]*
monograph "Symmetries of Culture".

1989 [38, 40, 84, 202, 213]*
symposia "Symmetry of Structure", Budapest.

xxxx S. V. Jablan [89]
$G_{40}{}^l$ without crystallographic restriction.
A. F. Palistrant, S. V. Jablan [190]
enantiomorphism of $G_3{}^l$, $G_{31}{}^l$.

2. History of colored symmetry

The idea of colored (polyvalent) symmetry is a natural extension of antisymmetry (bivalent symmetry). Since its first results obtained by N. V. Belov, E. N. Belova, T. N. Tarhova in 1956–1957 [4, 6, 7, 12, 13] — the plane colored groups G_2^p ($p = 3, 4, 6$) with a cyclic permutation of colors — are derived as the generalized projections of space groups G_3 with 3_1-, 3_2-, 4_1-, 4_3-, 6_1-, 6_2-, 6_4-, 6_5-screw axes, the crystallographic restriction ($p = 3, 4, 6$) on the number of colors is a natural consequence. Unfortunately, in spite of the fact that the same authors discerned its mathematical unnecesity discussing non-crystallographic colored symmetries [12], this restriction remains to be a constant of the Soviet theory of colored symmetry. On other hand, this restriction has made possible its orientation to the more concrete problems to be solved.

In the next ten years, besides the already existing simple and multiple antisymmetry and Belov (p)-symmetry mentioned, some new colored symmetries are introduced: simple and multiple cryptosymmetry by A. Niggli, H. Wondratschek, O. Wittke [154, 156, 264], (p, 1)-colored antisymmetry by N. N. Neronova, N. V. Belov [152], Pawley (p')-symmetry [201], needing for an exact theoretical background and classification. It is announced by B. L. Van der Waerden, J. J. Burckhardt in 1961 [254], to be developed in the general theory of P-symmetry by A. M. Zamorzaev in 1967 [280, 281, 290, 293].

The concept of P-symmetry (permutation symmetry) introduced by A. M. Zamorzaev, is defined as follows. If P is a subgroup of the symmetric permutation group of p indices, and G is a discrete symmetry group, every transformation $C = cS = Sc$, $c \in P$, $S \in G$ is a P-symmetry transformation. Every group G^P derived from G by such a substitution of symmetries by P-symmetries is a P-symmetry group. If the substitutions included in G^P exhaust the group P, G^P is a complete P-symmetry group. Every complete P-symmetry group G^P can be derived from its generating group G by means of searching in G and P for normal subgroups H and Q for which the isomorphism $G/H \cong P/Q$ holds, by paired multiplication of the cosets corresponding in this isomorphism and by the unification of the products obtained. The groups of complete P-symmetry fall into senior ($G = H$ and $G^P = G \times P$), junior ($G/H \cong P$ and $G^P \cong G$) and middle groups for $Q = P$, $Q = I$ and $I \subset Q \subset P$, respectively.

Certainly, all the colored symmetries mentioned before are included in the general theory of P-symmetry. If $P = C_2{}^l$ we have the simple ($l = 1$) and multiple ($l \geq 2$) antisymmetry groups. In the case of the Belov (p)-symmetry (or (C_p)-symmetry), the group $P = C_p$ is generated by the permutation $c_1 = (1\,2 \ldots p)$ satisfying the relations:

$$c_1{}^p = I \quad c_1 S = S c_1, \qquad S \in G.$$

In the case of the Pawley (p')-symmetry (or ($D_{p(2p)}$)-symmetry), the group $P = D_{p(2p)}$ is the regular dihedral permutation group generated by the permutations c_1 and $e_1 = (1\,1')$ satisfying the relations:

$$c_1{}^p = e_1{}^2 = (c_1 e_1)^2 = I \quad c_1 S = S c_1 \quad e_1 S = S e_1, \qquad S \in G.$$

In the case of the ($p2$)-symmetry (or (D_p)-symmetry), the group $P = D_p$ is the irregular dihedral permutation group generated by the permutations c_1 and $e_1 = (1\,2)$ satisfying the relations:

$$c_1{}^p = e_1{}^2 = (c_1 e_1)^2 = I \quad c_1 S = S c_1 \quad e_1 S = S e_1, \qquad S \in G,$$

etc.

There may be some different criterions for the equality of junior P-symmetry groups: "strong", "middle" or "weak". The most rafined "strong" criterion is the following: let the color-permutation group P be decomposed in the direct product of different irreducible groups $P = P_1^{a_1} \ldots P_n^{a_n}$, where $H_1, \ldots, H_a$ ($a = a_1 + \cdots + a_n$) are the subgroups of G such that $G/H_1 \cong P_1, \ldots, G/H_{a_1} \cong P_1, \ldots, G/H_a \cong P_n$, and H is their section ($G/H \cong P$). In that case every P-symmetry group can be uniquely defined as $G/(H_1, \ldots, H_a)/H$. If the order of subroups which result in the same factor group is not considered, or if we consider only the reduced symbols G/H, the "middle" or "weak" (sub)criterion can be obtained.

In the case of irregular permutation groups instead group/subgroup symbols G/H, the extended symbols $G/H_1/H$ will be used, where H_1 is the stationary subgroup keeping invariant one index (color-preserving subgroup), and H is the symmetry subgroup of G^P. Bohm symbols with additional P-superscripts will be used to denote the corresponding categories of isometric P-symmetry groups.

The indices ascribed to the points of a figure with the P-symmetry group have an extrageometric sense with respect to the space in which the figure is considered. In additional dimensions such index permutations can be geometrically interpreted, making possible the investigation of multi-dimensional symmetry groups by means of P-symmetry groups. This is reflected in the classification of P-symmetries [182, 293, 302], which goes from the abstract-group, through the concrete-group, to the geometrical classification in which to every symmetry group G_{r0} corresponds one P-symmetry. Such a connection between P-symmetry ($p = 3,4,6$) and multidimensional crystallography is abundantly used by A. F. Palistrant, A. M. Zamorzaev [174, 183, 187, 293, 300], for the derivation of multidimensional subperiodic crystallographic groups.

During the twenty years P-symmetry ($p = 3,4,6$) is extended to all categories of two- and three-dimensional isometric crystallograpahic groups (e.g. $G_{r\ldots}{}^{p,l}$, $r = 2,3$; $G_{r\ldots}{}^{p',l}$, $G_{r\ldots}{}^{p2,l}$, $r = 2$), similarity symmetry and conformal symmetry groups [290, 293].

Further generalizations of the theory of colored symmetry, W- and Q-symmetry, are introduced by A. V. Koptsik, I. N. Kotsev, Z. Kozukeev in 1974 [109, 111], and discussed by A. P. Lungu [127, 130, 132, 133, 293]. Dealing with the most general concept of colored symmetry: all possible colorings of a symmetrical figure, W-symmetry may be used for analyzing some structures (e.g. defect crystals, or colored ornamental motifs with the uneven use of colors) exceeding the domain of P-symmetry (Figure 10).

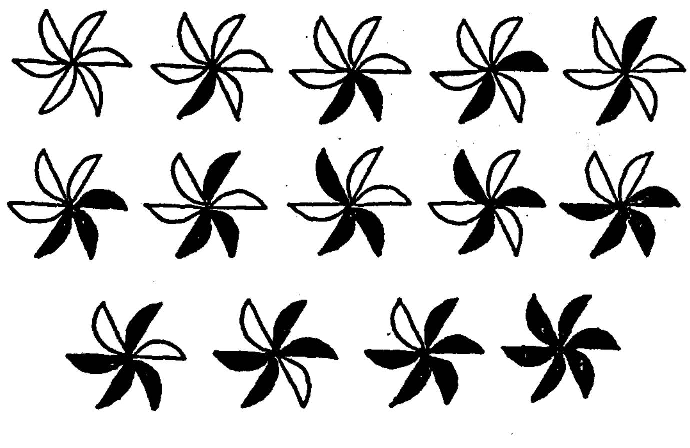


Figure 10. W-antisymmetry groups derived from the symmetry group C_6.

After B. L. Van der Waerden, J. J. Burckhardt [254], the first results of the Western school of colored symmetry, monographs published by C. H. Macgillavry in 1965 [139] and by A. L. Leob in 1971 [125], in a certain measure are influenced by "Colored Symmetry" of A. V. Shubnikov, N. V. Belov et al. [246].

Representative works by S. O. Macdonald, P. O. Street on N-colored friezes G_{21} and ornaments G_2 [137, 138], J. D. Jarratt, R. L. E. Schwarzenberger on N-colored ornaments G_2 ($N \leq 15$) [92], D. Harker on 3-colored space groups G_3 [64] (i.e. $G_3{}^3$ and $G_3{}^{32}$ from [183, 288]) and monograph by T. W. Wieting on N-colored ornaments ($N \leq 60$) [263] point out their common theorethical background resulting in the characterization of colored symmetry groups by the (restricted) number of colors N, using the "weak" criterion and without discussing the structure of quotient-groups G/H. By taking as a basis of the classification the number of colors N, some very distinct colored symmetry groups are included in the same class, and certain similar groups in different classes. For example, in the class of four-colored groups of ornaments are included P-symmetry groups with $P \cong C_4$, $C_2{}^2$, D_4, A_4. On other hand, each N-colored symmetry group **p1/p1** $\cong C_N$ belongs to the different class (Figure 11).

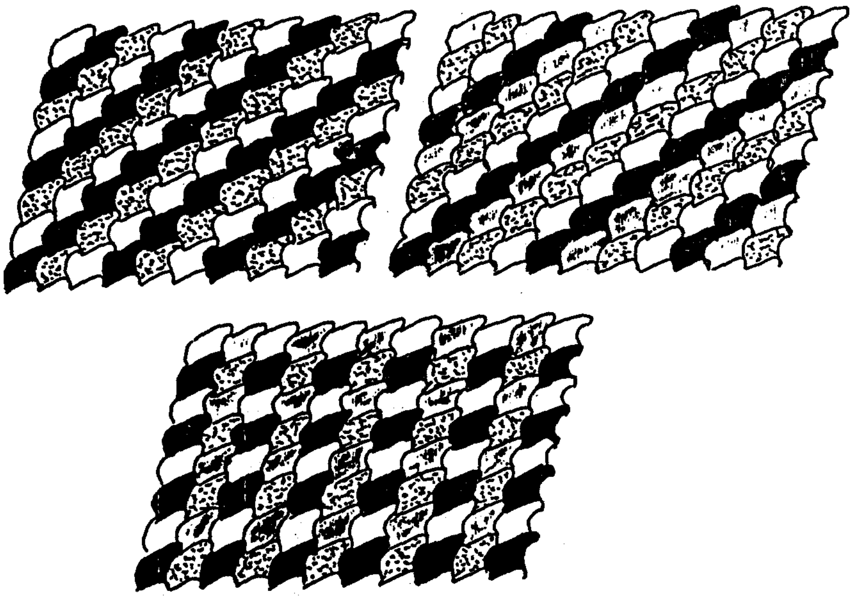


Figure 11. Colored symmetry ornaments with the symmetry group (a) p1/p1 $\cong C_3$; (b) p1/p1 $\cong C_4$; (c) p1/p1 $\cong C_2{}^2$. In the classification according to the number of colors N, colored symmetry groups (a), (b) belong to the different classes, and (b), (c) to the same class.

The first investigation of group/subgroup relationships between the symmetry groups of ornaments G_2, realized by W. O. J. Moser in 1957 [147] resulted in the table of minimal indexes of the subgroups in groups [25], needing for some small corrections ([cm:cm] = 3, [pmg:pmg] = 2, [cmm:cmm] = 3). Analogous results for the symmetry groups of friezes G_{21} are obtained by S. V. Jablan [74] and H. S. M. Coxeter [22], and generalized by H. S. M. Coxeter [24]. The further analysis of group-subgroup relations proceeded by K. J. Köhler [117, 118, 119] and M. Senechal [225, 226] have opened some promising perspectives for a future development of colored symmetry theory, by discovering its connections with the theory of numbers. Using the "weak" criterion, N-colored symmetry groups of ornaments G_2 are enumerated for ceratin classes of N (e.g. if N is a product of distinct primes) [225], giving a reason to believe in possible generalization. For example, if $N = 2^a p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, where $p_1, \ldots, p_n$ are distinct primes greater than 2, from the symmetry group of ornaments **p1** can be derived $([a/2]+1)([a_1/2]+1) \cdot \ldots \cdot ([a_n/2]+1)$, and from **p2** $(a+1)([a_1/2]+1) \cdot \ldots \cdot ([a_n/2]+1)$ colored symmetry groups. For $N = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, where $p_1, \ldots, p_n$ are distinct odd primes, from the symmetry groups **cm**, **pm**, **pg** can be derived $(a_1+1) \cdot \ldots \cdot (a_n+1)$ colored symmetry grups (in accordance with the "weak" criterion), etc.

The derivation of colored symmetry groups, completed only for the friezes G_{21} by J. D. Jarratt, R. L. E. Schwarzenberger [93], is supplemented with a group-theorethical comment by H. S. M. Coxeter [24], using the "weak" criterion and considering the stucture of quotient groups G/H for the classification of colored symmetry groups obtained.

The main characteristics of the Western theory of colored symmetry — the classification of colored symmetry groups according to the number of colors N, and by using exclusively the "weak" criterion, the connection established between the colored symmetry and the number theory, etc. — are pointed out in a concise history of colored symmetry by R. L. E. Schwarzenberger [223].

One of the recent results is the derivation of all colored symmetry groups of bands G_{321}, in the sense of P-symmetry without any restriction to the number of colors N, and their classification using the „strong" criterion [86].

Considering the isomorphism, the 31 symmetry group of bands can be distributed in six classes

1) {**p111**}, {**p1a1**, **p11a**, **p2₁11**} of structure C_∞;
2) {**pm11**, **p112**, **p121**, **pi**}, {**pma2**, **p12/a1**, **pm2a**, **p112/a**, **p2₁/m11**, **2₁11**} of structure D_∞;
3) {**p1m1**, **p11m**, **p211**}, {**p2₁ma**, **p2₁am**, **p2aa**} of structure $C_\infty \times D_1$;
4) {**pmm2**, **p12/m1**, **pm2m**, **p112/m**, **p2/m11**, **p222**}, {**pmma**, **pmam**, **22a**} of structure $D_\infty \times D_1$;
5) {**p2mm**} of structure $C_\infty \times D_1{}^2$;
6) {**pmmm**} of structure $D_\infty \times D_1{}^2$.

From their structure, we can conclude that the color-permutation group P, as a finite quotient group of the symmetry group in question, can be, respectively:

1) C_k;
2) D_k, $D_{k(2k)}$;
3) C_k, $C_k \times D_1$;
4) D_k, $D_{k(2k)}$, $D_k \times D_1$, $D_{k(2k)} \times D_1$, $D_{2k-1}(4k-2) \times D_1{}^2$;

5) C_k, $C_k \times D_1$, $C_k \times D_1{}^2$;

6) D_k, $D_{k(2k)}$, $D_k \times D_1$, $D_{k(2k)} \times D_1$, $D_k \times D_1{}^2$, $D_{k(2k)} \times D_1{}^2$, $D_{2k-1(4k-2)} \times D_1{}^3$.

Hence, the color-symmetry groups of bands admit the following P-symmetries: $P = C_k, C_k \times D_1, C_k \times D_1{}^2, D_k, D_{k(2k)}, D_k \times D_1, D_{k(2k)} \times D_1, D_k \times D_1{}^2, D_{k(2k)} \times D_1{}^2, D_{2k-1(4k-2)} \times D_1{}^3$.

Definition 3. Let the set of elements of a symmetry group G be divided in the equivalency classes consisting of the elements equivalent with regard to symmetry. The system obtained is called the color-symmetry characteristic $CC(G)$ of the group G.

Theorem 4. From two symmetry groups G and G' which possess isomorphic color-symmetry characteristics $CC(G) \cong CC(G')$ the same number of colored-symmetry (P-symmetry) groups can be derived. The groups obtained, are corresponding to each other in this CC-isomorphism.

With regard to the CC-isomorphism, the symmetry groups of the classes 1)–6) are distributed in the subclasses, denoted by { }. Consequently, the derivation of all the P-symmetry groups of bands is reduced to the derivation of the P-symmetry groups from only 10 symmetry groups — the representatives of the subclasses mentioned. By this means, all the colored symmetry groups of bands (according to the „strong“ criterion and its subcriterions) are derived, giving as a particular result the complete table of the group/subgroup relationships and the corresponding indexes.

A historical survey of the theory of colored symmetry and its applications is given in Table 2.

Table 2.

1956	N. V. Belov [4]; N. V. Belov, T. N. Tarhova [12, 13] colored symmetry: $G_2{}^p$ ($p = 3, 4, 6$). B. A. Tavger, V. M. Zajtsev [252] magnetic symmetry.
1957	N. V. Belov, E. N. Belova [6] colored mosaics of $G_2{}^p$ ($p = 3, 4, 6$).
1959	O. Wittke, J. Garrido [265] colored polyhedra. A. Niggli [153] $G_{30}{}^p$ ($p = 3, 4, 6$).
1960	V. L. Idenbom, N. V. Belov, N. N. Neronova [72] $G_{30}{}^p$ ($p = 3, 4, 6$). A. Niggli [154]; A. Niggli, H. Wondratschek [156] simple and multiple cryptosymmetry.
1961	N. N. Neronova, N. V. Belov [152] colored antisymmetry $G_2{}^{p,1}$.

G. S. Poli (G. S. Pawley) [201]
(p')-symmetry $G_2^{p'}$.
B. L. Van der Waerden, J. J. Burckhardt [254]
Farbgruppen.

1962 A. Biennenstock, P. P. Ewald [14]
complex symmetry.
O. Wittke [264]
cryptosymmetry of G_{30}.

1963 V. E. Najsh [148]
magnetic symmetry.
B. K. Vajnshtejn, B. B. Zvyagin [257]
complex symmetry.

1964 A. V. Shubnikov, N. V. Belov et al. [264]
monograph "Colored Symmetry".

1966 A. F. Palistrant [156]
G_2^p $(p = 3, 4, 6)$.

1967 E. I. Galyarskij [45]
similarity (p, l)-symmetry $(p = 3, 4, 6)$.
A. F. Palistrant [167]
G_{32}^p $(p = 3, 4, 6)$.
A. F. Palistrant [168]
(p, l)-symmetry groups with invariant plane.
A. M. Zamorzaev [280, 281]
P-symmetry (permutation symmetry).

1968 A. F. Palistrant [169]
$G_{20}^{p,l}$.
A. M. Zamorzaev [280]
$G_{30}^{p,l}$.

1969 E. I. Galyarskij [46]
$G_{31}^{p,l}$ $(p = 3, 4, 6)$.
A. M. Zamorzaev [282, 283]
G_3^p $(p = 3, 4, 6)$.

1971 N. V. Belov, T. S. Kuntsevich [8]
G_3^p $(p = 3, 4, 6)$.
A. L. Loeb [125]
monograph "Color and Symmetry".
A. F. Palistrant [171], A. F. Palistrant, A. M. Zamorzaev [196]
G_2^p, G_{32}^p $(p = 3, 4, 6)$.
T. Roman [211]
G_{31}^1 without crystallographic restriction.

1972 V. A. Koptsik, Z. Kozukeev [112]
$G_3{}^p$ $(p = 3, 4, 6)$.
A. F. Palistrant [172]
$G_{21}{}^{p,l}$, $G_{321}{}^{p,l}$ $(p = 3, 4, 6)$.
A. V. Shubnikov, V. A. Koptsik [247]
monograph "Simmetriya v nauke i iskusstve".

1974 E. I. Galyarskij [49]
(p, l)-symmetry of similarity $(p = 3, 4, 6)$.
A. V. Koptsik, I. N. Kotsev [109]
W-symmetry.
A. V. Koptsik, I. N. Kotsev, Z. Kozukeev [111]
Q-symmetry.
A. F. Palistrant [173]
$G_2{}^{p,l}$, $G_{32}{}^{p,l}$ $(p = 3, 4, 6)$.

1975 M. Senechal [224]
colored G_{30} groups.
A. M. Zamorzaev, A. F. Palistrant [300]
P-symmetry and multidimensional crystallography.

1976 A. M. Zamorzaev [288]
history of colored symmetry.

1977 B. Grünbaum, G. C. Shephard [59]
colored tilings and patterns.

1978 D. Harker [62, 63]
colored lattices.
R. Hubbard [70]
colored G_3 groups.
A. P. Lungu [127]
$\bar{P}(Q)$-symmetry.
S. O. Macdonald, A. P. Street [136]
four-colored G_2.
S. O. Macdonald, A. P. Street [137]
some classes of colored symmetry groups G_{21}.
A. F. Palistrant [174]
P-symmetry and multidimensional crystallography.
A. M. Zamorzaev, E. I. Galyarskij, A. F. Palistrant [290]
monograph "Tsvetnaya simmetriya, eyo obobscheniya i prilozeniya".

1979 A. F. Palistrant [175]
(p')- and (p', l)-symmetry groups with invariant plane $(p = 3, 4, 6)$.
T. Roman [212]
generalized symmetry on torus.
M. Senechal [225]
some classes of colored symmetry groups G_2 without crystallographic

restriction.
E. A. Zamorzaeva [305]
supercrystallographic P-symmetry.

1980 J. D. Jarrat, R. L. E. Schwarzenberger [92]
N-colored plane symmetry groups ($N < 16$).
Yu. S. Karpova [95, 96, 97], A. M. Zamorzaev, Yu. S. Karpova [292]
$G_3{}^{p2}$, cubical $G_3{}^P$.
A. P. Lungu [130]
$\bar{P}(Q)$-symmetry.
A. F. Palistrant [176, 177, 178, 179, 180]
$G_3{}^{p'}$, different categories of (p')- and ($p2$)-symmetry groups ($p = 3, 4, 6$).
R. L. E. Schwarzenberger [222]
monograph "N-dimensional Crystallography".
M. Senechal [226]
subgroups of space groups.

1981 D. Harker [64]
three-colored G_3.
J. D. Jarratt, R. L. E. Schwarzenberger [93]
N-colored symmetry groups of friezes.
A. F. Palistrant [182]; A. M. Zamorzaev, A. F. Palistrant [302]
geometrical classification of P-symmetries.
A. F. Palistrant [183]
general P-symmetry ($p = 3, 4, 6$).

1982 R. L. Roth [215]
color symmetry and group theory.
T. W. Wieting [263]
monograph "The Mathematical Theory of Chromatic Plane Ornaments".

1983 Yu. S. Chubarova [18]
$G_3{}^P$ ($p = 3, 4, 6$).
M. A. Jaswon, M. A. Rose [94]
monograph "Crystal Symmetry. Theory of Colour Crystallography".
A. P. Lungu [132]
W-symmetry.
R. L. Roth [216]
compound colored symmetry.
M. Senechal [227, 228]
colored polyhedra.

1984 R. L. Roth [217]
local colored symmetry.
R. L. E. Schwarzenberger [223]
complete history of colored symmetry.

1985 A. F. Palistrant [187]
P-symmetry and multidimensional crystallography.

1986 P. L. Dubov [36]
language of symmetry.
B. Grünbaum, Z. Grünbaum, G. C. Shephard [58]
colored symmetry in ornamental art.
A. P. Lungu [133]
colorings of symmetrical figures.
A. M. Zamorzaev, Yu. S. Karpova, A. P. Lungu, A. F. Palistrant [293]
monograph "P-symmetriya i eyo dal'nejshee razvitie".

1987 H. S. M. Coxeter [24]
introduction in colored symmetry.

1989 S. V. Jablan [86]
colored symmetry characteristic, colored symmetry of bands $G_{321}{}^{P}$.

xxxx P. Engel, M. Senechal [41]
equivalency criterions.
S. V. Jablan [91, 92]
corrections of $G_2{}^{p',l}$, $G_{32}{}^{p',l}$, $G_2{}^{p2,l}$, $G_{32}{}^{p2,l}$ $(p = 3, 4, 6)$.

(The complete bibliography will be published in the next issue.)

Славик В. ЈАБЛАН

КОЛОРНА СИМЕТРИЈА

Присутна као интуитивни концепт почев од неолита, антисиметрија („црно“-„бела“ или двовалентна симетрија) постаје објекат научних студија тридесетих година овог века. Спектар њених разноврсних примена у домену кристалографије, вишедимензионе геометрије, теорије група, итд., бива значајно проширен увођењем вишеструке антисиметрије и различитих видова колорне (поливалентне) симетрије (P-, Q-, W-симетрије ...). Садашњи тренутак у развоју колорне симетрије карактерише потреба за синтезом индивидуалних приступа развијаних претежно у оквиру тзв. „Источне“ и „Западне школе“. Поред табеларних хронолошких прегледа најзначајнијих резултата и веома богате листе референци (преко 300 наслова), у раду су истакнути актуелни проблеми теорије колорне симетрије и наговештени потенцијални путеви њеног будућег развоја.

Војислав ТРБУХОВИЋ

ГЕОМЕТРИЈА У ПРЕДНАУЧНОМ ПЕРИОДУ

1. На једној изложби (март–јуни) 1984. у Музеју савремене уметности (The Museum of Contemporary Art) у Los Angeles-у била је изложена слика Michael Heizer-а под насловом *Геометријске екстракције*, која са геометријом као појмом а поготово као науком, нема ама баш никакве везе[1]. У овом свом саопштењу нећу говорити о таквим примерима са неодговорно узетим називима за један озбиљан појам као што је геометрија, него ћу покушати да реконструишем основне и праве почетке математике, а нарочито геометрије са посебним освртом на археолошке налазе у нашој земљи и ближем или даљем суседству.

2. У целини узето човек, чим је то постао (Homo sapiens) морао се помирити са чињеницом да има по ПЕТ прстију на сваком од ЧЕТИРИ екстремитета и сигурно је у том пребројавању и први корен математичких радњи почео да напаја све веће дрво са бројним грањем велике крошње са много лишћа.

3. Припремајући овај рад у једној енциклопедији о развоју људске културе[2] нашао сам упоредну табелу по којој је урезан или нацртан знак само једну степеницу пре почетка говора. Као последица разматрања података са ове табеле дошла су, само по себи а на основу материјалних доказа које је открила моја матична наука — Археологија — и друга размишљања о почецима и путевима развоја математичких дисциплина у тим давним праисторијским временима. Још од палеолита је човек почео да бележи неке симболе по зидовима пећина, по неком камењу или по својим коштаним алаткам[illegible] у магијске тако и у практичне сврхе.

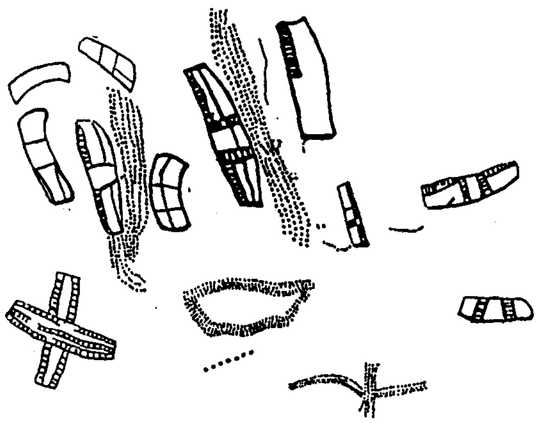
4. Још тада су носиоци палеолитских цивилизација које су нам оставиле бројне цртеже по пећинама, међу овима састављали и такве симболе од једне или више дужи које су могле бити последица горе поменутог пребројавања. Овакви симболи сами или у комбинацијама са деловима (или целим сижеом) криволинијских мотива изгледа да нам указују на почетке геометрије[3].

---

[1] На слици је да би била убедљивија у погледу наслова исписано и неколико бесловесних формула које су требале да задовоље „horror vacui" сликара и гледаоца.

[2] Werner Stein, *Der grosse Kulturfahrplan*, Herbig – München 1979, табела на стр. 14–15.

[3] Maria Pilar Casadó Lopez, *Los signos en el arte paleolitico de la Peninsula Iberica*, Zaragoza



Сл. 1. Први покушаји геометризације у палеолиту Шпаније — Castilo.

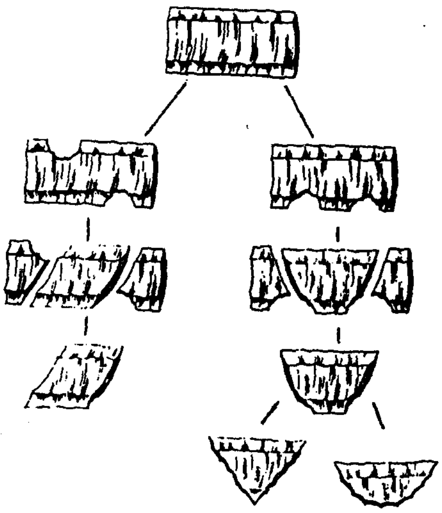
5. Даљом еволуцијом сапиентности у средњем палеолиту (а то је око 20-тог миленија старе ере!) у Украјини се на појединим налазиштима почињу на костима убијених животиња — нарочито мамута, јављати геометријски правилни цртежи, вероватно магијске намене.[4] То је оно исто време када на западу Европе имамо Алтамиру и Ласко. Ту нису само обични паралелни цик-цак мотиви већ и прве појаве меандроидних мотива што нам указује на дубљу старост овог у односу на спиралу.

6. Почетак мезолита (средњега каменог доба) био је обележен у Европи топљењем великих ледених маса које су у палеолиту покривале како венце Алпа, Татри и Карпата, тако и целу северну Европу. Промена климе која је изазвана тим топљењем доводи до изумирања неких врста животиња (мамут и др.) а уводи у људску исхрану већу количину намирница биљног порекла. За њихово прикупљање појавила се потреба за другим врстама алатки па је човек почео да израђује од камена и врло правилне геометријске облике који су лако могли да се уклапају у композитне форме узуалног карактера (сл. 2). Њиховим углављивањем у дубоки урез у грани или кости (рогу!) добијао се практичан срп код кога је било могуће замењивати поједине делове, а ни отпаци нису били неупотребљиви.

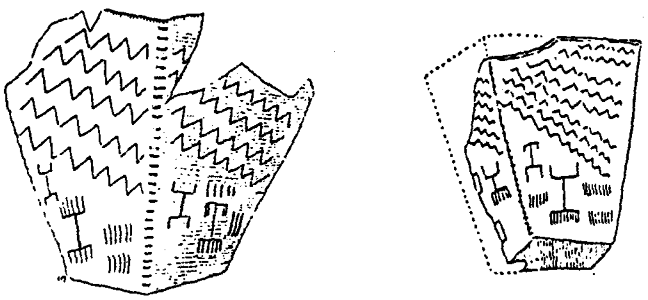
7. Са неолитском револуцијом, изазваном почетком земљорадничке производње долази и до већег еволуционог скока како у геометрији тако и у математици уопште. Начин мишљења неолитског човека се у великој мери изменио у односу на претходне епохе јер он више није само сакупљао оно што је у природи нашао него је почео сам свесно да производи оно што је сматрао да може да му користи. Њему су у његовом размишљању све више и више биле потребне бројке а за њихово обележавање он је почео од дужи. У том смислу нам је врло информативан податак који добијамо анализом представа на неким

1977, 62 fig. 36. из Castilo (Puente Viesgo Santander).

[4] И. Г. Шовкопляя, *Мезинская стоянка*, Киев 1965.



Сл. 2. Начин добијања правилних геометријских облика у мезолиту.

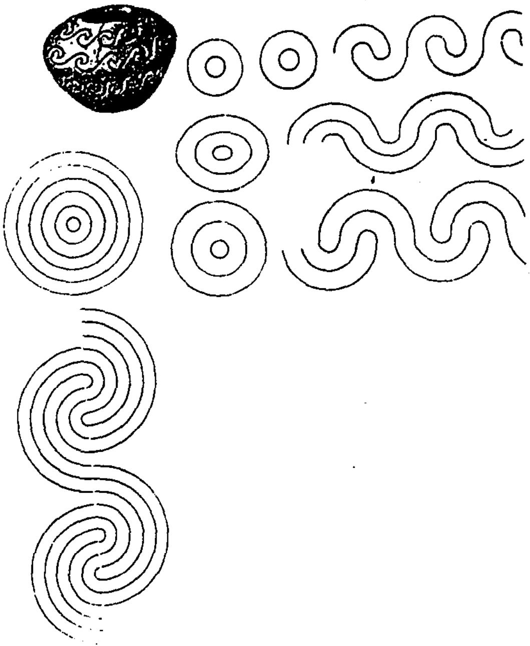


Сл. 3 а–b. Судови облика зарубљене четворостране пирамиде са цртежима људи и животиња — Тордош.

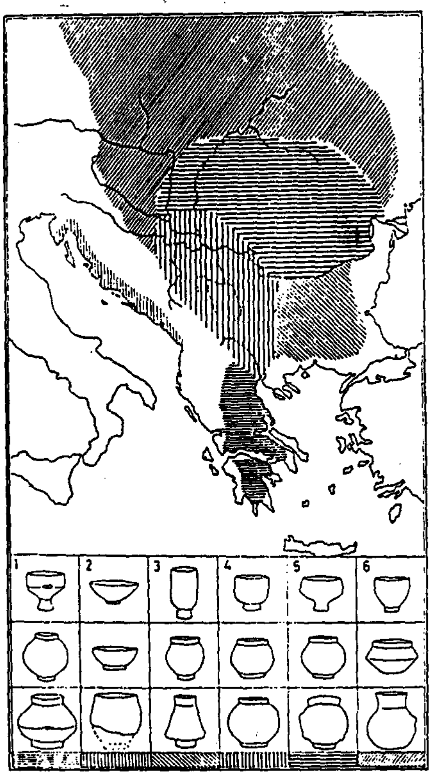
судовима из Тордоша[5] (сл. 3 а и b). На једном од њих види се поред представе човека, још један цртеж животиње са 6 рогова (јелен!) и 5 ногу (односно 4 ноге и реп или уд који одређује мушку припадност) поред кога је у два реда дат низ дужи (први ред 6 а други 5), који вероватно означавају број таквих животиња. На другом цртежу истог суда дата је поред представе човека једна фигура животиње са два дупла, али наниже оборена рога (вероватно увијени рогови као код муфлона или дивојарца) и 6 доњих екстремитета при чему су 4 сигурно ноге а преостала 2 вероватно пар сиса на вимену козе. Изнад животињске представе налазе се 5 урезаних краћих, а поред ње на десну страну су три нешто дуже дужи које можда означавају десетице или друге вредности. Целу ову сцену би требало тумачити као: 5 људи чува или лови 30 дивокоза.

[5] Marton Roska, Szofia v. Torma Sammlung ... Koloszvar 1942, T. XVIII, 12.

Други суд са истог локалитета има на једној страни цртеж сличне животиње са 6 доњих екстремитета, за какву смо већ утврдили да је највероватније коза или овца али су код ње рогови подигнути (чиме се желела сигурно направити нека разлика између претходне и ове фигуре!), док је на другом цртежу ситуација још компликованија. Овде је испод фигуре која вероватно представља човека урезано 6 дужи што би вероватно означавало 6 људи који чувају животиње (којих је према броју дужи поред ње било 15) са два нормална рога али са 8 доњих екстремитета у чему треба видети 4 ноге и 4 сисе крављег вимена. Све ово упозорава на начин размишљања неолитског човека и његово гледиште да основне карактеристике појединих врста животиња треба гледати кроз бројчано одредиве компоненте. Ту се геометрија већ измешала у много чему са аритметиком, јер је дуж сада постала број а изгледа да и дужина дужи означава неке нове вредности.



Сл. 4. Разни видови спирале и начин њиховог добијања, суд из Бутмира.



Регионалне области старијег неолита Балканског полуострва;
1. Пресескло и Протосескло; Импресо керамика; 3. Караново I. II;
4. Старчево; 5. Кереш-Криш; 6. Линеарна керамика.

Сл. 5. Судови компоновани од правилних геометријских облика у старијем неолиту Балкана по културама.

8. У орнаментици средњоевропсог културног круга „линеарне керамике" раног неолита (око 5 миленија старе ере) налазимо елементе који су код

аналитичара изазвали велико интересовање[6]. Ту је на првом месту тзв. текућа спирала. Њен настанак је могао бити и једноставан: простим померањем концентричних полукругова за неколико места у страну, при чему постоје разне варијанте зависне углавном од тога да ли се центар полукруга подудара са линијом неког супротно постављеног или се налази између две линије супротнога па њима чини завршетак, својим најмањим полукругом. Њихове комбинације у троугласте и четвороугласте текуће спирале какве су познате код нас у неолитском насељу Бутмир (код Сарајева)[7] имају своју даљу еволуцију на керамици и камену на Малти, Криту и у Микени[8]. Да се не бисмо понављали, само дајем преглед неких од раније вршених анализа (сл. 4), где се види начин добијања ових орнаменталних мотива.

9. Све ово напред изнето припадало би домену планиметрије. Поменута неолитска револуција увела је у употребу геометријске облике и у другом СТЕРЕОМЕТРИЈСКОМ смислу. Ако анализирамо облике судова нарочито код рано неолитских култура Балканског полуострва и Средњег Подунавља, видећемо да су већ тада (5 милениум старе ере!) били познати потпуно правилни геометријски облици кугле (алтернативно полукугле), цилиндра, купе да би им се нешто касније (у 4 миленијуму ст.е.) придружила и зарубљена пирамида. Њиховим комбинацијама, најчешће зарубљена купа (као нога) — полукугла (као трбух) и цилиндар (као врат посуде) добијане су основне форме већине судова периода раног неолита у разним регијама како Балканског полуострва (сл. 5) тако и шире у Европи и на Блиском Истоку. Наравно да су и друге комбинације најчешће са куглом биле такође у употреби у ранонеолитској керамографији.[9]

10. Од раних почетака неолитске револуције били су у употреби за архитектонска остварења конструктивни елементи који су добијани према мерама човечијег тела на шта је већ указано у радовима арх. Предрага Ристића[10]. Но овде не можемо прећи ни преко чињенице да се већ у том раном периоду срећемо са основама грађевина добијених на основу размере 5 : 12 : 13 једнаких модула, што нам указује на познавање „питагорејских бројева" још у архитектури носилаца линеарне керамике крајем 5. и 4. миленија старе ере како се то јасно види на сл. 6. Код овога је вредно напоменути да се овакве грађевине јављају на потесу од Лијежа у Белгији до Кијева у Украјини у готово идентичној конструкцији и са готово идентичном материјалном и духовном културом.

11. Оно што нас у овом тренутку ипак највише задивљује свакако је примена ГЕО-МЕТРИЈЕ у правом смислу „премеравања земље" у сврху извођења

---

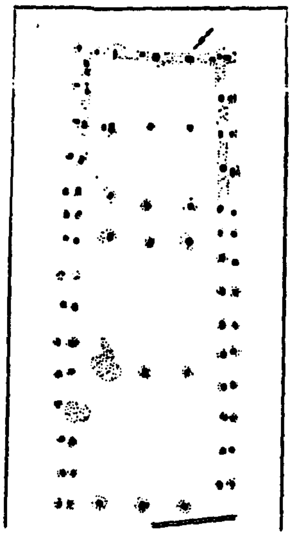
[6] G. Wilke, *Spirale in Bandkeramik*; H. Wolf, *Spirale und Volute in antiker Welt* и многи други.

[7] Fiala-Radimsky-Hoernes, *Neolithische Station von Butmir I–II* Wien 1896–1899.

[8] Wilke, op. cit., Wolf, op. cit.

[9] Б. Јовановић, *Неолит централног Балкана*, Народни музеј, Београд 19??.

[10] Предраг Ристић, *Лепенски Вир* (Реконструкција) СКЦ Београд 1972.



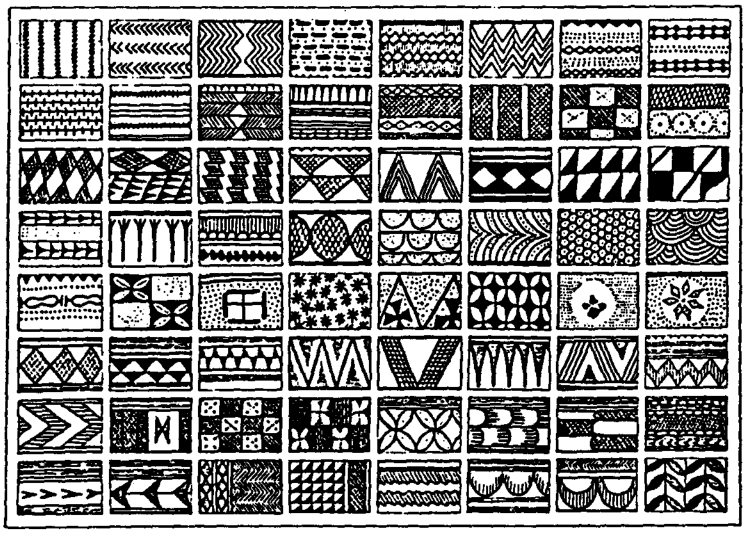
Сл. 6. Основа куће раног неолита из Hiltrop-a и начин добијања правог угла помоћу бројева 5, 12 и 13.)

мелиорационих радова у том истом неолиту код нас. Поред самог начина примене закона спојених судова, застали смо и пред познавањем осталих закона хидромеханике и начином њихове примене у изградњи канала задивљени и до те мере изненађени да смо морали искуство стечено у Мачви[11] да проверимо и на другим местима. Резултати овог су још видљивији у нашем непосредном суседству у Глогоњском риту на каналу „Визељ", о чему ће бити говора неком другом приликом.

12. Мора се подвући и чињеница да сва орнаментика на керамици и накиту бронзаног доба како у Европи тако и шире на подручју источног Медитерана зависи од геометриских мотива у најразноврснијим комбинацијама и са врло далекосежним последицама по развој људског ума како у правцу даљег унапређења математике као науке у целини тако и Уметности а нарочито у њеној примењеној зони деловања. Јер стално сукобљен са геометријским цртежима човек је био приморан да о њима размишља и да тражи нова решења (упор. сл. 7).

13. Много пре него што је Еуклид сео да пише своја Стоихеиа и Питагора пришао стварању својих закона геометрије „да је квадрат над хипотенузом једнак ... " Египћани су још 1920. год. старе ере конструисали прав угао према конопцу са чворовима на 3, 4 и 5 једнаких мера (о чему пишу Вавилоанци још 1770. године старе ере у једном клинастом натпису!). Примењујући искуства

[11]Трбуховић-Васиљевић, *Најстарије земљорадничке културе у Подрињу*, Шабац 1983, 12–14; Трбуховић, *Најстарији мелиорациони радови у Подрињу*, Истраживања 2, Ваљево 1985, 107–115.



Сл. 7. Преглед орнамената на судовима и накиту металног доба.

неолитских градитеља архитекти хетитског царства су изгледа већ око 2100. године ст. ере тај угао добијали применом „питагориних бројева" 5 : 12 : 13 о којим је већ било говора.

14. Са великом сеобом „народа с мора" завршен је на широком простору залеђа медитеранских обала праисторијски и почиње протоисторијски период обележен грчком просвећеношћу која започиње свој развој у „геометријском стилу" постмикенског периода. Ова просвећеност је много тога преузела од претходних цивилизација, али је то све развијала са великим успехом и несебично делила свима са којима је дошла у додир.

Vojislav TRBUHOVIĆ

GEOMETRY IN THE PRESCIENTIFIC PERIOD

The author presents an analysis of several archaeological objects containing the earliest mathematical concepts: the number, the geometric figures and their properties in the plane and space, theorem of Pythagoras etc.

Miloš ČANAK

MATHEMATICAL ANALYSIS OF PYTHAGOREAN, DIATHONIC AND EQUAL TEMPERING TONAL SYSTEM IN THEORY OF MUSIC

One of the basic problems of mathematical theory of music which occupied mathematicians, acusticians, music theoreticians and musical instrument-makers from ancient times till nowadays is the problem of arrangement of tones, equalization and the tempering of scales, and determining the exact position of each tone in them (see [1]). Pythagoras (582—492 b.c.), the famous ancient philosopher, mathematician and music theoretician was the first who realised, experimenting on monochord, mathematical nature and essence of this problem.

Monochord (Gr. monos – single; chord – string) is instrument consisting of wooden sounding box with the single stretched string and a movable bridge set on the graduated scale. It's used for determining musical intervals by dividing the string into separate parts, whose vibrations may be measured, i.e. by moving the bridge and changing the lenght. A single stretched string vibrating as a whole produces a ground tone. The string divided into exactly two parts plays the tone which, related to the ground tone, is in proportion 1 : 2, and interval obtained in that way is, in the theory of music, called the octave. Furthermore, Pythagoreans moved the bridge so that two thirds of the string were vibrating. That produced the tone which with ground tone created the chord pleasing to the ear and the interval which is called the fifth. Finally, vibration of the three fourths of the string lenght produced the tone which with ground tone created still bearable chord representing the interval of fourth.

Generally speaking, addition of two tone intervals, one after another, corresponds to multiplication of their numerical ratios, e.g.

$$\text{fifth} + \text{fourth} = \text{octave}$$
$$3/2 \cdot 4/3 = 2/1 \ .$$

Similarly, a keyboard of piano may be, in some sense, compared with the principal of a slide rule. If two intervals are connected by the movable part of the slide rule and then compared to the scale values, then sum of intervals corresponds to the scale value $c = ab$. Therefore, substracting the fourth from the fifth we get

$$\text{fifth} - \text{fourth} = \text{whole tone}$$
$$(3/2)/(4/3) = 9/8.$$

However, from the mathematical point of view, it's more convenient to consider intervals between two tones, not through the ratio of the lenghts of vibrating parts of the string, but, through reciprocals, i.e. frequency ratio. It's well-known, that if l is the lenght of the vibrating string and f corresponding frequency, then $l = k/f$, where k is appropriately chosen coefficient of proportion. In that case, we may consider two intervals equal if their frequences are in the same ratio.

Pythagoreans established the scale with systematically developed „perfect" chords of the fifths and fourths. Considering the basic C-major scale, i.e. C-D-E-F-G-A-H-C', by already mentioned experiments that Pythagoreans made on monochord, it is possible to fill four empty spaces with corresponding relative numbers in the following way:

tone signs	C	F	G	C'
relative numbers	1	4/3	3/2	2
intervals	prime	fourth	fifth	octave

Table 1

However, complete Pythagorean scale contains 5 whole-tone distances and 2 half-tone distances in the pitch between two tones (seconds). Whole-tone distance (C-D, D-E, F-G, G-A, A-H) is obtained by substracting the fourth and the fifth, i.e. from $q_1 = 3/2$ and $q_2 = 4/3$ follows $q = q_1/q_2 = 9/8$. Relative number for half-tone distance, i.e. minor seconde (E-F, H-C'), on the basis of previous considerations, will have the value 256/243. Besides the fact that it is the ratio of two irreducable three-digit numbers, which is, somehow, of a different nature comparing to the other relative numbers, this relative number corresponds to minor second which for ear has unpleasant dissonant character.

Now, it is possible to make a clear table of Pythagorean tonal system where relative numbers are determined according to basic C tone and adjacent tone below.

tone signs	C	D	E	F	G	a	h	c'
number of vibrations with respect to C	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
with respect to adjacent tone below		9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

Table 2

This tonal scale can also be deduced with help of the Circle of the Fifths (see Fig. 1). Circle should be divided into 7 parts and the tone signs should be written in clockwise direction. Then, in the same direction, beginning with C overlaps of the fifths are made. By overlapping every three dividing points we get the sequence C,

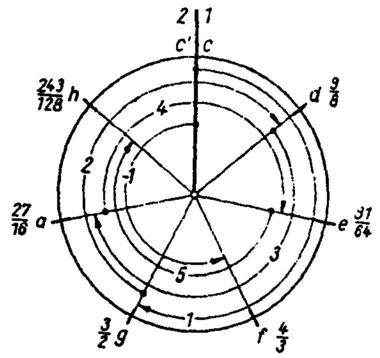


Fig. 1

G, D, A, E and H. Besides that, after every overlap, the previously deduced number should be multiplied by 3/2, but in case that C (or C') is overlapped instead of 3/2 factor 3/4 should be used. (The exception is the tone F which is obtained from the tone C by counting the fifth in the anti-clockwise direction.)

But, in that way, neither the Circle of Fifths may be exactly closed, nor number 2, which corresponds to tone C' may be reached. Actually, if each of the 5 major seconds of Pythagorean scale is divided into two subintervals, then octave C-C' is divided into 12 tone distances (minor seconds). This insertion may be easily noticed on instruments with keyboards observing black and white keys. Now, if one makes 12 fifth overlaps in clockwise direction, beginning with C, and takes care that multiplication is done, after the crossing over C mark, by factor 3/4, and by 3/2 otherwise, the result is

$$(3/2)^{12} \neq (1/2)^7 = 531441/524288 = 1.0136\ldots.$$

If The Circle of Fifths, after 12 overlaps, i.e. 7 turns closes exactly, we should get again number one. In the theory of music, this deviation characterized by the fraction 531441/524288 is called „The Pythagorean coma". This coefficient is the numerical representation of the interval between 12th fifth and 7th octave, with respect to some common key tone. This principle, discussed above, by which all tones may be deduced from one sequence of fifths, is called The Pythagorean tonal system or Pythagorean tuning.

This tonal system, besides theoretical, has the great practical significance. First of all, artists usualy prefer to use Pythagorean tonal system in orchestral or solo performance on string instruments, since the strings are tuned on fifth distances. On the other hand, trained ear, in the multitude of different tones and intervals, easily recognises octave and fifth and then the other intervals. Finally, the temperer in his work, first settles, beginning with C, the octaves and fifths as a basic orientation, and then the other intervals, taking into account the specific fine corrections with respect to, so called, the tempered tuning.

Opposite to Pythagorean system of fifths, it is possible, taking the third as the basic interval, to create a new scale which is of fundamental importance for the theory of music and which is called the diatonic scale. For that purpose monochord bridge is moved so that 4/5 lenght of the string are vibrating. In that way, with respect to fundamental tone C we obtain the new tone E, which with ground tone forms the interval of the third with 5/4 as the corresponding relative number. Introducing this number in the table 1 we get the table 3

C		E	F	G			C'
1		5/4	4/3	3/2			2/1

Table 3

which is base for forming the diatonic scale. While the distance between F and G is the same as in the Pythagorean scale, the distance between E and F is half-tone interval fixed by the fraction 16/15. As the key progresses from C to D, for one Pythagorean whole-tone distance, i.e. 9/8, for transition from D to E remains the free factor 10/9. Moving from tone E a fifth above we get the tone H with relative number 15/8 refering to the ground tone C. In the same time, for the halftone interval H-C' we get relative number 16/15 which is the same as for interval E-F. Finally, still open interval between G and H represents major third corresponding to the fraction 5/4. Since, $5/4 = 9/8 \cdot 10/9$, obviously tone A should be interpolated in such way that interval G-A (9/8) corresponds to longer, and A-H (10/9) to shorter whole-tone distance. Thus, all empty spaces by fractions 9/8, 10/9 and 16/15 is finished. All aforesaid may be presented by following synoptical table of numeric ratios in diatonic C-major scale:

tone signs	C	D	E	F	G	A	H	C'
number of vibrations with respect to C	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1
with respect to adjacent tone below		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Table 4

Relative number of tonic chord C-E-G may be reduced to proportion 4 : 5 : 6. The same proportion stands for the dominant chord G-H-D' and subdominant chord F-A-C'. For Pythagorean scale this proportion is more complex, and is 64 : 81 : 96. The advantage of the diatonic scale over The Pythagorean is not only in the fact that it's easier to deal with simplier proportions, but it also optimally satisfies the demand for harmonic chord. On the other hand, in Pythagorean scale the minor second corresponds to awkward three-digits numbers ratio 236/243 while in the diatonic scale this ratio is 16/15. Generally speaking, tonal intervals with smaler relative numbers and good chord give to the diatonic tuning advantage over. The Pythagorean, where can be noticed some sort of poverty of chord sound, because of bias of giving the preference to the fifths. It can be easily noticed when polyphonic music is performed.

Finally, on the basis of table 4, relative numbers for frequences of the diatonic C-major scale may be written in the form of the following prolonged proportion: 24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48.

During the period while we are in one tonality (e.g. C-major) diatonic scale can satisfy all demands, but if we try to begin tonic scale with some other tone, and not from octave that leads us to the unlimited multiplication of tones and fractions. The problem of the diatonic tonal system is in the fact that, to the more numerical rations, i.e. more relative numbers, corresponds only one interval. Frequency of the same tone is, in the different tonalities, different, which makes things worse, so that the modulation can't be done in this system.

For example, let's begin from D-major scale which has two sharps. Seventh of the tone D is tone C-sharp, and, according to previous explanations, number that corresponds to it is $f_1 = 27 \cdot 15/8 = 50{,}625$. From the tone C-sharp obtained in this way, let's try to construct the major scale, not affecting previous tonal structures. Begining with C-sharp major third brings us to the tone F' which relative number, according to previously constructed diatonic scale, is 64. But, if f_1 is multiplied by the relative number, which corresponds to the major third, then we get $405/8 \cdot 5/4 = 63{,}28125$ instead of 64. That means that tone C-sharp, wich we introduded, can't be postulated as the key note of the major scale without cotradiction with the prevously estemed relative numbers.

In order to solve this problem we must keep the ground interval of „perfect octave", which in The Pythagorean and the diatonic scale is made of 5 whole-tone and 2 half-tone intervals. Dividing each tone interval in two parts we obtain 12 half-tones of one octave. In order to take each of these halftones as the key-tone of a scale it's neccessary to give, to all half-tone intervals, somehow, unique value.

Any of two tonal intervals must be equal if and only if the coefficients of their frequences are equal. On the other hand, frequency, which is uniformly distributed on 12 intervals, should be doubled, in case of transition from the keytone to octave. Both requests will be fulfilled if the coefficient of the number of vibrations any of two succeeding tones is $q = 2^{1/12}$. So, if we begin with some tone with frequency f, for one whole-tone above, the new frequency will be fq^2, while, in case of half-tone above, it will be fq. If the alteration of whole-tones and half-tones from Pythagorean and diatonic scale is overtaken in one new tempered scale, we'll have the following solution for tone frequency ratios:

C	D	E	F	G	A	H	C'
1	$2^{1/6}$	$2^{1/3}$	$2^{5/12}$	$2^{7/12}$	$2^{3/4}$	$2^{11/12}$	2

Now, if we make the parallel table of relative numbers of frequences of The Pythagorean, diatonic and tempering tonal system (see Table 5).

We notice that the last, somehow, is intermediate between first two. Absolute advantage of equal temperament is in fact that it enables making fixed-pitch instruments with optimal opportunities of modulation. Keyboard of the instrument tuned in that way has arrangement of black and white keys which enables technical performance of every type of tones.

If, one by one, all piano keys sound, from below above, we'll have, so called, chromatic scale. Interval between two succeding tones is expressed by coefficient

	Pythagorean tuning	diatonic tuning	tempered tuning
C	1	1	1
D	1.12500	1.12500	1.12246
E	1.26563	1.25000	1.25992
F	1.33333	1.33333	1.33484
G	1.50000	1.50000	1.49831
A	1.68750	1.66667	1.68179
H	1.89844	1.87500	1.88775
C'	2	2	2

Table 5

$q = 2^{1/12} = 1.0594630944$. Such keyboard satisfies the requsts that sach avaliable tone on the instrument may be the keytone of a scale. It's also important that, in equal temperament, are identified C-sharp and D-flat, D-sharp and E-flat, F-sharp and G-flat, G-sharp and A-flat, A-sharp and B, which represents so called enharmonic alteration. If we let the sequence of half-tones of equaly tempered scale, sound again, we'll find that if corresponds to the aforesaid sequence of numbers

$$1 = (2^{1/12})^0, \quad (2^{1/12})^1, \quad (2^{1/12})^2, \quad \dots, \quad (2^{1/12})^{12} = 2.$$

This sequence is, acctually, logarithmic system with the base $2^{1/12}$ where logarithms are the exponents $0, 1, 2, \dots, 12, \dots$. The sequence of tones of chromatic scale has arithmetical mirror image in the logarithms. Ernest Bindel, in his book „Grundlagen der Mathematik" (see [3]), says that forming of the logarithmic tables and successful evaluation of logarithms, has the same meaning as the equal tempering of musical instruments. In the first half of the 17th century theory of logarithms was being intensively developed, and in the same century appeared forerunners of equally tempered tonal system, Halberstadt's organist, music theoretician Andreas Werckmeister, whose name is connected with modern tempered organs, and Johann Sebastian Bach. Bach tempered his instruments, clavichord and spinet, in corresponding, new way, and then wrote his famous 48 preludes and fugues for „The Well Tempered Clavier" (Wohltemperierte Klavier), where „the well tempered clavier" means any keyboard instrument used in that times, like clavichord, spinet or organ. By that, the intended to point out that on equaly tempered instruments may be played all types of tones without any dissonances in chords.

In spite of resistence and oppositions to new tonal system, which continued till the middle of last century, it was finaly accepted in almost all countries of the world and became very important for instrument making. It can be said that from mathematical, accoustical and technical point of view, the equal tempering enabled apperance of great piano composers and virtuosos in 18th, 19th and 20th century. Equal tempering used today for performing in all concert halls of the world is the achievement and result of research and carefull examination, through many centuries, while different nations have given their precious contribution. Although, on the end of this long developing process, is one non-Pythagorean solution, that can't diminish merits of Pythagoreans and their first systematical research of mathematical theory of music.

REFERENCES

[1] Wille, R., *Musiktheorie und Mathematik*, Salzburger Musikgespräch 1984, Springer-Verlag, Berlin, 1985, p. 4–31.

[2] Waerden, B. L., *Die Harmonielehre der Pythagoräer*, Hermes 78 (1943), p. 163–199.

[3] Bindel, E., *Grundlagen der Mathematik*, Stuttgart, 1928.

Милош ЧАНАК

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА ПИТАГОРЕЈСКОГ, ДИЈАТОНСКОГ И ТЕМПЕРОВАНОГ ТОНСКОГ СИСТЕМА У ТЕОРИЈИ МУЗИКЕ

У овом раду аутор даје компаративну математичку анализу питагорејског, дијатонског и темперованог тонског система у теорији музике и показује да је овај проблем могао бити решен тек са појавом ирационалних бројева и логаритама.

Радмила ЖАРКОВИЋ

МАРИН ГЕТАЛДИЋ, РЕСТИТУТОР АПОЛОНИЈЕВОГ ДЕЛА О ДОДИРИМА

Марин Гeталдић (Дубровник, 1568–1626) је био и још увек је један од познатијих математичара како у нас тако и широм Европе, математичар који својим радовима стоји уз бок Франсоа Вијету и Галилео Галилеју. Појавио се у европској научној мисли на прелазу шеснаестог у седамнаести век у време када је Дубровник био у пуном замаху свог културног просперитета.

Појава Марина Гeталдића није била случајна, постојали су врло повољни услови у којима је он могао изграђивати свој научни поглед на свет и постати не само један од најистакнутијих стваралаца величине и славе старог Дубровника већ и знаменити математичар свога времена скоро целе Европе. Наиме, док су се све југословенске земље налазиле под влашћу туђина, мала Дубровачка република, налазећи се између Млетачке Републике с једне стране и Турског царства с друге, тргујући интензивно са обома, остварила је врло чврсту материјалну основу и могућност за развитак науке и уметности. Посебна пажња у Дубровнику посвећује се школи. Тако је Гeталдић имао могућности да од 1575. до 1588. године стекне у Дубровнику врло широко знање које му је омогућило да се укључи у савремене токове, тадашње европске научне мисли.

У жељи да продуби и прошири своје знање Гeталдић је кренуо на студијско путовање по западној Европи. Боравио је у Италији, Енглеској, Белгији, Холандији, Немачкој и Француској, упознао се са многим познатим математичарима тога времена Вијетом (François Vièt, 1540–1603), Клавијем (Christiphorus Clavius, 1538–1612), Гринбергером (Christiphorus Crinbergerus, 1564–1636), Куањеом (Michael Coignetus, 1549–1623), Галилејом (Galilei Galileo 1564–1642) спријатељио са њима и наставио сарадњу по повратку у Дубровник. Пријатељство и сарадња са Вијетом, најпознатијим математичарем тога времена битно су утицали на Гeталдића. Гeталдић је снагом свога ума одмах схватио могућности које су пружале Вијетова дела за даљи развитак математике. Такав научни сензибилитет какав је имао Гeталдић привилегија је изузетно обдарених учених људи, јер је у одређеним случајевима разумевање одређених научних мисли, њихова даља надградња и продубљивање гледања са ширег становишта научне користи, равна и њиховој самој формулацији.

Гeталдић се упознао и са Вијетовим радовима у области реституције.

Наиме, у то време појавило се велико интересовање многих математичара за дела Еуклида, Архимеда и Аполонија.

Како су многа њихова дела била изгубљена, то су они покушавали да их реституишу ослањајући се на наводе у сачуваним делима других античких математичара Папа (Pappus, 250—300), Серена (Serenus, IV век), Хипатије (Hypatia, 370—415) и каснијим преводима неких од тих дела. Папов *Математички Зборник* излази на латинском језику средином XVI века у Италији у редакцији и с коментарима Командина (Federigo Commandino, 1509—1575) а крајем XVI века у Енглеској у редакцији и с коментарима Халеја (Edmund Halley, 1656—1742).

У седмој књизи Паповог *Математичког Зборника* налази се формулација проблема Аполонијевог дела *О додирима* (*De Tactionibus*). На основу те формулације проблема Вијет је успео да реституише Аполонијево дело *О додирима*. Реституцију је изложио у делу *Аполоније Галски или Оживела геометрија додира Аполонија Пергејског* (*Apollonius Gallus, seu exuscitata Apollonii Pergaei tactionum geometri*, Paris, 1600). Вијет је реституисао десет проблема који се на савремен начин могу изразити: Конструисати круг који пролази кроз m тачака, додирује n кругова и p правих али тако да је $m+n+p=3$ а $m,n,p \in \{0,1,2,3\}$. Најпознатији је проблем: Конструисати круг који додирује три дата круга. То је и најопштији проблем из те групе проблема а у литератури је познат као Аполонијев проблем. Он је био предмет интересовања многих каснијих аутора. Решавали су га Адрија Ромен, Рене Декарт (Rene Descartes 1596—1650) и његова ученица принцеза Елизабета и Исак Њутн (Isaak Newton 1642—1727).

Вијетова реституција дела *О додирима* изашла је из штампе 1600. године. Те исте године у Париз је стигао Марин Геталдић. Геталдић се упознао са Вијетом и његовим радом у области математике. Проучивши Вијетову реституцију Геталдић је показао и шири интерес за Аполонијево дело *О додирима*. Увидео је да се неки проблеми које је реституисао Вијет могу и једноставније решити, па је то и учинио. Наиме, Вијетов осми проблем је решио на свој начин. Али проучивши и Командинијев превод Паповог *Математичког Зборника* открио је да се Аполонијево дело *О додирима* састојало из две књиге, а да су се у једној обрађивале неке врсте додира који могу да се обухвате ставом „за било која два задата елемента од тачака, правих и кругова, описати круг дате величине, који пролази кроз дату тачку или дате тачке а додирује сваку од појединих датих линија." Овај став садржи шест проблема. Геталдић се заинтересовао за те проблеме. Успео је да их реституише. Реституцију је изложио у делу: *Допуна Аполонију Галском или Оживели преостали део геметрије додира Аполонија Пергејског* (*Marini Ghetaldi, Patritii Ragusini, Supplementum Apollonii Galli sue exuscitata Apollonii Pergaei tactionum geometriae pars reliques, Venetiis 1607*).

У уводу дела Геталдић се обраћа читаоцу: „Десет проблема великог геометричара Аполонија Пергејског сретно је реституисао не мањи геометричар Франсоа Вијет или Аполоније Галски. Али у књизи О додирима Аполонија Пергејског било је шеснаест проблема како каже Папос Александринац у седмој књизи Математичког зборника. Према томе Аполоније Галски није оживео сву геометрију додира Аполонија Пергејског. Али ми ћемо то допунити и тако Аполоније Галски неће без Аполонија Илирског (како је себе називао) оживети Аполонија Пергејског, који је лежао угаснувши неправдом времена или покопан од варвара".

Дело је посветио Маркизу Павлу Емилију Ћезију[1]. У посвети Геталдић се захваљује Ћезију за доброчинства које је учинио за њега: „Допуна Аполонија Галског желим да буде сведок твојих заслуга према мени. Много је споменика племенитости, мудрости и других твојих врлина, а нарочито сусретљивости, којом грлиш учене људе. Што ја пишем твоје је."

Проблеми које је реституисао Геталдић могу се на савремен начин изразити: Конструисати круг датог полупречника који пролази кроз m тачака, додирује n правих и p кругова али тако да је $m+n+p=2$ а $m,n,p \in \{0,1,2\}$.

Проблем 1. Конструисати круг датог полупречника који садржи две дате тачке.

Проблем 2. Конструисати круг датог полупречника који додирује две дате праве.

Проблем 3. Конструисати круг датог полупречника који додирује два дата круга.

Проблем 4. Конструисати круг датог полупречника који садржи дату тачку и додирује дату праву.

Проблем 5. Конструисати круг датог полупречника који садржи дату тачку и додирује дати круг.

Проблем 6. Конструисати круг датог полупречника који додирује дату праву и дати круг.

Геталдићево дело садржи на крају још један проблем. То је Вијетов осми проблем. Геталдић није био задовољан његовом реституцијом, па га је решавао сам и изложио у свом делу. То је проблем: Конструисати круг који садржи две дате тачке и додирује дати круг.

Геталдић је дело писао у оквиру старогрчке геометријске методе. Желео је да реституција буде што вернија оригиналу, па је и у методолошком погледу, угледајући се на Вијета, успео да погоди дух и стил Аполонијеве геометрије *О додирима*.

Геталдић прво формулише проблем. Затим, како се у многим случајевима може десити да се на основу датих елемената не може конструисати тражени круг, он уводи ограничења. Ограничења уводи и због начина конструисања траженог круга. Наиме, он разликује случајеве када дати круг додирује тражени круг споља и када га додирује изнутра. За све случајеве конструише само по један тражени круг. Дакле, њега интересује само једно решење што је карактеристика времена у којем је живео. Међутим, он је отишао и даље. Он

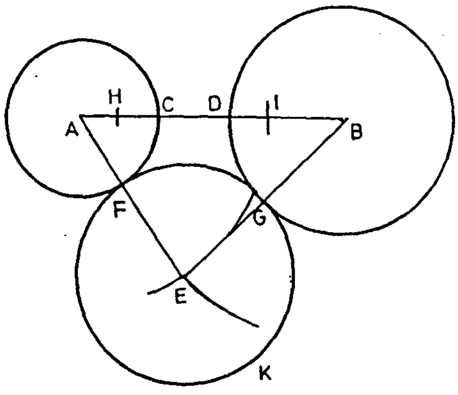
[1] Ћези је била чувена римска племићка породица у чијем се друштву Геталдић налазио када је боравио у Риму. Фредерико Ћези (Federico Cesi) је основао Академију наука у Риму — Академију dei Lincei.

уводи ограничења да не би дошло до немогућности решења проблема, а из њих се експлицитно може закључити да има случајева када проблем има и више решења.

Геталдићева ограничења за све проблеме се могу искористити да се изврши дискусија проблема. Показаћемо то на проблему 3.: *Конструисати круг датог полупречника који додирује два дата круга.*

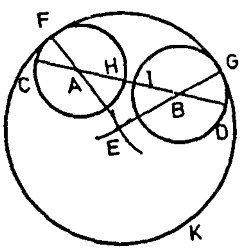
Прва три ограничења која Геталдић уводи код овог проблема односе се на случај када су кругови спољашњи и немају заједничких тачака.

Ограничење првог случаја: Да би дати кругови додиривали споља круг који треба конструисати, потребно је да пречник траженог круга не буде мањи од одсечка на правој која спаја средишта датих кругова, а који лежи између конвексне ободнице једног и другог датог круга (сл. 1).

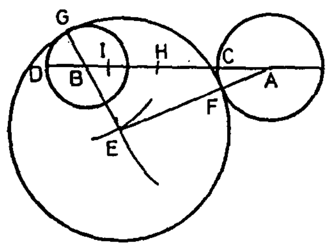


Сл. 1

Ограничење другог случаја: Да би дати кругови додиривали изнутра круг који треба конструисати, потребно је да пречник траженог круга не буде мањи од оне дужине која, спајајући средишта датих кругова, лежи између конкавне ободнице једног и другог датог круга (сл. 2).



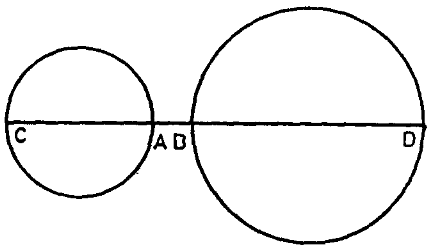
Сл. 2



Сл. 3

Ограничење трећег случаја: Да би један дати круг додиривао круг који треба конструисати споља, а други дати круг изнутра, потребно је да пречник траженог круга не буде мањи од одсечка праве која спаја средишта датих кругова, а који лежи између конвексне ободнице једног датог круга и конкавне ободнице другог датог круга (сл. 3).

Како је сваки круг полупречника који додирује дате кругове решење постављеног проблема, помоћу Геталдићевих ограничења првог, другог и трећег случаја може се извршити дискусија проблема за случај кад су дати кругови спољашњи и без заједничких тачака. Геталдић у ограничењима првог, другог и трећег случаја посматра различита растојања, али их исто обележава са CD. Ако CD у ограничењу првог случаја обележимо са AB, а у ограничењу трећег случаја са AD и BC (сл. 4) дискусија проблема се може приказати датом табелом.



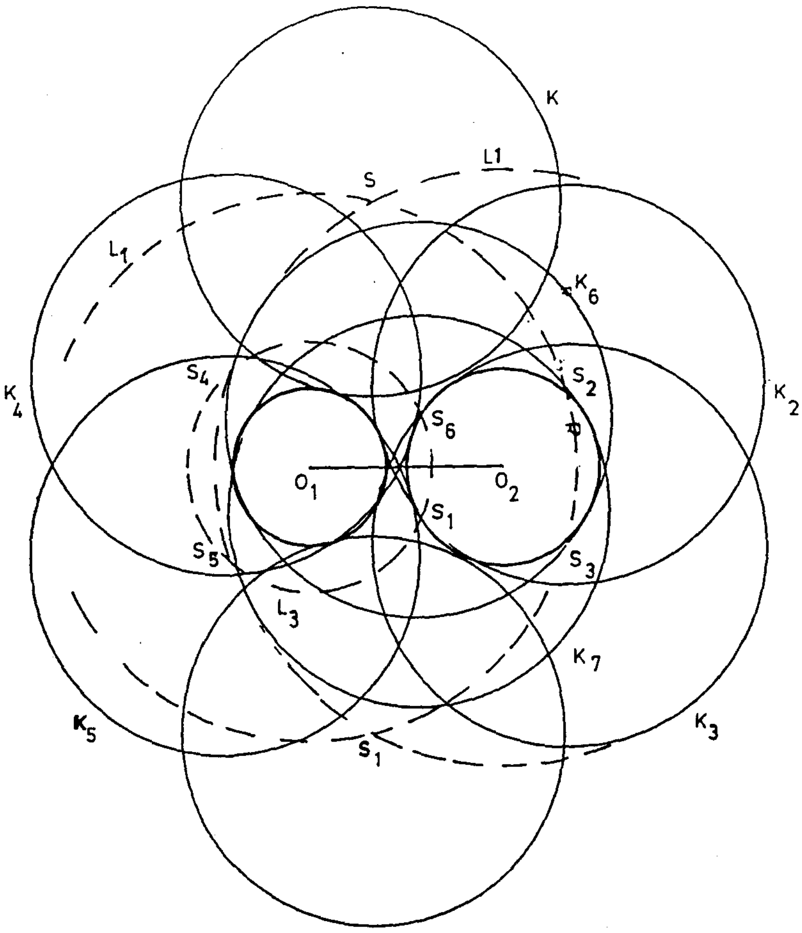
Сл. 4

$2R > CD$ 8 реш.			
$2R = CD$ 7 реш.			
$2R < CD$	$2R > BC$	$2R > AD$ 6 реш.	
		$2R = AD$ 5 реш.	
		$2R < AD$ 4 реш.	
	$2R = BC$	$2R > AD$ 5 реш.	
		$2R = AD$ 4 реш.	
		$2R < AD$ 3 реш.	
	$2R < BC$	$2R > AD$ 4 реш.	
		$2R = AD$ 3 реш.	
		$2R < AD$	$2R > AB$ 2 реш.
			$2R = AB$ 1 реш.
			$2R < AB$ нема реш.

Најинтересантнији је случај када је $2R > CD$, тј. када проблем има 8 решења (сл. 5).

Ограничења четвртог и петог случаја односе се на случај када се један дати круг налази у области другог датог круга.

Ограничење четвртог случаја: Ако је један дати круг у области другог

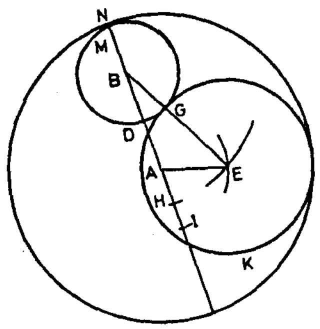


Сл. 5

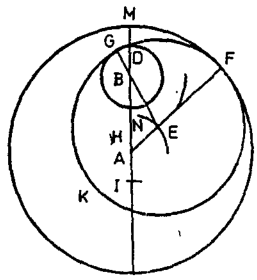
датог круга, да би они додиривали круг који треба конструисати споља, потребно је да пречник траженог круга не буде ни већи од већег одсечка на правој која спаја средишта двају датих кругова, а који лежи између конкавне ободнице једног и конвексне ободнице другог круга, нити мањи од мањег одсечка (сл. 6).

Ограничење петог случаја: Ако је један дати круг у области другог датог круга, да би један дати круг додиривао круг који треба конструисати споља, а други изнутра, потребно је да пречник траженог круга не буде ни већи од већег одсечка на првој која спаја средишта двају датих кругова, који лежи одсечен између конкавне ободнице једног и другог датог круга, нити мањи од мањег одсечка (сл. 7).

Ограничење шестог случаја: Ако се дати кругови међусобно секу, да би оба додиривала круг који треба конструисати, а који се налази и у једном и у

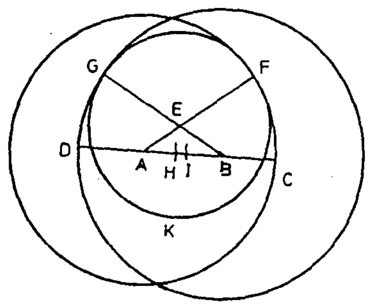


Сл. 6



Сл. 7

другом кругу, потребно је да пречник траженог круга не буде већи од осечка на правој која спаја средишта датих кругова, а који лежи између конкавне ободнице једног и другог датог круга (сл. 8).



Сл. 8

Ограничења четвртог, петог и шестог случаја, на сличан начин као претходни, могу се искористити да се изврши дискусија проблема за остале међусобне односе датих кругова.

Ограничења и других проблема такође се могу искористити да се изврши дискусија и да се проблеми реше на савремен начин.

Заслугом двојице врхунских математичара Франсоа Вијета и Марина Геталдића Аполонијево дело *О додирима* отргнуто је од заборава. Дело је врло брзо постало врло актуелно. Неки математичари као Камерер (J. W. Camerer), Данијел Швентер (Daniel Schwenter) и Пјер Еригон (Pierre Herigone) уносе га у своје курсеве математике док се други Ферма (Pierre Fermat), Торичели (E. Torricelli), Симсон (Thomas Simson), Лосон (John Lawson) и Њутн (Isaac Newton) баве шире проблемима додира.

Геталдићева реституција Аполонијевог дела *О додирима* актуелна је још увек и инспирише и савремене математичаре да се баве проблемима геометрије додира.

Проблеми које је реституисао Геталдић обухваћени су програмом средње школе. Због тога су они предмет проучавања многих аутора и унети су у поједине уџбенике. Међутим, у свим тим уџбеницима или проблеми нису формулисани на исправан начин или решења не одговарају постављеном проблему. Геталдићева реституција се може искористити да се проблеми реше на савремен начин а Геталдићева ограничења да се дискусија проблема у потпуности правилно изведе.

Radmila ŽARKOVIĆ

MARIN GETAŁDIĆ, RESTITUTOR OF APOLLONIUS WORK OF CONTACTS

Marin Getaldić appeared in the world of the European scientific mind, especially in the field of mathematice, in the late XVI and the early XVII century; that was the time when cultural prosperity flourished over Dubrovnik.

Mathematicians all around Europe were, at that time, greatly interested in the works of antique mathematicians like Euclid, Archimedes and Apollonius.

Since many of their works were lost they were making effort to restitute them, relying upon some quotations in the works of other antique mathematicians.

François Viète and Marin Getaldić dealt with the restitution of the lost Apollonius workof contacts. French mathematician, François Viète, was the first to get down to work on the Apollonius work of contacts. He restituted the problems which, in modern terms, could be expressed in this way: lto draw a circle which falls through m points, it touches n lines and p circles so that $m+n+p=3$ and $m,n,p \in \{0,1,2,3\}$.

Marin Getaldić, a citizen of Dubrovnik, showed some greater interest for the work of contacts. He had solved one of Viète's problems in the most convenient way and discovered that the work of contacts contained also the problems which could be expressed, in modern terms, as following: to draw a circle of the given radius which falls through m points, it touches n lines and p circles in the way that $m+n+p+=2$ and $m,n,p \in \{0,1,2\}$. There are six problems. The most interesting among them is this one: to draw a circle of the given radius that touches two other given circles. The restitution of these problems was expressed in the work of Marini Ghetaldi, patritii Ragusini, Supplementum Apolloniii Galli seu exucitata Apollonii pergaei tactionum geometriae pars reliqua, Venetiis apud Vencentium Fiorinam MDCVII.

By solving problems Getaldić first formulated a problem in his restitution. Then he introduced limitations, as in many cases can happen that you cannot draw a circle on the basis of some given elements. He introduced those limitations because of different ways of drawing the circle. Getaldić's limitations are important because they help to do the discussion of the problem. Getaldić, by his restitution, showed himself as an extraodinary geometrician. He wanted his restitution to be true to the original and he succeeded in guessing the spirit and style of Apollonius geometry of contacts.

Thanks to two top mathematicians, Francois Viète and Marin Getaldić, Apollonius work of contacts cannot be forgotten. The work has soon become very up-to-date. Some mathematicians (Camerer, Schwenter) use it in their courses of mathematics whereas others inspired by their works (Fermat, Toricelli, Simson, Lawson and Newton) deal more with the contact problems.

The problems which were restituted by Marin Getaldić do not go over elementary geometry in current sense of the subject, and are included in the program of the secondary school so that the same problems have been studied by many authors. They are included into some textbooks but very incomplete. In fact, the problems are given mainly for some special examples.

Getaldić's restitution can contribute to adequate solutions to problems in some current way and the problems could be discussed thoroughly.

Зоран СТОКИЋ

ПРИНЦИП НАЈМАЊЕГ ДЕЈСТВА ИЛИ ЛАГРАНЖ — ЊУТН 18. ВЕКА

Ово саопштење има за циљ да обележи двестогодишњицу изласка из штампе Лагранжеве *Аналитичке механике*, а жеља самог Лагранжа је била да том својом књигом увелича прославу стогодишњице појављивања Њутновог револуционарног дела, *Математичких принципа природне филозофије*.

Питање које се одмах на почетку намеће јесте о самом наслову овог пригодног саопштења. Зашто, дакле, баш *Принцип најмањег дејства*, а не, рецимо, *Аналитичка механика*? — Једноставно зато што ја ту књигу желим да посматрам најпре из перспективе данашњег физичара, да истакнем посебно месот које тај принцип има у савременој физици.

Принцип најмањег дејства сажима читаве области старе и нове физике. Резултати добијени у једној области могу се аналогијама пренети у друге, од класичне механике, хидродинамике, електромагнетизма, теорије релативитета — до квантне механике.

Да би физика започела свој ход, на самом њеном изворишту стоји именовање, у којем су се процесу појавили физички објекти; они се међусобно разликују мером и бројем. Запремина, температура, напон, притисак, ... одређени су скупом карактеристичних бројних вредности. Баш ти бројеви, помоћу којих се врши редукција стварности на математичке ентитете, оштро раздвајају тај нови свет физике од „света по себи". Сами физички објекти, тако уведени, јесу почетак и крај моћи тога новог, физичког, језика. Јер, без одељености физичких објеката не би било могуће конституисати ни језик физике, али, истовремено, баш та одељеност јесте и препрека у досезању свеобухвата, тј. јединства свега, чему физичари a priori стреме. Осетљивост наших чула замењена је осетљивошћу наших инструмената. Наше бесконачне чулне представе физика је редуковала на мерне вредности, а затим је те вредности сврстала у одређене класе, што је све водило гомилању емпиријских закона. Ти закони представљају исказе о одређеним конкретним феноменима. Али основни задатак физике јесте да генерализује наше искуство. У том циљу створени су принципи који је требало да у себе сажму читава подручја стварности. Принципи су замишљени као матрице из којих ће се производити нови природни закони. У својој ранијој расправи *Раст знања и Исак Њутн* показао сам да је Њутн у *Принципима* дао концепт изградње аксиоматских теорија физике, и то у виду трокорака: хипотеза (постављање принципа) — дедукција (дедуктивно извођење опажајних чињеница из принципа) — експеримент (експериментално проверавање опажајних чињеница). И Лагранжева аналитичка механика, као и све касније аксиоматске теорије физике, изграђена је по том методолошком рецепту. Штавише, поред методологије, Лагранж је директно преузео и саме основне појмове Њутнове рационалне механике: тачку, праву, раван, масу, силу и време.

Користећи се углавном апаратом синтетичке геометрије, Њутн је у *Принципима* изложио прву аксиоматску теорију природе — механику. Цветање нових аналитичких метода у првој половини 18. века природно је наметало питање реинтерпретације Њутнове механике. Прави почетак аналитичког приказивања механике јесте Ојлерова књига из 1736. године. Баш те, за механику важне године, родиће се и Жозеф-Луј Лагранж, који ће у својој чувеној *Аналитичкој механици* тај започети развој аналитичких метода довести до врхунца.

Лагранж, „величанствена пирамида математичких наука", како је за њега уобичавао да каже Наполеон, живео је у доба када су се француски просветитељи латили свога највећег подухвата, састављања колективне *Енциклопедије*, по узору на *Циклопедију или универзални речник* Енглеза Е. Чемберса (објављено у Лондону 1728. године), као „сређеног речника науке, уметности и вештина". То велико дело покренуло је сумњу у до тада владајуће догме, те је тако постало Библијом француске револуције из 1789. Поред ове, Лагранж је био сведок још две велике револуције: индустријске (за коју се може сматрати да је почела 1760.) и америчке (из 1775.); с друге стране, био је савременик и Фридриха Великог, Катарине Велике, али и Волтера, Русоа, Канта, Фихтеа, Хјума, Рамоа, Моцарта, Кулона, Ламарка, Адама Смита, Ломоносова, па и нашег Руђера Бошковића, те је, на своју велику несрећу, присуствовао и гиљотинирању своје велике заштитнице Марије Антоанете и свог оданог пријатеља Лавоазјеа; а на крају, да би иронија била потпуна, он ће постати идол тог истог народа који се показао крвником оно двоје!

Па ипак, било је то доба просветитељства и романтизма, тачније доба у коме су влаали култ разума и култ осећајности. Та својеврсна мешавина разума и осећања дала је низ великих научних открића. Највећа научна забава тог доба био је електрицитет. О томе шта је електрицитет први је Франклин изнео своје мишљење; 1752. је показао да је и муња облик електрицитета, а 1760. конструисао је громобран. Галвани је опазио, а Волта успео да прецизно измери, то чаробно врело електрицитета, те је тако започела убрзана градња апарата за производњу и чување електрицитета. Конструисањем сталних извора електричне струје, после 1800. године, широм су била отворена врата науци о електрицитету. Даље, из алхемије, фармације и металургије прецизним аналитичким мерењима кондензована је хемија гасова. Стара антична идеја да је природа састављена од четири елемента коначно је била напуштена. Кевендиш одређује специфичну тежину водоника. Откривајући кисеоник, Пристли побија алхемијско поимање ватре и омогућује Лавоазијеу да дође до принципа конзервације масе[1], а баш ће тај принцип учинити да се и хемија почне сматрати егзактном науком.

Напуштани су и стари занати, техника је кретала новим путевима. Рационалност 18. века увелико је била стављена у службу испуњавања људских жеља. Водена пара, коју је још и Херон користио за покретање необичних играчака, сада је почела покретати огромне механизме, бродове, локомотиве. Савремена техника рађала се тако из савеза капитала са експерименталном науком. Људи су коначно схватили да је немогуће конструисати идеалну машину (перпетуум мобиле), тј. спознали су да је немогуће добити рад ни из чега. Тачна мерења су почела бистрити људске умове, те су се тако приближавали закону о одржању енергије. Али како из природе извући енергију? Како она прелази из једног у други облик? — Тим питањима нису се бавили само научници и техничари, већ и уметници, филозофи; Блејк пева: „Енергија је вечни ужитак". Енергија и знање су полако постајали моћ.

Енглеска, која је због своје специфичне историје прва раскрстила са религијским истинама и феудализмом, била је у вођству. Да не би заостали, Французи су се почели користити свим идејама засејаним у Енглеској. Централна личност француског просветитељства, Волтер, који је у Енглеској видео земљу истинских политичких и верских слобода, залагао се за потискивање Декартових и Лајбницових идеја и свесрдно је помагао ширење енглеске филозофије и културе у Француској. Он никада није заборавио сусрет са Њутном, као ни његову свечану погребну церемонију у Вестминстерској опатији 1727. године. Том Волтеру[2] дугује и Лагранж своје повезивање са Њутновим генијем.

У школи у свом родном Торину, после упознавања са Еуклидовим и Архимедовим радовима, Лагранж случајно долази до есеја Њутновог колеге Халеја, у коме се износи предност диференцијалног рачуна над синтетичким методама геометрије. Управо том раду имају да захвале математика и физика што су у своје редове сврстале још једног генија. Са само шеснаест година Лагранж је постао професор математике у краљевској артиљеријској школи у Торину. Тада и почиње са објављивањем својих научних радова — од примене диференцијалног рачуна у вероватноћи, преко варијационог рачуна, до проблема вибрације жице. Ферма и Декарт су увођењем координата трасирали пут појму функционалне везе између две променљиве величине. Преко Грегорија, Њутна, Лајбница и Бернулијевих појам функције је полако стицао своју легитимност. Једнакост као што је $y = f(x)$ дефинише криву повезивањем координата сваке тачке на њој. У веку аналитичких метода постављало се питање како аналитички појам функције ослободити од геометријске представе.

Некако паралелно са развојем појма функције формирао се и знаменити интегро-диференцијални рачун. Њутн је први приметио да се многи физички закони могу једноставније изразити помоћу диференцијалних симбола него

---

[1] Antoine Lavoisier, *Traité élémentaire de chimie*, Paris, 1789.

[2] Године 1734. Волтер је објавио *Писма о Енглезима*, а 1759. Волтерова пријатељица, мадам ди Шател, превела је *Принципе* на француски језик.

на ма који други начин. На тој идеји, али и на Лајбницовој симболици, саздали су своје „краљевство" Ојлер, Даламбер и Лагранж. Диференцијалне једначине не везују променљиве y и x директно; оне се служе потпуно другом методом. Диференцијална једначина дефинише криву казивањем правца у коме она пролази кроз сваку од својих тачака.

Али говорити о реалитету математичким симболима није ни мало лако. Убрзо се показало да је, на пример, осциловање жице или плоче немогуће представити обичним диференцијалним једначинама. Зато је 1715. године Тејлор поставио, а Даламбер први решио, такозвану „једначину са диференцијом", данас познату као парцијалну једначину. Скоро да је сувишно напомињати да су Ојлер и Лагранж били ти који су изнашли опште методе за интеграцију ових једначина.

И сам варијациони рачун, који у правом аналитичком облику започиње тек са Ојлером, био је једна од метода која је требало да помогне при решавању практичних проблема, као што су, на пример, проблем димензионисања грађевинских елемената, греде и стуба, или проблем одређивања облика тела тако да момент инерције при ротацији буде минималан. Ти су проблеми били искристалисани у три практична задатка: брахистохроне, геодезијске линије и изопериметријски задатак. Док код проблема брахистохроне одређујемо минимално време, код проблема геодезијске линије одређује се минимална дужина линије која лежи на задатој површи (проблем решио Н. Бернули 1697), а код изопериметријског проблема одређујемо криву која задовољава два услова: један се односи на њену дужину, а други на екстремалност обухваћене површине. Није тешко закључити да је заједничко за ова три задатка, али и за сваки будући варијациони задатак, то што је потребно одредити криву (функцију) тако да она минимизира или максимизира неки дати интеграл; тај интеграл, по Адамаровом предлогу, данас називамо функционал. Тај је задатак изузетно сложен зато што ту више није реч о максимуму или минимуму (апсолутном или релативном) неке функције једне или више реално променљивих, тј. оно што се мења под интегралом није више број, већ функција $y = y(x)$, која пролази одређен скуп функција G. Природно, и овде се захтева да важи неједнакост типа $f(y) > (<) f(y_0)$ за свако y из неке околине y_0. Проблем је, само, шта је сада околина тачке у овом апстрактном скупу функција G. Шта је то околина било које функције? Ојлеровом је варијационом рачуну недостајала математичка строгост. По самом Ојлеровом сведочењу, тек је са Лагранжевим радовима, који су у периоду од 1759. до 1761. године публиковани у аналима Торинске академије наука, варијациони рачун стекао свој данашњи аналитички облик.

Тако је већ у двадесет четвртој години Лагранж постао признат и познат у Европи као један од највећих математичара. Године 1764. за решење проблема три тела (Земља, Месец, Сунце) он добија велику награду Француске академије наука. Док се проблем два тела могао решити у коначном облику, дотле је то са проблемом три тела било немогуће. Луцидни Лагранж решава проблем у два специјална случаја: када се тела налазе у теменима једнакостраничног троугла, као и када су на правој линији, којом приликом су међусобна растојања дата унапред. Осим овога, Лагранж је касније дао и решење проблема три тела у тзв. „ужем смислу", тј. када је маса једног од тела занемарљиво мала, што у данашње „сателитско доба" нарочито добија на важности. Године 1766. награда се поновила, јер је овог пута на сасвим коректан начин приближно решио проблем шест тела (четири Јупитерова сателита, Јупитер, Сунце).

Чувши за такве Лагранжеве успехе, Фридрих Велики га позива да, после Мопертуија и Ојлера, он буде директор физичко-математичког одељења Берлинске академије наука, на којој је својевремено боравио и Волтер. Пуних двадесет година Лагранж је непрестано публиковао радове у зборницима Берлинске академије. И баш у њој он ће се уздићи до персонификације новог типа научника, који ће постати узор каснијим покољењима. Он је то постигао не само својим математичким генијем, јер су исту такву генијалност поседовали и његови велики претходници — Даламбер и Ојлер — него и зато што у његовим радовима није било никаквих метафизичких и теолошких расправа. Од ренесансе вековима припремана аутономија науке у односу на теологију и метафизику, која је — непримећено — засијала још код Њутна, поново се, тако, појавила у Лагранжевим радовима. Лагранж је Европом пронео славу првог „чистог" научника. Јер, физичко искуство испреплетано са математичким расуђивањем — једино је што се може наћи у његовим радовима, без икаквих примеса у стилу Ојлерових *Писама немачкој принцези*. Као ни Њутн, тако ни Лагранж није научне истине сматрао апсолутним и категоричким истинама, већ је науку доживљавао као путоказ — као радна упутства сугерисана искуством, а створена у светлу разума.

Након смрти Фридриха Великог, Лагранж прихвата позив Луја XVI да настави свој рад у Париској академији наука. Године 1787. Марија Антоанета му у Паризу приређује величанствен дочек. То је била година у којој је још дотеривао своје ремек-дело започето у Торину — своју механику која ће бити искључиво заснована на симболичком језику алгебре и анализе. „Онај ко воли математичку анализу, са задовољством ће увидети да механика постаје новим делом анализе и биће ми захвалан за такво проширење подручја њене примене." И додаје: „Ја хоћу свести теорију механике и вештину решења која се односи на њене задатке на опште формуле из којих следе све једначине, неопходне за решавање било ког њеног задатка."

По узору на Њутна, који је на исти онтолошки ниво довео мировање и кретање, Лагранж у својој „Аналитичкој механици" на аналитички начин обухвата статичке и динамичке законе. Критички расправљао о локалним принципима и законима статике својих претходника: Архимеда (закон полуге), Стевина (равнотежа на стрмој равни), Галилеја (закон котураче), затим Декарта, Торичелија, Бернулијевих, Варињона, да би тек потом дао основни принцип статике, који данас обично називамо принципом могућих померања, по коме је, у случају равнотеже система материјалних тачака, збир радова спољашњих и унутрашњих сила, за могуће померање које задржавајуће везе допуштају, једнак нули,уз претпоставку да су почетне брзине свих тачака система једнаке нули. Основна предност овако уведеног принципа огледа се у примени на сложене системе, а састоји се у томе што се равнотежа система може одредити без растављања система на основне елементе, како се иначе у статици чинило. Спајајући принцип могућих померања са Даламберовим принципом, Лагранж уводи општу једначину динамике, данас познату под именом Даламбер-Лагранжев принцип, који гласи: *при произвољном кретању материјалног система са идеално задржавајућим везама, у сваком тренутку збир радова*[3] *свих активних сила и свих условно придодатих сила инерције на сваком могућем померању система једнак је нули.*

Овај диференцијални принцип, као својевремено и Њутнове аксиоме, није никаква индуктивна генерализација, нити исказ о ономе што се стварно дешава; то је једна појмовна а priori дата шема из које се, као и из Њутнових аксиома, могу извести експериментални закони кретања. Значај овог принципа за филозофију науке био је, пре свега, у томе што је коначно постало очигледно да једно опажено кретање тела не прописује само по себи ни један посебан начин описивања тог процеса. Опажена кретања могу се анализирати на различите начине. Критички посматрано, Њутнова и Лагранжева механика се нису разликовале у својој бити, јер су и једна и друга из тренутног стања система изводиле еволуцију посматраног динамичког система. Повезују их истоветна реверзибилност и узрочност.

Поред диференцијалног принципа који се формира локално, за одређени тренутак времена, Лагранж формира и један интегрални принцип, којим упоређује коначна померања за коначне временске размаке, а који је данас углавном познат као Мопертуи-Лагранжев принцип најмањег дејства.

Предисторија овог принципа налази се још у митовима и легендама. Тако је, у легенди о оснивању Картагине, Мутон, тирски краљ, оставио престо својој деци, Дидони и Пигмалиону, али је народ за владара поставио мушког наследника. Незадовољна Дидона лута морима и у Африци купује земљу, склопивши лукав уговор да њена величина одговара величини коже бика. Она кажу исеца на танке каишеве, које наставља један на други и тако успева да обухвати максимум земљишта, на коме гради своје краљевство, прелепи град Картагину. Уместо да крајеве састави, она их је отавила отвореним, јер су пали на обале мора. Тако је Дидона решила, ми бисмо данас рекли, изопериметријски варијациони задатак: дата је једна крива (морска обала), а знајући конфигурацију терена, треба повући нову криву дате дужине (дужина спојених каишева од коже) тако да површина обухваћеног земљишта унутар ове криве и оне задате буде максимална.

Сама историја принципа најмањег дејства, међутим, започиње Хероновом поставком принципа најкраћег пута светлости. Проблем се појавио онда када је уочено да при преламању, тј. при преласку светлости из једне у другу средину, она не следи најкраћи пут. После спора са Декартом, критички се односећи према Аристотеловој филозофији, по којој природа увек бира најкраћи пут, Ферма уочава да најкраћи пут не мора нужно да буде и најбржи, те формулише

[3]Лагранж под Галилејевим утицајем *рад* назива *моментом*.

свој принцип најкраћег времена, по коме, ако светлосни зрак, полазећи из тачке A у некој средини, стигне до тачке B у другој средини, варијација интеграла

$$\int_A^B \frac{ds}{V}, \qquad \left(\text{при чему је } \frac{ds}{dt} = V\right)$$

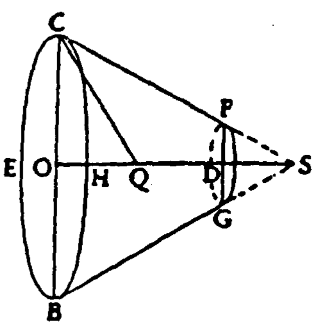
јесте једнака нули. Ово је, наравно, савремени запис овог принципа, јер у Фермаово време варијациони рачун још није био конструисан. При градњи свог принципа, Ферма је користио Снелов емпиријски закон преламања, конструишући истовремено, за разлику од Декарта, хипотезу да се светлост спорије креће у гушћој средини. Године 1682. Лајбниц публикује своја размишљања о проблему преламања светлости и Фермаовом принципу. Он формулише принцип „најлакшег" пута. Али, то је био поновни повратак Декартовим изворним идејама; тако Лајбниц сасвим погрешно закључује да се, због мањег расејавања, светлосни зраци брже крећу у стаклу, него у ваздуху. Све до Њутна екстремалност је тражена само у оптичким појавама. То никако није изненађујуће, јер је теорија светлости у то време била пре свега упрошћена геометријска оптика. Пренети задатак екстремалности у механику значило је сударити се са појмом дејства.

Њутн, који је у много чему већ био први, био је то и на овом пољу делатности. Он је први успео тачно да реши три екстремална задатка у динамици. Сасвим неоправдано историчари науке су потпуно запоставили ова три тако важна задатка за развој варијационог рачуна. Подсетимо да је тек девет година после објављивања *Принципа* Јохан Бернули поставио проблем брахистохроне, који се својом атрактивношћу наметнуо као темељ почетка развоја варијационог рачуна, упркос чињеници да је Њутн већ у то време владао елементима који чак прелазе оквире тог касније развијеног рачуна.

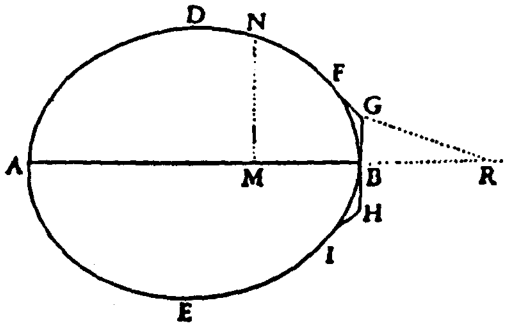
У другој књизи *Принципа*, која заједно са првом сачињава целину „*De motu corporum*", тј. *О кретању тела*, у пропозицији XXXV Њутн даје теорему 28: *Ако се, у реткој средини коју чине једнаке честице слободно распоређене на међусобно једнаким растојањима, кугла и цилиндар, једнаких пречника, крећу једнаким брзинама, у правцу осе цилиндра, отпор кугле биће два пута мањи од отпора цилиндра*. Затим Њутн дефинише ретку средину, па доказује теорему. И сада као круна следи заборављени схолијум, кога због важности преносим у целини из првог издања *Принципа*, уз оригиналне Њутнове скице:

„Eadem methodo figurae allae inter se quoad resistentiam comparari possunt, eseque inveniri quae od motus suos in Mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si base circulari $CEBH$, quae centro O, radio OC describitur, et altitudine OD, construendum sit frustrum coni $CBGF$, quod omnium eadem basi et altitudine constructorum et secundum plagam axis sui versus D progredientium frustorum minime resistatur: viseca altitudinem OD in Q et produc OQ ad S ut sit QS aequalis QC, et erit S vertex coni cuius frustum quaeritur.

Unde obiter cum anglus CSB semper sit acutus, consequens est, quod si solidum $ADBE$ convolutione figurae Ellipticae vel Ovalis $ADBE$ circa axem AB facta



Скица 1



Скица 2

generetur, et tangatur figura generanx a rectis tribus FG, CH, HI in punctis F, B et I, ea lege ut GH sit perpendicularis ad axem in puncto contactus B, et FG, HI cum aedem GH contineant angulos FGB, BHI graduum 135: solidum, qoud convolutione figurae $ADFGHIE$ circa axem eundem CB genertur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagant axis sui AB progrediatur, et utriusque terminus B praecedat. Quam quidem propositionem in constuenndis Navibus non inutilem futuram esse censeo.

Quod si figura $DNFG$ eiusmodi sit ut, si ab eius puncto quovis N ad axem AB demittature perpendiculum NM, et a puncto date G ducatur recta GR quase parallela sit rectas figuram tangenti in N, et axem productum secet in R, fuerit MN ad GR ut GR cub. ad $4BR \times GBq$: Solidum quod figurae huius revolutione circa axem AB facta describitur, in Medio raro et Elastico ab A versus B velocissime movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine et latitudine descriptum Solidum circulare.“

У својој суштини, у овом се схолијуму поставља проблем екстремалности и дају тачна решења која су засnoвана на услову минималности силе отпора. Укратко ту се ради о три варијациона задатка:

Од свих зарубљених правих конуса једнаких кружних основа $CEBH$ и једнаких висина OD (погледати скицу 1), најмањи отпор кретању у реткој и еластичној средини имаће онај, чије су изводнице одређене тачком S, која се добија када се у тачки Q, средини висине OD, нанесе дуж OS, једнака дужини CQ.

— Ако у тачкама F, B и I (погледати скицу 2), елиптичне или овалне фигуре, повучемо тангенте дужи FG, GH, HI тако да је $\sphericalangle FGB = \sphericalangle BHI = 135°$, тело које се добија обртањем фигуре $ADFGHIE$ око осе AB, имаће мањи отпор кретању у реткој и еластичној средини, у правцу осе AB, него тело настало обртањем фигуре $ADBE$.

— Ако је $DNFG$ (погледати скицу 2) таква крива да, када из произвољне тачке N повучемо нормалу NM на осу AB и из дате тачке G повучемо дуж

GR паралелно тангенти накривој у тачки N, важи пропорција:

$$MN : GR = GR^3 : 4(BR)(GB)^2$$

она тело, које се добија обртањем равне фигуре око осе AB, трпи најмањи отпор кретања у реткој и еластичној средини у поређењу са било каквим другим телом исте ширине и дужине.

Како се, данас, уз помоћ принципа максимума Понтрјагина могу решити ови задаци може се прегледно наћи у раду Јосифа Вуковића под насловом *О једном Њутновом проблему оптималности*. Њутнови резултати тј. решења која су везана за проблем екстремалности чекају и данас на своје потпуно признање.

Хајгенс, који је био врсни експериментатор, анализирајући резултате својих експеримената који су или везани за кретање материјалне тачке у пољу силе Земљине теже по циклоиди, закључио је да та крива има особину изохроности (тј. особину по којој период осциловања не зависи од почетних услова, већ само од полупречника генератрисе круга генератора циклоиде) и таутохроности (тј. особину материјалне тачке да пуштена низ циклоиду без почетне брзине из било које тачке стиже у своју најнижу тачку за исто време). Баш ти су резултати потакли Бернулијеве да, изучавајући проблем брахистохроне, између свих кривих посебну пажњу обрате на циклоиду. Године 1696. Јохан Бернули је европским математичарима поставио следећи задатак: да кроз две случајно изабране тачке у вертикалној равни која се налази у хомогеном пољу силе Земљине теже одреде облик оне криве по којој ће тачка, крећући се без трења, прећи задати пут за најкраће време. Проблем брахистохроне решили су тада Њутн, Ј. Бернули, Лопитал.

Да би се кренуло даље од проблема брахистохроне, било је потребно увести концепт дејства. Основна метафизичка поставка „принципа најмањег дејства" у механици припада „великом спљоштивачу", Французу Мопертуију. Наиме, једно од базичних питања које су себи постављали научници 18. века било је и оно о облику Земље. Картезијанци су тврдили да је Земља на половима издужена, а из Њутнове космолошке теорије следило да је Земља баш на половима спљоштена. У периоду од 1735. до 1737. спор је требало да разреше две експедиције — у Перу и Лапонију (на челу ове друге налазио се лично Пјер Мопертуи) — да би се измерила величина једног степена географске дужине. То је била само још једна од многих потврда надмоћности Њутнових теорија над Декартовим. На тај догађај Мопертију је остала успомена у виду надимка „велики спљоштивач". Према Мопертију „једноставност тера природу да делује на такав начин, да се деловање своди на најмању могућу меру." Али, шта је дејство? — Мопертуи му не даје прецизно квантитативно одређење. Тек у Ојлеровим радовима Мопертуијеве замисли су, уз помоћ новоразвијених аналитичких метода, добиле егзактан физички смисао. Изопериметријски задатак који је поставио Јакоб Бернули решио је Ојлер 1740. године, држећи се идеје Јохана Бернулија да ако нека крива линија има максимум или минимум, онда и сваки њен бесконачно мали део има иста својства. На крају расправе о изопериметрима, која је штампана у Лозани 1744. године, Ојлер показује да се, од свих могућих трајекторија, кретање материјалне тачке у пољу централне силе одвија по оној за коју је варијација интеграла

$$M = \int v\,ds,$$

једнака нули.

Развијајући, са своје стране, варијациони рачун, уводећи посебну ознаку за оператор могућег померања, Лагранж своди принцип најмањег дејства на варирање интеграла између две фиксне границе. За разлику од Ојлера, Лагранж под интеграл уводи кинетичку енергију („живу силу"), тако да му време постаје независно променљива величина, те се функционал, тј. интеграл дејства, може писати у облику:

$$B = \int_{t(P_1)}^{t(P_2)} 2T\,dt.$$

Тако принцип најмањег дејства гласи: од свих кривих C које пролазе кроз тачке P_1 и P_2, а за које потпуна енергија има једну те исту вредност, линија путање (директан пут) је она крива за коју дејство B има стационарну вредност. Питање када дејство B на директном путу има најмању вредност данас се решава помоћу кинетичких фокуса. Из ове формулације принципа, међутим, очигледно произилази неадекватност његовог општеусвојеног назива. Свакако би много адекватнији назив био: принцип стационарног дејства.

Овај Лагранжев интегрални принцип еквивалентан је Њутновој рационалној механици, али само када су везе холономне. Иако данас много коришћен, он је у почетку дуго чекао на своју легитимност; тако је још 1837. Поасон говорио да је то „само једно некорисно правило". У 19. веку, када су установљене конверзије између механичког кретања, топлоте, електрицитета иа магнетизма, закони одржања енергије почели су се чинити погоднијим за опште генерализације у физичким теоријама. Паралелно са тим новим токовима, несметано се наставља и развој принципа најмањег дејства. Хамилтон га трансформише тако што под интеграл уводи функцију $L = T - V$, такозвани лагранжијан, а затим следе доприноси Јакобија и Дирихлеа. Хелмхолц је у неколико радова, а нарочито у свом академском саопштењу „О физичком значењу принципа најмањег дејства" из 1886. године, том принципу удахнуо нови живот. Он из принципа најмањег дејства изводи закон одржања енергије и одатле закључује да тај принцип превазилази границе класичне механике. Теорија релативности и квантна механика потврдиле су велика „хеуристичка" очекивања која је Хелмхолц везао за овај принцип. Шредингер је изградио мост између Фермаовог и Хамилтоновог принципа. Данас, Фејнманов интеграл путање обећава јединствен математички приступ у оквирима нове физике. Али данас више нема места веровању да било какав математички принцип може надићи искуство. Без обзира на сву његову универзалност, ни принцип најмањег дејства, као уосталом ни било који други принцип, не сме се апсолутизовати — он нам не говори директно о природи, већ је део теоријски моделираних система.

Проблем дефинисања самог дејства, тј. његово вечито апостериорно увођење, битно умањује његову вредност у конституисању нових физичких теорија. А апсолутизовање принципа најмањег дејства, у жељи да се њиме опише све, у пракси га постепено трансформише у неоперативну и неразумљиву метафору. У свом капиталном делу Лагранж је са крајњмом строгошћу, мудрошћу и конзеквентношћу спровео Њутнов став о томе да предмет спознаје могу бити само чињенице, тј. да се могу спознати само односи између појава, али не и њихова бит, и да предмет спознаје не може бити ни питање о првим узроцима.

Захваљујући свом таленту да добро размисли пре него што било шта каже, Лагранж је успео да безбедно преброди недаће револуције. Тако је најскромнији и највећи математичар XVIII века постао миљеник и Наполеона, који је од њега начинио сенатора, грофа и великог официра Легије части.

У 18. веку искуство и практично знање у новооснованим инжењерским школама рационално је анализирано. За време француске револуције настава је у високим школама била прекинута из превентивних разлога. Монж је успео да издејствује код револуционарне владе да се организује једна инжењерска школа сасвим новог типа. У њој су све повластице при упису биле укинуте; уведен је пријемни испит; тежиште рада је било на математици, теоријској механици и физици. Та је школа отпочела са радом крајем 1794. године, а гласовито име Ecole Normal добила је 1795. У њој су предавали најистакнутији француски научници тог доба: Лагранж, Монж, Лазар Карно, Фурије, ... Када је 1797. отворена велика париска техничка школа, Ecole Polytechnique, Лагранж је у њој пред очима својих ђака развијао нове математичке методе.[4] Тамо где је он застао продужио је његов наследник на катедри, Луј Коши, чију је будућу величину Лагранж луцидно предвидео. У развоју наука које су се проучавале у тој новој великој школи, поред Лагранжа и Лапласа, учествовао је поново и Монж, зачетник нацртне геометрије (која је читавих петхаест година чувана као велика војна тајна!) — а затим и њихови ђаци: Кориолис, један од твораца техничке механике, Навије и Сен Венан, пионири теорије еластичности, Понселе, антипод Лагранжев, који је желео да „ослободи геометрију од хијероглифа анализе", те је тако стигао до пројективне геометрије, затим Поасон, Малис, Френел, Ампер, Н. Карно, Био, Геј-Лисак, ... Иако је био скептичан према даљем развоју математике (прогрес је видео искључиво у развоју природних наука), Лагранж је и последње године свога живота провео дивећи се другима, бодрећи их, али и директно их помажући, мада су они често имали сасвим другачије визије од његових — Фурије, Лежандр, Гаус, Пфаф, ...

Последњи пројекат на коме је Лагранж радио био је везан за увођење једнообразног система мерних јединица. Умро је 1813. године и сахрањен у монументалној згради париског Пантеона. Иза њега остало је његово велико дело, а врх Лагранжеве „величанствене пирамиде" краси његов принцип најмањег дејства, који нам отвара могућности да гледамо и испред себе и за собом. Тај нас принцип учи да пронађемо правац у коме ћемо се даље кретати.

[4] На пр. *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1797.

Он нам сугерише да се непрестано морамо уздизати изнад равни опажања, па чак и изнад равни експерименталних података и појединих закона, не бисмо ли онда, унутар свих тих равни, поново стали на чврсто тло. Превазилажење и уздизање које се овде предлаже служи пре свега изградњи и учвршћењу искуства.

ЛИТЕРАТУРА

V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, New York 1978.

E. T. Bell, *Men of mathematics*, New York, 1965.

M. Bunge, *Scientific research*, Berlin, 1967.

F. Burzio, *Lagrange*, Torino, 1942.

P. Duhem, *La théorie physique: son objet et sa structure*, Paris, 1914.

L. Euler, *Mechanica, sive motus scientia analytica exposita*, Peterburg, 1736.

R. Feynman, *The character of physical law*, London, 1965.

H. Helmholtz, *Schriften zur Erkenntnistheorie*, Berlin, 1921.

J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 1788.

З. Марић, *Огледи о физичкој реалности*, Београд, 1987.

М. Млађеновић, *Развој физике*, Београд

P. L. M. de Maupertuis, *Essai de la cosmologie*, Oeuvres, Lyon, 1756.

H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris, 1920.

Л. С. Полак, *Вариационные принципи механики*, Москва, 1960.

Д. Струик, *Кратак преглед историје математике*, Београд, 1969.

G. Vico, *Načela nove znanosti*, Zagreb, 1982.

Zoran STOKIĆ

LAGRANGES OR THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION

This paper is written in commemoration of the 200th anniversary of Lagrange's Analytical Mechanics.

In his *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, Newton for the first time exhibited mechanics in the form of an axiomatic theory of nature using mainly the apparatus of synthetic geometry. The development of the new analytical methods which began in the first half of the XVIII century naturally posed a question of reinterpretation of Newtonian mechanics and culminated in Lagrange's *Analytical Mechanics*. The essence of this monumental book is the Lagrange's formulation of the principle of least action and this essay is centered upon this principle.

Радмило ПЕШИЋ

ЕКОНОМСКИ СПИСИ КОСТЕ СТОЈАНОВИЋА

Име Косте Стојановића није непознато историчарима. Зна се да је био један од угледних српских политичара из првих деценија овог века, успешан министар народне привреде и фнансија Краљевине Србије за време и после царинског рата, те председник економско-финансијске секције у делегацији СХС на мировној конференцији у Паризу 1918. Историчарима математике и природних наука познато је да је био један од ванредних професора на новооснованом Универзитету у Београду 1905. године, да је предавао примењену математику (рационалну механику, небеску механику и математичку физику) и да је био савременик Михаила Петровића. Нажалост, међу историчарима и познаваоцима економске науке Коста Стојановић је недовољно познат[1] упркос чињеници да је највећи део радова посветио баш економским проблемима. Мада по примарном образовању није био економиста, завршио је Природно-математички одсек Филозофског факултета у Београду 1889. Стојановић се радовима на пољу теорије вредности сврстао међу најзанимљивије економске писце наше прошлости. Овај домен његовог рада представља један од упечатљивих, али и многобројних примера доприноса неекономиста економској науци.[2]

За Косту Стојановића може се рећи да је типичан представник српских интелектуалаца стасалих у другој половини 19. века. Рођен је преломне 1867. године у Алексинцу, у скромној трговачкој породици досељеника из околине Битоља. Био је један од најбољих ђака нишке гимназије, матурирао је 1885. и уписао студије на Природно-математичком одсеку Велике школе у Београду. Заједно са њим те године на исти одсек се уписао и Михаило Петровић који ће му доцније више пута бити од помоћи. Занимљиво је да је Стојановић био најбољи студент у тој иначе доброј генерацији талентованих и самосвесних будућих научника. Вредан и амбициозан, 1889. је дипломирао, а професорски

[1] О економском делу Косте Стојановића писали су: Благојевић Обрен, *Економска мисао у Србији до другог светског рата* Београд 1980. стр. 459–467. Пејић Лазар, *Развој економске мисли у југословенским земљама до првог и у Југославији између два светска рата*, Београд 1986. стр. 217–219.

[2] Мало која дисциплина може толико да захвали доприносима истраживача са других подручја науке (од медицине, преко математике и технике до филозофије и теологије) као економска наука. Могуће разлоге за то треба сагледати са више аспеката: в. J. A. Schumpeter, *Povijest ekonomske analize*. Zagreb, 1975.

испит положио 1890. године. Неко време службовао је у нишкој гимназии као професор математике. Ускоро, 1893. године добија стипендију и одлази у Париз где проводи школску годину, слушајући тада познате професоре, Поенкареа, Пикара, Апела, Кенига итд. Ту се поново сусреће са Михаилом Петровићем који је приводио крају рад на докторској дисертацији.[3] Петровићева подршка била је драгоцена за Косту Стојановића, који је прекратко боравио у Паризу да би могао докторирати. Ипак, контакт са водећим именима француске науке оставио је дубок утисак на њега. Упознао се са гледиштима француских научника с краја 19. века, као и са идејама о јединству међу разнородним појавама у природи и друштву. Сазревајући у истој интелектуалној средини са Михаилом Петровићем, како у току студија на Великој школи, тако и за време боравка у Паризу, Стојановић је дошао у контакт са истим научним погледима, што је условило да се и Стојановић и Петровић касније посвете истим истраживањима на пољу математичке феноменологије.

Коста Стојановић се још једном нашао у иностранству за време краткотрајног боравка у Лајпцигу 1897. где је слушао познатог професора Софус Лиа. По повратку у Србију, неколико година је провео у Београду, као професор у II мушкој гимназији. Искључиво захваљујући научним квалитетима, 1903. постао је хонорарни наставник Велике школе. Исте године са њим на Велику школу ступају Јован Жујовић и Милоје Васић, касније угледни и признати научници, сваки у свом домену, Жујовић као геолог, а Васић као археолог.

Одмах по отварању Универзитета Коста Стојановић је изабран за ванредног професора примењене математике на Филозофском факултету. И овом послу се предао са много жара трудећи се да наставу подигне на европски ниво. Нажалост, период његовог универзитетског рада нагло се прекида. Априла месеца 1906. постао је министар народне привреде, те се пуном снагом окренуо другим проблемима. Може се рећи да је овај мандат пао у време најтежих привредних сукоба Београда и Беча, за време царинског рата. Привредном успеху Србије у преломним годинама до 1908., нема сумња значајно је допринео и К. Стојановић. Ако се има у виду чињеница да се још као млад професор у Нишу бавио проблемима економске експлоатације Србије[4] и да је годинама самостално проучавао економску теорију, не изненађује што се у критичном тренутку нашао на одговорном и деликатном послу. Штета је једино што се дефинитивно одвојио од Универзитета и природних наука, те се посветио политици. Срећна је околност била да је 1909. године катедру примењене математике прихватио, тада већ реномирани инжењер и научник, Милутин Миланковић.[5]

---

[3] в. Драган В. Трифуновић, *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, Београд 1969.

[4] Коста Стојановић *О увозу и извоз Србије, питање третирано новим методом математичким*, Београд 1902. Повод за ову расправу биле су дилеме у вези са завршетком трајања аустро-српског трговинског уговора, закљученог 1981. године. Овај по много чему неповољан уговор за Србију, навео је К. Стојановића да покуша прецизно квантификовати његове штетне последице по привреду Србије. Тако је настала прва математичко-економска расправа код нас. Иако је објављена тек 1902. аутор је на њој радио од 1889. са прекидима.

[5] Т. П. Анђелић, *Катедра за механику* у споменици *Сто година Филозофског факултета*

По истеку мандата, Коста Стојановић приводи крају рад на два најзначајнија дела, *Основама теорије економских вредности* и *Тумачењу физичких и социјалних појава*[6]. Успех којим је окончан царински рат истакао је К. Стојановића, те је он од августа 1912. до априла 1913. био поново министар народне привреде; овог пута у условима и балканског рата. Избијање првог светског рата затекао га је као посланика у радикалској влади. Као човек од међународног угледа и бивши професор Универзитета од почетка је био укључен у политичке акције за одбрану Србије и остварење њених ратних циљева.[7] У току рата Стојановић је био председник клуба посланика у Ници. Време је, углавном, проводио пишући бројне студије, радове и новинске чланке посвећене привреди Србије.[8] Тако је сачинио и један од првих прорачуна националног богатства Србије за период до 1914., као и прецизну естимацију износа ратних штета.

По завршетку рата био је ангажован у раду мировне конференције. Потом се враћа у Београд и поново бива министар, овог пута финансија у новоснованој Краљевини СХС. Изненада је почетком 1921. умро, у зениту политичке каријере. Поред мноштва политичких и привредних говора и расправа, оставио је већи број научних радова из математике, механике и филозофије. Посебно заслужује пажњу покушај аутора да се бави економско-теоријским проблемима, уводећи математички начин изражавања и истраживања економских појава. Нажалост, ови радови данас су готово заборављени. Не налазећи ни на какав одјек, нити плодно тло за развој, идеје изнете у њима остале су непознате ширим круговима. Разлози су били вишеструки. На првом месту релативно низак теоријски ниво и непознавање математике, условило је да представници академске економске науке у Србији тог доба, а и доцније, нису могли да разумеју студију *Основи теорије економских вредности*. Други узрок пада у заборав лежи у томе што ова књига није преведена ни на један страни језик, те је светској науци остала недоступна. На крају неповољан историјски сплет околности, изазван ратовима од 1912. до 1918. и прерана ауторова смрт, дефинитивно су довели до губитка интересовања за њу.

Основи теорије економских вредности, најзрелије економско дело Косте Стојановића, настало је као плод вишегодишњих истраживања на пољу математичке феноменологије. Иако је ова књига објављена пре Петровићевих *Елемената математичке феноменологије*, примат у овој области, код нас, несумљиво припада Михаилу Петровићу, чија су истраживања не само по

у Београду, Београд 1963.

[6] К. Стојановић, *Основи теорије економских вредности*, Београд 1910. К. Стојановић, *Тумачење физичких и социјалних појава*. Београд, 1910. Иако су *Основе теорије економских вредности* публиковане 1910. у оквиру посебних издања Академије наука као једно од награђених дела из фондова Академије, ова књига брзо је пала у заборав, што је велика штета.

[7] в. др Љубинка Трговчевић, *Научници Србије и стварање југословенске државе 1914–1920*, Београд, 1986.

[8] Stoyanovitch, Costa, *Economic Problems of Serbia*, Paris 1919. Stoyanovitch, Costa, *La Serbie economique a la veille de la Catastrophe de 1915*, Paris, 1919. Stoyanovitch Costa, *The Commerce of Serbia; a Historical Sketch and Survey*, Rome 1919.

предмету шира, већ и раније започета. Док се Михаило Петровић бавио откривањем функционалних аналогија између појава из електицитета, магнетизма, кинетике гасова, хемије, биологије итд. Коста Стојановић се задржао само на успостављању везе између теорије вредноти и термодинамике, сматрајући да се истим обликом функција могу описати процеси у науци о топлоти и економији.[9] Резултати до којих је дошао имали су различит домет и научну вредност. Детерминистички, на моменте вулгарни физикализам, уз мноштво исфорсираних, чак нетачних аналогија између физичког света и друштвено-економских појава, основни су недостаци његових теоријских погледа. Често занемаривање специфичности и суштине економских појава и процеса, учинило је неке од ауторових закључака или чистим таутологијама, или економски бесмисленим тврђењима. Ипак, треба истаћи оне вредне, валидне констатације и гледишта која су овом раду дала пионирски карактер. На првом месту то је сам покушај успостављања веза између економских процеса и термодинамике. Стојановић се опредељује за топлотне појаве као најадекватније за успостављање аналогија са економским процесима, при чему појединачни привредни субјекти играју улогу која се може упоредити са кретањем молекула у науци о топлоти. Ова полазна поставка значајно утиче на резултате до којих је аутор дошао. Она пружа основе за критику, али у исто време открива низ занимљивих и оригиналних резултата.

Погрешна је претпоставка и намера Косте Стојановића да економску теорију прикаже као једно поглавље из термодинамике. Наиме, он једноставно замењује у изразима I и II закона термодинамике, физичке величине, економским; притисак замењује понудом, температуру тражњом, запремину вредношћу робе, количину топлоте капиталом, енергију богатством, а механички рад економским радом.[10] Овакав поступак мора се прихватити са великом резервом, јер ни Стојановић, ни Петровић, који је коментарисао Стојановићеве резултате, не дају образложење зашто се баш притисак изједначује са понудом, температура са тражњом, капитал са топлотом итд. На овај начин многи од успостављених односа и из њих изведени закључци имају апсурдан садржај што пружа основе за критику. Међутима, неки Стојановићеви резултати имају вредност са аспекта данашње науке. На првом месту то је концепт ентропије економских система који је Стојановић изнео у својим радовима, више од пет деценија пре савремених економиста.

Седамдесетих година овог века продире утицај термодинамике у економску

---

[9] Ради се о функцији $f(p, T, v) = 0$ која представља једначину стања у термодинамици, при чему p означава притисак, T температуру, а v запремину (Геј-Лисак). Стојановић је сматрао да иста једначина стања важи и у економији при чему p означава понуду, T тражњу, а v вредност роба. Детаљније о овом види: Драган Трифуновић, *Коста Стојановић — претходник и савременик математичке феноменологије Михаила Петровића*. Дијалектика 3–4, 1979, Београд, стр. 219–221.

[10] Михаило Петровић у *Елементима ...* интерпретира и коментарише Стојановићеве резултате из *Основа теорије економских вредности* дајући таблицу хомологних елемената за Стојановићево аналошко језгро економија — термодинамика. В. Михаило Петровић, *Елементи математичке феноменологије*, Београд, 1911, стр. 733.

анализу[11] и науку о организацији.[12] Појам ентропије, изворно везан за науку о топлоти, добија нов смисао, те постаје незаобилазан у овим дисциплинама.

Захваљујући нарочито радовима угледног америчког економисте румунског порекла Николаса Ђорђеску-Роегена[13] и његових следбеника, на челу са Џереми Рифкином[14] економска наука бива обогаћена новим гледиштима на привредни развој, гледиштем у коме централно место имају неповратни процеси искоришћавања ограничених природних ресурса које човечанство немилосрдно троши, смањујући шансе за будућност. Економску стварност данашњег човечанства одликују све ограниченији извори енергије, загађено окружење, све мање резерве сировина, као и растући процеси деградације природе. У оваквим условима, када економска активност доводи до неповратних процеса и непоправљивих стања, поставља се питање оправданости и осмишљености привредног развоја који све више постаје сам себи циљ. Ђорђескуово везивање привредне и друштвене историје, али и будућности човечанства за коришћење ниске ентропије из природе, делује као снажна опомена.

Значајно је рећи да је сличну идеју почетком века изнео Коста Стојановић. Замењујући физичке величине економским (конкретно, количину топлоте — Q капиталом — k, а температуру — T тражњом — θ), Стојановић у форми Клаузијусовог интеграла добија израз за ентропију економских система.[15]

$$H = \int \frac{dQ}{T}, \quad \text{Клаузијусов интеграл}$$

$$H = \int \frac{dk}{\theta}, \quad \text{Стојановићев интеграл за ентропију економских система}$$

Суштина овог израза је да је ентропија у економији заправо мера деградације фактора производње коју једна средина доживљава у току привредног и културног развоја.[16] Другачије речено, ентропија економских система одражава промене у једној средини током времена.

Са пуно основа се може рећи да је Коста Стојановић, претходио закључцима Ђорђескуа и осталих заступника савремене теоријске економије ресурса. Наиме,

---

[11] Fransoa Peru, *Zasnovanost ekonomske nauke na termodinamičkoj inspiraciji*, Економски анали 70–71/1981.

[12] D. Malić, *Elementi kibernetike u svetlu termodinamičkih metoda*, Београд 1973. D. Malić, *Drugi princip termodinamike u svetlu zakona održavanja organizacije*, Zbornik radova sa skupa „100 godina mašinstva", Beograd 1973.

[13] Georgescu-Roegen Nicholas, *The Entropy Law the Economic Process*, Cambridge, Mass. 1971. Georgescu-Roegen Nicholas, *Energy and Economic Myths*, Southern Economic Journal 41 (January 1975). Georgescu-Roegen Nicholas, *Inequality, Limits and Growth from a Bioeconomic Viewpoint*, Rew. of Social Economy 35 (December 1977).

[14] Jeremy Rifkin, *Entropy — a New World View*, New York, 1980.

[15] К. Стојановић, *Основи теорије економских вредности*, стр. 152–182.

[16] Да би то било јасније подсетимо се да К. Стојановић ниво привредног и друштвеног развитка једне срдине поистовећује са нивоом укупне тражње у њој (k), а да капитал (Q) посматра као „најнижи", боље речено, последњи или дефинитивни облик трансформације економске енергије тј. друштвеног богатства једне средине.

полазећи од I принципа термодинамике (закона конзервације енергије), замењујући физичке аналогним економским дошао је до једначине промена друштвеног богатства у зависности од промена у укупној количини капитала и рада и назвао је „први економско-динамички закон".[17]

$$dE = dk + A\,d\tau$$

E — економска енергија — богатство

k — капитал; τ — рад

Овај „закон" није ништа друго до добро познат економски принцип, овог пута изложен на специфичан начин, да промена друштвеног богатства зависи од промена у минулом и живом раду, са којима једно друштво располаже. Оно чиме Стојановић претходи ставовима Ђорђескуа и следбеника јесте тврђење „да у економији E, k, и τ расту или опадају на рачун истих природних количина",[18] тј. да се економска енергија (синоним за друштвено богатство) повећава на рачун природне енергије. Сличну идеју Коста Стојановић је више пута поновио у књизи *Тумачење физичких и социјалних појава*[19] опомињући да се паралелно са процесом стварања економских вредности одвија процес деградације природе. Тиме се значајно приближио савременим погледима теоријске економске ресурса.

Не мање занимљиво је Стојановићево поимање економских закона. Он добро уочава стохастички карактер веза између економских појава и процеса.[20] Чињеница да економски закони нису детерминистичког карактера, већ да се испољавају у маси случајева, као преовлађујуће тенденције, уз одређен степен вероватноће, оправдава повезивање термодинамике и економике.

Крајем прошлог и почетком овог века у физику продиру схватања о стохастичком карактеру топлотних процеса. Радовима Болцмана и Џибса дефинитивно се решава супротност између термодинамике и механике, увођењем вероватноће. Стохастички приступ физици апстрахује кретања појединачних молекула, он изражава понашање мноштва честица, даје опште црте појава, бришући индивидуалне карактеристике делова. Отуда стохастички приступ налази примену уповезивању микро и макро структура у науци о топлоти.

Исто тако за економску науку својствено је стохастичко повезивање микро и макро структуре. Оно што одређује стање макроекономског система јесте просек стања мирко-субјеката, а не стање сваког микро-субјекта понаособ. Овакво гледиште приближава науку о топлоти и економску теорију, те даје за право Кости Стојановићу што је покушао да успостави везу између економских и појава и термодинамике.

Познато је да су природне науке често и на разне начине, директно или не, методима и резултатима инспирисале и опредељивале развитак друштвених

[17] Исто, стр. 107–108.

[18] Исто, стр. 183.

[19] Коста Стојановић, *Тумачење физичких и социјалних појава*, Београд, 1910, стр. 89–122.

[20] Шари Жид и Шари Рист, *Историја економских доктрина од физиократа до наших дана*. Свеска прва, Београд, 1921. Предговор написао Коста Стојановић, стр. XVIII–X.

наука. То важи и за однос економске теорије и њутновске механике.[21] Теорије привредних циклуса, пример су заснивања економских сазнања на феномену периодичног кретања. Међутим, један продубљен поглед на економске појаве открива бројне недостатке њутновске механике, као логичког оквира за објашњавање друштвено-економских феномена. Економика ресурса, као део глобалне макроекономије, допринела је стварању слике о привредним процесима као иреверзибилним у времену. Таквој слици далеко више одговара термодинамика као оквир научне анализе. Наиме, у Њутновој механици смер протока времена је споредан, а процеси реверзибилни. Омиљен и у литератури често примењиван поступак приказивања економских процеса у виду кружних токова плод је њутновског гледишта. На другој страни, у науци о топлоти проток времена има далеко већи значај. Усмереност енергетских токова и њихова иреверзибилност везани су за време. Овакво гледиште је далеко ближе економској стварности ограничених ресурса, загађеност окружења, деградиране природе, те битно умањених могућности за експанзију. Отуда термодинамички принципи постају данас релевантни и за економску науку која је традиционално везана за проблем најповољније алтернативе употребе оскудних ресурса. За Стојановића се слободно може рећи да је пионир термодинамичке оријентације у економској науци.

У оквирима наше науке, Кости Стојановићу припада примат и као писцу прве економско-математичке расправе. Повезујући знања из математике и политичке економије, од 1889. са прекидима до 1902. радио је на расправи *О увозу и извозу Србије*.[22] Иако се примењени метод у овом раду нашао потпуно у функцији захтева да се научно објасни и квантитативно одреди експлоатација у трговинским односима Србије и Аустро-Угарске, његова оригиналност лежи у теоријском концепту.

За разлику од савременика усмерених на анализу равнотеже, Стојановићев теоријски ослонац је био у нечему што веома наликује на опортунитетне трошкове. Конкретно, аутор је покушао да прецизно одреди колико Србија губи тиме што извози сировине, уместо да их прерађене у финалне производе извезе, или другачије речено, шта би све привреда Србије могла да оствари, уколико би се определила за прераду сопствених сировина.

У оригиналном моделу, ефекти спољнотрговинске размене исказани су не само глобално, већ подељени на главне учеснике у привреди: произвођаче сировина, прерађиваче — индустрију, посреднике — трговину и државу, која преко пореза и царина учествује у расподели „добити“ или „губитака“ од размене.

---

[21] О утицају класичне њутновске механике на економску теорију особито на концепције опште равнотеже писано је пуно. Осим Шумпетера, о овоме су писали Волд, Дебре, Куене, Купманс итд. Издвајамо гледиште Тинтнера и Сенгупте из 1972. не само због критике овог утицаја, већ због захтева за употребом стохастичког приступа економској анализи. В. Gerhard Tintner, Jati K. Sengupta, *Stochastic Economics*, London 1972.

[22] Коста Стојановић, *О увозу и извозу Србије; питање третирано новим методом математичким*, Београд, 1902. Ова расправа је објављена у неколико наставака и у часопису Финансијски преглед св. XIII, XIV, XV, Београд, 1902.

На крају, Стојановић је покушао да квантификује ефекте нееквивалентне размене, уводећи конкретне величине у модел, што представља најслабији део расправе јер се у недостатку адекватних статистичких података послужио произвољним проценама. У доба настанка ова расправа прихваћена је више као програмски текст у борби Србије за економску еманципацију, него као теоријска новина.

Осим ових радова са подручја економске теорије, Коста Стојановић је оставио мноштво списа из домена економске политике, филозофије, природних наука, књижевности и преводилаштва. Између осталог, преводио је и писао о Руђеру Бошковићу. Све што је објавио за живота и много шта што је остало у рукописима[23] сведочи да се ради о личности која је значајно надмашила не само средину него и време у ком је стварала.

Radmilo Pešić

THE ECONOMIC WORKS OF KOSTA STOJANOVIĆ

The article deals with the little-known economic research of Kosta Stojanović, a prominent Serbian politician and scientist from the beginning of this century. Kosta Stojanović not only was a contemporary of but also held the same views as Mihailo Petrović. Influences by the same intellectual environments, both during their studies at Belgradle's High School and while at Ecole Normale Supérieure, these two scientists came into contact with the same ideas, which accounts for the fact that later they devoted themselves to the same research in the field of mathematical phenomenology. Unlike Mihailo Petrović, whose research in mathematical phenomenology covered a far wider area and who established functional analogies between various nastural phenomena, Stojanović linked thermodynamic and economic processes in his most important work *The Foundations of the Theory of Economic Values*.

The results he had are of varying significance and acientific value. The deterministic, sometimes oversimplified physicalism, along with a large number of erroneous analogies between the physical world and socioeconomic phenomena, is the basic defect of his economic theory. His frequent overlooking of the specific character of economic phenomena made some of his conclusions either tautologies or meaningless statements as far as economics is concerned. However, there are valuable and valid observations and views, which give this work its pioneer character. Of the greatest importance is the effort to discover links between economics and thermodynamics, whereby Stojanović largely foreshadowed some of the views held by economic theory today (F. Peru and associates). Relates to this are Stojanović's study of the second principle of thermodynamics, its application to economic

[23] Према речима проф. др Д. Трифуновића, седамдесетих година, породица, на наговор академика Павла Савића, даје сву заоставштину К. Стојановића проф. др Д. Трифуновићу, ради писања монографије о К. Стојановићу. По употреби ове заоставштине, проф. др Д. Трифуновић предао ју је Музеју града Београда, као поклон породице и свој лични. Тиме је обухваћено око три стотине јединица рукописа, бележака, писама и остале грађе. Нешто мање грађе налази се у Архиву САНУ, а неколико писама и у Народној библиотеци Србије. Монографију о Кости Стојановићу проф. др Трифуновић је написао и она ће се објавити тек после 1994. године.

processes and the introduction of the concept of entropy of economic systems. In this way Kosta Stojanović antedated by more than five decades the views of the distinguished American economist Nicholas Georgescu-Regen and his followers, the most prominent of whom is Jeremy Rifkin.

In the context of Yugoslav science, Kosta Stojanović is important as author of the first economic-mathematical treatise among the Serbs. Relating his knowledge of mathematics to that of political economy, he worked,with interruptions, from 1889 till 1902 on the treatise *On Import and Export in Serbia: with the Application of a New Mathematical Model*. This treatise was not only something new because of the application of mathematics to economic analysis but also theoretically based on something very much resembling the concept of opportune expenses. Unfortunately, these works were forgotten soon after they were published. Experiencing no reaction whatever in an atmosphere unfavorable for their further development, the ideas put forward in them have remained unknown to the general scientific public. When they are analyzed in view of the modern achievements of economics, they reveal that their author greatly surpassed not only his esvironment but also the time in which he worked.