

ACADÉMIE ROYALE SERBE

BULLETIN

DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET NATURELLES

A. SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET PHYSIQUES

Nº 4

BELGRADE

1938

Štamparija
„MLADA SRBIJA“ — Beograd.
Uskočka 4. — Tel. 21-352.

SOMMAIRE

<i>M. Milankovitch</i>	— Neue Ergebnisse der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen	1
<i>Michel Petrovitch</i>	— Sur une espèce de quasi-invariants numériques	43
<i>M. N. Saltykov</i>	— Théorie de transformations tangentielles	61
<i>Anton Bilimovitch</i>	— Sur le coefficient d'extension d'un domaine	71
<i>Anton Bilimovitch</i>	— Sur les coefficients de dissymétrie	91
<i>Dragoljub Marković</i>	— Sur les limites des zéros réels des polynomes	101
<i>Dragoslav S. Mitrinovich</i>	— Recherches sur les lignes asymptotiques	105
<i>J. Karamata</i>	— Einige Sätze über die Riesz-schen Mittel	121
<i>Michel Petrovitch</i>	— Sur les séries entières doubles	139
<i>W. Jurdetzky</i>	— Sur les conditions d'équilibre d'une masse fluide avec un flotteur	149
<i>W. Jurdetzky</i>	— Remarque sur les figures d'une masse fluide en rotation permanente	155

100 - 1
 50 - 2
 30 - 3
 50 - 4
 30 - 5
 10 - 6
 30 - 7
 40 - 8
 30 - 9
 100 - 10
 10 - 11

<i>M. Radojčić</i>	— Sur l'ensemble des faisceaux transcendants au voisinage d'une singularité essentielle d'une fonction analytique .	159	20
<i>Anton Bilimovitch</i>	— Sur les recherches intrinsèques en Géométrie et Mécanique	169	20
<i>Anton Bilimovitch</i>	— Ueber einige lineare spezielle kanonische Transformationen	177	20
<i>Ing. J. I. Shell</i>	— Die Wärmeübergangszahl von Kugelflächen bei natürlicher Konvektion	189	10

Neue Ergebnisse der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen

VON

M. MILANKOVITCH

(Vorgelegt in der Sitzung der Akademie der Naturwissenschaften vom 26-XII-1933.)

Einleitung. Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung der Untersuchungen über den säkularen Gang der Erdbestrahlung und dessen Folgen, die in meiner „Mathematischen Klimalehre“¹⁾ ihre Veröffentlichung fanden. Die ausgiebige Anwendung der Ergebnisse dieses Werkes seitens der Klimatologen und der Geologen hat in sehr willkommener Weise meine jetzigen Untersuchungen auf neue Wege geführt, auf denen manche wichtige Spezialfrage des paläoklimalen Problems geklärt werden konnte. Dies gilt namentlich von folgenden zwei Fragen. In meiner „Mathematischen Klimalehre“ ist der säkulare Gang der Bestrahlung der tropischen Zone der Erde nicht zur Behandlung gelangt. Dies führte zu der irrtümlichen Auffassung, dass mit der astronomischen Theorie die in den Tropen nachweislich stattgefundenen Schneegrenzeververschiebungen nicht zu erklären sind. Ausserdem konnte der in der „Mathematischen Klimalehre“ abgeleitete, zum säkularen Bestrahlungsgang zugehörige Temperaturgang nur eine beschränkte Anwendung finden, weil er nur für nichtvereiste Gebiete giltig ist, was ebenfalls zu Missdeutungen geführt hat. Diese zwei Fragen mögen also hier ihre Lösung finden. Es soll

¹⁾ *Milankovitch*, Mathematische Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwankungen. Berlin 1930.

nicht nur gezeigt werden, dass der säkulare Bestrahlungsgang der tropischen Zone exakt behandelt werden kann, vielmehr soll dieser Gang hier zur numerischen Darstellung gelangen. Es sollen hier, um die thermischen Effekte des säkularen Bestrahlungsganges der Erde greifbar zu veranschaulichen, statt des säkularen Temperaturganges die säkularen Verschiebungen der Schneegrenze in den Bereich der Untersuchungen gezogen werden, weil sich diese Verschiebungen zwanglos und ohne einschränkende Voraussetzungen als eine direkte Folge des säkularen Bestrahlungsganges deuten lassen und weil durch dieselben die mit Hilfe des Temperaturganges schwer zu behandelnde Frage der Vereisungen der Erdoberfläche an ihrer Wurzel erfasst und zahlenmässig beantwortet werden kann. Diesen numerischen Darstellungen, die das wichtigste Ergebniss dieser Abhandlung bilden, müssen einige theoretische Betrachtungen vorausgeschickt werden, die sich an die Untersuchungen der „Mathematischen Klimalehre“ eng anschliessen und auf die auch hinsichtlich der hier zur Verwengung gelangenden Bezeichnungen verwiesen werden muss.

Die kalorischen Jahreszeiten der tropischen Zone. Als kalorische Halbjahre der aussertropischen Zonen der Erde sind in der „Mathematischen Klimalehre“ die beiden Zeitintervalle des Jahres bezeichnet worden, die auf Grund des folgenden Kriteriums zu ermitteln sind. Man teilt das Jahr in zwei einander vollkommen gleiche Intervalle, von denen jedes also die Länge von 182,62 Tagen aufweist und von denen das erste, das kalorische Sommerhalbjahr, alle jene Tage umfasst, während welcher die Bestrahlung der in Betracht gezogenen geographischen Breite stärker ist als an irgend einem Tage des anderen Halbjahres. Bezeichnet t_1 den Zeitpunkt des Beginnes des kalorischen Sommerhalbjahres und t_2 jenen des Endes dieses Halbjahres, so ist das aufgestellte Kriterium durch folgende zwei Gleichungen mathematisch ausgedrückt

$$(1) \quad t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$$

$$(2) \quad w(t_2) = w(t_1)$$

worin T die Länge des tropischen Jahres und w die mittlere, pro Zeiteinheit berechnete Bestrahlung der in Betracht gezogenen

geographischen Breite bezeichnet. Dabei soll t_1 dem Frühlings-äquinoktium benachbart sein.

Das soeben aufgestellte Kriterium kann auch auf eine andere Weise gedeutet werden. Die dem kalorischen Sommerhalbjahr zugehörige Strahlungsmenge ist durch das nachstehende Integral veranschaulicht:

$$(3) \quad Q_s = \int_{t_1}^{t_1} w(t) dt = \int_{t_1}^{t_1 + \frac{T}{2}} w(t) dt.$$

Bildet man die Ableitung des obigen Ausdruckes nach t_1 , so erhält man

$$(4) \quad \frac{dQ_s}{dt_1} = w\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) - w(t_1) = w(t_2) - w(t_1).$$

Die Forderung (2) ist also gleichbedeutend mit der Forderung

$$(5) \quad \frac{dQ_s}{dt_1} = 0$$

d. h. mit der Forderung, dass der Beginn des kalorischen Sommerhalbjahres derart gewählt werden möge, dass die Strahlungsmenge Q_s ihren extremen Wert erreiche.

Es ist

$$(6) \quad \frac{d^2Q_s}{dt_1^2} = w'(t_2) - w'(t_1).$$

Berücksichtigt man, dass an den aussentropischen Breiten der Beginn des kalorischen Sommerhalbjahres, wie in der „Mathematischen Klimalehre“ gezeigt, dem Frühlingsäquinoktium sehr benachbart ist, so ist zu Beginn dieses Halbjahres die Bestrahlung w im Aufstieg, und zu Ende dieses Halbjahres im Abstieg. Es ist deshalb

$$(7) \quad w'(t_1) > 0 \quad ; \quad w'(t_2) < 0,$$

d. h.

$$(8) \quad \frac{d^2 Q_s}{dt_1^2} < 0.$$

Deshalb stellt das kalorische Sommerhalbjahr jenes Intervall des Jahres dar, welches eine gegebene Länge $\frac{1}{2}T$ aufweist und dessen Beginn t_1 derart gewählt ist, dass die diesem Halbjahr zugehörige Strahlungsmenge ihr Maximum erreicht. Das kalorische Winterhalbjahr hat dieselbe Länge, seine Strahlungsmenge ist dagegen auf das Minimum herabgedrückt.

In der tropischen Zone, und zwar zwischen den Breiten -15° und $+15^\circ$, weist der jährliche durch w dargestellte Bestrahlungsgang zwei Maxima und zwei Minima auf, weshalb a priori nicht behauptet werden kann, dass die Bedingung (7) erfüllt werden wird, so dass der Ausdruck (8) auch positiv und in besonderen Fällen auch Null werden kann. Hier kann also geschehen, dass während des dem Sommerhalbjahr der in Betracht gezogenen Hemisphäre näher liegenden Zeitintervalles t_1 bis t_2 die Strahlungsmenge Q_s das Minimum und die den anderen Zeitintervall zugehörige Strahlungsmenge Q_w das Maximum veranschaulicht, so dass $Q_s < Q_w$ sein wird. In einem solchen Falle findet an der in Betracht gezogenen Breite eine Inversion der Jahreszeiten statt. Wann ein solcher Fall eintreten muss, wird später gezeigt werden.

Die nach dem soeben aufgestellten Kriterium ermittelten kalorischen Jahreszeiten in der tropischen Zone erfüllen die Bedingung, dass die ihnen zugehörigen Grössen Q_s und Q_w das Maximum bzw. das Minimum der Bestrahlungsmenge darstellen und sich durch diese Eigenschaft von den entsprechenden Strahlungsmengen der aussertropischen Zonen nicht unterscheiden und aus diesem Grunde im paläoklimalen Problem dieselbe Verwendung finden können wie die den kalorischen Jahreszeiten zugehörigen Strahlungsmengen der aussertropischen Zonen. Wie diese Strahlungsmengen ermittelt werden können, soll nachstehend gezeigt werden.

Die den kalorischen Jahreszeiten zugehörigen Strahlungsmengen. Die nach dem soeben aufgestellten Kriterium den kalorischen Jahreszeiten entsprechenden Strahlungsmengen Q_s (Sommerhalbjahr) und Q_w (Winterhalbjahr) sind, wie in der „Mathematischen Klimalehre“ (122) bis (124) gezeigt, durch die nachstehenden Ausdrücke dargestellt:

$$(9) \quad \begin{cases} Q_s = W_s - m \sin \Pi \\ Q_w = W_w + m \sin \Pi \end{cases}$$

$$(10) \quad m = \frac{2(b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots) T J_0}{\pi^2 \sqrt{1 - e^2}}$$

Ziehen wir die Gleichungen (46), (47), (44), (71) und (32) der „Mathematischen Klimalehre“ heran, d. h. die Gleichungen

$$(11) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{J_0}{\rho_2} \cos \varphi [n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0]$$

$$(12) \quad n = \tan \varphi$$

$$(13) \quad \cos \psi_0 = -n \tan \delta$$

$$(14) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{J_0}{\rho^2} \left[b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + \right. \\ \left. + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - + \dots \right]$$

$$(15) \quad \sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda$$

Diese Gleichungen gelten für alle in Betracht zu ziehenden Längen λ der Sonne. Es wird für $\lambda = 0$ wegen (15)

$$\delta = 0,$$

d. h. mit Rücksicht auf (13)

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} ,$$

also wegen (11) und (12)

$$(16) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{J_0}{\rho^2} \cos \varphi ,$$

Die Gleichung (14) liefert dagegen mit $\lambda = 0$

$$(17) \quad w = \frac{1}{\pi} \frac{J_0}{\rho^2} [b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - + \dots]$$

Es folgt also aus (16) und (17)

$$(18) \quad b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - + \dots = \cos \varphi ,$$

so dass man statt (10)

$$(19) \quad m = \frac{2 T J_0}{\pi^2 \sqrt{1-e^2}} \cos \varphi$$

erhält.

Die Exzentrizität e der Erdbahn bleibt immer so klein, dass ihr Quadrat neben der Einheit vernachlässigt werden kann. Man bekommt also

$$(20) \quad m = \frac{2 T J_0}{\pi^2} \cos \varphi$$

Der Koeffizient m ist also von der Zeit unabhängig.

Die Gleichungen (9) gelten für die Nordhemispäre der Erde; für die Südhemispäre ist

$$(21) \quad \begin{cases} \bar{Q}_s = W_s + me \sin \Pi \\ \bar{Q}_w = W_w - me \sin \Pi \end{cases}$$

Die durch (9) und (21) dargestellten Funktionen sind auf dem ganzen Intervall der geographischen Breiten stetig und können also auch für die tropische Zone verwendet werden. Auch hier gelten die in der „Mathematischen Klimalehre“ abgeleiteten Formeln für die säkularen Änderungen ΔQ_s , ΔQ_w der Strahlungsmengen Q_s und Q_w d. h. die Formeln

$$(22) \quad \Delta Q_s = Q_s - Q_s^0 \quad ; \quad \Delta Q_w = Q_w - Q_w^0$$

$$(23) \quad \begin{cases} \Delta Q_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon - m \Delta (e \sin \Pi) \\ \Delta Q_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon + m \Delta (e \sin \Pi) \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} \Delta \bar{Q}_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon + m \Delta (e \sin \Pi) \\ \Delta \bar{Q}_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon - m \Delta (e \sin \Pi) \end{cases}$$

Dabei ist

$$(25) \quad \Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$$

$$(26) \quad \Delta (e \sin \Pi) = e \sin \Pi - e_0 \sin \Pi_0 ,$$

worin Q_s^0 , Q_w^0 , ε_0 , e_0 , Π_0 die der Gegenwart entsprechenden Werte von Q_s , Q_w , ε , e , Π bedeuten.

Der kalorische Aequator. Jene geographische Breite, an der die Strahlungsmengen Q_s und Q_w einander gleich sind, kann als der kalorische Aequator bezeichnet werden, weil hier beide Halbjahre kalorisch äquivalent sind. Die Lage des kalorischen Aequators kann wie folgt ermittelt werden.

Der kalorische Aequator liegt nach seiner soeben gegebenen Definition an jener geographischen Breite φ , an der

$$(27) \quad Q_s = Q_w$$

ist.

Es folgt aus (27) und (9)

$$(28) \quad W_s - W_w = 2 m e \sin \Pi,$$

d. h. wegen (19)

$$(29) \quad W_s - W_w = \frac{4 T J_0}{\pi^2 \sqrt{1-e^2}} e \cos \varphi \sin \Pi.$$

Zieht man die Gleichung (85) der „Mathematischen Klimalehre“ heran, d. h. die Gleichung

$$(30) \quad W_s - W_w = \frac{T J_0}{\pi \sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \varepsilon,$$

so folgt aus den letzten zwei Gleichungen

$$\pi \sin \varphi \sin \varepsilon = 4 e \cos \varphi \sin \Pi,$$

d. h.

$$(31) \quad \tan \varphi = \frac{4 e}{\pi} \frac{\sin \Pi}{\sin \varepsilon}$$

wodurch die Lage φ des kalorischen Aequators eindeutig gegeben ist.

Gegenwärtig liegt der kalorische Aequator fast ganz genau am dritten Breitengrad nördlich. Weil hier $Q_s = Q_w$ und nördlich davon $Q_s > Q_w$ ist so ist an den Breiten von 0° bis 3° $Q_s < Q_w$. Hier findet also eine Inversion der Jahreszeiten statt, das kalorische Sommerhalbjahr fällt bis auf eine geringe Verschiebung mit dem Winterhalbjahr der Nordhemisphäre zusammen. Diese Breiten gehören, weil sie südlich des kalorischen Aequators liegen, kalorisch zur Südhemisphäre. Auch während der geologischen Vorzeit haben, wie wir aus den nachstehenden numerischen Angaben ersehen werden, solche Inversionen der Jahreszeiten an den niederen Breiten stattgefunden. Wird eine Breite

vom kalorischen Aequator überschritten, so gehört sie kalorisch der anderen Hemisphäre.

W. Wundt hat in einer sehr beachtenswerten Abhandlung¹⁾ auf die Bedeutung des kalorischen (er nennt ihn den thermischen) Aequator hingewiesen und seine Lage aus der Forderung bestimmt, dass hier die Schwankung im jährlichem Bestrahlungsgange ihr Minimum aufweisen soll, was mit der obigen Definition des kalorischen Aequators dem Wesen nach übereinstimmt.

Säkularer Bestrahlungsgang einzelner Zonen der Erde. Es wird sich bei den nachstehenden Untersuchungen die Notwendigkeit ergeben, nicht wie bisher den säkularen Bestrahlungsgang gewisser geographischer Breiten der Erde, sondern endlicher zwischen zwei beliebigen Breitekreisen eingeschlossenen Zonen der Erde rechnerisch zu verfolgen. Dies geschieht auf folgende Weise.

Die in Betracht gezogene Zone der Erdoberfläche sei durch die Breitekreise φ_1 und φ_2 begrenzt. Das zwischen den Breitekreisen φ und $\varphi + d\varphi$ eingeschlossene ringförmige Element dieser Zone besitzt die Oberfläche

$$(32) \quad df = 2 \pi r^2 \cos \varphi d\varphi ,$$

worin r den Radius der Erdkugel bedeutet.

Dieses Element wird während des kalorischen Sommerhalbjahres bzw. während des kalorischen Winterhalbjahres folgender Strahlungsmengen teilhaftig

$$(33) \quad dQ_s = Q_s df ; \quad dQ_w = Q_w df .$$

Es ist wegen (9), (20) und (32)

$$(34) \quad \begin{cases} dQ_s = 2 \pi r^2 \left\{ W_s \cos \varphi d\varphi - \frac{2 T J_0}{\pi_2} e \sin \Pi \cos^2 \varphi d\varphi \right\} \\ dQ_w = 2 \pi r^2 \left\{ W_w \cos \varphi d\varphi + \frac{2 T J_0}{\pi^2} e \sin \Pi \cos^2 \varphi d\varphi \right\} \end{cases}$$

¹⁾ Wundt, Die Lage der Kalmen. Meteorol. Zeitschr. 1924.

Die zwischen den Breitenkreisen φ_1 und φ_2 eingeschlossene Zone wird während der kalorischen Halbjahre folgende Strahlungsmengen erhalten:

$$(35) \quad \begin{cases} R_s = 2\pi r^2 \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_s \cos \varphi d\varphi - \frac{2TJ_0}{\pi^2} e \sin \Pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi \right\} \\ R_w = 2\pi r^2 \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_w \cos \varphi d\varphi + \frac{2TJ_0}{\pi^2} e \sin \Pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi \right\} \end{cases}$$

Die Flächeneinheit dieser Zone empfängt während der kalorischen Halbjahre die Strahlungsmengen:

$$(36) \quad Q_s = \frac{R_s}{F} ; \quad Q_w = \frac{R_w}{F}$$

worin F die Oberfläche dieser ganzen Zone bedeutet. Diese ist gleich

$$(37) \quad F = 2\pi r^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi = 2\pi r^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$$

Berücksichtigt man, dass

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)$$

ist, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_s &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_s \cos \varphi \, d\varphi - \frac{TJ_0}{\pi^2} [(\varphi_2 - \varphi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] e \sin \Pi \right\} \\ Q_w &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_w \cos \varphi \, d\varphi + \frac{TJ_0}{\pi^2} [(\varphi_2 - \varphi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] e \sin \Pi \right\} \end{aligned} \right.$$

Der Gegenwart entsprechen folgende Strahlungsmengen:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_s^0 &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_s^0 \cos \varphi \, d\varphi - \frac{TJ_0}{\pi^2} [(\varphi_2 - \varphi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] e_0 \sin \Pi_0 \right\} \\ Q_w^0 &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_w^0 \cos \varphi \, d\varphi + \frac{TJ_0}{\pi^2} [(\varphi_2 - \varphi_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] e_0 \sin \Pi_0 \right\} \end{aligned} \right.$$

Es ist nach (123 bis) der „Mathematischen Klimalehre“

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} W_s &= W_s^0 + \Delta W_s \, \Delta \varepsilon \\ W_w &= W_w^0 + \Delta W_w \, \Delta \varepsilon \end{aligned} \right.$$

so dass wegen (22) und (26) die säkularen Aenderungen der

Strahlungsmengen Q_s und Q_w durch die nachstehenden Ausdrücke veranschaulicht erscheinen:

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta Q_s &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \Delta \epsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_s \cos \varphi d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] \Delta (e \sin \Pi) \right\} \\ \Delta Q_w &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \Delta \epsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_w \cos \varphi d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] \Delta (e \sin \Pi) \right\} \end{aligned} \right.$$

Die dem ganzen Jahre zugehörige Strahlungsmenge

$$Q_\tau = Q_s + Q_w = W_s + W_w = W_\tau$$

unterliegt, weil

$$\Delta W_\tau = \Delta W_s + \Delta W_w = \Delta Q_s + \Delta Q_w = \Delta Q_\tau$$

ist, folgender säkularen Aenderung:

$$(4a) \quad \Delta Q_\tau = \frac{\Delta \epsilon}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_\tau \cos \varphi d\varphi.$$

Die in vorstehenden Ausdrücken vorkommenden bestimmten Integrale können mittels der Tabelle 6 der „Mathematischen Klimalehre“ durch mechanische Quadratur ausgewertet werden.

Zusammenhang zwischen der sommerlichen Bestrahlung der einzelnen geographischen Breiten und der zugehörigen Höhenlage der Schneegrenze. Die gegenwärtige Höhenlage der Schneegrenze

in den verschiedenen Erdgebieten ist eine Funktion mannigfaltiger Faktoren, der Temperatur, der Niederschlagsmenge, der Winde, der Meeresströmungen, des Oberflächenreliefs und noch anderer sekundärer Einflüsse. Bei der Untersuchung des säkularen Ganges der Erdbestrahlung und dessen Folgen auf die Lage der Schneegrenze wollen wir vorerst nur den ersten der soeben angeführten Faktoren in Betracht ziehen. Schaltet man also alle anderen Faktoren aus oder nimmt man an, dass diese Faktoren gleichmässig auf der Erde verteilt sind, so wird die Höhenlage der Schneegrenze nur eine Funktion der geographischen Breite sein können. Sie wird unter den obigen Voraussetzungen, und wie dies schon *Humboldt, Buch* und *Renou* erkannt hatten, eine Isothermfläche der wärmeren Jahreshälfte darstellen, weil diese wärmere Jahreshälfte bei gleichbleibenden anderen Faktoren für das Abschmelzen des Schnees, also für dessen untere Begrenzungslinie massgebend sein wird. Unter der wärmeren Jahreshälfte ist das dem kalorischen Sommerhalbjahr zugeordnete thermische Sommerhalbjahr zu verstehen, das, wie in der „Mathematischen Klimalehre“ theoretisch abgeleitet und praktisch auch erwiesen ist, einen Phasenunterschied von 26 Tagen gegenüber dem kalorischen Sommerhalbjahr aufweist. Um diese Zeitspanne verspäten sich die Temperaturextreme gegenüber den Strahlungsextremen.

Es handelt sich nun darum, den Zusammenhang zwischen der Erdbestrahlung und der Höhenlage der Schneegrenze zu ermitteln. Hiezu stehen uns vor allem die Angaben über die gegenwärtige mittlere Höhenlage der Schneegrenze an den verschiedenen Breiten der Erdoberfläche zur Verfügung. Auf Grund dieser Angaben hat *Köppen* ein graphisches Diagramm entworfen, das die mittlere Höhenlage der Schneegrenze an den verschiedenen Breiten der Erde veranschaulicht.¹⁾ Um diese Höhenlage der Schneegrenze mit der gegenwärtigen Bestrahlung der Erdoberfläche in Beziehung zu bringen, haben wir die den einzelnen Breiten während des kalorischen Sommerhalbjahres zugestrahlten Wärmemengen in Betracht zu ziehen. Diese Strahlungsmengen sind als Funktion der geographischen Breite in der am Ende dieser Abhandlung mitgeteilten Tabelle 2 zahlenmässig dargestellt. Stellt man sie auch graphisch dar, so ersieht man sofort, dass

¹⁾ Veröffentlicht in *Wegener*, Die Entstehung der Kontinente und Ozeane. Vierte Auflage. Braunschweig 1929. S. 127.

zwischen der auf diese Weise erhaltenen Kurve und jener von Köppen ein inniger Zusammenhang besteht. Untersucht man diesen Zusammenhang analytisch, so findet man, dass diese beiden Kurven einen Korrelationsfaktor 0,83 aufweisen. Dieser wäre noch höher gewesen, wenn nicht in der Schneegrenzekurve in ihren beiden Maxima der Einfluss der Abwesenheit der Niederschläge in den beiden beiderseits des Aequators liegenden Trockenzonen als ein der Bestrahlung fremdes Element sich fühlbar gemacht hätte. Um diesen Niederschlagsfaktor zu eliminieren, wollen wir nur jene Teile der beiden Kurven in Beziehung bringen, die zwischen den Breiten 40° und 90° nördlich eingeschlossen erscheinen. Dieser Teil der Erdoberfläche, der mit breiten Kontinentaltäfen belegt ist, wodurch alle sekundären Einflüsse zum gleichmässigeren Ausdruck gelangen, war der Schauplatz der hier zu untersuchenden grossen klimatischen Schwankungen während des Quartär. Berechnet man für dieses Intervall der geographischen Breiten den Korrelationsfaktor, welcher zwischen den beiden erwähnten Kurven besteht, so findet man, wie in der zum vorliegenden Auszug zugehörigen Originalarbeit abgeleitet, dass derselbe gleich 0,996, also ein ausserordentlich hoher ist. Dieser hohe Korrelationsfaktor ist der mathematische Beleg des innigen Zusammenhanges zwischen der Höhenlage der Schneegrenze in den verschiedenen Breiten und der zugehörigen Strahlungsmenge des kalorischen Sommerhalbjahres.

Ermittelt man, wie es in der erwähnten Originalarbeit geschehen ist, nach der Methode der kleinsten Quadrate die Koeffizienten A und B , welche den linearen Zusammenhang $H = A + B Q_s$ zwischen der Höhenlage H der Schneegrenze und der sommerlichen Strahlungsmenge Q_s vermitteln, so findet man

$$A = -13687 \quad ; \quad B = 1,094,$$

d. h. die Beziehung

$$(43) \quad H = 1,094 Q_s - 13687 \quad ,$$

wobei H mit Metern und Q_s mit kanonischen Einheiten zu messen ist.

Die durch die säkularen Aenderungen der sommerlichen Strahlungsmengen hervorgerufenen Verschiebungen der Schneegrenze. Es folgt aus (43), wenn man die der Aenderung ΔQ_s der sommerlichen Strahlungsmenge Q_s zugehörige Verschiebung der Höhenlage H der Schneegrenze mit ΔH bezeichnet,

$$\Delta H = 1,094 \Delta Q_s ,$$

Diese Gleichung besagt, dass jeder Aenderung der Strahlungsmenge Q_s um eine kanonische Einheit eine dadurch verursachte Aenderung der Höhenlage der Schneegrenze von 1,094 Meter entspricht.

Der Zusammenhang zwischen der Strahlungsschwankung ΔQ_s und der zugehörigen Schneegrenzeverschiebung ΔH kann auch physikalisch ermittelt werden. Es besteht, wie in der „Mathematischen Klimalehre“ abgeleitet, zwischen der säkularen Strahlungsschwankung ΔQ_s und der zugehörigen Temperaturschwankung Δu die Beziehung

$$\Delta u = 0,0068 \Delta Q_s$$

Die Beobachtungen zeigen, dass man während der wärmeren Jahreshälfte um 150 Meter steigen muss, damit die Temperatur um 1° sinkt. Um also auch nach der säkularen Aenderung der sommerlichen Strahlung um ΔQ_s auf derselben Isothermfläche zu bleiben, d. h. um die säkulare Temperaturschwankung durch Vertikalverschiebung wettzumachen, ist die Bedingung zu erfüllen

$$0,0068 \Delta Q_s - \frac{\Delta H}{150} = 0$$

Daraus folgt

$$\Delta H = 1,02 \Delta Q_s$$

Es ergibt sich aus den vorstehenden Untersuchungen, dass jeder Aenderung der zugestrahlten sommerlichen Wärme-

menge im Betrage von einer kanonischen Strahlungseinheit eine Verschiebung der Schneegrenze von 1,02 bis 1,09 Meter entspricht. Wir wollen uns der Sicherheit halber mit der unteren Grenze dieser Verschiebung begnügen und diese auf 1 Meter abrunden. Man kann dann folgendes behaupten.

Die säkularen Verschiebungen der Schneegrenze, hervorgerufen durch die säkularen Veränderungen der sommerlichen Strahlungsmenge, sind durch den säkularen Gang dieser Strahlungsmengen veranschaulicht, wenn man die bei der Darstellung dieses Ganges benutzten kanonischen Einheiten als Meter deutet. Die in der Tabelle 15 der „Mathematischen Klimalehre“ und in der nachstehenden Tabelle 3 mitgeteilten Änderungen der sommerlichen Bestrahlung können also als diese in Metern gemessenen Verschiebungen der Schneegrenze gedeutet werden. Dabei bedeutet das Zeichen + die Verschiebung nach oben, das Zeichen — die Verschiebung nach unten.

Säkulare Änderungen des Reflexionsvermögens der Erdoberfläche und deren Folgen. Weitreichende Verbreiterungen der polaren Schneekalotten der Erde, begleitet mit der Bildung ausgedehnter Inlandeisdecken, wie sie während der Vorzeit mehrere Male stattgefunden haben, hatten auch namhafte Änderungen des Reflexionsvermögens der Erdoberfläche zur Folge, was, wie unlängst *Wundt* gezeigt hatte,¹⁾ einen sehr bemerkbaren Einfluss auf den Temperaturzustand der Erdoberfläche gehabt haben musste. Diese Erscheinung möge hier einer mathematischen Untersuchung unterzogen werden.

Ziehen wir zu diesem Zwecke ein scharf umgrenztes Gebiet der Erdoberfläche in Betracht, das genügend gross gewählt werden soll, um von lokalen Temperaturen dieses Gebietes sprechen zu können. Die horizontale Grundfläche dieses Gebietes sei mit F_0 bezeichnet. Der Teil F_1 dieser Fläche sei gegenwärtig auch während des Sommerhalbjahres mit Eis oder Schnee bedeckt.

Das Reflexionsvermögen der mit Schnee oder Eis bedeckten Teile des in Betracht gezogenen Gebietes sei mit R , jenes der unbedeckten mit R_0 bezeichnet. Dann ist das Absorptionsvermögen

¹⁾ *Wundt*, Änderungen der Erdalbedo während der Eiszeit. Meteorolog. Zeitschr. 1933.

a bzw. a_0 dieser Gebiete gleich

$$(44) \quad a = 1 - R \quad ; \quad a_0 = 1 - R_0.$$

Das Absorptionsvermögen des ganzen in Betracht gezogenen Gebietes F_0 in seinem gegenwärtigen Zustand ist gleich

$$(45) \quad A_0 = F_1 a + (F_0 - F_1) a_0.$$

Während der Epoche t der geologischen Vorzeit sei der Teil F der Fläche F_0 mit Eis oder Schnee bedeckt gewesen, so dass das damalige Absorptionsvermögen des Gebietes F_0 durch den nachstehenden Ausdruck veranschaulicht erscheint:

$$(46) \quad A = Fa + (F_0 - F) a_0$$

Die Aenderung des Absorptionsvermögens zur Zeit t gegenüber der Gegenwart ist also gleich

$$(47) \quad A - A_0 = (F - F_1) (a - a_0) \quad ,$$

d. h. pro Flächeneinheit berechnet

$$(48) \quad \Delta a = (a - a_0) \frac{F - F_1}{F_0}$$

Während des Zeitpunktes t der geologischen Vorzeit hat die Flächeneinheit des in Betracht gezogenen Gebietes F_0 den obigen Teilbetrag der auf sie während des Sommerhalbjahres auffallenden Strahlungsmenge mehr absorbiert als gegenwärtig. Es handelt sich also vorerst darum, die während des Sommerhalbjahres auf die Flächeneinheit des in Betracht gezogenen Gebietes auffallende Strahlungsmenge zu ermitteln. Die Sonnenstrahlen werden bei ihrem Durchgang durch die Erdatmosphäre auf die in den §§ 19 und 20 der „Mathematischen Klimalehre“ geschilderte Weise derart geschwächt, dass nur ein Teil dieser Strahlung in Form der direkten und der diffusen Strahlung die Erdoberfläche er-

reicht. Dieser Teil sei mit α bezeichnet, so dass von der Strahlungsmenge Q_s nur der Teil αQ_s , wobei $\alpha < 1$ ist, bei wolkenlosem Himmel die Erdoberfläche erreichen würde. Ist die mittlere Bewölkung der in Betracht gezogenen Gegend während des Sommerhalbjahres, in Prozenten ausgedrückt, gleich B , so wird der Flächeneinheit des Gebietes während des Sommerhalbjahres die Strahlungsmenge

$$(49) \quad Q'_s = \frac{100 - B}{100} \alpha Q_s$$

oder, falls

$$(50) \quad \frac{100 - B}{100} = k$$

gesetzt wird, die Strahlungsmenge

$$(51) \quad Q_s^1 = k \alpha Q_s$$

zugeführt. Von dieser Strahlungsmenge wird während der Epoche t wegen des veränderten Reflexionsvermögens des Gebietes die Strahlungsmenge

$$(52) \quad \Delta_2 Q_s = k \alpha \Delta a Q_s$$

mehr absorbiert als gegenwärtig. Dieser Ausdruck stellt uns den säkularen Zuwachs der für den Wärmehaushalt des Gebietes verwendeten sommerlichen Strahlungsmenge als Folge seines veränderten Reflexionsvermögens dar. Mit dem durch die Änderung der astronomischen Elemente hervorgerufenen Zuwachs $\Delta_1 Q_s$ der sommerlichen Strahlungsmenge erhält man den Gesamtzuwachs

$$(53) \quad \Delta Q_s = \Delta_1 Q_s + \Delta_2 Q_s,$$

d. h. wegen (52), (48) und (22)

$$(54) \quad \Delta Q_s = \Delta_1 Q_s + k \alpha (a - a_0) \frac{F - F_1}{F_0} (Q_s^0 + \Delta_1 Q_s)$$

Zieht man in Betracht, dass

$$k < 1; \quad \kappa < 1; \quad a < 1; \quad a_0 < 1; \quad \frac{F - F_1}{F_0} \leq 1$$

ist, so kann, wenn man das letzte Glied der rechten Seite dieser Gleichung entwickelt, den hier vorkommenden Koeffizient $k \kappa (a - a_0) \frac{F - F_1}{F_0}$ von $\Delta_1 Q_s$ neben dem Koeffizient eins des ersten Gliedes der rechten Seite vernachlässigen, so dass man bekommt

$$(55) \quad \Delta Q_s = \Delta_1 Q_s + k \kappa (a - a_0) \frac{F - F_1}{F_0} Q_s^0$$

d. h.

$$(56) \quad \Delta_2 Q_s = k \kappa (a - a_0) \frac{F - F_1}{F_0} Q_s^0$$

Hinsichtlich der numerischen Werte der hier vorkommenden Grössen k , κ , a und a_0 ist folgendes zu sagen.

Die Grösse k ist durch (50) gegeben und ihr numerischer Wert ist durch die klimatologischen Angaben über die sommerliche Bewölkung der in Betracht gezogenen Gegend gegeben.

Der numerische Wert der Grösse κ kann mit Hilfe der Tabellen 9 und 3 der „Mathematischen Klimalehre“ ermittelt werden. Man berechnet zu diesem Zwecke mittels der Tabelle 9 die sommerliche Strahlungsmenge des in Betracht gezogenen Gebietes bei einem Transmissionskoeffizient der Atmosphäre $p = 0,8$ und mittels der Tabelle 3 jene, die dem Transmissionskoeffizient $p = 1$ entspricht. Der Quotient dieser beiden Grössen gibt die Zahl κ an.

Der numerische Wert des Absorptionsvermögens a der Schnee- und Eisbedeckungen der Erde ist erst unlängst zuverlässig ermittelt worden.¹⁾ Er beträgt für Neuschnee 0,3, für Firnschnee 0,5 und für Gletscher 0,6. Für a wäre etwa das Mittel der beiden letztgenannten Zahlen, also

¹⁾ Devaux, L' économie radio-thermique des champs de neige et des glaciers. Paris 1933.

$$a = 0,55$$

zu setzen.

Für a_0 ist nach der bereits erwähnten Abhandlung von Wundt

$$a_0 = 0,94$$

zu setzen, so dass

$$a - a_0 = -0,39$$

wird.

In der Formel (56) ist F als säkular veränderlich zu betrachten. Denn sobald sich infolge der säkularen Aenderung $\Delta_1 Q_s$ die sommerliche Strahlungsmenge um eine gewisse Anzahl von kanonischen Einheiten, sagen wir, vermindert hat, rückt die Schneegrenze um eben so viel Meter nach unten, wodurch weitere Gebiete der in Betracht gezogenen Gegend unter eine auch sommerliche Schneedecke gelangen, was eine Veränderung von F , also eine Aenderung der Strahlungsmenge $\Delta_2 Q_s$ zur Folge hat, die von einer weiteren Verschiebung der Schneegrenze begleitet ist, was mit einer weiteren Vergrößerung der schneebedeckten Fläche F Hand in Hand geht. Bei einer gegebenen Konfiguration der in Betracht gezogenen Gegend F_0 ist es möglich, diese Erscheinung Schritt für Schritt rechnerisch zu verfolgen, doch kann eine solche Arbeit nur Gegenstand eines Spezialstudiums sein, das über den Rahmen dieser Abhandlung weit hinausginge. Hier möge die mächtigste der säkularen Aenderungen des Reflexionsvermögens der Erde, jene die durch die Verbreiterung und Zusammenschrumpfung der polaren Schneekalotten der Erde hervorgerufen wurde, in den Bereich der Untersuchungen einbezogen werden.

Ziehen wir zu diesem Zwecke etwa die nördliche durch den Breitenkreis φ_0 begrenzte Kalotte der Erde in Betracht. Wir nehmen an, dass diese Kalotte oder zu mindestens ein in Betracht gezogener Sektor derselben mit einem gebirgslosen, auf etwa 200 Meter Meereshöhe liegenden Kontinent bedeckt ist. Dann wird die durch die solaren Temperaturen bedingte Begrenzung der Schneedecke dieser Polargegend ein Breitenkreis sein müssen. Diese Grenze liege gegenwärtig an der Breite φ_1 , während der

Epoche t der geologischen Vorzeit sei diese Grenze an der Breite φ gelegen. Dann ist, wenn wir der Einfachheit halber mit der ganzen Kalotte rechnen,

$$(57) \quad \begin{cases} F_0 = 2 \pi r^2 (1 - \sin \varphi_0) \\ F_1 = 2 \pi r^2 (1 - \sin \varphi_1) \\ F = 2 \pi r^2 (1 - \sin \varphi) \end{cases}$$

Hier ist F säkular veränderlich, also eine Funktion der Zeit. Diese Funktion kann auf folgende Weise ermittelt werden.

Zur Zeit t_1 der geologischen Vorzeit, zu der die sommerliche Bestrahlung Q_s der mit φ_0 begrenzten Kalotte auf ihr Minimum $Q_s^{(m)}$ gesunken war, hat die Schneebedeckung der Kalotte ihr grösstes Ausmass erreicht und sie sei bis zum Breitenkreis φ_m vorgedrungen. Man kann mit Recht annehmen, dass die dadurch erfolgte Vergrösserung der Poldistanz der Schneegrenze von ihrem gegenwärtigen Wert

$$(58) \quad \delta_1 = 90^\circ - \varphi_1$$

auf jenen maximalen

$$(59) \quad \delta_m = 90^\circ - \varphi_m$$

dem Strahlungsdefizit $Q_s^0 - Q_s^{(m)}$ proportional sei, so dass

$$(60) \quad \delta_m - \delta_1 = K (Q_s^0 - Q_s^{(m)})$$

ist, wobei K den Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Es ist also mit Rücksicht auf (22), (58) und (59)

$$(61) \quad \varphi_m - \varphi_1 = K \Delta_1 Q_s^{(m)}.$$

In der Zwischenzeit musste die Verbreiterung der Schneedecke ebenfalls dem Strahlungsdefizit $\Delta_1 Q_s$ proportional gewesen sein, so dass

$$(62) \quad \varphi - \varphi_1 = K \Delta_1 Q_s$$

ist. Dabei ist K durch (61) gegeben.

Es ist also

$$(63) \quad \varphi = \varphi_1 + K \Delta_1 Q_s$$

Setzt man (63) in (57) und dies dann in (56) ein, so bekommt man

$$(64) \quad \Delta_2 Q_s = R \times (a - a_0) \frac{\sin \varphi_1 - \sin (\varphi_1 + K \Delta_1 Q_s)}{1 - \sin \varphi_0} Q_s$$

Mit Hilfe dieser Formel und mit Hilfe des durch die Tabelle 15 der „Mathematischen Klimalehre“ dargestellten säkularen Bestrahlungsganges der Erde können die Veränderungen der Eiskalotten der Erde berechnet werden und damit auch die dadurch hervorgerufenen Änderungen $\Delta_2 Q_s$ der sommerlichen Bestrahlung und die zugehörigen Verschiebungen der Schneegrenze.

Numerische Ergebnisse. Die in vorliegender Abhandlung abgeleiteten Formeln konnten zur Gewinnung neuer numerischer Resultate benützt werden, um auf diese Weise das in der „Mathematischen Klimalehre“ entworfene Bild des säkularen Bestrahlungsganges der Erde zu vervollständigen.

Weil durch die vorstehenden theoretischen Ueberlegungen der Begriff der kalorischen Jahreszeiten und der zugehörigen Strahlungsmengen sich als auch für die äquatoriale Zone der Erde gültig erwiesen hat, konnte die auf Seite 51 der „Mathematischen Klimalehre“ mitgeteilte Tabelle der Koeffizienten m durch Angabe der numerischen Werte von m für die geographischen Breiten 0° , 5° und 10° vervollständigt werden. Dies ist durch die am Ende dieser Abhandlung mitgeteilte Tabelle 1 geschehen. Ausserdem konnte die auf Seite 127 des erwähnten Werkes mitgeteilte Tabelle 14 mit Angaben über die Strahlungsmengen der soeben erwähnten geographischen Breiten versehen werden, was durch die nachstehend mitgeteilte Tabelle 2 geschehen ist.

Mit Benützung dieser beiden nun für die ganze Erdoberfläche Geltung habenden Tabellen konnte an die Ausrechnung

des säkularen Bestrahlungsganges der geographischen Breiten $\pm 5^\circ$ und $\pm 15^\circ$ geschritten werden. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in der Tabelle 3 mitgeteilt. Diese Tabelle bildet also die Ergänzung der in der „Mathematischen Klimalehre“ veröffentlichten Tabelle 15.

Nachdem der Zusammenhang zwischen der säkularen Aenderung der sommerlichen Strahlungsmenge und der zugehörigen Verschiebung der Schneegrenze abgeleitet worden ist und es sich dabei ergeben hat, dass jeder Veränderung der sommerlichen Strahlungsmenge um eine kanonische Einheit eine Verschiebung der Schneegrenze von mindesten einem Meter entspricht, wobei das Vorzeichen $+$ eine Verschiebung nach oben, das Vorzeichen $-$ eine Verschiebung nach unten bedeutet, ist es möglich geworden, diese überaus wichtige Folge des säkularen Bestrahlungsganges der Erde deutlich zu überblicken. Die nachstehend mitgeteilte Tabelle 3 zeigt, dass auch in der äquatorialen Zone die während der Vorzeit stattgefundenen Verschiebungen der Schneegrenze recht beträchtlich gewesen sind und mitunter den Betrag von Tausend Meter überschritten hatten. Damit ist die von einigen Geologen geäußerte Meinung, der säkulare Bestrahlungsgang der Erde könne die in oder tropischen Zone nachweislich stattgefundenen Verschiebungen der Schneegrenze nicht erklären, hinfällig geworden. Auch diese Verschiebungen waren eine natürliche Folge der Veränderung der Bestrahlung dieser Breiten und sie können mit diesen Veränderungen rechnerisch Schritt für Schritt in die Vorzeit verfolgt werden, was durch die Tabelle 3 ermöglicht ist.

Die Tabelle 4 veranschaulicht die während der letztverflossenen 600 Jahrtausende stattgefundenen Verlagerungen des kalorischen Aequators. Diese Verlagerungen waren ebenfalls nicht unbedeutend, indem sie dem Betrag von $8^\circ 37'$ erreichten. Während des erwähnten Intervalles der geologischen Vorzeit hat der kalorische Aequator dreizehnmal den Breitenkreis $+ 5^\circ$ und dreizehnmal den Breitenkreis $- 5^\circ$ überschritten. In jedem solchen Falle fand an dem einen oder dem anderen dieser Breitenkreise eine Inversion der Jahreszeiten statt. Die Strahlungsmenge, die dem Sommerhalbjahr der in Betracht gezogenen Hemisphäre entspricht, fiel an diesem Breitenkreis geringer aus als die Strahlungsmenge des Winterhalbjahres. Dies folgt auch aus den Tabellen 2 und 3, wenn man der in der Tabelle 2 mitgeteilten Strahlungsmenge

der kalorischen Halbjahre des Breitekreises ihre in der Tabelle 3 angegebene säkulare Aenderung hinzufügt. In jenen sechszehn Fällen ergab sich für die sommerliche Bestrahlung des Breitekreises ein geringerer Betrag als für die winterliche, d. h. an diesem Breitekreis fand das Sommerhalbjahr zur Zeit des Winterhalbjahres seiner Hemisphäre statt: der Breitekreis war ja vom kalorischen Aequator überschritten und gehörte thermisch zu der anderen Hemisphäre.

In der Tabelle 5 sind die säkularen Veränderungen der sommerlichen Bestrahlung der durch den Breitekreis von 55° nördlich begrenzten Kalotte der Erdoberfläche mitgeteilt, wie sie sich aus der Aenderung der astronomischen Elemente und aus der Aenderung des Reflexionsvermögens dieser Kalotte ergeben.

Die Kolumne 2 dieser Tabelle enthält die erstgenannten mit $\Delta_1 Q_s$ bezeichneten Veränderungen der sommerlichen Bestrahlung. Diese Veränderungen sind mittels der Formel (41) berechnet worden. Mit $\varphi_1 = 55^\circ$; $\varphi_2 = 90^\circ$, dann mit Benützung der kanonischen Einheiten, für welche $J_0 = 1$; $T = 100\,000$ zu setzen ist, und mittels der Tabelle 6 der „Mathematischen Klimalehre“ und der

mechanischen Auswertung des Integrales $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_s \cos \varphi d\varphi$ be-

kommt man für diese Formel

$$(65) \quad \Delta_1 Q_s = 361 \Delta \varepsilon - 7901 \Delta (e \sin \Pi)$$

Mit Benützung dieser Formel und der Angaben der Tabelle 14 der „Mathematischen Klimalehre“ erhält man die numerischen Werte von $\Delta_1 Q_s$ für die einzelnen Zeitpunkte der Vorzeit.

Die Kolumne 3 der Tabelle 5 enthält die durch die Veränderung des Reflexionsvermögens der Kalotte hervorgerufenen säkularen Aenderungen $\Delta_2 Q_s$ der sommerlichen Strahlungsmenge. Diese Aenderungen sind auf folgende Weise ermittelt worden.

Zieht man die Tabellen 3 und 9 der „Mathematischen Klimalehre“ heran, so findet man mit Benützung der Formel (38), dass das Verhältnis der sommerlichen Strahlungsmengen, die der in Betracht gezogenen Kalotte bei einem Transmissionskoeffizient der Atmosphäre von $p = 0,8$ bzw. von $p = 1$ übermittelt werden,

gleich 0,60 ist. Man hat also $\kappa=0,60$ zu setzen. Die mittlere Bewölkung des Himmels an der in Betracht gezogenen Kalotte der Erde beträgt $B=55$, weshalb nach (50) $k=0,45$ zu setzen ist. Wie bereits angegeben, ist $a-a_0=0,39$ zu setzen. Mittels der Tabelle 2 ergibt es sich, dass die gegenwärtige sommerliche Bestrahlung der mit dem Breitenkreis $\varphi_0=55^\circ$ begrenzten Kalotte der Erdoberfläche gleich $Q_s^0=13515$ ist. Mit Hilfe aller dieser Angaben bekommt man für (64) die Formel

$$\Delta_2 Q_s = -7869 [\sin \varphi_1 - \sin (\varphi_1 + K \Delta_1 Q_s)]$$

Ueber die numerischen Werte der Größen φ_1 und K stehen uns folgende Daten zur Verfügung. Nach den Angaben der bereits erwähnten Abhandlung von Wundt liegt die gegenwärtige Grenze der Schneekalotte der Erde an der geographischen Breite $\varphi_1=75^\circ$. Nach denselben Angaben verschob sich diese Grenze während der quartären Eiszeit durchschnittlich bis zur Breite $\varphi_m=55^\circ$. Es wird sich aus den Resultaten unserer Berechnung ergeben, dass diese maximale Verbreiterung der nördlichen Schneekalotte der Erde vor 230 Jahrtausenden stattgefunden hat. Es war damals, wie dies aus der Tabelle 15 der „Mathematischen Klimalehre“ zu errechnen ist, $Q_s^{(m)}$ um 659 kanonische Einheiten kleiner als Q_s^0 . Man bekommt also mit Benützung der Formel (61).

$$55^\circ - 75^\circ = -659 K$$

d. h. $K=1'821$. Es ist deshalb

$$(66) \Delta_2 Q_s = 7869 [\sin (75^\circ + 1'821 \Delta_1 Q_s) - \sin 75^\circ].$$

Bei der Anwendung dieser Formel ist noch folgendes zu berücksichtigen. Die Schneekalotte der Erde verschwand, ein ebenes Gelände vorausgesetzt, während der Vorzeit vollständig, sobald φ den Wert von 90° erreichte. Setzt man also in (63) $\varphi=90^\circ$; $\varphi_1=75^\circ$; $K=1'821$, so ergibt sich $\Delta_1 Q_s = +494$. Mit diesem Wert liefert die Gleichung (66) $\Delta_2 Q_s = +268$. Dies ist der maximale Wert des positiven Effektes der Veränderung der sommerlichen Strahlungsmenge, der durch die Veränderlichkeit der

Schneebedeckung erzielt werden kann, und dieser Wert gilt für alle Werte $\Delta_1 Q_s \geq 494$.

Die vierte Kolumne der Tabelle 5 enthält die Summe ΔQ_s der beiden Strahlungsmengen $\Delta_1 Q_s$ und $\Delta_2 Q_s$ oder die mittlere Verschiebung ΔH der Schneegrenze, die an der in Betracht gezogenen Kalotte der Erdoberfläche während des in der Kolumne 1 gegebenen Zeitpunktes der geologischen Vorzeit stattgefunden hat. Diese Verschiebung veranschaulicht uns den gesamten Effekt, der durch die Veränderung der Erdbestrahlung und die zugehörige Aenderung der Eisdecke erzielt worden ist.

Diese Verschiebung der Schneegrenze hat vor 230 Jahrtausenden mit 1800 Meter ihr Höchstmass erreicht. Rechnet man mit dem Koeffizient $B=1,094$, wie er sich aus der gegenwärtigen Lage der Schneegrenze an den verschiedenen geographischen Breiten ergibt, so hat diese Verschiebung gar 2000 Meter betragen. Am Breitenkreise von 55° nördlich, wo gegenwärtig die Schneegrenze in einer Meereshöhe von 2200 Meter zu suchen ist, hat damals die Schneegrenze die Oberfläche der Kontinente erreichen müssen, so dass damals die Eiskalotte bis zu diesem Breitenkreis reichen musste, wie dies eingangs vorausgesetzt und jetzt nachträglich verifiziert worden ist. Die säkularen Verbreiterungen der polaren Eiskalotte waren also eine natürliche Folge des säkularen Bestrahlungsganges der Erde.

Die Zahlen der Kolumne 4 der Tabelle 5, die im nachfolgenden Diagramm graphisch veranschaulicht worden sind, besagen folgendes.

Im Laufe der letztverflossenen 600 Jahrtausende hat die Schneegrenze neunmal eine sehr wesentliche Verschiebung nach unten erfahren. Dies geschah während der nachstehenden Jahrtausende vor der Gegenwart

25; 71,₉; 115; 187,₅; 230; 435; 475,₆; 550; 590,₃.

Dies sind genau jene Phasen des Eiszeitalters, die Köppen und Wegener in ihrem Werke¹⁾ mit

¹⁾ Köppen-Wegener, Die Klimate der geologischen Vorzeit. Berlin 1924.

Würm III, Würm II, Würm I, Riss I, Riss II, Mindel II, Mindel I, Günz II und Günz I

bezeichnet hatten und an deren Realität nicht zu zweifeln ist.

Aehnliche Berechnungen, wie sie soeben für die nördliche Kalotte durchgeführt worden sind, können auch für die südliche mit dem Breitenkreis von 55° begrenzte Kalotte durchgeführt werden. Die gegenwärtige Grenze der Eisbedeckung der südlichen Hemisphäre liegt nach den bereits erwähnten Mitteilungen von *Wundt* durchschnittlich am Breitenkreis von 68° , während sich diese Grenze einst bis zum Breitenkreis von 63° verschoben hatte. Deshalb ist in die Rechnung $\varphi_1 = 68^\circ$, $\varphi_m = 63^\circ$ zu setzen. Die Verbreiterung der südlichen Eiskalotte war während der Vorzeit geringer als jene des nördlichen, weil diese Verbreiterung nur auf Kosten des Meeres vor sich gehen konnte. Auch die Zusammenschrumpfung dieser Eisdecke war relativ sehr klein, weil die grosse Höhe des antarktischen Kontinents (durchschnittliche Meereshöhe 2200 m) seine Eisdecke vor der Abschmelzung schützte. Die südliche Eiskalotte unterlag deshalb geringeren säkularen Veränderungen als die nördliche, die sich auf niedrigen Kontinentaltafeln verbreitern und verkleinern konnte. Das Minimum der sommerlichen Bestrahlung der südlichen Kalotte fand vor 105,1 Jahrtausenden statt. Diesem Zeitpunkt entsprach $\Delta_1 Q_s = -872$, weshalb man mittels der Formel (61) $5^\circ = 872 K$ d. h. $K = 0'344$ erhält. Man bekommt also statt (66) die Formel

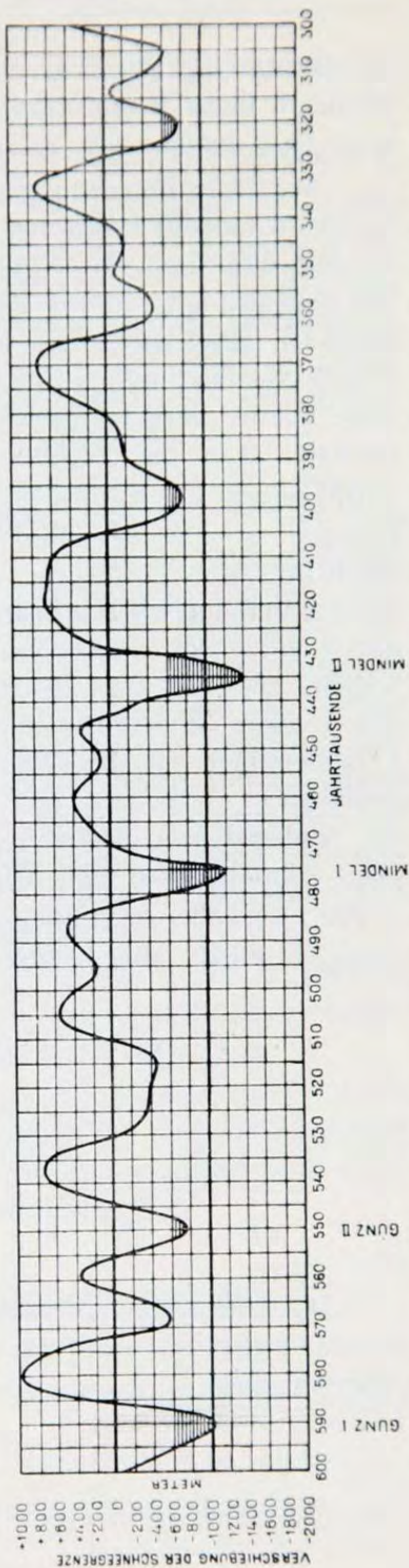
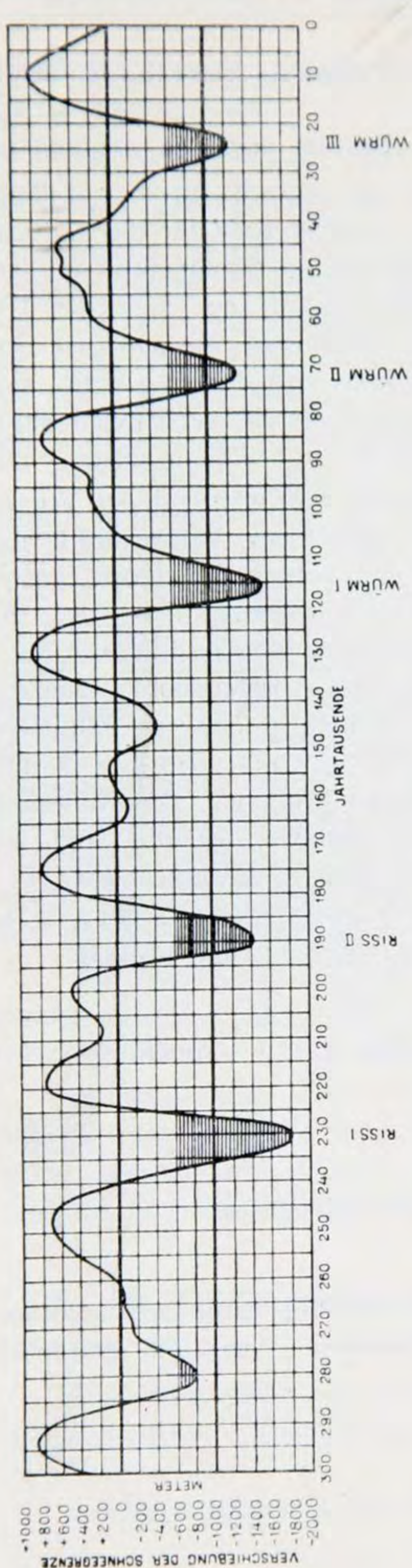
$$\Delta_2 Q_s = 8019 [\sin (68^\circ + 0'344 \Delta_1 Q_s) - \sin 68^\circ]$$

wobei

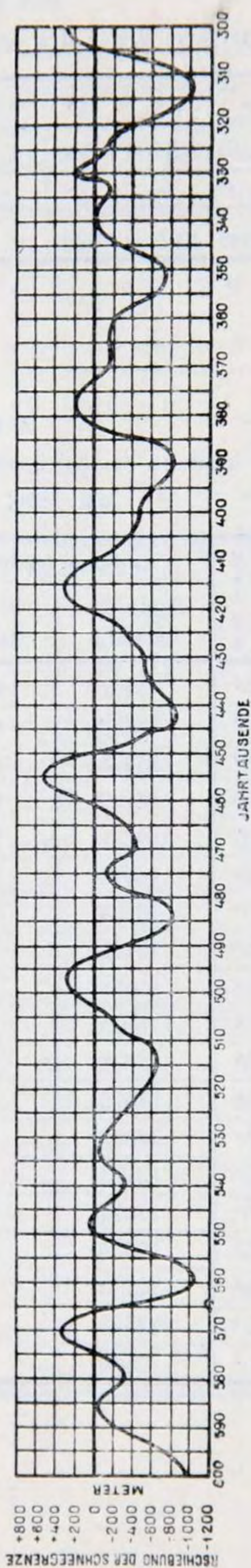
$$\Delta_1 Q_s = 261 \Delta \varepsilon + 7901 \Delta (e \sin \Pi)$$

ist.

Die mittels der vorstehenden Formeln gewonnenen numerischen Ergebnisse sind im beiliegenden Diagramm graphisch veranschaulicht.



Säkulare Verschiebungen der Schneegrenze an der nördlichen durch den Breitenkreis von 55° begrenzten Kalotte der Erde



Säkulare Verschiebungen der Schneegrenze an der südlichen durch den Breitenkreis von 55° begrenzten Kalotte der Erde

T A B E L L E 1.

Numerische Werte des Koeffizienten m (kanonische Einheiten)

φ	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
m	20260	20190	1 960	19570	19040	18370	17550	16600	15520
φ	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
m	14330	13030	11620	10130	8560	6930	5240	3520	1770

T A B E L L E 2.

Die während der kalorischen Halbjahre zugestrahlten Mengen
Jahr 1800; kanonische Einheiten

Geographi- sche Breite	Nördliche Halbkugel		Südliche Halbkugel	
	Sommer- halbjahr	Winter- halbjahr	Sommer- halbjahr	Winter- halbjahr
0°	15601	14930	15601	14930
5°	15433	14997	16102	14328
10°	15825	14286	16487	13625
15°	16109	13476	16757	12828
20°	16281	12577	16912	11946
25°	16345	11595	16953	10987
30°	16294	10538	16876	9956
35°	16139	9418	16689	8868
40°	15878	8244	16392	7730
45°	15522	7033	15997	6558
50°	15078	5799	15510	5367
55°	14573	4474	14958	4189
60°	14006	3363	14342	3027
65°	13455	2250	13738	1966
70°	13074	1392	13304	1163
75°	12859	789	13033	615
80°	12733	366	12850	250
85°	12675	99	12733	41
90°	12669	7	12676	0

T A B E L L E 3.

(Fortsetzung)

Jahrtausende vor 1800 n. Chr	Sommerhalbjahr				Winterhalbjahr			
	G E O G R A P H I S C H E B R E I T E							
	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°
82,8	+1018	+ 989	—1022	— 987	—1024	— 994	+1016	+ 982
85	+ 901	+ 889	— 921	— 877	— 936	— 921	+ 886	+ 845
90	— 17	+ 19	— 29	+ 7	— 62	— 91	— 50	— 79
94	— 450	— 399	+ 402	+ 427	+ 367	+ 324	— 485	— 502
95	— 426	— 376	+ 378	+ 404	+ 343	+ 300	— 461	— 480
100	+ 400	+ 379	— 388	— 385	— 380	— 361	+ 408	+ 403
105,1	+1139	+1045	—1063	—1089	—1009	— 927	+1193	+1207
110	+ 494	+ 417	— 414	— 463	— 357	— 292	+ 551	+ 588
115	— 306	— 355	+ 380	+ 311	+ 433	+ 470	— 253	— 196
116,1	— 340	— 385	+ 412	+ 343	+ 463	+ 496	— 289	— 232
120	+ 49	+ 10	+ 1	— 38	+ 36	+ 67	+ 84	+ 115
125	+ 804	+ 792	— 820	— 782	— 831	— 816	+ 793	+ 758
127,7	+ 932	+ 925	— 962	— 907	— 984	— 973	+ 910	+ 859
130	+ 802	+ 812	— 846	— 786	— 877	— 880	+ 771	+ 718
135	+ 158	+ 171	— 182	— 157	— 199	— 208	+ 141	+ 120
140	— 186	— 186	+ 194	+ 182	+ 200	+ 199	— 180	— 169
145	+ 208	+ 167	— 164	— 193	— 132	— 99	+ 240	+ 261
150	+ 797	+ 726	— 737	— 762	— 693	— 632	+ 841	+ 856
152,2	+ 893	+ 823	— 839	— 855	— 800	— 738	+ 932	+ 940
155	+ 771	+ 710	— 723	— 738	— 690	— 637	+ 804	+ 811
160	+ 96	+ 82	— 82	— 90	— 72	— 61	+ 106	+ 111
164,3	— 285	— 266	+ 273	+ 274	+ 264	+ 247	— 294	— 293
165	— 284	— 261	+ 266	+ 271	+ 254	+ 235	— 296	— 297
170	+ 264	+ 282	— 298	— 262	— 322	— 334	+ 240	+ 210
175	+1005	+ 990	—1025	— 978	—1040	—1022	+ 990	+ 946
176,3	+1057	+1032	—1067	—1026	—1075	—1048	+1049	+1010

T A B E L L E 3.

(Fortsetzung)

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	Sommerhalbjahr				Winterhalbjahr			
	G E O G R A P H I S C H E B R E I T E							
	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°
82,8	+1018	+ 989	—1022	— 987	—1024	— 994	+1016	+ 982
85	+ 901	+ 889	— 921	— 877	— 936	— 921	+ 886	+ 845
90	— 17	+ 19	— 29	+ 7	— 62	— 91	— 50	— 79
94	— 450	— 399	+ 402	+ 427	+ 367	+ 324	— 485	— 502
95	— 426	— 376	+ 378	+ 404	+ 343	+ 300	— 461	— 480
100	+ 400	+ 379	— 388	— 385	— 380	— 361	+ 408	+ 403
105,1	+1139	+1045	—1063	—1089	—1009	— 927	+1193	+1207
110	+ 494	+ 417	— 414	— 463	— 357	— 292	+ 551	+ 588
115	— 306	— 355	+ 380	+ 311	+ 433	+ 470	— 253	— 196
116,1	— 340	— 385	+ 412	+ 343	+ 463	+ 496	— 289	— 232
120	+ 49	+ 10	+ 1	— 38	+ 36	+ 67	+ 84	+ 115
125	+ 804	+ 792	— 820	— 782	— 831	— 816	+ 793	+ 758
127,7	+ 932	+ 925	— 962	— 907	— 984	— 973	+ 910	+ 859
130	+ 802	+ 812	— 846	— 786	— 877	— 880	+ 771	+ 718
135	+ 158	+ 171	— 182	— 157	— 199	— 208	+ 141	+ 120
140	— 186	— 186	+ 194	+ 182	+ 200	+ 199	— 180	— 169
145	+ 208	+ 167	— 164	— 193	— 132	— 99	+ 240	+ 261
150	+ 797	+ 726	— 737	— 762	— 693	— 632	+ 841	+ 856
152,2	+ 893	+ 823	— 839	— 855	— 800	— 738	+ 932	+ 940
155	+ 771	+ 710	— 723	— 738	— 690	— 637	+ 804	+ 811
160	+ 96	+ 82	— 82	— 90	— 72	— 61	+ 106	+ 111
164,3	— 285	— 266	+ 273	+ 274	+ 264	+ 247	— 294	— 293
165	— 284	— 261	+ 266	+ 271	+ 254	+ 235	— 296	— 297
170	+ 264	+ 282	— 298	— 262	— 322	— 334	+ 240	+ 210
175	+1005	+ 990	—1025	— 978	—1040	—1022	+ 990	+ 946
176,3	+1057	+1032	—1067	—1026	—1075	—1048	+1049	+1010

TABELLE 3.

(Fortsetzung)

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	Sommerhalbjahr				Winterhalbjahr			
	G E O G R A P H I S C H E B R E I T E							
	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°
180	+ 739	+ 701	— 719	— 713	— 706	— 672	+ 752	+ 742
185	— 253	— 282	+ 301	+ 254	+ 335	+ 357	— 219	— 179
187,5	— 459	— 488	+ 515	+ 456	+ 554	+ 574	— 420	— 370
190	— 271	— 310	+ 331	+ 274	+ 374	+ 403	— 228	— 181
195	+ 834	+ 762	— 774	— 796	— 732	— 670	+ 876	+ 888
198,5	+ 1226	+ 1159	— 1188	— 1181	— 1160	— 1099	+ 1254	+ 1241
200	+ 1144	+ 1085	— 1114	— 1103	— 1093	— 1039	+ 1165	+ 1149
205	+ 82	+ 93	— 100	— 83	— 112	— 120	+ 70	+ 55
209,6	— 558	— 502	+ 508	+ 532	+ 473	+ 425	— 593	— 609
210	— 553	— 496	+ 501	+ 526	+ 463	+ 414	— 591	— 608
215	+ 115	+ 152	— 167	— 122	— 204	— 233	+ 78	+ 41
220	+ 1110	+ 1079	— 1116	— 1077	— 1119	— 1087	+ 1107	+ 1069
220,8	+ 1128	+ 1088	— 1122	— 1092	— 1118	— 1079	+ 1132	+ 1101
225	+ 619	+ 553	— 555	— 591	— 509	— 453	+ 665	+ 691
230	— 219	— 286	+ 315	+ 230	+ 382	+ 433	— 152	— 83
232,4	— 254	— 316	+ 344	+ 264	+ 408	+ 456	— 190	— 124
235	+ 41	— 21	+ 37	— 25	+ 93	+ 142	+ 97	+ 146
240	+ 723	+ 663	— 673	— 691	— 638	— 586	+ 758	+ 768
242,2	+ 788	+ 747	— 768	— 759	— 755	— 717	+ 801	+ 789
245	+ 677	+ 658	— 679	— 656	— 681	— 661	+ 675	+ 653
250	+ 225	+ 261	— 279	— 229	— 317	— 344	+ 187	+ 146
255	+ 64	+ 88	— 98	— 68	— 122	— 140	+ 40	+ 16
256,5	+ 72	+ 86	— 94	74	— 109	— 119	+ 57	+ 41
260	+ 167	+ 156	— 161	— 160	— 156	— 145	+ 172	+ 171
265	+ 419	+ 382	— 389	— 400	— 367	— 335	+ 441	+ 447
270	+ 699	+ 634	— 643	— 666	— 603	— 547	+ 739	+ 753

T A B E L L E 3.

(Fortsetzung)

Jahrtausende vor 1801 n. Chr.	Sommerhalbjahr				Winterhalbjahr			
	G E O G R A P H I S C H E B R E I T E							
	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°
270,7	+ 719	+ 652	— 661	— 686	— 620	— 563	+ 760	+ 775
275	+ 520	+ 453	— 454	— 491	— 407	— 350	+ 567	+ 594
280	— 46	— 112	+ 126	+ 84	+ 160	+ 188	— 42	— 8
281,8	— 174	— 196	+ 210	+ 176	+ 235	+ 252	— 149	— 120
285	+ 2	— 7	+ 10	+ 1	+ 18	+ 26	+ 10	+ 18
290	+ 775	+ 770	— 79	— 756	— 815	— 806	+ 759	+ 720
292,7	+ 955	+ 951	— 989	— 931	— 1013	— 1003	+ 931	+ 879
295	+ 813	+ 818	— 855	— 794	— 885	— 883	+ 783	+ 729
300	— 53	— 25	+ 19	+ 45	— 5	— 27	— 77	— 97
303,1	— 337	— 327	+ 337	+ 327	+ 338	+ 328	336	— 326
305	— 216	— 231	+ 244	+ 215	+ 265	+ 276	— 195	— 170
310	+ 685	+ 606	— 611	— 650	— 558	— 492	+ 738	+ 764
313,3	+ 991	+ 906	— 921	— 946	— 872	— 798	+ 1040	+ 1054
315	+ 900	+ 820	— 832	— 860	— 784	— 716	+ 948	+ 964
320	+ 92	+ 44	— 34	— 78	+ 6	+ 45	+ 132	+ 167
323,3	— 170	— 192	+ 206	+ 172	+ 232	+ 248	— 144	— 116
325	— 81	— 97	+ 105	+ 83	+ 123	+ 136	— 63	— 44
330	+ 68	+ 88	— 98	— 72	— 118	— 133	+ 48	+ 27
332,8	+ 736	+ 737	— 766	— 719	— 788	— 784	+ 714	+ 672
335	+ 621	+ 622	— 647	— 606	— 666	— 663	+ 602	+ 565
340	+ 85	+ 82	— 85	— 82	— 84	— 81	+ 86	+ 83
342,1	+ 1	— 7	+ 9	+ 1	+ 17	+ 24	+ 9	+ 16
345	+ 177	+ 151	— 151	— 165	— 133	— 112	+ 195	+ 204
350	+ 666	+ 605	— 614	— 635	— 578	— 526	+ 702	+ 714
350,9	+ 688	+ 627	— 636	— 657	— 599	— 546	+ 725	+ 738
355	+ 414	+ 358	— 358	— 390	— 318	— 270	+ 454	+ 478

TABELLE 3.

(Fortsetzung)

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	Sommerhalbjahr				Winterhalbjahr			
	G E O G R A P H I S C H E B R E I T E							
	+ 5°	+ 15	— 5°	— 15	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°
359,9	— 13	— 39	+ 47	+ 19	+ 71	+ 91	+ 11	+ 33
360	— 15	— 41	+ 49	+ 21	+ 72	+ 92	+ 8	+ 30
365	+ 366	+ 357	— 368	— 355	— 370	— 360	+ 364	+ 352
369,6	+ 729	+ 728	— 757	— 712	— 776	— 770	+ 710	+ 670
370	+ 726	+ 726	— 756	— 710	— 776	— 772	+ 706	+ 664
375	+ 270	+ 291	— 308	— 269	— 334	— 349	+ 244	+ 211
379,7	— 81	— 65	+ 65	+ 75	+ 54	+ 41	— 92	— 99
380	— 78	— 64	+ 64	+ 72	+ 54	+ 42	— 88	— 94
385	+ 398	+ 357	— 362	— 379	— 335	— 301	+ 425	+ 435
389,5	+ 717	+ 647	— 655	— 683	— 612	— 552	+ 760	+ 778
390	+ 713	+ 641	— 649	— 679	— 603	— 542	+ 759	+ 778
395	+ 312	+ 251	— 246	— 289	— 199	— 148	+ 359	+ 392
399,2	+ 117	+ 67	— 57	— 101	— 14	+ 26	+ 160	+ 194
400	+ 132	+ 83	— 74	117	— 32	+ 8	+ 174	+ 208
405	+ 447	+ 417	— 425	— 429	— 410	— 383	+ 462	+ 463
407,7	+ 488	+ 477	— 494	— 475	— 497	— 485	+ 485	+ 467
410	+ 404	+ 413	— 432	— 397	— 452	— 457	+ 384	+ 353
415	+ 146	+ 181	— 198	— 151	— 235	— 262	+ 109	+ 70
415,5	+ 141	+ 175	— 191	— 145	— 228	— 254	+ 104	+ 66
420	+ 368	+ 388	— 408	— 364	— 437	— 451	+ 339	+ 301
424	+ 603	+ 589	— 609	— 585	— 614	— 598	+ 598	+ 576
425	+ 609	+ 588	— 607	— 590	— 605	— 585	+ 611	+ 593
430	+ 208	+ 157	— 152	— 191	— 111	— 70	+ 249	+ 278
433,6	— 65	— 125	+ 145	+ 79	+ 201	+ 247	— 9	+ 43
435	— 58	— 120	+ 140	+ 72	+ 199	+ 248	+ 1	+ 56
440	+ 406	+ 533	— 536	— 571	— 489	— 430	+ 649	+ 674

T A B E L L E 3.
(Fortsetzung)

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	Sommerhalbjahr				Winterhalbjahr			
	G E O G R A P H I S C H E B R E I T E							
	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°
444	+ 963	+ 896	— 915	— 924	— 881	— 822	+ 997	+ 998
445	+ 943	+ 886	— 907	— 906	— 882	— 831	+ 968	+ 961
450	+ 104	+ 105	— 110	— 103	— 113	— 113	+ 101	+ 95
454,8	— 440	— 395	+ 400	+ 419	+ 371	+ 332	— 469	— 482
455	— 441	— 395	+ 399	+ 419	+ 369	+ 329	— 471	— 485
460	+ 149	+ 165	— 175	— 149	— 194	— 205	+ 130	+ 109
465	+ 477	+ 455	— 467	— 461	— 461	— 441	+ 483	+ 475
465,4	+ 488	+ 465	— 478	— 471	— 470	— 448	+ 496	+ 488
470	+ 415	+ 379	— 385	— 395	— 365	— 334	+ 435	+ 440
475	— 426	— 450	+ 474	+ 422	+ 508	+ 524	— 392	— 348
475,6	— 435	— 460	+ 485	+ 432	+ 519	+ 536	— 401	— 356
480	+ 186	+ 137	— 130	— 169	— 90	— 50	+ 226	+ 256
485	+1059	+ 999	—1023	—1021	— 997	— 943	+1085	+1077
486,1	+1053	+ 997	—1023	—1015	—1002	— 951	+1074	+1061
490	+ 596	+ 573	— 590	— 577	— 586	— 564	+ 600	+ 586
495	— 120	— 100	+ 98	+ 112	+ 83	+ 66	— 135	— 146
497,1	— 156	— 132	+ 130	+ 146	+ 113	+ 93	— 173	— 185
500	+ 42	+ 64	— 72	— 46	— 94	— 111	+ 20	— 1
505	+ 530	+ 524	— 544	— 516	— 553	— 545	+ 521	+ 495
508,2	+ 628	+ 596	— 612	— 606	— 600	— 570	+ 640	+ 632
510	+ 578	+ 534	— 544	— 554	— 520	— 481	+ 602	+ 607
515	+ 419	+ 358	— 357	— 394	— 314	— 263	+ 462	+ 489
520	+ 314	+ 265	— 264	— 295	— 228	— 188	+ 350	+ 372
525	+ 139	+ 107	— 103	— 127	— 77	— 51	+ 165	+ 183
525,3	+ 130	+ 100	— 96	— 120	— 72	— 47	+ 154	+ 173
530	+ 148	+ 140	— 142	— 142	— 139	— 132	+ 151	+ 150

T A B E L L E 3.

(Fortsetzung)

Jahrtausende vor, 1800 n. Chr.	Sommerhalbjahr				Winterhalbjahr			
	G E O G R A P H I S C H E B R E I T E							
	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°	+ 5°	+ 15°	— 5°	— 15°
535	+ 640	+ 642	— 668	— 626	— 687	— 584	+ 621	+ 584
537,8	+ 851	+ 839	— 869	— 829	— 882	— 868	+ 838	+ 800
540	+ 808	+ 790	— 820	— 784	— 828	— 808	+ 800	+ 766
545	+ 7	— 1	+ 3	— 5	+ 11	+ 17	+ 15	+ 21
548,6	— 417	— 422	+ 439	+ 408	+ 456	+ 457	— 400	— 373
550	— 373	— 384	+ 403	+ 368	+ 423	+ 430	— 353	— 322
555	+ 659	+ 599	— 609	— 629	— 573	— 521	+ 695	+ 707
559	+ 1268	+ 1189	— 1216	— 1219	— 1179	— 1109	+ 1305	+ 1299
560	+ 1247	+ 1169	— 1195	— 1199	— 1158	— 1088	+ 1284	+ 1280
565	+ 122	+ 95	— 92	— 113	— 70	— 48	+ 144	+ 160
569,4	— 622	— 603	+ 622	+ 603	+ 623	+ 604	— 621	— 602
570	— 610	— 588	+ 606	+ 590	+ 603	+ 582	— 613	— 596
575	+ 451	+ 461	— 481	— 443	— 502	— 507	+ 430	+ 397
579,7	+ 1195	+ 1186	— 1233	— 1164	— 1261	— 1246	+ 1168	+ 1104
580	+ 1187	+ 1181	— 1227	— 1159	— 1255	— 1243	+ 1159	+ 1097
585	+ 325	+ 328	— 341	— 318	— 352	— 352	+ 314	+ 294
590	— 391	— 411	+ 433	+ 387	+ 464	+ 478	— 360	— 320
590,3	— 386	— 408	+ 430	+ 382	+ 462	+ 477	— 354	— 313
595	+ 327	+ 264	— 259	— 304	— 210	— 158	+ 376	+ 410
600	+ 903	+ 825	— 837	— 863	— 790	— 722	+ 950	+ 966

T A B E L L E 4.

Säkulare Verschiebungen des kalorischen Aequators

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	Geograph. Breite der kalor. Aequators	Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	Geograph. Breite der kalor. Aequators	Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	Geograph. Breite des kalor. Aequators	Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	Geograph. Breite des kalor. Aequators	Jahrtausende vor 1900 n. Chr.	Geograph. Breite des kalor. Aequators
0	+3° 2'	125	-4° 16'	250	+0° 44'	369,6	-3° 38'	485	-6° 32'
0,6	+3° 5'	127,7	-5° 26'	255	+2° 15'	370	-3° 37'	486,1	-6° 28'
5	+0° 46'	130	-4° 18'	256,5	+2° 15'	375	+0° 25'	490	-2° 21'
10	-3° 10'	135	+1° 29'	260	+1° 34'	379,7	+3° 40'	496	+3° 58'
11,1	-3° 21'	140	+4° 47'	265	-0° 38'	380	+3° 39'	497,1	+4° 16'
15	-1° 31'	145	+1° 24'	270	-3° 9'	385	-0° 25'	500	+2° 29'
20	+2° 53'	150	-4° 5'	270,9	-3° 21'	389,6	-3° 19'	505	-1° 49'
22,1	+3° 20'	152,2	-4° 59'	275	-1° 26'	390	-3° 16'	508,2	-2° 37'
25	+1° 57'	155	-3° 51'	280	+4° 5'	395	+0° 32'	510	-2° 6'
30	-2° 29'	160	+2° 15'	281,8	+4° 53'	399,2	+2° 21'	515	-0° 30'
32,7	-2° 48'	164,3	+5° 30'	285	+3° 6'	400	+2° 11'	520	+0° 26'
35	-2° 12'	165	+5° 27'	290	-4° 2'	405	-0° 56'	525	+1° 59'
40	+0° 18'	170	+0° 29'	292,7	-5° 38'	407,1	-1° 24'	525,3	+2° 4'
45	+1° 48'	175	-6° 4'	295	-4° 24'	410	-0° 44'	530	+1° 44'
37,1	+1° 59'	176,3	-6° 31'	300	+3 18'	415	+1° 26'	535	-2° 51'
50	+1° 39'	180	-3° 37'	303,1	+6° 5'	415,5	+1° 29'	537,8	-4° 42'
55	-0° 32'	185	+5° 43'	305	+5° 13'	420	-0° 28'	540	-4° 18'
60	-3° 12'	187,5	+7° 41'	310	-2° 59'	424	-2° 27'	545	+3° 2'
60,6	-3° 21'	190	+5° 59'	313,4	-5° 52'	425	-2° 29'	548,6	+7° 0'
65	-1° 27'	195	-4° 25'	315	-5° 2'	430	+1° 28'	550	+6° 39'
70	+4° 11'	198,5	-8° 4'	320	+2° 34'	433,6	+4° 12'	555	-2° 48'
71,9	+5° 11'	200	-7° 18'	323,3	+4° 51'	435	+4° 9'	559	-8° 27'
75	+3° 28'	205	+2° 11'	325	+3° 57'	440	-2° 13'	560	-8° 16'
80	-4° 12'	209,6	+7° 35'	330	+2° 15'	444	-5° 38°	565	+2° 7'
82,8	-6° 10'	210	+7° 31'	332,8	-3° 42'	445	-5° 28'	569,4	+8° 37'
85	-5° 8'	215	+1° 42'	335	-2° 40'	450	+2° 4'	570	+8° 28'
90	+2° 54'	220	-7° 0'	340	+2° 16'	454,8	+6° 39'	575	-1° 10'
94	+6° 40'	220,8	-7° 9'	342,1	+3° 6'	455	+6° 38'	579,7	-7° 44'
95	+6° 27'	225	-2° 25'	345	+1° 35'	460	+1° 33'	580	-7° 40'
100	-0° 32'	230	+5° 48'	350	-2° 52'	465	-1° 15'	585	+0° 1'
105,1	-7° 16'	232,4	+6° 5'	350,9	-3° 4'	465,4	-1° 21'	590	+6° 56'
110	-1° 8'	235	+3° 11'	355	-0° 29'	470	-0° 36'	590,3	+6° 55'
115	+6° 27'	240	-3° 24'	359,1	+3° 23'	475	+7° 19'	595	+0° 24'
116,1	+6° 44'	242,2	-4° 3'	360	+3° 24'	475,5	+7° 25'	600	-5° 4'
120	+2° 55'	245	-3° 6'	365	-0° 18'	480	+1° 40'		

T A B E L L E 5.

Säkulare Aenderungen der sommerlichen Bestrahlung der mit dem Breitenkreis von 55^0 nördlich begrenzten Kalotte der Erde und ihre Folgen.

$\Delta_1 Q_s$ Aenderungen infolge der Variabilität der astronomischen Elemente,

$\Delta_2 Q_s$ Aenderungen infolge der Variabilität der Kalotte,

ΔH Verschiebungen der Schneegrenze, hervorgerufen durch die beiden vorstehenden Aenderungen.

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	$\Delta_1 Q_s$	$\Delta_2 Q_s$	ΔH
	Kanonische Einheiten		Meter
0,6	+20	+21	+41
5	+292	+223	+515
10	+546	+268	+814
11,1	+521	+268	+789
15	+319	+234	+553
20	-260	-343	-603
22,1	-452	-700	-1152
25	-480	-756	-1236
30	-225	-296	-521
32,7	-143	-176	-319
35	-106	-126	-232
40	+27	+28	+55
45	+333	+239	+572
47,1	+307	+229	+536
50	+296	+225	+521
55	+140	+130	+270
60	+99	+96	+195
60,6	+91	+89	+180
65	-140	-172	-312
70	-466	-728	-1194
71,9	-496	-789	-1285
75	-352	-509	-861
80	+198	+172	+370
82,8	+418	+262	+680
85	+477	+268	+745

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	$\Delta_1 Q_s$	$\Delta_2 Q_s$	ΔH
	Kanonische Einheiten		Meter
90	+271	+213	+484
93	+115	+107	+222
95	+128	+121	+249
100	+89	+87	+176
105,1	-12	-13	-25
110	-291	-403	-694
115	-567	-943	-1510
116,1	-566	-942	-1508
120	-280	-384	-664
125	+408	+260	+668
127,7	+550	+268	+818
130	+578	+268	+846
135	+206	+177	+383
140	-122	-147	-269
145	-185	-236	-421
150	-55	-62	-117
152,2	+20	+21	+41
155	+18	+19	+37
160	-45	-51	-96
164,3	-35	-39	-74
165	-8	-9	-17
170	+306	+229	+535
175	+517	+268	+785
176,3	+476	+268	+744
180	+175	+156	+331

T A B E L L E 5.

(Fortsetzung)

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	$\Delta_1 Q_s$	$\Delta_2 Q_s$	ΔH
	Kanonische Einheiten		Meter
185	—390	—580	—970
187,5	—514	—828	—1342
190	—471	—739	—1210
195	—31	—34	—65
198,5	+247	+201	+448
200	+269	+212	+481
205	+137	+127	+264
209,6	+82	+81	+163
210	+102	+99	+201
215	+359	+248	+607
220	+465	+267	—732
220,8	+405	+259	+664
225	—145	—179	—324
230	—659	—1155	—1814
232,4	—641	—1112	—1753
235	—456	—708	—1164
240	—14	—15	—29
242,2	+191	+167	+358
245	+378	+253	+631
250	+414	+261	+675
255	+228	+190	+418
256,5	+157	+143	+300
260	+23	+24	+47
265	—20	—22	—42
270	—65	—74	—139
270,7	—66	—76	—142
275	—197	—254	—451
280	—326	—463	—789
281,8	—283	—389	—672
285	—72	—83	—155
290	+444	+266	+710

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	$\Delta_1 Q_s$	$\Delta_2 Q_s$	ΔH
	Kanonische Einheiten		Meter
292,7	+576	+268	+844
295	+571	+268	+839
300	+182	+161	+343
303,1	—135	—165	—300
305	—258	—348	—606
310	—178	—225	—403
313,4	—31	—34	—65
315	—54	—61	—115
320	—311	—437	—748
323,3	—283	—389	—672
325	—181	—230	—411
330	+201	+173	+374
332,8	+470	+267	+737
335	+404	+259	+663
340	+30	+32	+62
342,1	—64	—74	—138
345	—83	—97	—180
350	—49	—55	—104
350,9	—45	—51	—96
355	—177	—224	—401
359,9	—208	—270	—478
360	—207	—269	—476
365	+158	+144	+302
269,6	+449	+266	+715
370	+460	+267	+727
375	+331	+239	+570
379,9	+62	+63	+125
380	+54	+55	+109
385	—65	—74	—139
389,6	—89	—104	—193
390	—108	—129	—237

TABELLE 5.

(Fortsetzung)

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	$\Delta_1 Q_s$	$\Delta_2 Q_s$	ΔH
	Kanonische Einheiten		Meter
395	-278	-381	-659
399,2	-315	-444	-759
400	-302	-421	-723
405	+45	+46	+91
407,7	+222	+186	+408
410	+328	+237	+565
415	+370	+251	+621
415,5	+362	+249	+611
420	+389	+256	+645
424	+273	+214	+487
425	+224	+188	+412
530	-260	-351	-611
433,6	-501	-800	-1301
435	-520	-900	-1420
440	-164	-206	-370
444	+88	+86	+174
445	+156	+142	+298
450	+72	+72	+144
454,8	+72	+72	+144
455	+82	+81	+163
460	+215	+182	+397
465	+130	+122	+252
465,4	+125	+118	+243
470	-13	-14	-27
475	-455	-706	-1161
475,6	-466	-728	-1194
480	-264	-358	-622
485	+196	+170	+366
486,1	+233	+193	+426
490	+198	+172	+370
495	+82	+81	+163

Jahrtausende vor 1800 n. Chr.	$\Delta_1 Q_s$	$\Delta_2 Q_s$	ΔH
	Kanonische Einheiten		Meter
497,1	+90	+88	+178
500	+198	+172	+370
505	+289	+222	+511
508,2	+144	+133	+277
510	+21	+22	+43
515	-205	-265	-470
520	-178	-225	-403
525	-163	-204	-367
525,3	-156	-194	-350
530	+27	+28	+55
535	+415	+261	+676
537,8	+445	+266	+711
540	+386	+255	+641
545	-60	-68	-128
548,6	-300	-418	-718
550	-322	-456	-778
555	-45	-51	-96
559	+185	+170	+355
560	+174	+155	+329
565	-137	-167	-304
569,4	-246	-329	-575
570	-216	-282	-498
575	+357	+247	+604
579,7	+701	+268	+969
580	+703	+268	+971
585	+221	+186	+407
590	-411	-619	-1030
590,3	-419	-635	-1054
595	-285	-393	-678
600	-43	-48	-91

Sur une espèce de quasi-invariants numériques

PAR

MICHEL PETROVITCH

(Présenté à la séance de l'Académie des sciences naturelles du 19 octobre 1936)

1. L'auteur désigne comme *quasi-invariant numérique* J d'un ensemble (x_k) une expression analytique dépendant des x_k , laquelle, par le changement des valeurs réelles des éléments, change sa valeur numérique, mais celle-ci restant constamment comprise dans un intervalle borné Δ . On peut, tout en restant dans la généralité, prendre pour Δ l'intervalle compris entre 0 et 1.

Ainsi, par exemple, on a pour l'ensemble des valeurs réelles des x_k

$$J = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Pour toute valeur réelle de x et pour toute intégrale réelle y de l'équation

$$(1 + x^2 + y^2) f(x, y, y') - x^2 - y^2 = 0.$$

où f est un polynome, on a

$$J = f(x, y, y').$$

Toutes les fois que l'équation fonctionnelle

$$y(x) + y(\varphi) - e^{-y^2} = 0 \quad \varphi = \text{fonction de } x$$

admet des solutions en y réelles pour x réel on a

$$J = y(x) + y(\varphi).$$

Des règles générales fournissent la possibilité de former autant qu'on veut d'expressions J relatives à un ensemble (x_k) lorsqu'on en connaît une. Ainsi:

1° $f(x)$ étant une fonction de x , réelle et monotone, lorsque x varie de 0 à J , l'une et l'autre des deux expressions

$$\frac{f(J) - f(0)}{f(I) - f(0)} \quad \frac{f(J) - f(I)}{f(0) - f(I)}$$

seront aussi des expressions J .

2° Il en est de même de l'expression

$$\frac{1}{x-a} \int_a^x J dx.$$

où a est un nombre réel.

3° J_1, J_2, J_n étant des expressions J , il en sera de même du rapport

$$\frac{a_1 J_1 + a_2 J_2 + \dots + a_n J_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n},$$

où les a_k sont des nombres positifs; en particulier, il en sera ainsi de

$$\frac{1}{n}(J_1 + J_2 + \dots + J_n).$$

Des quasi-invariants numériques se présentent dans la théorie des équations différentielles de tout ordre, où les J apparaissent comme fonctions déterminées de x, y et d'une ou plusieurs dérivées de y par rapport à x . Dans un grand nombre de cas il est possible de les former à l'aide de l'équation différentielle elle-même, sans son intégration préalable.

Ainsi, X_1 et X_2 étant deux fonctions positives pour x réel, et X_3, X_4 deux fonctions réelles telles que l'expression

$$X = \frac{X_3}{X_1} - \frac{X_4}{X_2}$$

ne change de signe pour aucune valeur réelle de x , l'équation différentielle

$$(X_1 y^2 + X_2) \Phi(x, y, y', y'' \dots) + X_3 y^2 + X_4 = 0$$

admettra comme J , pour toutes ses intégrales réelles, l'une ou l'autre des expressions

$$\frac{\Phi + \frac{X_3}{X_1}}{\frac{X_3}{X_1} - \frac{X_4}{X_2}} \quad \text{et} \quad \frac{\Phi + \frac{X_4}{X_2}}{\frac{X_4}{X_2} - \frac{X_3}{X_1}}.$$

L'équation linéaire

$$y'' - f(x)y = 0,$$

où f est une fonction positive et bornée pour x réel, admet pour toutes ses intégrales réelles y , dont la dérivée y' a des zéros réels x_0 , comme J l'expression

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{y'}{\sqrt{y_0^2 - y^2}} - \alpha \right),$$

où α et β sont la plus petite et la plus grande valeur de $\sqrt{f}$ pour x réel.

Considérons l'équation du premier ordre

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0,$$

où F est un polynome irréductible de y et y' , *pair* en y' . Désignons par $F_1(x, y, y')$ l'ensemble des termes de F ne contenant que les puissances *impaires* de y .

Soient alors

1° $f_{i,j}(x)$ le coefficient de y'^j dans le polynome en y' qui multiplie y^i dans F_1 ;

2° $\varphi_{i,j}(x)$ le coefficient de y'^j dans le polynome en y' qui multiplie y^i dans F_2 .

On peut démontrer la proposition suivante:

Toutes les fois que les fonctions $\varphi_{i,j}$ sont positives et que les valeurs des rapports

$$-\frac{f_{i,j}(x)}{\varphi_{i,j}(x)}$$

restent comprises entre celles de deux fonctions fixes $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ pour les valeurs réelles de x , l'équation admet pour toutes ces intégrales réelles comme quasi-invariant numérique l'une et l'autre des expressions

$$\frac{y - \lambda_1(x)}{\lambda_2(x) - \lambda_1(x)} \quad \text{et} \quad \frac{y - \lambda_2(x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)}.$$

Remarquons encore que l'équation

$$y'^2 + y^2 - f(x) = 0,$$

où $f(x)$ est une fonction finie et positive pour x réel, admet pour toute branche intégrale y positive, monotone et croissante, comme J l'expression

$$C \left(\frac{y' + y}{\sqrt{f}} - 1 \right),$$

où C désigne la constante

$$C = 1 + \sqrt{2} = 2,414213 \dots$$

La connaissance de quasi-invariants numériques J contribue à connaître une foule de particularités se rattachant aux intégrales réelles de l'équation différentielle à laquelle ils se rapportent. Ainsi, l'existence d'un J de la forme linéaire en $\frac{y'}{y}$

$$(2) \quad \frac{ay'}{y} + b$$

implique, entre autres, la particularité suivante de toute intégrale réelle de l'équation: la courbe intégrale y se trouve toute entière comprise entre les deux courbes exponentielles

$$y = y_0 e^{-\frac{b}{a}(x-x_0)} \quad \text{et} \quad y = y_0 e^{\frac{1-b}{a}(x-x_0)}.$$

d'où l'on tire des conclusions sur la manière dont se comporte asymptotiquement l'intégrale y .

Un quasi-invariant numérique de la forme

$$\varphi(x) (y' + y)$$

indique que toute intégrale réelle de l'équation différentielle se trouve comprise entre les deux courbes fixes

$$y = y_0 e^{-(x-x_0)} \quad \text{et} \quad y = e^{-x} \left[y_0 e^{-x_0} + \int_{x_0}^x \frac{e^x}{\varphi} dx \right],$$

d'où l'on déduit d'autres particularités de l'intégrale y .

Un J linéaire en $\frac{y''}{y}$:

$$(3) \quad \frac{\alpha y''}{y} + \beta, \quad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta > \alpha \end{matrix}$$

indique que toute intégrale réelle y est oscillante, avec une infinité d'oscillations autour de l'axe Ox ; elle a une infinité de zéros réels positifs et négatifs, distribués de manière que chaque intervalle

$$\dots (-2\rho, -\rho), (-\rho, 0), (0, \rho), (\rho, 2\rho) \dots,$$

où

$$\rho = \pi \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},$$

contient un, et un seul zéro.

De ce fait découlent plusieurs propositions comme, par exemple, les suivantes:

Pour toute intégrale entière, n'ayant pas des zéros imaginaires ou n'en ayant qu'un nombre limité, et admettant un J de la forme (3), le produit canonique de ses facteurs primaires est une fonction entière du genre un.

Toute intégrale y entière admettant un J de cette forme, dont le produit canonique serait d'un genre supérieur à un, a une infinité de zéros réels et imaginaires.

L'existence effective des fonctions entières y n'ayant pas des zéros imaginaires et admettant un J de la forme (3), est révélée par la fonction élémentaire

$$y = \sin x \sqrt{\gamma},$$

où γ est un nombre compris entre $\frac{\beta-1}{\alpha}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$.

2. L'objet principal de ce travail est la démonstration du théorème:

Toutes les fonctions entières de genre fini, ayant les zéros tous réels, admettent en commun un quasi-invariant numérique dont la forme ne change qu'avec le genre de la fonction.

Ce quasi-invariant a pour expression

$$(4) \quad J = \frac{(h!)^2}{(2h+1)!} \frac{u^{(h+1)}}{u^2}$$

$$(5) \quad u = -\frac{d^{h+1}}{dx^{h+1}} \log y,$$

où $h=p$ pour les fonctions de genre p impair, et $h=h+1$ pour les fonctions de genre p pair.

Les fonctions y d'un genre pair $p=2k$ et celles de genre impair $p=2k+1$ ont un même quasi-invariant.

Ainsi, les fonctions du genre zéro et celles du genre un ont en commun le quasi-invariant

$$(6) \quad J = \frac{1}{6} \frac{u''}{u^2},$$

où

$$(7) \quad u = -\frac{d^2}{dx^2} \log y = \left(\frac{y'}{y} \right)^2 - \frac{y''}{y}$$

et J s'écrit sous la forme développée

$$(8) \quad I = \frac{y'^4 + \frac{1}{2} y''^2 y^2 + \frac{2}{3} y''' y' y^2 - 2y'' y'^2 y - \frac{1}{6} y^{IV} y^3}{(yy'' - y'^2)^2}.$$

Les fonctions du genre zéro ou un ont pour quasi-invariant aussi l'expression qu'on obtient en remplaçant dans le second membre de (8) y par la dérivée d'un ordre quelconque.

Parmi les fonctions entières du genre zéro ou un, ayant tous leurs zéros réels et par suite admettant comme quasi-invariant l'expression (8), se trouvent, par exemple,

1° la transcendante de Bessel

$$y = I + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \frac{x^3}{(3!)^2} + \dots$$

qui est du genre zéro;

2° les fonctions du genre zéro

$$y = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$y = \cos \sqrt{x};$$

3° les fonctions du genre un

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x;$$

4° Un grand nombre de fonctions $y = f(x)$ représentées par des intégrales définies de la forme

$$y = \int_a^b f(t) \cos xt \, dt$$

$$y = \int_a^b f(t) \sin xt \, dt.$$

Un cas particulier des fonctions entières y précédentes esi fourni par les polynomes ayant tous leurs zéros réels. Ils admettent donc aussi comme quasi-invariant l'expression (8). Mais on peut démontrer qu'ils admettent aussi comme quasi-invariant l'expression

$$(9) \quad J = -\frac{n}{6(n-1)} \frac{\frac{d^4}{dx^4} \log y}{\left(\frac{d^2}{dx^2} \log y\right)^2} - \frac{1}{n-1}$$

qui s'écrit sous la forme

$$(10) \quad J = -\frac{1}{n-1} \frac{n(y'^4 + \frac{1}{2}y''^2 y^2 + \frac{2}{3}y''' y' y^2 - 2y'' y'^2 y - \frac{1}{6}y'^4 y^3)}{(yy'' - y'^2)^2} - \frac{1}{n-1}.$$

La valeur limite inférieure 0 du quasi-invariant est atteinte, pour tout x réel, par le polynome

$$y = (ax + b)^n;$$

la valeur limite supérieure I n'est atteinte par aucun polynome. Cependant, J tend vers cette valeur I lorsque x croît indéfiniment par des valeurs soit positives, soit négatives.

3. Les polynomes y à zéros tous réels admettent encore un quasi-invariant plus simple que les précédents, mais qui est valable pour toute valeur réelle de x , *sauf pour les x compris dans un certain intervalle d'étendue limitée, rattachée au polynome considéré.*

Désignons par Δ l'intervalle de x compris entre le plus petit et le plus grand zéro de y , tenant compte du signe des zéros.

Pour toute valeur de x qui se trouve en dehors de l'intervalle Δ , le polynome y admet comme quasi-invariant l'expression

$$(11) \quad J = \alpha \frac{yy''}{y^2} + \beta,$$

où α et β sont deux constantes ayant pour les x à gauche de Δ les valeurs

$$(12) \quad \alpha = \frac{n}{n-1} \quad \beta = -\frac{n+1}{n-1},$$

et pour les x à droite de Δ les valeurs

$$(13) \quad \alpha = -\frac{n}{n-1} \quad \beta = I.$$

Ainsi, par exemple, les polynomes X_n de Legendre ont comme quasi-invariant l'expression (11) pour toute valeur réelle de x qui se trouve en dehors de l'intervalle compris entre -1 et $+1$. Et il en est ainsi de tous les polynomes y à zéros tous réels, dont les coefficients sont positifs et croissent avec leur rang, car, d'après le théorème de Kakeya, ces zéros sont toujours compris entre -1 et 0 .

Remarquons encore que la limite inférieure 0 de J est effectivement atteinte, et cela pour toute valeur réelle de x , par le polynome

$$y = (ax + b)^n,$$

tandis que la limite supérieure 1 n'est atteinte par aucun polynome.

4. Le problème de reconnaître si un polynome donné a tous ses zéros réels, et par suite appartient à la classe de fonctions admettant un quasi-invariant de la forme précédente, est résoluble au moyen d'un théorème de Laguerre¹⁾, auquel, en vue d'application, on peut donner la forme suivante:

Soit $P(z)$ le polynome donné de degré n ; posons

$$Z = \frac{x}{y}$$

et soit $f(x, y)$ le polynome, homogène en x et y

$$y^n P\left(\frac{x}{y}\right).$$

La fonction

$$-\frac{f''_{yy}}{f''_{xx}}$$

sera une fonction $Q(z)$, rationnelle en z , jouissant de la propriété exprimée par le théorème suivant:

Pour que le polynome $P(x)$ ait tous ses zéros réels, il faut et il suffit que le produit $\beta \varphi(\alpha, \beta)$, où $\varphi(\alpha, \beta)$ désigne le coefficient de i dans $Q(\alpha + \beta i)$, ne soit positif pour aucun couple de valeurs réelles de α et β .

Il est, d'ailleurs, possible de former autant qu'on veut de polynomes d'un degré voulu n , ayant leurs racines réelles, par des considérations plus simples. Ainsi, par exemple

¹⁾ Laguerre: Oeuvres t. I. p. 56—61.

1° il existe une infinité de suites de facteurs

$$(14) \quad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$$

jouissant de la propriété suivante: toutes les fois qu'un polynome

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

est un polynome de cette espèce, le polynome

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 x + \lambda_2 a_2 x^2 + \dots + \lambda_n a_n x^n$$

le sera également.

Telles seraient, par exemple, les suites de facteurs

$$\lambda_k = \alpha^k \quad \alpha = \text{nombre réel},$$

$$\lambda_k = \alpha^{k^2} \quad -1 < \alpha < 1,$$

$$\lambda_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha + k)} \quad \alpha > 0,$$

$$\lambda_k = \frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + k)} \quad \alpha > 0 \quad \text{etc.}$$

2° Un théorème que nous avons démontré dans un travail antérieur¹⁾ fournit la possibilité de former une suite indéfinie de polynomes

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$(15) \quad P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$\dots$$

dont tous les zéros seraient réels.

¹⁾ *M. Petrovitch*: Sur une classe remarquable de séries entières (Atti del IV Congresso internat. dei matematici, Roma 1908 p. 36—43)

Formons le discriminant

$$\Delta(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

du polynome

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

et l'équation algébrique en z

$$(16) \quad \Delta_n(z) = \Delta(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, z) = 0.$$

Pour que les polynomes (15) aient tous leurs zéros réels, il faut et il suffit 1° que $a_2 < \frac{a_1^2}{4a_0}$; 2° que la valeur de chaque coefficient a_i pour $2 < i \leq n$ soit comprise entre la plus petite et la plus grande racine de l'équation (16), où n a la valeur i .

Dans le cas où tous les coefficients a_i doivent être positifs, la condition 2° prend la forme suivante:

Aucun coefficient a_i pour $2 < i \leq n$ ne surpasse la plus petite racine positive λ de l'équation (16).

Si l'on prend pour coefficients a_0 et a_1 (qui sont arbitraires) la valeur 1, les équations (16) consécutives, fournissant cette racine λ , sont

$$\Delta_2(z) = 4z - 1 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{4},$$

$$\Delta_3(z) = 37z^2 - \frac{z}{2} = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{54},$$

$$\Delta_4(z) = 256z^3 - \frac{23}{9}z^2 + \frac{z}{972} = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{2379,423} \text{ etc.}$$

.....

Si, par exemple, l'on assigne aux coefficients $a_2, a_3, a_4, \dots$ les valeurs égales à ces racines λ , comme leurs plus grandes

valeurs possibles, on obtient la suite correspondante (15) de polynomes (15) à zéros tous réels

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} (x + 2)^2$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{54} = \frac{1}{54} (x + 6)^2 (x + \frac{3}{2})$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{54} + \frac{x^4}{2379,423} = \frac{1}{2379,423} (x + 19,1172)^2 (x + 4,3225) (x + 1,5064)$$

.....

En faisant n croître indéfiniment, on arrive à la conclusion:

Il existe une infinité de fonctions entières du genre zéro et un ayant la propriété que, non seulement elles ont leurs zéros tous réels, mais aussi chaque polynome obtenu en arrêtant le développement taylorien de la fonction à un nombre limité de ses termes, a ses zéros tous réels.

Toutes ces fonctions entières et tous ces polynomes admettent des quasi-invariants de la forme précédente.

Toute fonction de cette espèce est le produit d'une fonction entière du genre zéro et d'un facteur exponentiel $Ae^{\alpha x}$. Chaque coefficient a_n de ces fonctions est plus petit que

$$\frac{a_0 \beta^n e^{-\alpha n^2}}{n!},$$

où β et α sont des constantes. Les zéros de la fonction croissent avec leur rang n plus vite que la valeur

$$n (\sqrt{2})^n.$$

3° Il existe une quantité de propositions sur les expressions analytiques dépendant d'un polynome, permettant de former

autant qu'on veut de polynômes à zéros tous réels. Ainsi, par exemple:

a) Soit $P(x)$ un polynôme à zéros réels et simples; on aura

$$e^{xz} P(z) = Q_0(z) + Q_1(z)x + Q_2(z)x^2 + \dots,$$

où les Q_k sont des polynômes dont le degré croît avec leur rang; chacun de ces polynômes a tous ses zéros réels (Laguerre).

b) Soit $F(z)$ une fonction entière du genre zéro ou un, ayant tous ses zéros réels et simples; α étant réel, si l'on pose

$$F(\alpha) = a_0, \quad F'(\alpha) = a_1, \quad F''(\alpha) = a_2, \dots$$

chacun des polynômes

$$P_k(x) = a_0 + \binom{k}{1} a_1 x + \binom{k}{2} a_2 x^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a_{k-1} x^{k-1} + a_k x^k$$

$$k = 2, 3, 4, \dots$$

a tous ses zéros réels (Laguerre).

5. Les quasi-invariants numériques précédents trouvent des applications dans la théorie des équations différentielles. L'existence d'un quasi-invariant révèle des particularités des intégrales permettant souvent de conclure, par exemple, à la non-existence d'intégrales qui seraient des fonctions entières à zéros réels, ou bien d'en connaître quelques propriétés sans avoir besoin d'intégrer l'équation différentielle.

Soit

$$(17) \quad F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

une équation donnée. La différence

$$\Phi = J - F,$$

où J est un quasi-invariant précédent, serait également un quasi-invariant rattaché aux intégrales y fonctions entières à zéros

réels. Et alors il arrive que l'expression Φ , par sa structure, fournit soit une réponse négative concernant l'existence de telles intégrales y pour l'équation (17), soit quelque propriété des y dans le cas où une telle intégrale existe.

Ainsi, pour l'équation du premier ordre

$$(18) \quad (I + y'^2 + y^2) f(x, y, y') + y'^2 + y^2 = 0,$$

l'expression $-f(x, y, y')$ est un quasi-invariant pour toutes ses intégrales réelles. Il s'ensuit que si l'équation

$$(19) \quad f(x, y, y') + \vartheta = 0 \quad 0 < \vartheta < 1$$

n'a pas comme intégrales des fonctions entières de genre fini, à zéros réels, l'équation n'en aura pas non plus.

Considérons l'équation du quatrième ordre

$$(20) \quad y \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{y'}{y} \right) + \varphi(x) \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) \right]^2 y' = 0,$$

où φ est une fonction continue pour x réel. L'expression

$$J = - \frac{\frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{y'}{y} \right)}{6 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) \right]^2}$$

étant un quasi-invariant pour les intégrales de (20) qui seraient fonctions entières du genre zéro ou un à zéros réels, il en sera de même de l'expression

$$J = \frac{1}{6} \varphi(x) \frac{y'}{y}.$$

On en conclut que les zéros réels d'une telle intégrale y doivent coïncider avec ceux de la fonction $\varphi(x)$, ce qui contribuera à connaître le produit canonique des facteurs primaires de y . En outre, ceci montre que chaque courbe intégrale y de telle nature analytique est toute entière située dans la région comprise entre la droite

$y = \text{valeur initiale } y_0$

et

$$y = y_0 e^{\frac{1}{6} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\varphi(x)}}.$$

Considérons encore l'équation du second ordre

$$(21) \quad \varphi(x) (1 + y'^2 + y^2) y'' + y y'^2 + y^3 = 0,$$

où φ est une fonction positive pour x réel. L'équation admet pour toutes ses intégrales réelles comme quasi-invariant l'expression

$$J = \varphi(x) \frac{y''}{y},$$

ce qui fait voir que, pour x réel, on a

$$-\frac{1}{\varphi(x)} < \frac{y''}{y} < 0$$

et d'où découlent les conséquences suivantes:

Toute intégrale réelle y est oscillante, avec une infinité de zéros réels, positifs et négatifs. Le nombre de ces zéros, contenus dans un intervalle donné (a, b) est compris entre les deux nombres

$$\frac{b-a}{\pi} \sqrt{N} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{\pi} \sqrt{M} + 1,$$

où N et M désignent la plus petite et la plus grande valeur qu'acquiert la fonction $\frac{1}{\varphi}$ lorsque x varie de a à b .

La distance mutuelle de deux zéros consécutifs n'est jamais plus petite que $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$, ou plus grande que $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$. On en conclut aisément que toute intégrale y , qui serait une fonction entière, a pour son produit canonique une fonction entière du genre un.

Envisageons, comme dernier exemple, l'équation générale du premier ordre

$$(22) \quad y' = f(x, y).$$

Toutes les fois qu'elle admet comme intégrales des fonctions entières du genre zéro ou un, à zéros réels, celles-ci ont comme semi-invariant l'expression

$$(23) \quad J = \Phi(y, y', y'', y''', y^{IV}),$$

où la fonction Φ est le second membre de la formule (10).

Les formules

$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = \frac{df}{dx} + f \frac{df}{dy} = f_1$$

$$y''' = \frac{df_1}{dx} + f \frac{df_1}{dy} = f_2$$

$$y^{IV} = \frac{df_2}{dx} + f \frac{df_2}{dy}$$

exprimeront les dérivées y', y'', y''', y^{IV} , en fonction de x et y ; ces expressions transformeront la fonction (23) en une fonction $\Psi(x, y)$ qui sera connue.

Pour toute intégrale y de (22) qui serait une fonction entière du genre zéro ou un (ou polynome) à zéros réels, la courbe intégrale sera toute entière située dans la région du plan comprise entre les deux courbes

$$\Psi(x, y) - I = 0 \quad \text{et} \quad \Psi(x, y) = 0.$$

Théorie de transformations tangentielles

PAR

M. N. SALTUKOV

(Présenté à la Séance de l'Académie des Sciences naturelles du 19 octobre 1936)

1. Il s'agit, dans le présent travail, d'esquisser le problème de la *Structure des transformations tangentielles*, en y introduisant la nouvelle notion de leur *fonction caractéristique*. L'avantage de cette dernière est qu'elle permet de présenter les formules de transformation sous une forme élégante. De plus, l'introduction de la dite fonction simplifie la démonstration des formules représentant les propriétés des fonctions de la transformation étudiée.

Ces derniers résultats ont été exposés en détail par l'auteur dans ses conférences faites, sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique, dans les Universités belges, en 1931 et 1936.

2. Considérons, pour fixer les idées, l'ensemble des $n + 1$ formules distinctes qui définissent une transformation tangentielle:

$$\left. \begin{aligned} X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= x'_i, \\ Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= z', \\ P_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= p'_i, \end{aligned} \right\} (1)$$

$(i = 1, 2, \dots, n),$

reliant les anciennes variables:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$$

aux nouvelles

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_n.$$

Il s'ensuit donc que les relations suivantes doivent avoir lieu:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n, \quad (2)$$

$$dz' = p'_1 dx'_1 + p'_2 dx'_2 + \dots + p'_n dx'_n. \quad (3)$$

2. Supposons, maintenant, que la transformation (1) appartienne à la classe q , c'est à dire que le résultat de l'élimination des variables

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

entre les $n + 1$ premières équations (1), donne $q + 1$ relations indépendantes de ces dernières quantités.

Ecrivons les équations, qui s'obtiennent de cette manière, sous la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z'), \\ x_{n-q+k} &= \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z'), \\ (k &= 1, 2, \dots, q). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Cela étant, introduisons la désignation

$$S \equiv \varphi - \sum_{k=1}^q \varphi_k p_{n-q+k} \quad (5)$$

que nous appellerons *fonction caractéristique* de la transformation considérée (1).

Il importe de démontrer, d'abord, que les formules (1) peuvent être remplacées par d'autres qui s'expriment au moyen de la fonction caractéristique (5) et d'établir, ensuite les conditions d'existence de ces nouvelles formules.

3. On prend comme point de départ la propriété d'invariance de l'expression pfaffienne $dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s$. En différentiant les formules (4), on obtient, grâce à l'hypothèse introduite que la transformation (1) était de la classe q , les formules requises sous la forme suivante:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial x_r}, \quad (r=1, 2, \dots, n-q), \quad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x'_i} + \frac{\partial S}{\partial z'} p'_i = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Puisque il n'existe, outre les formules (1), d'autres relations entre les anciennes et les nouvelles variables, les formules (4), (6) et (7) représentent une transformation algébrique d'équations (1), dans un domaine bien déterminé de la variation de nos quantités variables.

Or, les équations (6) sont indépendantes des nouvelles variables canoniques de la seconde classe $p'_1, p'_2, \dots, p'_n$. Donc, l'ensemble des équations (4) et (6) est équivalent à $n+1$ premières équations (1). Il s'ensuit, par conséquent, qu'en introduisant les désignations

$$S_r \equiv \frac{\partial S}{\partial x_r}, \quad (r=1, 2, \dots, n-q),$$

afin d'abréger l'écriture, les équations (4) et (6) doivent rendre distinct de zéro le déterminant fonctionnel suivant de l'ordre $n+1$:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_1'} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_s'} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n'} \\ \frac{\partial S_1}{\partial z'} & \frac{\partial S_1}{\partial x_1'} & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial x_s'} & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial x_n'} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial S_{n-q}}{\partial z'} & \frac{\partial S_{n-q}}{\partial x_1'} & \dots & \frac{\partial S_{n-q}}{\partial x_s'} & \dots & \frac{\partial S_{n-q}}{\partial x_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1'} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s'} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n'} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_q}{\partial z'} & \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_1'} & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_s'} & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial x_n'} \end{vmatrix} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad (8)$$

C'est seulement dans le cas, où cette dernière condition (8) est vérifiée, que les $n + 1$ premières équations (1) peuvent être remplacées par l'ensemble d'équations (4) et (6).

4. Passons à l'étude des formules (7). Les considérations qui viennent d'être développées démontrent que les formules (7) sont équivalentes aux n dernières équations (1). On obtient de cette manière les identités suivantes:

$$P_i \equiv - \left(\frac{\frac{\partial S}{\partial x_i'}}{\frac{\partial S}{\partial z'}} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

où l'on désigne par les parenthèses le résultat obtenu en substituant, dans l'expression qui se trouve entre parenthèses, les valeurs de nouvelles variables

$$x_1', x_2', \dots, x_n', z'$$

qui sont données par les $n + 1$ premières formules (1).

On voit, d'après les formules établies (9), que les n dernières relations (1) découlent des $n + 1$ premières équations (1), car les fonctions P_i s'expriment au moyen de la fonction caractéristique S .

Il s'ensuit une nouvelle conclusion importante. On va démontrer précisément que, grâce à l'inégalité (8), les équations (7) sont résolubles par rapport aux anciennes variables

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n.$$

Pour le faire voir, calculons la valeur du déterminant fonctionnel

$$D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial x_1} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_1} p_1' & \frac{\partial^2 S}{\partial x_2' \partial x_1} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_1} p_2' & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial x_1} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_1} p_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial x_{n-q}} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_{n-q}} p_1' & \frac{\partial^2 S}{\partial x_2' \partial x_{n-q}} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_{n-q}} p_2' & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial x_{n-q}} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x_{n-q}} p_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial p_{n-q+1}} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_{n-q+1}} p_1' & \frac{\partial^2 S}{\partial x_2' \partial p_{n-q+1}} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_{n-q+1}} p_2' & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial p_{n-q+1}} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_{n-q+1}} p_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1' \partial p_n} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_n} p_1' & \frac{\partial^2 S}{\partial x_2' \partial p_n} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_n} p_2' & \dots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n' \partial p_n} + \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial p_n} p_n' \end{vmatrix}.$$

La comparaison des deux déterminants Δ et D fait voir qu'il existe une relation très simple entre leurs valeurs, s'exprimant de la manière suivante:

$$D \equiv - \frac{(-1)^q}{\frac{\partial S}{\partial z'}} \Delta < 0.$$

Cette formule démontre bien l'assertion qui vient d'être faite.

5. Cela posé, il est aisé de faire une observation concernant les formules (9), démontrant que, dans chaque transformation tangentielle (1), les n dernières formules découlent de $n + 1$ premières équations.

On connaît bien le résultat donné par S. Lie et par G. Darboux, démontrant que l'ensemble des $n + 1$ fonctions en involution, par rapport à $2n + 1$ variables

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n,$$

définit une transformation de contact, permettant de composer les n dernières fonctions de cette transformation. Or, ces géomètres se bornent à former les équations nécessaires pour définir les fonctions cherchées P_i . Au n° 100 des Conférences de Belgique de l'auteur¹⁾ se trouve une autre démonstration plus immédiate du même théorème.

Le résultat que l'on vient de formuler, dans les lignes qui précèdent, peut être considéré comme le théorème inverse de celui de S. Lie et de G. Darboux.

6. En même temps, les formules (9), ainsi que les (6) et (7), qui viennent d'être établies, sont bien commodes, en vue des applications, et très utiles pour composer les formules des transformations tangentielles.

Considérons, par exemple, la transformation connue de S. Lie pour transformer les lignes droites en sphères. Les formules principales de cette transformation sont, d'après S. Lie,

$$z = -(x' + iy') - xz'$$

$$y = -x(x' - iy') + z'.$$

Donc, la fonction caractéristique correspondante devient

¹⁾ N. Saltykow — *Sur la Théorie des Equations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue*. Paris Gauthier-Villars 1924. Chapitre XI. p. 153.

$$S = -(x' + iy) - xz' + [x(x' - iy') - z']q.$$

Il s'ensuit les trois autres formules de la transformation considérée:

$$p = -z' + (x' - iy')q,$$

$$p' = \frac{xq - 1}{x + q}, \quad q' = -\frac{xq + 1}{x + q}i.$$

Il suffirait cependant d'introduire dans le même but deux formules principales

$$z = x_1 - xz_1, \quad y = xy_1 + z_1,$$

où toutes les variables sont réelles. Il est de plus évident que l'élimination des trois anciennes variables, entre ces deux dernières équations et les deux équations de la ligne droite, produit l'équation d'un hyperboloïde à une nappe, formé par la rotation d'une hyperbole équilatérale autour de son axe imaginaire. Pour avoir la sphère il suffit de donner les valeurs purement imaginaires à la coordonnée correspondante à l'axe imaginaire de notre hyperboloïde réel.

Or, il est bien entendu que tous ces résultats sont à prendre sous une certaine réserve. En effet, ce n'est pas l'équation d'une surface qui s'obtient par la transformation des équations d'une ligne, mais l'ensemble des deux équations, dont une est la surface en question.

Ce dernier est défini par deux équations, dont l'une représente l'équation de la surface en question. Quant à la seconde équation, elle définit une relation entre les nouvelles variables.

Enfin les transformations ponctuelles ne représentent qu'un cas particulier des transformations de contact, où le nombre des formules principales de transformation est égal à l'ordre des dimensions de l'espace considérée. L'introduction de la fonction caractéristique, dans ce cas, devient avantageuse pour le calcul des dérivées de la variable fonctionnelle.

7. Les formules (9) deviennent surtout utiles pour composer les formules représentant les propriétés des fonctions X_i , Z et P_i . On remarquera immédiatement, grâce à la forme des équations (4) et (1), que les $n + 1$ premières équations (1) doivent être en involution.

Pour avoir les autres relations, posons

$$\frac{\partial S}{\partial x'_k} \equiv f_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z').$$

Il s'ensuit donc les égalités:

$$P_k \equiv f_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, X_1, X_2, \dots, X_n, Z) \equiv (f_k),$$

les dernières parenthèses désignant le résultat de la substitution, dans la fonction f_k , des expressions X_i , Z , respectivement au lieu de x'_i , z' .

Cela étant, on obtient, grâce aux propriétés d'involution des fonctions X_i et Z , la formule suivante:

$$[X_i, P_k] \equiv \sum_{r=1}^{n-q} \frac{\partial X_i}{\partial p_r} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_r} \right) - \sum_{s=1}^q \frac{dX_i}{dx_{n-q+s}} \left(\frac{\partial f_k}{\partial p_{n-q+s}} \right),$$

où l'on a posé

$$\frac{dX_i}{dx_{n-q+s}} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial x_{n-q+s}} + \frac{\partial X_i}{\partial z'} p_{n-q+s}.$$

Or, on a, de plus, les identités

$$\left. \begin{aligned} X_i(x_1, x_2, \dots, x_q, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \varphi, \psi_1, \psi_2, \dots, \\ \psi_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n) \equiv x'_i. \end{aligned} \right\} (10)$$

($i = 1, 2, \dots, n$).

où l'on vient d'introduire, afin d'abrégier l'écriture,

$$\psi_r \equiv \frac{\partial S}{\partial x_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, n-q).$$

En différentiant les dernières identités (10) respectivement par rapport aux variables

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n,$$

on obtiendra des nouvelles identités. Il en résulte, grâce à ces dernières, les égalités requises:

$$[X_i, P_k] \equiv \begin{cases} 0, & k > i, \\ \rho, & k = i, \end{cases}$$

où l'on vient de poser

$$\rho = - \frac{I}{\left(\frac{\partial S}{\partial z'} \right)}.$$

D'une manière analogue, on obtient de même les autres relations cherchées.

$$[Z, P_k] \equiv P_k \rho,$$

$$[P_i, P_k] \equiv 0,$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices i et k , à partir de 1 jusqu'à n .

Sur le coefficient d'extension d'un domaine

PAR

ANTON BILIMOVITCH

(Présenté à la séance de l'Académie des Sciences naturelles du 19-X-1936)

Table des matières

- § 1 Définition.
- § 2 Exemples.
- § 3 Coefficient d'extension et transformation d'un domaine; représentation conforme.
- § 4 Applications:
 - a) Coefficient d'extension de Yougoslavie, de Roumanie et de Tchécoslovaquie.
 - b) Coefficient d'extension et problème de commassation des terres dans la réforme agraire.
 - c) Coefficient d'extension dans les problèmes de biologie.
- § 5 Généralisation de la notion du coefficient d'extension.

§ 1. *Définition.*

Considérons un domaine plan S , composé d'une ou plusieurs parties et limité par une ou plusieurs courbes. Désignons par L l'ensemble de ces courbes limites, par Q la surface totale du domaine S et par C son centre d'inertie.

Décrivons, en prenant C comme centre, une circonférence limitant une surface égale Q . Comparons la surface considérée S à celle du cercle ainsi obtenu. Laissons de côté le cas où la surface S est un cercle. Dans le cas général, une partie Σ de la

surface S n'appartient pas au cercle, d'autre part une partie σ du cercle se trouve hors de la courbe limite L . Il est évident que

$$(1) \quad \Sigma = \sigma.$$

Notons ici une propriété du cercle qu'on peut formuler de la façon suivante: de toutes les figures planes dont les surfaces sont égales, le cercle a la forme la plus concentrée autour d'un point. Autrement dit, la valeur de l'intégrale

$$(2) \quad I_n = \iint_S r^n ds$$

est la plus petite pour le domaine S , représentant un cercle. Dans cette intégrale r désigne la distance de l'élément ds de la surface par rapport au centre du cercle; n est un nombre fini et positif.

Comparons maintenant l'intégrale (2), prise dans le domaine S , à celle se rapportant au cercle de la surface égale à Q ; cette dernière sera désignée par I_n^* . L'expression $I_n - I_n^*$ met en évidence la différence des formes du domaine considéré S et celui du cercle. Nous introduisons le rapport

$$k_n = \frac{I_n - I_n^*}{I_n^*}$$

pour éliminer l'influence des dimensions du domaine S et nommons ce rapport *„coefficient de l'ordre n d'extension du domaine considéré“*.

Nous ne nous occuperons pas de l'analyse des coefficients d'extension des ordres différents n ; nous nous arrêterons seulement sur le cas du coefficient quadratique k_2 , que nous désignerons plus simplement par k et appellerons *coefficient d'extension du domaine donné*. Ainsi nous avons

$$(3) \quad k = \frac{I - I^*}{I^*},$$

où par I est désignée l'intégrale

$$(4) \quad I = \int \int_S r^2 ds$$

prise dans le domaine considéré S et par I^* la même intégrale mais se rapportant au cercle d'une surface égale à S .

En se rappelant que le moment d'inertie de la surface S par rapport au centre d'inertie est défini par l'intégrale (4), on peut aussi définir le coefficient d'extension de la façon suivante:

Le coefficient d'extension d'un domaine plan est égal à la différence de deux moments centraux, celui du domaine considéré et celui d'un cercle à surface égale, divisée par ce dernier.

On obtient de l'équation (3) la formule:

$$(5) \quad I = I^* (1 + k),$$

qui montre l'analogie entre le coefficient d'extension et celui de dilatation du moment central d'inertie lorsque un cercle se transforme dans un autre domaine plan quelconque de même surface.

Pour connaître les coefficient d'extension d'une surface, il suffit de calculer le moment central d'inertie I de cette surface, car le moment central d'un cercle est exprimé par la formule bien connue

$$I^* = \frac{1}{2} Q R^2 = \frac{1}{2} \pi R^4,$$

Q désignant la surface et R le rayon du cercle.

En utilisant la formule

$$I = Q \rho^2,$$

où ρ désigne le rayon d'inertie, on peut mettre l'expression (3) encore sous la forme:

$$k = \frac{2\rho^2 - R^2}{R^2} = 2 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 - 1,$$

qui offre la possibilité de calculer le coefficient k , connaissant seulement le rapport des deux rayons ρ et R .

Remarquons encore que le calcul de la différence $I - I^*$ se réduit au calcul de ces intégrales sur les parties Σ et σ seulement, car il est inutile d'étendre ce calcul à des parties confondues de deux surfaces. On a donc:

$$I - I^* = \iint_{\Sigma} r^2 ds - \iint_{\sigma} r^2 ds.$$

Cette remarque permet souvent de simplifier le problème, surtout dans le cas d'un calcul approximatif, où il est possible de partager le domaine en éléments et de calculer le moment d'inertie pour chaque élément séparément.

Toutes les méthodes connues, tant graphiques que mécaniques, sont applicables à la détermination approximative du coefficient d'extension. En découpant, par exemple, la surface donnée dans un morceau de carton ou d'un autre matériel homogène quelconque, on trouve facilement le centre d'inertie, après quoi le moment central d'inertie peut être déterminé par l'une des méthodes mécaniques (suspension unifilaire ou bifilaire, pendule).

Dans le cas d'un domaine à trois dimensions l'intégrale a la forme:

$$I = \iiint_V r^2 dv,$$

où r est encore la distance d'un élément dv du centre d'inertie et V le volume total du domaine. L'intégrale I^* est prise à l'intérieur d'une sphère dont le volume est encore égal à V . Chacune de ces intégrales présente en même temps le moment d'inertie du corps par rapport à son centre d'inertie. Dans ce cas aussi, la méthode analytique peut être remplacée par l'une des méthodes mécaniques, surtout dans le cas où la forme du corps est compliquée. D'après la formule connue:

$$2I = I_x + I_y + I_z,$$

où I_x, I_y, I_z représentent les moments d'inertie par rapport aux axes orthogonaux passant par le centre d'inertie, le problème se ramène à la détermination des moments par rapport aux axes, ce qui peut être effectué par plusieurs méthodes pratiques.

§ 2. Exemples.

Calculons les coefficients d'extension pour quelques surfaces et volumes.

1. Polygone régulier.

Il est facile de trouver la formule

$$I + k = \frac{2\pi}{3n} \cdot \frac{3 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{2\pi}{n}}$$

pour le calcul du coefficient d'extension des polygones réguliers. Le tableau ci-joint donne quelques valeurs de ce coefficient pour les différentes valeurs de n .

n	k
3	0,209
4	0,047
5	0,017
6	0,008
7	0,004
8	0,002
.	
.	
∞	0

Ce tableau permet de comparer les polygones réguliers à un cercle de même surface. A titre de comparaison on prend le moment quadratique d'inertie.

2. Rectangle.

On obtient facilement l'expression:

$$1 + k = \frac{\pi}{6} \left(m + \frac{1}{m} \right)$$

pour un rectangle avec le rapport des cotés m . Il est naturel que, de tous les rectangles, le carré ($m = 1$) ait le plus petit coefficient d'extension. Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs du coefficient k pour les valeurs entières du rapport m .

m	k
1	0,047
2	0,309
3	0,745
4	1,225
5	1,723
.	
.	

Le coefficient d'extension est égal à 1 pour la valeur du rapport m définie par l'équation:

$$m + \frac{1}{m} = \frac{12}{\pi},$$

ce qui donne

$$m \approx 3,537.$$

3. Ellipse.

Pour une ellipse avec le rapport ϵ des axes on obtient la formule:

$$1 + k = \frac{1 + \epsilon^2}{2\epsilon},$$

d'où il s'ensuit

$$(6) \quad k = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{2\varepsilon}.$$

Les valeurs $\varepsilon = 1$ (cercle) et $\varepsilon = \infty$ (morceau de droite) du rapport des axes correspondent à des valeurs limites $k = 0$ et $k = \infty$ du coefficient d'extension.

4. *Cube.*

En désignant par a l'arrête du cube, on a, pour le moment central d'inertie, l'expression:

$$I = \frac{3}{12} V a^2.$$

Pour une sphère de même volume V et de rayon r , ce moment a la valeur

$$J^* = \frac{3}{5} V r^2.$$

En tenant compte de la relation

$$a^3 = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

on obtient la formule

$$1 + k = \frac{5}{18} \sqrt[3]{6\pi^2}$$

qui donne la valeur

$$k \approx 0,083$$

pour le coefficient d'extension d'un cube.

5. *Parallélepède rectangulaire.*

En désignant par a, b, c les arêtes de parallélepède rectangulaire, on ramène l'expression de son moment central d'inertie à la forme:

$$I = \frac{1}{12} V(a^2 + b^2 + c^2).$$

En tenant compte de l'expression

$$I^* = \frac{3}{5} Vr^2$$

et de la relation

$$abc = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

on trouve, pour la détermination du coefficient k , la formule

$$1 + k = \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(abc)^{2/3}}$$

6. *Cylindre.*

Appliquons au cylindre la formule

$$I = \frac{1}{12} V(6r^2 + h^2)$$

avec r désignant le rayon et h la hauteur du cylindre. La relation entre le rayon ρ de la sphère et les quantités r et h ayant la forme

$$\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi \rho^3,$$

on arrive à la formule

$$I + k = \frac{5}{36} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \cdot \frac{6r^2 + h^2}{(r^2h)^{2/3}},$$

permettant de déterminer le coefficient d'extension k du cylindre.

7. Ellipsoïde.

En désignant par $2a$, $2b$, $2c$ les axes d'ellipsoïde on obtient pour son moment central d'inertie l'expression

$$I = \frac{1}{5} V(a^2 + b^2 + c^2).$$

En utilisant pour le moment de la sphère la formule

$$I^* = \frac{3}{5} Vr^2$$

avec la relation

$$\frac{4}{3} \pi abc = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

on obtient pour la détermination du coefficient k la formule:

$$1 + k = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(abc)^{2/3}}$$

§ 3. Coefficient d'extension et transformation d'un domaine; représentation conforme.

Soit M un point du domaine S dans le plan Oxy . Ce point est défini par ses coordonnées x et y . Considérons un autre plan $A\xi\eta$ et dans ce plan un point N , correspondant au point M et défini par les coordonnées ξ et η , fonctions de x et y

$$(7) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y). \end{aligned}$$

La transformation inverse donne:

$$x = x(\xi, \eta),$$

$$y = y(\xi, \eta).$$

Désignons par Σ le domaine du point N .

Considérons maintenant un cercle s de rayon r , ayant son centre en M . Après la transformation, ce cercle se transforme en un domaine σ du plan $A\xi\eta$. Ce domaine a son coefficient d'extension que nous appellerons k_r . Il peut arriver que ce coefficient tende vers une valeur limite fixe k lorsque le rayon r du cercle s tend vers 0:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (k_r) = k.$$

Le coefficient k ainsi défini peut être appelé „coefficient d'extension dans un point du domaine obtenu après une transformation donnée“. Il est une fonction des coordonnées du point N et, par suite, du point M :

$$k = \varphi(\xi, \eta) = f(x, y).$$

Il faut remarquer ici que le cercle de rayon r , servant à la construction du domaine σ , ne présente pas le cercle, d'une surface égale à celle du domaine σ , qui sert à la détermination du coefficient d'extension de ce domaine. Cet autre cercle a le même rayon r dans le cas où la transformation a la propriété de conserver la surface du domaine après la transformation (Flächentreue Abbildung).

Indiquons la méthode suivante pour le calcul du coefficient k . Désignons par x', y' les coordonnées du point M' se trouvant sur la courbe limite du cercle s . On a la relation:

$$(8) \quad (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = r^2.$$

En négligeant les infiniment petits de l'ordre supérieur à un, écrivons:

$$x' - x = \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta,$$

$$y' - x = \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta$$

et transformons l'équation (8) comme suit:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \Delta \xi^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \Delta \xi \Delta \eta + \\ & + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] \Delta \eta^2 = r^2. \end{aligned}$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$(9) \quad A \Xi^2 + 2B \Xi Y + C Y^2 = 1$$

avec

$$A = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2,$$

$$B = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$C = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2$$

et

$$\Xi = \frac{\Delta \xi}{r}, \quad Y = \frac{\Delta \eta}{r}.$$

L'équation (9) présente une ellipse et, d'après (6), son coefficient d'extension a la valeur

$$k = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{2\varepsilon} = \frac{(a - b)^2}{2ab},$$

où $2a$ et $2b$ sont les axes de l'ellipse et ε leur rapport.

En remarquant que, pour l'ellipse considérée,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = A + C,$$

$$-\frac{1}{b^2} = AC - B^2,$$

on peut calculer le coefficient k à l'aide de la formule:

$$(10) \quad 1 + k = \frac{(a + b)^2}{2ab} = \frac{1}{2} (A + C) (AC - B^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Faisons quelques remarques sur le coefficient k ainsi déterminé.

Commençons par l'analyse du cas où ce coefficient est égal à 0 et où, par suite, le cercle conserve sa forme après la transformation.

Il s'ensuit de l'équation (10) que, dans ce cas,

$$(A - C)^2 = -4B^2,$$

d'où

$$(11) \quad B = 0, \quad A = C,$$

ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'on cherche les conditions que l'équation (9) représente un cercle.

Ces conditions (11) donnent:

$$(12) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2$$

d'où l'on tire

$$(13) \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

ou

$$(14) \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Les équations (13) et (14) correspondent à des transformations conformes: la première avec

$$x + yi = F(\eta + \eta i),$$

la seconde avec

$$x - yi = F_1(\xi - \eta i),$$

F et F_1 étant des fonctions arbitraires.

On peut donc formuler le théorème suivant:

Une transformation avec le coefficient d'extension égal partout à 0 est conforme. Le théorème inverse est aussi valable.

L'équation différentielle correspondante à une transformation à coefficient d'extension constant a la forme:

$$(A + C)^2 = \alpha (AC - B^2),$$

ou la forme:

$$(15) \quad \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]^2 + (2 - \alpha) \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right]^2 = -\alpha \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2$$

avec

$$\alpha = 4(1 + k)^2.$$

Pour une transformation conforme $\alpha = 4$. Dans le cas général α doit être plus grand que 4 pour que l'équation (15) corresponde à une transformation réelle.

§ 4. Applications:

a. Coefficient d'extension de Yougoslavie, de Roumanie et de Tchécoslovaquie.

Le coefficient d'extension peut être appliqué comme un moyen pour caractériser approximativement la forme d'un territoire. La valeur de ce coefficient peut montrer, par exemple, dans quelle proportion l'extension d'un pays correspond au territoire qu'il occupe. En regardant la carte d'Europe, on constate la différence frappante entre la Roumanie, par exemple, qui a la forme bien arrondie, et Tchécoslovaquie, dont la forme est si allongée. Il se pose d'elle-même la question, par quel nombre pourrait on caractériser cette différence, au moins approximativement. Le coefficient d'extension répond à cette question.

1. Le coefficient d'extension de Yougoslavie.

Pour déterminer le coefficient d'extension de Yougoslavie,

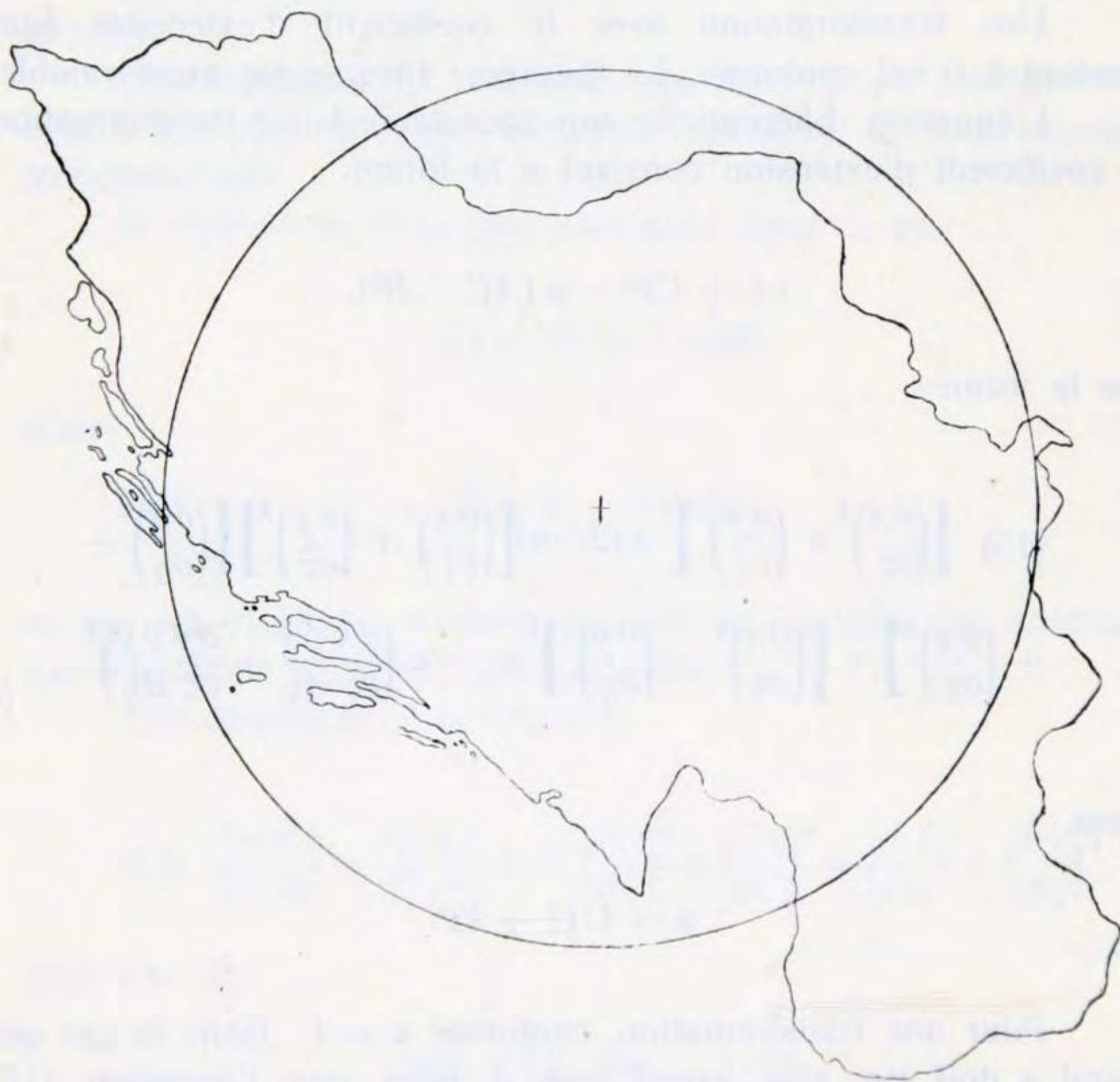


Fig. 1.

j'ai utilisé les résultats des travaux de mon frère ¹⁾, qui a trouvé pour le centre du territoire de Yougoslavie les coordonnées suivantes:

44° 7' de latitude Nord

18° 56' de longitude Est (Greenwich).

J'ai pris pour la surface de Yougoslavie la valeur $Q = 247.542 \text{ km}^2$. Après un calcul approximatif des moments d'inertie des éléments se trouvant à l'intérieur du cercle de surface Q et hors de ce cercle, j'ai trouvé pour le coefficient d'extension de Yougoslavie la valeur:

$$k \approx 0,4.$$

En même temps, j'ai fait le même calcul en prenant Beograd pour centre du cercle de comparaison. Le coefficient ainsi obtenu montre dans quelle mesure le territoire de Yougoslavie est concentré autour de Beograd. Ce dernier coefficient a la valeur

$$k' \approx 0,9,$$

c'est-à-dire plus que deux fois plus grande que celle trouvée pour le centre du territoire.

2. Coefficient d'extension de Roumanie

Pour déterminer le coefficient d'extension de Roumanie, nous avons appliqué la méthode mécanique. Nous avons trouvé le centre du territoire en suspendant deux fois la carte (1 : 3.700.000) de Roumanie, découpée d'un morceau de carton. Prenant ce point pour centre, nous avons décrit un cercle de surface égale à celle de Roumanie, c'est-à-dire à 300.000 km^2 . Après avoir décomposé en éléments les surfaces, tant extérieure qu'intérieure, nous avons calculé approximativement les moments centraux

¹⁾ *Al. Bilimovitch* — Le centre du territoire et le centre de la population en Yougoslavie. Éditions spéciales de la Société de Géographie de Beograd. Frascicule 19. Beograd. 1936.

d'inertie de ces éléments. Ce calcul approximatif a donné pour le coefficient d'extension de Roumanie la valeur:

$$k \approx 0,04.$$



Fig. 2.

On voit, donc, que le coefficient d'extension de Roumanie est à peu près dix fois plus petit que celui de Yougoslavie.

3. Coefficient d'extension de Tchécoslovaquie.

Pour la détermination du coefficient d'extension de Tchécoslovaquie, nous avons appliqué la même méthode que dans le cas de Roumanie. La surface de Tchécoslovaquie a été prise égale à 140.400 km² et nous avons obtenu

$$k \approx 1,4.$$

On voit, donc, que ce coefficient est trois fois et demi plus grand que celui de Yougoslavie et presque 35 fois plus grand

que celui de Roumanie. Ces nombres peuvent avoir aussi une signification politique, surtout si l'on tient compte des propriétés politiques des frontières de Tchécoslovaquie.



Fig. 3.

b. *Coefficient d'extension et problème de commassation des terres dans la réforme agraire.*

On sait que pour un propriétaire la forme de ses terres et leur position jouent un rôle très important. C'est pourquoi la réforme agraire doit tenir compte non seulement de la grandeur des terres qu'elle fournit au propriétaire mais aussi de leur forme. La forme la plus commode pour l'agriculture est évidemment celle qui permet la plus grande concentration autour de la maison de propriétaire. Le coefficient d'extension peut, donc, jouer ici un rôle très important.

Comme un exemple, pouvant illustrer cette remarque, prenons le bien d'un propriétaire au Wachau près de Leipzig. D'après le plan de ce village¹⁾, reproduit plus bas, la valeur du coefficient d'extension de ce bien, calculée approximativement, est égale à $k=20$. Pour expliquer ce résultat, il suffit de comparer ce nombre au coefficient se rapportant au carré ($k=0,047$) ou à un rectangle de rapport des côtés 1:2 ($k=0,309$).

Dans le cas de commassation des terres de quelques propriétaires, les plans des agronomes doivent satisfaire aux con-

¹⁾ A. Meitzen. Siedelung und Agrarwesen der Westgermanen und Ostgermanen, der Kelten, Römer, Finnen und Slaven. Berlin 1895. Band I—III und Atlas (Atlas, Anlage 129).

ditions de ne pas donner la forme trop étendue à chaque bien séparé. On le détermine en fixant le rapport limite des côtés du rectangle, car c'est la forme habituelle des champs.

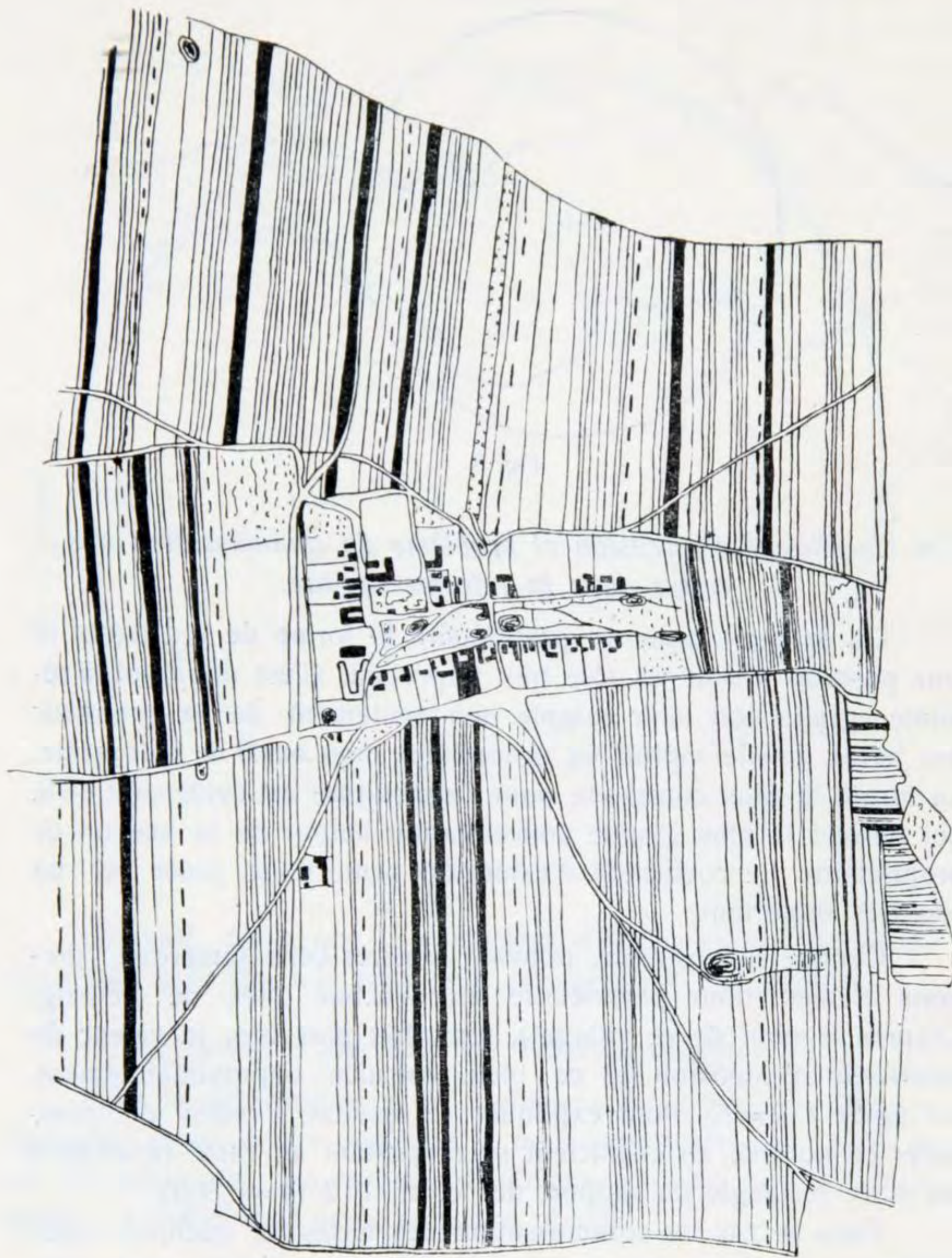


Fig. 4.

Mais parfois, à cause des propriétés du terrain, il est impossible de découper les morceaux en forme de rectangle, et alors se pose la question, par quel moyen pourrait on constater la correspondance de la forme obtenue à la norme nécessaire. Autrement dit, il faudrait trouver une méthode permettant de comparer une forme arbitraire de la surface à un rectangle donné. Il est évident que le coefficient d'extension répond complètement à cette question et peut servir de mode de comparaison de l'extension de deux surfaces égales. Il s'ensuit, donc, que ce coefficient peut être appliqué avec succès aux problèmes pratiques d'arpentage.

c. Coefficient d'extension dans la biologie

Dans les divers problèmes de biologie la forme d'un objet joue un rôle presque aussi important que sa grandeur. La grandeur est caractérisée par un nombre (volume, poids, etc.), mais il est très difficile de caractériser les propriétés de forme. C'est pourquoi une notion qui détermine complètement un nombre et qui, au moins approximativement, peut caractériser la forme dans son étendue, doit avoir un grand intérêt dans les sciences biologiques. Chaque terme descriptif pour la forme d'une cellule, d'un organe ou organisme, comme, par exemple, „presque sphérique, un peu étendue, allongé etc.“, peut être remplacé avec une précision beaucoup plus grande par le coefficient d'extension de la forme géométrique correspondante. Dans le cas où la forme d'un objet, par exemple d'un organisme, est une fonction de quelque autre phénomène, caractérisé par un nombre, on peut chercher la relation corrélatrice entre ce nombre et celui donné par le coefficient d'extension.

§ 5. Généralisation de la notion du coefficient d'extension

La notion du coefficient d'extension peut être étendue d'une part à des formes géométriques de plusieurs dimensions, et, d'autre part, à des formes dans l'espace nommé riemannien. La première généralisation est liée à la forme de l'intégrale qui correspond au moment quadratique d'inertie. Cette intégrale peut être mise sous la forme:

$$I = \underbrace{\int \int \dots \int}_n r^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

où $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ et l'intégrale est prise dans tout le domaine considéré.

Dans le deuxième cas il faut s'imaginer un domaine se trouvant sur une surface curviligne quelconque et limitée par des courbes sur cette surface. Pour déterminer le coefficient d'extension il suffit de reproduire la méthode précédente en remplaçant les distances rectilignes entre les points par des distances curvilignes le long des lignes géodésiques sur la surface ou, dans le cas général, dans l'espace curviligne.

Les applications de cette dernière généralisation du coefficient d'extension peuvent être aussi nombreuses que dans le cas de l'espace rectiligne. Par exemple, la détermination de ce coefficient pour l'Angleterre demande l'adoption de la forme sphérique pour la surface de la Terre. Pour le calcul des moments d'inertie et du centre, tenant compte des dominions et des colonies, il faut mesurer toutes les distances entre les points le long des grands cercles.

Sur les coefficients de dissymétrie

P A R

ANTON BILIMOVITCH

(Présenté à la Séance de l'Académie des Sciences naturelles du 21-XII-1936)

Introduction.

- § 1. Différents types de dissymétrie.
- § 2. Coefficients de dissymétrie d'ordre divers.
- § 3. Coefficients d'écart dissymétrique.

Introduction

La constatation de la symétrie géométrique dans différents phénomènes de la nature a acquis une telle importance que la symétrie, en tant que propriété géométrique, s'est même élevée au rang de principe.

Sauf la géométrie où la théorie de la symétrie est donnée et où la symétrie est largement utilisée, la symétrie est appliquée presque dans toutes les branches des sciences abstraites et concrètes. En mécanique, elle fait partie de la soi disant symétrie dynamique; en physique, en chimie, en minéralogie, en biologie, en médecine — y compris l'étude du rapport entre la symétrie et la psychologie — partout apparaît le principe de symétrie, et cela non seulement sous une forme statique, mais aussi sous la forme dynamique, quand sont recherchées les causes pouvant expliquer l'origine de la symétrie ou son écart.

Cependant à mesure que l'étude de la symétrie dans la nature s'approfondit, l'on vient à constater, après des mesurages exacts, un écart plus ou moins considérable, une *dissymétrie* plus

ou moins grande, là même où la nature semble offrir des spécimens d'une beauté extraordinaire.

La constatation de la dissymétrie se fait généralement en prenant en considération la différence entre certaines dimensions visibles qui, en cas de symétrie, doivent être identiques. Il est clair qu'un tel système est très individuel; il montre, dans une certaine mesure, pour chaque espèce d'individu, l'écart de cet individu de la forme symétrique, mais ne fournit point la possibilité de comparer une dissymétrie à une autre, d'évaluer la mesure de la dissymétrie en général.

N'ayant point trouvé dans la littérature, celle du moins qui a été à notre disposition, même chez les auteurs qui s'étaient consacrés au problème de la dissymétrie, la moindre trace de la mesure de la dissymétrie nous nous proposons d'étudier dans le présent article le problème du mesurage quantitatif de la dissymétrie.

§ 1. *Différents types de dissymétrie.*

Considérons un objet géométrique qui peut se composer en général de points discrètement disposés, de lignes et de volumes, soit M un point quelconque de cet objet. On dit de cet objet qu'il est symétrique par rapport à un plan P , à une droite D ou à un point O , lorsque à tout point M dudit objet correspond un autre point M' du même objet disposé de manière que le plan P ou la droite D ou le point O coupe en deux moitiés la longueur MM' et le plan P ou la droite D lui soit perpendiculaire. Conformément à quoi nous avons dans l'espace de trois dimensions trois sortes de symétrie: la symétrie plane, la symétrie axiale et la symétrie centrale. Conformément aux types de symétrie ci-dessus énumérés nous pouvons parler de trois types de dissymétrie: plane, axiale et centrale. L'un des cas les plus importants, surtout lorsqu'il s'agit de l'application pratique, est celui de symétrie et de dissymétrie d'une figure plane par rapport à une droite. C'est surtout sur ce cas spécial que nous allons démontrer notre méthode d'étudier la mesure de la dissymétrie.

§ 2. *Coefficients de dissymétrie d'ordre divers.*

Soit une figure plane dissymétrique par rapport à la droite D du même plan (*fig. 1.*); dans un cas général, la droite D partage le domaine total S de la figure en deux parties, soient S_1 la partie gauche et S_2 la partie droite. En construisant le do-

maine S_1' symétrique de S_1 par rapport à la droite D , les deux domaines S_2 et S_1' auront une partie commune. En portant cette partie commune sur le domaine S_1 et sur le domaine S_2 nous obtiendrons le domaine S^* symétrique par rapport à la droite D .

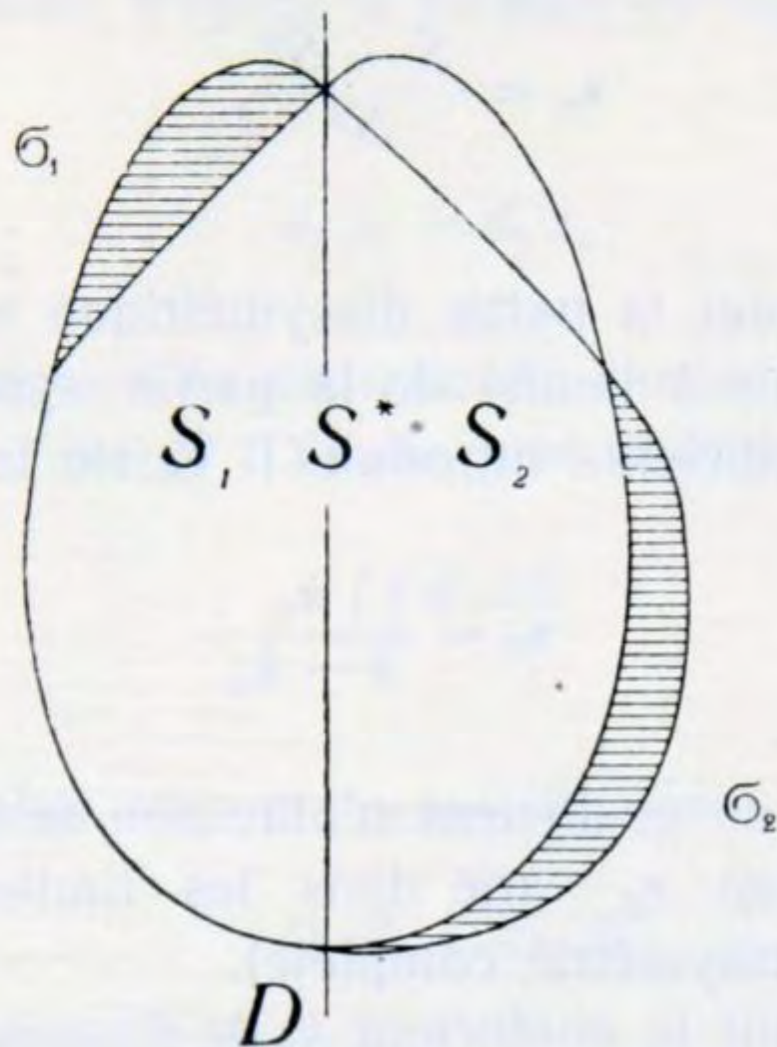


Fig. 1.

Désignons par σ_1 la partie du domaine S_1 non comprise dans le domaine S^* et par σ_2 la partie analogue du domaine S_2 . Soit σ l'ensemble de ces domaines, nous aurons :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = S - S^*.$$

Il est clair qu'en cas de symétrie $\sigma = 0$. D'autre part, il est évident que moins est grande la surface S ayant la même partie dissymétrique σ , plus la dissymétrie sera prononcée; en raison de quoi le quotient

$$k_0 = \frac{\sigma}{S} = \frac{S - S^*}{S}$$

peut être considéré comme la mesure de la dissymétrie de la figure donnée, c'est le coefficient de l'ordre zéro de dissymétrie de la surface donnée par rapport à l'axe donné. La valeur du

nombre k_0 varie de 0 (symétrie complète) à l'unité (dissymétrie complète, quand la partie gauche et la partie droite du domaine S n'ont pas une seule partie commune).

Au lieu du rapport k_0 nous pouvons introduire le quotient

$$\alpha_0 = \frac{S - S^*}{S^*},$$

autrement dit calculer la partie dissymétrique non à l'unité de la surface totale, mais à l'unité de la partie symétrique. Puisque entre les deux coefficients introduits il existe le rapport :

$$\alpha_0 = \frac{k_0}{1 - k_0}$$

la nouvelle forme du coefficient n'offre rien de spécialement nouveau. Le coefficient α_0 varie dans les limites de 0 (symétrie complète) à ∞ (dissymétrie complète).

En introduisant le coefficient k_0 de dissymétrie nous n'avons pas pris en considération la position des parties dissymétriques par rapport à l'axe de la symétrie; cependant cette position peut influer sur l'évaluation de la mesure de la dissymétrie d'une figure. Dans un cas général, nous pouvons établir que l'influence dissymétrique d'un élément dS du domaine σ est d'autant plus considérable que la distance d dudit élément à l'axe est grande; nous pouvons introduire la puissance n de cette distance. En considération de quoi nous pouvons introduire le rapport général suivant pour le coefficient de dissymétrie d'ordre n :

$$k_n = \frac{\int\limits_{\sigma} d^n dS}{\int\limits_S d^n dS}$$

ou l'intégrale du numérateur est étendu à tous les éléments des surfaces dissymétriques et l'intégrale du dénominateur — à toute la surface plane de notre domaine S . Il importe de noter que la distance d est toujours prise comme positive.

Considérons les cas k_1 et k_2 .

Pour le cas k_1 l'intégrale

$$\frac{\iint_{\sigma} d \cdot dS}{\sigma}$$

peut être remplacée, d'après la formule du moment linéaire, par la somme

$$d_1 \sigma_1 + d_2 \sigma_2,$$

où d_1 et d_2 désignent la distance du centre de gravité des surfaces σ_1 et σ_2 à l'axe D . D'autre part l'intégrale du dénominateur

$$\frac{\iint_S d \cdot dS}{S}$$

peut être présentée sous la forme suivante:

$$D_1 S_1 + D_2 S_2$$

où D_1 et D_2 sont les distance du centre de gravité des surfaces S_1 et S_2 au même axe. De la sorte nous pouvons écrire pour coefficient de dissymétrie de premier ordre, au cas du domaine d'une surface plane, l'expression suivante:

$$k_1 = \frac{d_1 \sigma_1 + d_2 \sigma_2}{D_1 S_1 + D_2 S_2}.$$

Quant au cas du coefficient k_2 , l'intégrale du numérateur

$$\frac{\iint_{\sigma} d^2 dS}{\sigma}$$

présente le moment d'inertie des parties dissymétriques par rapport à la droite D . Soit J_{σ} ce moment d'inertie; le dénominateur étant pareillement le moment d'inertie J_S , nous écrivons:

$$k_2 = \frac{J_{\sigma}}{J_S}.$$

Prenons un exemple. Considérons la dissymétrie du trapèze $A_1 A_2 A_3 A_4$ (fig. 2) obtenu du carré en y remplaçant un côté par le segment $A_2 A_3$ oblique par rapport aux côtés du carré.

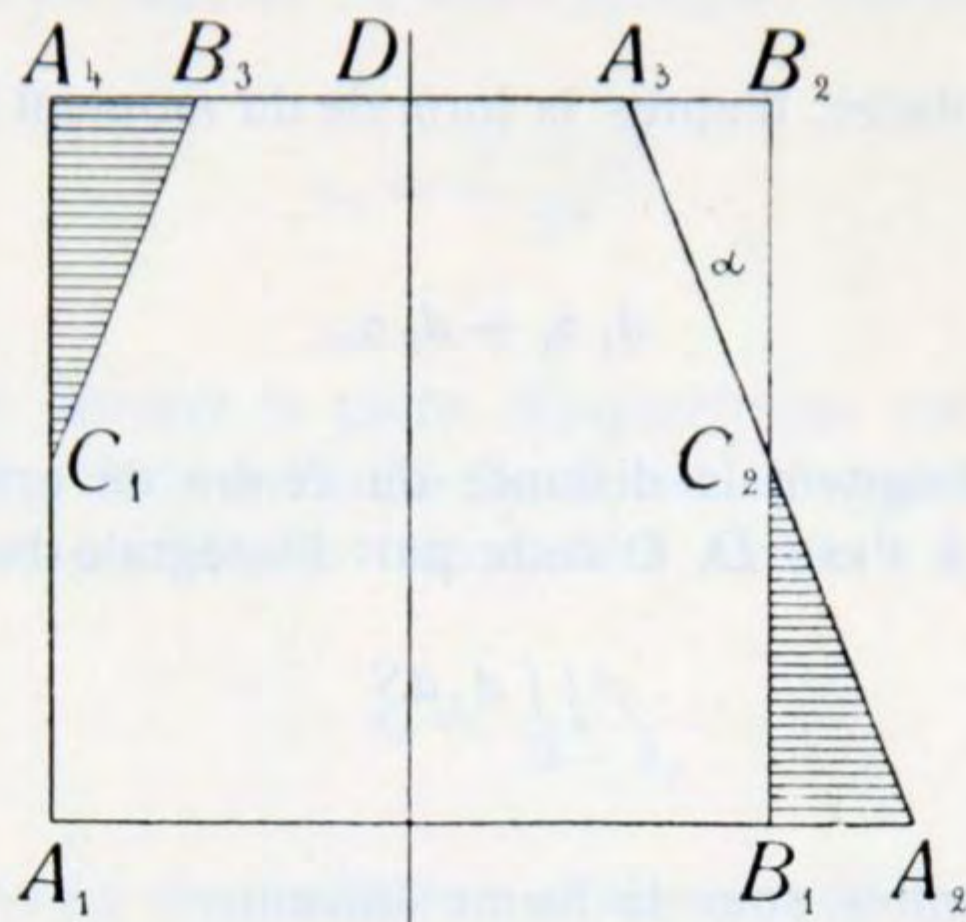


Fig. 2.

Les coefficients k_0 , k_1 et k_2 ont les valeurs suivantes:

$$k_0 = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha, \quad k_1 = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{6 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad k_2 = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{6 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

où α est l'angle compris entre le côté $A_2 A_3$ du trapèze et l'axe D de la symétrie du carré.

L'analyse de la dissymétrie dans des cas d'autres dissymétries peut être effectuée en employant le procédé analogue.

Considérons le cas de dissymétrie de lignes courbes. Pre-

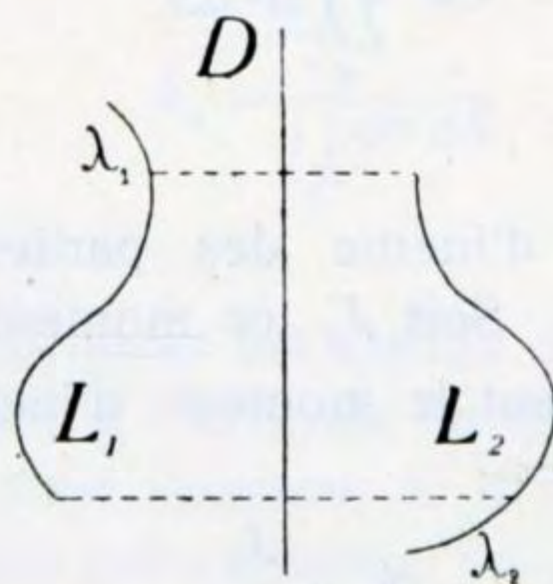


Fig. 3.

nous comme exemple le cas de dissymétrie axiale. Ici nous pouvons également introduire dans l'analyse la partie de la courbe non comprise dans la partie symétrique de la courbe; sur notre figure (fig. 3) cette partie se compose de deux parties:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda.$$

En désignant par L la longueur totale de notre courbe qui se compose de la partie gauche et de la partie droite, c'est-à-dire $L_1 + L_2 = L$, l'expression générale pour le coefficient de dissymétrie axiale de la courbe sera:

$$k_n = \frac{\int_{\lambda} d^n \cdot dl}{\int_L d^n \cdot dl},$$

où d est la distance du point de la courbe à l'axe D et dl l'élément de la longueur de la ligne.

Disons enfin quelques mots des coefficients de dissymétrie des points isolés arbitrairement disposés. Comme précédemment nous pouvons écrire:

$$k_0 = \frac{\nu}{N}$$

où ν est le nombre des points dissymétriques (par exemple les points M et Q de la fig. 4) et N le nombre général des points.

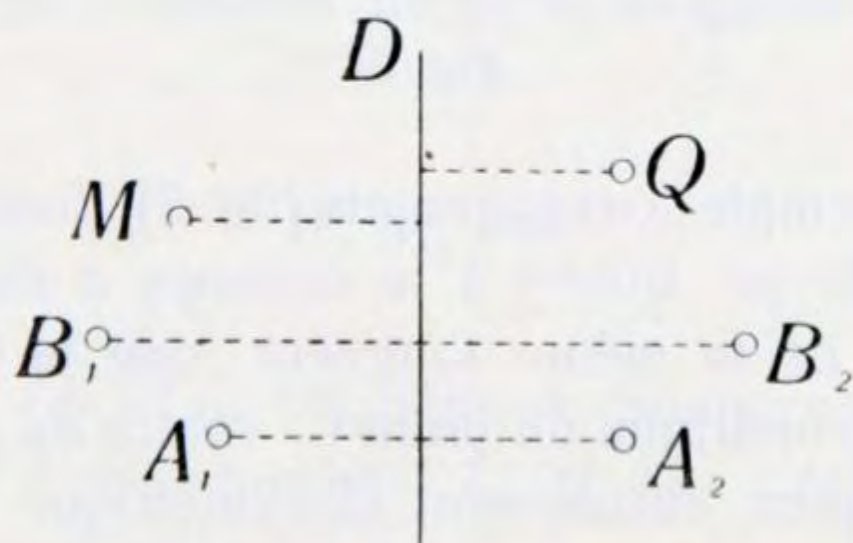


Fig. 4

Comme coefficient de dissymétrie d'ordre n nous pouvons écrire:

$$k_n = \frac{\sum_{j=1}^N d_j^n}{\sum_{i=1}^N d_i^n},$$

où la somme du numérateur est étendue à tous les points dissymétriques et la somme du dénominateur à tous les points du système de points en général.

§ 3. Les coefficients d'écart dissymétrique

Il peut arriver que des figures ou bien même deux parties d'une même figure soient complètement dissymétriques et que, par conséquent, le coefficient de dissymétrie de cette figure ait la valeur d'unité, mais que néanmoins ces figures rappellent tant la symétrie qu'il soit possible, dans ce cas aussi, de parler de la symétrie.

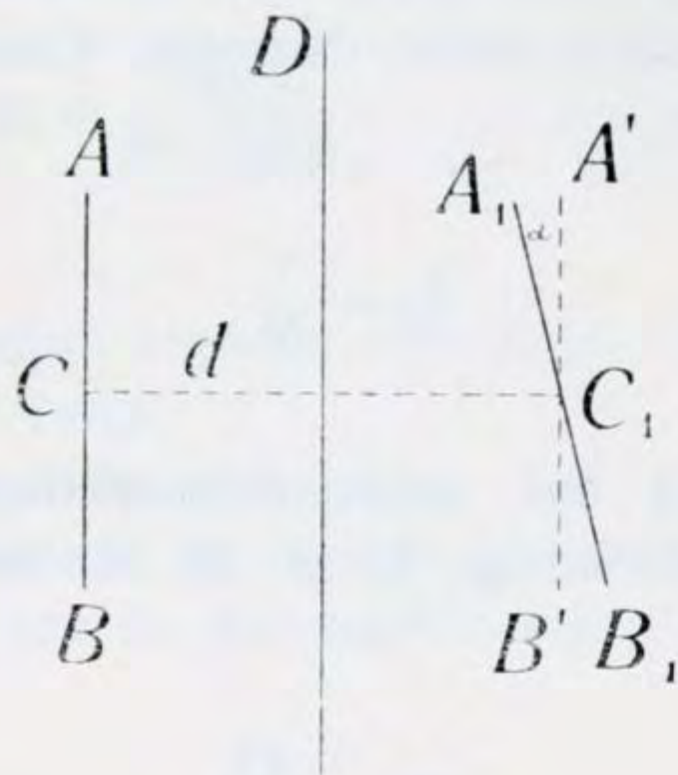


Fig. 5.

Ainsi par exemple deux segments (fig. 5), dont l'une, AB , parallèle à la droite D se trouve à la distance d de cette dernière, et l'autre, A_1B_1 , de la même longueur que le premier et ayant pour centre C_1 , symétrique du point C , centre du premier segment, présentent une figure absolument dissymétrique car le segment $A'B'$, symétrique de AB , n'a pas un seul élément de commun avec le

segment $A_1 B_1$. D'autre part, il est clair que, le cas échéant la dissymétrie augmente quand l'angle s'accroît. En raison de quoi nous pouvons considérer différentes valeurs de l'écart de la figure dissymétrique donnée par rapport à la figure symétrique analogue.

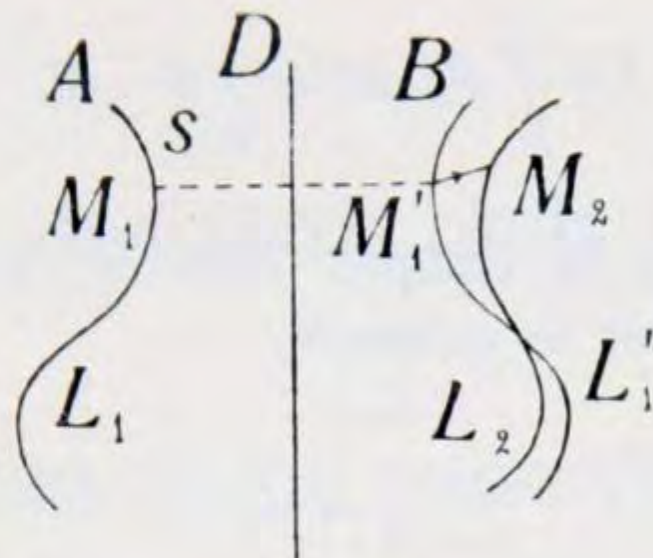


Fig. 6.

Pour expliquer comment se fait l'analyse de tels écarts de symétrie, prenons le cas suivant de dissymétrie. Soient deux courbes (fig. 6): L_1 et L_2 dont la deuxième n'a, pour ainsi dire, pas un seul élément de commun avec la courbe L'_1 , symétrique de la première courbe. Établissons maintenant une corrélation déterminée entre les points des courbes L_1 et L_2 . Nous pouvons le faire de différentes manières et la nature même de notre analyse en dépend. Prenons par exemple le cas où à chaque point M_1 de la courbe L_1 , dont la distance au point A , l'extrémité de la ligne L , est désignée par s , correspond le point M_2 de la courbe L_2 situé à la même distance s de l'extrémité B de la ligne L_2 . Supposons également que les longueurs des courbes L_1 et L_2 soient égales. Dans ce cas nous pouvons construire en regard de chaque point M_2 le point M'_1 symétrique du point M_1 de la première courbe.

Prenons en considération le déplacement $\overrightarrow{M'_1 M_2}$ et en multiplions le carré par l'élément dl de la longueur de la courbe L_2 ; le produit

$$\overrightarrow{M'_1 M_2}^2 \cdot dl$$

est la mesure de l'écart de cet élément. Sommons ces écarts pour toute la longueur l des courbes L_1 et L_2 , c'est-à-dire prenons l'intégrale

$$i = \int_0^l \overline{M'_1 M_2^2} \cdot dl$$

et calculonsla à l'unité de l'écart total des courbes L_1 et L_2 de la droite D , autrement dit divisonsla par la somme des intégrales

$$I = \int_{L_1} d^2 \cdot dl + \int_{L_2} d^2 \cdot dl,$$

où d est la distance de chaque élément à la droite D ; alors nous pourrions appeler le quotient

$$q = \frac{i}{I}$$

coefficient d'écart de la figure donnée de la figure symétrique donnée pour la loi donnée de la comparaison des points de ces figures.

Calculons le coefficient de l'exemple concret cité au début du paragraphe, prenant pour point de départ la figure symétrique à deux segments parallèles et comparant les points d'après la distance identique desdits points aux extrémités des segments. Etant donné ces conditions, le coefficient d'écart aura la valeur suivante:

$$i = \frac{4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{6d^2 + a^2 \sin^2 \alpha}$$

Comme précédemment, nous pouvons prendre également soit une surface, soit un volume, et établir le coefficient d'écart de l'une de ces formes par rapport à'une autre forme symétrique que nous prenons pour base de la comparaison. Dans ce cas aussi il faut établir une loi définie de la corrélation entre l'élément de la forme donnée et la forme symétrique.

Sur les limites des zéros réels des polynomes

PAR

DRAGOLJUB MARKOVIĆ

(Présenté à la séance de l'Académie des Sciences naturelles du 21-XII-1936)

Du théorème de Takeya:

Tous les zéros du polynome

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

se trouvent en dehors du cercle $|x| = 1$ lorsque

$$b_0 > b_1 > b_2 > \dots > b_{n-1} > b_n > 0,$$

Hurwitz a déduit le théorème suivant:

*Théorème A*¹⁾. Lorsque les coefficients du polynome

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

sont réels et positifs, les modules de ses zéros sont tous compris entre le plus grand et le plus petit des rapports

$$\frac{a_3}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

¹⁾ Voir, par exemple, *P. Montel* -- Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes. *Comm. math. helvethici*, 7, (1934).

Comme on le voit, ce théorème est valable quelques soient les zéros réels ou imaginaires. Cependant, lorsqu'il ne s'agit que des zéros réels, on peut obtenir ce résultat d'une manière extrêmement simple, même sous les formes plus précises suivantes:

Théorème I. Lorsque les coefficients de l'équation

$$(1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n+1} x^{2n+1} = 0$$

sont réels et positifs, tous ses zéros réels (manifestement négatifs) se trouvent en valeur absolue entre le plus petit et le plus grand des rapports

$$\frac{a_3}{a_1}, \frac{a_2}{a_3}, \dots, \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}.$$

Théorème II. Lorsque les coefficients de l'équation

$$(2) \quad a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n} = 0$$

sont réels et positifs, tous ses zéros réels sont compris en valeur absolue entre le plus petit nombre m de la suite

$$(3) \quad \frac{a_3}{a_1}, \frac{a_2}{a_3}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{2n-1}},$$

et le plus grand nombre M de la suite

$$(4) \quad \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_4}, \dots, \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}.$$

Lorsque $m \geq M$, l'équation (2) n'a pas de racines réelles.

Le théorème II est connu.¹⁾ Je me propose de montrer qu'on peut déduire les théorèmes I et II d'une manière très simple de la proposition suivante:

Soient $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ une suite de nombres réels, $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ et $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ deux suites de nombres réels et positifs, alors

¹⁾ Voir, par exemple, *Bieberbach-Bauer*, Vorlesungen über Algebra, Berlin—Leipzig, 1933, p. 90.

$$(5) \quad \text{Min} \left\{ \frac{a_v}{b_v} \right\} < \frac{a_0 p_0 + a_1 p_1 + \dots + a_n p_n}{b_0 p_0 + b_1 p_1 + \dots + b_n p_n} < \text{Max} \left\{ \frac{a_v}{b_v} \right\}.$$

Démonstration du théorème I: De l'équation (1) il résulte

$$-x = \frac{a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}}{a_1 + a_3 x^2 + \dots + a_{2n+1} x^{2n}};$$

donc, d'après l'inégalité (5),

$$\text{Min} \left\{ \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} \right\} < -x < \text{Max} \left\{ \frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} \right\}.$$

Démonstration du théorème II: En multipliant l'équation (2) par $x + h$, $h = 0$, il résulte du théorème I que $-x$ se trouve entre le plus grand et le plus petit des rapports

$$\frac{a_0 h}{a_0 + a_1 h}, \frac{a_1 + a_2 h}{a_2 + a_3 h}, \frac{a_3 + a_4 h}{a_4 + a_5 h}, \dots, \frac{a_{2n-3} + a_{2n-2} h}{a_{2n-2} + a_{2n-1} h}, \frac{a_{2n-1} + a_{2n} h}{a_{2n}}$$

Or, en y faisant tendre h d'abord vers 0, puis vers l'infini, cette suite se réduit à

$$0, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_4}, \dots, \frac{a_{2n-3}}{a_{2n-2}}, \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}},$$

respectivement à

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_4}{a_5}, \dots, \frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}}, \infty,$$

dont le plus grand, respectivement plus petit terme correspond à celui de la suite (3), respectivement (4).

Recherches sur les lignes asymptotiques

P A R

DRAGOSLAV S. MITRINOVITCH

(Présenté à la séance de l'Académie des Sciences naturelles du 21-XII-1936)

Toute surface peut être considérée comme l'enveloppe des cylindres qui lui sont circonscrits et qui ont leurs génératrices parallèles à toutes les droites d'un même plan ($x = 0$). Elle est donc représentée par les équations

$$\begin{aligned} z + v y &= F(x, v), \\ (1) \quad y &= \frac{\partial F}{\partial v}, \end{aligned}$$

où v est un paramètre.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface (1) sera

$$(2) \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}}.$$

Ce fait a été signalé par L. Raffy.¹⁾

¹⁾ L. Raffy, *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse*, 1897, p. 177.

Pour un cas plus général de la surface (1), qui correspond à la fonction

$$F(x, v) = f_0 v^n + f_1 v^{n-1} + \dots + f_{n-1} v + f_n,$$

où f_k ($f_0 \neq 0$) sont des fonctions de x et où n est un nombre entier positif plus grand que l'unité, nous posons le problème suivant:

Déterminer la forme la plus générale de la surface

$$(3) \quad \begin{aligned} z + v y &= f_0 v^n + f_1 v^{n-1} + \dots + f_{n-1} v + f_n, \\ y &= n f_0 v^{n-1} + (n-1) f_1 v^{n-2} + \dots + 2 f_{n-2} v + f_{n-1}, \end{aligned}$$

(c'est-à-dire la forme la plus générale des coefficients f_k) telle que l'équation différentielle de ses lignes asymptotiques (2) soit l'équation différentielle suivante:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = a(x) v^2 + b(x) v + c(x),$$

où $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont des fonctions données de la variable x .

Nous démontrerons dans le présent travail que la solution de ce problème dépend, en dernière analyse, de l'intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \varphi(x) y = 0,$$

où $\varphi(x)$ désigne une fonction arbitraire de la variable x .

I.

On forme¹⁾

¹⁾ Les accents désignent des dérivées prises par rapport à x .

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f_0'' v^n + f_1'' v^{n-1} + \dots + f_{n-1}'' v + f_n''$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = n(n-1)f_0 v^{n-2} + (n-1)(n-2)f_1 v^{n-3} + \dots + 2f_{n-2}.$$

Pour que le polynôme $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ soit divisible par le polynôme $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$, il faut et il suffit que¹⁾

$$(4) \quad f_k'' - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} \frac{f_0''}{f_0} f_k - \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)} \frac{f_{k-1}}{f_0} \left(f_1'' - \frac{n-2}{n} \frac{f_0''}{f_0} f_1 \right) - \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{n(n-1)} \frac{f_{k-2}}{f_0} \left[f_2'' - \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} \frac{f_0''}{f_0} f_2 - \frac{n-2}{n} \frac{f_1}{f_0} \left(f_1'' - \frac{n-2}{n} \frac{f_0''}{f_0} f_1 \right) \right] = 0,$$

$$(k = 3, 4, \dots, n).$$

Ces $(n-2)$ relations différentielles étant satisfaites, l'équation (2) se ramène à

$$(5) \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{1}{n(n-1)} \frac{f_0''}{f_0} v^2 + \frac{1}{n(n-1)} \frac{1}{f_0} \left(f_1'' - \frac{n-2}{n} \frac{f_0''}{f_0} f_1 \right) v + \frac{1}{n(n-1)} \frac{1}{f_0} \left[f_2'' - \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} \frac{f_0''}{f_0} f_2 - \frac{n-2}{n} \frac{f_1}{f_0} \left(f_1'' - \frac{n-2}{n} \frac{f_0''}{f_0} f_1 \right) \right].$$

¹⁾ On parvient à ces conditions en identifiant au zéro le reste de la division qui est un polynôme en v de la forme:

$$P_3 v^{n-3} + P_4 v^{n-4} + \dots + P_{n-1} v + P_n,$$

en posant:

$$P_3 = 0, \quad P_4 = 0, \dots, \quad P_{n-1} = 0, \quad P_n = 0.$$

Or, cette équation est de la forme

$$(6) \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = a(x) v^2 + b(x) v + c(x).$$

Si l'on veut maintenant que l'équation (5) ait la forme de l'équation (6), dans laquelle les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont données d'avance, les égalités suivantes doivent avoir lieu:

$$f_0'' - n(n-1) a f_0 = 0,$$

$$f_1'' - \frac{n-2}{n} \frac{f_0''}{f_0} f_1 = n(n-1) b f_0,$$

$$f_2'' - \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} \frac{f_0''}{f_0} f_2 = n(n-1) c f_0 + \\ + \frac{n-2}{n} \frac{f_1}{f_0} \left(f_1'' - \frac{n-2}{n} \frac{f_0''}{f_0} f_1 \right).$$

Toutes les simplifications étant faites, on obtient, au lieu du dernier système et du système (4), le suivant

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 f_0}{dx^2} - n(n-1) a f_0 &= 0, \\ \frac{d^2 f_1}{dx^2} - (n-1)(n-2) a f_1 &= n(n-1) b f_0, \\ \frac{d^2 f_k}{dx^2} - n(n-k)(n-k-1) a f_k &= (n-k+1)(n-k) b f_{k-1} + \\ &+ (n-k+2)(n-k+1) c f_{k-2} \\ (k &= 2, 3, 4, \dots, n). \end{aligned}$$

Donc, la résolution du problème énoncé est ainsi ramené au système d'équations différentielles linéaires du deuxième ordre.

En omettant le second membre dans les équations (7), on aura

$$(8) \quad \frac{d^2 f_k}{d x^2} - (n-k)(n-k-1) a f_k = 0, {}^1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Les équations de cette forme ne sont intégrables par des quadratures que pour des formes particulières de la fonction $a(x)$.

Si l'on pouvait trouver les fonctions $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-2}$, définies par les équations du système (8), on aurait, par le procédé classique de la variation des constantes, toutes les fonctions $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$, définies par le système (7).

Or, en dernière analyse, la difficulté du problème énoncé réside en l'impossibilité d'intégrer une équation de la forme

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \varphi(x) y = 0,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction arbitraire de la variable x .

Envisageons maintenant le problème d'un autre point de vue.

Si pour une forme envisagée de la fonction $a(x)$, l'équation différentielle correspondante

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - M a(x) y = 0$$

(M est une constante quelconque) est intégrable, tous les coefficients f_k peuvent alors être déterminés par des quadratures.

Nous allons indiquer, dans ce qui suit, quelques fonctions $a(x)$ ayant une telle propriété.

Premier exemple. L'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(9) \quad \frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{M}{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)^2} y = 0,$$

¹⁾ Pour $k = n - 1$ et $k = n$, il s'ensuit de cette équation respectivement

$$f_{n-1}'' = 0, \quad f_n'' = 0.$$

α, β, γ, M désignant des constantes quelconques, est de la forme¹⁾

$$y = A e^{\int u_1 dx} + B e^{\int u_2 dx},$$

où A et B sont des constantes quelconques, et où

$$u_1 = \frac{\beta + r + \gamma x}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2},$$

$$u_2 = \frac{\beta - r + \gamma x}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2},$$

$$r = \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma + M}.$$

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation correspondante (8) sera

$$f_k = A_k e^{\int u_1 dx} + B_k e^{\int u_2 dx} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-2),$$

où A_k et B_k sont des constantes quelconques et où

$$u_1 = \frac{\beta + r + \gamma x}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2},$$

$$u_2 = \frac{\beta - r + \gamma x}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2},$$

$$r = \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma + (n-k)(n-k-1)}.$$

¹⁾ J. Liouville, *Sur l'équation*

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{Au}{(a + 2bx + cx^2)^2}$$

(*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, première série, t. IX, 1844, p. 336).

On en tire, enfin, comme l'intégrale générale des équations (7) la relation

$$(10) \quad f_k = A_k e^{\int u_1 dx} + B_k e^{\int u_2 dx} + \psi_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-2),$$

ψ_k étant une fonction qu'on obtient au moyen des quadratures, par exemple, par le procédé de variation des constantes.

Deuxième exemple. Soit l'équation différentielle

$$(11) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - M x^m y = 0,$$

où M est une constante quelconque, et où m est de la forme

$$m = -\frac{4i}{1+2i},$$

i étant un entier, positif ou négatif. Son intégrale générale s'exprime en termes finis.¹⁾

L'équation (11) est du type (8).

Si l'on envisage, par exemple, le cas où $m = -4$, l'intégrale de l'équation (11) sera

$$y = A x e^{\frac{\sqrt{M}}{x}} + B x e^{-\frac{\sqrt{M}}{x}}.$$

D'où il provient que l'intégrale générale de l'équation correspondante (8) sera

$$f_k = A_k x e^{\frac{\sqrt{M}}{x}} + B_k x e^{-\frac{\sqrt{M}}{x}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-2),$$

où

$$M = (n-k)(n-k-1).$$

¹⁾ Voir, par exemple, E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, 1929, p. 488.

La forme la plus générale des fonctions f_k , définies par le système (7), s'obtient alors par des quadratures.

Troisième exemple. L'équation différentielle

$$(12) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{m(m+1)}{x^2-1} y = 0,$$

où m est un entier positif, admet une intégrale particulière de la forme¹⁾

$$P(x) = \frac{x^2-1}{2m \cdot \binom{2m}{m}} \left[xL' - (m+1)L \right],$$

$L(x)$ étant le polynôme de Legendre, défini par la formule

$$L(x) = \frac{1}{(m+1)!} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2-1)^{m+1}.$$

En comparant entre elles les équations (8) et (12), on en déduit que

$$a(x) = \frac{1}{x^2-1},$$

$$m = n - k - 1.$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation correspondante (8) sera

$$(13) \quad f_k = A_k P(x) + B_k P(x) \int \frac{dx}{P^2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-2),$$

où A_k et B_k désignent des constantes quelconques, et où le polynôme $P(x)$ a la forme

$$P(x) = \frac{x^2-1}{2(n-k-1) \cdot \binom{2n-2k-2}{n-k-1}} \left[xL' - (n-k)L \right],$$

¹⁾ Gaston Julia, *Exercices d'Analyse*, t. III, 1933, p. 145—153.

$L(x)$ étant

$$L(x) = \frac{1}{(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^{n-k}.$$

Ayant la relation (13), on obtient, sans difficulté,

$$f_k = A_k P(x) + B_k P(x) \int \frac{dx}{P^2} + \psi_k$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-2),$$

la forme la plus générale des coefficients f_k correspondant à la fonction

$$a(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

II.

Les résultats précédents présenteront un intérêt particulier si les deux équations différentielles suivantes

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = a(x)v^2 + b(x)v + c(x),$$

$$\frac{d^2 f_k}{dx^2} - (n-k)(n-k-1)a(x)f_k = 0$$

sont intégrables simultanément pour une forme envisagée des fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.

Ceci aura lieu, par exemple, dans les cas que voici:

1) Lorsque

$$a(x) = -1, \quad b(x) = 0,$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$(14) \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = a(x)v^2 + b(x)v + c(x)$$

devient

$$(15) \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + v^2 = c(x).$$

Dans ce cas toutes les équations du système (7) sont intégrables, mais l'équation (15) n'est intégrable que pour des formes spéciales de la fonction $c(x)$.¹⁾ La dernière équation peut s'intégrer si la fonction $c(x)$ a, par exemple, l'une des formes suivantes:

$$1^0 \quad c(x) = \alpha \sin x,$$

$$2^0 \quad c(x) = (\alpha \sin \lambda x + \beta \cos \lambda x) \left(-2 - \frac{2}{\lambda} \right),$$

$$3^0 \quad c(x) = \alpha + \beta \operatorname{logtg} x,$$

où α, β, λ sont des constantes quelconques.

2) Si l'on a

$$b(x) = \alpha \cdot a(x), \quad c(x) = \beta \cdot a(x),$$

(α, β sont deux constantes arbitraires), l'équation (14) prend la forme

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = a(x) \cdot (v^2 + \alpha v + \beta)$$

où les variables sont séparables.

Si l'on attribue à la fonction $a(x)$, par exemple, la forme suivante

$$a(x) = \frac{1}{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)^2},$$

¹⁾ Nous nous sommes occupés, à plusieurs reprises, de l'intégration de l'équation (15) et nous avons indiqué de nombreux cas d'intégrabilité de cette équation par des quadratures. (Voir: *Sur l'intégration d'une équation différentielle importante du premier ordre* — *Bulletin de l'Académie royale serbe*, t. III, 1936).

(α, β, γ sont trois constantes arbitraires), les équations (8) seront les équations intégrables du type de Liouville:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{M}{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)^2} f = 0.$$

3) Dans le cas où $a(x) = 0$, l'équation (14) devient

$$(16) \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = b(x)v + c(x)$$

et se ramène, par la substitution de Heymann¹⁾,

$$v = \frac{1}{2} z^2 - \frac{c}{b},$$

à l'équation

$$(17) \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{b}{2}} + \left(\frac{c}{b}\right)' \cdot \frac{1}{z},$$

qui est de la forme classique

$$(18) \quad \frac{dz}{dx} = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{z}.$$

La comparaison des équations (17) et (18), conduit aux relations

$$b = 2\varphi^2,$$

$$(19) \quad c = 2\varphi^2 \left(\int \psi dx + K \right),$$

K étant une constante quelconque.

¹⁾ Heymann, *Studien über die Transformation und Integration der Differenzial- und Differenzgleichungen*, 1891, S. 349 (Teubner, Leipzig).

On connaît de nombreux cas d'intégrabilité¹⁾ de l'équation (18) et, par suite, en tenant compte des relations (19), on aura de même de nombreux cas d'intégrabilité de l'équation (15), ce qui conduit à la formation des surfaces (3) dont les asymptotiques seront déterminables par des quadratures.

— 4) Nous citerons enfin un cas assez général qui a été l'objet d'une *Note*²⁾ présentée à l'*Académie royale de Belgique*.

En supposant que

$$a(x) = \lambda^2, \quad b(x) = 2\lambda\mu, \quad c(x) = \mu^2,$$

où λ et μ sont deux fonctions quelconques de la variable x , l'équation (14) se décompose en deux équations linéaires du premier ordre, à savoir:

$$\frac{dv}{dx} = \lambda(x)v + \mu(x),$$

$$\frac{dv}{dx} = -\lambda(x)v - \mu(x).$$

Par suite, toutes les fois que l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - (n-k)(n-k-1)\lambda^2 f = 0$$

est intégrable pour une forme envisagée de la fonction $\lambda(x)$, le problème de la détermination des surfaces (3) et de leurs asymptotiques peut être résolu complètement.

¹⁾ La bibliographie du problème de l'intégration de l'équation (18) se trouve dans le Mémoire: *Recherches sur l'équation différentielle $ydy - Rdx = 0$* de K o ŕ a l o v i t c h (1894, Petrograd). Voir aussi:

A. K o r k i n e, *Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre* (*Mathematische Annalen*, t. 48, 1897, p. 317—364).

²⁾ D r a g o s l a v S. M i t r i n o v i t c h, *Asymptotiques d'une classe des surfaces et équations différentielles linéaires du second ordre s'y rattachant* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, Classe des Sciences, cinquième série, t. 22, 1936, p. 1047—1049).

En se reportant à l'équation (12), on aura, comme exemple d'une telle fonction, la fonction suivante:

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

III.

Si $n = 2$, le système (3) se réduit à

$$z + vy = f_0v^2 + f_1v + f_2,$$

$$y = 2f_0v + f_1,$$

d'où l'on tire, par élimination du paramètre v , l'équation

$$(20) \quad z = f(x)y^2 + \varphi(x)y + \psi(x).$$

Pour la surface d'équation (20), on peut aisément obtenir le résultat suivant: l'équation différentielle qui détermine les projections de leurs lignes asymptotiques, sur le plan des xy , est

$$(21) \quad 2f \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 4f'y \frac{dy}{dx} + f''y^2 + 2\varphi' \frac{dy}{dx} + \varphi''y + \psi'' = 0.$$

Si les conditions suivantes:

$$f \neq 0, \quad 2f'^2 - ff'' \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2f & 2f' & \varphi' \\ 2f' & f'' & \frac{1}{2}\varphi'' \\ \varphi' & \frac{1}{2}\varphi'' & \psi'' \end{vmatrix} = 0$$

sont satisfaites, l'équation (21) se décompose en deux équations linéaires:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2f' + \sqrt{4f'^2 - 2ff''}}{2f} y + \frac{1}{2f} \left(\frac{2f'\varphi' - f\varphi''}{\sqrt{4f'^2 - 2ff''}} - \varphi' \right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2f' - \sqrt{4f'^2 - 2ff''}}{2f} y - \frac{1}{2f} \left(\frac{2f'\varphi' - f\varphi''}{\sqrt{4f'^2 - 2ff''}} + \varphi' \right).$$

Par suite, les lignes asymptotiques de la surface

$$z = f(x)y^2 + \varphi(x)y + \frac{1}{4} \int \int \frac{f\varphi''^2 - 4f'\varphi'\varphi'' + 2f''\varphi'^2}{ff'' - 2f'^2} dx^2,$$

où figurent deux fonctions arbitraires $f(x)$ et $\varphi(x)$, sont déterminables par des quadratures.

Si l'on suppose que $f = 0$, on a la surface d'équation

$$z = \varphi(x)y + \psi(x),$$

dont les lignes asymptotiques se déterminent par une quadrature¹⁾.

Envisageons enfin le cas *parabolique* de l'équation (21), c'est-à-dire le cas où

$$(22) \quad 2f'^2 - ff'' = 0, \quad (f \neq 0),$$

d'où vient

$$f(x) = \frac{A}{x + B}, \quad (A \neq 0),$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Si, en dehors de la condition (22), l'on a

$$2f'\varphi' - f\varphi'' = 0,$$

¹⁾ Voir, par exemple, L. Raffy, *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse*, 1897, p. 156.

ce qui donne, après intégration,

$$\varphi(x) = \frac{C}{x+B} + D,$$

C et D étant deux nouvelles constantes, l'équation (21) se décompose en deux équations linéaires de la forme:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'}{f}y - \frac{\varphi' - \sqrt{\varphi'^2 - 2f\psi''}}{2f},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'}{f}y - \frac{\varphi' + \sqrt{\varphi'^2 - 2f\psi''}}{2f}.$$

Par conséquent, *les asymptotiques de la surface*

$$z = \frac{Ay^2}{x+B} + \left(\frac{C}{x+B} + D \right) y + \psi(x),$$

où intervient une fonction arbitraire $\psi(x)$, se déterminent par une seule quadrature.

IV.

Si l'on prend maintenant pour point de départ la surface représentée par les équations

$$z + vy = \varphi_0 x^n + \varphi_1 x^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} x + \varphi_n,$$

$$y = \varphi_0' x^n + \varphi_1' x^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}' x + \varphi_n',$$

où les coefficients φ_k sont des fonctions de v , et si l'on considère l'équation de leurs lignes asymptotiques (2) sous la forme:

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}},$$

$$(F = \varphi_0 x^n + \varphi_1 x^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} x + \varphi_n),$$

on arrive aisément à des résultats analogues aux précédents.

Einige Sätze über die Riesz'schen Mittel

VON
J. KARAMATA

(Vorgelegt in der Sitzung der Akademie der Naturwissenschaften vom 21-XII-1936)

§ 1. Hier möchte ich untersuchen, in wieferne die Konvergenz einer Folge $s_n = \sum_{v=1}^n u_v$ durch die Riesz'schen Mittel $R(\lambda_n, k)$ und insbesondere durch $R(\lambda_n, 1)$ erweitert wird, was durch Angabe derjenigen Bedingungen ersichtlich wird, die aus der $R(\lambda_n, k)$ -Limitierbarkeit der Folge s_n auf ihre Konvergenz zu schliessen erlauben. Dabei werde ich die einzelnen Fälle genau betrachten und dadurch manche bekannte Ergebnisse in verschiedenen Richtungen ergänzen und erweitern.

Da es sich hauptsächlich von der $R(\lambda_n, 1)$ -Mittel handeln wird, so werde ich sie in der für unsere Zwecke bequemer Form der verallgemeinerten arithmetischen Mittel

$$M(P_n) : \quad \frac{1}{P_n} \sum_{v=1}^n p_v s_v, \quad P_n = \sum_{v=1}^n p_v, \quad p_v \geq 0,$$

schreiben, welche mit

$$R(\lambda_n, 1) : \quad \sum_{\lambda_v \leq \omega} \left(1 - \frac{\lambda_v}{\omega}\right) u_v$$

identisch sind, falls

$$\omega = \lambda_{n+1} = P_n, \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad s_n = \sum_{v=1}^n u_v$$

gesetzt wird.

§ 2. Bekanntlich ist die $M(P_n)$ -Limitierbarkeit äquivalent mit der Konvergenz, falls

$$P_n = O(p_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

ist, d. h. falls das Wachstum von P_n genug schnell ist (vergl. Hardy-Riesz {1}).

Dies ist unmittelbar ersichtlich, weil aus

$$S_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=1}^n p_v s_v \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty,$$

und

$$\frac{p_n}{P_n} (s_n - s) = \frac{p_n}{P_n} (S_{n-1} - s) + (S_n - S_{n-1})$$

folgt, dass

$$\frac{p_n}{P_n} (s_n - s) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt sogar, dass $s_{n_k} \rightarrow s$, für jede Teilfolge n_k , für welche $P_{n_k} = O(p_{n_k})$ ist.

Dies ist im gewissen Sinne das Meiste, was man in dieser Richtung erhalten kann. Es ist nämlich leicht derart eine Folge s_n zu bilden, deren Glieder lauter 0 oder 1 sind, und welche gegen irgend eine Zahl s , welche zwischen 0 und 1 liegt, $M(P_n)$ -limitierbar ist, falls nur $p_n/P_n \rightarrow 0$. Aus einer solchen Folge kann also, im Falle, dass $p_n/P_n \rightarrow 0$, keine Teilfolge herausgegriffen werden, welche gegen s strebt.

Diese Ergebnisse können aber aus dem folgenden allgemeineren Satz abgeleitet werden:

Satz I. Sei $P_n = \sum_{v=1}^n p_v$ nicht abnehmend, $N(x)$ die Anzahlfunktion dieser Folge, $P_n \rightarrow \infty$, und $s_n = \sum_{v=1}^n u_v$ sei $M(P_n)$ -limitierbar:

$$\frac{1}{P_n} \sum_{v=1}^n p_v s_v \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dann ist a)

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} s_{n_k} = s$$

für jede Teilfolge n_k , für welche

$$\lim_{n=n_k \rightarrow \infty} \sup_{n \leq v \leq N} |s_v - s_n| \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad (1)$$

wo $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ und $\lambda > 1$ ist;

dies ist insbesondere immer erfüllt, falls

$$P_{n_k} = O(p_{n_k}) \text{ ist.}$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n \leq v \leq N} |s_v - s_n| \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad (2)$$

wo N entweder $= N(\lambda P_{n-1}) + 1$ oder $= N(\lambda P_n)$ sein mag; diese Bedingung ist insbesondere für jede Folge s_n erfüllt falls

$$P_n = O(p_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

ist, in welchem Falle also die $M(P_n)$ -Limitierbarkeit äquivalent mit der Konvergenz ist.

Beweis. a) Es sei in

$$\sum_{v=1}^n p_v s_v = s P_n + o(P_n), \quad n \rightarrow \infty$$

n zuerst durch $n-1$, dann durch $N=N(\lambda P_{n-1})+1$ ersetzt. Das erste Ergebniss, abgezogen von dem zweiten liefert

$$\begin{aligned} \sum_{v=n}^N p_v s_v &= s(P_N - P_{n-1}) + o(P_N) + o(P_{n-1}) \\ &= s(P_N - P_{n-1}) + o(P_N - P_{n-1}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

weil $\lambda P_{n-1} < P_N$, so dass

$$\frac{\varepsilon_1 P_N + \varepsilon_2 P_{n-1}}{P_N - P_{n-1}} < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 P_{n-1}/P_N}{1 - P_{n-1}/P_N} < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2/\lambda}{1 - 1/\lambda} = \varepsilon \text{ ist.}$$

Also ist

$$\sum_{v=n}^N (s_v - s_n) p_v = (s - s_n)(P_N - P_{n-1}) + o(P_N - P_{n-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

d. h.

$$|s - s_n| \leq \text{Max}_{n \leq v \leq N} |s_v - s_n| + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Daraus ist leicht ersichtlich, dass $s_{n_k} \rightarrow s$, falls (1) erfüllt ist.

Die Bedingung (1) ist aber für jedes s_n erfüllt, falls für $n=n_k$, $p_n > \varepsilon P_{n-1}$ ist. Denn wird $\lambda < 1 + \varepsilon$ genommen, so ist

$$\lambda P_{n-1} < (1 + \varepsilon) P_{n-1} < P_n,$$

also ist

$$N(\lambda P_{n-1}) + 1 = n,$$

d. h., für $n=n_k$,

$$\text{Max}_{n \leq v \leq N} |s_v - s_n| = 0.$$

b) Aus der vorstehenden Überlegung folgt auch, dass die Bedingung (2) mit $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ die Konvergenz von s_n aus ihrer $M(P_n)$ -Limitierbarkeit nach sich zieht.

Dass man aber hier N auch durch $N(\lambda P_n)$ ersetzen kann, geht aus folgendem hervor: Sei in

$$\sum_{v=1}^n p_v s_v = s P_n + o(P_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

n ersetzt durch $m - 1$ wo

$$P_{m-1} < \frac{1}{\lambda} P_n \leq P_m$$

ist, d. h. $m = N^*\left(\frac{1}{\lambda} P_n\right)$, wenn

$$N^*(x) = \begin{cases} N(x) - 1 & \text{für } x \neq P_n, \\ N(x) & \text{für } x = P_n, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

gesetzt wird. Dann folgt durch Substraktion

$$\begin{aligned} \sum_{v=m}^n p_v s_v &= s(P_n - P_{m-1}) + o(P_n) + o(P_{m-1}) \\ &= s(P_n - P_{m-1}) + o(P_n - P_{m-1}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

weil, wegen $\lambda P_{m-1} < P_n$,

$$\frac{\varepsilon_1 P_n + \varepsilon_2 P_{m-1}}{P_n - P_{m-1}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 P_{m-1}/P_n}{1 - P_{m-1}/P_n} < \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2/\lambda}{1 - 1/\lambda} = \varepsilon \text{ ist.}$$

Also ist,

$$\sum_{v=m}^n (s_n - s_v) p_v = (s_n - s)(P_n - P_{m-1}) + o(P_n - P_{m-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

d. h.

$$|s_n - s_v| \leq \max_{m \leq v \leq n} |s_n - s_v| + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Da aber, falls $V_0 = N(\lambda P_{v_0})$ gesetzt wird,

$$\max_{m \leq v \leq n} |s_n - s_v| = |s_n - s_{v_0}| \leq \max_{v_0 \leq i \leq V_0} |s_i - s_{v_0}|$$

ist, weil

$$P_n \leq \lambda P_m \leq \lambda P_{v_0} \quad \text{d.h.} \quad n \leq N(\lambda P_{v_0}) = V_0$$

ist, so folgt daraus, wegen (5), dass $s_n \rightarrow s$, wenn man in (2) N durch $N(\lambda P_n)$ ersetzt.

Nun ist leicht, wie im Falle a), nachzuprüfen, dass für $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ oder für $N = N(\lambda P_n)$, $\max_{n \leq v \leq N} |s_v - s_n|$ verschwindet, falls $\lambda < 1 + \varepsilon$ und $p_n > \varepsilon P_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, ist.

§ 3. Der Satz I, b enthält aber auch den Hardyschen {1} Satz, nach welchem die Konvergenz von s_n aus $u_n = O(p_{n-1}/P_{n-1})$, d. h. aus $u_{n+1} = O(p_n/P_n)$ folgt.

Es ist nämlich in diesem Falle

$$\begin{aligned} \max_{n \leq v \leq N} |s_v - s_n| &\leq \sum_{v=n+1}^N |u_v| \leq M \sum_{v=n+1}^N \frac{P_{v-1} - P_{v-2}}{P_{v-1}} < \\ &< M \sum_{v=n+1}^N \log P_{v-1}/P_{v-2} = M \log P_{N-1}/P_{n-1} \leq M \log \lambda, \end{aligned}$$

falls $P_{N-1} \leq \lambda P_{n-1}$ ist, so dass die Bedingung (2) mit $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ in der Tat erfüllt ist.

Aus vollständig gleichartigen Betrachtungen folgt aber, dass die Bedingung (2) mit $N = N(\lambda P_n)$ erfüllt ist, falls auch $u_n = O(p_n/P_n)$ ist.

Da diese Bedingung mit der Hardyschen im Allgemeinen nicht äquivalent ist, kann die Hardysche Bedingung noch dadurch ergänzt werden, dass entweder u_{n+1} oder $u_n = O(p_n/P_n)$ gefordert wird. Diese letzte Bedingung kann aber noch durch die etwas schwächere Bedingung

$$u_n = O(p_n/P_{n-1}) \quad \text{d.h.} \quad u_{n+1} = O(p_{n+1}/P_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

ersetzt werden. Dies können wir aber gleich für die $R(\lambda_n, k)$ -Limitierbarkeit zeigen, indem wir den folgenden Satz beweisen.

Satz II. *Ist die Reihe $\sum u_v$ $R(\lambda_n, k)$ -summierbar, d.h.*

$$\sum_{\lambda_v \leq \omega} \left(1 - \frac{\lambda_v}{\omega}\right)^k u_v \rightarrow s, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad k > 0,$$

so ist sie konvergent, falls eine der nachstehenden Bedingungen erfüllt ist.

$$a) \quad u_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right), \quad (\text{Hardy } \{2\});$$

$$b) \quad u_n = O\left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

welche aber, in der folgenden allgemeineren Bedingung

$$\delta(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \lambda_n^{-r} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v^r u_v \right| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

enthalten ist.

Beweis. b) Seien k und p ganz, und die Zahlen a_i bestimmt durch

$$(1 - x^p)^k = \sum_{i=0}^{(p-1)k} a_i (1 - x)^{k+i}.$$

Da aus der $R(\lambda_n, k)$ -Limitierbarkeit die $R(\lambda_n, k')$ -Limitierbarkeit für jedes $k' > k$ folgt, so folgt aus der Voraussetzung, wenn $\omega = \lambda_n$ gesetzt wird, dass

$$\sum_{v=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda_v}{\lambda_n}\right)^{k+i} u_v \rightarrow s, \quad \text{für jedes } i=0, 1, 2, \dots$$

Dies, mit a_i multipliziert und von $i=0$ bis $i=(p-1)k$ summiert, liefert

$$R_n(p, k) = \sum_{v=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_n}\right)^p\right)^k u_v \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Also ist, wenn

$$\delta_n(r) = \lambda_n^{-r} \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v^r u_v$$

gesetzt wird,

$$R_n(p, k) = s_{n-1} + \sum_{\mu=1}^k (-1)^\mu \binom{k}{\mu} \delta_n(p\mu),$$

und

$$|s_{n-1} - s| \leq |R_n(p, k) - s| + \sum_{\mu=1}^k \binom{k}{\mu} |\delta_n(p\mu)|,$$

d.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_n - s| \leq \sum_{\mu=1}^k \binom{k}{\mu} \delta(p\mu).$$

Wenn hier $p \rightarrow \infty$, so folgt daraus, und wegen (6), die Konvergenz von s_n gegen s .

Nun ist leicht zu zeigen, dass $\delta(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, falls

$$u_n = O\left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}\right) \text{ ist.}$$

In diesem Falle ist nämlich

$$|\delta_n(r)| \leq \lambda_n^{-r} \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v^r |u_v| < M \lambda_n^{-r} \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v^{r-1} (\lambda_{v+1} - \lambda_v),$$

so dass wegen

$$r \lambda_v^{r-1} (\lambda_{v+1} - \lambda_v) \leq \lambda_{v+1}^r - \lambda_v^r$$

die Ungleichung

$$|\delta_n(r)| \leq \frac{M}{r} \lambda_n^{-r} \sum_{v=1}^{n-1} (\lambda_{v+1}^r - \lambda_v^r) = \frac{M}{r} \left(1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^r\right) < \frac{M}{r}$$

folgt, woraus also leicht

$$\delta(r) = O(1/r), \quad r \rightarrow \infty,$$

zu erhalten ist. — Damit ist der Satz II, b vollständig bewiesen.

§ 4. Durch die Betrachtungen von Ingham {1} ist gezeigt worden, dass die Grössenordnung von u_n , welche durch

$$u_{n+1} = O(p_n/P_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

bestimmt ist, damit aus der $M(P_n)$ -Summierbarkeit der Reihe $\sum u_n$ die Konvergenz folgt, in gewissem Sinne die bestmögliche ist. Diese Bedingungen können nämlich durch keine schwächere Bedingung von der Form

$$u_{n+1} = O(g(n)p_n/P_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

ersetzt werden. wenn $g(n) \rightarrow \infty$, und zwar wie langsam auch $g(n)$ gegen unendlich streben mag.

Hardy und Littlewood {1} haben aber gezeigt, dass die Bedingung $u_{n+1} = O(p_n/P_n)$ in einer anderen Richtung erweitert werden kann, nämlich dass sie nur einseitig

$$u_{n+1} > O(p_n/P_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

zu gelten braucht, dies aber nur unter der Voraussetzung, dass $P_{n-1} \sim P_n$ sei, oder wie es O. Szász {1} gezeigt hat dass $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \geq 0$ sei. — Dass in der Tat keine von diesen zwei

Bedingungen wegfallen kann, hat K. Ananda-Rau {2} durch ein, dem nachstehenden ähnliches Beispiel gezeigt:

$$P_n = 2^{2n+(-1)^n} + n \quad \text{und} \quad u_n = (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Hier möchte ich noch zeigen, dass ohne die Beschränkung $P_{n-1} \sim P_n$ noch andere einseitige Bedingungen angegeben werden können, welche einerseits von der Form derjenigen des Satzes I sind, (und dem Fall wo $P_n = O(p_n)$ noch als Spezialfall enthalten), und andererseits Bedingungen wie diejenige, welche im

Sätze II auftreten, wobei aber statt „entweder, oder“ im Falle der Einseitigkeit „und, und“ zu setzen ist.

§ 5. Die Bedingungen des Satzes I können wie folgt ergänzt werden:

Satz III. Sei $p_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$P_n = \sum_{v=1}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

$N(x)$ die Anzahlfunktion der Folge P_n , und

$$N^*(x) = \begin{cases} N(x) - 1 & \text{für } x \neq P_n, \\ N(x) & \text{für } x = P_n. \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Ist die Folge s_n $M(P_n)$ -limitierbar, d.h.

$$\sum_{v=1}^n p_v s_v \sim s P_n, \quad n \rightarrow \infty,$$

so ist sie konvergent

$$s_n \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty,$$

falls eine der drei nachstehenden Bedingungen erfüllt ist:

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{n \leq v \leq N} \{s_v - s_n\} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad (8)$$

wo N die grössere der beiden Zahlen $N(\lambda P_{n-1}) + 1$ und $N(\lambda P_n)$ ist;

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \leq v \leq u \leq N} \{s_u - s_v\} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad (9)$$

wo $m = N^*\left(\frac{1}{\lambda} P_n\right)$ und $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ ist;

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{n \leq v \leq N+1} \{s_v - s_n\} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad (10)$$

wo $N = N(\lambda P_n)$ ist.

Von diesen Bedingungen ist jede nachstehende in der vorangehenden enthalten, aber die letzte, schon bekannte Bedingung enthält nicht mehr den Fall, wo $P_n = O(p_n)$ ist.

Beweis. a). Aus der Gleichung (3) ist ersichtlich, dass

$$s - s_n \geq \min_{n \leq v \leq N} \{s_v - s\} + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

ist, wo $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ ist, woraus

$$\limsup_{n=\infty} s_n \leq s$$

folgt, falls (8) mit $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ erfüllt ist.

Andererseits folgt aus (4), dass

$$s_n - s \geq \min_{m \leq v \leq n} \{s_n - s_v\} + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

ist, woraus

$$\liminf_{n=\infty} s_n \geq s$$

folgt, falls

$$\liminf_{n=\infty} \min_{m \leq v \leq n} \{s_n - s_v\} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad (11)$$

wo

$$m = N^*\left(\frac{1}{\lambda} P_n\right)$$

ist.

Diese Bedingung ist aber äquivalent der Bedingung (8) mit $N = N(\lambda P_n)$. In der Tat folgt aus der Ungleichung, wo $V_0 = N(\lambda P_{v_0})$ gesetzt ist,

$$\min_{m \leq v \leq n} \{s_n - s_v\} = s_n - s_{v_0} \geq \min_{v_0 \leq i \leq V_0} \{s_i - s_{v_0}\},$$

welche wegen

$$P_n \leq \lambda P_m \leq \lambda P_{v_0} \quad \text{d.h.} \quad n \leq N(\lambda P_{v_0}) = V_0$$

vorhanden ist, dass (11) aus (8) mit $N = N(\lambda P_n)$ folgt.

Umgekehrt, folgt aus der Ungleichung, wo $m_0 = N^*(\lambda P_{v_0})$ gesetzt ist,

$$\min_{n \leq v \leq N} \{s_v - s_n\} = s_{v_0} - s_n \geq \min_{v_0 \leq i \leq V_0} \{s_{v_0} - s_i\},$$

welche wegen

$$P_n \geq \frac{1}{\lambda} P_N \geq \frac{1}{\lambda} P_{v_0} \quad \text{d.h.} \quad n \geq N^*\left(\frac{1}{\lambda} P_{v_0}\right) = m_0$$

erfüllt ist, das (8) mit $N = N(\lambda P_n)$ aus (11) folgt.

Ist also (8) gleichzeitig mit $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ und $N = N(\lambda P_n)$ erfüllt, so folgt daraus

$$s \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq s,$$

d.h. die Konvergenz von s_n .

b) Da

$$\begin{aligned} \min_{m \leq v \leq n} \{s_n - s_v\} + \min_{n \leq u \leq N} \{s_u - s_n\} &= \min_{m \leq v \leq n \leq u \leq N} \{s_u - s_v\} \geq \\ &\geq \min_{m \leq v \leq u \leq N} \{s_u - s_v\} \end{aligned}$$

ist, so ist aus dem vorstehenden ersichtlich, dass (9) in (8) enthalten ist.

c) Es ist evident, dass (10) in (8) enthalten ist, weil

$$N(\lambda P_{n-1}) + 1 \leq N(\lambda P_n) + 1$$

ist. Nach der nachstehenden Ungleichung aber, wo $V_0 = N(\lambda^2 P_{v_0})$ gesetzt ist,

$$\min_{m \leq v \leq u \leq N} \{s_u - s_v\} = s_{u_0} - s_{v_0} \geq \min_{v_0 \leq i \leq V_0+1} \{s_i - s_{v_0}\},$$

welche wegen

$$P_{u_0} - 1 \leq P_{N-1} \leq \lambda P_{n-1} < \lambda P_n \leq \lambda^2 P_m \leq \lambda^2 P_{v_0}$$

d.h. wegen $u_0 \leq N(\lambda^2 P_{v_0}) + 1 = V_0 + 1$

erfüllt ist, folgt, dass (10) (mit λ^2 statt λ) auch in (9) enthalten ist. Damit ist der Satz III vollständig bewiesen.

Der Unterschied zwischen den Bedingungen a) und c) wird noch in dem nächsten Paragraph hervorgehoben.

§ 6. Nun können wir zeigen, dass die (sogar etwas ergänzte) Hardy-Littlewoodsche Bedingung

$$a) \text{ entweder } u_n \text{ oder } u_{n+1} > O(p_n/P_n) \text{ und } P_{n-1} \sim P_n, \quad (12)$$

wie auch (in demselben Mass ergänzte) Szász'sche Bedingung

$$b) \text{ entweder } u_n \text{ oder } u_{n+1} > O(p_n/P_n) \text{ und } \liminf_{n=\infty} u_n > 0, \quad (13)$$

schon in der Bedingung (10) des Satzes III enthalten sind.

a) Wegen

$$\min_{n \leq v \leq N+1} \{s_v - s_n\} = \min_{n \leq v \leq N+1} \sum_{i=n+1}^v u_i = \min_{n \leq v \leq N+1} \sum_{i=n}^{v-1} u_{i+1}$$

ist, falls entweder u_i oder $u_{i+1} > -M \frac{P_i - P_{i-1}}{P_i}$ vorausgesetzt wird,

$$\begin{aligned} \min_{n \leq v \leq N+1} \{s_v - s_n\} &\geq -M \sum_{i=n}^{N+1} \frac{P_i - P_{i-1}}{P_i} > -M \sum_{i=n}^{N+1} \log P_i / P_{i-1} = \\ &\geq -M \{ \log P_n / P_{n-1} + \log P_N / P_n + \log P_{N+1} / P_N \}. \end{aligned}$$

Da aber $P_N \leq \lambda P_n$ und $P_{n-1} \sim P_n$ ist, so ist

$$\begin{aligned} \min_{n \leq v \leq N+1} \{s_v - s_n\} &\geq -M \{ \log \lambda + \log P_n / P_{n-1} + \log P_{N+1} / P_N \} = \\ &\geq -M \log \lambda + o(1), \end{aligned}$$

woraus also (10) aus (12) folgt.

b) Einerseits ist

$$\begin{aligned} \min_{n \leq v \leq N+1} \{s_v - s_n\} &\geq \min_{n+1 \leq v \leq N} \{s_v - s_{n+1}\} - \frac{1}{2} \{ |u_n| - u_n + \\ &\quad + |u_{N+1}| - u_{N+1} \}, \end{aligned}$$

und andererseits, wie im vorangehenden, gleichgiltig ob u_i oder

$$u_{i+1} > -M \frac{P_i - P_{i-1}}{P_i} \text{ ist,}$$

$$\min_{n+1 \leq v \leq N} \{s_v - s_{n+1}\} > -M \log P_N/P_n.$$

Also ist wegen $P_N \leq \lambda P_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \min_{n \leq v \leq N+1} \{s_v - s_n\} &> -M \log \lambda - \frac{1}{2} \{|u_n| - u_n + |u_{N+1}| - u_{N+1}\} > \\ &> -M \log \lambda + o(1), \end{aligned}$$

so dass auch (13) in (10) enthalten ist.

Wir können in ähnlicher Weise aus der Bedingung (8) des Satzes III noch eine weitere Bedingung ableiten, welche nicht die Nebenbedingung $P_{n-1} \sim P_n$ oder $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n > 0$ fordert, welche aber nicht mehr in der Bedingung (10) enthalten ist.

Es ist nämlich einerseits die Bedingung (8) mit $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ erfüllt, falls $u_{n+1} > O(p_n/P_n)$ ist, da in diesem Falle

$$\min_{n \leq v \leq N} \{s_v - s_n\} > -M \log P_{N-1}/P_{n-1} > -M \log \lambda$$

ist. Andererseits ist die Bedingung (8) mit $N = N(\lambda P_n)$ erfüllt, falls $u_n > O(p_n/P_n)$ ist, weil dann

$$\min_{n \leq v \leq N} \{s_v - s_n\} > -M \log P_N/P_n > -M \log \lambda$$

ist. Also ist die Bedingung (8) vollständig erfüllt, falls

$$u_n \text{ und } u_{n+1} > O(p_n/P_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

ist. Wir sehen daraus, dass durch das gleichzeitige Erfüllen einer Bedingung von der Form $> O(p_n/P_n)$ durch zwei aufeinanderfolgende Glieder die Nebenbedingungen von Hardy-Littlewood und Szász wegfallen können.

In der so erhaltenen Bedingung kann aber die erste sogar durch die etwas geringere Bedingung

$$u_n > O(p_n/P_{n-1}) \quad \text{d.h.} \quad u_{n+1} > O(p_{n+1}/P_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

ersetzt werden, was den folgenden Satz gibt.

Satz IV. Sei $p_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

und
$$P_n = \sum_{v=1}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty;$$

ist die Reihe Σu_v $M(P_n)$ -summierbar, d.h.

$$\frac{1}{P_n} \sum_{v=1}^n p_v s_v \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty,$$

so folgt daraus ihre Konvergenz, falls eine der drei nachstehenden Bedingungen erfüllt ist:

a) $u_{n+1} > O(p_n/P_n)$ und $> O(p_{n+1}/P_n)$, $n \rightarrow \infty$;

b) u_{n+1} entweder $> O(p_n/P_n)$ oder $> O(p_{n+1}/P_n)$,

und $P_{n-1} \sim P_n$, $n \rightarrow \infty$;

c) entweder u_n oder $u_{n+1} > O(p_n/P_n)$, $n \rightarrow \infty$,

und $\liminf_{n=\infty} u_n \geq 0$.

Es bleibt uns nur noch den Teil a) zu beweisen.

Beweis. a) Wie dies aus dem Beweise des Satzes III, a) folgt, wird

$$\limsup_{n=\infty} s_n \leq s,$$

falls

$$\liminf_{n=\infty} \text{Min}_{n \leq v \leq N} \{s_v - s_n\} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad \text{mit } N = N(\lambda P_{n-1}) + 1,$$

und was wegen $u_{n+1} > O(p_n/P_n)$, wie eben gezeigt war, erfüllt ist.

Es soll also noch gezeigt werden, dass

$$\liminf_{n=\infty} s_n \geq s,$$

ist falls $u_{n+1} > O(p_{n+1}/P_n)$ ist.

Zu diesem Ende gehen wir von der im § 3 erhaltenen Gleichung (7) aus, in welcher $k=1$, $\lambda_{n+1} = P_n$, $\lambda_1 = P_0 = 0$ gesetzt und n durch $n+1$ ersetzt wird. Dann erhalten wir zuerst

$$\begin{aligned} R_{n+1}(p, 1) &= \sum_{v=0}^{n-1} (1 - (P_v/P_n)^p) u_{v+1} \\ &= s_n - \sum_{v=1}^{n-1} (P_v/P_n)^p u_{v+1} \rightarrow s, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} s_n - s &= R_{n+1}(p, 1) - s + \sum_{v=1}^{n-1} (P_v/P_n)^p u_{v+1} \\ &= P_n^{-p} \sum_{v=1}^{n-1} P_v^p u_{v+1} + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Da weiter, wegen

$$u_{n+1} > -M \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}$$

und

$$p P_v^{p-1} (P_{v+1} - P_v) \geq P_{v+1}^p - P_v^p,$$

$$\begin{aligned} P_n^{-p} \sum_{v=1}^{n-1} P_v^p u_{v+1} &> -M P_n^{-p} \sum_{v=1}^{n-1} P_v^{p-1} (P_{v+1} - P_v) \geq -\frac{M}{p} P_n^{-p} \sum_{v=1}^{n-1} (P_{v+1}^p - P_v^p) \\ &> -\frac{M}{p} \{1 - (P_1/P_n)^p\} > -\frac{M}{p} \end{aligned}$$

ist, so folgt daraus, falls zuerst n dann p gegen unendlich strebt, dass $\liminf_{n=\infty} s_n$ in der Tat $\geq s$ ist, womit die Behauptung bewiesen ist.

LITERATURVERZEICHNIS

- Anada-Rau, K.* 1. A Note on a Theorem of Mr. Hardy's. Proc. London Math. Soc. (2), 17, 334—336 (1919).
2. An Exemple in the Theory of Summation of Series by Riesz's typical Means. Proc. London Math. Soc. (2), 30, 367—378 (1930).
- Fekete, M* and *Winn, C.E.* On the Connection between the Limits of Oscillation of a Sequence and its Cesàro and Riesz Means. Proc. London Math. Soc. (2), 35, 488—513 (1933).
- Hardy, G. H.* 1. Theorems relating to the Summability and Convergence of slowly oscillating Series. Proc. London Math. Soc. (2), 8, 301—320 (1910).
2. An Extension of a Theorem on oscillating Series. Proc. London Math. Soc. (2), 12, 174—180 (1913).
- Hardy, G. H.* and *Littlewood, J. E.* Some Theorems concerning Dirichlet's Series. Mess. of Math. (2), 43, 143—147 (1914).
- Hardy, G. H.* and *Riesz, M.* The general Theorie of Dirichlet's Series. Cambrige Tracts (1915).
- Higaki, N.* Some Theorems on Riesz Method of Summation. Tôhoku Math. Journ. 41, 70—79 (1935).
- Ingham, A. E.* Note on the Converse of Abel's Theorem. Proc. London Math. Soc. (2), 23, 326—336 (1924).
- Rogosinski, W.* Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen. Math. Zeit. 25, 132—149 (1926).
- Szász, O.* Verallgemeinerungen und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1929, 325—340.
-

Sur les séries entières doubles

P A R

MICHEL PETROVITCH

(Présenté à la séance de l'Académie des Sciences naturelles du 22-II-1937)

1. L'auteur commence par mettre en évidence le rapport qui existe entre les séries entières doubles

$$(1) \quad z = \sum \sum A_{m,n} x^m y^n$$

et l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \quad zs - pq = 0$$

où
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Le rapport s'exprime par la proposition suivante:

Pour que la somme de la série (1) s'exprime comme somme d'un nombre limité d'intégrales particulières de l'équation (2), il faut et il suffit que le coefficient $A_{m,n}$, après y avoir remplacé m par x et n par y , jouisse de cette même propriété.

La proposition est basée sur les faits suivants:

1° l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$(3) \quad z = XY,$$

où X est une fonction arbitraire de x , et Y une fonction arbitraire de y ;

2° toutes les fois que z est de la forme

$$(4) \quad z = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots,$$

le coefficient $A_{m,n}$ est de la forme

$$(5) \quad A_{m,n} = A_m B_n + A'_m B'_n + \dots,$$

où les A ne dépendent que de m , et les B ne dépendent que de n ;

3° toutes les fois que $A_{m,n}$ est de la forme (5), z s'écrit sous la forme (4).

On en déduit également la proposition suivante:

Toutes les fois que le coefficient $A_{m,n}$ est de la forme (5), la somme de la série (1) satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(6) \quad P(z, p, q, r, s, t \dots) = 0,$$

où P est un polynome homogène en z et ses dérivées partielles par rapport à x et y . La forme du polynome P ne dépend que du nombre des termes de la forme quadratique (5) par laquelle s'exprime $A_{m,n}$; elle ne dépend nullement de la forme des A et B .

Dans le cas, par exemple, où $A_{m,n}$ s'exprime sous la forme

$$A_{m,n} = A_m B_n + A'_m B'_n,$$

la somme de la série (1) satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(7) \quad \left(z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \\ + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \cdot \partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \cdot \partial y} = 0.$$

Une même équation aux dérivées partielles (6) est satisfaite pour toutes les séries entières doubles pour lesquelles $A_{m,n}$ s'exprime par un même nombre d'intégrales particulières de (2); ce nombre étant p , l'équation sera d'ordre $2p$.

2. Une classe étendue de séries (1) remplissant les conditions précédentes est celle où $A_{m,n}$ est une fonction rationnelle

a) d'un nombre limité d'expressions

$$(8) \quad a_m, a'_m, a''_m, \dots$$

ne variant qu'avec l'indice m ;

b) d'un nombre limité d'expressions

$$(9) \quad b_n, b'_n, b''_n, \dots$$

ne variant qu'avec l'indice n ;

c) les pôles de cette fonction rationnelle sont *fixes*, c'est-à-dire ne dépendent pas d'indices m et n , on bien les pôles n'existent pas, auquel cas la fonction rationnelle se réduit à un polynome.

La forme d'une telle série s'exprime toujours comme forme quadratique z d'intégrales particulières de l'équation (2) ou, ce qui revient au même, comme intégrale particulière de l'équation correspondante (6).

Dans le cas, par exemple, où

$$(10) \quad A_{m,n} = Q_{m,n} A_m B_n,$$

A_m et B_n étant les termes des deux suites indéfinies

$$(11) \quad A_0, A_1, A_2, \dots$$

$$B_0, B_1, B_2, \dots$$

et $Q_{m,n}$ étant un polynome à un nombre limité de termes

$$(12) \quad m, \lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \dots$$

$$n, \mu_1^n, \mu_2^n, \mu_3^n, \dots$$

(où les λ_k et μ_k , ainsi que les coefficients du polynome $Q_{m,n}$ ne dépendent pas de m et n), la fonction z s'exprime comme somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$(13) \quad C U_p(Mx) V_q(Ny)$$

où M et N sont des constantes, les fonctions U_p et V_q étant déterminées par les relations de recurrences

$$(14) \quad \begin{aligned} U_k(t) &= t \frac{d}{dt} U_{k-1}(t) \\ V_k(t) &= t \frac{d}{dt} V_{k-1}(t) \end{aligned}$$

avec les fonctions initiales

$$(15) \quad \begin{aligned} U_0(t) &= \sum A_m t^m \\ V_0(t) &= \sum B_n t^n. \end{aligned}$$

On trouve ainsi que

1° lorsque

$$A_m = 1, \quad B_n = 1,$$

la fonction z s'exprime comme fonction rationnelle des variables x et y , ayant comme pôles les valeurs

$$x = \frac{1}{M}, \quad y = \frac{1}{N}.$$

Ainsi, par exemple, on a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (am + bn + c)^2 x^m y^n = \frac{Axy + Bx + Dy + H}{(1-x)^2 (1-y)^2},$$

où A, B, D, H sont des constantes dépendant de a, b, c ;

2° lorsque

$$A_m = \frac{1}{m!}, \quad B_n = \frac{1}{n!},$$

la fonction z s'exprime comme polynome en x , y et en diverses exponentielles

$$e^{a_1 x}, \quad e^{a_2 x}, \dots \\ e^{b_1 y}, \quad e^{b_2 y}, \dots,$$

où les a et b sont des constantes.

3° lorsque: $a)$ A_m est une fonction rationnelle en m , ayant tous ses pôles simples et égaux à des nombres entiers négatifs fixes; $b)$ B_n est une fonction de même espèce de n ; $c)$ la sommation s'étend à tous les indices

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

la fonction z s'exprime au moyen d'un nombre limité de fonctions rationnelles et logarithmiques.

Dans le cas où

$$A_{m,n} = (A_m + B_n)Q_{m,n}$$

A_m , B_n , $Q_{m,n}$ étant les mêmes que précédemment, la fonction z est également la somme d'un nombre limité de termes de la forme (13), où les fonctions U_k et V_k sont déterminées par les relations de recurrence (14).

Dans un grand nombre de cas il est possible de sommer les séries doubles

$$(16) \quad z = \sum \sum C_{m,n} x^m y^n$$

dans lesquelles le coefficient $C_{m,n}$, divisé par une expression convenablement choisie dépendant de m et n , remplit les conditions précédentes. Un tel cas se présente lorsque $C_{x,y}$ est le produit de deux facteurs

1° l'un $A_{x,y}$ égal à la somme d'un nombre limité d'intégrales particulières de l'équation aux dérivées partielles

$$(17) \quad zs - pq = 0$$

[ou, ce qui revient au même, égal à une intégrale de l'équation (5)];

2° l'un $B_{x,y}$ tel qu'il soit possible de sommer la série double

$$(18) \quad \varphi(x, y) = \sum \sum B_{m,n} x^m y^n.$$

Ainsi, lorsque $A_{m,n}$ a la forme (10), la somme de toute série

$$z = \sum \sum \frac{(m+n-1)!}{m! n!} A_{m,n} x^m y^n$$

(où la sommation s'étend aux valeurs

$$0, 1, 2, 3 \dots$$

des indices m et n , sauf au couple $m=0, n=0$) s'exprime comme une forme quadratique de la fonction

$$\log (1 - x - y)$$

et de fonctions rationnelles en x, y .

De même, toute série

$$z = \sum \sum B_{m,n} A_{m,n} x^m y^n$$

où

$$B_{m,n} = \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)] [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)]}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(m+n)},$$

a pour somme une fonction algébrique de x et y .

3. Dans le *problème de majoration des fonctions représentées par des séries entières doubles*

$$(19) \quad f(x, y) = \sum \sum a_{m,n} x^m y^n,$$

il arrive qu'on puisse majorer $|a_{m,n}|$ par une expression réelle et positive $A_{m,n}$ telle que $A_{x,y}$ soit la somme d'un nombre limité

d'intégrales de l'équation aux dérivées partielles (17). La fonction majorante

$$(20) \quad F(x, y) = \sum \sum A_{m,n} x^m y^n$$

apparaît alors sous la forme

$$(21) \quad F(x, y) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots$$

où les fonctions X et Y seront exprimées sous la forme de séries entières à une seule variable.

Ceci peut présenter un intérêt particulier dans le problème d'intégration de l'équation du premier ordre

$$(22) \quad y' = f(x, y),$$

où f est une fonction holomorphe au voisinage de $x=0, y=0$, développable en série de la forme (19).

Si l'on choisit, parmi les fonctions X et Y , des fonctions telles que l'équation

$$(23) \quad v' = F(x, v)$$

soit intégrable, de sorte qu'on puisse connaître le rayon R' d'holomorphie de l'intégrale v autour du point $x=0$, la série

$$(24) \quad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

fournissant l'intégrale de (22), prenant pour $x=0$ la valeur $y=0$, convergera certainement à l'intérieur du cercle C de rayon R' ayant $x=0$ comme centre.

Ainsi, soient

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$$

deux suites indéfinies de nombres réels positifs tels que la valeur du rapport

$$\frac{|a_{m,n}|}{\lambda_m \mu_n}$$

ne surpasse pas un nombre positif fixe A lorsque m et n augmentent indéfiniment. Si l'on prend

$$A_{m,n} = A \lambda_m \mu_n$$

on aura

$$F(x, v) = A \lambda(x) \mu(v),$$

où

$$\lambda(x) = \sum \lambda_m x^m$$

$$\mu(v) = \sum \mu_n v^n$$

et l'équation (23) sera intégrable.

Ainsi, par exemple, lorsque le produit

$$m! n! |a_{m,n}|$$

ne surpasse par A , si l'on prend

$$A_{m,n} = \frac{A}{m! n!}$$

l'équation (23) sera

$$v' = A e^{x+v};$$

son intégrale qui, pour $x=0$, prend la valeur $v=0$ est

$$v = \log(1 + A - A e^x),$$

ayant pour rayon d'holomorphie

$$R' = \log \left(1 + \frac{1}{A} \right);$$

la série correspondante (24) convergera certainement dans le cercle de rayon R' .

Dans les cas où l'on peut prendre pour $A_{m,n}$ une expression de la forme

$$\alpha_m \beta_n + \lambda_m \mu_n,$$

l'équation (23) sera une équation de la forme

$$v' = X_1 V_1 + X_2 V_2$$

(où X_k ne dépend que de x , et V_k ne dépend que de v) que l'on peut intégrer dans de nombreux cas.

Sur les conditions d'équilibre d'une masse fluide avec un flotteur¹⁾

PAR
W. JARDETZKY

(Présenté à la séance de l'Académie des Sciences naturelles du 22-II-1937)

Soient m une masse fluide et m_1 un corps solide qui sont en contact. Ce système matériel étant isolé dans l'espace, nous allons envisager les cas où: 1) la densité moyenne du solide est plus petite que celle du fluide, 2) le rapport des masses $\frac{m_1}{m}$ est une quantité petite et 3) le solide n'enveloppe pas le fluide, comme une écorce, ou, inversement, il n'est pas immergé tout entier.

L'état intermédiaire dans lequel se trouvent, peut-être, certaines étoiles ou les planètes pendant la formation des écorces est caractérisé par l'existence des corps flottants à la surface de ces corps célestes. C'est une période de la vie d'un corps céleste dont les traces peuvent être trouvées sur sa face. C'est ce qui donne l'importance au problème correspondant de la Mécanique: trouver le mouvement du système matériel envisagé plus haut. Mais ce problème est loin d'être résolu par des méthodes exactes dues à Liapounoff et d'autres dans la théorie de la figure des corps célestes. Les difficultés de la résolution du problème général du mouvement de pareils systèmes nous forcent donc à étudier des cas particuliers.²⁾

¹⁾ L'extrait de l'article publié en serbe dans le Glas de l'Ac. R. Serbe CLXXV. 1937,

²⁾ Voir aussi *P. Duhem*. Sur la stabilité d'équilibre des corps flottants. Journal des math. pures et appl. T. I p. 91. 1895.

W. Jardetzky. Sur les fig. d'équil. d'une masse liquide avec des corps flottants. Acta Astr. sér. a V. 2 Cracovie 1931. et Recherches math. sur l'évolution de la terre. Ed. spéciales de l'Ac.R.S. T. CVII. Beograd 1935.

Le but de la présente note est l'analyse des conditions d'équilibre du système formé d'une masse fluide et d'un flotteur.

Supposons donc que le système $m + m_1$ soit animé d'une rotation en bloc. Soit $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire de cette rotation. Or, on peut démontrer³⁾ que la rotation peut s'effectuer seulement autour d'un axe fixe dans l'espace, passant, en outre, par le centre d'inertie (O) du système. C'est la première condition nécessaire d'équilibre relatif.

La vitesse d'un point du système est

$$(1) \quad \vec{v} = [\vec{\Omega}, \vec{r}],$$

$\vec{r}$ étant le vecteur qui donne la position de ce point par rapport au centre d'inertie. Désignons par fU et fU_1 les potentiels de la masse fluide et du solide, f étant la constante de la gravitation, et par κ et κ_1 leurs densités. Soit

$$(2) \quad U^* = U + U_1.$$

Soient, enfin, $Oxyz$ le trièdre rectangulaire dont l'axe Oz a la direction du vecteur $\vec{\Omega}$, s la distance d'un point à l'axe de rotation, ω la grandeur du vecteur $\vec{\Omega}$ et p la pression du fluide. En supposant toujours que $\kappa = f(p)$, on a l'équation

$$(3) \quad U^* + \frac{\omega^2 s^2}{2f} = \text{const.} + \int \frac{dp}{f\kappa}$$

qui donne les surfaces de niveau et la surface libre (S) du fluide. S correspond à la valeur $p=0$. Dans le cas d'une masse fluide isolée, l'équation (3), la condition nécessaire et suffisante d'équilibre, donne des surfaces fermées, mais dans le cas du système $m + m_1$ on aura des surfaces de niveau qui aboutissent à la surface du solide. A l'équation (3) on doit assujettir dans ce cas les conditions d'équilibre de ce solide.

Arrêtons nous maintenant sur certaines conditions nécessaires. Le centre d'inertie du solide (C) a la vitesse

³⁾ W. Jardetzky. Sur une condition nécessaire de rotation en bloc d'un système continu ayant des parties fluides. Publ. math. de l'Univ. de Belgrade T. I. 1932.

$$(4) \quad \vec{v}_c = [\vec{\Omega} \vec{r}_c].$$

Soit $C \xi \eta \zeta$ le trièdre dont les axes sont parallèles aux axes $Oxyz$. D'après le théorème du moment des quantités des mouvements on a

$$(5) \quad \frac{d\vec{G}^{(c)}}{dt} = \vec{L}^{(c)},$$

où $\vec{L}^{(c)}$ est le moment résultant des forces extérieures au solide et $\vec{G}^{(c)}$ le moment résultant des quantités de mouvement. On a

$$(6) \quad \vec{G}^{(c)} = J_\zeta \omega \vec{k} - \omega \Pi_{\xi\zeta} \vec{i} - \omega \Pi_{\eta\zeta} \vec{j},$$

en désignant par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs-unités dirigés suivant les axes $C\xi\eta\zeta$ et par $J_\zeta, \Pi_{\xi\zeta}, \Pi_{\eta\zeta}$ le moment et les produits d'inertie. J_ζ est une constante. On a

$$\frac{d}{dt} \Pi_{\xi\zeta} = \frac{d}{dt} \int_{v_1} \xi \zeta dm_1 = -\omega \Pi_{\eta\zeta}; \quad \frac{d}{dt} \Pi_{\eta\zeta} = \omega \Pi_{\xi\zeta},$$

v_1 étant le volume du solide, car $\frac{d\xi}{dt} = -\omega\eta, \frac{d\eta}{dt} = \omega\xi$. En tenant compte de l'expression (6) et en désignant par $L_i^{(c)}$ les projections du vecteur $\vec{L}^{(c)}$, on tire de l'équation (5) les équations suivantes;

$$(7) \quad \omega^2 \Pi_{\eta\zeta} = L_1^{(c)}, \quad -\omega^2 \Pi_{\xi\zeta} = L_2^{(c)}, \quad L_3^{(c)} = 0.$$

On voit donc que le moment résultant des forces agissantes sur le solide doit être toujours dans le plan $C\xi\eta$. La résultante de ces forces $\vec{R}$ est

$$(8) \quad \vec{R} = m_1 \frac{d\vec{v}_c}{dt} = m_1 (\vec{r}_c \vec{\Omega}) \vec{\Omega} - m_1 \omega^2 \vec{r}_c = -m_1 \omega^2 (x_c \vec{i} + y_c \vec{j}).$$

Elle ne dépend pas de z_c . Ecrivons encore le moment $\vec{L}^{(o)}$ par rapport au centre d'inertie du système:

$$(9) \quad \vec{L}^{(o)} = \vec{L}^{(c)} + [\vec{r}_c \vec{R}] = \vec{L}^{(c)} + m_1(\vec{r}_c \vec{\Omega}) [\vec{r}_c \vec{\Omega}].$$

Si le centre d'inertie du solide (C) est placé: 1) sur l'axe de rotation, $[\vec{r}_c \vec{\Omega}] = 0$ ou 2) dans le plan Oxy , $(\vec{r}_c \vec{\Omega}) = 0$, on aura $\vec{L}^{(o)} = \vec{L}^{(c)}$.

Les deux positions correspondantes du solide présentent de l'intérêt, car elles semblent être les plus naturelles au premier coup d'oeil. Cependant, pour que l'équilibre du système puisse persister, les conditions qui précèdent n'en montrent pas la nécessité.

Revenons maintenant aux conditions générales d'équilibre du solide

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_1} \kappa_1 \vec{v} dv_1 &= m_1 \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \int_{v_1} \kappa_1 \vec{F} dv_1 - \int_{\sigma} p d\vec{f}, \\ \frac{d}{dt} \int_{v_1} \kappa_1 [\vec{r} \vec{v}] dv_1 &= \int_{v_1} \kappa_1 [\vec{r} \vec{F}] dv_1 - \int_{\sigma} p [\vec{r} d\vec{f}], \end{aligned}$$

où $\vec{F}$ est la force calculée pour l'unité de la masse $d\vec{f}$ le vecteur dirigé suivant la normale extérieure du solide, σ la surface du contact de ce corps et du fluide. Or, $\vec{F} = \text{grad } fU^*$. Supposons que la surface libre S soit prolongée à l'intérieur du solide, de sorte que la surface $S + S'$ soit une surface fermée donnée par l'équation (3). Envisageons encore la surface fermée $\sigma + S'$ et soit τ le volume de la partie „immergée“ du solide. On peut maintenant définir la fonction p dans le domaine τ par l'équation (3), p étant égal à zéro sur la surface S' . Alors on a

$$(11) \quad \int_{\sigma} p \vec{df} = \int_{\sigma+s'} p \vec{df} = \int_{\tau} \text{grad} p \, d\tau,$$

$$\int_{\sigma} p [\vec{r} \vec{df}] = \int_{\tau} [\vec{r} \text{grad} p] \, d\tau.$$

En désignant par $\vec{g}$ la pesanteur, on a

$$(12) \quad \vec{g} = \text{grad} \left(fU^* + \frac{\omega^2 s^2}{2} \right)$$

et, d'après l'équation (3),

$$(13) \quad \text{grad} p = \kappa \vec{g}.$$

Moyennant les équations (8, 11, 13 et 1) les équations (10) peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$(14) \quad \int_{v_1} \kappa_1 \vec{g} \, dv_1 = \int_{\tau} \kappa \vec{g} \, d\tau,$$

$$\int_{v_1} \kappa_1 [\vec{r} \vec{g}] \, dv_1 = \int_{\tau} \kappa [\vec{r} \vec{g}] \, d\tau.$$

Ces conditions expriment sous la forme exacte la loi d'Archimède dans le cas considéré, où l'on tient compte de la déformation de la masse fluide due à la présence du corps solide flottant.

On voit, en outre, que, d'après les conditions (8, 10, 11, 13) l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial z_c} \left(\int_{v_1} f \kappa_1 \text{grad} U^* \, dv_1 - \int_{\tau} \kappa \vec{g} \, d\tau \right) = 0$$

est une condition nécessaire d'équilibre du système. Remarquons que, la sommation dans les premiers membres des équations (14) étant étendue au volume v_1 , on peut y omettre le $\text{grad} U_1$.

Les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre (3 et 14) du système matériel envisagé donnent le système de sept équations scalaires. La résolution de ce système va donner les sept inconnues: les trois coordonnées du centre d'inertie du solide et les trois angles d'Euler, enfin, la fonction ζ par laquelle on peut déterminer la figure du fluide, p.e. $\zeta(x, y, z)$ étant la distance des points de S aux points de la sphère ou de l'ellipsoïde dont le centre est au point O . La configuration sera ainsi déterminée.

Les conditions ci-dessus ne montrent pas encore l'impossibilité des figures d'équilibre où le centre d'inertie du flotteur ne sera pas sur l'axe de rotation ou dans le plan de l'équateur (Oxy) de la masse liquide. Cette question a trait à l'existence de la force qui tend à rapprocher les continents de l'équateur (Polfluchtkraft) et qui est étudiée par les géophysiciens. Peut être les figures d'équilibre possibles du système envisagé correspondent aux positions particulières du centre d'inertie du solide. Mais, la question sera tranchée par la résolution des équations du mouvement, ce qui présente encore de grandes difficultés.

Remarque sur les figures d'une masse fluide en rotation permanente*)

PAR
W. JARDETZKY

(Présenté à la séance de l'Académie des Sciences naturelles du 22-II-1937)

Soient: U le potentiel d'une masse fluide, κ la densité, p la pression, ω la vitesse angulaire de la rotation autour d'un axe fixe et s la distance d'une particule à cet axe. Dans la théorie de figure d'équilibre on suppose que U est le potentiel newtonien. Alors, les figures correspondantes sont déterminées par l'équation

$$(1) \quad U + \frac{\omega^2 s^2}{2} = \int \frac{dp}{\kappa} + \text{const.},$$

où le second membre a sur les surfaces d'égale pression des valeurs constantes C . Si les rotations sont zonales, c'est-à-dire si $\omega = \omega(s)$, le deuxième terme dans cette équation sera $\int \frac{\omega^2}{2} ds^2$.

Mais, en adoptant une autre loi d'attraction que celle de Newton, nous aurons la même équation (1) sous la seule condition qu'il existe un potentiel. Alors, on peut étudier les figures d'équilibre qui correspondent aux diverses lois d'attraction. Si nous nous bornons au cas où les forces dépendent seulement de la distance (r) mutuelle des particules, on aura, évidemment,

*) L'extrait de l'article publié en serbe dans le Glas de l'Ac. R. Serbe CLXXV. 1937.

$$(2) \quad U = \int_{\tau} \kappa' F(r) d\tau',$$

τ étant le volume du fluide.

On peut poser les questions suivantes: 1) la sphère, les ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi et d'autres figures connues dans le cas de la loi de Newton, peuvent-ils être aussi des figures d'équilibre dans le cas d'une autre loi? 2) par quelle méthode peut-on trouver les nouvelles figures d'équilibre, si l'on a envisagé une loi peu différente de celle de Newton, c'est-à-dire une loi qui donne des forces peu différentes des forces newtoniennes?

La figure ou les surfaces de niveau étant connues, la première question se ramène à celle de l'unicité de la solution de l'équation

$$(3) \quad \int_{\tau} \kappa' F(r) d\tau' + \frac{\omega^2}{2} s^2 = \text{fonct.}(x, y, z),$$

où le second membre est donné et $F(r)$ est une fonction inconnue.¹⁾

Quant à la seconde question, on peut supposer que dans l'expression analytique du potentiel on ait un paramètre λ dont les valeurs sont petites, p. e.

$$F(r) = f \left[\frac{1}{r} + u(r, \lambda) \right],$$

où f est la constante de la gravitation et $u(r, \lambda) \rightarrow 0$, si $\lambda \rightarrow 0$. Alors, l'équation des surfaces de niveau (1) prend la forme suivante

$$(4) \quad \int_{\tau} \frac{\kappa' d\tau'}{r} + \frac{\omega^2}{2f} (x^2 + y^2) + \int_{\tau} \kappa' u(r, \lambda) d\tau' = C.$$

Supposons de plus qu'on puisse développer le troisième terme en série

¹⁾ Dans le cas d'un fluide compressible les dimensions de la surface libre ne sont pas déterminées d'avance, car, pour une autre loi que celle de Newton, la grandeur du volume peut être changé. On doit tenir compte de la condition de la constance de la masse.

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i \lambda^i.$$

L'équation (4) où l'on supprime ce terme, donne les figures d'équilibre correspondantes à la loi de Newton. Pour des petites valeurs de λ les nouvelles figures d'équilibre en différeront peu. Si l'on se sert de la méthode de Liapounoff, en résolvant cette équation¹⁾, on introduit une fonction ζ , qui donne l'écart de la nouvelle figure de celle connue dans le cas de la loi de Newton, on développe ensuite le potentiel $\int \frac{x' d\tau'}{r}$ suivant les diverses ordres de ζ et on cherche cette fonction sous la forme d'une série $\zeta = \sum \zeta_i \lambda^i$. Les coefficients ζ_i peuvent être calculés par des approximations successives. Par exemple, pour $F(r) = f \frac{e^{-\lambda r}}{r}$, on aura l'équation

$$\int_{\tau} \frac{x' d\tau'}{r} + \frac{\omega^2}{2f} (x^2 + y^2) - M\lambda + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i \lambda^i}{i!} \int_{\tau} x' r^{i-1} d\tau' = C.$$

où M est la masse du fluide. Si λ varie dans le domaine où les séries mentionnées plus haut sont convergentes, on obtiendra des séries de figures de la masse fluide.

¹⁾ Voir p. e. W. Jarletzky. Recherches math. sur l'évolution de la Terre Ed spéciales de l'Ac. R. Serbe Beograd 1935.

Sur l'ensemble des faisceaux transcendants au voisinage d'une singularité essentielle d'une fonction analytique

PAR
M. RADOJČIĆ

(Présenté à la Séance de l'Académie des Sciences naturelles du 22-II-1937)

1. En reprenant nos considérations sur les singularités essentielles des fonctions analytiques¹⁾, retenons les mêmes notations et dénominations et introduisons d'abord quelques notions nouvelles dont nous aurons besoin. Ces notions concernent la disposition des faisceaux transcendants autour d'une singularité essentielle S ou, si l'on veut, l'ordre que ces faisceaux occupent dans le domaine D le long de S .

Supposons que S soit un cercle ou un arc de cercle que nous parcourons dans un sens déterminé; soient F et F' deux faisceaux transcendants dans D , dont les sommets respectifs s et s' sont deux points différents, situés sur S . Si, en parcourant S , on rencontre d'abord s , puis s' , nous dirons que le *rang* de F est *inférieur* à celui de F' . — Si S est un cercle entier, le rang n'est déterminé qu'après avoir choisi sur S un point de départ.

Cette définition est insuffisante dans le cas où deux faisceaux transcendants ont un sommet commun, ce qui a lieu

¹⁾ Voir surtout: *Sur les domaines fondamentaux des fonctions analytiques au voisinage d'une singularité essentielle* (Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade, t. 4, 1935). — *Sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage des singularités essentielles* (Bull. de la Soc. Math. de France, t. 64, fasc. 3—4, 1936).

toujours lorsque S est réduit à un point unique. Donc, il faut la remplacer par une autre, valable dans tous les cas. Ceci est possible de différentes manières, parmi lesquelles nous acceptons la suivante:

La frontière de D étant composée de S et d'une courbe continue que nous désignerons par C , qui n'a pas des points multiples, soient F et F' deux faisceaux transcendants dans D et s et s' leurs sommets; traçons dans D deux arcs simples L et L' , qui relient S et C , de façon que L commence en s et passe par l'intérieur d'un angle de F , que L' commence en s' et passe par l'intérieur d'un angle de F' et, en outre, que L et L' n'aient aucun point commun, sauf en S lorsque les sommets s et s' coïncident. Si, en parcourant C dans un sens déterminé, on rencontre d'abord L , puis L' , nous dirons que le *rang* de F est *inférieur* à celui de F' . Si S est un cercle ou un point essentiel isolé et D le voisinage entier de S , le rang ainsi défini n'est déterminé qu'après avoir choisi sur C un point de départ.

Ainsi, l'ensemble des faisceaux transcendants dans D , représenté sur C par l'ensemble ordonné des points appartenant aux arcs envisagés, devient lui-même un ensemble *ordonné*. Rappelons quelques notions employées dans les ensembles ordonnés, et que nous appliquerons ici.

On dit que F se trouve *entre* F' et F'' , ou entre F'' et F' , lorsque le rang de F' est inférieur à celui de F et celui-ci est inférieur à celui de F'' . Les éléments F' et F'' sont *voisins*, lorsqu'il n'y a aucun élément entre F' et F'' . L'élément F est *isolé*, lorsqu'en prenant un élément quelconque F' , il existe un élément situé entre F et F' ou identique à F' et qui est voisin de F .

Un ensemble ordonné est *dense*, lorsqu'entre chaque paire d'éléments de cet ensemble il y a des éléments du même ensemble; il est *réductible*, lorsqu'en rayant tous les éléments isolés d'un tel ensemble, puis tous les éléments isolés de l'ensemble qui reste etc., tous les éléments de l'ensemble sont rayés — En divisant pour e^z , e^{e^z} etc. le plan de z en domaines fondamentaux de la façon ordinaire, l'ensemble des faisceaux transcendants est réductible; il est dense pour la fonction modulaire, qui intervient dans la démonstration du célèbre théorème de Picard.

2. Ceci étant, démontrons d'abord le lemme suivant:

Lorsque chaque domaine fondamental situé dans D a plus d'un angle transcendant, alors chaque paire d'angles transcendants, appartenant à un certain parmi ces domaines, appartient aux deux faisceaux transcendants différents.

Soient D_n l'un de ces domaines. Les sommets transcendants de D_n décomposent sa frontière en un certain nombre d'arcs. Chacun de ces arcs renferme avec S un domaine fini du plan, qui contient une infinité de domaines fondamentaux. En effet, si le nombre de ces domaines était fini, nous pourrions conclure, exactement comme dans l'une des démonstrations antérieures,²⁾ qu'il y a dans le domaine en question au moins un domaine fondamental qui n'a qu'un seul angle transcendant, ce qui contredirait à nos hypothèses. Comme le nombre des angles transcendants situés entre deux angles d'un même faisceau transcendant est fini, et comme l'infinité des domaines envisagés possède une infinité d'angles transcendants qui sont situés entre un angle de F et un angle de F' , ces deux faisceaux sont différents entre eux. La même chose ayant lieu par rapport à chacun de ces domaines situés entre deux angles transcendants de D_n , tous les faisceaux contenant les différents angles transcendants de D_n sont différents entre eux.

Après avoir fixé ce lemme nous pouvons démontrer la proposition suivante:

1. Lorsque chaque domaine fondamental situé dans D , excepté au plus un nombre fini, a au moins trois angles dont deux au moins sont transcendants, l'ensemble ordonné des faisceaux transcendants situés dans D est dense.

Il faut montrer que, F et F' étant deux éléments quelconques de cet ensemble, il existe toujours un troisième élément, qui se trouve entre F et F' .

Soit A un angle de F et A' un angle de F' (fig. 1). Si la région entre A et A' appartenait à un nombre fini de domaines fondamentaux, F serait identique à F' , contrairement à l'hypothèse. Donc cette région appartient à une infinité de domaines fondamentaux, qui sont, excepté peut-être quelques-uns, situés entièrement entre A et A' . Par conséquent, les angles transcendants de ces domaines appartiennent à F , F' et aux faisceaux situés

²⁾ Voir le lemme à la fin du n° 3 dans le second des deux travaux cités.

entre F et F' . Soit D_n l'un de ces domaines fondamentaux. Puisque le nombre des domaines fondamentaux qui ont moins de trois angles dont un au plus est transcendant, est fini, on peut supposer que D_n ait, entre autres, deux angles transcendents A_n et A_n' , et que chaque domaine fondamental situé entre ces deux angles ait plus de deux angles dont deux au moins sont transcendents. Soit F_n le faisceau contenant A_n et F_n' le faisceau contenant A_n' . En appliquant le lemme précédent au domaine composé de D_n et des domaines fondamentaux situés entre A_n et

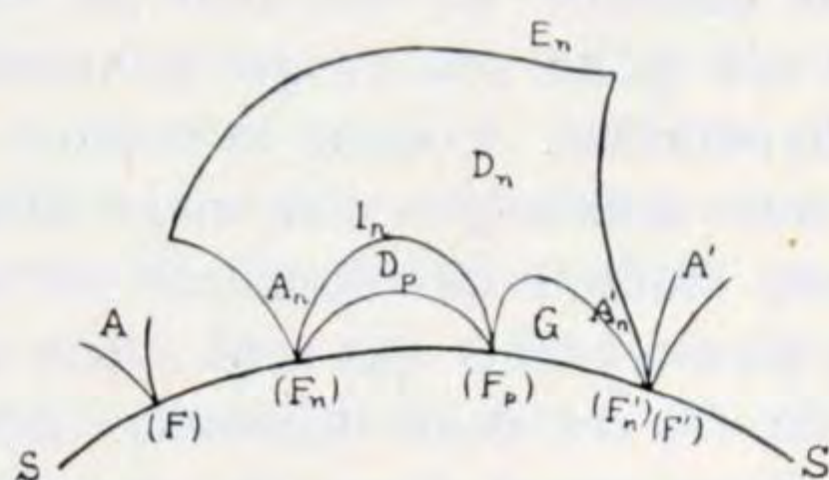


Fig. 1

A_n' , on peut affirmer que F_n est différent de F_n' . Si F_n et F_n' ne sont pas tous les deux identiques à F et F' , notre proposition est démontrée. Dans le cas contraire, nous devons montrer sous ces nouvelles conditions qu'il existe un troisième faisceau, situé entre F_n et F_n' , c. à d. entre F et F' .

Les sommets de A_n et A_n' divisent la frontière de D_n en deux arcs, dont l'un, soit E_n , renferme avec une partie de S un domaine, qui contient l'autre arc, soit I_n . D'après nos hypothèses D_n a d'autres angles encore (transcendants ou algébriques) dont les sommets se trouvent sur E_n et sur I_n . Deux cas se présentent, suivant qu'il y a des sommets sur I_n ou non.

S'il n'y a aucun sommet sur l'arc I_n , celui-ci est la frontière commune de D_n et d'un autre domaine fondamental D_m , qui possède, par conséquent, un angle adjacent à A_n et un angle adjacent à A_n' et pour lequel I_n est ce qu'on désignerait par E_m . Puisqu'on peut supposer, comme pour D_n , que D_m a d'autres angles encore et puisque leurs sommets ne se trouvent pas sur E_m , ces sommets se trouvent sur I_m . Donc, en remplaçant dans ce cas m par n , on peut dire qu'il y a dans les deux cas consi-

dérés des sommets sur I_n et que D_n touche le long de I_n au moins deux autres domaines fondamentaux.

Soit D_p l'un de ces domaines, celui qui a un angle adjacent à A_n . Désignons le par A_p . Selon nos hypothèses, D_p a un second angle transcendant, soit A_p' , qui appartient à un faisceau F_p différent de F_n . Considérons le domaine G situé entre D_n , D_p et S . Puisque chaque domaine fondamental contenu dans G a plus d'un angle transcendant, G renferme une infinité de domaines fondamentaux.³⁾ Ceux-ci possèdent une infinité d'angles transendants, situés entre A_p' et A_n' , donc, d'après notre lemme, F_p est différent aussi de F_n' . Par conséquent, F_p est un faisceau situé entre F_n et F_n' .

Il en résulte que, S étant de la première espèce, lorsque l'ensemble des faisceaux transcendants situés dans D est non-dense, il y a dans D une infinité de domaines fondamentaux dont chacun a un seul angle transcendant, ou bien, chacun a deux angles transendants et aucun angle algébrique.

La proposition I contient, évidemment la proposition suivante :

II. *Lorsque chaque domaine fondamental situé dans D , excepté au plus un nombre fini, a au moins trois angles transendants, l'ensemble ordonné des faisceaux transcendants situés dans D est dense.*

Il en résulte immédiatement le fait suivant :

III. *Lorsque le nombre des valeurs exceptionnelles dans D est plus grand que deux, l'ensemble ordonné des faisceaux transendants situés dans D est dense.*

D'autre part, ce fait est contenu dans la proposition suivante que nous allons démontrer :

IV. *Le nombre des valeurs exceptionnelles dans D étant plus grand que deux, soit ω l'une de ces valeurs; l'ensemble des faisceaux transcendants situés dans D et dont la valeur asymptotique est ω est un ensemble ordonné dense.*

En effet, soient F et F' deux de ces faisceaux. En vertu du théorème III on peut déterminer deux faisceaux F_1 et F_2 situés entre F et F' . Comme il y a une infinité de domaines fonda-

³⁾ Voir la remarque 2).

mentaux situés entre F_1 et F_2 , et comme chacun de ces domaines, excepté peut-être un nombre fini, a un angle transcendant dont la valeur asymptotique est ω , il y a sûrement un faisceau transcendant entre F_1 et F_2 ou égal à l'un de ces deux faisceaux et dont la valeur asymptotique est ω . Ce faisceau est situé entre les faisceaux F et F' choisis arbitrairement, par conséquent l'ensemble des faisceaux dont la valeur asymptotique est ω est dense.

3. Les conditions contenues dans les propositions précédentes ne sont pas indispensables pour que l'ensemble des faisceaux transendants soit dense. Il est bien possible *que chaque domaine fondamental situé dans D ait un seul angle transcendant et que, néanmoins, l'ensemble des faisceaux transendants soit dense*. La fig. 8 dans le premier des deux travaux cités peut nous donner l'idée d'un cas où chaque domaine fondamental a un seul angle transcendant et une infinité d'angles algébriques; la figure connue dans les fonctions automorphes, illustrant le groupe modulaire, peut s'appliquer au cas où chaque domaine fondamental a un seul angle transcendant et deux angles algébriques, à condition de prendre chaque triangle pour un domaine fondamental; enfin, on peut se représenter facilement un cas où chaque domaine fondamental a un seul sommet, transcendant, excepté un seul domaine fondamental, qui a au contraire une infinité de sommets transendants et où tous ces sommets forment un ensemble dense sur S . Cependant, dans tous ces cas l'ensemble des faisceaux transendants est dense.

Mais, l'on peut prouver le théorème suivant:

V. *Lorsque aucun domaine fondamental situé dans D n'a un nombre infini d'angles transendants et lorsque chacun de ces domaines, excepté peut-être un nombre fini, a au plus deux angles (algébriques ou transendants), l'ensemble ordonné des faisceaux transendants situés dans D est au plus fini.*

Pour simplifier la démonstration, supposons d'abord que chaque domaine fondamental dans D , excepté peut-être un nombre fini, ait au moins un angle transcendant. Alors, supposons qu'il y ait dans D un faisceau transcendant F dont les angles appartiennent à des domaines fondamentaux dont chacun a au plus deux angles. Soit D_n l'un de ces domaines. Si D_n a un angle

unique, on voit qu'en traversant la frontière de D_n on ne peut entrer que dans un seul domaine fondamental différent de D_n ; en traversant la frontière de ce second domaine on ne peut entrer que dans un seul troisième domaine etc. Par conséquent F est le faisceau transcendant unique au voisinage de S (fig. 2^a). Si D_n a deux angles, tous les deux transcendants et appartenant à F , on a de nouveau le cas précédent (D_n est maintenant un autre domaine de la fig. 2^a). Si, D_n ayant deux angles, tous les deux transcendants, l'un appartient à F et l'autre à un autre faisceau transcendant F' , on s'assure d'une façon semblable que F et F' sont les seuls faisceaux autour de S (fig. 2^b). Enfin, le cas où D_n aurait deux angles, l'un transcendant et l'autre

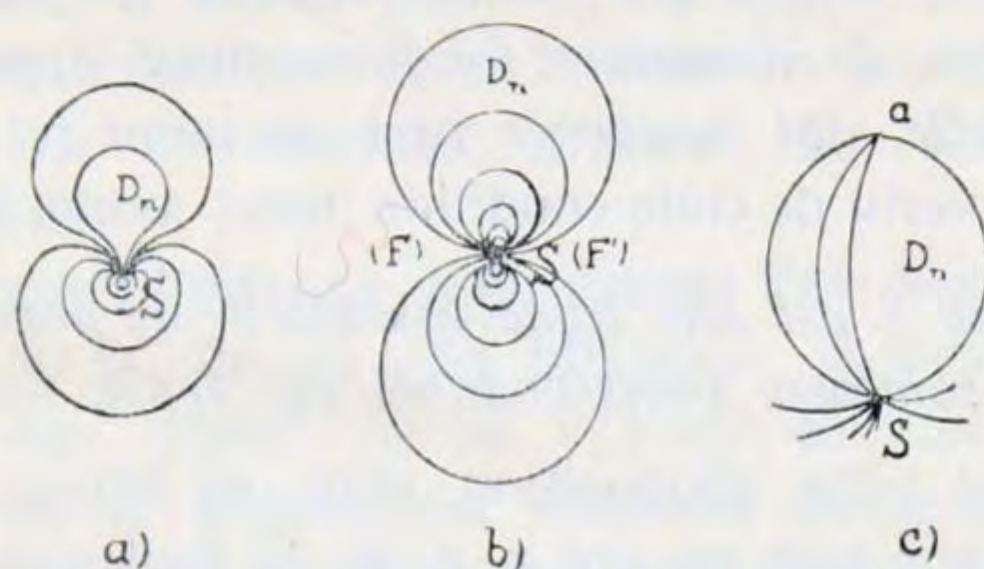


Fig. 2

algébrique, est impossible, puisqu'alors une infinité de domaines fondamentaux devraient avoir un sommet algébrique commun a (fig. 2^c). Donc, s'il existe un faisceau tel que F , il y a dans D au plus deux faisceaux transcendants.

S'il n'y a, au contraire, aucun faisceau tel que F , remarquons que l'ensemble des domaines fondamentaux situés dans D et qui ont plus de deux angles (ces domaines existent maintenant) possède un nombre fini d'angles transcendants et que, par conséquent, ceux-ci appartiennent à un nombre fini de faisceaux transcendants. Ceux-ci sont, bien sûr, les seuls dans D , car, s'il y en avait d'autres, ce seraient des faisceaux tels que F .

Supprimons à présent la condition imposée au début de cette démonstration. La démonstration reste encore la même, seulement, il faut comprendre sous le nom „domaine fondamental“ les domaines fondamentaux, qui ont au moins un angle transcendant, et lorsqu'il est question d'un angle algébrique il faut sousentendre que cet angle se trouve sur celle des frontières

d'un domaine fondamental, sur laquelle se trouvent les sommets transcendants de ce domaine. (Il s'agit des cas où un domaine fondamental a plusieurs frontières sans points communs.) On a montré ainsi que le nombre des faisceaux transcendants situés dans D est toujours fini.

D'après la proposition précédente, lorsque l'ensemble des faisceaux transcendants situés dans D est infini, il y a une infinité de domaines fondamentaux situés dans D , qui ont plus de deux angles, ou bien, il y a dans D au moins un domaine fondamental, qui a une infinité d'angles transcendants.

4. Parmi les conditions imposées d'avance à la singularité essentielle S il se trouve une, selon laquelle *on peut extraire de toute suite infinie de domaines fondamentaux appartenant à D une suite partielle qui converge vers un point* (et non vers un arc) *de S .*⁴⁾ En vertu de cette condition nous avons le fait suivant:

IV. *Lorsque S est une ligne essentielle de première espèce,*⁵⁾ *l'ensemble des sommets transcendants est dense sur S .*

En effet, si cette proposition était en défaut, il n'y aurait aucun sommet sur tout un arc $z_1 z_2$ de S . Soit alors p un point situé sur le milieu de $z_1 z_2$. Comme c'est un point de S , une infinité de domaines fondamentaux possèderaient des points aussi rapprochés de p que l'on voudrait. S étant de première espèce, on pourrait supposer que chacun de ces domaines fondamentaux eut au moins un sommet transcendant. Puisque ces sommets ne seraient pas situés entre z_1 et z_2 , on pourrait choisir parmi ces domaines une infinité dont chacun posséderait des points aussi rapprochés de n'importe lequel des points de l'arc $p z_1$ ou $p z_2$ que l'on voudrait. Or ce serait en contradiction avec la condition envisagée. Donc la proposition est démontrée.

D'autre part, lorsque l'ensemble des sommets transcendants est dense, l'ensemble ordonné des faisceaux transcendants qui possèdent ces sommets n'est pas un ensemble réductible. En effet, lorsqu'on rattache à chaque sommet un faisceau déterminé (ceci est nécessaire puisque plusieurs faisceaux peuvent avoir un sommet

⁴⁾ Voir la condition B dans le premier des deux travaux cités sous 1).

⁵⁾ Cela veut dire que tous les domaines fondamentaux dans D , sauf au plus un nombre limité de ceux-ci, ont des sommets situés sur S (voir les travaux cités).

commun) on obtient un ensemble de faisceaux qui, en l'ordonnant selon la définition particulière du rang d'un faisceau, mentionnée au début du n° 1, devient un ensemble ordonné dense. Puisqu'un ensemble ordonné réductible ne peut jamais contenir des parties denses, l'ensemble ordonné des faisceaux dans D n'est pas réductible. Nous avons donc la proposition suivante:

VII. *Lorsque la singularité essentielle S est de première espèce et lorsque l'ensemble ordonné des faisceaux transcendants situés dans D est réductible, S est un point unique.*

On trouve facilement des exemples qui illustrent les propositions VI et VII. Citons seulement les fonctions e^z , e^{e^z} , ... pour lesquelles S est un point et l'ensemble des faisceaux transcendants est réductible. Pour la fonction modulaire mentionnée S est un cercle et l'ensemble ordonné des faisceaux transcendants est dense.

Nous nous trouvons donc devant l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des fonctions analytiques, surnommé „problème des types“ et où il s'agit de savoir: quand est-ce qu'à un domaine simplement connexe quelconque (formant en général une surface de Riemann) correspond dans le plan l'intérieur d'un cercle (cas hyperbolique), quand le plan tout entier, y compris le point à l'infini (cas elliptique) et quand la partie finie du plan (cas parabolique). Dans cette question, la proposition VII représente un critérium purement topologique, basé sur la disposition des faisceaux transcendants, c.à.d., au fond, sur la disposition des points de ramification transcendants de la surface de Riemann de la fonction inverse.

Sur les recherches intrinsèques en Géométrie et Mécanique

PAR

ANTON BILIMOVITCH

(Présenté à la séance de l'Académie des Sciences naturelles du 7-III-1937)

Les sciences mathématiques d'aujourd'hui constituent une discipline d'une vaste et puissante envergure. Elles se divisent en une foule de branches dont plusieurs sont elles-mêmes de vastes disciplines indépendantes. Les mathématiques entrent dans presque toutes les sciences, telles la Mécanique, la Physique, la Chimie, la Biologie, les Sciences économiques, la Sociologie. Grâce à la technique, elles sont devenues indispensables dans la vie quotidienne. Elles ont pénétré jusqu'à la base même de notre pensée, la Logique, et lui ont fourni une forme spéciale — la Logistique. Les abstractions mathématiques ont affranchi l'élan de notre fantaisie: aujourd'hui nous traitons l'espace à quatre et plus de quatre dimensions de la même manière que l'espace ordinaire. Les mathématiques se présentent à nous sous forme d'un édifice harmonieux et parfait au sommet duquel sont les soi-disant métamathématiques, et dont comme point culminant on peut évaluer et considérer les mathématiques elles-mêmes. Lorsqu'on considère tout cela, on est frappé par la puissance, l'importance, l'universalité et la diversité des mathématiques. On se demande ce qu'on doit admirer davantage. On est frappé par l'ampleur des matières des mathématiques qui embrassent le monde matériel tout entier depuis le microcosme, jusqu'au macrocosme, et qui secondent en même temps l'entendement de l'activité spirituelle de l'individu ainsi que du collectif. On est frappé encore davantage par la méthode mathé-

matique, objet de rêve de toutes les autres sciences. On est frappé enfin par la forme mathématique dont une seule expression, une seule formule peut dire beaucoup plus et d'une façon plus précise et plus complète que des volumes entiers: il suffit de citer comme exemple la formule de la gravitation universelle.

Aujourd'hui nous succombons, pour ainsi dire, sous l'abondance des matières mathématiques. Tous les jours une quantité d'œuvres nouvelles, dont le nombre ne fait que croître, nous submerge. De nouveaux courants se forment. L'Amérique, le Japon, les Indes, la Chine, rivalisent avec la vieille littérature de l'Europe; la crue est sans limites. Il devient impossible à chacun d'entre nous de suivre le courant, même dans le domaine restreint de sa spécialité. Un mathématicien ne peut plus comprendre un autre. Les mathématiques nous conquièrent et nous assujettissent.

Cependant... en nous plaçant un peu au-dessus du niveau ordinaire et en considérant toutes ces ramifications, tout cet ensemble rangé en ordre de perspective, nous nous apercevons que tout se rapetisse, que tout se réduit à quelques étapes peu nombreuses, à quelques écoles. En remontant encore, nous finissons par ne distinguer que trois massifs, trois périodes qui embrassent tout l'ensemble des Sciences mathématiques. Ce sont: 1^o la période antique, 2^o celle du XVII-e siècle ou la période de Descartes, de Newton et de Leibnitz et 3^o celle de nos jours qui, d'après le caractère de ses innovations et de ses principes, pourrait être appelée période d'abstraction. Nous pouvons considérer que cette période date à peu près de Lobatchevsky et de Bolyai.

Chacune des dites périodes peut être caractérisée par le contenu des matières et par ses méthodes. Qu'il nous soit permis maintenant de dire quelques mots des méthodes seules en connexion avec l'objet de notre discours.

Dans les mathématiques antiques, l'analyse, soit des nombres, soit des propriétés des formes géométriques, se faisait au moyen de l'examen immédiat et de la logique, — c'étaient les deux procédés dont disposaient les mathématiques antiques. Chez les Pythagoriciens le nombre, paré de musique et approfondi par la mystique, occupe la place d'honneur tout en reposant sur sa base naturelle de nombre calculable. La géométrie antique, si brillamment exposée dans les œuvres d'Euclide, d'Archimède

et d'Apollonius de Perga, n'a pas disposé non plus d'autres moyens que le dessin et la logique. Les mathématiques antiques avaient un caractère naturel; elles n'avaient rien d'artificiel.

La deuxième période, celle du XVII^e siècle, a créé d'autres méthodes: la géométrie analytique, l'analyse graphique, et le calcul infinitesimal. L'application de ces méthodes a donné de brillants résultats et nous sommes loin d'en vouloir et pouvoir diminuer la valeur, ne fût-ce que d'un trait. Cependant dans l'analyse graphique de toutes les fonctions possibles, ainsi que dans l'étude analytique des figures géométriques apparaît un élément artificiel: à savoir l'une ou l'autre forme spéciale de coordonnées, et surtout les coordonnées cartésiennes. Depuis, les coordonnées ont tant avancé dans les recherches mathématiques qu'il arrive souvent que l'essence principale de l'objet est reléguée au second plan. La méthode des coordonnées a impérieusement entraîné les recherches mathématiques dans une direction déterminée: on a analysé principalement la matière à laquelle les coordonnées pouvaient être appliquées avec succès. En voici un exemple. En considérant les différentes courbes dont s'étaient occupés les mathématiciens de l'antiquité, nous voyons que chez eux, après les sections coniques, même rôle est joué par certaines courbes de nature algébrique ainsi que par les spirales qui, par leur forme et par la loi même de leur formation, sont non seulement plus simples que, par exemple, les courbes de troisième ordre mais, peut être, plus simples que les coniques. Cependant si on les analyse au moyen des coordonnées cartésiennes, elles deviennent des lignes transcendantes compliquées. Il faut, pour les étudier, recourir à de nouvelles coordonnées spéciales et se servir d'un nouvel élément artificiel. Toute une série de sciences mathématiques, en quelque sorte artificielles, ont surgi, telles la théorie des courbes algébriques, la théorie des surfaces algébriques, et ainsi de suite. Tout ceci se rattache aux coordonnées cartésiennes. Quant aux autres coordonnées, les résultats en ont un tout autre aspect: en coordonnées cartésiennes à la fonction linéaire correspond une droite et en coordonnées polaires c'est la spirale d'Archimède qui correspond à la même fonction.

Les calculs différentiel et intégral ont éloigné encore davantage les recherches mathématiques des voies immédiates et naturelles. Le calcul différentiel ayant pour but l'analyse d'un

phénomène dans ses éléments, il est évident qu'il est plus aisé de n'examiner qu'un seul côté, qu'une seule propriété de chaque élément. C'est ainsi qu'en géométrie l'analyse d'une figure à trois dimensions prise intégralement a été remplacée par l'analyse de chaque dimension séparée. Ce dénombrement artificiel est devenu une règle en Géométrie, en Mécanique, en Physique et ainsi de suite. L'analyse a triomphé partout. Lagrange se vantait de ce que dans sa Mécanique analytique il n'y avait pas une seule figure, rien que des x , y , z avec les coordonnées généralisées portant son nom.

Cependant au début de cette période, qui est celle du développement brillant du calcul infinitésimal, le génial Euler avait expliqué sur un exemple concret comment il fallait analyser les problèmes au moyen d'un procédé intrinsèque. La science lui est redevable des équations intrinsèques du mouvement d'un point devenues classiques. Ces équations ne déterminent pas le mouvement du point par rapport au système arbitraire des coordonnées, mais par rapport au trièdre soi-disant naturel dont les axes sont déterminés par la trajectoire même.

L'une des raisons importantes pour lesquelles, longtemps encore après Euler, les recherches intrinsèques n'ont pu avancer, est qu'on ne connaissait pas la différentiation et intégration immédiates des figures géométriques. On ne savait pas comment procéder à l'analyse immédiate du changement d'une figure géométrique en entier sans que ce changement soit exprimé par des nombres.

Durant la troisième période, que nous désignons par période d'abstraction, les mathématiques se sont émancipées en grande partie de l'influence du nombre. Au lieu du nombre réel, ce sont les nombres imaginaires, complexe, hypercomplexe et enfin l'ensemble, qui ont commencé à prédominer. Au lieu d'opérations ordinaires avec des nombres réels, sont apparues des opérations nouvelles qui n'étaient pas entravées par les règles étroites de l'ancien calcul classique.

Dans le domaine du calcul différentiel, les recherches intrinsèques, après n'avoir été que des essais fortuits et disparates, commencent à être systématisées et l'on voit paraître des traités spéciaux qui leur sont consacrés. Ces recherches ont pris de l'envergure surtout avec le développement du calcul vectoriel et tensoriel et d'autres calculs analogues. L'importance du calcul

vectoriel consiste aussi en ce qu'il a fourni la méthode de différentiations intrinsèques de la figure géométrique prise intégralement sans recourir aux coordonnées. Aujourd'hui, presque tous les problèmes les plus importants en Géométrie, en Mécanique, en Physique théorique, ont leurs soit-disant équations intrinsèques (*natürliche Gleichungen*).

A présent, le domaine et le problème des recherches intrinsèques sont parfaitement précisés. Qu'il me soit permis de dire tout d'abord en quelques termes très simples les principes de ces recherches et d'expliquer ensuite en quoi consiste leur propriété essentielle du point de vue spécialement mathématique.

Quand, par exemple, un maître-serrurier explique à son apprenti quelle est la courbe que celui-ci doit donner à une barre ou à un fil de fer, il lui montre d'une manière concrète qu'il doit, par exemple, recourber les cinq premiers centimètres sur le modèle de tel arc donné, les trois centimètres suivants d'après un arc d'une courbe plus accentuée, peut-être même dans un autre plan, et ainsi de suite. A condition d'avoir bien écouté et compris, l'apprenti peut exécuter ce qu'on vient de lui dire sans recourir aux coordonnées. Le mathématicien qui fait l'analyse intrinsèque d'une courbe, puis d'une surface et d'autres formes toujours plus compliquées, se sert absolument de la même méthode.

Il faut souligner encore une propriété très importante des recherches intrinsèques, à savoir que ces recherches sont celles de l'essence même de l'objet. Les équations qui leur correspondent s'appellent en français „équations intrinsèques“, du mot latin „*intrinsecus*“ — dedans, ce qui veut dire l'intérieur, la nature même de l'objet. Le serrurier qui explique à son apprenti la forme que celui-ci doit donner au fil de fer ne lui dit que l'essence de ce qu'il exige. Ne serait-il ridicule le serrurier qui aurait exigé de son apprenti de calculer avec précision dans quel angle de l'atelier et à quelle distance de l'un et de l'autre murs et du plafond se trouve l'endroit où il doit exécuter la commande. Il est évident que les explications du maître-serrurier ont un caractère naturel, sans rien de superflu ni d'artificiel; quant à la méthode des coordonnées elle ne peut jamais renoncer à placer l'objet, qu'elle soit géométrique ou non, dans tel ou tel autre endroit spécial.

Au point de vue géométrique, la différence entre l'analyse

intrinsèque et n'importe quelle autre analyse consiste en ceci. Il existe, par exemple, des propriétés des figures géométriques qui restent invariables indépendamment des coordonnées que nous appliquons à leur analyse. L'analyse intrinsèque est, par conséquent, liée à la théorie des invariants prise au sens large du terme. Dans l'analyse intrinsèque tout reste invariable, — c'est son avantage principal du point de vue mathématique. Grâce à ces analyses, la théorie même des invariants a été beaucoup approfondie, surtout lorsque les analyses intrinsèques ont été également appliquées à l'espace de plus de trois dimensions.

Les recherches intrinsèques ont reçu une nouvelle impulsion de la soi-disant Géométrie absolue dont le problème principal est celui d'affranchir la géométrie, surtout la géométrie différentielle, de tout ce qui la rattache aux coordonnées, surtout au trièdre de référence. La Géométrie absolue est surtout populaire depuis qu'elle est devenue l'appareil indispensable des théories modernes de la Physique mathématique.

Une autre impulsion importante est venue aux analyses intrinsèques des idées qui avaient trouvé leur expression peut-être la plus claire dans l'oeuvre de F. Klein. F. Klein avait déclaré que les recherches géométriques de même que toutes les autres recherches ne peuvent être approfondies qu'au moyen de la théorie des transformations, spécialement en connexion avec la théorie des groupes. Sous l'influence de ces idées, les recherches intrinsèques ont été adoptées dans d'autres géométries: projective, affine etc., et ensuite dans toutes les géométries non-euclidiennes.

On peut dire en dernier lieu que les recherches intrinsèques modernes sont la synthèse de la clarté classique de l'examen immédiat et logique, d'une part, et de la profondeur et de l'universalité du calcul infinitésimal, d'autre part, sans l'application de certains procédés artificiels.

Dans toute une série de mes travaux scientifiques, j'ai appliqué l'analyse intrinsèque aux différents problèmes de la Géométrie et surtout à ceux de la Mécanique rationnelle, de la Cinématique et de la Dynamique. A l'instar d'Euler, qui avait établi les équations intrinsèques du mouvement d'un point matériel, j'ai établi, en me servant de l'analyse vectorielle moderne, les équations intrinsèques du mouvement du corps solide, puis j'ai appliqué cette méthode aux systèmes matériels de caractère

soit holonome, soit non-holonome. Il m'est impossible d'entrer plus avant dans l'exposition des susdits résultats ainsi que d'autres résultats que j'ai obtenus et qui ont paru dans les éditions de l'Académie Royale Serbe des Sciences, de l'Académie des Sciences de Paris, dans différentes publications en langue russe ainsi qu'en d'autres langues, avant et après la Guerre, au sujet de l'analyse intrinsèque. Ce sont de choses trop spéciales, ne pouvant présenter que trop peu d'intérêt général pour qu'on puisse y consacrer ici plus d'un minimum de temps. Cependant je puis dire en défense de nous autres spécialistes que toutes ces considérations, si compliquées avec leurs termes épouvantables tels que: holonome, non-holonome, scléronome et ainsi de suite, ne sont pas sans une importance pratique dans la vie quotidienne: tout chauffeur, qui est assis au volant, conduit un mécanisme non-holonome.

Je suis profondément persuadé que les méthodes de l'analyse intrinsèque, surtout appliquées aux phénomènes beaucoup plus compliqués que les phénomènes géométriques et mécaniques, vont s'affermir de plus en plus. Elles vont contribuer énormément à déblayer le terrain scientifique si considérable et en même temps si obstrué encore aujourd'hui, tel par exemple celui de la Physique théorique. La théorie des vecteurs, le calcul tensoriel, la théorie des matrices sous une forme invariante, et d'autres branches de l'appareil mathématique moderne — mais toujours sous une forme intrinsèque — ouvrent aux investigations théoriques des voies nouvelles. Ils préservent la science du chaos formaliste et éliminent les erreurs des théories spéculatives.

Si encore au XV-e siècle l'archevêque Nicolas de Cusa avait dit, et d'autres, dont non seulement le fondateur du criticisme philosophique, Emmanuel Kant, mais aussi le fondateur du positivisme scientifique, Auguste Comte, avaient répété que toute science n'est science qu'en tant que les mathématiques en font partie, nous les représentants des recherches intrinsèques, nous pouvons affirmer aujourd'hui que la science mathématique elle-même n'a de raison d'être qu'en tant qu'elle suit la voie naturelle.

Ueber einige lineare spezielle kanonische Transformationen

VON
ANTON BILIMOVITCH

(Vorgelegt in der Sitzung der Akademie der Naturwissenschaften vom 20-V-1937)

1. Die kanonische Form der Differentialgleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, n$$

wo p_i, q_i die unbekannten Funktionen der unabhängigen Variablen t sind, H eine gegebene Funktion dieser Variablen und des t ist, spielt eine sehr wichtige Rolle in der Theorie der Differentialgleichungen namentlich aber bei den Anwendungen dieser Gleichungen auf verschiedene Probleme der Mechanik und besonders der Himmelsmechanik.

Wenn man statt der Variablen p_i, q_i, t neue Variablen P_i, Q_i, T mittels der Gleichungen

$$(2) \quad \begin{aligned} p_i &= p_i(P_j, Q_j, T), \\ q_i &= q_i(P_j, Q_j, T), \quad i, j=1, 2, \dots, n \\ t &= t(P_j, Q_j, T) \end{aligned}$$

eingeführt und nach der durchgeführten Transformation das System (1) wieder auf ein System von ebenfalls kanonischer Form gebracht wird:

$$\frac{dP_i}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i},$$

$$\frac{dQ_i}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

worin K eine Funktion der Variablen P_i , Q_i , T ist, so stellt die Transformation (2) eine kanonische Transformation für das System (1) dar.

In allgemeinen Fall kann die Funktion H von der unabhängigen Variablen t abhängig sein und diese Variable kann ebenfalls eine Transformation durch die Gleichungen (2) unterliegen. Von diesem allgemeinen Fall muss man einen wichtigen speziellen Fall absondern, wenn einerseits die Funktion H von Variablen t unabhängig ist und andererseits — die Variable t keiner Transformation unterliegt. Es ist bekannt, dass der allgemeine Fall immer auf den erwähnten speziellen gebracht werden kann auf die Weise, dass man die Zahl der Freiheitsgrade des System n um eine Einheit erhöht und ein System der Gleichungen $2n+2$ bekommt.

Demnach können wir voraussetzen, dass die Funktion H die Form

$$H = H(p_i, q_i)$$

aufweist und dass die kanonische Transformation durch die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{aligned} p_i &= p_i(P_j, Q_j), \\ q_i &= q_i(P_j, Q_j). \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

bestimmt ist.

Die kanonischen Transformationen können wir danach unterscheiden, ob sie ein jedes System der kanonischen Gleichungen mit einer beliebigen Funktion H zu einer kanonischen Form

bringen, oder ob sie dieses Resultat nur für ein spezielles System mit einer bestimmten Funktion H ergeben. Die kanonischen Transformationen der zu erst erwähnten Gattung stellen sogenannte *allgemeine kanonische Transformationen*, jene der zweiten *spezielle kanonische Transformationen für ein gegebenes System* dar.

Die Theorie der kanonischen Transformationen ist hauptsächlich den allgemeinen kanonischen Transformationen gewidmet; die speziellen kanonischen Transformationen nach der Feststellung von S. Lie, waren, wegen der grossen analytischen Schwierigkeiten ihrer Theorie, Gegenstand einer sehr geringen Zahl der Forschungen.

Im Jahre 1913 veröffentlichte ich eine Note (C. R. t. 157. pp. 1133—1135) über die speziellen kanonischen Transformationen, in welcher ich die Grundsätze der Klassifikation dieser Transformationen feststellte und diese Grundsätze auf einer Anzahl konkreter Beispiele auseinandersetzte.

Der Inhalt dieser Abhandlung ist die Forschung der linearen Transformationen soweit sie kanonisch sein können und besonders spezieller kanonischen Transformationen.

2. Als Ausgangspunkt für die Ausführung der kanonischen Transformationen kann die folgende Eigenschaft des sogenannten Ausdruckes von Pfaff dienen.

Der Pfaffsche Ausdruck sei gegeben:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^N a_i dx_i = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_N dx_N.$$

wo $a_i (i=1, 2, \dots, N)$ die Funktion der Variablen $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ ist. Diesem Ausdrucke entspricht das sogenannte erste System der Pfaffschen Gleichungen von der Form

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) dx_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Eine sehr wichtige Eigenschaft der Gleichungen (5) besteht darin, dass sie invariant bleiben, wenn man statt der Variablen x_i neue Variablen $y_i (i=1, 2, \dots, N)$ einführt, d.h. wenn wir durch die Aenderung

$$x_i = x_i(y_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

den Ausdruck (4) auf den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^N b_i dy_i$$

bringen, wo b_i ($i=1, 2, \dots, N$) die Funktionen der Variablen y_i ($i=1, 2, \dots, N$) sind, dann die Gleichungen (5) auf die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial b_i}{\partial y_j} - \frac{\partial b_j}{\partial y_i} \right) dy_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

transformiert werden; mit anderen Worten stellen sie wieder das erste System von Pfaff für der Pfaffschen transformierten Ausdruck dar.

Wenn wir jetzt von den Gleichungen (1) in der Form

$$(6) \quad \begin{aligned} dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt &= 0, \\ dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt &= 0 \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ausgehen, so können wir leicht zum Schluss gelangen, dass diese Gleichungen als Gleichungen des ersten System von Pfaff von der Form

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt$$

angesehen werden können, wobei die $2n + 1$ Gleichungen von der Form

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) = 0$$

eine unmittelbare Folgerung der vorhergehenden $2n$ Gleichungen darstellt.

Demnach kann die lineare Pfaffsche Form (7) als Ausgangsausdruck für alle Transformationen der Gleichungen (6) dienen.

Es ist wichtig zu bemerken, dass die Form (7) das erste Pfaffsche System der Gleichungen in der kanonischen Form gibt, und dass ein umgekehrter Satz nicht richtig ist; nämlich, es könne die kanonische Form der Gleichungen auch aus einem anderen Pfaffschen Ausdruck als es die Form (7) ist erzeugt werden.

So zum Beispiel bringt die Form:

$$(3p_1 + 5q_1 + 2p_1^2) dq_1 + (p_1 + 2q_1 + 3p_1^2 + 4p_1 q_1) dp_1 - H dt$$

zu dem kanonischen System:

$$dp_1 + \frac{\partial H}{\partial q_1} dt = 0,$$

$$dq_1 - \frac{\partial H}{\partial p_1} dt = 0,$$

denn mit den Bezeichnungen

$$x_1 = q_1, \quad a_1 = 3p_1 + 5q_1 + 2p_1^2,$$

$$x_2 = p_1, \quad a_2 = p_1 + 2q_1 + 3p_1^2 + 4p_1 q_1,$$

$$x_3 = t, \quad a_3 = -H(q_1, p_1)$$

haben wir das folgende Koeffizientenschema der Pfaffschen Gleichungen:

$$* \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = 1, \quad * \quad \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial H}{\partial p_1},$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad *$$

Dieses Schema aber führt uns zu dem vorhergehenden System der Gleichungen.

3. Wenn die Verbindungen zwischen der Variablen linear sind, können wir sie folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(q_j, Q_j) = \sum_{j=1}^n (a_{ij} q_j + b_{ij} Q_j), \\ &= (8) \\ P_i &= P_i(q_j, Q_j) = \sum_{j=1}^n (A_{ij} q_j + B_{ij} Q_j), \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten a_{ij} , b_{ij} , A_{ij} , B_{ij} — konstante Zahlen sind. Diese Koeffizienten müssen den Bedingungen entsprechen, dass man aus den obigen Gleichungen die p_i , q_i als Funktionen P_i , Q_i bestimmen kann und umgekehrt. Weil wir die Gleichungen (8) in der Form:

$$\begin{aligned} p_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j &= \sum_{j=1}^n b_{ij} Q_j, \\ \sum_{j=1}^n A_{ij} q_j &= P_i - \sum_{j=1}^n B_{ij} Q_j \end{aligned}$$

schreiben können, sehen die erwähnten Bedingungen wie folgt aus:

$$(9) \quad \|A_{ij}\| \neq 0, \quad \|b_{ij}\| \neq 0,$$

wo wir mit den Strichen die entsprechenden Determinanten bezeichnet haben.

Für die Klassifikation der linearen kanonischen Transformationen können wir, wie auch für den allgemeinen Fall, den Pfaffschen Ausdruck

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i)$$

in Betracht ziehen.

Weil in unserem Fall die p_i und P_i lineare Funktionen der Argumente q_i und Q_i sind, können wir für die Klassifikation dieses Ausdruckes, abgesehen von der allgemeinen Theorie, auch

die Resultate von G. Frobenius anwenden (Ueber homogene totale Differentialgleichungen, Crelle Journal, B. 86, § 4).

Wenn wir den Fall der Verbindungen nur zwischen q_i und Q_i ausschliessen (Punkttransformation), welcher sich auf den Fall der allgemeinen kanonischen Transformation bezieht, kann der Ausdruck (10), in Verbindung mit seinem Range, den wir mit m bezeichnen, folgende Formen annehmen:

a. $m=1$.

In diesem Fall stellt der Ausdruck (10) ein Total-Differential dar und wir können also schreiben:

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) = dW$$

wo $W = W(q_i, Q_i)$ ist.

Die Gleichung (11) stellt die folgende Transformation dar:

$$(12) \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad -P_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Diese Transformation stellt nichts anders vor, als eine kanonische Transformation allgemeinen Charakters. Im Falle einer linearen Transformation ist die Funktion W quadratisch.

b. $m=2$.

In diesem Fall kann die Differentialform (10) folgendermassen dargestellt werden:

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) = X_1 dY_1,$$

wo X_1 und Y_1 lineare Funktionen der Variablen q_i und Q_i sind, welche wir auf folgende Weise schreiben können:

$$X_1 = \sum_{j=1}^n (l_j q_j + L_j Q_j),$$

$$Y_1 = \sum_{j=1}^n (m_j q_j + M_j Q_j).$$

Die Formeln der Transformationen erhalten dann die Form

$$\begin{aligned} p_i &= m_i X_i, \\ -P_i &= M_i X_i. \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, n.$$

— Weil in diesem Falle die Bedingungen die folgenden sind:

$$\|M_i l_j\| \neq 0, \quad \|m_i L_j\| \neq 0,$$

sehen wir, dass z.B. die erste Bedingung nur in dem Fall befriedigt ist, wenn die Determinante nur auf ein Glied $M_1 l_1$ reduziert ist, das heisst aber das eine solche Transformation nur in dem Fall eines Systems mit $n=1$ angewandt werden kann.

Demnach kann man nur auf das System der Gleichungen

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

die Transformation:

$$\begin{aligned} (13) \quad p_1 &= m_1 (l_1 q_1 + L_1 Q_1), \\ -P_1 &= M_1 (l_1 q_1 + L_1 Q_1), \end{aligned}$$

welche

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{m_1}{M_1} P_1, \\ q_1 &= -\frac{1}{l_1} \left(\frac{1}{M_1} P_1 + L_1 Q_1 \right) \end{aligned}$$

gibt, anwenden.

Weil der Pfaffsche Ausdruck

$$p_1 dq_1 - H dt$$

dann auf die Form

$$\frac{m_1 L_1}{l_1 M_1} P_1 dQ_1 + \frac{m_1}{l_1 M_1^2} P_1 dP_1 - H dt$$

transformiert erscheint, wo wir mit $\bar{H}$ das Resultat der Transformation des H auf neue Variable bezeichnet haben, geben die Differentialgleichungen des Pfaffschen System für die neue Form:

$$-\frac{m_1 L_1}{l_1 M_1} dP_1 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_1} dt = 0,$$

$$\frac{m_1 L_1}{l_1 M_1} dQ_1 - \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_1} dt = 0,$$

woraus wir die kanonische Form:

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_1}, \quad \frac{dQ_1}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_1}$$

gewinnen, wo wir

$$K = \frac{M_1 l_1}{m_1 L_1} \bar{H}$$

gestellt haben.

Die Transformation (13) stellt wirklich eine Transformation zweiten Ranges dar, denn wir haben:

$$p_1 dq_1 - P_1 dQ_1 = (l_1 q_1 + L_1 Q_1) d(m_1 q_1 + M_1 Q_1).$$

Die rechte Seite kann ein vollständiger Differential nur unter der Bedingung $l_1 : m_1 = L_1 : M_1$ sein, was aber hat keinen Platz in dem allgemeinen Falle findet.

c. $m = 3$.

Setzen wir jetzt voraus, dass wir eine Gleichung:

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) = dW + X_1 dY_1,$$

haben, wo W eine quadratische Funktion ist und X_1 , Y_1 die linearen Funktionen der Variablen q_i und Q_i sind.

Der Pfaffsche Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - Hdt$$

transformiert sich dann auf den Ausdruck

$$= \sum_{i=1}^n P_i dQ_i + dW + X_1 dY_1 - Hdt,$$

wobei alle Funktionen mittels neuer Variablen q_i und Q_i ausgedrückt werden müssen.

Weil die Form (14) folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(15) \quad \sum_{i=1}^n \left[\left(P_i + X_i \alpha_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \right) dQ_i + \left(X_i \beta_i + \frac{\partial W}{\partial P_i} \right) dP_i \right] - Hdt,$$

wo wir

$$X_1 = \sum_{i=1}^n (a_i Q_i + b_i P_i),$$

$$Y_1 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i Q_i + \beta_i P_i)$$

gestellt haben, schreiben wir die Pfaffschen Gleichungen auf folgende Weise:

$$(16) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\Delta_{ij} dQ_i + \left(\Delta_{ij}' - \frac{\partial P_j}{\partial P_i} \right) dP_i \right] - \frac{\partial H}{\partial Q_j} dt &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial P_j} - \Delta_{ji}^* \right) dQ_i + \Delta_{ij}'' dP_i \right] - \frac{\partial H}{\partial P_j} dt &= 0, \end{aligned}$$

wo wir

$$\Delta_{ij} = \alpha_i a_j - \alpha_j a_i, \quad \Delta_{ij}' = \beta_i a_j - \alpha_j b_i,$$

$$\Delta_{ji}^* = \beta_j a_i - b_j \alpha_i, \quad \Delta_{ij}'' = \beta_i b_j - \beta_j b_i,$$

gestellt haben.

Wenn das System (16) ein kanonisches ist und eine Form:

$$dQ_i - \frac{\partial K}{\partial P_i} dt = 0, \quad dP_i + \frac{\partial K}{\partial Q_i} dt = 0$$

hat, können wir aus (16) die Gleichungen ableiten:

$$\sum_{i=1}^n \left[\Delta_{ij} \frac{\partial K}{\partial P_i} + \left(\frac{\partial P_i}{\partial P_j} - \Delta_{ij}' \right) \frac{\partial K}{\partial Q_i} \right] - \frac{\partial H}{\partial Q_j} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial P_i}{\partial P_j} - \Delta_{ij}^* \right) \frac{\partial K}{\partial P_i} - \Delta_{ij}'' \frac{\partial K}{\partial Q_i} \right] - \frac{\partial H}{\partial P_j} = 0,$$

welche man als Gleichungen zur Bestimmung der Funktion K für ein neues System der kanonischen Gleichungen ansehen muss. Ohne dieses Systems in dem allgemeinen Falle zu analysieren, und ohne die Möglichkeit der Bestimmung der Funktion K in diesem allgemeinen Falle zu untersuchen, werden wir ein konkretes Beispiel der obenerwähnten kanonischen Transformation geben. Nehmen wir den Fall $n = 2$ mit dem Werte für H :

$$-2H = 874(94q_1^2 + 276q_2^2) + 276p_1^2 + 94p_2^2.$$

Führen wir die lineare Transformation durch:

$$\begin{aligned} q_1 &= 20Q_1 + 4Q_2 + 7P_1 - 30P_2, \\ q_2 &= -10Q_1 - 2Q_2 - 3P_1 + 13P_2, \\ p_1 &= -131Q_1 - 25Q_2 - 40P_1 + 170P_2, \\ p_2 &= 272Q_1 + 57Q_2 + 94P_1 - 410P_2, \end{aligned} \quad (17)$$

welche

$$\begin{aligned} -p_1 &= 10q_1 + 10q_2 + 31Q_1 + 5Q_2, \\ -p_2 &= 8q_1 + 50q_2 + 68Q_1 + 11Q_2, \\ P_1 &= 13q_1 + 30q_2 + 40Q_1 + 8Q_2, \\ P_2 &= 3q_1 + 7q_2 + 10Q_1 + 2Q_2 \end{aligned}$$

gibt und demnach die Bedingungen

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - P_1 dQ_1 - P_2 dQ_2 = dW + X_1 dY_1,$$

befriedigt, wo:

$$\begin{aligned} -2W = & 5Q_1^2 + 6Q_1Q_2 + Q_2^2 + 6Q_1q_1 + 10Q_1q_2 + 2Q_2q_1 + \\ & + 4Q_2q_2 + 2q_1^2 - 20q_1q_2 + 5q_2^2, \end{aligned}$$

$$-X_1 = 7Q_1 + Q_2 + 2q_1 + 5q_2,$$

$$Y_2 = 5Q_1 + Q_2 + 4q_1 + 9q_2$$

ist und auf diese Weise eine lineare Transformation dritten Ranges vorstellt.

Nach der ausgeführten Transformation bekommen wir ein kanonisches System mit der Funktion K :

$$\begin{aligned} 2K = & 217.874.94q_1^2 + 114.874.276q_2^2 - 2.94.874.276q_1q_2 + \\ & + 217.276p_1^2 + 114.94p_2^2 - 2.94.276p_1p_2 + 2.874.276p_1q_2 - \\ & - 2.874.94p_2q_1, \end{aligned}$$

welche auf neue Variablen mittels der Gleichungen (17) transformiert werden muss.

Die oben erwähnten Fälle zeigen deutlich, wie die Theorie der linearen kanonischen Transformationen entwickelt werden kann, auch unter der Bedingung, dass der Rang des Pfaffschen Ausdruckes grösser sei als drei.

Die Wärmeübergangszahl von Kugelflächen bei natürlicher Konvektion

Ing. J. I. SHELL, Assistent a.d. Univ. Beograd

(Vorgelegt in der Sitzung der Akademie der Naturwissenschaften vom 20-V-1937)

Um die Wärmeübergangszahl von Kugelflächen auf die umgebende Luft bei natürlicher Konvektion zu bestimmen, gehen wir von den Grundgleichungen des Wärmeüberganges aus.¹⁾ Zur Lösung dieser Gleichungen nehmen wir nach *E. Schmidt*²⁾ und *K. Jodlbauer*³⁾ an, dass 1.) die Dicke der wärmeübertragender Grenzschicht vernachlässigbar klein gegen die Abmessungen der Kugelfläche ist; 2.) der Druck überall gleich ist, d.h. wir vernachlässigen den Staudruck; und 3.) die räumliche Dehnung im Gliede für die innere Reibung auch vernachlässigbar ist. Auf Grund dieser Vereinfachungen bekommen wir die Grundgleichungen in folgender Form:

$$\frac{\partial v_t}{r_0 \partial \psi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \text{I}$$

¹⁾ *F. Merkel*, Die Wärmeübertragung.

²⁾ *E. Schmidt* und *W. Beckmann*, Das Temperatur und Geschwindigkeitsfeld vor einer wärmeabgebenden senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion. Technische Mechanik und Thermodynamik 1930. S. 341.

³⁾ *K. Jodlbauer*, Das Temperatur und Geschwindigkeitsfeld um ein geheiztes Rohr bei freier Konvektion. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1933. S. 157.

$$\rho \left(v_t \frac{\partial v_t}{r_0 \partial \psi} + v_r \frac{\partial v_t}{\partial r} \right) = \rho \cdot \nu \cdot \frac{\partial^2 v_t}{r_0^2 \partial \psi^2} + g_t \cdot \rho \frac{T_1 - T_0}{T_0} \cdot \theta \quad \text{II}$$

$$v_t \frac{\partial \theta}{r_0 \partial \psi} + v_r \frac{\partial \theta}{\partial r} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \quad \text{III}$$

Dabei bedeutet $r; \psi$ — die Kugelkoordinaten

$v_t; v_r$ — die Geschwindigkeiten der Luft in der Richtung der Koordinaten

r_0 — den Halbmesser der Kugel

ρ — die Dichte der Luft

ν — die kinematische Zähigkeit der Luft

g — die Erdbeschleunigung

$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$ — die relative Übertemperatur

T_1 — die konstante Flächentemperatur ($^{\circ}K$)

T_0 — die Lufttemperatur in grosser Entfernung von der Fläche ($^{\circ}K$)

a — die Temperaturleitfähigkeit der Luft

T — die Lufttemperatur an irgendeiner Stelle ($^{\circ}K$)

Statt dem Auftrieb führen wir den Mittelwert über die Kugelfläche

$$\frac{\int_0^\pi \rho \cdot g \frac{T_1 - T_0}{T_0} \cdot \theta \cdot r_0 \cdot \pi \cdot \sin \psi \cdot r_0 \cdot \sin \psi d\psi}{2r_0^2 \pi} = \rho \cdot g \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_0} \cdot \theta \cdot \frac{\pi}{4}$$

in Gleichung II. ein. Diese lautet

$$\rho \left(v_t \frac{\partial v_t}{r_0 \partial \psi} + v_r \frac{\partial v_t}{\partial r} \right) = \rho \cdot \nu \cdot \frac{\partial^2 v_t}{r_0^2 \cdot \partial \psi^2} + g \cdot \rho \frac{T_1 - T_0}{T_0} \cdot \theta \cdot \frac{\pi}{4} \quad \text{II'}$$

Die Lösung der Gl. I, II' und III nach *E. Pohlhausen*¹⁾ gibt uns

$$\alpha = \lambda(-\vartheta_0') \sqrt[4]{\frac{g \cdot (T_1 - T_0)}{\pi \cdot \nu^2 \cdot T_0 \cdot r_0 \cdot \psi}} \quad \text{1a}$$

¹⁾ Siehe P. 2.

wobei $-\vartheta_0'$ eine Konstante ist, die für Luft

$$-\vartheta_0' = 0,508$$

beträgt. Den Mittelwert der Wärmeübergangszahl über die ganze Kugelfläche bekommen wir aus der Gleichung

$$\alpha_m = \lambda(-\vartheta_0') \sqrt[4]{\frac{g \cdot (T_0 - T_1)}{\pi \cdot \nu^2 \cdot T_0 \cdot r_0}} \cdot \int_0^\pi \frac{r_0^2 \cdot \pi \cdot \sin \psi \cdot d\psi}{\sqrt[4]{\psi}} \cdot \frac{1}{2r_0^2 \pi} \quad 1$$

Der Wert des Integrals wurde graphisch bestimmt (*Abb. 1*)

$$\int_0^\pi \frac{\sin \psi \cdot d\psi}{\sqrt[4]{\psi}} = 1,8733$$

Setzen wir diesen Wert und die entsprechenden Werte für λ ; $(-\vartheta_0')$; g, ν in Gl. 1. ein, bekommen wir für die mittlere Wärmeübergangszahl

$$\alpha_m = 3,5 \sqrt[4]{\frac{T_1 - T_0}{T_0 \cdot r_0}} \quad kcal/m^2 \cdot h \cdot ^\circ C \quad 2$$

Ist $2r_0 = d_0$ der Durchmesser der Kugel und $\rho \cdot \nu = \mu$ die dynamische Zähigkeit der Luft, können wir Gl. 1a in folgender Form schreiben

$$\alpha = \lambda(-\vartheta_0') \sqrt[4]{\frac{g \cdot \rho^2 \cdot (T_1 - T_0) d_0^3 \cdot 2}{\pi \cdot \mu^2 \cdot T_0 d_0^4 \cdot \psi}}$$

Da $\frac{\alpha_m \cdot d_0}{\lambda} = Nu$ — die Nusselt-sche Zahl

und $\frac{g \cdot \rho^2 \cdot (T_1 - T_0) d_0^3}{\mu^2 \cdot T_0} = Gr$ — die Grasshoff-sche Zahl bedeutet, bekommen wir für den Wärmeübergang von der Kugel­fläche auf die umgebende Luft im Falle natürlicher Konvektion die einfache Beziehung, dass

$$Nu = 0,429 Gr^{0,25} \quad 2a$$

Zum Beweise der anfangsgemachten Annahmen wurden α_m bezgw. Nu für verschiedene Temperaturdifferenzen bzw. für verschiedene Gr praktisch bestimmt. Die Versuchen wurden an einer Messingkugel von 100 mm. Durchmesser im Institut für Lokotiv- und Dampfkesselbau an der Universität zu Beograd durchgeführt. Die Kugel wurde im Wasserbad auf cca 60 °C. erwärmt und in einem Raume mit konstanter Temperatur frei aufgehängt. Während der Abkühlung wurde die Aenderung der Oberflächen­temperatur mit der Zeit beobachtet, d.h. die Abkühlungskurve bestimmt. Die Zeit wurde mit einer Stoppuhr, die Temperaturen mit geeichten Quecksilberthermometern von $\pm 0,03$ °C Genauigkeit gemessen. Während der Versuche wurde jede störende Luftströmung aufs peinlichste vermieden. Aus den erhaltenen Abkühlungskurven bekommen wir die gesammte abgegebene Wärmemenge.

$$Q = \frac{df(\tau)}{d\tau} \cdot G_k \cdot C_m \cdot \frac{1}{F}$$

Dabei bedeutet G_k — das Gewicht der Kugel
 C_m — die spezifische Wärme des Messings
 F — die Kugeloberfläche
 $f(\tau)$ — die Abkühlungskurve (Abb. 3)

Da die Kugel Wärme teils durch Strahlung, teils durch direkte Berührung abgibt, müssen wir, um α zu bestimmen, den durch Strahlung übertragenen Wärmeteil Q_s bestimmen. Zur Bestimmung der Strahlungszahl wurde das folgende recht einfache Verfahren entwickelt. Es ist bekannt, dass die Wärmeübergangszahl α , solange die Strömung laminar ist, von der Oberflächenrauig-

keit nicht beeinflusst wird;¹⁾ die Strahlungszahl aber ändert sich mit der Rauigkeit verhältnissmässig stark. Für zwei gleiche Flächen unter den gleichen Bedingungen nur mit verschiedener Rauigkeit hängt die an einen festen Körper durch Strahlung abgegebene Wärmemenge nur von der Strahlungszahl ab. Wir können für die zwei Flächen folgende zwei Gleichungen aufstellen

$$Q_1 - Q_{s1} = Q_1 - Q_{s2} \quad 3$$

und

$$\frac{Q_{s1}}{Q_{s2}} = \frac{C_1}{C_2} \quad 3a$$

Als Wärme durch Strahlung empfangenden festen Körper benutzten wir ein Quecksilberthermometer, das im Abstände von 25 mm. von der (*Abb. 2*) Kugel fixiert wurde. Da es sich ausserhalb der Grenzschicht befand bekam es nur Strahlungswärme. Aus dem selben Grunde zeigte es eine höhere Temperatur an als die der Umgebungsluft. Solange dieser Temperaturunterschied klein ist, kann man schreiben

$$\frac{T_{31} - T_0}{T_{32} - T_0} = \frac{C_1}{C_2},$$

wobei T_0 die absolute Temperatur auf diesem Thermometer ist. Die Oberflächenrauigkeit unserer Kugel änderten wir, da sie ursprünglich glatt war, derart, dass wir eine dünne Schicht Messing durch das bekannte „Spritzverfahren“ auftrugen. Auf diese Weise bekamen wir eine sehr gleichmässig rauhe Oberfläche. Aus den Abkühlungskurven beider Kugel bekamen wir die gesamte abgegebene Wärmemengen Q_1 und Q_2 (*Abb. 4*). Die Temperaturunterschiede $T_{31} - T_0$ bezgw. $T_{32} - T_0$ gaben uns $\frac{C_1}{C_2}$. In unserem

Falle betrug $\frac{C_1}{C_2}$ im (*Abb. 5*) Mittel $\frac{1}{2}$. Ziehen wir also von Q_1 (glatte Kugel) $Q_2 - Q_1$ ab, bekommen wir die Wärmemenge, die durch direkte Berührung an die Umgebungsluft übertragen wurde, für beide Kugel Q_b .

¹⁾ M. ten Bosch, Die Wärmeübertragung S. 123.

Teilen wir die so erhaltene Werte von Q_b durch die entsprechende Temperaturunterschiede $T_1 - T_0$, bekommen wir α_m Kurve 1. Abb. 4 gibt uns die Werte von α_m für verschiedene Temperaturunterschiede bzw. Nu für verschiedene Gr. Kurve 2. Abb. 4 gibt uns die theoretisch nach Gl. 2. und Gl. 2a berechnete Werte für α_m bezgw. Nu . Aus diesen Kurven ist ersichtlich, dass solange die Temperaturunterschiede grösser sind als 10°C bzw. die Grasshoff-sche Zahl grösser ist als $\text{cca } 1,13 \times 10^6$, unsere theoretisch abgeleitete Formel 2 und 2a. gut mit der Erfahrung übereinstimmen. Unter diesen Zahlen sind die Unterschiede grösser, da in diesem Bereich die vereinfachende Annahmen ihre Gültigkeit verlieren.
