Matematički
vidici
broj 9,
2025.

Zoran Lučić

Pitagorejska aritmetika

Mathematical Institute
of the Serbian Academy
of Sciences and Arts

Matematički vidici 9

Zoran Lučić

PITAGOREJSKA ARITMETIKA

Matematički institut SANU

Издавач: Математички институт САНУ, Београд, Кнеза Михаила 36
Серија: Математички видици, књига 9
Рецензенти: Стево Тодорчевић, САНУ; Математички институт САНУ
Предраг Јаничић, Математички факултет
Звонимир Шикић, Центар за логику и теорију одлучивања,
Свеучилиште у Ријеци
Примљено за штампу 04. априла 2024. године,
одлуком Одбора за непериодична издања Математичког института САНУ
За издавача: Стево Тодорчевић, главни уредник серије
Технички уредник: Драган Аћимовић
Штампа: Графичар, Ваљево
Штампање завршено маја 2025.
Издавање ове публикације омогућило је Министарство науке, технолошког развоја и иновација Републике Србије.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

511.1

ЛУЧИЋ, Зоран, 1952–
Pitagorejska aritmetika / Zoran Lučić. – Београд : Математички институт САНУ, 2025 (Ваљево, : Графичар). – 177 str. : graf. prikazi ; 24 cm – (Matematički vidici ; knj. 9)

Tiraž 200. – Библиографија: стр. 173–175. – Регистар.

ISBN 978-86-80593-82-1

a) Aritmetika

COBISS.SR-ID 168127753

Pitagorejska aritmetika

Zoran Lučić

Posvećeno uspomeni na Predraga Vukadinovića,
profesora filozofije i bibliotekara
Prve beogradske gimnazije „Moša Pijade“

Sadržaj

Predgovor

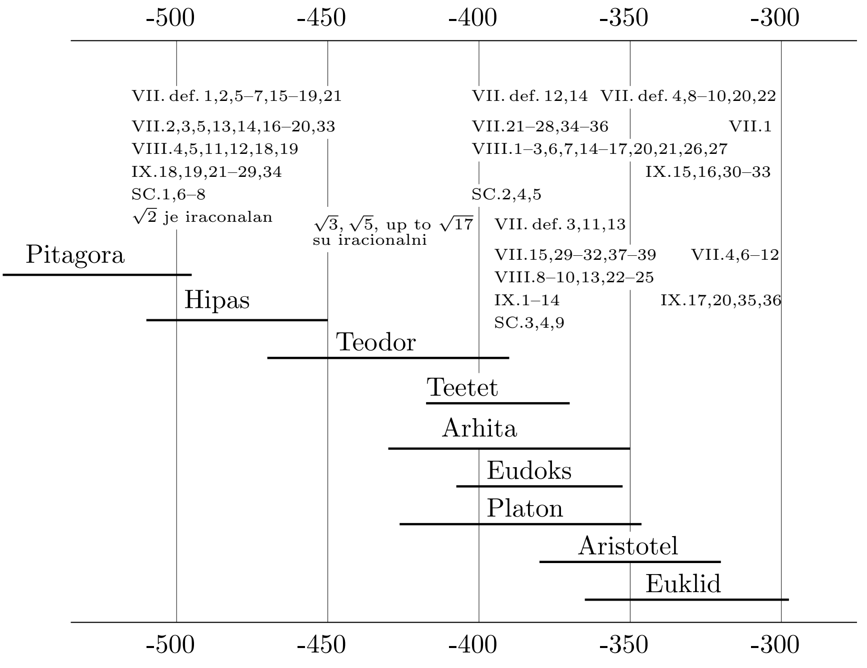
Aritmetika koju nalazimo u Euklidovim *Elementima* nastala je između šestog i četvrtog veka stare ere i u njenom stvaranju, sudeći prema sačuvanim zapisima, učestvovalo je samo nekoliko autora. U kontekstu aritmetičkih otkrića drevni izvori pominju samo Pitagoru i njegove sledbenike: Hipasa, Teodora, Teeteta i Arhitu. Stoga je prikladno njihovu aritmetiku zvati *Pitagorejskom.*

Od tvoraca aritmetike, samo je Hipas bio Pitagorin neposredni učenik i slušalac. Teodor pripada sledećoj generaciji pitagorejaca, Teetet je bio njegov učenik, dok je Arhita bio Teetetov savremenik. U periodu koji deli Arhitu od Euklida moralo je biti napredaka u razvoju aritmetike i oni su se, pod okriljem Platonove Akademije i Aristotelovog Liceja, najverovatnije kretali u smeru njenog logičkog utemeljenja. Sa Euklidom rana aritmetika dobija formu koju nalazimo u aritmetičkim knjigama *Elemenata.*

I u *Kanonskom preseku* u kojem je ukratko izložena pitagorejska harmonijska doktrina, Euklid dokazuje aritmetičke stavove. Među njima ima i onih za koje se sa pouzdanjem može utvrditi ko su njihovi autori. Ima ih i u *Elementima.* U *Kanonskom preseku* to su stavovi SC.1–5, a u *Elementima*, stavovi VIII.8 i VIII.14–17. I vreme njihovog nastanka može se utvrditi sa pouzdanjem. Prema Platonovom svedočenju, stavove VIII.14 i VIII.15 dokazao je mladi Teetet. Njemu pripadaju i stavovi SC.1 i SC.2 budući da je njihova konjunkcija ekvivalent stava VIII.14. Pripada mu i stav VIII.16 koji je ekvivalent stava VIII.14, i stavovi SC.4 i SC.5 čija konjunkcija je ekvivalentna stavu VIII.16. Stav SC.3 Boetije pripisuje Arhiti, a kako dokaz ovog stava u celosti zavisi od VIII.8, i stav VIII.8 je Arhitin.

Neke aritmetičke tvrdnje koje su bile dokazane u vremenima pre Euklida, naizgled nisu našle mesto u *Elementima.* Dobar primer je Teodorovo otkriće da kvadratni korenovi brojeva 3, 5, sve do 17, nisu racionalni. Ni iracionalnost kvadratnog korena broja 2 nije izdvojena i eksplicitno dokazana u *Elementima.* Razlog ovome treba tražiti u prikrivenoj činjenici da su dokazi iracionalnosti ovih brojeva sadržani u dokazu opšteg stava VIII.14.

U knjizi pred vama reč je pre svega o Teodorovim, Teetetovim i Arhitinim aritmetičkim otkrićima. Međutim, njihova otkrića ne bi bila moguća da nije bilo aritmetičkih znanja koja dolaze iz ranijeg perioda. Zato se ova knjiga odnosi i na aritmetiku koja je razvijena u krugu prvih Pitagorinih sledbenika i na moguća Pitagorina dostignuća. Većina iznesenih zaključaka utemeljena je na analizi *materijalnih ostataka* pitagorejske aritmetike u Euklidovom delu. Dobar primer su stavovi VIII.14, SC.1 i SC.2. Zato nije neumesno primetiti da se knjiga pre odnosi na *arheologiju* nego na istoriju aritmetike.



Hronološki redosled ranih autora i Euklidovih
aritmetičkih definicija i stavova

Budući da su neopitagorejci nasledili tradiciju pitagorejstva, u knjizi će biti reči i o njihovoj aritmetici. Međutim, za razliku od aritmetike koju nalazimo aritmetičkim knjigama *Elemenata* u kojima je broj shvaćen apstraktno — kao množina sastavljena od jedinica, neopitagorejska aritmetika je bila utemeljena na geometrijskom predstavljanju brojeva. Ovaj način predstavljanja brojeva geometrijskim likovima — krugovima ili kvadratima, ili još konkretnije, predmetima — morao je biti uobičajen s početka razvoja aritmetike, ali je morao biti odbačen posle Teetetovih otkrića. Budući da su obluci jedini likovi korišćeni u predstavljanju brojeva koje pominju najraniji izvori, ova aritmetika može se nazvati *aritmetikom oblutaka.* U poređenju sa Euklidovom, neopitagorejska aritmetika ostavlja utisak naivnosti. Kako je i rána aritmetika morala biti utemeljena na geometrijskom predstavljanju brojeva, sva je prilika da su neopitagorejci odustali od Euklidovog pristupa aritmetici i prigrlili ranopitagorejsku tradiciju aritmetike oblutaka.

Prvo poglavlje knjige posvećeno je neopitagorejskoj aritmetici, a sledeća četiri odnose se na ranopitagorejsku aritmetiku oblutaka. Razlozi zbog kojih su rani pitagorejci brojeve predstavljali slikama objašnjeni su u drugom poglavlju. Treće poglavlje odnosi se na njihovo razumevanje parnih i neparnih brojeva, četvrto na osnovne aritmetičke operacije na skupu prirodnih brojeva, dok je peto poglavlje posvećeno ranopitagorejskoj teoriji proporcija. Svi stavovi u ovim poglavljima dokazani su upotrebom geometrijskog predstavljanja brojeva na način o kojem nas obaveštavaju ne samo neopitagorejci već i neki rani autori. Međutim, argumenti u dokazima nekih od ovih stavova ne razlikuju se od argumenata koje možemo naći u Euklida. Njegovi argumenti u dokazima nekih aritmetičkih stavova dolaze iz aritmetike oblutaka, a iskazani su jezikom nove aritmetike koja je nasledila ranopitagorejske metode u dokazivanju aritmetičkih stavova. Razume se, mnogi od njegovih stavova imaju dokaze koji se razlikuju od ranopitagorejskih budući da su stavljeni u kontekst nove aritmetike.

Poglavlja 6, 7, 9, 10 i 11 sadrže analizu aritmetičkih knjiga *Elemenata* i u njima je načinjen pregled Euklidovih dokaza stavova sedme, osme i devete knjige. Dokazi su propraćeni njihovim deduktivnim strukturama koje mogu dati odgovore na pitanja o hronološkom redosledu Euklidovih stavova. Razume se, raspored Euklidovih aritmetičkih stavova razlikuje se od njihovog hronološkog redosleda. U analizi Euklidovih aritmetičkih knjiga biće reči o ovim razlikama.

Šesto poglavlje odnosi se na stavove o parnim i neparnim brojevima iz Euklidove devete knjige. Sva je prilika da većina ovih stavova dopire iz najranijeg perioda pitagorejstva ali i među njima ima stavova koji nisu mogli biti dokazani u najranijem periodu već znatno kasnije, najverovatnije u kasnom četvrtom veku stare ere. Njihov autor je mogao biti neko od Euklidovih neposrednih prethodnika ako ne i sam Euklid.

Euklidovi stavovi koji se odnose na osnovne aritmetičke operacije na skupu prirodnih brojeva analizirani su u sedmom poglavlju. Aritmetika je nezamisliva bez dokaza komutativnosti sabiranja i distributivnosti sabiranja brojeva u odnosu na njihov proizvod. Iako su formalni, Euklidovi dokazi ovih stavova u sebi su sačuvali elemente dokaza koji dopiru iz aritmetike oblutaka.

Deveto i deseto poglavlje odnose se na Euklidovu teoriju proporcija. Njegova definicija proporcionalnosti brojeva razlikuje se od antifairetičke definicije koja je bila u upotrebi u ranom periodu pitagorejstva. Potreba da se stara definicija zameni novom nastala je nakon Eudoksovog uvođenja definicije proporcionalnosti veličina koju nalazimo u petoj knjizi *Elemenata*. Pre njega nije bilo potrebe za definicijom proporcionalnosti koja se razlikuje od univerzalne antifairetičke definicije. To je razlog zbog kojeg je osmo poglavlje koje se odnosi na pre-Eudoksovsku teoriju proporcija, smešteno između poglavlja koja se odnose na Euklidovu aritmetiku.

Teetetova aritmetička otkrića analizirana su u jedanaestom poglavlju. Euklid ih je smestio u osmu knjigu *Elemenata*. To su stavovi VIII.14–17. Stav VIII.14 odnosi se na racionalnost i iracionalnost kvadratnih korenova prirodnih brojeva. Stav VIII.15 od njega se dobija kontrapozicijom. Oni su ekvivalentni. Iz istog razloga su ekvivalentni stavovi VIII.15 i VIII.17 koji se odnose na kubne korenove. Da bi ih dokazao, Teetet je morao da odustane of geometrijskog predstavljanja brojeva. Sredstva koja su bila u upotrebi u rešavanju aritmetičkih problema u ranom periodu, nisu bila delotvorna u dubljoj analizi iracionalnosti i nesamerljivosti. Dokazujući stavove VIII.14–17, Teetet je inicirao novi pristup aritmetici, različit od onog koji su imali njegov učitelj Teodor i pitagorejci pre njega. Euklid je prihvatio ovaj novi pristup.

Odnosu pitagorejske aritmetike i njihove muzičke teorije posvećeno je dvanaesto poglavlje koje sadrži kratku analizu Euklidovog *Kanonskog preseka*. Potreba za upotrebom aritmetike u objašnjenju muzičkih fenomena nastala je kao posledica otkriće ranih pitagorejaca da se neki harmonični muzički intervali mogu „objasniti“ odnosima malih prirodnih brojeva. Zato je rana teorija proporcija smatrana delom muzičke teorije. Zaista, Platon je bio konzervativnog mišljenja da se aritmetika odnosi samo na parne i neparne brojeve te da joj teorija proporcija ne pripada. Međutim, već sa Teetetom i Arhitom došlo je do ujedinjavanja ovih dveju disciplina.

U poglavljima 13 i 14 izdvojeni su primeri iracionalnih veličina koji su bili poznati u periodu koji prethodi Teetetu. U trinaestom poglavlju reč je o ranim dokazima postojanja nesamerljivih veličina, a u četrnaestom o Pitagorinom otkriću iracionalnosti kvadratnog korena broja dva, i o Teodorom dokazu da kvadratni korenovi brojeva 3, 5, sve do 17 nisu racionalni. Svi ovi dokazi ostvareni su upotrebom geometrijskih likova u predstavljanju brojeva.

Beograd,
Jul, 2024. Zoran Lučić

POGLAVLJE 1

Poligonski brojevi

Za Euklida, broj *je množina sastavljena od jedinica* (*Elementi*, VII. def. 2). Iako ne kazuje šta je *brojanje*, Euklid često u *Elementima* prebrojava jedinice ispitujući koliko ih je u nekom broju, u nameri da utvrdi koji je to broj. Zato su za njega brojanje i jedinica pojmovi pomoću kojih se objašnjava pojam broja. Oni mu logički prethode.

Za razliku od brojanja, Euklid definiše jedinicu kazujući da je *jedinica ono pomoću čega se svaki predmet koji postoji naziva jedan* (VII. def. 1). Međutim, ako se za svaki predmet može reći da je jedan, onda se svakim iskustvenim predmetom može predstaviti jedinica. Mnoštvom predmeta može biti predstavljen bilo koji broj. Njihovim prebrojavanjem može se utvrditi koji je to broj. Na ovakav način shvaćen pojam broja sadrži u sebi primese konkretnog i iskustvenog. Pre Euklida, pojam broja nije mogao biti shvaćen apstraktnije nego kod Euklida. Naprotiv, morao je biti konkretniji. Brojevi su, s početka, morali biti sasvim konkretni — bili su brojevi stvari.

1.1. Epiharm i Eurit

Iz jedne od Epiharmovih komedija sačuvan je odlomak koji sadrži dijalog dvojice protagonista u kojem se obluci (grčki ψῆφοι — psephoi) pominju kao sredstvo koje se upotrebljava za predstavljanje parnih i neparnih brojeva.[1] Ovaj odlomak je najstarije sačuvano svedočenje o nekoj aritmetičkoj osobini parnih i neparnih brojeva. U njemu jedan od učesnika u dijalogu primećuje da će se dodavanjem jednog oblutka nekoj skupini oblutaka ili njegovim oduzimanjem, parnost broja oblutaka promeniti.[2]

Gledaoci su mogli razumeti Epiharmove reči samo ako je problematika koja se odnosi na parne i neparne brojeve kojom su se u vreme kada je komedija

[1] Epiharm sa Sicilije je najpoznatiji pesnik dorske komedije. Aktivan je na prelazu iz šestog u peti vek stare ere. O njegovom značaju može se suditi prema rečima iz *Teeteta*, 152 e, iz kojih se vidi da je Platon Epiharma smatrao najvećim komediografom. Videti [**15**, str. 338–339].

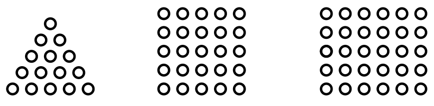
[2] U Epiharmovom odlomku nalazimo sledeći dijalog:

> *A: Pretpostavimo da na jednoj gomili oblutaka koja sadrži paran ili neparan broj dodamo jedan oblutak, ili da oduzmemo jedan od postojećih oblutaka: misliš da će parnost broja oblutaka ostati ista?*
> *B: Bože sačuvaj.*

Diogen Laertije, III.11.

napisana bavili rani pitagorejci,[3] već uveliko izašla iz kruga Pitagorinih sledbenika i postala opštepoznata.[4] Znajući da je Epiharm bio Pitagorin mlađi savremenik,[5] sa pouzdanošću možemo tvrditi da predstavljanje brojeva oblucima u nameri da se odgonetne razlika između parnih i neparnih brojeva, pripada samim pitagorejskim počecima — ako ne drugoj polovini šestog veka, onda svakako prvim decenijama petog veka stare ere.[6]

O predstavljanju brojeva kamenčićima, vek i po kasnije, obaveštava nas i Aristotel. On tvrdi da je pitagorejac Eurit[7] raspoređivao kameničiće u obliku živih bića u nameri da utvrdi koji im se brojevi mogu pridružiti. Tako je, prema Aristotelovim rečima, našao brojeve za čoveka i konja.[8] Aristotel ne kazuje koji su to brojevi[9] ali objašnjava da se Euritov postupak može uporediti sa predstavljanjem brojeva pomoću kamenčića raspoređenih u obliku geometrijskih likova — trouglova i kvadrata, stavljajući nam na znanje da je upotreba oblutaka u predstavljanju trougaonih i kvadratnih brojeva u Euritovo vreme, u drugoj polovini petog veka stare ere, bila već dobro poznata.[10]



Slika 1.1.1. Trougaoni, kvadratni i duguljasti (pravougaoni) brojevi

[3] Ovaj naziv — *rani pitagorejci*, uobičajeno se odnosi na Pitagorine sledbenike koji su bili aktivni do sredine petog veka stare ere.

[4] Videti [**9**, str. 434].

[5] Jamblih kazuje da je Epiharm bio slušalac ali ne i član pitagorejske zajednice (Diels, 23.A4), a Diogen tvrdi da je čak bio i Pitagorin učenik (VIII.78).

[6] O ovome raspravlja i Knor [**29**, str. 135–137].

[7] Eurit je bio Filolajev učenik. Rođen je sredinom petog veka, a bio je aktivan i s početka četvrtog veka. Prema Aristoksenovim rečima, poslednji pitagorejci bili su njegovi učenici (frag. 18). Nije poznato da li je pisao. Videti [**57**, str. 129].

[8] Prema Aristotelovim rečima:

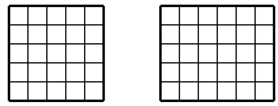
> *Eurit je utvrdio na šta se koji broj odnosi, nalazeći tako izvestan broj za čoveka, a drugi za konja i prikazujući sklop (živih bića, životinja i) biljaka pomoću kamenčića, na isti način kao što se brojevi svode na likove trougla i kvadrata.*

Aristotel, *Metafizika*, 1092 b.

[9] Pseudo-Aleksandar dopunjuje Aristotela kazujući da je 250 broj čoveka, a broj biljke — 360. Diels, 45A3.

[10] Ako su pitagorejci najpre razvili teoriju poligonskih brojeva i zahvaljujući njoj došli do važnih istina o pozitivnim celim brojevima, da bi Eurit kasnije živa bića predstavljao oblucima i tako nalazio brojeve koji im odgovaraju, onda se čini da je sa njime aritmetička teorija nazadovala i primakla se magiji brojeva. Zanimljivo, Arhita je zbog ovog otkrića Eurita smatrao *savršenim i mudrim čovekom.* Videti [**12**, 45.2].

Pored trougaonih i kvadratnih, Aristotel na drugom mestu pominje i brojeve koji, za razliku od kvadratnih, nisu istostrani.[11] Oni se mogu nazvati *pravougaonim brojevima* budući da, kada su predstavljeni oblucima, dobijaju oblik pravougaonika. I Platon, u *Teetetu*, pominje brojeve koji uzimaju kvadratni ili duguljasti (pravougaoni) oblik.[12] Kvadratni brojevi se dobijaju množenjem jednakih faktora, a duguljasti nejednakih. Međutim, za razliku od Eurita, Platonov Teetet u predstavljanju brojeva ne upotrebljava kamenčiće. Njihovu ulogu preuzeli su jedinični kvadrati iz kojih se sastoje geometrijski kvadrati i pravougaonici kojima su ivice celeobrojne.



Slika 1.1.2. Kvadratni broj $5 \cdot 5 = 25$ i duguljasti broj $6 \cdot 5 = 30$

Trougaone brojeve Teetet ne pominje jer njihovo predstavljanje jediničnim kvadratima naizgled nema značaja. Naprotiv, kod predstavljanja prostih brojeva on takođe upotrebljava jedinične kvadrate. Tako su brojevi tri i pet koje pominje

Slika 1.1.3. Duguljasti brojevi tri i pet

Teetet, svrstani u duguljaste brojeve budući da se i oni dobijaju množenjem dvaju nejednakih strana. Razume se, jedna od njih je jedinična. Prvi se sastoji iz triju, a drugi iz pet jediničnih kvadrata.

Isti način geometrijskog predstavljanja kvadratnih brojeva možemo naći i u Platonovom *Menonu*. U čuvenom dijalogu Sokrata i mladog Menonovog roba, u potrazi za kvadratom celobrojne ivice koji je dvostruko veći od kvadrata kojem je ivica dužine dve stope, pored tog kvadrata iskrsavaju i kvadrati kojima su ivice tri ili četiri stope.[13] U razgovoru će se utvrditi da od kvadrata kojem je ivica dve

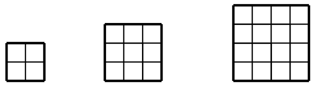
[11] Aristotel kazuje da pored parnosti i neparnosti, prostosti i složenosti, brojevima pripadaju i osobine istostranosti (kvadratnosti) i raznostranosti (pravougaonosti). *Druga analitika*, 73 a 39–40.

[12] Teetet objašnjava da je *brojeve podelio na dve vrste* — kvadratne i pravougaone:

> *Oni brojevi koji mogu da nastanu od množenja dvaju jednakih faktora, a prikazali smo ih likom kvadrata, nazvali smo kvadratnim i istostraničnim. A one brojeve između njih, u koje pripadaju i tri i pet, i svaki broj koji ne može postati od množenja dvaju jednakih faktora, nego nastaje ili od većeg broja pomnoženog sa manjim, ili od manjeg pomnoženog sa većim, i ti brojevi određeni su (kao likovi) uvek jednom većom i jednom manjom stranom, a prikazali smo ih opet duguljastim četvorouglom, tj. pravougaonikom, nazvali smo duguljastim (pravougaonim) brojevima.*

Platon, *Teetet*, 147 e–148 a.

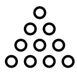
[13] Platon, *Menon*, 82 b–85 b. O ovome će biti više reči u poglavlju 14.



SLIKA 1.1.4. Platon, *Menon*, 82 b–84 a

stope, neće biti dvostruko veći ni kvadrat kojem je ivica tri stope, ni kvadrat ivice četiri stope, a zbog toga i nijedan drugi kvadrat celobrojne ivice.

Budući da su Eurit i Teetet savremenici i da je događanja opisana u *Teetetu* Platon smestio u 399. godinu stare ere — godinu Sokratove smrti, sa sigurnošću možemo tvrditi da predstavljanje kvadratnih i pravougaonih brojeva jediničnim kvadratima koji imaju istu funkciju kao i obluci, pripada najkasnije drugoj polovini petog veka stare ere. To Platon potvrđuje i u *Menonu* opisujući u njemu događaj koji je smešten u drugu polovinu petog veka.



SLIKA 1.1.5. Tetraktis

Ako je verovati Lukijanu,[14] za Pitagoru je broj deset bio savršeni trougao — *tetraktis*, pa bi se upotreba trougaonih brojeva mogla pripisati i Pitagori. U Lukijanovoj satiri *Prodaja života*, u kojoj je Pitagora jedan od likova, na sagovornikovo brojanje — jedan, dva, tri, četiri, Pitagora dodaje:[15]

> *Vidiš, ono što ti misliš da je četiri, zapravo je deset, savršeni trougao i ono u šta se mi zaklinjemo.*

Pored toga što se u svojoj satiri podsmeva Pitagori koji, prema njegovim rečima, smatra da je četiri zapravo broj deset, Lukijan nas uzgred obaveštava da su se Pitagora i njegovi sledbenici zaklinjali u tetraktis.[16] Ako su se pitagorejci zaista u nešto zaklinjali, onda je, čini se, objekat njihove zakletve morao dolaziti od rodonačelnika bratstva.

1.2. Neopitagorejci

I Teofrast, Aristotelov naslednik na mestu upravnika peripatetičke škole, tvrdi da je Eurit *raspoređivao neke kamenčiće* i od njih pravio likove,[17] ali ni kod njega, kao ni kod Aristotela, nema bilo kakvih daljih objašnjenja. Razume se, nema ih ni kod Epiharma, a ni kod Lukijana. Tek u drugom veku nove ere, Lukijanovi

[14] Lukijan je satiričar iz drugog veka nove ere, rođen u Samosati (na gornjem Eufratu), u sirijskoj pokrajini Komageni. Pod njegovim imenom sačuvana su 82 spisa. Videti [**15**, str. 743–745].

[15] Lukijan, *Bion Prasis*, 4. Ovaj Lukijanov dijalog preveden je na hrvatski jezik i nosi naslov *Svjetonazori na dražbi*, Kruzak, Zagreb 2002.

[16] O ovome nas obaveštava i Aetije, doksograf koji živi na prelasku iz prvog u drugi vek. Diels, 58.B15.

[17] Diels, 45.2.

savremenici, neopitagorejci Teon iz Smirne i Nikomah iz Gerase, pisaće o tome kako su od *jedinica* mogle biti pravljene geometrijske slike i kako su one mogle biti temelj za dokazivanje stavova aritmetike. Međutim, brojevi sastavljeni iz jedinica, kojima su se oni bavili, nisu bili samo trougaoni i kvadratni ili pravougaoni, već su mogli biti i *linearni*,[18] a neki su bili *petougaoni* ili *šestougaoni* itd.,[19] u zavisnosti od rasporeda jedinica kojima su predstavljeni. Od njih saznajemo i to kako su ovi *poligonski brojevi* postali pogodno sredstvo u dokazivanju nekih zanimljivih stavova iz teorije brojeva. Doduše, u predstavljanju ovih brojeva oni, kao ni Teetet pre njih, ne koriste oblutke. Oni ne upotrebljavaju ni jedinične kvadrate kao što je činio Teetet, već umesto oblutaka ili kvadrata upotrebljavaju *jedinice* koje obeležavaju slovom α.[20]

1.3. Trougaoni, kvadratni i heteromekički brojevi

I Teon i Nikomah trougaone brojeve grafički predstavljaju raspoređujući jedinice u redove, tako da u prvom redu bude jedna jedinica, u drugom dve, u trećem tri, itd. Od trougaonog oblika koji uzimaju ovako raspoređene jedinice dolazi i ime ovih brojeva. Kako kazuje Nikomah, *trougaoni broj je onaj koji kada se razloži na jedinice dobija oblik trougla*. Međutim, ni jedan ni drugi ne nalaze bolji način da utvrde koliko jedinica učestvuje u njihovoj izgradnji, do da trougaone brojeve poređaju u niz:[21]

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots$$

i time daju odgovor na pitanje koji broj je suma prvih n (prirodnih) brojeva. Funkcionalne veze broja n i sume prvih n brojeva, kod Teona i Nikomaha jednostavno nema. Međutim, ova funkcionalna veza njima je mogla biti poznata jer

$$\begin{array}[b]{c}\alpha\end{array}\quad \begin{array}[b]{c}\alpha\\ \alpha\,\alpha\end{array}\quad \begin{array}[b]{c}\alpha\\ \alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\end{array}\quad \begin{array}[b]{c}\alpha\\ \alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\end{array}\quad \begin{array}[b]{c}\alpha\\ \alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\end{array}\quad \begin{array}[b]{c}\alpha\\ \alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\\ \alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\end{array}$$

SLIKA 1.3.1. Trougaoni brojevi

četiristo godina ranije o njoj piše Arhimed u raspravi *O konoidima i sferoidima*. U lemi koja prethodi prvom stavu njegove rasprave, on nalazi da važi formula prema kojoj je:[22]

$$k + 2k + 3k + \ldots + nk = k\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ovde Arhimed pretpostavlja da je k veličina, a ne broj, tako da je njegova lema u kojoj nalazi parcijalne sume aritmetičke progresije kojoj je k i prvi član i razlika,

---

[18] U ovome se neopitagorejci razlikuju od Teeteta koji, prema Platonovom svedočenju, i linearne brojeve naziva duguljastim.

[19] Nicomachus II, VII–XI, Theon I, XVIII–XXVII.

[20] Kako kazuje Nikomah u *Uvodu u aritmetiku* II, VI.2, Heleni su brojeve obeležavali slovima alfabeta, u skladu sa *običajima i dogovorom ljudi*. Tako su jedinicu obeležavali prvim slovom grčkog alfabeta — α.

[21] Theon I, XIX, Nicomachus II, VIII.

[22] Videti [**24**, str. 105].

opštija i izlazi iz okvira Teonove i Nikomahove aritmetike. U posebnom slučaju, kada se pretpostavi da je $k = 1$, iz ove Arhimedove leme sledi da je suma prvih n pozitivnih celih brojeva jednaka $n(n+1)/2$. Ni Teon ni Nikomah ovu tvrdnju ne dokazuju.

Arhimedov dokaz leme o parcijalnim sumama aritmetičke progresije

$$k, 2k, 3k, \ldots, nk, \ldots$$

počiva na jednostavnoj ideji. Sabira se prvi i poslednji član konačnog niza k, $2k, \ldots, nk$, zatim drugi i pretposlednji itd., i uvek se dobija isti zbir. Zato je parcijalna suma aritmetičke progresije $k \cdot n(n+1)/2$.[23]

Međutim, iako kod Teona nema stava o sumi prvih n brojeva, kod njega nalazimo tvrdnju o sumi uzastopnih neparnih brojeva počev od jedinice, prema kojoj se sabiranjem ovih brojeva dobija kvadratni broj. U nameri da dokaže ovu tvrdnju, najpre postavlja prvu jedinicu. Umesto slovom α, možemo je predstaviti kružićem.[24] Prvoj jedinici Teon dodaje tri jedinice raspoređene u pravougloj shemi koju su Grci nazivali *gnomonom*, da bi dobio kvadratni broj 4. Dodavanjem ovom broju pet jedinica sledećeg gnomona dobija kvadratni broj 9, zatim dodaje sedam jedinica novog gnomona da bi dobio kvadratni broj 16, itd.[25] Time je utvrdio da je

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Teon dokazuje i tvrdnju da je suma konačno mnogo uzastopnih parnih brojeva

a b

Slika 1.3.2. Kvadratni i heteromekički brojevi

počev od broja dva, pravougaoni broj kojem su strane susedni brojevi.[26] Ove brojeve koji su oblika $n(n+1)$ Nikomah naziva *heteromekičkim*.[27] Na isti način kao i u prethodnom dokazu, Teon izdvaja dve susedne jedinice, njima dodaje njima susedne 4 jedinice raspoređene u pravougloj shemi i tako dobija heteromekički broj 6 kojem su strane 2 i 3 (slika 1.3.2). Broju 6 dodaje 6 jedinica nove pravougle sheme i dobija heteromekički broj 12, kojem dodaje 8 jedinica sledeće pravougle sheme, itd. Zato je $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$. Međutim, kako je

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1) = 2(1 + 2 + \cdots + n)$$

[23] Istu ideju iskoristiće i Gaus koji je još kao učenik umeo da sabere prvih 100 pozitivnih celih brojeva. Međutim, Gausov profesor matematike koji je svojim učenicima dao zadatak da saberu brojeve od 1 do 100, morao je znati za Arhimedovo, ili za rešenje ovog problema upotrebom oblutaka. Videti [**8**, str. 202].

[24] To činimo sa jasnom namerom da time sugerišemo upotrebu oblutaka u predstavljanju brojeva (slika 1.3.2), znajući da su tako činili Epiharm i Eurit šeststo godina pre Teona.

[25] Theon I, XIX, XXV.

[26] Theon I, XIX.

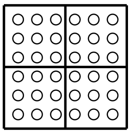
[27] Nicomachus II, XVII.1 i XVIII.2. Videti takođe i [**22**, vol. ii, str. 289] i [**29**, str. 250, f. 72].

svaki pravougaoni broj kojem se jedna strana sastoji iz n, a druga iz i $n+1$ jedinica, jednak je sumi dvaju međusobno jednakih trougaonih brojeva kojima se svaka strana sastoje iz n jedinica. Ovo je, opet, sasvim jednostavno utvrditi na osnovu rasporeda jedinica koje sačinjavaju taj heteromekički broj (slika 1.3.3.a). Zanimljivo je da ni Teon ni Nikomah ne dokazuju ovu osobinu.[28] Za razliku od

Slika 1.3.3. Heteromekički i kvadratni brojevi su sume trougaonih brojeva

njih dvojice, Jamblih pominje da je proizvod $n(n+1)$ jednak sumi dvaju jednakih trougaonih brojeva, ali ovu tvrdnju ni on ne dokazuje.[29] Međutim, i Teon i Nikomah nalaze da je kvadratni broj jednak zbiru dvaju uzastopnih trougaonih brojeva. Na osnovu analize rasporeda jedinica poređanih u skladu sa kvadratnom shemom (slika 1.3.3.b), Teon jednostavno primećuje da će svaki kvadratni broj strane n biti jednak zbiru dvaju uzastopnih trougaonih brojeva.[30] Razume se, ivice jednog od tih dvaju trouglova sastoje se iz n, a drugog iz $n+1$ jedinica. I Nikomah uzgred pominje ovu osobinu,[31] koja se može jednostavno zapisati jezikom formula:

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2.$$



Slika 1.3.4. $(2n)^2 = 4n^2$

Teon na drugom mestu dokazuje još dve zanimljive osobine. Obe se odnose na kvadratne brojeve. Prema prvoj, svaki parni kvadratni broj je deljiv sa četiri, a prema drugoj svaki neparni kvadratni broj koji je umanjen za jedan, takođe je deljiv sa četiri.[32] Prvu od ovih dveju osobina lako je ilustrovati slikom kvadratnog broja predstavljenog oblucima, koji je osama refleksija njegovih strana razložen na četiri jednaka kvadratna broja (slika 1.3.4).[33] I drugu osobinu lako je ilustrovati.

[28] Videti [**29**, str. 150].

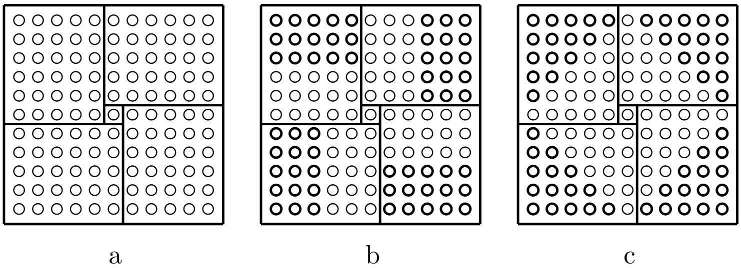
[29] Iamblichus, *In Nicomachi Arithm. Introd. L.*, 86.15.

[30] Theon I, XXVIII.

[31] Nicomachus II, XII.5.

[32] Theon, *Expositio Rerum Mathematicarum*, 35.17.

[33] Ovu osobinu Platon upotrebljava u *Menonu* (83 c) kada broj 16 razlaže na četiri kvadratna broja.



Slika 1.3.5. $(2n+1)^2 - 1 = 8n(n-1)/2$

Zaista, ako se izdvoji jedinica u središtu kvadratnog broja $(2n+1)^2$ predstavljenog oblucima, ostatak se može razložiti na četiri međusobno jednaka heteromekička broja (slika 1.3.5). Njihove strane su susedni brojevi n i $n+1$ pa je zbog toga $(2n+1)^2 - 1 = 4n(n+1)$. Međutim, jedan od dvaju susednih brojeva n i $n+1$ mora biti paran, pa je svaki neparni kvadratni broj koji je umanjen za jedan, deljiv ne samo sa četiri, već i sa osam. Štaviše, deljiv je na osam jednakih trougaonih brojeva. Jamblih iskazuje obrat ovoga stava tvrdeći da je *osmostruki trougaoni broj koji je uvećan za jedinicu, kvadratni broj.* Kasnije će Diofant obratni stav upotrebljavati u svojoj *Aritmetici.*[34] Njega će pomenuti i Plutarh u raspravi o obliku *elemenata* u Platonovom *Timaju.*[35]

Budući da je sám događaj koji je opisan u *Menonu* smešten u drugu polovinu petog veka, dokaz tvrdnje prema kojoj je svaki parni kvadratni broj deljiv sa četiri, prema Platonovoj hronologiji, pripada najkasnije tom vremenu. Kako se i osobina prema kojoj je svaki neparni kvadratni broj koji je umanjen za jedan, deljiv je sa četiri, odnosi na razlaganje kvadratnog broja, i ona najverovatnije dolazi iz istog perioda.[36] Kao što smo već utvrdili, iz nje opet jednostavno sledi da je neparni kvadratni broj koji je umanjen za jedan, deljiv i sa osam. Videćemo da ova osobina, zajedno sa stavovima o parnim i neparnim brojevima koji su svakako bili poznati ranim pitagorejcima, vodi ka dokazu tvrdnje da *kvadratni korenovi brojeva, tri, pet, pa sve do sedamnaest, nisu racionalni*, kao što je, prema Platonovim rečima, umeo da dokaže Teodor.[37] Zato deluje uverljivo hronologija prema kojoj stavovi o razlaganju kvadratnog broja prethode Teodoru, da bi ih on u drugoj polovini petog veka upotrebio nalazeći primere iracionalnih brojeva koje Platon pominje u *Teetetu.* Štaviše, budući da se do dokaza ovih stavova može doći upotrebom oblutaka, nije nemoguće da i oni pripadaju vremenu ranog pitagorejstva — prvoj polovini petog veka stare ere.[38]

[34] Heath, *Diophanus*, str. 196. Videti [**29**, str. 152–153].

[35] Plutarch, *Platonicae Quoaestiones*, *Moralia*, 1003F.

[36] Videti [**29**, pp.152–154].

[37] Platon, *Teetet*, 147 d.

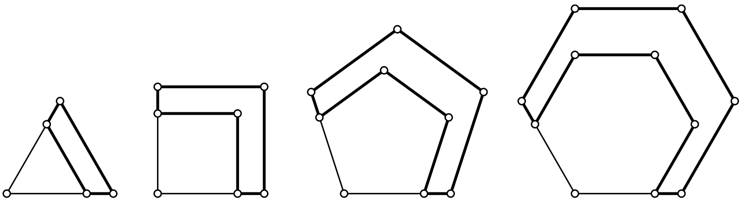
[38] Knor dokazuje da stavovi o neparnim kvadratnim brojevima svakako pripadaju petovekovnoj teoriji parnih i neparnih brojeva. Videti [**29**, str. 152–153].

Ne treba smetnuti s uma da Teon i Nikomah, koji nas obaveštavaju o znanjima koja se odnose na kvadratne i pravougaone brojeve, pripadaju periodu koji je vremenski veoma udaljen od nastanka pitagorejstva. Njih dvojicu od Pitagore deli sedam vekova. Budući da nam oni stavljaju na znanje neke sasvim jednostavne istine o brojevima, kojih nema u Euklidovim *Elementima*, lako možemo pomisliti da je njihova namera bila da nas obaveste o pitagorejskim znanjima koja je Euklid iz nekog razloga izostavio. Razume se, razlog je mogao biti i to što se do ovih znanja dolazi upotrebom oblutaka, a upotreba oblutaka u predstavljanju brojeva u Euklidovo vreme bila je odavno prevaziđena.

1.4. Gnomoni

U nameri da jedinice poređa u skladu sa kvadratnom shemom, Teon najpre postavlja prvu jedinicu, zatim dodaje tri jedinice njenog gnomona i dobija kvadratni broj strane 2, pa pet jedinica sledećeg gnomona da bi dobio kvadratni broj strane 3, onda sedam jedinica novog gnomona itd. (slika 1.3.2).[39] Ovakav, aritmetiči način razumevanja gnomona može se naći već kod Aristotela koji, tumačeći pitagorejsko razumevanje beskonačnog, *gnomone pridodaje oko jedinice*, dobijajući likove koji su s jedne strane uvek različiti (veličinom), a sa druge strane su uvek isti (oblikom).[40]

Na sličan način može se pojam gnomona uvesti i u geometriju, i upravo to čini Aristotel kazujući da *gnomon kada se doda kvadratu, čuva njegov oblik tvoreći veći kvadrat* i dodaje da *isto važi i za sve druge figure takve vrste.*[41] U skladu sa ovom Aristotelovom napomenom, Euklid dopušta da se gnomon dodaje bilo kakvom paralelogramu tako da novodobijena figura opet bude paralelogram sličan polaznom.[42] Stoga možemo govoriti o gnomonima kvadrata i paralelograma, ali i o njihovom uopštenju — gnomonima p-touglova, u skladu sa Aristotelovom napomenom kojom on dopušta i *druge figure takve vrste*.



SLIKA 1.4.1. Gnomoni pravilnih poligona

Za razliku od Aristotela, Teon gnomon definiše aritmetički. Za njega se *svi uzastopni brojevi koji sačinjavaju trougaone, četvorougaone itd., p-tougaone brojeve, nazivaju* gnomonima.[43] On zapravo poligonske brojeve i definiše koristeći

[39] Theon I, XIX, XXV.

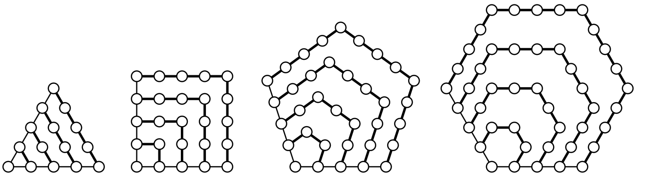
[40] Aristotel, *Fizika*, 203 a 10–15.

[41] Aristotel, *Kategorije* 14 a 15.

[42] Euklid, *Elementi*, II, def. 2.

[43] Theon I, XXIII.

pojam gnomona. Broj naziva *trougaonim* ako njegova izgradnja započinje jedinicom, a zatim se dodaju gnomoni — uzastopni brojevi počev od broja 2. Naziva ga *kvadratnim* ako su gnomoni dodati jedinici uzastopni neparni brojevi; *duguljastim* tj. *pravougaonim* ili *heteromekičkim* ako započinje dvojkom, a dodati gnomoni su uzastopni parni brojevi počev od broja 4; *petougaonim* ako započinje jedinicom, a gnomoni su mu uzastopni brojevi koji su, kada se umanje za 1, deljivi sa 3; *šestougaonim* ako su, kada se umanje za 1, deljivi sa 4 itd.[44] Međutim, on ne oseća potrebu da dokaže ekvivalentnost dveju definicija poligonskih brojeva: prethodne, koja podrazumeva dodavanje gnomona, i one koja ih razumeva kao jedinice raspoređene tako da čine pravilne poligone.[45]



Slika 1.4.2. Poligonski brojevi i njihovi gnomoni

Redosleded gnomona pojedinih poligonskih brojeva Teon prosto prikazuje kao brojne nizove. Tako su gnomoni trougaonih brojeva poređani u niz prirodnih brojeva, kvadratnih u niz neparnih brojeva, petougaonih u niz 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19,... šestougaonih u niz 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25,... itd.[46] Dakle, gnomoni p-tougaonog broja kojem su strane dužine n (tj. sastoje se iz n jedinica) su, redom, brojevi $1, 1+(p-2), 1+2(p-2), \dots, 1+(n-1)(p-2)$. Oni su članovi aritmetičkih progresija kojima su prvi članovi uvek broj 1, a razlike su, redom, $1, 2, 3, \dots,$ itd. Brojeve jedinica u gnomonima nekog p-tougaonog broja Jamblih će upotrebiti u nameri da izračuna broj jedinica iz kojih se taj p-tougaoni broj sastoji.

1.5. Aritmetičke progresije

U *Uvodu u aritmetiku* Nikomah objašnjava kako treba razumeti p-tougaone brojeve ako nam je namera da sabiramo njihove gnomone ili, savremenim rečnikom rečeno, parcijalne sume aritmetičkih progresija:[47]

> *Dva uzastopna trougaona broja kada se sastave sačiniće kvadrat i svaki kvadrat moguće je podeliti u dva trougla. Opet, ako se trougao doda kvadratu dobiće se petougao, ... Na isti način, kada se petouglu doda odgovarajući trougao dobiće se šestougao, a trougao povezan sa njime daće sedmougao, zatim osmougao i tako do u beskonačnost.*

[44] Theon I, XXIII–XXVII.

[45] Ovaj nedostatak popravlja Knor rekonstrukcijom dokaza ekvivalentnosti ovih dveju definicija. Videti [**29**, str. 148–150].

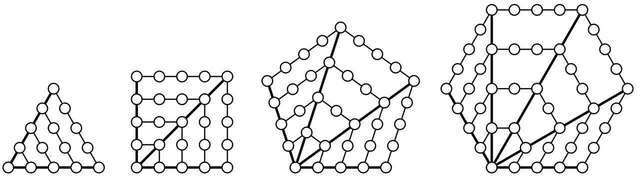
[46] Theon I, XXIII–XXVII.

[47] Videti [**52**, vol. I, str. 95–97] ili [**43**, str. 835].

U nameri da istakne koji se brojevi dobijaju prethodnim postupkom sabiranja gnomona, Nikomah sačinjava tabelu:

Trouglovi	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Kvadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Petouglovi	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Šestouglovi	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Sedmouglovi	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

u kojoj su parcijalne sume aritmetičkih progresija koje, redom, odgovaraju trougaonim, kvadratnim, petougaonim, šestougaonim i sedmougaonim brojevima.[48] Nije teško primetiti pravilo po kojem su raspoređeni brojevi u prethodnoj tabeli. Zaista, bilo koji broj u tabeli je suma broja koji je odmah iznad njega u istom stupcu i trougaonog broja iz prethodnog stupca.



Slika 1.5.1. Razlaganje poligonskih brojeva na trougaone

Za razliku od Nikomaha koji poligonske brojeve svrstava u tabelu u nameri da utvrdi koji su to brojevi, Jamblih pokušava da nađe način ili, savremenim rečnikom kazano, *formulu* kojom će obuhvatiti sve p-tougaone brojeve, a time i sume svih aritmetičkih progresija.[49] On dijagonalama koje izviru iz jednog temena razlaže p-tougaoni broj na trougaone. Tako se kvadratni broj razlaže na dva trougaona broja, petougaoni broj se razlaže na tri trougaona broja, itd., tako da, prema njegovim rečima, *jedan prelazi u trougao, dva u kvadrat, tri u petougao itd.* Prema Jamblihovoj računici, prvi gnomon koji se dodaje jedinici iz koje izviru dijagonale, sastojaće se iz $1 + (p-2)$ jedinica, sledeći gnomon će se sastojati iz $1 + 2(p-2)$ jedinica itd., tako da će se, na posletku, dobiti gnomon sa $1+(n-1)(p-2)$ jedinica.

[48] Nicomachus II, XII.

[49] U komentarima Nikomahovog *Uvoda u aritmetiku* Jamblih objašnjava:

> *Sada, kada predstavimo poligone slikom, dve strane uvek ostaju na svom mestu samo se produžavaju dok se strane koje su njima zahvaćene menjaju neprekidno kada im se okolo dodaju gnomoni, jedan prelazi u trougao, dva u kvadrat, tri u petougao itd. do beskonačnosti, razlika oznaka poligona i broja strana menja se za dva.*

Videti [**52**, vol. I, str. 99].

Zato će, savremenim rečnikom formula iskazano, p-tougaoni broj kojem se svaka strana sastoje iz n jedinica, biti:

$$\begin{aligned}\sigma(p,n) &= 1 + 1 + (p-2) + 1 + 2(p-2) + \cdots + 1 + (n-1)(p-2)\\ &= n + (1 + 2 + \cdots + (n-1))(p-2)\\ &= n + \frac{n(n-1)}{2}(p-2).\end{aligned}$$

On će biti i n-ta parcijalna suma aritmetičke progresije kojoj je prvi član jedinica, a razlika $p-2$.

POGLAVLJE 2

Aritmetika oblutaka

Neopitagorejsko umeće manipulisanja jedinicama-oblucima u cilju rešavanja aritmetičkih problema, počiva na sasvim jednostavnom načinu predstavljanja brojeva, a ipak je veoma domišljato. Sama jednostavnost ovog načina upućuje na mogućnost da dolazi iz najranijeg perioda pitagorejske matematike. Razume se, mi ne možemo znati kojem vremenu pripadaju dokazi aritmetičkih stavova koje nalazimo u spisima neopitagorejaca jer prosto o tome nije sačuvano dovoljno pisanih podataka. Međutim, imajući u vidu elementarnost metode kojom ih Teon, Nikomah i Jamblih dokazuju i znajući da na ovu metodu utemeljenu na upotrebi oblutaka upućuju Epiharm u sačuvanom dijalogu i Aristotel u odlomku o Euritu, savim je moguće da, ako ne svi, onda bar neki od ovih dokaza, a pre svega oni najjednostavniji, dolaze iz najranijeg pitagorejskog perioda. Nije isključeno da je i sam Pitagora mogao znati neke od njih.

2.1. Aritmetika je tačnija od geometrije

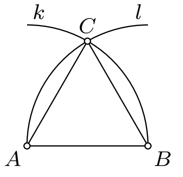
U nameri da dokučimo kojim redosledom je napredovala rána pitagorejska aritmetika, putokaz nam mogu biti aritmetičke knjige Euklidovih *Elemenata* jer moraju sadržati i dostignuća koja pripadaju ranim pitagorejcima. Međutim, sudeći prema sadržaju Euklidovih knjiga VII–IX i prema načinu na koji se u njima dokazuju pojedini stavovi,[1] isključeno je da ih je Euklid, u celosti ili u delovima, u izvornom obliku samo preuzeo od ranih pitagorejaca. Neki od Euklidovih dokaza veoma su kompleksni i malo je verovatno da dopiru iz vremena mnogo pre Euklida.[2] Mnogi od njih su indirektni, a izgleda da je u najranijem periodu indirektna metoda bila korišćena samo ako se do kontradikcije moglo doći u jednom jedinom koraku.[3] Međutim, svi stavovi aritmetičkih knjiga, pa i oni najjednostavniji za koje se sa pravom može pretpostaviti da dolaze iz vremena kada je nastajala aritmetika, u *Elementima* imaju dokaze koji ne samo da nisu očigledni, već njihovo razumevanje zahteva visok nivo apstrakcije. Zato se čini nemogućim da Euklidovi dokazi aritmetičkih stavova dopiru iz perioda ranog pitagorejstva.

[1] Videti [**48**, str. 99–109].

[2] Proklo tvrdi da je Euklid sastavio *Elemente neoborivo pokazujući stvari koje su njegovi prethodnici samo labavo dokazali* (Proclus, 68.11).

[3] Dobar primer su dokazi stavova IX.30 i IX.31 za koje se sa pravom pretpostavlja da pripadaju ranim pitagorejcima kao što dokazuje Beker [**6**]. Oni su u *Elementima* eksplicitno indirektni, iako se do njih moglo doći i prostom analizom, bez upotrebe indirektne metode. Videti odeljak 6.2.

Izvorni dokazi pojedinih stavova koje nalazimo u aritmetičkim knjigama *Elemenata* morali su biti različiti od Euklidovih. Morali su da budu očigledni, jer jedini čvrst oslonac na kojem su Grci s početka mogli graditi aritmetiku nije dolazio od aksioma ili kakvih već utvrđenih načela i dokazanih istina, već od uverljivosti slike. Uostalom, i Euklidova geometrija koja počiva na postulatima i aksiomama u mnogome zahteva i pozivanje na očiglednost, jer pretpostavke na kojima je izgrađena nisu dovoljne. Tako već u dokazu stava I.1 u kojem konstruiše pravilni trougao ABC, Euklid uzima zdravo-za-gotovo da dva kruga $k(A, AB)$ i $l(B, BA)$ koji imaju tačaka jedan unutar drugog, imaju i neprazan presek. Ovaj nedostatak Euklidovog dokaza koji je uočen tek u devetnaestom veku,[4] nadomešćuje slika koja jasno sugeriše da se krugovi k i l seku u tački C (slika 2.1.1). U svom dokazu stava I.1 Euklid pored slike ipak ima još jedno uporište — prvi i treći postulat na koje se poziva. U njegovoj aritmetici takvog uporišta prosto nema.



Slika 2.1.1. *Elementi* I.1

Da nisu ilustrovani slikama, dokaze Euklidovih geometrijskih stavova bilo bi teško, ako ne i nemoguće, pratiti. Pre Euklida uloga slika u dokazima geometrijskih stavova nije mogla biti manja nego u Euklida. Naprotiv, bila je veća, a s početka razvoja geometrije slika je bila sám dokaz. Dokazivanje je tada moralo biti samo sinonim za uočavanje. Slika je u tome imala ključnu ulogu.[5] Kao što su u dokazima najstarijih geometrijskih teorema slike bile od presudnog značaja za njihovo razumevanje jer drugih argumenata i nije bilo, isto tako su i najstariji aritmetički dokazi morali počivati na očiglednosti slika kojima su bili ilustrovani.

Međutim, u aritmetičkim knjigama *Elemenata* brojevi nisu predstavljeni jedinicama-oblucima, već dužima. Nema sumnje da je ovaj način bio uobičajen u Euklidovo vreme. I kvadrati brojeva i njihovi proizvodi u *Elementima* su predstavljeni dužima, a ne geometrijskim kvadratima ili pravougaonicima. Zato slike kojima su ilustrovani stavovi aritmetičkih knjiga ne stavljaju *očigledno* na znanje da su tvrdnje iskazane u njima istinite. Budući da se u pojedinim stavovima nije pozvao ni na jedan prethodni stav, i ni na jednu aksiomu ili postulat, već samo na definicije,[6] Euklid je u njihovim dokazima možda mogao da računa na uverljivost slika na isti način na koji je to činio u dokazima pojedinih geometrijskih stavova. Međutim, on nikada u dokazima aritmetičkih stavova ne upotrebljava sugestivnu snagu slike premda bi time njegovi dokazi dobili na uverljivosti.

[4] Videti [**33**, str. 12].

[5] Uostalom, kao što je Naber primetio, grčka reč *theorema* (θεώρημα) vodi poreklo od glagola *theoreo* (θεωρέω) — gledati, motriti [**54**, str. 31].

[6] Primer tome je stav VII.5 o kojem će biti više reči u odeljku 7.1.

Da je svoje aritmetičke stavove ilustrovao slikama na kojima su brojevi predstavljeni oblucima, mnogi njegovi dokazi postali bi očigledno istiniti.[7] Ovako, oni to nisu! Međutim, izgleda da je zbog toga aritmetika stekla nekakvu prednost nad geometrijom. Prema Aristotelovom shvatanju, *najopštija znanja ljudima je teže steći jer su ona najudaljenija od čulnih zapažanja.* Štaviše, budući da su *najtačnija znanja ona koja su najviše znanja o načelima,* prema njegovom mišljenju

> *aritmetika je ... tačnija od geometrije.*[8]

Iako geometrija polazi od *složenijih načela*, prema Aristotelovom mišljenju ona je ipak manje tačna od aritmetike čija su načela *apstraktnija* zbog njihove veće udaljenosti od čulnih opažanja.

Razlozi za ovo Aristotelovo stanovište vidljivi su u Euklidovim *Elementima* pre svega kroz ulogu slika u dokazima aritmetičkih i geometrijskih stavova. Bliskost Euklidove geometrije sa čulnim opažanjima dolazi upravo od upotrebe slika u dokazima geometrijskih stavova. Doduše, i u aritmetičkim knjigama dokazi su ilustrovani slikama. Na njima su duži koje predstavljaju brojeve. Slike na kojima je nekoliko paralelnih, različito obeleženih duži ponavljaju se iz stava u stav, pa uverljivost aritmetičkih dokaza ne može biti posledica njihovog sugestivnog dejstva, jer njega prosto nema, već dolazi samo od argumenata koje Euklid upotrebljava. Međutim, i ovi njegovi argumenti su manjkavi jer ne počivaju na aksiomama i postulatima kao što je slučaj sa geometrijskim stavovima. Da su i aritmetički stavovi propraćeni slikama koje imaju sugestivno dejstvo njihovi dokazi bi bili ubedljiviji. Doduše, time bi se aritmetička znanja približila čulnim opažanjima pa bi, u skladu sa Aristotelovim kriterijumom, aritmetika postala podjednako tačna kao i geometrija. Ovako, ona je „*tačnija*“.

U Aristotelovo vreme već se bilo odustalo od predstavljanja brojeva oblucima. Umesto oblucima, brojevi su u drugoj polovini četvrtog veka predstavljani geometrijskim dužima, onako kako to čini Euklid u *Elementima.* Time je predstava o brojevima koja je stečena upotrebom oblutaka ipak bila unapređena. Dokazi su izgubili očiglednost, ali se dobilo na opštosti. Primetimo da su ilustracije oblucima imale i jedan ozbiljan nedostatak: oblucima se ne može predstaviti bilo koji broj, već samo neki konkretan broj. Naprotiv, ako se broj ilustruje geometrijskom duži kraj koje se stavi oznaka N, dolazi se do višeg stepena apstrakcije u predstavljanju broja, jer ta duž predstavlja bilo koji broj N. Upotreba oblutaka ovakvu mogućnost sputava.

Sudeći prema Aristotelovoj opasci da su aritmetička načela apstraktnija od geometrijskih, upotreba slika u aritmetičkim dokazima već je bila izgubila značaj u njegovo vreme. Ranopitagorejska aritmetika bila je već prekrojena u ruho koje je u manjoj ili većoj meri preuzeo Euklid u aritmetičkim knjigama *Elemenata.* Ovo prekrajanje bilo je neminovnost posle velikih matematičkih otkrića petog i četvrtog veka koja su došla sa Teetetom, Arhitom i Eudoksom.[9] Upotreba oblutaka

---

[7] Dobar primer ovome su dokazi stavova VII.1 i VII.2 o kojima će više reči biti u odeljcima 4.4 i 9.2.

[8] Aristotel, *Metafizika*, 982 a.

[9] O značaju njihovih aritmetičkih otkrića videti [**57**, str. 129,265]. O njihovoj mnogostranosti videti [**14**, str. 44–45, 164–165].

u dokazima aritmetičkih stavova prosto je postala prevaziđena i nepotrebna. Time se aritmetika udaljila od čulnih opažanja. Obluci su zaboravljeni, a aritmetika je postala apstraktnija od geometrije.

2.2. Kako je mogla izgledati rána aritmetika?

Pre nego što je aritmetika postala apstraktnija od geometrije, aritmetička i geometrijska znanja morala su biti podjednako bliska čulnim opažanjima. I jedna i druga disciplina morale su upotrebljavati očigledna sredstva. U geometriji to su bile slike. One su to i nastavile da budu. U aritmetici to su mogli biti obluci. Razume se, to su mogli biti i neki njihovi surogati — jedinice obeležene slovom α, kružići, jedinični kvadrati ili nešto treće. Svejedno, prva aritmetika morala je biti očigledna, a kako su obluci jedino očigledno sredstvo koje pominje najranija literatura, ovu aritmetiku ranih pitagorejaca možemo zvati *aritmetikom oblutaka.* Ostaje pitanje šta je mogao biti njen sadržaj.

Ako su temeljni aritmetički stavovi o parnim i neparnim brojevima iz devete knjige *Elemenata*, zatim stavovi o komutativnosti množenja i distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje, a onda i stavovi o največoj zajedničkoj meri i osnovni stavovi koji se odnose na proporcije, bili poznati ranim pitagorejcima kao što se može zaključiti iz sačuvanih izvora,[10] onda se do njihovih prvih dokaza moralo doći upotrebom nekog očiglednog sredstva kao što su obluci, tako da je iz njihovog rasporeda jasno slede njihovi dokazi. Iako Euklidove aritmetičke knjige ne daju sliku o načinu na koji je ranopitagorejska teorija brojeva mogla biti utemeljena, u njima se ipak mogu naći tragovi koji dolaze iz najranijeg perioda razvoja aritmetike. Štaviše, i geometrijske knjige sadrže tragove koji vode do stavova iz aritmetike oblutaka, budući da pojedini geometrijski stavovi, posebno iz druge i šeste knjige *Elemenata* koji se odnose na duži, mogu dobiti aritmetički smisao ako su te duži celobrojne.[11] Stoga ćemo uputstvo za razumevanje kako se s početka razvijala aritmetika potražiti u sedmoj, osmoj i devetoj knjizi *Elemenata*, ali i u geometrijskim knjigama takođe.

U nameri da odgonetnemo kako je mogla izgledati ranopitagorejska aritmetika parnih i neparnih brojeva i teorija proporcija i neprekidnih proporcija, pokušaćemo najpre samo upotrebom oblutaka da definišemo osnovne pojmove i izvedemo prve stavove Euklidove aritmetike, da bismo posle toga potražili dokaze da je aritmetika oblutaka prirodni okvir iz kojeg je iznikla ova Euklidova teorija. Razume se, uputstvo za razumevanje kako su mogli izgledati najstariji dokazi pojedinih stavova aritmetike uvek ćemo pokušati da nađemo najpre u Euklidovom delu, ali i u delima drugih autora, pre svega iz petog i četvrtog veka stare ere.

Započećemo sa definicijama.

---

[10] Epiharm nas u sačuvanom fragmentu (Diogen, III.11) obaveštava o par-nepar aritmetici u najranijem periodu, Aristotel (*Topika*, 158 b) o definiciji proporcije koja je upotrebljavana pre Eudoksove, a Nikomah (II, XXII.1) o proporcijama koje su bile poznate Pitagori.

[11] Dobar primer su stavovi VI.14 i VI.23 o kojima će biti reči u odeljcima 5.3 i 5.4, ali i stavovi II.3, II.4, II.5 i II.6. Štaviše, geometrijske stavove II.3 i II.4 Euklid u dokazu stava IX.15 upotrebljava kao da su aritmetički. Videti odeljak 10.8.

2.3. Definicije

Pojam *jedinice* Euklid u matematiku uvodi nejasnom definicijom VII. def. 1 prema kojoj

> jedinica *je ono pomoću čega se svaki predmet koji postoji naziva jedan.*

Razume se, kao ni geometrijske definicije s početka prve knjige *Elemenata*, tako ni prva definicija sedme knjige nije stroga definicija već samo kratko objašnjenje koje u svesti čitaoca treba da stvori intuitivnu predstavu. Euklidov pojam jedinice u sebi sadrži relikt konkretnog budući da se, prema njegovom objašnjenju, svaki pojedinačni iskustveni predmet može nazvati jednim. Zbog toga je svaki predmet mogao da predstavlja jedinicu. Imajući na umu Epiharmovu opasku, s pouzdanjem možemo tvrditi da je s početka to bio oblutak.

Prema drugoj definiciji sedme knjige,

> broj *je množina sastavljena od jedinica.*

Zato je *jedinica* sasvim posebna. Ona nije broj. Brojevi su *dva*, *tri*, *četiri*,...

Jedinica ni za pitagorejce nije bila broj. Prema Aristotelovom svedočenju, ona je za njih bila *ishodište brojeva* budući da se svaki broj sastoji iz jedinica.[12] Moguće ga je predstaviti mnoštvom oblutaka u kojem je onoliko oblutaka koliko je jedinica u tom broju.[13] Ako učinimo isto i sa m oblutaka predstavimo broj m, tada je sasvim jednostavno definisati sabiranje i oduzimanje brojeva. Zaista, dodavanjem oblutaka kojima je predstavljen broj n, oblucima kojima je predstavljen broj m, dobija se nova skupina oblutaka. Broj oblutaka iz kojih se ona sastoji je *zbir* $m+n$ brojeva (*sabiraka*) m i n. Koji je to broj lako je saznati prebrojavanjem oblutaka. Razume se, sasvim je nevažno koji od dveju skupina oblutaka dodajemo drugoj te je $m+n = n+m$. Ako se iz skupine koja se sastoji iz m oblutaka isključi n oblutaka,[14] dobija se nova skupina koja se sastoji iz $m - n$ oblutaka — *razlike* brojeva m i n.

Euklid ne definiše ni zbir ni razliku brojeva jer očigledno smatra da su ovi pojmovi sami po sebi jasni. Iz istog razloga on ne oseća potrebu da dokaže da je sabiranje brojeva komutativna operacija. Naprotiv, množenje brojeva Euklid definiše, i u stavu VII.16 dokazuje komutativnost množenja.

Pojam *množenja* on uvodi definicijom VII. def. 16, kazujući da se *jedan broj* množi *drugim brojem kad se prvi broj uzima kao sabirak onoliko puta koliko je jedinica u drugom broju.* Dakle, u *proizvodu* mn brojeva m i n činioci imaju različite uloge. Prvi kazuje šta se uzima, a drugi, koliko puta se uzima. I ova definicija jasno pokazuje da Euklidovi brojevi u sebi još uvek nose relikt konkretnog. Ako oblucima predstavimo jedinice kojih je m u prvom broju i ako se taj broj uzme n puta (koliko ima jedinica u drugom broju), onda se raspoređivanjem oblutaka duž

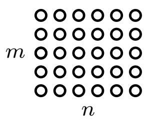
[12] Za pitagorejce *broj proističe iz pojma jedan.* Aristotel, *Metafizika*, 986 a. Prema Boetijevom pisanju ni za Arhitu jedinica nije bila broj. Diels, 47.A19.

[13] Ovaj atavizam prebrojavanja jedinica u nekom broju sačuvan je i u *Elementima.* Euklid prebrojava koliko ima jedinica u nekom broju najpre u definiciji VII. def. 16 kojom u aritmetiku uvodi pojam proizvoda dvaju brojeva, a zatim i u stavovima VII.16, VII.17, VII.21, VII.30, VIII.20, IX.7, IX.28, IX.29.

[14] Razume se, broj n mora biti manji od broja m.

n paralelnih linija od kojih svaka sadrži m oblutaka, dobija kvadratni ili pravougaoni broj, u zavisnosti od toga da li su brojevi m i n jednaki, ili nisu. Jedna *strana* ovog broja se sastoji iz m, a druga iz n oblutaka.

U skladu sa ovom slikom, Euklid definiše pojam *površinskog broja* kazujući da se on dobija kao *rezultat množenja dvaju brojeva* koji se nazivaju *stranama* (VII. def. 17). Razume se, i pojam strane dolazi iz vremena u kojem su brojevi bili konkretni, predstavljeni oblucima. Ako su strane jednake, broj je *kvadratni* (VII. def. 19). Ako nisu, onda je, u skladu sa Teetetovom definicijom koja razlikuje pravougaone i kvadratne brojeve, *pravougaoni*.[15] Euklid ne definiše pravougaone brojeve, već jednim imenom — *površinski broj* — naziva i pravougaone i kvadratne brojeve. U analogiji sa definicijama površinskih i kvadratnih brojeva, Euklid definiše i zapreminske i kubne brojeve (VII. def. 18 i VII. def. 20).



Slika 2.3.1. Površinski broj mn

Pojmove *prostog* i *složenog* broja Euklid uvodi definicijama VII. def. 12 i VII. def. 14. Budući da je, prema Euklidovoj definiciji, broj *složen* ako je deljiv nekim brojem, on će biti jednak proizvodu dvaju brojeva pa je, stoga, svaki složeni broj — površinski. Međutim, nije svaki broj površinski jer se neki brojevi ne mogu predstaviti kao proizvod dvaju brojeva. Oni su *prosti* i mogu biti predstavljeni linearno raspoređenim oblucima.[16] Upravo to primećuje Timarida[17] kada tvrdi da prosti brojevi mogu biti samo *linearni* — predstavljeni oblucima koji su poređani jedan pored drugog duž neke prave linije.[18] Razume se, budući da se svaki broj može predstaviti oblucima poređanim duž neke prave linije, svaki broj može biti *linearan*. Međutim, ono po čemu se prosti brojevi razlikuju od ostalih brojeva je ekskluzivnost njihovog linearnog predstavljanja.

Slika 2.3.2. Linearni brojevi — 2, 3, 5

Međusobno proste brojeve Euklid uvodi definicijom VII. def. 13 prema kojoj su brojevi p i q *međusobno prosti* ako ne postoji njihova *zajednička mera* — broj m koji ih deli. Zato p i q ne mogu biti dva površinska broja takva da je jedna strana

[15] Platon, *Teetet*, 147 e–148 a.

[16] Sudeći prema tome što u pravougaone broje svrstava i 3 i 5, Teetet ne izdvaja linearne brojeve u posebnu kategoriju. Platon, *Teetet*, 148 a.

[17] Za pitagorejca Timaridu se ne zna pouzdano kojem vremenu pripada. Jamblih ga u nekoliko navrata pominje u *Pitagorinom životu*, ali su njegovi izveštaji neusklađeni, čak kontradiktorni. Videti [**57**, str. 130–131].

[18] Videti [**52**, vol. I, str. 87].

jednog od njih jednaka bilo kojoj strani drugog. Ako, naprotiv, dva broja imaju istu stranu m, ona će biti njihova zajednička mera. Razume se, između konačno mnogo brojeva koji dele brojeve p i q postoji jedan koji je najveći. On je njihova *najveća zajednička mera*. Budući da su sasvim jednostavni za razumevanje, pojmove zajedničke mere i najveće zajedničke mere Euklid ne definiše, ali dokazuje njihovo postojanje u stavovima VII.1 i VII.2. Primetimo da svi pojmovi koji su uvedeni prethodnim definicijama u sebi sadrže ostatke aritmetike koja je zadržala primese konkretnog i iskustvenog. Iako je već u četvrtom veku aritmetika postala apstraktnija od geometrije kao što primećuje Aristotel, Euklidove aritmetičke definicije u sebi ipak sadrže ovakve primese. Razume se, njegova aritmetika je morala nastati na temeljima starije aritmetike koja nije bila logički sređena kao njegova. U ovoj, starijoj aritmetici, do dokaza koji su morali da budu očigledni, dolazilo se upotrebom oblutaka ili kakvih drugih iskustvenih predmeta kojima su predstavljani brojevi. Zato se postavlja pitanje koje Euklidove aritmetičke tvrdnje je moguće dokazati samo upotrebom oblutaka budući da takvi dokazi mogu pripadati ranom periodu razvoja aritmetike.

U narednim trima poglavljima pokušaćemo da odgovorimo na ovo pitanje, da bismo posle toga, u poglavljima koja slede, našli i potvrdu da su ovi dokazi do kojih se dolazi samo upotrebom oblutaka, u Euklidovim *Elementima* pretočeni u ruho jedne nove, apstraktne aritmetike u kojoj je delom ipak sačuvana izvorna logička struktura dokaza koji dolaze iz najranijeg perioda razvoja grčke aritmetike.

POGLAVLJE 3

Parni i neparni brojevi u aritmetici oblutaka

Najstarije sačuvane definicije *parnih* i *neparnih* brojeva u sebi sadrže relikt konkretnog pa zbog toga sa pouzdanošću možemo tvrditi da pripadaju ranoj aritmetici. Zaista, Aristotel objašnjava da pitagorejci *jedinicu stavljaju kao sredinu u neparnom*,[1] i smatraju da broj 3 ima početak, sredinu i kraj.[2]

SLIKA 3.0.1. Broj 3

Ovo stanovište potvrđuje i Aristoksen.[3] Kada u raspravi *O aritmetici* objašnjava kakva je razlika između parnih i neparnih brojeva, on primećuje da podelom neparnog broja na jednake delove u sredini ostaje jedinica, a parnog — prazno polje.[4] Ako je jedinica ostala u sredini, onda su ostale jedinice sa njenih dveju strana, tako da se, prema njegovom shvatanju, svaki broj, bio paran ili neparan, može predstaviti kao linearno uređeni skup oblutaka.[5] Zato, ako (linearni) broj ima srednji član — oblutak u sredini, on je *neparan*, a ako ga nema već u sredini ostaje *prazno polje*, on je *paran*. Neparan broj na svojoj *osi simetrije* ima oblutak,

[1] Aristotel, *Metafizika*, 1083b.30.

[2] Aristotel, *O nebu*, 268a.10.

[3] Aristoksen iz Taranta je bio Aristotelov učenik. Lično je poznavao poslednje pitagorejce, Filolajeve i Euritove učenike (Diogen Laertije, VIII.46). Ostao je zapamćen pre svega kao teoretičar muzike ali se bavio i filozofijom i istorijom, a pisao je i o životima pojedinih mislilaca i time osnovao biografiju kao poseban književni rod. Videti [**16**, str. 421–422].

[4] Prema Aristoksenovim rečima koje prenosi Stobej:

> *Parni brojevi su oni koji se dele na jednake delove, dok se neparni brojevi dele na nejednake delove i imaju srednji član...* (Aristoksen, *O aritmetici* (frag. 81)).

Stobej zatim objašnjava:

> *Kada se neparno podeli na dva jednaka dela u sredini ostaje jedinica, ali kada se parno tako podeli, ostaje prazno polje, bez gospodara i bez broja, pokazujući da je manjkavo i nepotpuno.*

Videti [**3**, str. 339] i [**56**, str. 218–222].

[5] O mogućim načinima predstavljanja parnih i neparnih brojeva pomoću oblutaka raspravlja Knor [**29**, str. 137–142].

a paran nema.[6] Zato je, prema Aristoksenovom nalazu, paran broj moguće podeliti na dva jednaka dela, a neparan, nije. Razlog tome je srednji član.

SLIKA 3.0.2. Neparni i parni brojevi

Iako su sačuvale smisao koji dolazi iz ranog perioda, Euklidove definicije parnih i neparnih brojeva su apstraktne i ne zahtevaju predstavljanje brojeva oblucima ili kakvim drugim predmetima ili simbolima.[7] Za Euklida je broj paran ako je deljiv na dva jednaka dela (VII. def. 6), a neparan, ako nije (VII. def. 7). Međutim, Euklid dodaje da se neparan broj za jedinicu razlikuje od parnog i time još jednom definiše neparne brojeve.[8] Da ovaj dodatak Euklidovoj definiciji dolazi od ranih pitagorejaca možemo sa sigurnoću tvrditi budući da već Epiharm primećuje da će se dodavanjem jednog oblutka nekom broju predstavljenom oblucima, parnost broja oblutaka promeniti.

3.1. Sabiranje i oduzimanje parnih i neparnih brojeva

Ako će se, sudeći prema Epiharmovoj opasci, dodavanjem jednog oblutka skupini oblutaka kojima je predstavljen neki broj parnost tog broja promeniti, onda će se dodavanjem još jednog oblutka parnost ponovo promeniti. Dakle, ako se nekom broju doda jedinica parnost će se promeniti, a ako se doda broj dva parnost se neće promeniti. Dodavanjem novog kamenčića parnost će se opet promeniti, itd.[9] Odavde neposredno sledi da će se sabiranjem dvaju parnih brojeva dobiti opet paran broj, sabiranjem parnog i neparnog dobiće se neparan broj, a sabiranjem dvaju neparnih brojeva, paran broj. Time su, samo upotrebom oblutaka, dokazane sledeće tvrdnje koje se odnose na sabiranje parnih i neparnih brojeva:

TEOREMA 1 (IX.21). *Zbir proizvoljno mnogo parnih brojeva je paran broj.*

TEOREMA 2 (IX.22). *Zbir parno mnogo neparnih brojeva je paran broj.*

TEOREMA 3 (IX.23). *Zbir neparno mnogo neparnih brojeva je neparan broj.*

---

[6] Slédeći pitagorejsku tradiciju, Aristoksen neparne i parne brojeve određuje i vrednosno, tvrdeći da su parni brojevi *manjkavi i nepotpuni* jer im u sredini ostaje *prazno polje, bez gospodara*. Ovo stanovište je u skladu Aristotelovom tvrdnjom da su pitagorejci imali listu parova suprotnosti u kojoj je par neparno-parno u analogiji sa parom dobro-zlo (*Metafizika*, 986 a). Dakle, parno je zlo jer u sredini, kako kazuje Aristoksen, *nema gospodara*, koji je vrednosno određen kao dobro!

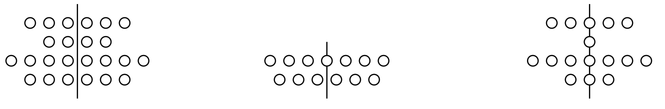
[7] Euklid prihvata ranopitagorejske definicije iako Aristotel u *Topici* (142 b) kritikuje i jednu i drugu zato što smatra da se u njima pojmovi parnog i neparnog definišu pomoću istih tih pomova.

[8] Euklid na dva načina definiše parne i neparne brojeve, ali ne oseća potrebu da ove dve definicije uskladi jednu sa drugom dokazavši da su ekvivalentne. Definiciju prema kojoj je broj paran kada je deljiv na dva jednaka dela, on koristi samo u stavu IX.34, a definiciju prema kojoj se neparan broj za jedinicu razlikuje od parnog, u stavovima IX.23 i IX.25–27.

[9] Čini se nemogućim da je neko mogao da primeti da se dodavanje jedinice nekom broju menja parnost tog broja, a da nije postavio pitanje o tome šta će se desiti ako se doda još jedna jedinica.

Razume se, Epiharm ih ne pominje, a Euklid ih dokazuje u stavovime IX.21–23.[10] Euklidovi dokazi su naizgled formalni, pa su zbog toga isti stavovi koji su dokazani upotrebom oblutaka izdvojeni kao teoreme.

Dokazi ovih teorema su neposredne posledice Epiharmove opaske i morali su biti poznati u Epiharmovo vreme jer bi, u protivnom, njegova opaska izgubila smisao. Svaki od njih jednostavno je poduprti slikom na kojoj su brojevi predstavljeni oblucima.[11] Zaista, zbir parnih brojeva je paran jer, kada ih predstavimo oblucima koji imaju istu osu simetrije na kojoj su *prazna polja* (slika 3.1.1), onda će sa njenih različitih strana biti jednak broj oblutaka pa će i suma tih brojeva imati istu osu simetrije na kojoj je samo prazno polje. Dakle, i suma će biti paran broj.



Slika 3.1.1. Zbir parnih, zbir parnog i neparnog, zbir neparnih brojeva

Ako jedan paran i jedan neparan broj imaju istu osu simetrije, paran broj na njoj neće imati članova, a neparan broj će imati srednji član. Sa različitih strana ose biće jednak broj oblutaka, a na osi će ostati jedan oblutak. Dakle, suma parnog i neparnog broja biće neparan broj jer se za jedinicu razlikuje od parnog broja. Euklid ovu tvrdnju ne dokazuje.

Ako neparni brojevi imaju istu osu simetrije, svaki od njih imaće *srednji član*. Sa različitih strana ose biće jednak broj oblutaka, a na osi će ostati onoliko oblutaka koliko je neparnih brojeva. Ako ih je parno mnogo, obluci na osi se mogu podeliti na dva jednaka dela koji se mogu rasporediti tako da budu sa različitih strana ose. Tada na osi simetrije neće biti oblutaka, a sa različitih strana ose biće jednak broj oblutaka, pa je zato suma parno mnogo neparnih brojeva, paran broj. Ako ih ih je na osi neparno mnogo, oduzimanjem jednog oblutka dobiće se paran broj oblutaka koji se mogu podeliti na dva jednaka dela. Posle raspoređivanja jednakih delova sa različitih strana ose, na osi će ostati oduzeti oblutak, pa je zato suma neparno mnogo neparnih brojeva, neparan broj.

U fragmentu o parnim i neparnim brojevima Epiharm ne primećuje samo to da će se dodavanjem jednog oblutka nekoj skupini oblutaka parnost broja oblutaka promeniti, već dodaje da će se isto dogoditi i ako se jedan oblutak oduzme. Razume se, ako se oduzme još jedan oblutak parnost će se opet promeniti itd. Odavde neposredno slede dokazi tvrdnji o razlici parnih i neparnih brojeva na isti način na koji iz Epiharmove opaske slede i dokazi tvrdnji o njihovom sabiranju.

Teorema 4 (IX.24). *Razlika dvaju parnih brojeva je paran broj.*

[10] O njima će biti reči u odeljku 6.1.

[11] Saznanje o dokazima ovih tvrdnji Epiharm je mogao steći samo od ranih pitagorejaca sa kojima je bio blizak.

Teorema 5 (IX.25). *Razlika parnog i neparnog broja je neparan broj.*

Teorema 6 (IX.26). *Razlika dvaju neparnih brojeva je paran broj.*

Teorema 7 (IX.27). *Razlika neparnog i parnog broja je neparan broj.*

Kao teoreme 1–3 o zbiru parnih i neparnih brojeva, tako i teoreme 4–7 o njihovoj razlici pripadaju aritmetici oblutaka budući da ih je podjednako jednostavno ilustrovati oblucima i dokazati ih njihovom upotrebom. Štaviše, argumenti koji se upotrebljavaju u dokazima teorema 1–7, ne razlikuju se od argumenata koje Euklid upotrebljava u dokazima stavova IX.21–27. Međutim, opet slike sa oblucima imaju sugestivno dejstvo dok ga Euklidove nemaju.

3.2. Proizvod parnih i neparnih brojeva

Budući da je množenje brojeva m i n samo n puta ponovljeno sabiranje broja m, najpre sa samim sobom, a potom redom sa dobijenim sumama (VII. def. 16), upotrebom teorema 1–3 o sabiranju parnih i neparnih brojeva lako se može dokazati da važe sledeće tvrdnje koje se odnose na njihovo množenje:

Teorema 8 (IX.28). *Proizvod dvaju parnih brojeva je paran broj.*[12]

Teorema 9 (IX.28). *Proizvod parnog i neparnog broja je paran broj.*

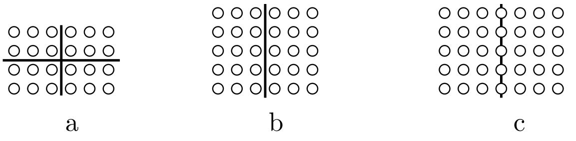
Teorema 10 (IX.29). *Proizvod dvaju neparnih brojeva je neparan broj.*

Budući da teoreme 1–3 pripadaju aritmetici oblutaka, pripadaju joj i teoreme 8–10. I one su neposredna posledica Epiharmove opaske. Sve su morale biti poznate Epiharmovim savremenicima. Da nisu, Epiharmova opaska bi bila bezrazložna i zbog toga efemerna. Ovako, ona je otvorila mogućnost rekonstrukcije ranopitagorejske aritmetike oblutaka. Uputstvo za ovu rekonstruciju dolazi iz Euklidovih dokaza stavova IX.21–27. Međutim, tragovi aritmetike oblutaka mogu se naći i u ostalim stavovima devete knjige *Elemenata*. Budući da se njihovi dokazi mogu rekonstrusati samo upotrebom oblutka, i ovi stavovi su izdvojeni kao teoreme i stavljeni u kontekst aritmetike oblutaka. Prvi primeri su teoreme 8–10.

Euklidovi dokazi stavova IX.28 i IX.29 su jednostavni i on do njih dolazi dedukcijom, pozivajući se na stavove o sabiranju parnih i neparnih brojeva. Međutim, lako je ispuniti zahtev da budu i očigledni budući da ih je lako poduprti slikama sa oblucima. Zaista, kako je proizvod dvaju brojeva površinski broj, ako je jedan od ovih dvaju brojeva paran, onda će osa refleksije parne strane razložiti ovaj pravougaoni broj na dva jednaka broja, pa će proizvod biti paran broj (slika 3.2.1 b). Time je dokazana teorema 9 (IX.28). Međutim, u posebnom slučaju kada je i druga strana takođe parna, i njenom osom simetrije će proizvod takođe biti podeljen na dva jednaka broja. Tada će osama simetrije strana ovog pravougaonog broja on biti razložen na četiri jednaka broja pa će biti deljiv sa četiri (slika 3.2.1 a).[13] Time je dokazana teorema 8 (IX.28).

[12] Ovu tvrdnju Euklid ne formuliše ali se njen dokaz sadrži u dokazu stava IX.28.

[13] Kao što ne dokazuje da je proizvod parnih brojeva takođe paran (teorema 8 (IX.28)), Euklid ne dokazuje ni tvrdnju da je proizvod dvaju parnih brojeva deljiv sa 4. U posebnom slučaju, ovu osobinu pominje Platon u *Menonu* (83 b–c).



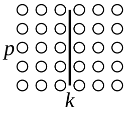
SLIKA 3.2.1. Proizvod dvaju parnih, parnog i neparnog, dvaju neparnih brojeva

Upotrebom oblutaka lako je dokazati i teoremu 10 (IX.29). Zaista, ako su obe strane nekog površinskog broja neparne, tada osi refleksije jedne od njih pripada neparno mnogo oblutaka. Ako ove oblutke izdvojimo, ostatak će biti paran jer sa različitih strana ose ostaje jednak broj oblutaka (slika 3.2.1 c). Međutim, suma parnog i neparnog broja je neparna pa je zato proizvod dvaju neparnih brojeva takođe neparan broj.

3.3. Polovljenje i udvostručavanje

Posle elementarnih stavova o sabiranju, oduzimanju i množenju parnih i neparnih brojeva, upotrebom oblutaka moguće je dokazati još nekoliko stavova koje je Euklid svrstao u devetu knjigu *Elemenata*. Oni se odnose na polovljenje i udvostručavanje brojeva. Pokazaće se da iz njih jednostavno sledi veoma važna činjenica do koje su došli rani pitagorejci, da kvadratni koren broja dva nije racionalan broj. Štaviše, njihovom upotrebom može se dokazati da kvadratni korenovi mnogih drugih brojeva nisu racionalni.[14]

TEOREMA 11 (IX.30). *Ako neparan broj deli neki paran broj, on će deliti i njegovu polovinu.*



SLIKA 3.3.1. IX.30, $q = kp$

DOKAZ: Ako je p neparan broj koji deli parni broj q, tada postoji broj k takav da je $q = kp$ (VII. def. 5). Kako je površinski broj $q = kp$ paran, njegova osa simetrije će biti i osa simetrije strane k, budući da strana p nema osu simetrije na kojoj nema oblutaka (slika 3.3.1). Osa simetrije strane k će razložiti površinski broj q na dva jednaka površinska broja. Kako su p i $k/2$ strane ovih površinskih brojeva, broj p će deliti i $q/2$. □

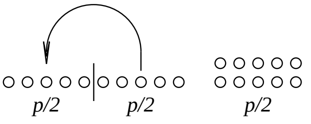
Dokaz prethodne teoreme je sasvim jednostavan. U osnovi, on se ne razlikuje od Euklidovog dokaza stava IX.30. Međutim, ilustrovan je oblucima i zbog toga je i očigledan. U njemu se prostom *analizom* slike (3.3.1) isključuje mogućnost da broj k bude neparan. On nije eksplicitno indirektan, dok Euklidov dokaz jeste. U

[14] O Teodorovim primerima iracionalnih veličina biće reči kasnije, u odeljku 14.6.

njemu se pretpostavlja da je k neparan broj i ta mogućnost se, upotrebom stava IX.29, dovodi do kontradikcije. Doduše, do nje se dolazi već u prvom koraku, tako da nema indirektnog dokaza koji je jednostavniji od ovog.

Sledećoj teoremi naizgled i nije potreban dokaz jer se njome samo objašnjava pojam neparne polovine. Ipak, i njen dokaz može se ilustrovatiti oblucima.

TEOREMA 12 (IX.33). *Ako broj ima neparnu polovinu, on je proizvod neparnog broja i broja dva.*



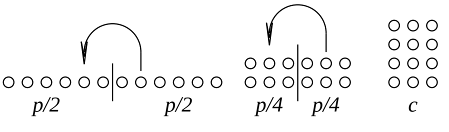
SLIKA 3.3.2. IX.33

DOKAZ: Osa simetrije parnog broja p razlaže taj broj na dva neparna broja iz kojih se sastoji pravougaoni broj kojem su strane $p/2$ i 2 (slika 3.3.2). Zato je p proizvod neparnog broja i broja dva. □

I sledeća teorema pripada aritmetici oblutaka.

TEOREMA 13 (IX.34). *Svaki parni broj je ili stepen broja dva ili je proizvod stepena broja dva i nekog neparnog broja koji nije jedinica.*

DOKAZ: Neka je p paran broj. Ako je njegova polovina neparan broj, p će biti proizvod broja dva i nekog neparnog broja. Stoga će p biti pravougaoni broj kojem su strane $p/2$ i 2. Ako $p/2$ nije neparan, postupak polovljenja može se ponoviti da bi se dobio pravougaoni broj kojem su strane $p/4$ i $2^2 = 4$. Konačno mnogo puta ponavljajući postupak polovljenja, najpre broja p, zatim broja $p/2$, itd., dolazi se do neparnog broja k ($k \neq 1$) koji se ne može prepoloviti, ili do broja 2.



SLIKA 3.3.3. IX.34

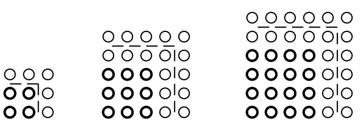
Dakle, svakim polovljenjem dolazi se do novog para međusobno jednakih pravougaonih brojeva, najpre do brojeva koji su jednaki broju $(p/2) \cdot 2$, zatim broju $(p/4) \cdot 4$ (slika 3.3.3), zatim $(p/8) \cdot 8$ i, na posletku, nakon n polovljenja, broju $(p/2^n) \cdot 2^n$. Ako se postupak završava brojem 2, tj. ako je $p/2^n = 2$, onda je $p = 2^{n+1}$, pa je p stepen broja dva. Ako se postupak polovljenja završava neparnim brojem c ($c \neq 1$), onda je $p = c \cdot 2^n$, te je p proizvod neparnog broja i stepena broja dva (slika 3.3.3). □

Argmenti koji su upotrebljeni u prethodnom dokazu ne razlikuju se od argumenata koje Euklid upotrebljava u dokazu stava IX.34 tako da dokaz prethodne teoreme i nije ništa drugo do dokaz Euklidovog stava IX.34[15] zapisan jezikom aritmetike oblutaka.[16] Sva je prilika da je Euklid ranopitagorejski dokaz samo prilagodio zahtevima vremena u kojem su pisani *Elementi*.

3.4. Iracionalnost kvadratnog korena broja 2

Postupak polovljenja koji se u upotrebljava u dokazu teoreme 13 (IX.34) ima ključnu ulogu u potrazi za dvama kvadratnim brojevima od kojih je jedan dvostruko veći od drugog. Pokazaće se da takvih kvadratnih brojeva nema te da, stoga, kvadratni koren broja dva nije racionalan broj.

Slédeći Sokratove ideje iz njegovog razgovora sa mladim robom, koji je Platon opisao u *Menonu*,[17] možemo pokušati najpre da nađemo kvadratni broj dvostruko veći od broja $2^2 = 4$. Kako je $2 \cdot 2^2 = 8$, neće postojati kvadrat dvostruko veći od 4 jer je $2^2 < 2 \cdot 2^2 < 3^2$, baš kao što primećuje rob u Platonovom dijalogu. Slično, možemo primetiti da je $4^2 < 2 \cdot 3^2 < 5^2$, pa ne postoji kvadratni broj dvostruko veći od broja $3^2 = 9$, a kako je $5^2 < 2 \cdot 4^2 < 6^2$ neće postojati ni kvadratni broj koji je dvostruko veći od $4^2 = 16$ (slika 3.4.1) itd. Kojim god brojem pokušali, nećemo uspeti njegovim udvostručavanjem da dobijemo kvadratni broj. Štaviše, svaki od primera jednostavno je ilustrovati upotrebom oblutaka na isti način na koji to u *Menonu*, upotrebom jediničnih kvadrata, čini mladi Menonov rob uz Sokratovu pomoć (slika 3.4.1).



Slika 3.4.1. $2^2 < 2 \cdot 2^2 < 3^2$, $4^2 < 2 \cdot 3^2 < 5^2$, $5^2 < 2 \cdot 4^2 < 6^2$

Zato, da bi se našao odgovor na pitanje da li ipak postoji neki kvadratni broj dvostruko veći od nekog drugog kvadratnog broja, neophodno je najpre analizirati uslove koje moraju da zadovolje dva kvadratna broja da bi jedan od njih bio dvostruko veći od drugog. *Analiza* vodi do rešenja problema udvostručenja kvadrata celobrojnih ivica, koje zahteva samo upotrebu oblutaka.

Zaista, ako postoje brojevi p i q takvi da je $q^2 = 2p^2$, onda broj q^2 mora biti paran jer je dvostruko veći od broja p^2, pa ni q ne može biti neparan jer je proizvod

---

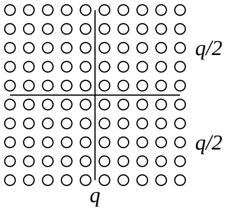
[15] U stavu IX.34 Euklid dokazuje da,

> *ako broj ne pripada ni brojevima koji se dobivaju od dvojke neprekidnim udvostručavanjem, ni brojevima koji imaju neparnu polovinu, on je ili parno-paran ili parno-neparan.*

Međutim, da bi utvrdio da je zaista tako, u dokazu ovog stava on najpre nalazi da je svaki parni broj proizvod nekog neparnog broja i stepena broja 2.

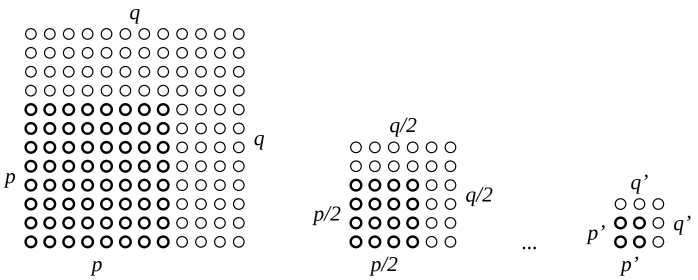
[16] O Euklidovom dokazu biće više reči u odeljku 6.2.

[17] Platon, *Menon*, 82 b–85 b. O Sokratovom razgovoru sa mladim Menonovim robom biće više reči u odeljku 14.3.



Slika 3.4.2. Ako je q^2 paran broj, i q, i p^2 $(= q^2/2)$ i p su parni brojevi

neparnih brojeva neparan. Zato se kvadratni broj q^2 može osama refleksija njegovih strana razložiti na četiri kvadratna broja (slika 3.4.2),[18] pa je i njegova polovina paran broj jer se sastoji iz dvaju kvadratnih brojeva $q^2/4$.[19] Zato i p^2 mora biti paran broj pa ni p ne može biti neparan.



Slika 3.4.3. Parovi brojeva $(p, q), (p/2, q/2), \ldots, (p' = p/2^n, q' = q/2^n)$

Dakle, ako je $q^2 = 2p^2$, onda su i p i q parni brojevi pa se i jedan i drugi mogu prepoloviti. Njihovim polovljenjem se dobija novi par brojeva $p/2$, $q/2$, takav da je $(q/2)^2 = 2(p/2)^2$. Ako su i ovi brojevi oba parni, i oni se mogu prepoloviti. Postupak uzastopnog polovljenja moguće je ponoviti konačno mnogo puta, sve dok se njime dobijaju parni brojevi. Postupak će se završiti kada se njime dospe do broja $p' = p/2^n$ koji je neparan (ali nije jedinica), ili do broja 2. Dakle, ovim postupkom dobijaju se redom parovi brojeva:

$$(p, q), (p/2, q/2), \ldots, (p/2^{n-1}, q/2^{n-1}), (p/2^n, q/2^n),$$

sve dok su ovi brojevi oba parni (osim eventualno poslednjeg para). Razume se, ove parove jednostavno je predstaviti oblucima (slika 3.4.3). Očigledno, poslednji od ovih parova postoji ako i samo ako postoje svi ostali, uključujući i prvi.

Međutim, ako je p' $(= p/2^n)$ neparan broj, broj $2p'^2$ ne može biti potpuni kvadrat budući da brojevi p' i q' moraju biti parni ako je $q'^2 = 2p'^2$. Ako je pak

[18] Platon u *Menonu* (83 c) razlaže broj 16 na četiri kvadratna broja

[19] Euklid nigde ne dokazuje da su *polovine kvadrata parnih brojeva takođe parni brojevi*, ali je Aleksandar koristi u dokazu stava X.117. Videti odeljak 13.4.

$p' = 2$, tada je $2p'^2 = 2 \cdot 2^2$, a broj $2 \cdot 2^2 = 8$ očigledno nije potpun kvadrat.[20] Dakle, nezavisno od toga da li se postupak polovljenja broja p završava neparnim ili parnim brojem, broj $2p^2$ neće biti potpun kvadrat. Zbog toga:

TEOREMA 14. *Ne postoji kvadratni broj koji je dvostruko veći od kvadratnog broja.*[21]

Dokaz ove tvrdnje bio bi nešto kraći od prethodnog da je dopušteno da se postupak uzastopnog polovljenja završi jedinicom. Tada bi se došlo do zaključka da je $2{\cdot}2^n$ potpun kvadrat ako i samo ako je $2{\cdot}1$ potpun kvadrat, a on to nije. Međutim, Euklidov stav IX.34 ne dopušta polovljenje broja dva jer jedinica u *Elementima* nije definisana kao broj (VII. def. 1).

Kao i dokaz teoreme 11 (IX.30) i ovaj dokaz je naizgled direktan jer se u njemu *analizom* slike (3.4.2) dolazi do zaključka da p^2 i q^2 pa, stoga, i p i q, moraju biti parni brojevi. Dokaz je mogao biti eksplicitno indirektan da se pošlo od pretpostavke da je p neparan broj, u nameri da se u daljem postupku dođe do kontradikcije. No ovde je već prosta analiza bila dovoljna. Čini se da se za upotrebom indirektne metode u ranom periodu moralo posegnuti tek kada je analiza pojedinih problema postala isuviše složena za razumevanje ili čak nemoćna.[22]

Dokazom da ne postoji kvadratni broj dvostruko veći od kvadratnog broja, dokazana je tvrdnja da kvadratni koren broja dva nije racionalan broj. Njeno mesto u *Elementima* bilo bi u devetoj knjizi, odmah posle stava IX.34. Međutim, Euklid ne oseća potrebu da je dokaže. To je zbog toga što je u stavu VIII.14 već dokazao mnogo opštiju tvrdnju — *Teetetovu teoremu* prema kojoj je, savremenim rečnikom rečeno, kvadratni koren nekog prirodnog broja racionalan broj ako i samo ako je taj broj potpun kvadrat.[23] Ona je u *Elementima* formulisana kao teorema aritmetike oblutaka ali njen dokaz izlazi iz okvira ove aritmetike. Međutim, u posebnom slučaju kvadratnog korena broja 2, za dokaz Teetetove teoreme dovoljno je upotrebiti oblutke. Budući da je teorema 14 formulisana arhaičnim jezikom koji je upotrebljen u Euklidovom stavu VIII.14, a njen dokaz ne izlazi iz okvira aritmetike oblutaka, sva je prilika da je morao biti poznat u periodu ranog pitagorejstva.

3.5. Kvadratni koren kvadratnog broja

Ako već ne postoji kvadratni broj dvostruko veći od kvadratnog broja, postavlja se sledeće pitanje: ako je k (prirodni) broj veći od 2, da li onda postoje kvadratni brojevi p^2 i q^2 takvi da je jedan od njih k puta veći od drugog?

Razume se, ako je k kvadratni broj, onda takvi brojevi postoje. Zaista, ako je $k = m^2$, a p i q su brojevi takvi da je $q = mp$, onda je $q^2 = m^2p^2$ pa postoji broj k takav da je

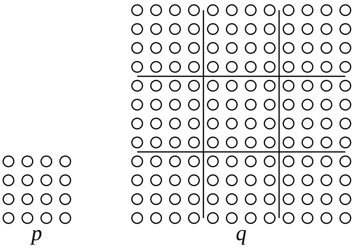
$$q^2 = kp^2.$$

[20] Upravo ovu tvrdnju, uz Sokratovu pomoć, dokazuje mladi Menonov rob.

[21] Beker (Becker, *Das mathemtische Denken der Antike*, 1957, str. 51) i Knor [**29**, str. 27, str. 53 f.24] su bili mišljenja da dokaz ovog stava nije moguć upotrebom oblutaka budući da, prema njihovom mišljenju, zahteva upotrebu procesa koji se ponavlja neograničeno mnogo puta.

[22] Dobar primer je stav VII.24. O njemu će više reči biti u odeljku 9.7.

[23] O ovome će biti više reči u odeljku 11.1.



Slika 3.5.1. Ako je $q = kp$, onda je $q^2 = k^2p^2$, $p = 4$, $q = 12$, $k = 3$

Štaviše, dovoljno je rasporediti oblutke u obliku kvadratnog broja q^2 koji se sastoji iz m^2 puta ponovljenog broja p^2, da bi ova tvrdnja postala vizuelno uverljiva (slika 3.5.1). Ako bismo je iskazali jezikom aritmetike oblutaka, ona bi glasila:

ako strana meri stranu, onda i kvadrat meri kvadrat.

Upravo ovu tvrdnju Euklid dokazuje u stavu VIII.14,

Međutim, on u istom stavu dokazuje da važi i obratno:

ako kvadrat meri kvadrat, onda i strana meri stranu.

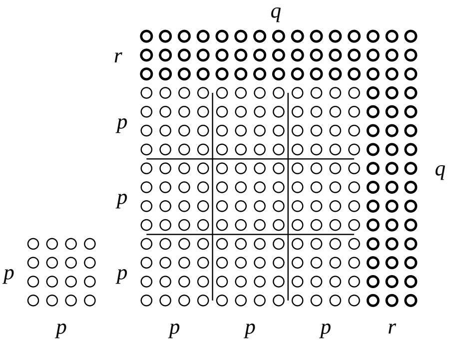
Time je dokazao, ne samo to da važi trivijalna tvrdnja da je kvadratni koren kvadratnog broja k racionalan broj, već i njen obrat, pa kvadratni korenovi brojeva koji nisu potpuni kvadrati nisu racionalni brojevi. Sudeći prema Platonivim rečima, do ovog zaključka prvi je došao Teetet.[24]

Iako je formulacija stava VIII.14 sasvim jednostavna, činjenica da Euklid njime dokazuje upravo ovu Teetetovu teoremu dugo je ostala neprimećena.[25] Za to postoji dobar razlog. Iako je naizgled geometrijska, vidimo da je njena tvrdnja zapravo iskazana arhaičnim jezikom aritmetike oblutaka koji je u Euklidovo vreme bio prevaziđen. Ona je zbog toga ostala nejasna kasnijim Euklidovim čitaocima. Teetet ju je dokazao upotrebom novih metoda u aritmetici, ali njena formulacija ne pripada toj „novoj aritmetici“. Jezik aritmetike oblutaka koji je upotrebljen u formulaciji stava VIII.14 dolazi iz vremena koje prethodi Teetetu. Međutim, aritmetičke knjige Euklidovih *Elemenata* ne slede tradiciju aritmetike oblutaka. Formulišući Teeteovu teoremu upotrebom stare terminologije, Euklid ju je načinio nerazumljivom kasnijim čitaocima.

Kao što je jednostavno oblucima ilustrovati dokaz tvrdnje da kvadratni koren broja dva nije racionalan broj, podjednako jednostavno se može ilustrovati i Teetetov problem (slika 3.5.2). Može se ilustrovati problem ali se, izgleda, upotrebom oblutaka ne može dokazati i teorema. Sudeći prema Euklidovom dokazu stava VIII.14, a nema razloga da sumnjamo da je to u osnovi bio i Teetetov dokaz, rešenje ovog problema izlazi iz okvira aritmetike oblutaka. Međutim, sama upotreba jezika aritmetike oblutaka u formulaciji Teetetove opšte teoreme ukazuje na to da je problem koji se njome rešava došao iz pređašnjih vremena. Ako je tako, onda se pre

[24] Platon, *Teetet*, 148 a–b. O ovome će biti više reči u odeljku 11.2.

[25] Zbog toga je bilo nekoliko pokušaja rekonstrukcije Teetetovog dokaza. Videti [**29**, str. 228] i [**39**].



SLIKA 3.5.2. Teetetov problem: $q^2 = kp^2$ ako i samo ako je $r = p$?

Teetetovog otkrića do svih primera kvadratnih korenova koji nisu racionalni brojevi pa, dakle, i do primera kvadratnog korena broja dva, došlo upotrebom oblutaka.[26]

Da bi dokazao svoju teoremu Teetet je morao da iskorači iz aritmetike oblutaka ali je u formulaciji ove teoreme sačuvao terminologiju stare, prevaziđene aritmetike. Euklid je u *Elementima* ostao privržen ovoj, izvornoj formulaciji. Time je, kako se pokazalo, zamaglio činjenicu da je stav VIII.14 zapravo Teetetova teorema.

[26] Tu su naravno uključeni i primeri Teetetovog učitelja Teodora, o kojima nas obaveštava Platon u čuvenom fragmentu iz *Teeteta*. O ovome će biti više reči u odeljku 14.7.

POGLAVLJE 4

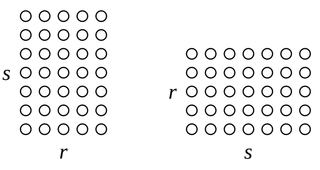
Osnovne operacije sa brojevima u aritmetici oblutaka

Od osnovnih aritmetičkih operacija Euklid definiše samo množenje, objasnivši u definiciji VII. def. 16 kada se kaže da se jedan broj množi nekim drugim brojem. Smatrajući da su sami po sebi jasni, on ne definiše pojmove sabiranja i oduzimanja brojeva. Ni deljenje ne definiše, ali u definiciji VII. def. 3 kazuje da je neki broj *deo* nekog drugog broja ako ga *meri*, tj. ako je njegov delilac. Merenje je sinionim za deljenje.

4.1. Komutativnost množenja

Za Euklida množenje je ponavljanje sabiranja. Proizvod brojeva m i n je broj koji se dobija tako što se m uzima kao sabirak n puta (VII. def. 16). Ako ga predstavimo oblucima, on će biti površinski broj. Ranopitagorejsko poimanje množenja brojeva najverovatnije se nije razlikovalo od Euklidovog.

Budući da činioci m i n u definiciji proizvoda imaju različite uloge, ostaje potreba da se dokaže komutativnost njihovog proizvoda. Ovu osobinu Euklid dokazuje u stavu VII.16.[1] Međutim, njegov dokaz pripada aritmetici koja je, prema Aristotelovom mišljenju, *udaljenija od čula od geometrije*. Isuviše je zamršen da bi pripadao ranim pitagorejcima,[2] a osobina komutativnosti proizvoda njima je morala biti poznata. Najstariji dokaz ove osobine proizvoda brojeva morao je biti vizuelno jasan da bi njima bio prihvatljiv. Morao je biti blizak čulima koliko i geometrija. Zato je aritmetika oblutaka prirodni okvir iz kojeg je najstariji dokaz mogao iznići. Sasvim ga je jednostavno rekonstruisati, a slika kojom je propraćen može se prihvatiti kao sam dokaz.



SLIKA 4.1.1. $rs = sr$

[1] O Euklidovom dokazu stava VII.16 biće reči u odeljku 7.4.

[2] U dokazu Euklid koristi stav VII.15 koji, iako se koristi i u dokazima stavova VII.37 i VII.38 u kojima se bliže objašnjava šta je deo, izgleda da je dokazan samo da bi se dedukovao stav VII.16. O ovome će biti reči i u odeljcima 7.4 i 9.8.

Teorema 15 (VII.16). *Ako su r i s brojevi, tada je $rs = sr$.*

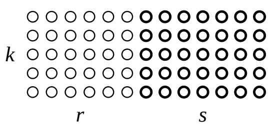
Dokaz: Proizvodi rs i sr su površinski brojevi koji imaju jednake odgovarajuće strane pa se slike na kojima su oni predstavljeni oblucima mogu poklopiti — one su međusobno (geometrijski) podudarne. Međutim, prema Euklidovoj aksiomi I. Ax. 7, *oni koji se mogu poklopiti, jednaki su međusobno*,[3] pa su i brojevi rs i sr međusobno jednaki. □

Sada je svejedno kojim ćemo redosledom pisati činioce kada obeležavamo proizvod dvaju brojeva. Svejedno je i šta će biti osnovica, a šta visina kada površinski broj predstavljamo oblucima. Zbog toga u aritmetici nije neophodno razlikovati množenik od množitelja.

4.2. Distributivnost množenja

I osobinu distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje jednostavno je dokazati upotrebom oblutaka.

Teorema 16 (VII.5). *Ako su k, r i s brojevi, tada je $k(r+s) = kr + ks$.*



Slika 4.2.1. $k(r+s) = kr + ks$

Dokaz: Ređanjem najpre r, a potom još s oblutaka duž jedne iste prave, predstavićemo oblucima ne samo brojeve r i s već i njihov zbir $r+s$, pa će proizvod nekog broja k i zbira $r+s$ biti površinski broj $k(r+s)$. Međutim, površinski broj $k(r+s)$ se očigledno sastoji iz dvaju površinskih brojeva kr i ks,[4] pa je $k(r+s) = rk + ks$. □

Iako se u dokazu prethodne teoreme upotrebljavaju obluci, do njega se ipak ne dolazi induktivnim zaključivanjem. U njemu se koriste isti argumenti koje Euklid upotrebljava u dokazu stava VII.5.[5] On je zato podjednako utemeljen na deduktivnoj metodi kao i Euklidov dokaz. On je i podjednako opšti. Sva je razlika u slici kojom je Euklid propratio svoj stav na kojoj (prirodni) brojevi nisu poredstavljeni oblucima, već dužima. To dokaz Euklidovog stava ne čini opštijim. Isto se može

---

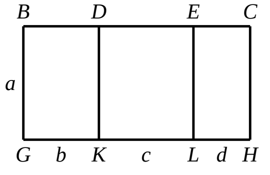
[3] Ova tvrdnja, koju je Euklid smestio među aksiome u prvoj knjizi *Elemenata*, obično se smatra geometrijskim kriterijumom podudarnosti. Euklid se nerado poziva na nju i upotrebljava je samo u stavovima I.4, I.8 i III.24. Ne koristi je čak ni u stavu I.26 u kojem bi ga bilo prirodno upotrebiti budući da se i on odnosi na podudarnost trouglova. Međutim, ova aksioma je morala imati značaj ne samo u geometriji, već i u aritmetici doklegod su aritmetički dokazi bili očigledni zbog predstavljanja brojeva oblucima ili kakvim drugim objektima.

[4] Ovu očiglednu činjenicu podupire jedna od Euklidovih aksioma. To je aksioma I. Ax. 2, prema kojoj *ako se jednakim (r) dodaju jednaki (s), celine ($r+s$) su jednake.*

[5] O Euklidovom dokazu biće više reči u odeljku 7.1.

reći i za dokaze ostalih Euklidovih stavova kojima dokazi slede logiku aritmetike oblutaka.[6]

Da je ideja iz dokaza prethodne teoreme bila poznata Euklidu jasno se vidi iz njegovog dokaza stava II.1. U ovom stavu Euklid dokazuje da će pravougaonik kojem je osnovica razložena na proizvoljno mnogo duži, biti jednak zbiru pravougaonika iste visine kojima su osnovice te duži. Za razumevanje dokaza ovog stava od ključne je važnosti slika kojom je ilustrovan. Zaista, ako je $GHCB$ pravougaonik kojem je ivica GH tačkama K i L razložena na duži GK, KL i LH, tada je visinama KD i LE pravougaonik $GHCB$ razložen na pravougaonike $GKDB$, $KLED$ i $LHCE$. Zato je, prema Euklidovom shvatanju, $GKDB + KLED + LHCE = GHCB$ (slika 4.2.2).



Slika 4.2.2. $GKDB + KLED + LHCE = GHCB$, *Elementi*, II.1

Euklid ne ističe da je zbir površina pravougaonika $GKDB$, $KLED$ i $LHCE$ jednak površini pravougaonika $GHCB$, već dokazuje njihovu razloživu jednakost. Njemu pojmovi dužine i površine izmiču,[7] inače bi mogao da zaključi da je $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ ako su a, b, c i d dužine duži BG, GK, KL i LH. Međutim, Euklid ne meri dužinu proizvoljne duži. Ne meri ni površine površi. U nameri da izbegne upotrebu rekvizitarijuma „geometrijske algebre“, on nigde ne dokazuje da je površina pravougaonika jednaka proizvodu dužina njegovih ivica. Iako je geometrija već svojim imenom „nauka o merenju“, u *Elementima* merenja zapravo nema. Euklid nigde ne dokazuje niti čak pominje ili nagoveštava da se svaka duž može izmeriti nekom drugom duži ne bi li se utvrdilo kolika je njena dužina.[8] Razume se, ako je zadata jedinična duž onda se racionalnim operacijama i korenovanjem mogu konstrusati duži kojima se može utvrditi koje su mere.[9] Neke od njih Euklid konstruiše,[10] međutim, merenja dužine proizvoljno zadate duži u Euklida prosto nema. Nema pojma dužine.[11] Posledično, ne može biti ni pojma površine ni pojma zapremine. Razume se, kao što je mogao konstruisati pojedine

[6] Burkertova opaska da dokazi u aritmetici oblutaka moraju biti induktivni [**9**, str. 435], prosto ne stoji. Iako rani pitagorejci nisu dosegli do ideje da aritmetiku treba utemeljiti kao deduktivnu teoriju, to ne znači da u dokazivanju aritmetičkih stavova nisu upotrebljavali osobine koje su već dokazali.

[7] Ovi pojmovi su ostali van domašaja grčke matematike. O njihovim definicijama videti [**34**, str. 167–172, 235–240], [**7**, str. 167–172] i [**40**, str. 153–175].

[8] Videti [**34**, str. 167–175].

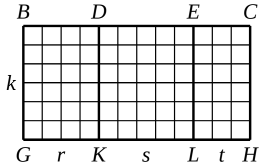
[9] Videti [**11**, pp. 127–134].

[10] Iracionalne veličine iz X knjige *Elemenata* su primeri takvih duži.

[11] Videti [**37**].

duži i tako utvrditi koje su mere, tako je mogao utvrditi koje su površine pojedinih površi i zapremine pojedinih tela. Ono što nedostaje to je pojam mere.

Ako se u dokazu stava II.1 pretpostavi da su duži BG, GK, KL i LH međusobno samerljive onda se njihova zajednička mera — duž e, sadrži konačno mnogo puta u svakoj od njih pa su tada ove duži *celobrojne*. Ako se duž e u BG sadrži k puta, a u GK, KL i LH, redom, r, s i t puta, biće $k(r+s+t) = kr+ks+kt$ (slika 4.2.3). Zato je stav VII.5 samo poseban slučaj stava II.1. I dokaz teoreme 16 (VII.5) u punoj je analogiji sa dokazom stava II.1. U njemu se sabiranjem površinskih brojeva iste visine opet dobija površinskih broj, kao što se u dokazu stava II.1 sabiranjem pravougaonika iste visine ponovo dobija pravougaonik.



SLIKA 4.2.3. $k(r+s+t) = kr+ks+kt$

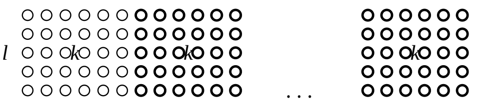
Znajući da su se pitagorejci najpre bavili brojevima,[12] a da su komutativnost proizvoda i distributivnost množenja u odnosu na sabiranje osnovne osobine brojeva, one su morale su biti poznate ranim pitagorejcima. Oni su imali i očigledno stredstvo kojim su mogli da ih dokažu — oblutke. Euklidov dokaz stava VII.5 u osnovi je isti kao i njihov, samo se u njemu ne pominju obluci.

Na isti način, upotrebom oblutaka, rani pitagorejci su mogli su da dokažu i osobinu distributivnosti množenja brojeva u odnosu na oduzimanje.

TEOREMA 17 (VII.7). *Ako su k, r i s brojevi, tada je $k(r-s) = kr - ks$.*

I osobinu tranzitivnosti relacije deljivosti lako je dokazati upotrebom slike sa oblucima koja je slična slikama kojima su ilustrovani teorema 16 (VII.5) i Euklidov stav II.1. Zaista:

TEOREMA 18. *Ako broj l deli broj k, a broj k deli broj p, onda broj l deli i broj p.*



SLIKA 4.2.4. Ako l deli k, a k deli p, onda l deli p

[12] Aristotel nas u raspravi o *O pitagorejskoj filozofiji* (*frag.* 186, 1510 a) obaveštava da se Pitagora *posvetio matematičkim naukama* i da se posebno bavio *brojevima*. Videti [**3**, str. 121, fus. 66].

Dokaz: Ako broj l deli broj k, onda je l ivica površinskog broja k, pa će l biti i ivica površinskog broja $p = nk$ koji se sastoji iz više puta ponovljenog površinskog broja k (slika 4.2.4). Zato l očigledno deli i p. □

Ovu osobinu Euklid upotrebljava u dokazu stava VII.23.[13] Međutim, iako je koristi, on u *Elementima* ovu osobinu ne dokazuje smatrajući je (vizuelno) očiglednom. Zbog toga nije isključeno da je prethodni dokaz mogao biti poznat i u ranom periodu pitagorejstva.

4.3. Uzastopno oduzimanje

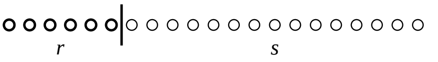
Iako ne definiše pojam oduzimanja, Euklid već na samom početku sedme knjige *Elemenata* u stavovima VII.1 i VII.2, postupkom uzastopnog oduzimanja nalazi najveću zajedničku meru dvaju brojeva.[14]

Njegovi dokazi ovih dvaju stavova propraćeni su slikama na kojima su brojevi predstavljeni dužima. Ovi dokazi nisu očigledni, ali ne samo zbog toga što slike kojima su ilistrovani nisu od koristi za njihovo razumevanje, već i zato što se u njima upotrebljava indirektna metoda. Euklid u njima i ne računa na uverljivost svojih slika već na snagu dedukcije iako za to nema nikakvog uporišta budući da njegovi dokazi ovih dvaju stavova sa samog početka sedme knjige nisu utemeljeni na aksiomama i postulatima ili kakvim već dokazanim tvrdnjama. Stoga stavovi VII.1 i VII.2 u *Elementima* imaju ulogu osnovnih stavova aritmetike. Njihovi dokazi su samo intuitivna objašnjenja.

Međutim, ovi stavovi mogu se načiniti očiglednim budući da se do uverenja da oni zaista važe može doći upotrebom oblutaka. Tako se do pojma najveće zajedničke mere može doći bez upotrebe indirektne metode. Da je zaista tako potvrđuje rešenje sledećeg zadatka, a zatim i dokaz teoreme 19 (VII.2). Postupkom uzastopnog oduzimanja u zadatku se upotrebom oblutaka određuje broj koji je zajednička mera dvaju zadatih brojeva, a u teoremi se dokazuje da je taj broj i njihova najveća zajednička mera.

Zadatak 1 (VII.2): *Naći zajedničku meru dvaju brojeva.*

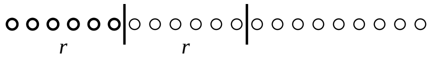
Rešenje: Ređanjem oblutaka kojima su predstavljeni brojevi r i s duž jedne prave, može se predstaviti broj $r + s$. Tada se jednom vertikalnom linijom mogu odvojiti obluci kojima je predstavljen broj r od oblutaka kojima je predstavljen broj s.



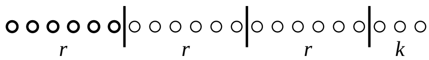
Ako je $r < s$, može se dodati nova vertikalna linija kojom će se iz skupa oblutaka kojima je predstavljen broj s izvojiti r oblutaka. Time je predstavljeno oduzimanje broja r od broja s.

[13] O ovom stavu u kojem Euklid dokazuje da je broj koji deli jedan od dvaju uzajamno prostih brojeva, uzajamno prost sa drugim, biće reči u odeljku 9.7.

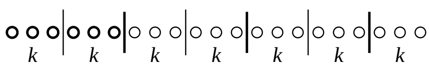
[14] Razume se, Euklid ne definiše ni postupak uzastopnog oduzimanja. O njemu će biti reči i u odeljku 9.2.



Ako je ostatak i dalje veći od r, može se dodati još jedna linija kojom se odvaja novih r oblutaka od linearnog broja $s-r$. Sa ovim postupkom oduzimanja stalnim dodavanjem novih linija rasecanja, može se nastaviti sve dok se ne dobije ostatak r_1 koji je manji ili jednak broju r. Ako je jednak broju r, onda između svakih dveju linija podele ima r oblutaka pa r deli s. On je tada njihova zajednička mera. Ako nije, onda će paralelnim linijama podele broj s biti razložen na brojeve jednake broju r, i ostatak r_1.[15]



Postupak uzastopnog oduzimanja sada se može primeniti na brojeve r i r_1, da bi se došlo do ostatatka r_2 koji je manji od r_1, zatim na brojeve r_1 i r_2 itd., sve dok ima ostataka. Ovaj postupak koji ćemo zvati *rasecanjem*,[16] može se ponoviti najviše konačno mnogo puta jer poslednji ostatak ne može biti manji od jedinice.



Kada više nema ostatka, postupak rasecanja se završava. Njime se dolazi do poslednjeg ostatka $r_n = k$ koji se sadrži konačno mnogo puta i u broju r i u broju s. On je njihova zajednička mera. □

Razume se, ako je k površinski broj kojem su strane k_1 i k_2, onda će i brojevi k_1 i k_2 deliti i r i s (teorema 18), pa će svaki od njih biti zajednička mera brojeva r i s. Pored toga, brojevi k_1 i k_2 biće manji od k. Pokazaće se da nema broja većeg od k, koji je zajednička mera brojeva r i s.

4.4. Najveća zajednička mera

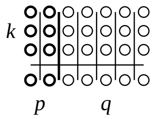
Postupak uzastopnog oduzimanja koji je upotrebljen u prethodnom zadatku ne razlikuje se od postupka koji Euklid upotrebljava na početku dokaza stava VII.2. On je samo zapisan jezikom aritmetike oblutaka.[17] Njime se upotrebom očiglednih sredstava dolazi do zajedničke mere k dvaju brojeva. Da je ova mera i najveća, Euklid u stavu VII.2 dokazuje indirektnim postupkom. Međutim, upotreba oblutaka u rešenju prethodnog zadatka omogućava da se do istog zaključka dođe direktno.

[15] Ako se r_1 sadrži konačno mnogo puta u broju r obeležićemo ga sa k, kao na slici.

[16] Pojam rasecanja usklađen je sa pojmom *antanairesis* u Aristotelovoj definiciji proporcije (*Topika*, 158 b). Videti odeljak 8.1.

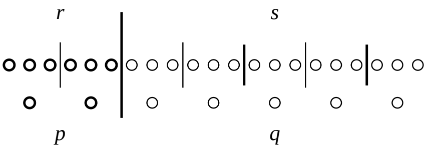
[17] Motivacija za ovu interpretaciju Euklidovog algoritma dolazi iz potrebe da se objasni Aristotelova definicija proporcionalnosti (*Topika*, 158 b). Doduše, ova Aristotelova definicija odnosi se na bilo kakve veličine, a ne samo na brojeve, ali ako se primeni na brojeve, onda je prethodna inerpretecija Euklidovog postupka prirodni okvir iz kojeg je ova definicija iznikla. O ovome će biti više reči u poglavlju 8.

Da bismo to učinili primetimo najpre da zajednička mera k brojeva r i s deli i r i s te da, zbog toga, postoje brojevi p i q takvi da je $r = kp$ i $s = kq$. Zato su r i s pravougaoni (ili kvadratni) brojevi iste *visine* k.



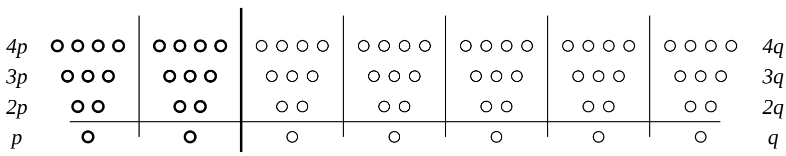
SLIKA 4.4.1. Par kp, kq ima isti raspored linija rasecanja kao i par p, q

Ako između svakih dveju susednih linija rasecanja para r, s stavimo po jedan oblutak, dobićemo upravo brojeve $p = r/k$ i $q = s/k$. Oni će imati isti raspored linija podele kao i brojevi r i s. Prema Aristotelovim rečima, imaće isti *antanairezis.* [18] Stoga će se rezultat postupka dodavanja linija rasecanja primenjenog na par r, s, razlikovati od onog koji je primenjen na par p, q samo utoliko što će u prvom slučaju na kraju postupka broj oblutaka između linija rasecanja biti k, a u drugom, 1.



SLIKA 4.4.2. Rasecanje para r, s; $r = 6$, $s = 15$, $k = 3$, $p = 2$, $q = 5$

Međutim, kolikogod oblutaka da stavimo između svakih dveju linija rasecanja brojeva r i s, uvek ćemo dobiti par brojeva r', s' koji imaju isti raspored linija rasecanja kao i zadati brojevi r i s. Budući da između linija rasecanja ne može biti manje od jednog oblutka najmanji među njima su brojevi p i q. Svi ostali parovi brojeva sa istim linijama rasecanja biće površinski brojevi np i nq, $n = 2, 3, \ldots$.



SLIKA 4.4.3. Samo parovi np, nq imaju isto rasecanje kao i par p, q

TEOREMA 19 (VII.2). *Zajednička mera k dvaju brojeva r i s, koja je nađena upotrebom postupka rasecanja je najveća.*

[18] Videti odeljak 8.1.

Dokaz: Ako su p i q najmanji među brojevima sa istim linijama rasecanja kao i par r, s, tada je $r = kp$ i $s = kq$, pa je k najveći broj koji deli i broj r i broj s. On je zato najveća zajednička mera tih dvaju brojeva. □

Sada je lako dokazati stav kojim Euklid započinje aritmetičke knjige *Elemenata*:

Teorema 20 (VII.1). *Ako je jedinica poslednji ostatak u postupku rasecanja brojeva p i q, onda su p i q međusobno prosti brojevi.*

Dokaz: Zaista, brojevi p i q su međusobno prosti jer samo jedinica deli i p i q budući da između svakih dveju susednih linija rasecanja para p, q ostaje samo po jedan oblutak. □

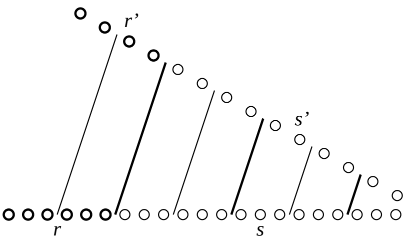
Iskaz iz formulacije prethodne teoreme može da posluži i kao definicija međusobno prostih brojeva. Sva je prilika da je ovaj pojam i ušao u aritmetiku iz potrebe da se karakterišu parovi brojeva koji su najmanji među onima koji imaju iste linije rasecanja. Arhita ove parove naziva *pitmenima*.[19] Oni će biti najmanji među parovima proporcionalnih brojeva.

[19] Diels, 47 A17.

POGLAVLJE 5

Proporcije u aritmetici oblutaka

Postupak uzastopnog oduzimanja (ili rasecanja) nedvosmisleno vodi ka definiciji proporcije. Zaista, ako ga primenimo ne samo na par r, s, već i na par r', s' i u oba slučaja rasecanjem dođemo do istog para najmanjih brojeva p, q, onda će i brojevi r' i s' imati isto rasecanje kao i brojevi r, s tako da za parove brojeva r, s i r', s' tada možemo reći da su *u istoj razmeri* ili da su međusobno *proporcionalni*.[1]



SLIKA 5.0.1. $r : s = r' : s'$, $r = 6$, $s = 15$, $r' = 4$, $s' = 10$

Može se reći i da se brojevi r', s' *odnose jedan prema drugom* kao brojevi r, s, tj. da je zadovoljena *proporcija* [2]

$$r' : s' = r : s.$$

Brojevi r', s' su tada *u istoj razmeri* kao i brojevi r, s.

5.1. Osobine proporcija

Iz dokaza teoreme 19 (VII.2) jasno je da je relacija proporcionalnosti parova brojeva tranzitivna, te

- ako je $m : n = p : q$ i $p : q = r : s$, tada je i $m : n = r : s$.

Jasno je i to da

- iz pretpostavke da je $p : q = r : s$ sledi da je $r : s = p : q$,

a takođe i da

- ako je $p : q = r : s$ onda je i $q : p = s : r$.

[1] Ova, *antifairetička definicija* proporcije parova brojeva, samo je poseban slučaj definicije proporcionalnosti parova duži i površina koju pominje Arisotel u *Topici* (158 b). O njoj će biti više reči u odeljcima 8.1 i 8.4.

[2] O Euklidovoj definiciji ovog pojma biće reči u odeljku 9.1, a o odnosu dveju definicija proporcije, u odeljku 9.6.

Smatrajući ih očiglednim, ove osobine proporcionalnih brojeva Euklid posebno ne ističe. Međutim, on dokazuje prvu od ovih osobina u stavu V.11, a drugu pominje u posledici stava V.7. Razume se, ovi stavovi nisu aritmetički i odnose se na proporcionalnost duži, a ne brojeva. U njihovim dokazima Euklid upotrebljava Eudoksovu definicija proporcionalnosti veličina — V. def. 5.

Dokazi još nekoliko osobina proporcionalnih brojeva neposredno slede iz rešenja zadatka 1 (VII.2) i dokaza teoreme 19 (VII.2). Zapravo, dokazi ovih osobina u njima su sadržani. Zaista:

TEOREMA 21 (V.9). *Ako su r, s i t brojevi, tada je*

$$r : s = r : t,$$

ako i samo ako je $s = t$.

DOKAZ: Budući da su parovi r, s i r, t proporcionalni, oni imaju iste linije rasecanja. Između susednih linija rasecanja svakog od ovih dvaju parova mora biti jednak broj oblutaka pa kako su prvi brojevi (antecedensi) u ovim parovima isti, isti će biti i drugi (konsekvensi).

Razume se, važi i obratno pa su antecendensi jednaki ako i samo ako su jednaki konsekvensi. □

Ni ovu tvrdnju Euklid ne dokazuje u aritmetičkim knjigama, ali u stavu V.9, upotrebom definicije V. def. 5 dokazuje odgovarajuću tvrdnju koja se odnosi na veličine, a ne na brojeve.[3] Naprotiv, sledeće teoreme dokazane su u aritmetičkim knjigama *Elemenata*. Razume se, u Euklidovim dokazima ne upotrebljavaju se obluci.[4]

TEOREMA 22 (VII.20). *Ako su p i q najmanji brojevi koji su sa brojevima r i s u istoj razmeri, onda postoji broj k takav da je $r = kp$ i $s = kq$.*

DOKAZ: Budući da su p i q najmanji od brojeva koji imaju iste linije rasecanja, svi ostali brojevi koji su sa njima u istoj razmeri (slika 4.4.3) biće pravougaoni (ili kvadratni) brojevi np, nq ($n = 2, 3, \ldots$). Međutim, i brojevi r i s imaju isto rasecanje kao i p, q pa, ako je k njihova najveća zajednička mera, biće $r = kp$ i $s = kq$. Dakle, postoji broj k takav da je $r = kp$ i $s = kq$. □

Zato, ako je

$$r : s = r' : s',$$

onda postoje brojevi k i l takvi da je $r = kp$, $s = kq$, i $r' = lp$, $s' = lq$. Štaviše, važi i obratno, pa je postojanje takvih brojeva k i l potreban i dovoljan uslov proporcionalnosti parova r, s i r', s'.

TEOREMA 23 (VII.22). *Ako su p i q najmanji među brojevima koji su sa njima u istoj razmeri, oni su međusobno prosti.*

[3] Vidimo da je (antifairetički) dokaz ovog stava upotrebom oblutaka direktan i trivijalan. Naprotiv, Euklidov dokaz stava V.9, koji počiva na Eudoksovoj definiciji proporcionalnih veličina, je indirektan.

[4] O njima će biti reči u odeljku 9.5.

DOKAZ: Budući da su p i q najmanji, između svakih dveju susednih linija rasecanja para p, q ostaće samo po jedan oblutak. Zato je jedinica najveći broj koji deli i p i q, pa će brojevi p i q biti međusobno prosti. □

Prethodna teorema je zapravo neposredna posledica teoreme 20 (VII.1). Zaista, ako su p i q najmanji među brojevima koji su sa njima u istoj razmeri, onda je jedinica poslednji ostatak u rasecanju brojeva p i q pa su p i q, na osnovu teoreme 20 (VII.1), međusobno prosti brojevi. Važi i obratno:

TEOREMA 24 (VII.21). *Ako su p i q međusobno prosti, oni su najmanji među brojevima koji su sa njima u istoj razmeri.*

DOKAZ: Budući da je jedinica najveći broj koji deli međusobno proste brojeve p i q, među svim brojevima koji su sa njima u istoj razmeri p i q će biti najmanji jer je tada između linija rasecanja brojeva p i q po jedan oblutak, a ne može ih biti manje. □

Karakterizacija međusobno prostih brojeva koja je sadržana u prethodnim dvema teoremama najverovatnije je u početku bila definicija međusobno prostih brojeva. Njihovo osnovno svojstvo prema kojem je jedinica njihova jedina zajednička mera, Euklid je smestio u definiciju VII. def. 13.

Efektivni postupak za nalaženje najmanjih, pa zbog toga i međusobno prostih brojeva, koji su proporcionalni zadatim brojevima, sada je sasvim jednostavan. Zaista:

Zadatak 2 (VII.33) Za zadate brojeve r i s naći najmanje brojeve koji su sa njima u istoj razmeri.[5]

DOKAZ: Neka je k najveća zajednička mera brojeva r i s. Budući da nema delioca brojeva r i s većeg od k, brojevi $p = r/k$ i $q = s/k$ su najmanji brojevi koji su proporcionalni brojevima r i s. □

Iste argumente Euklid upotrebljava u dokazu stava VII.4.

5.2. Proporcionalnost površinskih brojeva

Sada je upotrebom oblutaka lako dokazati još nekoliko osobina proporcionalnosti.[6]

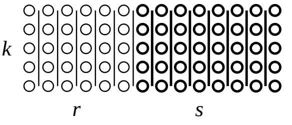
TEOREMA 25 (VII.17). *Površinski brojevi kr i ks odnose se jedan prema drugome kao njihove strane r i s.*[7]

DOKAZ: Površinski brojevi kr i ks očigledno imaju iste linije rasecanja kao i brojevi r i s (slika 5.2.1), pa je $r : s = kr : ks$. Međutim, iako je između svakih dvaju oblutaka, kojima su predstavljeni brojevi r i s, po jedna linija rasecanja, to ne znači da su r i s najmanji brojevi koji sa brojevima kr i ks u istoj razmeri.

[5] Ovo je poseban slučaj Euklidovog stava VII.33.

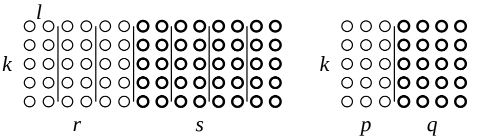
[6] O Euklidovim dokazima ovih osobina biće reči u odeljcima 9.4 i 9.5.

[7] Ovaj stav je diskretni analogon Euklidove teoreme VI.1 koja je od značaja za razumevanje Aristotelove definicije proporcije (*Topika*, 158 b).



Slika 5.2.1. $r : s = kr : ks$

Ako su p i q najmanji brojevi koji su u istoj razmeri sa brojevima r i s, tada postoji broj l takav da je $r = lp$ i $s = lq$. Sada je $kr = klp$ i $ks = klq$. Dakle, kr i ks će sa brojevima p i q biti u istoj razmeri, pa će zato biti u istoj razmeri i sa brojevima r i s, tj. $r : s = kr : ks$. □



Slika 5.2.2. $r : s = kr : ks$, $r = 6$, $s = 8$, $k = 5$, ($l = 2$, $p = 3$, $q = 4$)

Na isti način može se dokazati i sledeća teorema aritmetike oblutka:

Teorema 26 (VII.18). *Površinski brojevi rk i sk odnose se jedan prema drugome kao njihove strane r i s.*

Iako se Euklidov dokaz stava VII.17 idejno razlikuje od dokaza teoreme 25 (VII.17), i on u sebi sadrži relikte aritmetike oblutaka.[8] Ipak, među ovim dvama dokazima postoji i jedna važna razlika. Euklidov dokaz zahteva upotrebu stava VII.13, a teorema 25 (VII.17) ovaj stav ima za svoju posledicu. Zato je i on teorema aritmetike oblutaka. Zaista:

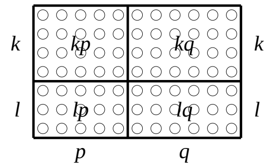
Teorema 27 (VII.13). *Ako je $r : s = r' : s'$, onda je i $r : r' = s : s'$.*[9]

Dokaz: Neka su p i q najmanji među brojevima koji koji imaju iste linije rasecanja kao i par r, s. Tada je $p : q = r : s = r' : s'$, pa postoje brojevi k i l takvi da je $r = kp$, $s = kq$, $r' = lp$ i $s' = lq$. Međutim, površinski brojevi kp i lp, a takođe i kq i lq, odnose se kao njihove strane k i l. Dakle, $k : l = kp : lp$ i $k : l = kq : lq$, pa je i $kp : lp = kq : lq$, tj. $r : r' = s : s'$. □

Osobina proporcije koja je upotrebom oblutaka dokazana u teoremi 27 (VII.13), nosi grčko ime *enallax* (ἐναλλάξ) ili latinsko *alternando* — obrtanje ili preokretanje. Aristotel ju je morao smatrati značajnom budući da je dva puta pominje u *Drugoj*

[8] O ovome će biti reči u odeljku 9.5.

[9] U *Drugoj analitici*, 74 a 17–25, Aristotel ističe da je ova osobina proporcije dokazana *odvojeno za brojeve, i linije, i tela, i vremena, mada je bilo moguće dokazati je jednim jedinim — opštim dokazom.* To je dokaz Euklidovog stava V.16, koji počiva na Eudoksovoj definiciji proporcionalnosti (V. def. 5). S obzirom na to da nas Proklo obaveštava da je Eudoks *povećao broj opštih teorema* [**46**, str. 66], dokaz koji pominje Aristotel najverovatnije pripada Eudoksu budući da njemu pripada i definicija proporcionalnih veličina iz pete knjige *Elemenata*.



Slika 5.2.3. VII.13

analitici (74 a, 99 a). Ona mu je bila pogodan primer osobine koja je najpre bila dokazana odvojeno za brojeve, duži, tela i vreme, da bi se kasnije, prema Aristotelovim rečima, utvrdilo da njen dokaz može biti opšti i da se odnosi na sve ove veličine koje imaju isto svojstvo neophodno za zajednički dokaz. Bez obzira na ovu Aristotelovu opasku, Euklid ovu osobinu proporcije dokazuje dva puta, najpre za bilo koje veličine (tj. za duži, poligonske površi i poliedre) u stavu V.16, a zatim i za (prirodne) brojeve u stavu VII.13. Stav V.16 dokazuje upotrebom Eudoksove definicije proporcionalnosti (*Elementi*, V. def. 5), a stav VII.13 na osnovu definicije VII. def. 21, upotrebom stava VII.10.[10] Zato ostaje nejasno na koji je opšti dokaz mogao da misli Aristotel.[11]

Sledeća teorema je neposredna posledica teoreme 27 (VII.13) pa stoga i ona pripada aritmetici oblutaka.

Teorema 28 (VII.14). *Ako je* $r : s = r' : s'$ *i* $s : t = s' : t'$, *tada je* $r : t = r' : t'$.

Dokaz: Ako je $r : s = r' : s'$ i $s : t = s' : t'$, biće i $r : r' = s : s'$ i $s : s' = t : t'$ (enallax). Stoga je $r : r' = t : t'$, a odavde je, na osnovu iste osobine, $r : t = r' : t'$. □

Zahvaljujući prethodnoj teoremi umesto dveju relacija $r : s = r' : s'$ i $s : t = s' : t'$, možemo da pišemo samo jednu: $r : s : t = r' : s' : t'$. Opštije, umesto $r_1 : r_2 = r_1' : r_2'$, $r_2 : r_3 = r_2' : r_3'$,..., $r_{n-1} : r_n = r_{n-1}' : r_n'$ možemo da pišemo

$$r_1 : r_2 : \ldots : r_n = r_1' : r_2' : \ldots : r_n',$$

i da, kao i Euklid u stavu VII.14, tvrdimo da su u nekoj proporciji sa proizvoljno mnogo članova *podjednako udaljeni brojevi* međusobno proporcionalni.[12]

Budući da smo u zadatku 2 (VII.33) za zadati par brojeva, samo upotrebom oblutaka našli najmanje brojeve koji su sa njima proporcionalni sada, zahvaljujući osobini koja je dokazana u prethodnoj teoremi, možemo to učiniti na isti način sa bilo kojom uređenom n-torkom brojeva. Zaista:

Zadatak 3 (VII.33) Za zadate brojeve $r_1, r_2, \ldots, r_n$ naći najmanje brojeve koji su sa njima u istoj razmeri.

[10] O ovome će biti reči u odeljku 9.4.

[11] U Bekerovom pokušaju da rekonstruiše *opšti* dokaz [**5**, str. 323], od važnosti je upotreba stava o jednakosti proizvoda unutrašnjih i spoljašnjih članova proporcije koji Aristotel nikada ne pominje. Videti i [**29**, str. 265], [**53**, str. 177].

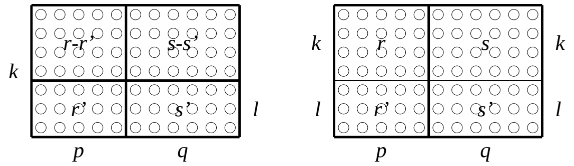
[12] Zato se osobina iskazana ovim stavom obično naziva *ex aequali*. Istu osobinu Euklid dokazuje u stavu V.22 koji se odnosi na veličine, a ne na brojeve.

DOKAZ: Ako je k najveća zajednička mera brojeva $r_1, r_2, \ldots, r_n$, onda će brojevi $p_1 = r_1/k, p_2 = r_2/k, \ldots, p_n = r_n/k$ biti najmanji brojevi koji su proporcionalni brojevima $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Svi ostali brojevi koji su im proporcionalni biće površinski brojevi oblika $kp_1, kp_2, \ldots, kp_n$. □

Upotrebljavajući osobine proporcije koje su dokazane u teoremama 22 (VII.20), 24 (VII.21) i 25 (VII.17), sada je, samo upotrebom oblutaka moguće dokazati još dve osobine proporcija.

TEOREMA 29 (VII.11–12). *Ako je $r : s = r' : s'$ $(r > r', s > s')$, tada je*

$$(r - r') : (s - s') = r : s \quad \text{i} \quad (r + r') : (s + s') = r : s.$$



SLIKA 5.2.4. $(r \pm r') : (s \pm s') = p : q = r : s$

Dokaz: Ako su p i q najmanji brojevi takvi da je $p : q = r : s = r' : s'$, tada su r i s površinski brojevi kp i kq kojima su strane p i q, a zajednička visina k. Međutim, i r' i s' su površinski brojevi lp i lq kojima su strane p i q, a zajednička visina l. Sada su $r - r'$ i $s - s'$ površinski brojevi $(k-l)p$ i $(k-l)q$, a $r + r'$ i $s + s'$ površinski brojevi $(k + l)p$ i $(k + l)q$, te je

$$(r - r') : (s - s') = r : s \quad \text{i} \quad (r + r') : (s + s') = r : s.$$ □

5.3. Jednakost proizvoda unutrašnjih i spoljašnjih članova proporcije

Upotrebom osobina proporcija koje su dokazane u teoremama 25 (VII.17), 15 (VII.16) i 21 (V.9) sada je jednostavno dokazati i aritmetički stav o jednakosti proizvoda unutrašnjih i spoljašnjih članova proporcije.[13]

TEOREMA 30 (VII.19). *Ako su r, s, r' i s' brojevi, onda je $r : s = r' : s'$ ako i samo ako je $rs' = sr'$.*

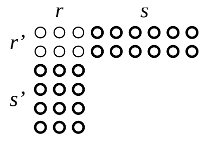
Dokaz: Neka su

$$r'(r + s) \quad \text{i} \quad r(r' + s')$$

površinski brojevi predstavljeni oblucima, takvi da obluci kojima je predstavljen površinski broj rr' pripadaju i jednom i drugom (slika 5.3.1). Tada se površinski brojevi rr' i sr' odnose se jedan prema drugome kao njihove strane r i s, a $r'r$ i $s'r$ kao strane r' i s' (teorema 25 (VII.17)). Međutim, $r : s = r' : s'$, pa je stoga,

$$r'r : s'r = r' : s' = r : s = rr' : sr'.$$

[13] O Euklidovom dokazu ove tvrdnje biće reči i u odeljku 9.5.



SLIKA 5.3.1. Ako je $r : s = r' : s'$ onda je $rs' = sr'$

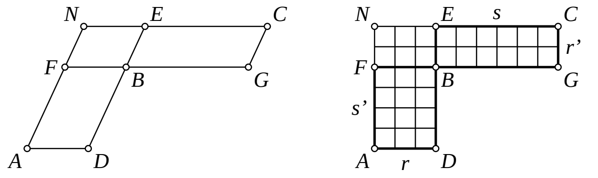
Međutim, $rr' = r'r$ (teorema 15 (VII.16)), pa je i $s'r = sr'$ (teorema 21 (V.9)). Tada je i $rs' = sr'$ (teorema 15 (VII.16)).

Jasno je da važi i obratno. □

Pre nego što će u sedmoj knjizi *Elemenata*, u stavu VII.19, dokazati aritmetički stav o jednakosti proizvoda unutrašnjih i spoljašnjih članova proporcije, Euklid u šestoj knjizi, u stavu VI.16 dokazuje geometrijsku tvrdnju prema kojoj će četiri duži biti proporcionalne ako i samo ako je pravougaonik kojem su ivice dve krajnje duži, jednak pravougaoniku kojem su ivice dve srednje duži u toj proporciji. Sva razlika ovih dvaju stavova se sastoji u tome što se stav VI.16 odnosi na duži koje su proizvoljnih dužina, a VII.19 na celobrojne duž. Međutim, stav VI.16 je samo poseban slučaj stava VI.14 prema kojem su paralelogrami koji imaju podudarne odgovarajuće uglove, geometrijski jednaki ako i samo ako su im ivice koje obrazuju ove uglove obrnuto proporcionalne.

Ideja koja se upotrebljava u dokazu prethodne teoreme ne razlikuje se u osnovi od ideje koju Euklid koristi u dokazu stava VI.14. I slika 5.3.1 kojom je ilustrovana u punoj je analogiji sa slikom kojom Euklid ilustruje ovaj geometrijski stav. Štaviše, u dokazu teoreme 30 (VII.19) upotrebljena je ista argumentacija kao i u dokazu ovog stava šeste knjige *Elemenata*. Oni su u analogiji.

Zaista, u nameri da dokaže stav VI.14, Euklid pretpostavlja da paralelogrami $ADBF$ i $BGCE$ imaju podudarne (unakrsne) uglove kod zajedničkog temena B, i da je $DB : BE = GB : BF$ (slika 5.3.2). Tada su, na osnovu stava VI.1, ivice DB i BE proporcionalne površima $ADBF$ i $FBEN$, a ivice GB i BF, površima $BGCE$ i $FBEN$. Odavde sledi da su i površi $ADBF$ i $FBEN$ proporcionalne površima $BGCE$ i $FBEN$ pa su, na osnovu stava V.9, površi $ADBF$ i $BGCE$ međusobno jednake.[14] Lako je dokazati i obrat.



SLIKA 5.3.2. Euklidov stav VI.14 i teorema 30 (VII.19)

[14] Iako Euklid ne definiše jednakost veličina, može se razumeti da, u slučeju kada su veličine poligonske površi jednakost može biti razloživa ili dopunska.

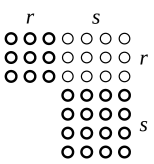
Iako je pogodan za upotrebu u dokazivanju stavova o proporciji, ovaj stav je izgleda ostao na margini antifairetičke teorije. Aristotel ga nigde ne pominje.[15]

5.4. Neprekidne proporcije u aritmetici oblutaka

Slédeći Euklidove ideje iz dokaza stava VI.23, sada je moguće samo upotrebom oblutaka dokazati još dva važna stava teorije proporcija.[16] Oni se odnose na neprekidne proporcije (V. def. 8 i V. def. 9).[17]

TEOREMA 31 (VIII.11). *Kakvigod da su brojevi r i s biće*

$$r : s = r^2 : rs = rs : s^2.$$

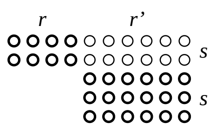


SLIKA 5.4.1. $r^2 : rs = rs : s^2$

Dokaz: Neka su $(r+s)r$ i $(r+s)s$ površinski brojevi predstavljeni oblucima takvi da površinski broj rs $(= sr)$ pripada svakom od njih (slika 5.4.1). Tada će odnos površinskih brojeva r^2 i rs koji imaju istu visinu r, biti jednak odnosu njihovih strana r i s (teorema 25 (VII.17)). Štaviše, odnos visina r i s jednak je odnosu površinskih brojeva sr i s^2 koji imaju istu stranu s, te je stoga $r : s = r^2 : rs = rs : s^2$. □

Upotrebom iste ideje može se dokazati opštija tvrdnja:

TEOREMA 32 (VIII.18). *Ako je $r : s = r' : s'$, tada je $rs : r's = r's : r's'$.*



SLIKA 5.4.2. $rs : r's = r's : r's'$

Dokaz: Neka su $(r + r')s$ i $(s + s')r'$ površinski brojevi predstavljeni oblucima, takvi da površinski broj $r's$ $(= sr')$ pripada i jednom i drugom (slika 5.4.2). Tada

[15] Zato je malo verovatno da je bio korišćen u (antifairetičkom) dokazu teoreme 27 (VII.13). Videti [**5**, str. 323], [**29**, str. 265], [**53**, str. 177].

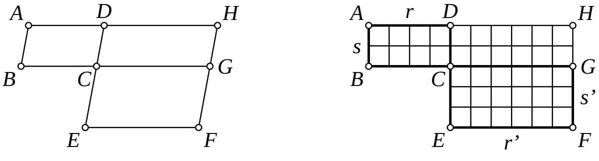
[16] O Euklidovim dokazima ovih stavova biće reči u poglavlju 10.3.

[17] U skladu sa ovim dvema definicijama primenjenim na brojeve p, q i r, proporcija $p : q = q : r$ se naziva *neprekidnom*. Njeni članovi p, q i r pripadaju geometrijskoj progresiji. Zato se proporcija $p : q = q : r$ može nazvati i *geometrijskom* kao što to čine Arhita (Diels, 47.B2) i Aristotel (*Nikomahova etika*, 1131 b).

je odnos površinskih brojeva sr i sr' koji imaju istu visinu s, jednak odnosu strana r i r' (teorema 25 (VII.17)), a odnos visina s i s' jednak odnosu površinskih brojeva $r's$ i $r's'$. Međutim, ako je $r : s = r' : s'$ tada je i $r : r' = s : s'$ (teorema 27 (VII.13)). Zato je

$$rs : r's = r : r' = s : s' = r's : r's'. \qquad \Box$$

Ideja na kojoj je zasnovan dokaz prethodne teoreme dolazi iz geometrije, iz stava VI.23 u kojem Euklid dokazuje da su paralelogramske površi sa jednakim uglovima u razmeri složenoj od razmera strana. U dokazu on pretpostavlja da su $ABCD$ i $CEFG$ dva paralelograma kojima su uglovi kod zajedničkog temena C unakrsni pa, stoga, i međusobno podudarni (slika 5.4.3). Posle toga, on primećuje da postoje duži k, l i m takve da je $BC : CG = k : l$ i $DC : CE = l : m$ (VI.12) i zaključuje (*ex aequali* — stav V.22)[18] da je tada i $k : m = BC : CE$. Međutim, ako je H četvrto teme paralelograma kojem su tri temena tačke D, C i G, odnos $BC : CG$ biće jednak odnosu površi $ABCD$ i $DCGH$ (VI.1) pa je i odnos $k : l$ jednak odnosu tih dveju površi.[19] Na isti način je odnos $l : m$ jednak odnosu površi $DCGH$ i $CEFG$. Zato je odnos $k : m$ jednak odnosu površi $ABCD$ i $CEFG$. Međutim, odnos $k : m$ je složen od odnosa $k : l$ i $l : m$, pa je i odnos površi $ABCD$ i $CEFG$, koji je jednak odnosu $BC : CE$, složen od odnosa $BC : CG$ i $DC : CE$.



SLIKA 5.4.3. VI.23 i VIII.18

U posebnom slučaju kada su $ABCD$ i $CEFG$ pravougaonici kojima su ivice BC, CD, CG i CE celobrojnih dužina r, s, r' i s', onda je odnos površi $ABCD$ i $DCGH$ jednak odnosu brojeva rs i $r's$, a površi $DCGH$ i $CEFG$ odnosu brojeva $r's$ i $r's'$. Ako je, uz to, i $r : r' = s : s'$ biće $rs : r's = r's : r's'$. Zato je aritmetički stav VIII.18 samo poseban slučaj geometrijskog stava VI.23.

Štaviše, ako su $ABCD$ i $CEFG$ kvadrati, onda je $r = s$ i $r' = s'$, pa je $r^2 : r'r = r'r : r'^2$. Zato je i stav VIII.11 poseban slučaj stava VI.23.

[18] Prema ovom stavu *jednako udaljene veličine su u istoj razmeri.* On je u analogiji sa aritmetičkim stavom VII.14.

[19] U nameri da izbegne upotrebu „geometrijske algebre," kada raspravlja o proporcionalnosti veličina Euklid ne govori o *jednakosti*, već o *istosti* odnosa.

POGLAVLJE 6

Euklidova teorija parnih i neparnih brojeva

Dihotomija parnih i neparnih brojeva bila je u središtu pažnje pitagorejaca još od njihovih početaka. Već je Filolaj, prvi među pitagorejcima koji je sastavio spis *O prirodi*,[1] istakao značaj podele brojeva na parne i neparne.[2] Doduše, misleći na jedinicu, on ističe da, pored parnih i neparnih brojeva, postoji i *parno-neparni broj* koji je *nastao mešanjem jednog i drugog*.[3]

O važnosti ove podele za pitagorejce obaveštava nas i Aristotel. Prema njegovom svedočenju, za njih je parno-neparno bio jedan od osnovnih parova suprotnosti još od vremena Alkmeona iz Krotona,[4] koji je *imao najviše uspeha u doba Pitagorine starosti*.[5] Time je pitagorejsko bavljenje parnim i neparnim brojevima stavljeno u najraniji period pitagorejstva, na sam početak petog veka stare ere. Budući da se ne može isključiti ni mogućnost da ono dolazi od samog Pitagore, nije nemoguće da prva istraživanja o parnim i neparnim brojevima pripadaju drugoj polovini šestog veka stare ere. Da je zaista tako potvrđuje sačuvani Epiharmov odlomak o upotrebi oblutaka u predstavljanju parnih i neparnih brojeva.

I Platon je držao do važnosti problematike koja se odnosi na parne i neparne brojeve. Međutim, on je u tome otišao isuviše daleko budući da je bio mišljenja da je sva aritmetika znanje o parnom i neparnom. U razgovoru sa Gorgijom, kada odgovara na pitanje na šta se odnosi aritmetika, Platonov Sokrat kazuje da se odnosi *na parne i neparne brojeve, bez obzira na to koliko je jedinica u jednom i drugom*.[6] U *Teetetu* on dodaje da aritmetiku treba shvatiti *kao lov na znanje o*

---

[1] Diogen Laertije (VIII.85) prenosi Demetrijeve reči kazujući da ovaj spis sadrži zapravo Pitagorine rasprave.

[2] Prema njegovim rečima:

> *broj zaista ima dva vlastita lika, neparni i parni i treći koji je nastao mešanjem jednog i drugog, parno-neparni. Svaki od ta dva lika ima mnogo oblika, koje svaka pojedina stvar sama od sebe otkriva.*

Diels, 44.B5.

[3] I prema Aristotelovom svedočenju, za pitagorejce je jedinica bila i parna i neparna (*Metafizika*, 986 a 20).

[4] Aristotel, *Metafizika*, 986 a 28. Doduše, Aristotel je u nedoumici da li je Alkmeon *svoje ideje primio od pitagorejaca, ili oni od njega*, ali njegova nedoumica se odnosi na učenje o suprotnostima, a ne na učenje o parnim i neparnim brojevima koje izvesno pripada pitagorejcima.

[5] Nije isključeno da je ova opaska o vremenu u kojem živi Alkmeon kasniji dodatak Aristotelovom tekstu koji dolazi od peripatetičara. Čak i ako se uzme sa rezervom, ona vreme Alkmeonove zrelosti ne može pomeriti mnogo bliže nama od samog početka petog veka stare ere. Videti [**56**, str. 156].

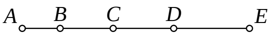
[6] Platon, *Gorgija*, 451 b. Videti i [**29**, str. 134f].

svakom parnom i neparnom broju.[7] O tome koje bi to znanje moglo biti možemo saznati iz devete knjige *Elemenata*.

6.1. Sabiranje, oduzimanje i množenje neparnih i parnih brojeva

Ako su parni i neparni brojevi predstavljeni oblucima, njihovo sabiranje lako je razumljivo. Zaista, dokazi teoreme 1 (IX.21) o sumi parnih brojeva, i teorema 2 (IX.22) i 3 (IX.23) o sumi (parno ili neparno mnogo) neparnih brojeva, sasvim su jednostavni i oslanjaju se samo na očiglednost slike. Logika ovih dokaza, koji dolaze iz geometrije oblutaka, sačuvana je u Euklidovim stavovima IX.21 i IX.23–24.

U prvom od njih, stavu IX.21, Euklid pretpostavlja da je svaki od četiriju (parno mnogo) zadatih brojeva paran i zaključuje da svaki od njih *za svoj deo ima polovinu* budući da je deljiv na dva jednaka dela, te da stoga i njihova suma ima *za svoj deo polovinu*.[8] Zato je ona paran broj. Ovaj dokaz je sasvim kratak i u njemu se Euklid ne poziva ni na jednu aksiomu i ni na jedan od prethodnih stavova *Elemenata*, već samo na definiciju parnog broja. Ostaje nejasno na čemu je zasnovana tvrdnja da suma nekih brojeva za svoj deo ima polovinu ako svaki od tih brojeva ima polovinu za svoj deo. Stoga Euklidov dokaz stava IX.21 i nije pravi dokaz, te je njegova uverljivost mogla je počivati samo na uverljivosti slike. Međutim, ni Euklidova slika nije uverljiva. Na njoj su brojevi (njih parno mnogo, a u Euklidovom dokazu samo 4) predstavljeni dužima AB, BC, CD, DE koje pripadaju jednoj pravoj, i ni na koji način nije sugerisano njihovo polovljenje koje je od ključnog značaja za razumevanje dokaza.



Slika 6.1.2. Euklidova slika uz dokaz stava IX.21, o zbiru parnih brojeva

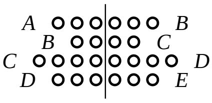
Naprotiv, slika koja dolazi iz geometrije oblutaka *očigledno* stavlja na znanje da je tvrdnja istinita, te da je suma parnih brojeva paran broj. Iako je Euklidov dokaz utemeljen na apstraktnom poimanju brojeva, njegov dokaz ove tvrdnje ne bi morao biti promenjen ni za slovo da je ilustrovan slikom sa oblucima. Problem je u tome što bi u toj ilustraciji parni brojevi AB, BC, CD, DE bili predstavljeni sasvim konkretnim parnim brojevima oblutaka, i time bi slika izgubila na opštosti.[9]

Isto bi se moglo reći i za stavove IX.22 i IX.23, u kojima Euklid dokazuje da je suma parno mnogo neparnih brojeva, paran broj, a suma neparno mnogo neparnih brojeva, neparan. U svojim dokazima on od svakog od zadatih neparnih brojeva oduzima jedinicu i tako dobija parne brojeve koje sabira i, u skladu sa stavom IX.21, dobije paran broj. U zavisnosti od toga koliko je zadato neparnih brojeva, parno ili neparno mnogo, i broj oduzetih jedinica će biti paran ili neparan. U stavu

[7] Platon, *Teetet*, 198 a.

[8] Euklid *délom* nekog broja naziva broj koji ga deli jer, prema trećoj definiciji sedme knjige, *jedan broj čini* deo *drugog broja, manji od većeg, ako meri veći.* Ako ga ne deli, on taj broj, u četvrtoj definiciji, naziva *delovima*. O délu i delovima će biti više reči u odeljku 9.1.

[9] Na slici 6.1.3 brojevi AB, BC, CD, DE su, redom, 6, 4, 8, 6.



Slika 6.1.3. Slika sa oblucima koja ilustruje dokaz stava IX.21

IX.22 on utvrđuje da je broj oduzetih jedinica paran i zaključuje da je i ukupni zbir paran broj, a u stavu IX.23 da su i broj oduzetih jedinica i ukupni zbir neparni brojevi. Iako ove stavove Euklid ilustruje dužima, a ne oblucima, argumenti u njihovim dokazima ne razlikuju se od argumenata u dokazima tih stavova do kojih se dolazi upotrebom oblutaka. Ipak, opet bi Euklidovi dokazi bili uverljiviji da su ilustrovani oblucima.

U *Elementima* nema stava o sumi parnog i neparnog broja, a ima o njihovoj razlici. U stavovima IX.25 i IX.27 Euklid dokazuje da je razlika parnog i neparnog broja neparan broj, isto kao što je neparna i razlika neparnog i parnog broja. Ova dva stava kao i stavovi IX.24 i IX.26 o razlici dvaju parnih i razlici dvaju neparnih brojeva, mogu se komentarisati na sličan način kao i stavovi o sabiranju parnih i neparnih brojeva.

Stavovi IX.28 i IX.29 odnose se na množenje. U prvom Euklid dokazuje da je proizvod neparnog i parnog broja paran, a u drugom da je proizvod neparnih brojeva neparan. U *Elementima* nema stava o proizvodu parnih brojeva već je dokaz da je proizvod dvaju parnih brojeva paran, sadržan u dokazu stava IX.28.

Euklid u svojim dokazima stavova o proizvodu parnih i neparnih brojeva ne prati logiku dokaza teorema 9 (IX.28) i 10 (IX.29) iz odeljka 3.2, koje pripadaju aritmetici oblutaka, već se u njima jednostavno poziva na već dokazane stavove IX.21 i IX.23 o sabiranju parnih i neparnih brojeva. Međutim, i ovi stavovi dolaze iz aritmetike oblutaka (slika 3.1.1) tako da Euklidovi dokazi svakako počivaju na tradiciji ranopitagorejske matematike.

6.2. Parno-parni i parno-neparni brojevi

Posle stavova IX.21–29 u kojima daje odgovare na pitanja o sabiranju, oduzimanju i množenju parnih i neparnih brojeva, Euklid dokazuje pet stavova o polovljenju i udvostručavanju. Kao i stavovi koji im prethode, i stavovi IX.30–34 se odnose na parne i neparne brojeve. Oni se od prethodnih ipak u nečemu razlikuju. U njihovim dokazima, strogo govoreći, upotrebljava se i indirektna metoda. Međutim, njome se uvek već u prvom koraku dolazi do kontradikcije, tako da se do dokaza svih ovih stavova može se doći i prostom analizom, bez eksplicitne upotrebe indirektne metode, kao što je to učinjeno u odeljku 3.3.

U stavu IX.30 Euklid dokazuje da *neparni broj p koji deli neki parni broj q, deli i njegovu polovinu*, tako što iz pretpostavki da je $q = kp$ i da je k neparan broj, na osnovu stava IX.29 (ili IX.23) zaključuje da bi tada i proizvod kp bi bio neparan broj, a paran je po pretpostavci. Dakle, k je paran broj pa p deli q paran broj puta. On stoga deli i $q/2$.[10] Da ovaj stav ima i svoju interpretaciju

[10] Drugim rečima, k je paran broj kao i q pa je $q/2 = (k/2)p$. Zato p deli i $q/2$.

oblucima pokazali smo u dokazu teoreme 11 (IX.30). Štaviše, dokaz ovog stava koji je eksplicitno indirektan, lako se može načiniti direktnim baš kao što je i dokaz teoreme 11 (IX.30).

Iz stava IX.30 (kontrapozicijom) neposredno sledi da neparni broj koji ne deli neki drugi broj, neće deliti ni broj dvostruko veći od njega. Euklid ovo ne ističe, ali u stavu IX.31 dokazuje tvrđenje prema kojem je *neparni broj p koji je sa nekim brojem q uzajamno prost, uzajamno prost i sa brojem $2q$*. Dokaz je sasvim jednostavan. Ako brojevi p i $2q$ ne bi bili uzajamno prosti jer ih deli neki broj k, tada bi k bio neparan jer je p neparan (na osnovu stavova IX.28–29), pa pošto deli $2q$, delio bi i q (na osnovu stava IX.30), a ne deli ga. I ovaj dokaz u osnovi je indirektan ali se i u njemu do kontradikcije dolazi u samo jednom koraku.

Naprotiv, Euklidov dokaz stava IX.32 je direktan. Prema ovom stavu, svaki od brojeva koji se dobijaju *od dvojke neprekidnim udvostručavanjem, samo je parno-paran broj*. Budući da broj naziva parno-parnim ako *se meri parnim brojem paran broj puta* (VII. def. 8), pretpostavljajući da je neki broj *samo parno-paran* Euklid zapravo pretpostavlja da taj broj nema neparnih delilaca. Razume se, svaki takav broj je oblika $2^n, n \geq 2$. U nameri da dokaže da nijedan od brojeva 2^n nema neparnih delilaca,[11] Euklid se u dokazu stava IX.32 poziva na stav IX.13 koji pripada teoriji neprekidno proporcionalnih brojeva utemeljenoj u osmoj, i s početke devete knjige *Elemenata*.[12] Time je naizgled opravdano svrstavanje teorije o parnim i neparnim brojevima na sam kraj devete knjige ali, dokazujući stav IX.32 upotrebom stava IX.13, Euklid je samo na ovom mestu narušio samodovoljnost aritmetike parnih i neparnih brojeva izložene u *Elementima*.

Međutim, čini se neprikladnim da se jedan stav teorije proporcija koji ima dug i složen dokaz, upotrebljava u dokazu jednog sasvim jednostavnog stava o parnim i neparnim brojevima. Tim pre što je stav IX.32 jednostavna posledica stava IX.30.[13] Zaista, na osnovu stava IX.30, ako neparni broj p ne deli neki drugi broj q, on ne deli ni $2q$. Zato, budući da nijedan neparni broj ne deli broj 2,[14] ni jedan od njih neće deliti ni brojeve 4, 8, 16, itd. Drugim rečima, nijedan od brojeva oblika 2^n nije deljiv ni sa jednim neparnim brojem pa je svaki od njih samo parno-paran.

Dokazujući u stavu IX.33 da je *broj koji ima neparnu polovinu, samo parno-neparan*,[15] Euklid najpre primećuje da je broj p koji ima neparnu polovinu, parno-neparan jer je proizvod broja 2 i neparnog broja. Ako bi p bio i parno-paran broj, tada bi i njegova polovina bila paran broj, a neparna je po pretpostavci. Kako ne

[11] Razume se, jedinica je isključena jer ona za pitagorejce i nije bila broj. Štaviše, prema Aristotelovom svedočenju, za pitagorejce je jedinica bila i parna i neparna. Aristotel, *Metafizika*, 986 a.

[12] Prema stavu IX.13, *ako postoji ma koliko neprekidno proporcionalnih brojeva sa jedinicom na prvom mestu, i broj, prvi iza jedinice je prost, onda se najveći broj neće nikakvim drugim brojevima meriti sem onih koji su među proporcionalnim brojevima*. Drugim rečima, ako je $1 : p_1 = p_1 : p_2 = \ldots = p_{n-1} : p_n$ i ako je p_1 prost broj, tada broj p_n nije deljiv ni jednim drugim brojem osim brojevima $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. Euklidov (indirektni) dokaz ovog stava je veoma dug.

[13] Ovo je prvi primetio Beker [**6**, str. 536].

[14] Podsetimo se, jedinica za Grke nije bila broj.

[15] Prema Euklidovoj definiciji VII. def. 10, *parno-neparan broj je onaj koji se meri neparnim brojem paran broj puta*.

može biti proizvod dvaju parnih ili dvaju neparnih brojeva, p je, prema Euklidovom zaključku, samo parno-neparan broj.

6.3. Stav IX.34

Pred kraj devete knjige *Elemenata*, u stavu IX.34 kojim se završava njegovo razmatranje osobina parnih i neparnih brojeva, Euklid pretpostavlja da se broj p ne dobija uzastopnim udvostručavanjem broja 2 (pa nije oblika 2^n) i da njegova polovina nije neparan već paran broj (te da stoga nisu ispunjeni uslovi ni jednog od prethodnih dvaju stavova), i dokazuje da je on tada i parno-paran i parno-neparan broj. Zaista, kako je polovina broja p parna, na osnovu definicije VII. def. 8 on će biti parno-paran. U nameri da dokaže da je broj p i parno-neparan Euklid ga polovi, a potom polovi tu polovinu, i zaključuje se da posle konačno mnogo ponavljanja postupka polovljenja može doći ili do nekog neparnog broja ili do broja 2. Ako se postupak polovljena završava brojem 2, onda se broj p dobija uzastopnim udvostručavanjem broja 2, a to je isključeno. Dakle, postupkom polovljenja dolazi se do neparnog broja, pa je p i parno-neparan broj.

U stavu IX.34, Euklid zapravo dokazuje da je svaki parni broj p proizvod nekog neparnog broja c i stepena broja 2, tj.

$$p = c \cdot 2^n, \quad c = 2m - 1.$$

U stavu IX.32 on izdvaja slučaj kada je $c = 1$, a u stavu IX.33 slučaj kada je $n = 1$, a $c > 1$. Međutim, u dokazu stava IX.34 on ne upotrebljava ove stavove. Štaviše, u dokazu ovog stava on ne upotrebljava ni jednu od već dokazanih teorema, a ovaj stav neće upotrebiti ni u jednom od stavova koji slede. Isto se može reći i za stav IX.33. Za razumevanje njihovih dokaza dovoljno je znati definicije parno-parnih i parno-neparnih brojeva. Stoga je deduktivna struktura svakog od ovih dvaju stavova trivijalna. Štaviše, nijedan od njih nije ni u kakvoj kauzalnoj vezi sa ostalim stavovima *Elemenata*. Zato se postavlja pitanje zašto je Euklid ove stavove uopšte svrstao u *Elemente*, ne samo zbog toga što ih kasnije ne koristi, već stoga što ostaje nejasno zašto je faktorizacija parnih brojeva iz stava IX.34 toliko značajna da bi bila posebno istaknuta. Ispostaviće se da ovaj stav za svoju jednostavnu posledicu ima tvrdnju prema kojoj ne postoji kvadratni broj dvostruko veći od nekog drugog kvadratnog broja te da, stoga, kvadratni koren broja dva nije racionalan broj.[16]

[16] O ovome biće reči i u odeljku 14.2.

POGLAVLJE 7

Euklidovi stavovi o sabiranju i množenju brojeva

Stavovi o parnim i neparnim brojevima iz devete knjige *Elemenata* veoma su jednostavni i spadaju u najstarije aritmetičke stavove koje je Euklid uvrstio u svoju raspravu. Međutim, bez obzira na to što se njihovom upotrebom može dokazati da ne postoji kvadratni broj dvostruko veći od nekog drugog kvadratnog broja te da, stoga, postoje iracionalne veličine, oni se ipak ne čine presudnim za razvoj aritmetike.[1] Od stavova o zbiru, razlici i proizvodu parnih i neparnih brojeva za aritmetiku su značajniji stavovi u kojima se dokazuju osnovne osobine operacija sabiranja i množenja na skupu pozitivnih celih brojeva. To su, pre svega, osobine komutativnosti proizvoda i distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje.

7.1. Distributivnost

U stavu VII.5 Euklid tvrdi da

> *ako jedan broj* (r) *čini deo drugog broja* (r') *i neki drugi broj* (s) *čini isti deo nekog drugog broja* (s'), *onda i zbir* ($r+s$) *prvih brojeva čini isti deo zbira* ($r'+s'$) *drugih brojeva, kao pojedini broj pojedinog.*

Ovim stavom on zapravo dokazuje osobinu distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje. U nameri da to učini on najpre pretpostavlja da je broj r (k-ti) deo nekog broja r', tj. da postoji broj k takav da je $r' = kr$, i da je s isti deo nekog broja s', tj. da je $s' = ks$.[2] Svaki od brojeva r' i s' on deli na k jednakih delova i sabiranjem k-tog dela od r', tj. broja r, i k-tog dela od s', tj. broja s, dobija zbir $r+s$. Na posletku, zaključuje da u zbiru brojeva r' i s' ima k zbirova brojeva r i s te da je, zbog toga,

$$k(r+s) = kr + ks.$$

Kao ni dokazi stavova IX.21 i IX.23–24 o kojima je već bilo reči,[3] ni ovaj dokaz nije právi dokaz jer se u njemu upotrebljavaju argumenti koji su ostali bez dokaza. Zapravo, u njemu se Euklid ne poziva ni na jednu od teorema koju je već dokazao i ne upotrebljava ni jednu aksiomu, već samo definiciju (k-tog) *dela*. Iako je na samom početku druge knjige *Elemenata*, u stavu II.1,[4] dokazao opštiju

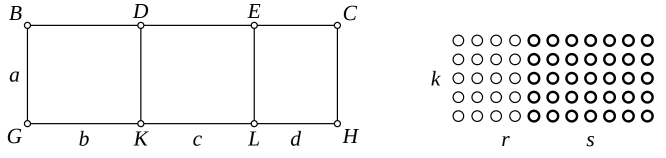
[1] Razume se, aritmetička istraživanja su mogla biti pokrenuta i nečim što nije od presudne važnosti za utemeljenje aritmetike.

[2] Prema Euklidovoj definiciji VII. def. 3, jedan broj je deo drugog, ako ga deli. O ovoj definiciji biće reči i u poglavlju 9.1.

[3] O njima je bilo reči u odeljku 6.1.

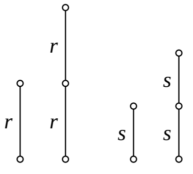
[4] O ovom stavu bilo je reči u odeljku 4.2.

tvrdnju, Euklid u sedmoj knjizi to naizgled zaboravlja i stav VII.5 dokazuje na sasvim nov način. Uz neke stavove prve knjige, u dokazu stava II.1 on upotrebljava i očiglednu tvrdnju da je pravougaonik ($GHCB$) koji se sastoji iz drugih pravougaonika ($GKDB$, $KLED$, $LHCE$) jednak njihovom zbiru (slika 7.1.1), dok u njegovom dokazu stava VII.5 nema upotrebe sredstava koji ga mogu učiniti očiglednim.



Slika 7.1.1. *Elementi*, stavovi II.1 i VII.5

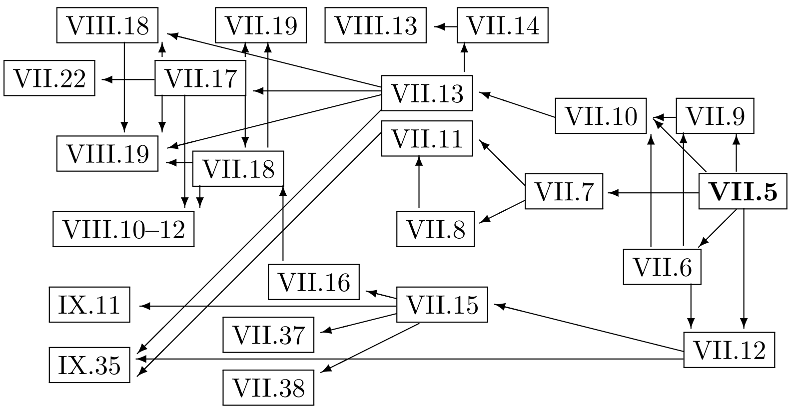
Dokaz stava VII.5 podrazumeva visok stepen apstrakcije budući da, za razliku od slike koja dolazi uz dokaz stava II.1, slika kojom je on ilustrovan nema nikakvu uverljivost jer se sastoji samo iz nekoliko duži koje predstavljaju brojeve (slika 7.1.2). Doduše, Euklid je ipak pokušao da njome postigne izvesno sugestivno dejstvo predstavljajući brojeve r' i s' dužima koje su dva puta duže od duži kojima su predstavljeni brojevi r i s.



Slika 7.1.2. Slika uz Euklidov stav VII.5

Iako slike uz dokaze stavova II.1 i VII.5 nisu u analogiji, njihovi dokazi ipak jesu. Zaista, kada u svom dokazu pretpostavi da je r k-ti deo broja r', a s k-ti deo broja s', Euklid zapravo pretpostavlja postojanje površinskih brojeva $r' = kr$ i $s' = ks$ (koji se predstavljaju oblucima raspoređenim u obliku dvaju pravougaonika sa zajedničkom stranom k, VII. def. 17). Kada sabira k-ti deo broja r' i k-ti deo broja s' on sabira strane r i s površinskih brojeva kr i ks (slika 7.1.1). Njihovim sabiranjem dobija stranu $r + s$ površinskog broja $k(r + s)$. Na posletku primećuje da se zbir površinskih brojeva kr i ks sastoji k zbirova brojeva r i s i zaključuje da je površinski broj $kr + ks$ jednak površinskom broju $k(r + s)$ na isti način na koji u stavu II.1 zaključuje da je suma pravougaonika $GKDB$, $KLED$, $LHCE$ jednaka pravougaoniku $GHCB$.

Stav VII.5 Euklid upotrebljava neposredno samo u dokazima stavova VII.6 i VII.7 koji se takođe odnose na distributivnost, zatim u dokazima uvodnih stavova (VII.9 i VII.10) u teoriju proporcija i, na posletku, u dokazu stava VII.12 koji pripada samoj teoriji proporcija. Međutim, posredno ga upotrebljava u skoro svim ostalim stavovima sedme knjige *Elemenata*. U osmoj knjizi upotrebiće ga (posredno) u dokazima svih njenih stavova, bez izuzetka. Upotrebljavaće ga i u devetoj knjizi. Izuzetak su samo stavovi IX.21–34 koji se odnose na osobine parnih i neparnih brojeva.



Deduktivna struktura Euklidovih stavova koji slede samo iz stava VII.5

O značaju stava VII.5 možemo suditi i na osnovu činjenice da mnogi stavovi Euklidovih aritmetičkih knjiga slede samo iz stava VII.5 ili iz njegovih neposrednih ili posrednih posledica. Deduktivna struktura isključivo njegovih posledica sastoji se iz dvadeset pet stavova. Oni sačinjavaju malu aritmetičku teoriju koja nije trivijalna. Naprotiv, složena je, a pored toga su i dokazi pojedinih stavova ove teorije složeni. Mnogi od ovih stavova su i veoma značajni tako da je Euklidova aritmetika, a pre svega njegova teorija proporcija i teorija neprekidnih proporcija, bez njih nezamisliva. Jednostavno, VII.5 je temeljni stav Euklidove aritmetike. Budući da se u njegovom dokazu Euklid ne poziva na druge stavove, on u *Elemenatima* ima funkciju osnovnog stava.

7.2. Prve posledice stava VII.5

Posle stava VII.5 Euklid dokazuje još tri stava koji se odnose na distributivnost množenja i deljenja brojeva u odnosu na sabiranje i oduzimanje. To su stavovi VII.6–8. Svi oni slede samo iz stava VII.5. Pretpostavljajući da broj l deli i r i s, u stavu VII.6, Euklid dokazuje da je

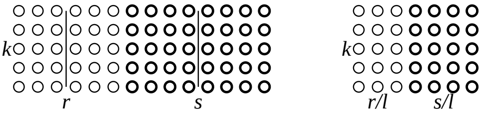
$$k(r/l) + k(s/l) = k(r+s)/l.$$

U nameri da to učini on najpre pretpostavlja da se broj r' sastoji iz k l-tih delova nekog broja r, tj. da je $r' = k(r/l)$, a da se s' sastoji iz k l-tih delova nekog broja s, tj. da je $s' = k(s/l)$.[5] Na osnovu teoreme VII.5, on dolazi do zaključka da je i $r' + s' = k(r/l) + k(s/l) = k((r/l) + (s/l))$. Na posletku, on primećuje (opet na osnovu stava VII.5) da je $(r/l) + (s/l) = (r+s)/l$, i zaključuje da je $r' + s' = k(r+s)/l$.

[5] O Euklidovoj definiciji delova biće više reči u poglavlju 9.1.

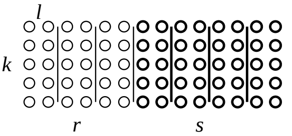
$\boxed{\textbf{VII.6}} \longleftarrow \boxed{\text{VII.5}}$

Stav VII.6 je jednostavna posledica stava VII.5. Budući da se stav VII.5 jednostavno dokazuje upotrebom oblutaka (teorema 16 (VII.5)) i stav VII.6 moguće je jednostavno ilustrovati oblucima. Zaista, svaki od brojeva r i s, kada se predstavi oblucima, može se vertikalnim linijama podele razložiti na l jednakih delova pa se i površinski brojevi kr i ks istim linijama podele mogu razložiti na l jednakih delova (slika 7.2.1). Na osnovu teoreme 16 (VII.5) primenjene na brojeve k, r/l i s/l, biće $k(r/l) + k(s/l) = k(r + s)/l$.



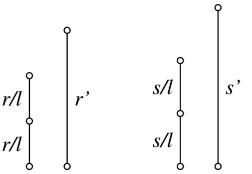
Slika 7.2.1. $k(r/l) + k(s/l) = k(r + s)/l; r = 6, s = 8, l = 2$

Prethodni stav moguće je ilustrovati slikom sa oblucima na još jedan način. Slika je ista kao i slika uz dokaz teoreme 16 (VII.5), samo su dodate vertikalne linije koje oblutke kojima su predstavljeni brojevi r i s dele na jednake delove takve da je u svakom po l oblutaka. U ovom dokazu se brojevi r i s ne dele na l jednakih delova, već na delove koji se sastoje iz l oblutaka.



Slika 7.2.2. $k(r/l)+k(s/l) = k(r+s)/l, k = 5, r = 6, s = 8, l = 2$

Slika 7.2.1 na kojoj su brojevi predstavljeni oblucima, samo je (l-ti) deo slike 4.2.1 koja dolazi uz dokaz teoreme 16 (VII.5). Njome se sasvim jednostavno i jasno ilustruje Euklidov dokaz stava VII.6. I u ovom slučaju uverenje da stav važi moglo bi doći od slike sa oblucima kojom je mogao biti ilustrovan. Naprotiv, Euklidova slika uz stav VII.6 sastoji samo iz nekoliko paralelnih duži, i zato nema nikakvu uverljivost. Međutim, ovaj stav je ipak samo logička posledica prethodnog stava tako da je njegov dokaz sasvim uverljiv i bez ikakve ilustracije.



Slika 7.2.3. Slika uz Euklidov stav VII.6

Stavovi VII.7 i VII.8 koji se takođe tiču distributivnosti, u analogiji su sa stavovima VII.5 i VII.6 i odnose se na razlike umesto na zbirove. U njima Euklid dokazuje da, ako je $r' = k(r/l)$ i $s' = k(s/l)$, tada je i $r' - s' = k(r - s)/l$, tj. da je

$$k(r/l) - k(s/l) = k(r - s)/l.$$

U prvom od ovih stavova je $l = 1$, a u drugom $l \neq 1$. U dokazu stava VII.7 Euklid upotrebljava samo stav VII.5, a u dokazu stava VII.8, samo stav VII.7, tako da i ovi stavovi dolaze isključivo kao jednostavne posledice stava VII.5. Stavove VII.7 i VII.8 Euklid će upotrebiti samo u dokazu stava VII.11,[6] a ovaj stav upotrebiće samo u dokazu stava IX.35 koji daje odgovor na pitanje o sumi geometrijske progresije. Zato ostaje utisak da je potreba da se dokaže stav IX.35 jedini razlog zbog kojeg su dokazani stav VII.11 i, pre njega, stavovi VII.7 i VII.8.

$$\boxed{\textbf{VII.8}} \longleftarrow \boxed{\textbf{VII.7}} \longleftarrow \boxed{\text{VII.5}}$$

Kao što je stavove VII.5 i VII.6 moguće dokazati upotrebom oblutaka, tako se i dokazi stavova VII.7 i VII.8 mogu interpretirati oblucima. Zato i u ovim slučajevima uverenje da ovi stavovi važe može doći od uverljivosti slika kojima se oni mogu ilustrovati. Međutim, u *Elementima* se do dokaza ovih dvaju stavova dolazi samo upotrebom dedukcija utemeljenih na stavu VII.5. Slike kojima su ovi stavovi ilustrovani nisu od koristi u razumevanju njihovih dokaza. Euklid se u njih i ne uzda već u logički sled kojim se dolazi do dokaza. Kao i u slučaju stava VII.6, njegovi dokazi stavova VII.7 i VII.8 bili bi sasvim uverljivi i bez ilustracija budući da su oni ipak samo jednostavne logičke posledice stava VII.5. Jedino stavu VII.5 nedostaje uverljivost jer njegov dokaz ne zahteva ni jednu pretpostavku budući da se dedukuje ni iz čega. S obzirom na to da u *Elementima* nema pretpostavki na kojima počiva njegov dokaz, od stavova koji se odnose na distributivnost jedino stav VII.5 zahteva neko uporište koje dolazi izvan aritmetike. Obluci bi mogli biti očigledno sredstvo na kojem je dokaz mogao počivati. Uostalom, antička literatura koja je do nas dospela u tom kontekstu pominje samo oblutke.

7.3. Euklidov uvod u teoriju proporcija

I stavovi VII.9 i VII.10 dolaze kao posledice stava VII.5. U njihovim dokazima Euklid se poziva još samo na stav VII.6 koji je, kao što smo već utvrdili, takođe posledica stava VII.5.

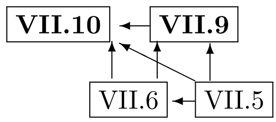
U stavu VII.9 Euklid pretpostavlja da *je jedan broj deo drugog broja, a treći broj isti deo četvrog broja*, tj. da su brojevi r, s, r', s' i k takvi da je $r = ks$ i $r' = ks'$, a dokazuje da tada postoje brojevi m i n takvi da je $r = mr'$ i $s = ms'$ ili $r = m(r'/n)$ i $s = m(s'/n)$. Upotrebiće ga neposredno samo u dokazu stava VII.10.

Zanimljivo je da Euklid u stavu VII.15 ističe poseban slučaj stava VII.9, premda ga u njegovom dokazu ne upotrebljava. Bez obzira na to, dokazi ovih dvaju stavova se ne razlikuju. Ako se u formulaciji stava VII.9 broj s' zameni jedinicom, dobiće

[6] O ovom stavu biće reči u odeljku 9.4.

se iskaz stava VII.15 prema kojem: ako su brojevi r, s, r' i k takvi da je $r = ks$ i $r' = k \cdot 1$, tada postoji broj m takav da je $r = mr'$ i $s = m \cdot 1$.[7] Jasno je da je tada $r' = k$ i $s = m$ pa stav VII.15 možemo interpretirati na sledeći način: Ako postoji broj k takav da je $r = ks$ tada postoji broj m takav da je $r = mk$. Razume se, tada je $m = s$, pa je $ks = sk$. Ovu tvrdnju Euklid će dokazati u stavu VII.16.

U stavu VII.10 on pretpostavlja da *jedan broj čini delove drugog broja, a treći broj čini iste delove četvrtog broja*, tj. da su brojevi r, s, r', s', k i l takvi da je $r = k(s/l)$ i $r' = k(s'/l)$, i dokazuje da tada postoje brojevi m i n takvi da je $r = mr'$ i $s = ms'$ ili $r = m(r'/n)$ i $s = m(s'/n)$. Ovu tvrdnju Euklid će neposredno upotrebiti samo u dokazu stava VII.13.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovih stavova VII.9 i VII.10

Nakon stavova o distributivnosti, stavovi VII.9 i VII.10 izgledaju izveštačeno ali oni u *Elementima* imaju svoju svrhu. Stav VII.9 upotrebljava se samo u dokazu stava VII.10, a stav VII.10 ima za posledicu važnu osobinu proporcije koju Euklid dokazuje u stavu VII.13.[8] Kako su Euklidovi stavovi VII.9 i VII.10 posledica stava VII.5, i stav VII.13 je posledice tog stava. Možda bi se zbog toga dokazi stavova VII.9 i VII.10 mogli interpretirati oblucima, ali oni ne deluju kao da se do njih stiglo prostom analizom slika sa oblucima, već kao kasnija nadgradnja koja je došla iz potrebe da se stav VII.13 dokaže bez upotrebe oblutaka.

Stavovi VII.5–10 čine jednu celinu. U njima je razvijen onaj deo teorije brojeva koji je neophodan za razumevanje teorije proporcija. Njih će Euklid upotrebiti dokazujući stavove VII.11–14, koji takođe čine jednu celinu. U njima su, samo iz stavova VII.5–10, izvedena osnovna svojstva proporcija.[9]

7.4. Komutativnost proizvoda

U nameri da u stavu VII.16 dokaže da je

$$rs = sr,$$

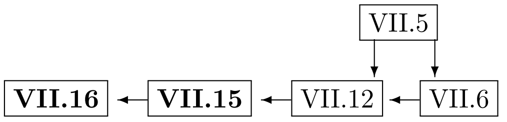
Euklid pretpostavlja da je $rs = m$, a $sr = n$ i primećuje da se s sadrži u m *onoliko puta koliko je jedinica u samom* r, tj. r-puta. I jedinica se sadrži r-puta u broju r pa se, na osnovu stava VII.15, r sadrži u m onoliko puta koliko puta jedinica meri s, dakle s puta. Međutim, kako je $sr = n$, r se sadrži u n onoliko puta koliko se puta jedinica sadrži u s, dakle s-puta. Kako se r sadrži isti broj puta i u m i u n biće

[7] Time je, u skladu sa pitagorejskim stanovištem, jedinica izdvojena iz skupa pozitivnih celih brojeva i istaknut je njen status *ishodišta brojeva*.

[8] O Euklidovom dokazu ovog stava prema kojem iz pretpostavke da je $r : s = r' : s'$ sledi da je i $r : r' = s : s'$, biće reči u odeljku 9.4.

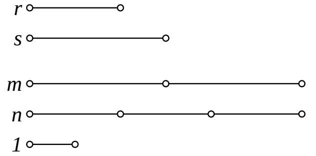
[9] O ovim stavovima biće više reči u odeljku 9.4.

$m = n$ tj. $rs = sr$. Deduktivna struktura Euklidovog dokaza je sasvim jednostavna. Sve što se u ovom dokazu upotrebljava dolazi kao posledica stava VII.5. Svejedno, Euklidov dokaz je suviše složen da bi mogao pripadati ranoj aritmetici. U njemu se na suptilan način upotrebljava stav VII.15, za koji bi se pre reklo da je nastao iz potrebe da se na novi način dokaže jedan važan stav aritmetike — stav VII.16, nego da je tom stavu samo istorijski prethodio.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovih stavova VII.15 i VII.16

Budući da je teorija proporcija bila razvijena pre otkrića nesamerljivosti,[10] i osobina komutativnosti koja se u toj teoriji koristi, morala je biti poznata pre tog otkrića. Stoga je nesumnjivo da dokaz ove osobine dolazi iz najranijeg pitagorejstva. Dokazujući teoremu 15 (VII.16) mi smo je smestili u aritmetiku oblutaka. Međutim, unekoliko i Euklidov dokaz sledi logiku aritmetike oblutaka.



Slika 7.4.1. Slika uz Euklidov stav VII.16

Zaista, prebrojavanje r jedinica iz kojih se sastoji neki broj r suštinski se ne razlikuje od ređanja r oblutaka u nameri da se predstavi linearni broj r.[11] Ako se ovo ređanje r oblutaka (prebrojavanje r jedinica) ponovi s puta, dobiće se pravougaoni broj $rs = m$ koji se sastoji iz r redova od kojih se svaki sastoji iz s jedinica–oblutaka. Međutim, pravougaoni broj m možemo shvatiti i tako da se sastoji iz s redova koji se svi sastoje iz r oblutaka.[12] Štaviše, kako je $sr = n$, r se sadrži i u n *onoliko puta koliko je jedinica u samom* s, pa se r sadrži podjednak broj (s) puta i u m i u n. Zato je $m = n$, tj. $rs = sr$.

Slika 4.1.1 koja dolazi iz aritmetike oblutaka na kojoj su dva podudarna pravougaona broja rs i sr, besprekorno ilustruje i ovaj Euklidov dokaz. Štaviše, i ovde bi se za sliku moglo reći da je sam dokaz. Naprotiv, Euklidova slika nije od pomoći u razumevanju dokaza ovog stava.

[10] O ovome će biti više reči u odeljku 8.4.

[11] Platonov Sokrat objašnjava da se aritmetika odnosi *na parne i neparne brojeve i na to koliko je jedinica u jednom i drugom*. Platon, *Gorgija*, 451 b. Prebrojavanje jedinica je apstraktna zamena za prebrojavanje oblutaka.

[12] Zbog očiglednosti slike 4.1.1 u ovom dokazu nije neohodna upotreba stava VII.15.

POGLAVLJE 8

Rána teorija proporcija

Nikomah nas obaveštava da istraživanja iz teorije proporcija započinju sa Pitagorom. On tvrdi da su pojmovi aritmetičke, geometrijske i harmonijske proporcije u matematiku ušli Pitagorinom zaslugom, a da su ih kasnije prihvatili i drugi, među njima Platon i Aristotel.[1] Iako se ova Nikomahova opaska mora uzeti sa rezervom jer je zakasnela,[2] ipak ne smemo isključiti mogućnost da otkriće i prva istraživanja iz teorije proporcija zaista dolaze iz vremena najranijeg pitagorejstva. To ne smemo učiniti tim pre što smo utvrdili da su teoreme iz odeljka 5.1 koje su dokazane upotrebom oblutaka dovoljna pretpostavka da se na njima utemelji teorija proporcija.

8.1. Antanairezis

Euklid proporciju definiše dva puta, najpre u petoj, a potom i u sedmoj knjizi *Elemenata*. U petoj knjizi ovaj pojam uvodi čuvenom definicijom V. def. 5 koja se pripisuje Eudoksu,[3] a u sedmoj knjizi definicijom VII. def. 21.[4] Prva od njih je geometrijska i odnosi se na veličine, a druga je aritmetička i odnosi se na pozitivne cele brojeve.

Međutim, najstarija definicija proporcije koja je do nas dospela ne dolazi iz Euklidovog već iz Aristotelovog dela. Prema Aristotelovim rečima:

> *... prava koja* seče *površinu paralelnu strani na sličan način* deli *liniju i površinu... Jer površine i linije imaju isti* antanairezis, *i to je definicija iste proporcije.*[5]

[1] Prema Nikomahovim rečima „*postoje tri proporcije poznate starima — Pitagori, Platonu i Aristotelu. To su aritmetička, geometrijska i harmonijska... One do Platona i Aristotela dolaze od Pitagore.*" Nicomachus, II.22.1, II.28.6.

[2] Nikomaha od Pitagore razdvaja sedam vekova.

[3] Prema ovoj definiciji „*kaže se da su dve veličine u* istoj razmeri, *prva prema drugoj kao treća prema četvrtoj, ako su bilo koji jednostruki multiplumi prve i treće u isto vreme ili veći, ili jednaki, ili manji od bilo kojih multipluma druge četvrte, svaki prema svakom uzeti u odgovarajućem poretku*". U sledećoj definiciji Euklid dodaje da se „*veličine zovu* proporcionalne, *ako su u istoj razmeri*".

[4] O ovoj definiciji biće više reči u odeljku 9.1.

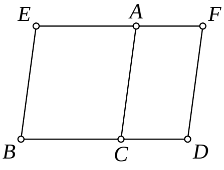
[5] Aristotel, *Topika*, 158 b. U izdanju Topike na našem jeziku, imenicu *antanairezis* Ksenije Atanasijević je prevela sa *bivaju sečene* i ovaj prevod ima jasno sugestivno dejstvo. U ovom kontekstu površina je zapravo površ, a ne mera površi.

Na prvi pogled nije jasno da li Aristotel upotrebljava pojam *antanairezis* (rasecanje) da bi definisao proporcionalnost površi i linija ili njihovih površina i dužina. Sudeći prema Euklidovom stavu VI.1 prema kojem:

> *trougli i paralelogrami iste visine se odnose jedan prema drugom kao osnovice,*

Aristotelova definicija odnosi se na veličine, dakle na linije i površi, a ne na dužine i površine. Ne odnosi se ni na brojeve.[6]

Kako, prema Aristotelovim rečima, *prava koja* seče *površinu paralelnu strani na sličan način* deli *liniju i površinu*, onda, kao što to čini Aleksandar [**29**, p. 258], možemo pretpostaviti da je površ koju sečemo paralelogramska, a da je linija koja *seče* ovu površ, paralelna bočnoj ivici te površi (slika 8.1.1). Tada, ako sa $BDFE$ obeležimo paralelogramsku površ, a sa AC liniju koja je seče, onda se paralelogramske površi $BCAE$ i $CDFA$ koje imaju istu visinu, zaista odnose jedna prema drugoj kao njihove osnovice BC i CD. Upravo ovu tvrdnju Euklid dokazuje u stavu VI.1.[7] Razume se, u dokazu on upotrebljava Eudoksovu definiciju proporcionalnosti i teoriju proporcija iz pete knjige *Elemenata*.



Slika 8.1.1. *Elementi*, VI.1

Stav VI.1 Euklid je smestio na prvo mesto šeste knjige koja je posvećena sličnosti, da bi odmah s njenog početka, upotrebom nove definicije (V. def. 5) dokazao stav koji je pre toga bio deo stare (Aristotelove) definicije proporcionalnih veličina. Tako je mogao da, bez mnogo izmena zbog upotrebe nove definicije proporcionalnosti, upotrebi već poznate dokaze stavova iz teorije sličnosti zasnovane na staroj definiciji o kojoj nas obaveštava Aristotel. Zato će stav VI.1 direktno ili indirektno upotrebiti u dokazima svih ostalih stavova šeste knjige osim u dokazima dvadeset prvog i poslednjeg, trideset trećeg stava, koji su nezavisni i od ostalih stavova šeste knjige.[8]

[6] Euklid će jasno odvojiti teoriju proporcija koja se odnosi na bilo koje veličine, od one koja se odnosi na brojeve. Petu knjigu *Elemenata* posvetio je proporcionalnosti veličina, a sedmu proporcionalnosti brojeva.

[7] Beker [**5**] je prvi primetio kakav je odnos Euklidovog stava VI.1 i Aristotelove definicije proporcionalnosti.

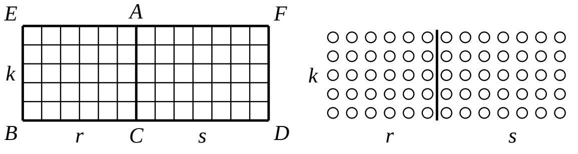
[8] U stavu VI.21 Euklid dokazuje da je relacija sličnosti poligona tranzitivna, a u stavu VI.33 da su lukovi kruga koji odgovaraju dvama (centralnim ili periferijskim) uglovima tog kruga, proporcionalni tim uglovima. Ovim, poslednjim stavom šeste knjige koji se odnosi na proporcionalnost uglova i lukova krugova, on dopunjuje njen prvi stav koji se odnosi na proporcionalnost linija i površina.

8.2. Proporcionalnost celobrojnih linija i površi

Kako se, prema Eulidovom shvatanju iskazanom u stavu VI.1, Aristotelova definicija proporcije odnosi na *linije* i površi, onda je njegov pojam proporcije parova duži morao biti izveden iz pojma proporcije duži i površi. Pre nego što odgovorimo na pitanje kako je to bilo moguće učiniti, pokušaćemo najpre da damo odgovor na isto pitanje u posebnom slučaju kada su *površi* i *linije* celobrojne. Tada se Euklidov stav VI.1 na sledeći način može interpretirati jezikom aritmetike oblutaka:

> *pravougaoni brojevi kr i ks, koji imaju istu visinu k, odnose se jedan prema drugom kao njihove strane r i s.*

Euklid ovu tvrdnju dokazuje u stavovima VII.17 i VII.18, a mi smo je, samo upotrebom oblutaka, dokazali u teoremi 25 (VII.17). Ona i nije ništa drugo do aritmetički analogon stava VI.1.



Slika 8.2.1. *Elementi*, VI.1 i VII.17–18

Međutim, teorema 25 (VII.17) samo je jedna od posledica teoreme 19 (VII.2) u kojoj smo najpre našli par najmanjih brojeva p i q koji imaju isti raspored paralelnih linija rasecanja kao i zadati brojevi r i s, da bismo potom dokazali da su svi ostali parovi brojeva, koji imaju isto rasecanje, oblika kp, kq. U skladu sa Aristotelovom definicijom, svi ovakvi parovi biće međusobno proporcionalni.[9] *Antanairezis* je raspored paralelnih linija rasecanja ili, kratko, rasecanje, pojam koji smo upotrebili u nameri da u aritmetici oblutaka dokažemo teoremu 19 (VII.2). Dakle, kada se primeni na celobrojne linije i površine, Aristotelova definicija proporcije glasi:

> *parovi brojeva će biti međusobno proporcionalni ako i samo ako imaju iste linije rasecanja.*[10]

Ona se ne razlikuje od definicije proporcije iz odeljka 5.1, do koje se dolazi postupkom rasecanja (ili uzastopnog oduzimanja) utemeljenog u dokazu teoreme 19 (VII.2). Zato Aristotelova definicija, kada se odnosi na celobrojne linije i površine, pripada aritmetici oblutaka.

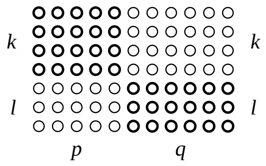
Budući da su brojevi koji imaju isti raspored linija rasecanja najmanji ako i samo ako su međusobno prosti (teoreme 24 (VII.21) i 23 (VII.22)), parovi brojeva r, s i r', s' će imati isto rasecanje ako i samo ako postoje međusobno prosti brojevi p i q koji sa njima imaju isto rasecanje. Tada postoje brojevi k i l takvi da je $r = kp$ i $s = kq$, a $r' = lp$ i $s' = lq$. Razume se, i ako brojevi p i q nisu međusobno prosti, opet će parovi r, s i r', s' imati iste linije rasecanja. Zato je Aristotelova definicija, kada se odnosi na proporcionalnost parova brojeva, ekvivalentna sledećem iskazu:

---

[9] Proporcionalni parovi brojeva r, s i r', s' ilustrovani su slikom 5.0.1.

[10] Iako Aristotelova definicija proporcije koju nalazimo u *Topici* nije formulisana kao ekvivalencija, to se, ipak, po sebi prosto podrazumeva.

Iskaz P:: *brojevi* r' *i* s' *proporcionalni su brojevima* r *i* s*, ako i samo ako postoje brojevi* p *i* q*, i brojevi* k *i* l *takavi da je* $r = kp$, $s = kq$, *a* $r' = lp$, $s' = lq$.

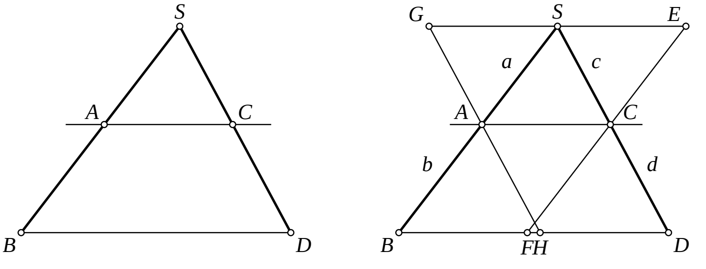


Slika 8.2.2. $r : s = kp : kq = lp : lq = r' : s'$

Razume se, ako su brojevi p i q najmanji brojevi koji zadovoljavaju uslove prethodnog iskaza, oni će biti međusobno prosti.

8.3. Proporcionalnost parova duži

Aristotelova definicija proporcije je geometrijska, a ne aritmetička. Ona je svakako opštija od aritmetičke jer se odnosi na bilo kakve veličine (duži i paralelogramske površi), a ne samo na prirodne brojeve (celobrojne duži i površi). Međutim, njome se samo utvrđuje kada je par duži proporcionalan paru paralelogramskih površi, a ne daje se odgovor na pitanje kada će par duži biti proporcionalan nekom drugom paru duži. Stoga je potrebno razumeti sadržaj Aristotelovog pojma antanairezis i kada se on odnosi na parove duži, a ne samo na par duži i par paralelogramskih površi.[11] U tome će nam biti od pomoći Euklidov stav VI.2 — Talesova teorema.



Slika 8.3.1. Iz Aristotelove definicije sledi da je $a : b = c : d$

Prema ovom stavu *prava paralelna ivici* BD *trougla* SBD *seče ivice* SB *i* SD *u tačkama* A *i* C*, ako i samo ako je*

$$SA : AB = SC : CD.$$

Razume se, u svom dokazu ovog stava Euklid upotrebljava stav VI.1. Drugim rečima, osnovni stav sličnosti on dokazuje upotrebom Aristotelove definicije proporcionalnosti duži i paralelogramskih površi. Doduše, u stavu VI.1, pored tvrdnje

[11] O tome kako bi mogla izgledati definicija ovog pojma raspravlja i Fauler u svom radu [**18**].

da se *paralelogrami iste visine odnose jedan prema drugom kao njihove osnovice*, on dokazuje da istu osobinu imaju i trouglovi iste visine i ovu osobinu trouglova upotrebljava u dokazu stava VI.2. Međutim, ovaj dokaz se na isti način može izvesti upotrebom paralelograma, tj. iz Aristotelove definicije proporcije. Štaviše, time će Aristotelova definicija postati jasnija.

Zaista, ako su $SACE$, $ABFC$ paralelogrami, oni imaju istu visinu h koja odgovara osnovicama SA i AB. I paralelogrami $SCAG$, $CDHA$ imaju istu visinu h' koja odgovara osnovicama SC i CD. Ako duži SA, AB, SC i CD označimo, redom, sa a, b, c i d (slika 8.3.1), a paralelogramske površi $SACE$, $ABFC$, $SCAG$ i $CDHA$ sa ha, hb, $h'c$ i $h'd$, tada će, prema Aristotelovoj definiciji, površi ha i hb biti proporcionalne ivicama a i b, a površi $h'c$ i $h'd$ ivicama c i d. Međutim, paralelogrami ha i $h'c$ su razloživo ili dopunski jednaki (*Elementi*, I.35) jer paralelogrami $SACE$ i $SCAG$ imaju istu osnovicu AC i odgovarajuću visinu.[12] Na isti način je i $hb = h'd$, pa je

$$SA : AB = a : b = ha : hb = h'c : h'd = c : d = SC : CD.^{13}$$

Dakle, duži SA i AB koje pripadaju jednoj pravoj biće proporcionalne dužima SC i CD koje pripadaju nekoj drugoj pravoj, ako su prave AC i BD međusobno paralelne. Jednostavno je dokazati da važi i obratno tvrđenje.

Euklidov dokaz stava VI.2 ne razlikuje se od prethodnog dokaza, samo što se u njemu ne upotrebljavaju paralelogrami, već trouglovi — njihove polovine. Time je zamagljena činjenica da se stav VI.2 lako dokazuje upotrebom Aristotelove definicije proporcionalnih veličina.

Sada Aristotelove reči — *površine i linije imaju isti* antanairezis*, i to je definicija iste proporcije* — možemo razumeti na sledeći način: linije a i b, i površi ha i hb isto su sečene kao i površi $h'c$ i $h'd$, i linije c i d — one imaju isti anatanairezis. Linije sečenja su prave paralelne ivici BD. U kojem god odnosu su duži na koje neka linija sečenja razlaže duž SB, u istom odnosu će biti i duži na koje ta linija razlaže duž SD i odgovarajuće paralelogramske površi. Drugim rečima, paralelnim projektovanjem (duž prave BD) prave SB na pravu SD, duži se preslikavaju na njima proporcionalne duži.[14] Obratno, ako linije sečenja nisu paralelne ivici BD, ni duži c i d neće biti u odnosu u kojem su duži a i b, ni odgovarajuće paralelogramske površi neće biti sečene u istom odnosu.

Razume se, Aristotelova definicija može se primeniti i kada su duži SA i AB međusobno samerljive i kada nisu, i kada su one samerljive sa dužima SC i SD, i kada nisu. Ako su duži SA i AB, i SC i SD celobrojne, opet se može primeniti

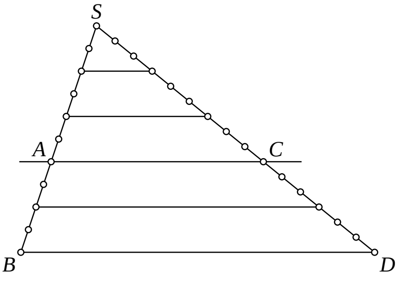
---

[12] Videti [**49**, str. 358–359].

[13] Razume se, ista formula važi i ako su sa a, b, c i d označene mere duži, a sa ha, hb, $h'c$ i $h'd$ površine paralelograma, međutim, Euklid to nigde ne dokazuje. On prosto nikada ne meri duži i površi. Mera duži [**34**, str. 167–175] je pojam koji Grcima izmiče. Cela deseta knjiga *Elemenata* svedoči o Teetetovim neuspešnim pokušajima da utvrdi da li se svaka duž može konstruisati upotrebom šestara i lenjira — drugim rečima, da li su racionalne operacije i korenovanje dovoljna sredstva kojima se od jedinične duži može dopreti do svih ostalih duži ne bi li se utvrdilo koje su dužine. Videti [**38**].

[14] Ovo je tvrdnja čija jednostavna posledica je Euklidov stav VI.2 — Talesova teorema. Videti [**34**, str. 214] i [**7**, 269].

Aristotetlova definicija pa zato ona daje odgovor i na pitanje kada je par brojeva proporcionalan nekom drugom paru brojeva, a kada nije.[15] Zato je proporcionalnost parova brojeva samo poseban slučaj proporcionalnosti parova veličina.



Slika 8.3.2. Proporcionalnost celobrojnih duži

U posebnom slučaju kada su SC i CD celobrojne duži kojima su dužine p i q, a SA i AB nisu, opet se Aristotelova definicija može upotrebiti da bi se došlo do zaključka da li je par duži SA, AB proporcionalan paru brojeva p, q. Time je definisana proporcionalnost para duži (veličina) sa parom brojeva. Međutim, ako je par duži SA, AB proporcionalan paru brojeva, iz Aristotelove definicije neposredno sledi da su te dve duži samerljive. Meri ih ista duž dobijena paralelnim projektovanjem jedinične duži koja pripada pravoj SC, na pravu SA. Štaviše, važi i obrat budući da za samerljive duži SA i AB postoji (jedinična) duž koja se (p puta) sadrži u duži SA i (q puta) u duži AB, pa se duži SA i AB odnose jedna prema drugoj kao broj p prema broju q.

Euklid ove dve tvrdnje na sličan način dokazuje u stavovima X.6 i X.5. Međutim, njegovi dokazi su manjkavi jer podrazumevaju upotrebu dveju različitih definicija proporcionalnosti (brojeva i veličina), čija saglasnost nije dokazana. On ne dokazuje da je proporcionalnost parova brojeva samo poseban slučaj proporcionalnosti parova veličina. Ne ističući to, u svojim dokazima on zapravo upotrebljava antifairetičku definiciju proporcije i zato ne dokazuje da su veličine koje su proporcionalne u smislu definicije VII. def. 20, proporcionalne i u smislu definicije V. def. 5. Simson će kasnije, komentarišući dokaze stavova X.5 i X.6, ispraviti ovaj Euklidov propust.[16]

Za razliku od Aristotelove definicije proporcije iz *Topike*, Euklidov stav VI.2 formulisan je kao ekvivalencija. Njime je dopunjena Aristotelova definicija koja sada, kao i stav VI.2, može biti formulisana kao ekvivalencija. Prema ovoj definiciji paralelogramske površi ha i hb će biti proporcionalne svojim ivicama a i b kakvagod da je visina h, a upotrebom stava VI.2 može se dokazati da važi i njen obrat. Zaista,

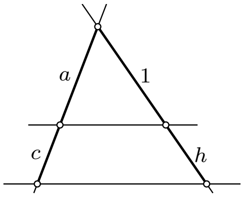
[15] Ova definicija proporcionalnosti brojeva dolazi iz aritmetike oblutaka. Videti odeljak 5.1 i, posebno, sliku 5.0.1.

[16] O Simsonovoj rekonstrukciji dokaza da su veličine koje su proporcionalne u smislu definicije VII. def. 20, proporcionalne i u smislu definicije V. def. 5, koji nedostaje u *Elementima*, piše Hit [**22**, vol. II, str. 126–128, vol. III, str. 25].

pretpostavljajući da je zadata jedinična duž, upotrebom Talesove teoreme (VI.2) jednostavno je konstruisati duži h takvu da je

$$a : c = 1 : h$$

kao što Euklid i čini u dokazu stava VI.12 nalazeći četvrtu proporcionalu za tri zadate duži. Sada je lako konstruisati pravougaonike ha i hb takve da je $c = ha$ i $d = hb$, koji su, na osnovu Euklidovog stava VI.1, proporcionalni dužima a i b.



SLIKA 8.3.3. $a : c = 1 : h$

Zato, u analogiji sa iskazom P, možemo formulisati potreban i dovoljan uslov koji podrazumeva Aristotelova definicija proporcionalnih duži:

Iskaz A:: *duži c i d proporcionalne su dužima a i b, ako i samo ako postoji duž h takva da je $c = ha$ i $d = hb$.*

Budući da su ostali stavovi šeste knjige neposredne ili posredne posledice njenih prvih dvaju stavova,[17] do njih se, zahvaljujući Aristotelovoj definiciji, moglo doći i pre no što je Eudoks upotrebom svoje definicije (V. def. 5) dokazao stavove pete knjige. Međutim, ono što Aristotelovu definiciju proporcionalnosti čini problematičnom je zahtev da se jednakost odnosa dvaju parova duži utemelji na jednakosti odnosa „površina i linija“. Ovaj nedostatak prevaziđen je zahvaljujući Eudoksu.

Međutim, i Aristotelova definicija proporcionalnosti ima nekih prednosti nad Eudoksovom. Videli smo da se ona odnosi na proporcionalnost i samerljivih i nesamerljivih veličina, u posebnom slučaju i na proporcionalnost dvaju parova brojeva, ali i na proporcionalnost para veličina sa parom brojeva. Budući da Euklid dva puta definiše proporcionalnost, najpre proporcionalnost dvaju parova veličina u V knjizi, a zatim i dvaju parova brojeva u VII knjizi *Elemenata*, ove dve definicije zahtevaju usaglašavanje. Naprotiv, Aristotelova definicija je univerzalna.

8.4. Antifairezis

Iz komentara Aristotelove *Topike* nastalim iz pera Aleksandra iz Afrodizije saznajemo da je za Aristotela *antanairezis* (grčki, ἀνταναίρεσις) ono što rani matematičari nazivaju *antifairezis* (ἀνθυφαίρεσις). Ni jedan od ovih dvaju termina ne javlja se u matematičkom kontekstu ni u jednom starom tekstu osim u Aristotelovoj *Topici* i u Aleksandrovim komentarima ove Aristotelove rasprave.[18]

[17] Izuzeci su samo stavovi VI.21 i VI.33.

[18] Nikomah koristi termin *antafairezis*, a ne antifairezis. Videti [**43**, I.13.11].

Međutim, Euklid u dokazu stava VII.2 koristi glagol *antifairestai* koji se obično prevodi sa *uzastopno oduzimati.*[19]

Ako su rani matematičari umesto Aristotelove reči *antanairezis*, koristili termin *antifairezis*, onda se ovaj pojam s početka morao odnositi na brojeve, a ne na bilo kakve veličine jer se Aleksandrova opaska o ranim matematičarima mogla ticati samo pitagorejaca, a oni su se najpre bavili aritmetikom. Potvrdu ovome daje neopitagorejac Nikomah kod koga se pojam *antafairezis* odnosi na brojeve.[20] On je najverovatnije sledio ranopitagorejsku tradiciju u upotrebi ove reči, uprkos tome što se u Euklidovom delu ona imala opštiji smisao i odnosila se i na brojeve i na duži, tj. i na samerljive i na nesmerljive veličine. Međutim, u *Elementima* glagol *antifairestai* odnosi se na duži samo u stavu X.2,[21] a na svim ostalim mestima odnosi se na brojeve.

Do otkrića nesamerljivosti geometrijska teorija proporcija nije se razlikovala od aritmetičke. Predrasuda da je odnos svakih dveju duži jednak odnosu nekih dvaju pozitivnih celih brojeva, brisala je razliku između ovih dveju teorija.[22] Tek nakon otkrića da se odnos stranice i dijagonale kvadrata ne može iskazati kao količnik dvaju (prirodnih) brojeva, pojam odnosa dveju duži (tj. njihovih dužina) mogao se razlikovati od pojma odnosa dvaju brojeva. Pre toga je svaki odnos bio odnos (prirodnih) brojeva, i to je temeljna postavka najranijeg pitagorejstva. Zato sa sigurnošću možemo tvrditi da je teorija proporcija brojeva koja je utemeljena na (Aristotelovoj) definiciji prema kojoj su parovi brojeva međusobno proporcionalni ako i samo ako imaju iste linije rasecanja,[23] razvijena pre otkrića nesamerljivosti. Nije imalo smisla utvrditi da odnos nekih dveju duži, dijagonale i stranice, nije jednak odnosu dvaju brojeva, ako pre toga nije razvijena teorija koja odgovara na pitanje kada je odnos nekih dvaju brojeva jednak odnosu nekih drugih dvaju brojeva, a kada nije. Stoga je izvesno da je najpre nastala definicija proporcije brojeva da bi kasnije bila uopštena na bilo koje veličine. Prva teorija proporcija morala je biti aritmetička. Ako otkriće nesamerljivosti pripada ranim pitagorejcima kao što tvrde Proklo i Jamblih,[24] onda i prva teorija proporcija dolazi iz najranijeg vremena pitagorejstva. Zato nije anahronizam pripisati je i samom Pitagori tako da je sasvim moguće da je istinita Nikomahova tvrdnja da je tri proporcije — aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku, u matematiku uveo baš on.[25]

---

[19] Mogao bi biti preveden i rečima *rasecati*, *seći*, ili *razlomiti*. Ovaj glagol on koristi i u formulacijama stavova VII.1 i X.2, i u dokazu stava X.3. Videti [**29**, str. 257–258] i [**41**, st. 284].

[20] Videti [**43**, I.13.11]. Knor primećuje da se kod Nikomaha ovaj pojam odnosi na brojeve, a ne na bilo kakve veličine, uprkos njenoj upotrebi u Euklida koja je u skladu sa Aristotelovom definicijom te se odnosi na bilo kakve veličine. Videti [**29**, str. 261].

[21] Prema ovom stavu, *dve date nejednake veličine su nesamerljive ako pri neprekidnom oduzimanju manje veličine od veće nijedan ostatak ne meri prethodni ostatak*. Međutim, Euklid nikada ne upotrebljava ovaj stav.

[22] Tvrdnju prema kojoj se samerljive duži odnose jedna prema drugoj kao broj prema broju Euklid će dokazati u stavu X.5.

[23] U pitanju je iskaz P ili neki od njegovih ekvivalenata.

[24] Proklo otkriće pripisuje samom Pitagori (65.19), a Jamblih nagoveštava da bi otkriće moglo pripadati i ranom pitagorejcu Hipasu iz Metaponta (Diels, 18.4).

[25] Nicomachus, II.22.1, II.28.6.

Aristotel nas obaveštava o geometrijskoj definiciji proporcije nastaloj posle otkrića nesamerljivosti iako ju je njegov stariji savremenik, Eudoks, svojom definicijom već istisnuo iz matematike.[26] Izgleda da je upotreba pojma antanairezis koji koristi Aristotel bio samo neuspešan pokušaj da se odvoji pojam koji se odnosi na duži ili kakve druge veličine, od onog koji se odnosi samo na brojeve. Ovaj pokušaj je, po svemu sudeći, bio deo nastojanja da se razgraniči geometrijska teorija proporcija utemeljena na stavu VI.1, od aritmetičke, koja počiva na definiciji proporcije koja dolazi od stava VII.17. Međutim, stav VI.1 je samo uopštenje stava VII.17. Na isti način je i Aristotelov pojam antanairezis, koji je utemeljen na stavu VI.1, samo jednostavno uopštenje ranopitagorejskog pojma antifairezis, koji se u početku odnosio samo na brojeve. Međutim, Euklid će glagol antifairestai upotrebljavati i kada se on odnosi na brojeve i kada se odnosi na duži, pa stoga i kada se odnosi na diskretne i kada se odnosi na nesamerljive veličine. Aristotelov termin antanairezis, prosto je nestao iz kasnije upotrebe i zamenjen je starijim terminom antifairezis, najverovatnije zbog Euklidova uticaja. Aleksandar zbog toga oseća potrebu da Aristotelov zaboravljeni pojam, objasni rečju antifairezis koja je i u njegovo vreme bila sasvim razumljiva.[27] Držeći se Aleksandrove opaske, možemo Aristotelovu definiciju nazivati *antifairetičkom* bez obzira na to da li se ona odnosi samo na brojeve ili na duži i na površine. Nije nepohodno naglašavati kada se upotrebljava aritmetička, a kada geometrijska definicija jer je to iz konteksta uvek jasno.

Sada možemo primetiti da su sve teoreme o proporciji iz odeljka 5.1 koje su dokazane upotrebom oblutaka, dokazane na osnovu antifairetičke definicije. To je zbog toga što ona dolazi kao posledica upotrebe postupka za nalaženje najveće zajedničke mere dvaju brojeva koji za svoju iznuđenu posledicu ima definiciju proporcionalnosti.

[26] U srednjem veku pojedini arapski matematičari upotrebljavali su antifairetičku definiciju proporcionalnosti veličina. Neki od njih, poput al-Mahanija i Omara Hajama, koristili su je radije od Eudoksove definicije. Videti [**25**].

[27] O ovome raspravlja Knor [**29**, str. 258].

POGLAVLJE 9

Euklidova teorija proporcija

Iako je istorijski redosled morao biti drugačiji, Euklid u *Elementima* najpre raspravlja o geometrijskoj, a potom i o aritmetičkoj teoriji proporcija. U petoj knjizi on izlaže geometrijsku teoriju proporcija upotrebivši čuvenu Eudoksovu definiciju proporcionalnih duži, da bi kasnije, u sedmoj knjizi, definisao i proporcionalnost brojeva, u nameri da utemelji i aritmetičku teoriju.

9.1. Euklidova definicija proporcionalnosti brojeva

Prema Euklidovoj definiciji VII. def. 21:

> *Brojevi su* proporcionalni *ako je prvi broj istostruki multiplum, ili isti deo, ili isti delovi od drugog, kao što je treći od četvrtog.*

U ovoj definiciji koriste se pojmovi *dela*, *delova* i *multipluma* koje Euklid u geometriju uvodi definicijama 3, 4 i 5 sedme knjige *Elemenata*. Broj s za njega je *deo* nekog drugog broja r ako ga *meri*, tj. ako ga *deli*. Tada postoji broj k takav da je $r = ks$. Euklid ne kaže da je s k-ti deo broja r, ali to podrazumeva jer za neke brojeve on ume da kaže da *mere ostale isti broj puta*, a za neke druge da *sadrže ostale isto toliko puta*.[1] Ako je s deo broja r, onda je, prema Euklidovoj definiciji, r *multiplum* (ili *umnožak*) broja s.[2] Međutim, ako s ne deli r, Euklid ga naziva *delovi*.

Ako bismo za definicije *dela* i *multipluma* mogli da kažemo da su razumljive, definicija *delova* ostaje nejasna i njen sadržaj možemo razumeti tek na osnovu kasnije upotrebe ovog pojma. Prvi put on se upotrebljava u stavu VII.4, u dokazu da je *svaki broj ili deo ili delovi od svakog drugog broja, manji od većeg.* Sudeći prema njegovoj formulaciji, ovaj stav je tautologija jer se njime tvrdi da neki broj ili deli ili ne deli neki drugi, od njega veći broj. Međutim, u dokazu ovog stava, kada pretpostavi da manji broj s ne deli veći broj r, koristeći postupak iz stava VII.2 Euklid najpre nalazi najveću zajedničku meru m ovih dvaju brojeva i brojeve k i l takve da je $r = km$ i $s = lm$ pa, pošto je m l-ti deo broja s, zaključuje da će se broj r sastojati iz k l-tih delova broja s.[3] Time je utvrdio da, ako ne postoji broj k takav da je $r = ks$, onda postoje brojevi k i l takvi da je $r = ks/l$ pa je s ili deo

[1] Videti npr. dokaze stavova VII.20 i VII.5. Ovaj problem Euklidove terminologije jasno je vidljiv i u stavovima VII.37 i VII.38 o kojima će biti reči u poslednjem odeljku ovog poglavlja.

[2] Ovaj pojam Euklid u aritmetičkim knjigama *Elemenata* koristi samo u dokazima stavova VII.5, VIII.4 i IX.20. Naprotiv, u muzičkoj teoriji izloženoj u njegovom *Kanonskom preseku*, to je jedan od središnjih pojmova. Videti poglavlje 12.

[3] U Euklidovom dokazu $l = 3$, no svejedno, dokaz je opšti.

ili delovi broja r. Sada je pojam *delova* jasniji: ako je $r = ks/l$ (l deli s), broj r se sastoji iz k l-tih delova broja s, a Euklid bi rekao samo to da s čini *delove* broja r.

$$\boxed{\textbf{VII.4}} \leftarrow \boxed{\text{VII.2}} \leftarrow \boxed{\text{VII.1}}$$

Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.4

Budući da se u dokazu stava VII.4 upotrebljava samo stav VII.2, deduktivna strukture dokaza stava VII.4 sasvim je jednostavna jer joj pripadaju samo stavovi VII.1 i VII.2.

Euklidova definicija sada je u potpunosti razumljiva. Prema njoj, brojevi r i s biće proporcionalni brojevima r' i s' ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih triju uslova:

- postoji broj k takav da je $r = ks$ i $r' = ks'$,
- postoji broj l takav da je $r = s/l$ i $r' = s'/l$,
- postoje brojevi k i l takvi da je $r = ks/l$ i $r' = ks'/l$.[4]

Stoga, ako su zadati brojevi r, s, r' i s', i ako na osnovu Euklidove definicije VII. def. 21 hoćemo da proverimo da li je par brojeva r, s proporcionalan paru brojeva r', s', to možemo učiniti upotrebom stava VII.2, tražeći brojeve k i l takve da je $r = ks/l$, a potom i brojeve k' i l' takve da je $r' = k's'/l'$,[5] onako kako to Euklid čini u dokazu stava VII.4. Ako je $k = k'$ i $l = l'$, na osnovu definicije VII. def. 21 biće $r : s = r' : s'$, a ako nije, neće biti. Zato postupak nalaženja najveće zajedničke mere najpre brojeva r, s, a potom i brojeva r' i s', za svoju posledicu ima uslove Euklidove definicije proporcionalnosti brojeva.[6]

9.2. Euklidov algoritam

S početka sedme knjige *Elemenata*, nakon definicija pojmova koje upotrebljava u svojoj aritmetici, Euklid u stavu VII.1 najpre dokazuje da će dva broja biti međusobno prosti ako se postupkom *uzastopnog oduzimanja manjeg od većeg* na posletku dolazi do ostatka 1. U nameri da ovu tvrdnju dokaže svođenjem na protivrečnost, Euklid pretpostavlja da zadati brojevi r i s ($s < r$) nisu međusobno prosti. Tada su oba deljivi nekim brojem e, pa postoje brojevi p i q takvi da je $r = pe$ i $s = qe$. On zatim pretpostavlja da se

- uzastopnim oduzimanjem broja s od broja r, na posletku dobija ostatak i, tj. da je $r = ls + i$ ($i < s$), da se
- uzastopnim oduzimanjem ostatka i od broja s dobija ostatak j, tj. da je $s = mi + j$ ($s < r$) i, na posletku, da je
- $i = nj + 1$.

[4] Razume se, da nema Euklidovog zahteva da brojevi k, l, k' i l' budu različiti od jedinice, prvi i drugi uslov bili bi sadržani u trećem.

[5] Za razliku od Euklida koji jedinicu izdvaja iz skupa brojeva, u ovim formulama dopuštamo da k, l, k' i l' budu bilo koji prirodni brojevi, pa zato neki od njih mogu biti jednaki i jedinici.

[6] O ovome će biti više reči u odeljku 9.6.

Budući da deli i r i s, e će deliti i i i j i 1. Dakle, e deli 1, a to nije moguće jer ne postoji broj koji deli 1.

S obzirom na to da Euklid u dokazu stava VII.1 ne koristi ni jednu već dokazanu tvrdnju i ne poziva se ni na jednu aksiomu ili postulat već samo na definiciju VII. def. 12, ovaj stav u Elementima zapravo ima ulogu osnovnog stava. U dokazu sledećeg stava — VII.2, u kojem nalazi najveću zajedničku meru dvaju brojeva r i s ($s < r$) koji nisu međusobno prosti, Euklid upotrebljava samo stav VII.1. Međutim, stav VII.1 je mogao biti i deo stava VII.2 da je Euklid u dokazu tog stava (VII.2) dopustio i mogućnost da se postupkom uzastopnog oduzimanja koji započinje brojevima r i s na posletku dolazi do ostatka koji je jednak jedinici. Da je to učinio, stav VII.2 bi preuzeo ulogu osnovnog stava. Međutim, Euklid je, u skladu sa pitagorejskom tradicijom, definicijama VII. def. 1 i VII. def. 2 izdvojio jedinicu iz skupa prirodnih brojeva.

Kao što čini u dokazu stava VII.1, u nameri da u stavu VII.2 nađe najveću zajedničku meru brojeva r i s, Euklid upotrebljava indirektnu metodu. S početka on pretpostavlja da je r deljiv brojem s, tj. da postoji broj l takav da je $r = ls$, i primećuje da je tada s zajednička mera brojeva r i s. Ona je i najveća jer nema broja većeg od s koji deli s. Ako nije $r = ls$, već pri uzastopnom oduzimanju s od r preostaje neki ostatak i ($i < s$), on mora biti različit od 1 jer, u protivnom, na osnovu prethodnog stava, r i s bi bili međusobno prosti brojevi. Tada je $r = ls + i$. Na isti način, $s = mi + j$ ($j < i$) i, na posletku, $i = nj$. Razume se, i broj j mora biti različit od 1 jer, u protivnom, r i s bi bili međusobno prosti. Međutim, tada j deli i i i s i r pa je stoga njihova zajednička mera. Da je i najveća, Euklid dokazuje svođenjem na protivrečnost na isti način na koji to čini u stavu VII.1 jer, ako bi neki drugi broj bio najveća zajednička mera brojeva r i s, onda bi on merio j. Tada bi veći broj merio manji, a to je nemoguće.

U svom dokazu Euklid ovaj postupak ponavlja samo dva puta dobijajući ostatke i i j. Već u trećem koraku ostatka nema. I u opštem slučaju ovaj postupak se ponavlja sve dok ima ostataka. Kako su ostaci sve manji i manji, a nema broja manjeg od 1, ovaj postupak će se svakako završiti. Činjenicu da se postupak uzastopnog oduzimanja mora završiti Euklid podrazumeva budući da se očigledno može ponoviti najviše konačno mnogo puta. Međutim, bez obzira na to da li se postupak uzastopnog oduzimanja završava jedinicom ili nekim drugim brojem, poslednji ostatak će biti najveća zajednička mera dvaju brojeva sa kojima je započet postupak. Ako je poslednji ostatak jedinica, onda su brojevi kojima je postupak započet međusobno prosti jer je jedinica jedini broj koji ih deli. Ako se završava brojem većim od jedan, onda nisu.

Stav VII.3 u kojem nalazi najveću zajedničku meru triju brojeva r, s i t koji nisu međusobno prosti, Euklid dokazuje upotrebom stava koji mu neposredno prethodi. On najpre nalazi najveću zajedničku meru e_1 brojeva r i s pa, ako ona deli broj t, biće najveća zajednička mera svih triju zadatih brojeva. Ako ne deli, onda e_1 i t nisu uzajamno prosti jer r, s i t nisu uzajamno prosti. Ponovnom upotrebom stava VII.2, Euklid nalazi i najveću zajedničku meru e_2 brojeva e_1 i t i, najpre dokazuje da je ona zajednička mera brojeva r, s i t, a zatim, indirektnim postupkom, i da je najveća.

$$\boxed{\textbf{VII.3}} \leftarrow \boxed{\text{VII.2}} \leftarrow \boxed{\text{VII.1}}$$

Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.3

Kao i stav VII.4, i stav VII.3 ima sasvim jednostavnu deduktivnu strukturu kojoj pripadaju samo stavovi VII.1 i VII.2.

9.3. Upotreba indirektne metode u VII knjizi

Antifairetički dokaz Euklidovog stava VII.2 (teorema 19 iz odeljka 4.4) prvim delom se ne razlikuje od Euklidovog dokaza. S početka, kada se metodom rasecanja nalazi zajednička mera dvaju brojeva, dokaz teoreme 19 (VII.2) i nije ništa drugo do interpretacija Euklidovog dokaza upotrebom oblutaka. Rasecanje je samo način da se upotrebom oblutaka predstavi Euklidovo uzastopno oduzimanje manjeg broja od većeg sve dok se ne dobije ostatak koji je manji od manjeg broja.

Međutim, za razliku od Euklidovih dokaza stavova VII.1 i VII.2, antifairetički dokazi ovih dvaju stavova koje nalazimo u teoremama 20 (VII.1) i 19 (VII.2) su direktni. Štaviše, iz dokaza ovih dveju teorema sledi da je stav VII.1 neposredna posledica stava VII.2. Kod Euklida je upravo obratno. On ne upotrebljava oblutke u dokazu stava VII.2 tako da ne može neposrednim uvidom u njihov raspored (sa slika 4.4.1 i 4.4.2) da utvrdi da je poslednji ostatak do kojeg se dolazi postupkom uzastopnog oduzimanja, ne samo zajednička mera, već da je on i najveća zajednička mera brojeva sa kojima je započet postupak uzastopnog oduzimanja. Da bi dokazao da je najveća, Euklid poseže za indirektnom metodom.

Postoji još jedan detalj koji razlikuje Euklidove od antifairetičkih dokaza stavova o najvećoj zajedničkoj meri dvaju brojeva. U Euklidovim stavovima s početka sedme knjige raspravlja se o međusobno prostim brojevima dok je u antifairetičkim dokazima ovih stavova od značaja samo to što su oni najmanji od brojeva u istoj razmeri. Euklid će tek u stavovima VII.21–22 utvrditi da će među parovima brojeva koji su u istoj proporciji, brojevi jednog para biti najmanji ako i samo ako su međusobno prosti. Stavovi koji u *Elementima* slede za ovim dvama stavovima odnose se takođe na međusobno proste brojeve. Izgleda da je problematika koja se odnosi na međusobno proste brojeve u aritmetiku ušla kasnije, a da je s početka u teoriji proporcija bilo dovoljno razmatrati najmanje brojeve u istoj razmeri kao što je to učinjeno u antifairetičkim dokazima stavova VII.1–3. Teorija međusobno prostih brojeva će se razviti tek sa potrebom da se dokažu stavovi VII.23–27 koji se upotrebljavaju u dokazu Teetetove teoreme, tj. Euklidovog stava VIII.14.

Povrh toga, izgleda da rani pitagorejci nisu upotrebljavali indirektnu metodu u tako razvijenom obliku koji nalazimo u Euklidovim u dokazima stavova VII.1 i VII.2. Budući da dolaze iz ranog perioda, prvi dokazi ovih dvaju stavova morali su biti direktni baš kao što su to dokazi teorema 20 (VII.1) i 19 (VII.2). Upotreba indirektne metode u dokazivanju stavova aritmetike, s početka je svakako bila ograničena samo na najjednostavnije dokaze. Pitagora i njegovi prvi sledbenici mogli su je koristiti samo ako je ona neposredno vodila ka protivrečnosti kao što je to slučaj u dokazima teorema IX.30 ili IX.31. U složenijem obliku ova metoda je u početku mogla biti korišćena samo ako je tvrdnja koju treba dokazati već bila poznata. Sa razvojem aritmetike ona je bila sve zastupljenija da bi joj u sedmoj knjizi *Elemenata* Euklid dodelio preovlađujuću ulogu. Ona je upotrebljena u dokazima stavova VII.1–4 s početka sedme knjige, ali njena uloga postaje dominantna tek kasnije, u dokazu stava VII.23 i, posebno, u dokazu stava VII.24.

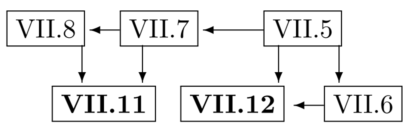
9.4. Osobine proporcija

Već smo utvrdili da antifairetički dokazi ključnih stavova o proporciji — VII.17–22 i VII.33,[7] neposredno slede iz teoreme 19 (VII.2) koja je dokazana upotrebom oblutaka. U nameri da ove stavove dokaže upotrebom definicije VII. def. 21, Euklid u stavovima VII.11–14 najpre dokazuje nekoliko jednostavnih osobina proporcije.

Ova četiri stava su prvi stavovi *Elemenata* koji se odnose na proporcionalnost brojeva. U njima Euklid dokazuje osobine proporcija koje se sa lakoćom dedukuju iz stavova VII.5–10 koji im neposredno prethode.[8] Pretpostavljajući da je $r : s = r' : s'$, u stavovima VII.11 i VII.12 Euklid dokazuje da je i

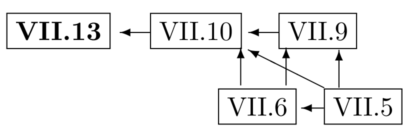
$$(r - r') : (s - s') = r : s \quad \text{i} \quad (r + r') : (s + s') = r : s.$$

Ovi Euklidovi stavovi su posledice već dokazanih osobina distributivnosti sabiranja i oduzimanja u odnosu na množenje i deljenje. Stav VII.11 neposredno sledi iz stavova VII.7 i VII.8, a stav VII.12, iz stavova VII.5 i VII.6.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovih stavova VII.11 i VII.12

U nameri da u stavu VII.13 dokaže da brojevi r, s, r' i s' takvi da je $r : s = r' : s'$ ostaju proporcionalni i posle permutacije, tj. da je i $r : r' = s : s'$, Euklid upotrebljava stav VII.10. Prema njegovom nalazu, ako je $r = ks/l$ i $r' = ks'/l$, $k, l = 1, 2, \ldots$, tada je na osnovu stava VII.10, $r = mr'/n$ i $s = ms'/n$. Zato, ako je $r : s = r' : s'$, biće i $r : r' = s : s'$.



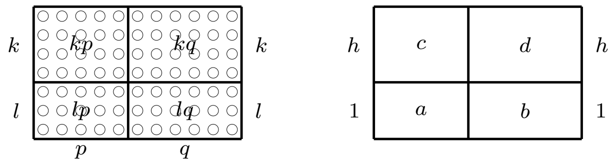
Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.13

Međutim, pre nego što će u stavu VII.13 dokazati da parovi brojeva ostaju u proporciji i posle permutacije unutrašnjih članova, Euklid u petoj knjizi *Elemenata*, u stavu V.16, dokazuje opštiju tvrdnju prema kojoj istu osobinu imaju parovi bilo

[7] To su teoreme 22–25 i 30 iz odeljka 5.1.

[8] O njima je bilo reči u odeljcima 7.1 i 7.3.

kojih veličina.[9] Razume se, on u dokazu ovog stava upotrebljava Eudoksovu definiciju proporcionalnosti (V. def. 5). Međutim, stav VII.13 koji se odnosi na brojeve, a ne na veličine, lako je dokazati upotrebom antifairetičke definicije (teorema 27 (VII.13)).[10]



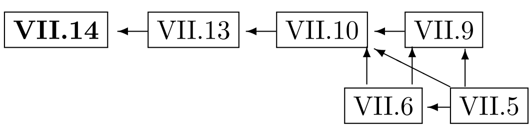
SLIKA 9.4.1. VII.13 i V.16

I stav V.16 može se dokazati upotrebom antifairetičke definicije proporcije (uslov A). Štaviše, antifairetički dokazi stavova VII.13 i V.16 u punoj su analogiji, pa su i slike kojima su oni ilustrovani takođe u analogiji (slika 9.4.1). Zaista, prema antifairetičkoj definiciji, među pravougaonicima proporcionalnim njihovim osnovicama a i b su i pravougaonici $1 \cdot a$ i $1 \cdot b$, pa je $a : b = 1 \cdot a : 1 \cdot b$. Štaviše, kako je $a : b = c : d$, među pravougaonicima proporcionalnim dužima a i b biće i pravougaonici $c = ha$ i $d = hb$ pa je, opet na osnovu stava VI.1, $a : c = 1 : h = b : d$.

Neposredna posledica stava VII.13 je stav VII.14 prema kojem, ako je $r : s = r' : s'$ i $s : t = s' : t'$, onda je $r : t = r' : t'$, pa umesto $r : s = r' : s'$ i $s : t = s' : t'$, možemo da pišemo

$$r : s : t = r' : s' : t'.$$

Zaista, na osnovu stava VII.13, ako je $r : s = r' : s'$ i $s : t = s' : t'$, onda je i $r : r' = s : s'$ i $s : s' = t : t'$. Stoga je $r : r' = t : t'$, a odavde je, opet na osnovu stava VII.13, $r : t = r' : t'$.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.14

Stavovi VII.11–14 u kojima su upotrebom definicije VII. def. 21 dokazane prve osobine proporcija, logički dolaze za stavovima VII.5–10 koji se i ne odnose na teoriju proporcija. Stavove VII.5–10 Euklid je smestio na početak sedme knjige, odmah posle stavova VII.1–3 u kojima utemeljuje postupak uzastopnog oduzimanja, upravo u nameri da ih upotrebi ne bi li prve osobine proporcija dokazao koristeći svoju, a ne antifairetičku definiciju.

[9] Prema ovom stavu, ako su a, b, c, d duži takve da je $a : b = c : d$, tada je i $a : c = b : d$.
[10] Videti i Knorov antifairetički dokaz ovog stava, [**29**, str. 337–338].

9.5. Posledice Euklidove definicije

Nakon prvih stavova o proporcionalnosti brojeva, Euklid dokazuje nekoliko tvrdnji iz kojih sledi da je njegova definicija VII. def. 21 ekvivalentna antifairetičkoj definiciji proporcionalnosti.

U stavovima VII.17 i VII.18 on najpre dokazuje da je

$$r : s = kr : ks \quad \text{i} \quad r : s = rk : sk,$$

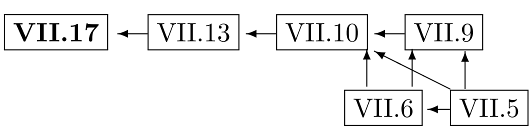
za bilo koje brojeve r, s i k. Pošavši od toga da se r sadrži onoliko puta u kr koliko ima jedinica u k, u dokazu stava VII.17 on najpre na osnovu definicije VII. def. 21 zaključuje da je $1 : k = r : kr$. Međutim, toliko puta se i s sadrži u ks, pa je $1 : k = s : ks$. Sada je $r : kr = s : ks$, a odavde je $r : s = kr : ks$ na osnovu teoreme VII.13.

I u ovom dokazu Euklid prebrojava jedinice i time u njemu ostavlja relikt aritmetike oblutaka. Prema njegovom nalazu, koliko je jedinica u broju k, toliko puta brojevi r i s dele, redom, brojeve kr i ks. Stoga je

$$1 : k = r : kr \quad \text{i} \quad 1 : k = s : ks.$$

On zapravo smatra da je dovoljno primetiti da iz definicije VII. def. 21 očigledno sledi da je $1 : k = r : kr$ i $1 : k = s : ks$, premda su ove dve proporcije samo poseban slučaj proporcije iz stava VII.17 koji treba dokazati.

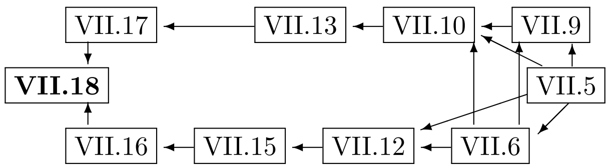
Euklidovo razmatranje može se iskazati sasvim jednostavno jezikom aritmetike oblutaka budući da parovi 1, k, zatim r, kr i, naposletku, s, ks, imaju isto rasecanje pa su zato proporcionalni. I njegov dokaz je u skladu sa logikom aritmetike oblutaka. Međutim, da nije tako, on je mogao biti jednostavniji. Mogao je biti utemeljen samo na definiciji VII. def. 21, a ne i na nejasnom principu koji podrazumeva prebrojavanje jedinica u broju k. Zaista, na osnovu ove definicije je $r : kr = s : ks$ jer je prvi član k-ti deo drugog, a treći k-ti deo četvrtog. Na posletku ostaje samo da se upotrebi stav VII.13 da bi se došlo do zaključka da je $r : s = kr : ks$.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.17

Euklidov dokaz stava VII.18 temelji se na dvema teoremama koje ovom stavu neposredno prethode. Na osnovu stava VII.17 je $r : s = kr : ks$, a na osnovu stava VII.16 je $rk = kr$ i $sk = ks$. Zato je $r : s = rk : sk$.

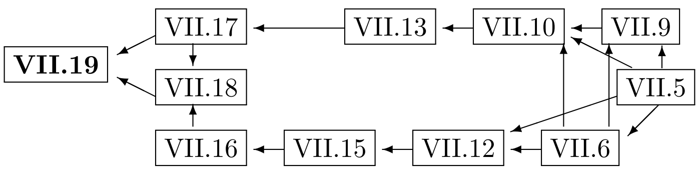
Svi stavovi koje Euklid na neposredan ili posredan način upotrebljava u dokazima stavova VII.17 i VII.18 posledice su samo stava VII.5. Deduktivna struktura dokaza stava VII.18 je takva da se svi stavovi koji u njoj učestvuju mogu izdvojiti iz sedme knjige kao povezana skupina koja ne zavisi od ostalih stavova *Elemenata.* Stavovi ove skupine pojaviće se kao sastavni deo deduktivnih struktura dokaza većine kasnijih stavova Euklidovih aritmetičkih knjiga.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.18

Prvi primer je stav VII.19 prema kojem je $r : s = r' : s'$ ako i samo ako je $rs' = sr'$. U dokazu ovog stava Euklid upotrebljava teoreme VII.17 i VII.18 da bi zaključio da je $r' : s' = rr' : rs'$ i $r : s = rr' : sr'$. Odavde je $rr' : rs' = rr' : sr'$, pa je zato, na osnovu stava V.9, $rs' = sr'$.[11] Jasno je da važi i obratno. Ovaj Euklidov dokaz svojom osnovnom idejom ne razlikuje se od dokaza teoreme 30 (VII.19), koji dolazi iz aritmetike oblutaka. On i nije ništa drugo do antifairetički dokaz prilagođen uslovima nove definicije proporcije.

Ako stavovima koji učestvuju u deduktivnoj strukturi dokaza stava VII.18 dodamo i stav VII.19 koji je dokazan samo pozivanjem na Euklidove stavove VII.17 i VII.18, oni će i dalje činiti logičku celinu koja je nezavisna od ostalih stavova *Elemenata*.[12]



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.19

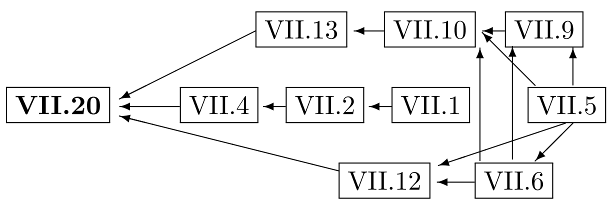
Oni stavovi ove celine koji se odnose na proporcije mogu se dokazati upotrebom oblutaka i antifairetičke definicije proporcije. Međutim, Euklid ih dokazuje upotrebom svoje definicije VII. def. 21, nezavisno od stava VII.2 kojim je utemeljen postupak uzastopnog oduzimanja, na kojem počiva antifairetička definicija proporcionalnosti. I stavovi koji slede za njima — VII.20, VII.21, VII.22 i VII.33, mogu se dokazati upotrebom oblutaka. Međutim, za razliku od stavova VII.17, VII.18 i VII.19, njihovi dokazi ne prate logiku aritmetike oblutaka. U njima se na rafinisan način upotrebljava indirektna metoda tako da oni dolaze iz vremena koje nije suviše udaljeno od Euklida. Oni su Euklidu značajni jer za svoju posledicu imaju dokaz da su njegova definicija VII. def. 21 i antifairetička definicija proporcionalnosti, ekvivalentne.

[11] Prema ovom stavu, iz pretpostavke da je $a : b = c : b$ (ili $b : a = b : c$) sledi da je $a = c$. Euklid ne dokazuje teoremu 21 (V.9) koja je aritmetički analogon stava V.9. U odeljku 5.1 smo utvrdili da ona u aritmetici oblutaka neposredno sledi iz antifairetičke definicije proporcije.

[12] Videćemo kasnije da ovoj logičkoj celini stavova koji su posledice samo stavova VII.17 i VII.18 i stavova koji im logički prethode, pripada i stav VII.22, a takođe i stavovi osme knjige VIII.10–12 i VIII.18–19.

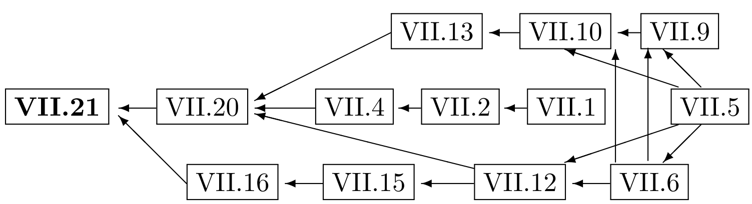
Sudeći prema deduktivnoj strukturi Euklidovog dokaza, stav VII.20 je prvi korak ka pomirenju dveju definicija. Za razliku od stava VII.19 koji se dokazuje samo upotrebom stava VII.5 i njegovih neposrednih i posrednih posledica, dokaz stava VII.20 iziskuje i upotrebu postupka uzastopnog oduzimanja i stavova VII.1, VII.2 i VII.4,[13] koji nisu kauzalno povezani sa stavom VII.5.

U stavu VII.20 Euklid pretpostavlja da su p i q najmanji brojevi takvi da je $p : q = r : s$, i indirektnim postupkom dokazuje da tada postoji broj k takav da je $r = kp$ i $s = kq$. Ako takvog broja ne bi bilo, tj. ako ne bi postojao broj k takav da je $r = kp$ i $s = kq$, onda iz definicije VII. def. 21 i stava VII.13, sledi da postoje brojevi m i n takvi da je $r = (m/n)p$ i $s = (m/n)q$. Štaviše, na osnovu dokaza stava VII.4, n je tada najveća zajednička mera brojeva p i q, pa će $p' = p/n$ i $q' = q/n$ biti brojevi takvi da je $r = mp'$ i $s = mq'$. Na osnovu stava VII.12 tada je $p' : q' = r : s$. Međutim, p' i q' su brojevi manji od p i q, i $p' : q' = p : q$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da su p i q najmanji brojevi takvi da je $p : q = r : s$. Dakle, ako je $p : q = r : s$, tada postoji broj k takav da je $r = kp$ i $s = kq$.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.20

I stavovi VII.21 i VII.22 dokazuju se upotrebom indirektne metode.[14] U njima Euklid dokazuje da su brojevi p i q najmanji među brojevima koji su sa njima u istoj razmeri ako i samo ako su međusobno prosti.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.21

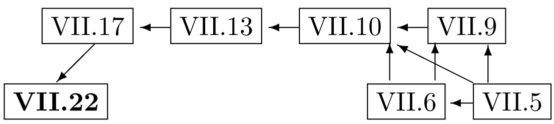
U dokazu stava VII.21 on pretpostavlja da su p i q međusobno prosti brojevi, a da su p' i q' od njih manji brojevi takvi da je $p : q = p' : q'$ i, na osnovu teoreme VII.20, zaključuje da postoji broj k takav da je $p = kp'$ i $q = kq'$. Tada će, na

[13] Štaviše, stav VII.20 je jedini stav *Elemenata* u čijem dokazu se direktno upotrebljava stav VII.4.

[14] Sudeći prema Boetijevoj tvrdnji, Arhita je upotrebljavao stav VII.22. Videti Diels, 47.A19.

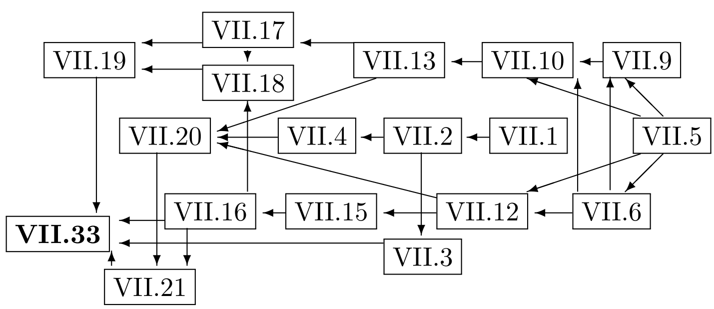
osnovu stava o komutativnosti proizvoda (VII.16), biti $p = p'k$ i $q = q'k$, pa k deli i p i q koji zbog toga ne mogu biti međusobno prosti, a po pretpostavci oni to jesu. Zato su p i q najmanji među brojevima koji su sa njima u istoj razmeri.

U dokazu stava VII.22 Euklid pretpostavlja da od dvaju brojeva p i q koji nisu međusobno prosti, nema manjih brojeva koji su sa njima u istoj razmeri $p : q$. Tada postoji broj k takav da je $p = kp'$ i $q = kq'$ pa je, na osnovu stava VII.17, $p : q = p' : q'$. Međutim, tada je i $p' < p$ i $q' < q$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da nema brojeva manjih od p i q koji su sa njima proporcionalni. Budući da je stav VII.22 logička posledica samo jednog stava — VII.17, deduktivna struktura njegovog dokaza je sasvim jednostavna.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.22

Posle stava VII.22, Euklid će se u sedmoj knjizi *Elemenata* vratiti razmatranju proporcija samo još jednom, dokazujući stav VII.33. Ostali stavovi sedme knjige posvećeni su problematici međusobno prostih, prostih i složenih brojeva (VII.23–32), i teoriji najmanjeg zajedničkog sadržaoca (VII.34–39).



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.33

Stav VII.33 je na razmeđi ovih teorija. U njegovom dokazu Euklid nalazi najmanje brojeve koji su proporcionalni zadatoj skupini brojeva. Njegova skupina sastoji se iz triju brojeva — r, s i t. On pretpostavlja da oni nisu međusobno prosti jer bi u suprotnom, na osnovu stava VII.21, već bili i najmanji brojevi u odnosu $r : s : t$. Ako je k njihova najveća zajednička mera,[15] tada postoje brojevi r', s' i t' takvi da je $r = r'k = kr'$, $s = s'k = ks'$, $t = t'k = kt'$ (VII.16), pa je zato $r : s : t = kr' : ks' : kt' = r' : s' : t'$. Dakle, brojevi r', s' i t' proporcionalni su brojevima r, s i t. Da su oni i najmanji Euklid dokazuje indirektnom metodom.

[15] Njeno postojanje Euklid dokazuje u stavu VII.3. Ovaj stav VII.3 se u *Elementima* više nigde ne koristi direktno.

Ako bi brojevi r'', s'' i t'' bili manji od brojeva r', s' i t' koji su njima proporcionalni, bilo bi $r = k'r'' = kr'$, $s = k's'' = sr'$ i $t = k't'' = kt'$. Međutim, $r' > r''$ pa je $k' > k$. Dakle, k' je mera veća od najveće zajedničke mere brojeva r, s i t, što nije moguće.

9.6. Ekvivalentnost dveju definicija

Stavovi VII.17–22 i VII.33 imaju jednu važnu posledicu. Iz njih sledi da je antifairetička definicija proporcije (iskaz P iz odeljka 8.1) posledica Euklidove definicije VII. def. 21. Zaista, ako je $r : s = r' : s'$ na osnovu Euklidove definicije, tada postoje najmanji brojevi p i q takvi da je $p : q = r : s = r' : s'$. Oni se dobijaju deobom brojeva r i s njihovom najvećom zajedničkom merom (VII.33) čije postojanje je utvrđeno stavom VII.2. Međutim, tada na osnovu teoreme VII.20 postoje brojevi k i l takvi da je $r = kp$, $s = kq$ i $r' = lp$ i $s' = lq$. Time su ispunjeni uslovi antifairetičke definicije zadati iskazom P pa je $r : s = r' : s'$ i prema ovoj definiciji.

Razume se, važi i obratno. Zaista, ako je $r : s = r' : s'$ na osnovu antifairetičke definicije, a brojevi r' i s' su međusobno prosti, iz teorema 22 (VII.20), 23 (VII.22) i 24 (VII.21) sledi da postoji broj k takav da je $r = kr'$ i $s = ks'$. Ako nisu, onda na osnovu teoreme 19 (VII.2) postoje najmanji, pa stoga i međusobno prosti brojevi p i q i brojevi k i l, takvi da je $r = kp$, $s = kq$ i $r' = lp$, $s' = lq$. Tada je $r = kr'/l$ i $s = ks'/l$. Dakle, pretpostavljajući da je teorija proporcija utemeljena na antifairetičkoj definiciji, dokazali smo da je

$$r : s = r' : s',$$

samo ako je zadovoljen jedan od sledećih uslova:

- $r = kr'$ i $s = ks'$,
- $r = r'/l$ i $s = s'/l$, $l \neq 1$
- $r = kr'/l$ i $s = ks'/l$, $k, l \neq 1$.

Usklađenost ovih triju uslova sa uslovima Euklidove definicije VII. def. 21 sledi iz teoreme 27 (VII.13). Dakle, iz antifairetičke definicije (iskaz P) sledi da važi Euklidova definicija VII. def. 21. Ove dve definicije su ekvivalentne.

9.7. Međusobno prosti brojevi

Sudeći prema Euklidovim stavovima VII.21 i VII.22 pojam međusobno prostih brojeva ušao je u aritmetiku iz potrebe da se objasni koji brojevi su najmanji u zadatoj proporciji. Osobine međusobno prostih brojeva koje su od najvećeg značaja u dokazima stavova osme knjige *Elemenata*, istražene su i stavovima VII.23–29, a stavovi VII.30–32 posvećeni su problematici prostih i složenih brojeva.

U stavu VII.23, upotrebom indirektne metode, Euklid dokazuje da će broj koji deli p biti međusobno prost sa brojem q, ako su p i q međusobno prosti brojevi. U dokazu on pretpostavlja da neki broj $k(> 1)$ deli broj p, a da k i q nisu uzajamno prosti. Tada postoji broj l koji deli i k i q, a kako k deli p, onda će i l deliti p. Sada l deli i p i q, što nije moguće jer su p i q, po pretpostavci, međusobno prosti brojevi.

U dokazu stava VII.23 Euklid se ne poziva ni na jedan stav aritmetike koji je prethodno dokazao, već samo na definiciju međusobno prostih brojeva. Razume se, ne poziva se ni na jednu aksiomu i ni na jedan postulat, jer njih u njegovoj aritmetici i nema. Njemu kao da nisu potrebne aksiome aritmetike, tako da za njeno razumevanje nije potrebno znati ništa drugo do definicije s početke sedme knjige. Stoga u dokazima svojih aritmetičkih stavova Euklid upotrebljava i tvrdnje koje nije dokazao. Stav VII.23 je dobar primer. U njemu on se poziva na tvrdnju prema kojoj iz pretpostavki da l deli k, i da k deli p, sledi da će l deliti p. Međutim, ovu tvrdnju on ne dokazuje. Ona u Euklidovoj aritmetici ima ulogu aksiome. Euklid je smatra očiglednom budući da se, kao i stavovi VII.1–2 i VII.5 koji u *Elementima* takođe slede ni iz čega, može dokazati samo upotrebom oblutaka.[16]

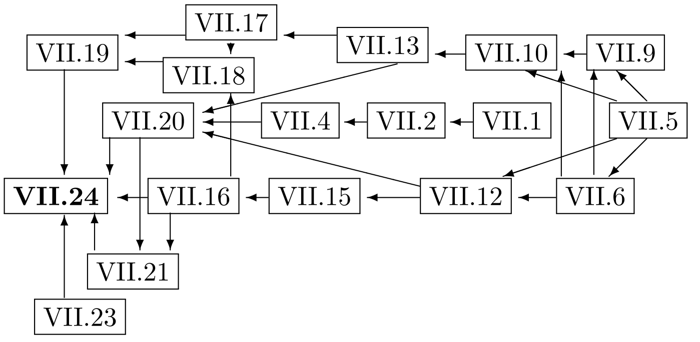
Stav VII.23 Euklid će upotrebiti direktno samo u dokazu stava VII.24. Međutim, u dokazu stava VII.24 on će upotrebiti i mnoštvo drugih stavova sedme knjige. Svi oni su posledice stavova o postupku uzastopnog oduzimanja kojim se nalazi najveća zajednička mera dvaju brojeva (VII.1 i VII.2) i stava o distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje (VII.5), tako da su stavovovi VII.1 i njegova posledica VII.2, zatim VII.5 i VII.23 temeljni stavovi koji za posledicu imaju i stav VII.24. Euklid će stav VII.24 sedmoj knjizi upotrebiti neposredno samo u dokazima stavova VII.25–26 i, posredno, u dokazu stava VII.27. Međutim, u osmoj knjizi upotrebiće ga posredno u dokazima stavova VIII.6–7 koji vode ka dokazu Teetetove teoreme, tj. Euklidovog stava VIII.14.[17] Ovo je, pak, njegova najznačajnija posledica.

Euklidov dokaz stava VII.24 prema kojem je proizvod dvaju brojeva p i q prost u odnosu na zadati broj r, ako su p i q oba prosti u odnosu na r, započinje pretpostavkom da broj r i proizvod pq nisu uzajamno prosti, već da postoji broj m koji deli i jedan i drugi. Kako su p i r međusobno prosti, a broj m deli broj r, brojevi p i m biće međusobno prosti na osnovu prethodnog stava — VII.23. Međutim, m deli proizvod pq po pretpostavci, pa zato postoji broj n takav da je $pq = nm$. Tada je i $pq = mn$ (VII.16). Zato je $m : p = q : n$ (VII.19). Međutim, m i p su međusobno prosti pa su stoga i najmanji brojevi u toj razmeri (VII.21). Dakle, postoji broj k takav da je $q = km$ i $n = kp$ (VII.20). Zato m deli q (a p deli n). Stoga m deli i q i r koji su međusobno prosti, što nije moguće. Dakle, ako su p i q oba uzajamno prosti u odnosu na r, onda je i proizvod pq uzajamno prost sa brojem r.

Ono čime se stav VII.24 izdvaja od ostalih stavova sedme knjige je prefinjena uporeba indirektne metode u njegovom dokazu uz upotrebu čak pet stavova aritmetike neophodnih da bi se na posletku došlo do kontradikcije. Doduše, Euklid upotrebljava indirektnu metodu i u dokazima prvih četiriju stavova sedme knjige, ali u ovim dokazima lakše se dolazi do protivrečnosti, i njihove deduktivne strukture su jednostavnije. Međutim, njihovi prvobitni dokazi su mogli biti direktni i očigledni jer je do njih bilo moguće dospeti upotrebom oblutaka. Ako je zaista bilo tako, onda su indirektni dokazi prvih stavova sedme knjige stigli kasnije, nakon logičkog sređivanja pitagorejske aritmetike, u vreme kada je indirektna metoda već bila razvijena do nivoa njene upotrebe u dokazu stava VII.24.

[16] Teorema 18 iz odeljka 4.2.

[17] O ovome će biti reči u odeljku 11.1.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.24

Stav VII.25 je poseban slučaj stava VII.24, a VII.26 neposredno sledi iz stava VII.24. U stavu VII.25 Euklid dokazuje da je kvadrat nekog broja p uzajamno prost sa nekim brojem r, ako su p i r uzajamno prosti, a u stavu VII.26 da su proizvodi pq i rs uzajamno prosti ako su brojevi p i q uzajamno prosti i sa r i sa s. Ova dva stava Euklid upotrebljava u dokazu stava koji sledi odmah za njima. Pretpostavljajući da su brojevi p i q uzajemno prosti, u stavu VII.27 Euklid dokazuje da su i kvadrati p^2 i q^2 uzajamno prosti brojevi. Štaviše, dokazuje da su takođe i kubovi p^3 i q^3 međusobno prosti, a i svi ostali stepeni brojeva p i q. U dokazu ovog stava on najpre primećuje da su brojevi p^2 i q međusobno prosti (VII.25), a zbog toga su i p^2 i q^2 uzajamno prosti (VII.25). Dalje, p i q^2 su takođe uzajamni prosti (VII.25) pa je svaki od brojeva p i p^2 uzajamno prost sa svakim od brojeva q i q^2. Zato je proizvod pp^2 uzajamno prost sa proizvodom qq^2 (VII.26). Dakle, i brojevi p^3 i q^3 biće međusobno prosti. Na isti način, svi stepeni brojeva p i q biće međusobno prosti.

Stav VII.27 ima značajnu ulogu u dokazu Teetetove teoreme — stava VIII.14, budući da se upotrebljava u dokazu stava VIII.6 i, posredno, u dokazu stava VIII.7 na kojem zatim počiva dokaz stava VIII.14.[18] Naprotiv, stavove VII.28–32 koji slede, Euklid ne upotrebljava u osmoj knjizi ali ih koristi u devetoj, u dokazima stavova IX.12–15 i kasnije. Osim stava VII.30, ostali stavovi iz ove skupine su samodovoljni jer se u njihovim dokazima Euklid ne poziva na stavove koji im prethode.

U stavu VII.28 Euklid dokazuje da je *zbir dvaju međusobno prostih brojeva međusobno prost sa svakim od njih*, a u stavu VII.29 da je *prost broj uzajamno prost sa svakim brojem koji taj prosti broj ne deli*. Njihove deduktivne strukture su trivijalne budući da se u njihovim dokazima ne upotrebljavaju ostali stavovi aritmetičkih knjiga. I deduktivna struktura dokaza stava VII.31 je takođe trivijalna, a u dokazu stava VII.32 Euklid se poziva samo na ovaj stav koji mu neposredno prethodi.

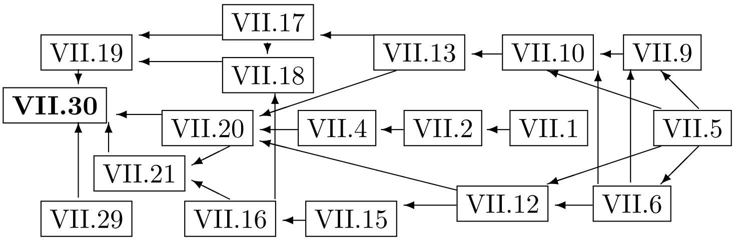
Složenošću deduktivne strukture svog dokaza, od ovih stavova odudara stav VII.30. Njime se tvrdi da neki prost broj p koji deli proizvod dvaju brojeva r i

[18] O ovome će biti reči u odeljku 11.1.

s, deli bar jedan od njih.[19] Iako bi se, na osnovu formulacije ovog stava, reklo da on ne pripada teoriji proporcija, u njegovom dokazu ključna je upotreba stavova VII.19–21 koji dolaze iz teorije proporcija.[20]

Deduktivne strukture dokaza stavova VII.28, VII.29, VII.31 i VII.32

Zaista, u nameri da dokaže stav VII.30, Euklid pretpostavlja da p ne deli r, a deli proizvod brojeva r i s. Tada postoji broj k takav da je $rs = kp$ pa je $p : r = s : k$ (VII.19). Kako je p prost broj koji ne deli r, brojevi p i r će biti međusobno prosti (VII.29), a zbog toga i najmanji brojevi u istoj razmeri (VII.21). Zato postoji broj l takav da je $s = lp$ i $k = lr$ (VII.20). Dakle, p deli s.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.30

U stavu VII.31 Euklid dokazuje da je svaki složeni broj deljiv nekim prostim brojem. To čini ponavljajući isti postupak konačno mnogo puta. Ako je neki broj složen njega deli neki drugi broj koji može biti prost ili složen. Ako nije prost opet ga deli neki broj. Budući da se ovaj postupak ne može ponavljati neograničeno mnogo puta, na posletku će se doći do prostog broja. Neposredna posledica ove tvrdnje je stav VII.32 prema kojem je svaki broj ili prost ili deljiv nekim prostim brojem.

Problematici prostih i međusobno prostih brojeva Euklid će se vratiti dokazujući stavove IX.14–20.[21] U stavu IX.20, samo upotrebom stava VII.31 dokazaće poznatu tvrdnju da prostih brojeva ima neograničeno mnogo.

9.8. Najmanji zajednički sadržalac

U stavu VII.34 Euklid nalazi najmanji zajednički sadržalac dvaju brojeva. U dokazu on najpre primenjuje indirektnu metodu da bi utvrdio da je proizvod rs najmanji zajednički sadržalac brojeva r i s ako su oni međusobno prosti. Zaista, ako

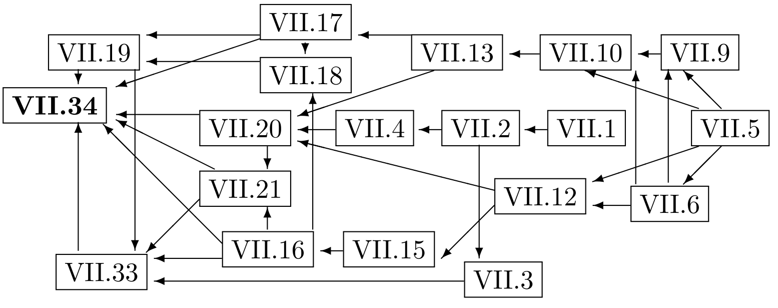
---

[19] Jednostavna posledica ove tvrdnje je stav o jedinstvenoj faktorizaciji. Euklid to ne primećuje tako da u *Elementima* nije dokazan Osnovni stav aritmetike. Videti [**21**, str. 3]. O ovome će biti više reči u odeljku 14.1.

[20] Isto bi se moglo reći i za stav VII.24 o kojem je već bilo reči, a i za stavove VII.33 i VII.34 o kojima će biti reči.

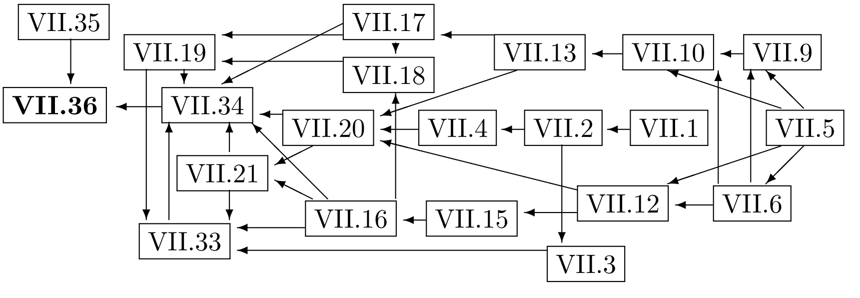
[21] O ovim stavovoma biće reči u odeljku 10.8.

ne bi bio, postojao bi broj k koji je manji od proizvoda rs takav da je $k = mr = ns$. Tada je $r : s = n : m$ (VII.19), a kako su r i s međusobno prosti brojevi oni su i najmanji u toj razmeri (VII.21) pa s deli m (VII.20). Međutim, kako je $s : m = rs : rm$ (VII.17) i $rm = k$ (VII.16), i proizvod rs će deliti k, a to nije moguće budući da je broj k manji od proizvoda rs.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.34

Ako pak r i s nisu međusobno prosti onda postoje najmanji brojevi p i q takvi da je $r : s = p : q$ (VII.33). Tada je $rq = sp$ najmanji zajednički sadržalac brojeva r i s. Zaista, ako bi broj n bio zajednički sadržalac ovih dvaju brojeva koji je manji od rq, tada bi postojali brojevi k i l takvi da je $n = kr = ls$ pa je $r : s = l : k$ (VII.19). Kako je i $r : s = p : q$, bilo bi i $p : q = l : k$ (V.11), a kako su p i q najmanji brojevi proporcionalni brojevima r i s pa zato i međusobno prosti (VII.20), broj q bi delio broj k. Međutim, $q : k = rq : rk$ (VII.17) pa bi i rq delio $rk = n$, što nije moguće budući da smo pretpostavili da je n manji od rq.

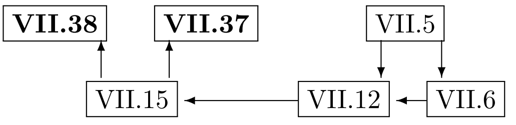


Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.36

Stav VII.35, prema kojem *najmanji zajednički sadržalac dvaju brojeva deli svaki drugi sadržalac ovih brojeva*, Euklid dokazuje bez upotrebe stavova koji mu prethode pa je zato deduktivna struktura njegovog dokaza trivijalna. Naprotiv, u dokazu stava VII.36 on upotrebljava dva stava koja mu neposredno prethode — VII.34 i VII.35. Znajući kako se nalazi najmanji zajednički sadržalac dvaju brojeva (VII.34) Euklid u stavu VII.36 nalazi najmanji zajednički sadržalac triju brojeva. Razume se, time je utvrdio kako se nalazi najmanji zajednički sadržalac proizvoljnog skupa brojeva.

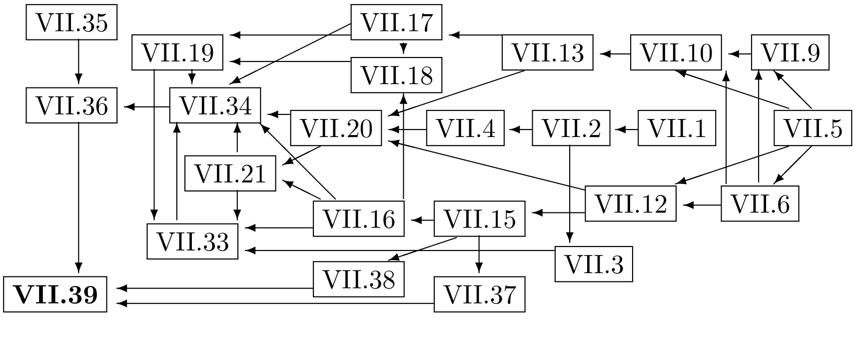
Stavove VII.34–35 Euklid u sedmoj knjizi neposredno upotrebljava samo u dokazu stava VII.36, a u osmoj njizi u dokazu stava VIII.4. Posredno ih upotrebljava samo u dokazima stavova VII.39 i VIII.5. Stavove VIII.36–39 neće upotrebljavati u dokazima ostalih stavova *Elemenata*.

Euklidova formulacija stava VII.37 uslovljena je činjenicom da on upotrebljava termin *deo* za broj koji deli zadati broj, ali ne kazuje koji je to deo zadatog broja. Zato u stavu VII.37 tvrdi da *ako je neki broj meren drugim, onda mereni broj ima* deo *istog naziva kao i broj koji meri.* Drugim rečima, u ovom stavu u kojem skoro da nema šta da se dokaže, on primećuje da broj $m = kn$ (koji je deljiv brojem k) ima k-ti deo i, štaviše, da je k-ti deo broja m baš broj n. U dokazu upotrebljava samo stav VII.15.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovih stavova VII.37 i VII.38

Slično je i sa stavom VII.38 u kojem dokazuje obratno tvrđenje prema kojem *ako neki broj ima ma kakav* deo, *onda je taj broj meren brojem istog naziva sa tim delom.* Dakle, u ovom stavu on zapravo dokazuje sasvim jasnu činjenicu da je broj m koji ima k-ti deo, deljiv brojem k, tj. da tada postoji broj n takav da je $m = kn$. I u ovom dokazu upotrebljava samo stav VII.15.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VII.39

U stavu VII.39 Euklid nalazi najmanji broj koji ima date delove. U svom dokazu on pretpostavlja da neki broj ima k-ti, l-ti i m-ti deo. Ako je n najmanji zajednički sadržalac brojeva k, l i m (VII.36), broj n će biti deljiv tim trima brojevima pa će i on imati k-ti, l-ti i m-ti deo (VII.37). Da je n najmanji broj koji ima ove delove Euklid dokazuje indirektnim postupkom. Ako bi to bio broj e, i on bi bio deljiv brojevima k, l i m (VII.38) i bio bi manji od najmanjeg zajedničkog sadržaoca brojeva k, l i m, što nije moguće. Razume se, iako stav dokazuje kao da se odnosi na brojeve koji imaju samo tri dela, Euklid zapravo dokazuje opštu teoremu budući da se isti dokaz može primeniti na brojeve sa proizvoljno mnogo delova.

Nalaženjem najmanjeg broja koji ima date delove omogućeno je sabiranje tih delova. Rečeno jezikom savremene matematike, u stavu VII.39 Euklid nalazi najmanji zajednički imenilac dvaju razlomaka, a time je omogućeno njihovo sabiranje.

POGLAVLJE 10

Neprekidne proporcije

Osma i delovi devete knjige *Elemenata* posvećeni su *neprekidnoj proporciji*. Međutim, među Euklidovim aritmetičkim definicijama u sedmoj knjizi nema definicije ovog pojma. Ni u petoj knjizi koja se odnosi na proporcionalnost veličina, a ne samo brojeva, ovaj pojam nije jasno definisan. Euklid je prosto smatrao dovoljnim da primeti da

> *proporcija se može obrazovati od najmanje triju članova* (V. def. 8).

Zbog toga o sadržaju ovoga pojama možemo zaključivati tek na osnovu njegove upotrebe u *Elementima*, a ona je u skladu sa Aristotelovim objašnjenjem da se u neprekidnoj proporciji koju on naziva *geometrijskom*, prvi član odnosi prema drugom kao drugi prema trećem.[1] Euklid će potvrditi ovakvo razumevanje definicije neprekidne proporcije, tvrdeći da

> *ako su tri veličine (neprekidno) proporcionalne, onda je razmera prve veličine prema trećoj* dvaput viša *od razmere prve veličine prema drugoj* (V. def. 9).

Dakle, ako su a, b i c tri neprekidno proporcionalne veličine, u skladu sa definicijom V. def. 8 i Aristotelovim objašnjenjem, biće $a : b = b : c$, a tada je i $a : c = (a : b)^2$, baš kao što se tvrdi definicijom V. def. 9.[2] Zbog toga se zaista može reći da je razmera $a : c$ *dvaput viša* od razmere $a : b$.[3]

Izraz $(a : b)^2$ kojim se objašnjava sadržaj definicije V. def. 9 savremenom čitaocu je sasvim razumljiv. Međutim, Grci nisu operisali sa realnim brojevima, a ni sa racionalnim, tako da za njih kvadrat odnosa dveju veličina a i b (tj. izraz $(a : b)^2$) nije imao matematičkog smisla, bez obzira na to da li su a i b brojevi ili kakve druge veličine. Stoga ostaje pitanje šta Euklidu daje pouzdanje da je njegova definicija *dvaput više proporcije* valjana. Štaviše, budući da je formulisana kao tvrdnja, ostaje

[1] Aristotel, *Nikomahova etika*, 1131 b.

[2] Zaista, $a : c = a : (b^2/a) = (a : b)^2$.

[3] Euklid kazuje da je ona *dvostruka*, međutim, za savremenog čitaoca ovaj pojam ima drugi smisao tako da je u svom prevodu *Elemenata* Anton Bilimović upotrebio izraz *dva puta viša proporcija* koji pre odgovara sadržaju teksta iako je i on neuobičajen. Videti Bilimovićev prevod *pete knjige*, str. 42–43, f. 10.

i pitanje da li se ova definicija sme primenjivati ako nije već dokazana.[4] Videćemo da odgovori na ova pitanja dolaze iz pitagorejske teorije muzike.[5]

Pre Aristotela i Euklida, i Arhita upotrebljava pojam neprekidne proporcije. Upotrebljava ga i u geometrijskom i u aritmetičkom smislu. U nameri da reši problem udvostručenja kocke, za dve zadate duži on konstruiše njihove dve srednje proporcionale.[6] Međutim, kada govori o srednjim proporcionalama u muzičkoj teoriji, on neprekidnu proporciju shvata isključivo aritmetički. Kao što kasnije čini i Aristotel, ovu proporciju on naziva *geometrijskom*, a njoj suprotstavlja aritmetičku i harmonijsku.[7] I neopitagorejac Nikomah će, mnogo kasnije, neprekidnu proporciju zvati geometrijskom. Štaviše, zajedno sa aritmetičkom i harmonijskom proporcijom, on će je pripisati samom Pitagori.[8]

10.1. Neprekidne proporcije proizvoljne dužine

Kao što nigde ne definiše neprekidnu proporciju triju brojeva, Euklid nigde ne kazuje ni kada su *brojevi, u proizvoljnom broju, neprekidno proporcionalni*. Međutim, znajući Aristotelovu definiciju proporcionalnosti triju veličina koje se upotrebljava i u *Elemenima*, jasno je da je Euklid na stanovištu da su brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ neprekidno proporcionalni ako je:

$$p_1 : p_2 = p_2 : p_3 = \ldots = p_{n-2} : p_{n-1} = p_{n-1} : p_n.$$

Međutim, to se ne može zaključiti i iz upotrebe ove definicije u dokazu stava VIII.4, u kojem Euklid nalazi četiri najmanja „neprekidno proporcionalna“ broja koji su par po par u unapred zadatim razmerama.[9] U ovom stavu on nalazi brojeve p_1, p_2, p_3 i p_4 takve da su odnosi $p_1 : p_2$, $p_2 : p_3$ i $p_3 : p_4$ jednaki trima unapred zadatim odnosima, ali ne i međusobno i, svejedno, brojeve p_1, p_2, p_3 i p_4 naziva neprekidno proporcionalnim. Na drugim mestima u *Elementima* Euklid će uvek zahtevati međusobnu jednakost odnosa $p_1 : p_2$, $p_2 : p_3$ i $p_3 : p_4$ da bi brojeve p_1, p_2, p_3 i p_4 nazvao neprekidno proporcionalnim.

---

[4] Dobar primer upotrebe ove definicije je dokaz Euklidovog stava VIII.11. Videti odeljak 10.3.

[5] O ovome će biti reči u odeljku 12.4.

[6] Diels, 47.A14.

[7] Prema Ptolemajevim rečima, Arhita objašnjava da „*postoje tri srednje proporcionale u muzici: jedna je aritmetička, druga geometrijska, a treća subkontrarna, koju zovu harmonijska.*

Aritmetička *je sredina kada tri brojna pojma pokazuju jednaku uzastopnu razliku: koliko prvi nadvisuje drugi, toliko drugi nadvisuje treći. Kod te analogije događa se to da je odnos među većim brojnim pojmovima manji, a među manjima veći.*

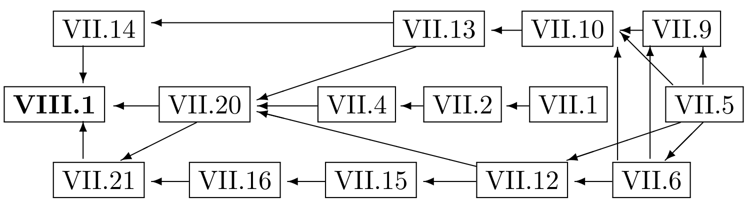
Geometrijska *je sredina je kada se prvi brojni pojam odnosi prema drugom kao drugi prema trećem. Kod njih veći imaju isti međusobni odnos kao manji.*

Subkontrarna sredina *koju zovemo* harmonijska*, je onda kada se brojni pojmovi odnose ovako: za koliko deo vlastite veličine prvi pojam nadvisuje drugi, za toliki deo trećega srednji pojam nadvisuje treći. Kod te analogije je odnos između većih pojmova veći, a između manjih manji*“. Diels, 47.B2.

[8] Prema Nikomahovim rečima *postoje tri proporcije poznate starima — Pitagori, Platonu i Aristotelu. To su aritmetička, geometrijska i harmonijska... One do Platona i Aristotela dolaze od Pitagore.* Nicomachus, II.22.1, II.28.6.

[9] Videti [**42**, str. 83–84].

Stavovi s početka osme knjige *Elemenata* uglavnom se odnose se na neprekidne proporcije koje imaju proizvoljno mnogo članova. To su stavovi VIII.1–4, VIII.6-10 i VIII.13. Neke od njih, VIII.9–10 i VIII.13, Euklid neće kasnije koristiti u dokazima, kako stavova osme, tako ni stavova ostalih knjiga *Elemenata*. Neke će koristiti retko. Stav VIII.4 upotrebiće samo u dokazu sledećeg stava — VIII.5, i kasnije u dokazu stava X.12.[10] Međutim, jedan od njih, stav VIII.2 (i njegovu *posledicu* koja je formulisasna neposredno posle njega), Euklid će neposredno ili posredno upotrebljavati u dokazima mnogih stavova osme knjige sve do njenog samog kraja, a kasnije i u dokazu stava IX.15. Štaviše, osnovnu ideju ovog dokaza on će ponoviti u dokazima stavova VIII.11–12 i VIII.18–19. Međutim, pre nego što će ga dokazati, Euklid će u stavu VIII.1 upotrebom indirektne metode utvrditi da će članovi proizvoljne neprekidne proporcije biti najmanji od brojeva koji su u istoj razmeri sa njima, ako su prvi i poslednji član te proporcije uzajamno prosti brojevi. Upotrebiće ga neposredno samo u dokazu sledećeg, i stava VIII.9, a njegov obrat dokazaće u stavu VIII.3. Razume se, svi stavovi koji učestvuju u deduktivnoj strukturi dokaza stava VIII.1 dolaze iz sedme knjige *Elemenata*.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.1

U dokazu stava VIII.1 Euklid pretpostavlja da su p i r međusobno prosti brojevi kojima je q srednje proporcionalni broj. Ako bi p', q', r' bili brojevi manji od njih, takvi da je $p' : q' = q' : r'$ i $p : q : r = p' : q' : r'$, bilo bi i $p : r = p' : r'$ (VII.14). Ali, kako su p i r međusobno prosti, oni će biti i najmanji brojevi u tom odnosu (VII.21), pa zbog toga oni, redom, dele brojeve p' i r' (VII.20). Međutim, veći ne može deliti manji broj, čime se dolazi do kontradikcije pa su p, q i r najmanji.[11]

U stavu VIII.2 Euklid nalazi *onoliko koliko se traži najmanjih neprekidno proporcionalnih brojeva koji su u datoj razmeri.* U nameri da to učini on pretpostavlja da su p i q najmanji brojevi u zadatoj razmeri i, upotrebom stavova VII.17 i VII.18, najpre dokazuje da je

$$p : q = p^2 : pq = pq : q^2.$$

Međutim, budući da su brojevi p i q najmanji u toj razmeri, oni će biti i međusobno prosti (VII.22). Zato će i brojevi p^2 i q^2 biti međusobno prosti (VII.27), pa će p^2,

[10] Prema ovom stavu *veličine samerljive sa istom veličinom, samerljive su i među sobom.*

[11] Primetimo da se prethodni dokaz sa lakoćom može preformulisati tako da dobije formu direktnog dokaza. U njemu nije bilo neophodno pretpostaviti da su p', q', r' brojevi manji od brojeva p, q, r, već da su bilo koji drugi brojevi takvi da je $p' : q' = q' : r'$ i $p : q : r = p' : q' : r'$ i, na isti način kao i Euklid, doći do zaključka da su p i r najmanji brojevi u tom odnosu zato što su međusobno prosti.

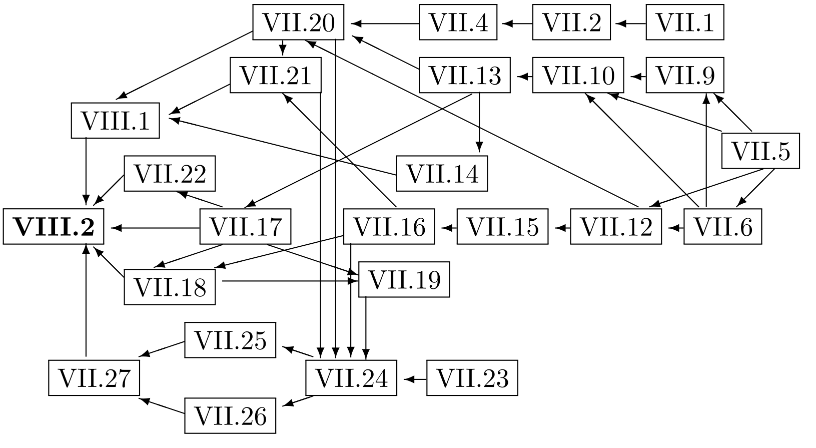
pq, q^2 biti i najmanji neprekidno proporcionalni brojevi koji su u odnosu $p : q$ (VIII.1). Na isti način, to će biti i brojevi p^3, p^2q, pq^2, q^3, jer je

$$p : q = p^3 : p^2q = p^2q : pq^2 = pq^2 : q^3,$$

a p^3 i q^3 su međusobno prosti brojevi (VII.27). Ovde Euklid sa svojim dokazom staje, podrazumevajući da se postupak može nastaviti sve dok se ne nađe *onoliko koliko se traži najmanjih neprekidno proporcionalnih brojeva koji su u datoj razmeri.*

Stav VIII.2 Euklid nije formulisao kao teoremu već kao konstruktivni problem. Naprotiv, *posledica* koja dolazi iza ovog stava formulisana je i dokazana kao teorema. U njoj on ističe da su prvi i poslednji od triju najmanjih brojeva koji su u neprekidnoj proporciji, kvadrati, a ako ih je četiri, onda su kubovi. Razume se, to neposredno sledi iz prethodnog dokaza. Ovu posledicu Euklid će upotrebiti u dokazima poslednjih dvaju stavova osme knjige.

Iako drugi stav osme knjige dokazuje samo u slučaju tročlanih i četvoročlanih neprekidnih proporcija, Euklid ga formuliše kao opšti stav koji se odnosi na neprekidne proporcije sa proizvoljno mnogo članova. U opštem slučaju on će ga neposredno upotrebiti samo u dokazima stavova VIII.3 i VIII.9, a u slučaju tročlanih ili četvoročlanih neprekidnih proporcija, u dokazima stava VIII.21 i poslednjih dvaju stavova — VIII.26–27. Posredno će ga upotrebiti u dokazima nekoliko važnih stavova osme knjige, između ostalih i u stavovima VIII.8 i VIII.14.

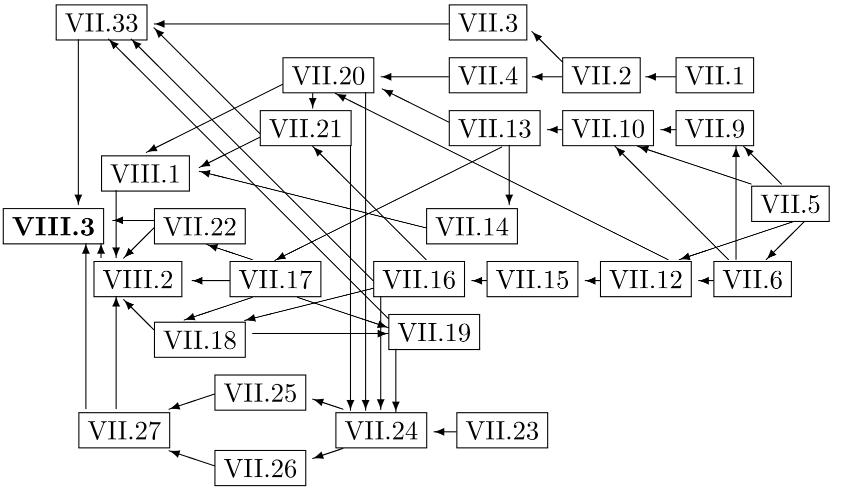


Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.2

Razume se, i ako brojevi p i q nisu međusobno prosti, upotrebom stavova VII.17–18 kao u dokazu stava VIII.2, opet će se doći do neprekidno proporcionalnih brojeva p^2, pq, q^2. To Euklid čini dokazujući stav VIII.11. Međutim, ovog puta p^2, pq, q^2 neće biti najmanji brojevi u razmeri $p : q$. Na isti način kao i u stavu VIII.11, Euklid će u stavu VIII.12 utvrditi da je i p^3, p^2q, pq^2, q^3 četvorka neprekidno proporcionalnih brojeva, kakvigod da su brojevi p i q. Razume se, ako p i q nisu međusobno prosti, opet p^3, p^2q, pq^2, q^3 neće biti najmanji brojevi koji su u razmeri

$p : q$.[12] U dokazima stavova VIII.11 i VIII.12 Euklid će ponoviti neke argumente iz dokaza stava VIII.2. Međutim, dokaz stava VIII.2 je složeniji od dokaza stavova VIII.11 i VIII.12 jer počiva i na znanju teorije međusobno prostih brojeva iz sedme knjige *Elemenata* i stavova o najvećoj zajedničkoj meri s njenog početka, koji se ne upotrebljavaju u dokazima stavova VIII.11 i VIII.12. Utoliko je i deduktivna struktura dokaza stava VIII.2 složenija od deduktivne strukture stavova VIII.11–12.[13] Pored stava VIII.1, njoj pripada 23 stava sedme knjige, svi od prvog do dvadeset sedmog, sa izuzetkom stavova VII.3, VII.7–8 i VII.11.

U trećem stavu osme knjige Euklid će dokazati obrat stava VIII.1. Dokazaće da će krajnji brojevi neke neprekidne proporcije biti međusobno prosti, ako su najmanji. Pretpostavivši da su p i q najmanji brojevi od onih koji su sa njima u istoj proporciji (čije postojanje je dokazano u stavu VII.33), u dokazu stava VIII.3 Euklid upotrebljava stav koji mu prethodi i zaključuje da su p^2, pq i q^2 najmanji brojevi takvi da je $p^2 : pq = pq : q^2$, a zatim i da su p^3, p^2q, pq^2, q^3 najmanji brojevi takvi da je $p^3 : p^2q = p^2q : pq^2 = pq^2 : q^3$, itd. Međutim, kako su p i q međusobno prosti jer su najmanji od brojeva koji su u istoj razmeri (VII.22), međusobno prosti će biti i p^2 i q^2, p^3 i q^3, (VII.27) itd., tako da će krajnji brojevi neprekidne proporcije biti međusobno prosti, ako su najmanji.

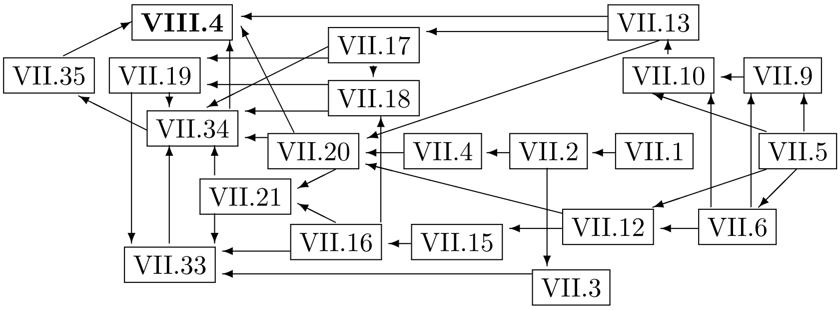


Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.3

Za razliku od VIII.1–3, stavovi VIII.4 i VIII.5 nisu od značaja za dokazivanje ostalih stavova aritmetičkih knjiga (VII–IX) i biće upotrebljeni u *Elementima* samo u dokazu stava X.12. Štaviše, ova dva stava osme knjige se i ne odnose na neprekidne proporcije iako Euklid i u njima koristi pojam „neprekidne proporcije“. Međutim, kao što smo već primetili, ovaj pojam u ovim dvama stavovima razlikuje se od pojma neprekidne proporcije koji se upotrebljava u ostalim stavovima *Elemenata*.

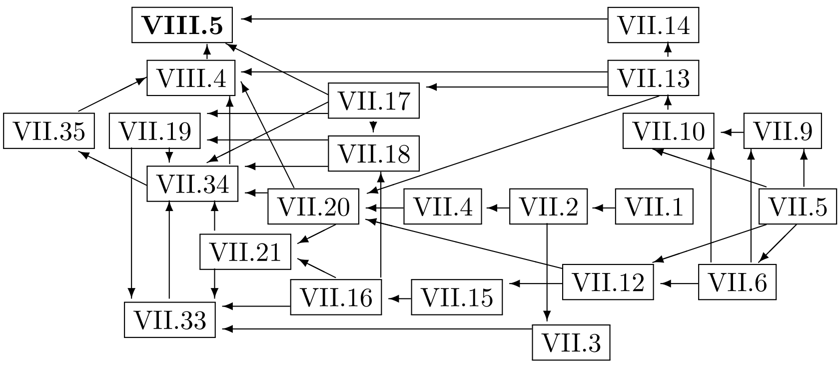
[12] O stavovima VIII.11 i VIII.12 biće reči i u odeljku 10.3.

[13] O deduktivnoj strukturi stava VIII.11 biće reči u odeljku 10.3.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.4

U stavu VIII.4 Euklid za zadate tri razmere $a : b$, $c : d$, $e : f$ takve da su a, b, c, d, e, f najmanji brojevi u tim razmerama, nalazi najmanje „neprekidno proporcionalne“ brojeve p, q, r, s takve da je $p : q = a : b$, $q : r = c : d$, $r : s = e : f$, ne zahtevajući da proporcije $p : q$, $q : r$ i $r : s$ budu jednake među sobom.[14]



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.5

Stav VIII.4 je formulisan kao da se odnosi na „neprekidne proporcije“ sa proizvoljno mnogo članova, a dokazuje se kao stav o četvoročlanoj „neprekidnoj proporciji“. Naprotiv, sledeći stav, VIII.5, odnosi se samo na tročlane „neprekidne proporcije“. U njemu Euklid pretpostavlja da su $a = pr$ i $b = qs$ pravougaoni brojevi i dokazuje da njihov odnos zavisi samo od odnósa $p : q$ i $r : s$. Pretpostavljajući da su h, t, k najmanji brojevi takvi da je $p : q = h : t$ i $r : s = t : k$, čije postojanje sledi iz stava VIII.4, Euklid najpre primećuje da je $h : t = p : q = pr : qr$ (VII.18) i $t : k = r : s = qr : qs$ (VII.17), a odavde zaključuje da je $h : t : k = pr : qr : qs$ pa, stoga, i $h : k = pr : qs$ (VII.14). Dokaz završava primedbom da je $h : k$ razmera sastavljena od strana, a da je zato i $a : b$ razmera sastavljena od strana. On zapravo želi da dokaže da je $pr : qs = (p : q)(r : s)$. Savremenom čitaocu je proizvod racionalnih brojeva sasvim razumljiv, međutim, Grci nisu operisali sa

[14] Videti [**22**, vol. ii, str. 353].

racionalnim brojevima, tako da za njih proizvod dvaju odnosa $p : q$ i $r : s$ nije imao matematičkog smisla, na isti način na koji nije imala smisla ni relacija iskazana formulom $p^2 : q^2 = (p : q)^2$ iz definicije V. def. 9. Stoga ostaje pitanje šta Euklidu daje pouzdanje da je njegovo rasuđivanje ispravno. Videćemo da odgovor i na ovo pitanje dolazi iz pitagorejske teorije muzike.[15]

Kao VIII.1–3, i stavovi VIII.6–10 i VIII.13 odnose se na neprekidne proporcije sa proizvoljno mnogo članova, zbog čega njihovo razumevanje zahteva visok stepen apstrakcije. I kasnije, u devetoj knjizi u stavovima IX.8–13, IX.17 i IX.35, biće reči o neprekidnim proporcijama sa proizvoljno mnogo članova. Međutim, dokazi svih ovih stavova potkrepljeni su činjenicama koje se odnose na tročlane ili četvoročlane neprekidne proporcije, podrazumevajući da se postupak njihovog dokazivanja na isti način može nastaviti i kada je broj članova neprekidne proporcije veći od četiri.

10.2. Arhitini stavovi

Stavovi VIII.6–7 upotrebljavaju se direktno samo u dokazima stavova VIII.14–15, a indirektno samo još u dokazima stavova VIII.16–17, tako da će o njima biti reči kasnije, kada bude reči i o njihovim posledicama.[16] Stavovi koji dolaze za njima — VIII.8, VIII.9 i VIII.10, pripadaju aritmetici koja je nastala iz potrebe da se reše neka pitanja pitagorejske teorije muzike. U njima se daje odgovor na jedno od važnih pitanja postavljenih u osmoj knjizi: pod kojim uslovima je moguće umetnuti jedan, dva ili više srednje proporcionalnih brojeva između dvaju zadatih brojeva?

U nameri da odgovori na to pitanje, Euklid najpre dokazuje stav VIII.8 prema kojem

> *ako su između dva broja umetnuti brojevi, koji su u neprekidnoj proporciji sa njima, onda će se između dva druga broja, koji su u istoj razmeri sa prvima moći umetnuti isti toliki broj neprekidno proporcionalnih brojeva.*

Ovim stavom Euklid nalazi da mogućnost umetanja srednje proporcionalnih brojeva između dvaju zadatih brojeva zavisi samo od odnosa tih dvaju brojeva, tako da u sledećim dvama stavovima pretpostavlja da su oni međusobno prosti. U stavu VIII.9 Euklid nalazi da, koliko je neprekidno proporcionalnih brojeva između dvaju međusobno prostih brojeva p i q, toliko ih ima i između 1 i p, a takođe i između 1 i q. Obratno, u stavu VIII.10 on pretpostavlja da između brojeva 1 i p postoji podjednak broj neprekidno proporcionalnih brojeva kao i između 1 i q i dokazuje da toliko neprekidno proporcionalnih brojeva ima i između p i q.

Pokazaće se da stavovi VIII.8–10 najverovatnije pripadaju Arhiti jer su od značaja za muzičku teoriju izloženu u Euklidovom *Kanonskom preseku* koju Boetije pripisuje baš Arhiti.[17] Budući da se u njihovim dokazima upotrebljavaju stavovi VII.23–27 koji pripadaju teoriji međusobno prostih brojeva, a potom i stavovi

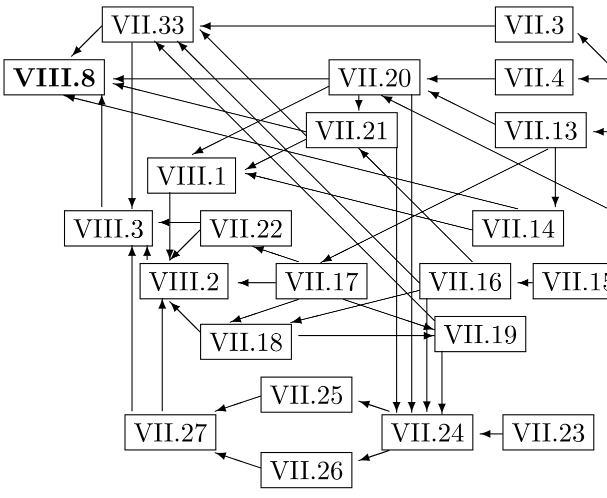
---

[15] O ovome će biti reči u odeljku 12.4.

[16] Videti odeljak 11.1.

[17] Videti odeljak 12.2. Znajući da ovi stavovi pripadaju Arhiti, van der Verden nekritički osmu knjigu *Elemenata* u celosti propisuje njemu. Videti [**53**, str. 153–155].

VIII.1–3 koji se odnose na neprekidno proporcionalne brojeve, postoji mogućnost da bi i ovi stavovi mogli pripasti Arhiti.[18]



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.8

U nameri da dokaže stav VIII.8, Euklid pretpostavlja da su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ neprekidno proporcionalni brojevi, a da su $p_1', p_2', \ldots, p_n'$ najmanji brojevi koji su sa njima u istoj razmeri (VII.33).[19] Tada su p_1' i p_n' proporcionalni brojevima p_1 i p_n (VII.14), a i međusobno su prosti (VIII.3). Oni su i najmanji u toj razmeri (VII.21) pa zato postoji broj k takav da je $p_1 = kp_1'$ i $p_n = kp_n'$ (VII.20). Sada su i $kp_1', kp_2', \ldots, kp_n'$ u neprekidnoj proporciji pa, koliko je neprekidno proporcionalnih brojeva između p_1' i p_n', toliko ih je i između $p_1 = kp_1'$ i $p_n = kp_n'$. Dakle, koliko ih je, zavisi samo od odnosa $p_1 : p_n$. Stoga, ako je zadata neprekidna proporcija

$$k^n : k^{n-1}l = k^{n-1}l : k^{n-2}l^2 = \ldots = kl^{n-1} : l^n,$$

(VIII.2) takva da su njeni krajnji članovi k^n i l^n međusobno prosti pa zato i najmanji brojevi koji zadovoljavaju tu neprekidnu proporciju (VIII.1), onda će, kada je $k = 1$, biti

$$1 : l = l : l^2 = \ldots = l^{n-1} : l^n,$$

a kada je $l = 1$,

$$1 : k = k : k^2 = \ldots = k^{n-1} : k^n.$$

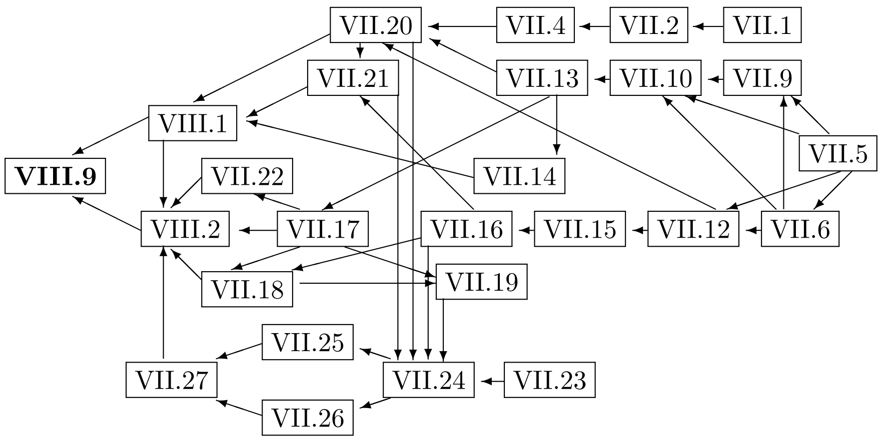
Zato će $1, k, k^2, \ldots, k^n$ i $1, l, l^2, \ldots, l^n$ biti uzastopni članovi dveju neprekidnih proporcija koje imaju jednak broj članova.[20] Drugim rečima, njima određene geometrijske progresije imaće isti broj članova koliko ih ima i geometrijska progresija kojoj su krajnji članovi k^n i l^n. Time je dokazan stav VIII.9. Budući da je on

[18] O mogućem Arhitinom autorstvu ovih stavova biće reči i u odeljcima 11.1 i 11.6.

[19] Razume se, u Euklidovom dokazu je $n = 4$.

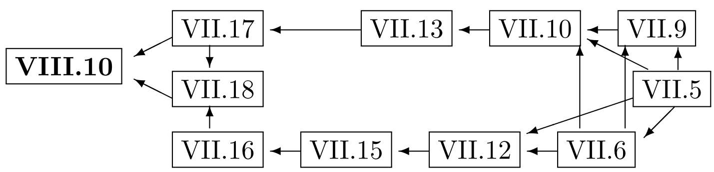
[20] Razume se, u Euklidovom dokazu je $n = 3$.

neposredna posledica samo stavova VIII.1 i VIII.2, njegova deduktivna struktura se dobija jednostavnom dopunom deduktivne strukture dokaza stava VIII.2.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.9

Stav VIII.10, koji je obrat stava VIII.9, posledica je stavova VII.17 i VII.18 tako da je deduktivna struktura njegovog dokaza znatno jednostavnija od deduktivnih struktura dokaza stavova VIII.8 i VIII.9. Ona se ne razlikuje od deduktivnih struktura dokaza stavova VIII.11 i VIII.12 koji su, iako to Euklid ne primećuje, njegova jednostavna posledica.[21]

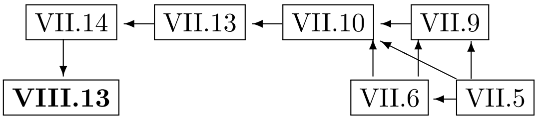


Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.10

Zaista, u posebnom slučaju kada su zadati kvadratni brojevi k^2 i l^2, njima su zadate i dve geometrijske progresije $1, k, k^2$ i $1, l, l^2$ pa će, na osnovu stava VIII.10, između kvadratnih brojeva k^2 i l^2 postojati jedan srednje proporcionalni broj. Time je iz stava VIII.10 neposredno izveden sledeći stav osme knjige – VIII.11. Na isti način može se izvesti i stav VIII.12 prema kojem između kubnih brojeva k^3 i l^3 postoje dva srednje proporcionalna broja. Međutim, Euklid u dokazima ovih dvaju stavova u potpunosti ignoriše prethodni stav — VIII.10, a ponavlja delove dokaza stava VIII.2. Izgleda kao da Euklid posle stava VIII.10, osim u stavu VIII.13, zaboravlja na prethodne stavove koji se odnose na neprekidne proporcije koje imaju

[21] Ovo primećuje Van der Verden. Videti [**53**, str. 154].

proizvoljno mnogo članova i započinje novu teoriju, vraćajući se dokazivanju tvrdnji koje se odnose samo na tročlane i četvoročlane neprekidne proporcije.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.13

U osmoj knjizi, posle njenog desetog stava, jedino se stav VIII.13 odnosi na neprekidne proporcije sa proizvoljno mnogo članova. U njemu Euklid pretpostavlja da su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ neprekidno proporcionalni brojevi i dokazuje da su tada i njihovi kvadrati — $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$, kubovi — $p_1^3, p_2^3, \ldots, p_n^3$ itd., takođe neprekidno proporcionalni. Međutim, kao ni stavove VIII.9 i VIII.10, Euklid ovaj stav kasnije nikada ne upotrebljava.

10.3. Odjek aritmetike oblutaka u osmoj knjizi

Stavovi — VIII.11–12, a potom i VIII.18–19, jednostavniji su od stavova koji im prethode. U njihovim dokazima Euklid ponavlja postupak iz dokaza stava VIII.2 s početka knjige. Međutim, za razliku od stava VIII.2 koji je formulisan kao opšti stav koji se odnosi na neprekidne proporcije sa proizvoljno mnogo članova, stavovi VIII.11 i VIII.12 se dokazuju nezavisno jedan od drugog, prvi za tročlane, a drugi za četvoročlane neprekidne proporcije. Tako je i sa stavovima VIII.18 i VIII.19.

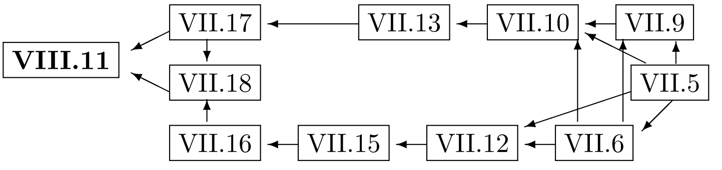
U dokazu stava VIII.11 *za dva kvadratna broja r^2 i s^2 Euklid nalazi jedan srednje proporcionalni broj.* Upotrebom stavova VII.17 i VII.18, on zapravo dokazuje da je $r : s = r^2 : rs = rs : s^2$, kakvigod da su brojevi r i s. Kao i u dokazu stava VIII.2 (u kojem dodatno pretpostavlja da su r i s međusobno prosti brojevi), on množi brojeve r i s i dobija proizvod rs, a zatim iz dveju proporcija $r : s = r^2 : rs$ (VII.17) i $r : s = rs : s^2$ (VII.18) izvodi novu proporciju $r^2 : rs = rs : s^2$. Time nalazi neprekidno proporcionalne brojeve r^2, rs i s^2 koji su u zadatom odnosu $r : s$. U istom stavu Euklid dalje dokazuje da je *razmera kvadratnog broja prema kvadratnom broju dva puta viša od razmere strane prema strani.* On zapravo dokazuje da je $r^2 : s^2 = (r : s)^2$ tako što, znajući da je $r^2 : rs = rs : s^2$, na osnovu definicije V. def. 9,[22] zaključuje da je, $r^2 : s^2 = (r^2 : rs)^2$, a kako je $r^2 : rs = r : s$, onda je i $r^2 : s^2 = (r : s)^2$.[23] U stavu VIII.11 Euklid ne pretpostavlja da su r i s međusobno prosti brojevi jer, ako su prosti, onda su oni i najmanji brojevi u toj razmeri (VII.21), a on je već u stavu VIII.2 istražio posledice pretpostavke da su p i q najmanji, našavši da su tada p^2, pq i q^2 najmanji među svim neprekidno proporcionalnim trojkama brojeva koji imaju odnos $p : q$. Zato stav VIII.11 pripada aritmetici koja je jednostavnija od one koja dolazi sa stavom VIII.2. Za njegov dokaz, kao i za dokaze stavova VII.17 i VII.18 koje Euklid neposredno

[22] Prema ovoj definiciji, ako je $a : b = b : c$, onda je $a : c = (a : b)^2$.

[23] Na sličan način Euklid koristi devetu definiciju pete knjige i u dokazu stava VI.19.

upotrebljava u njegovom dokazu, bilo je dovoljno upotrebiti samo oblutke.[24] Zapravo, upotreba oblutaka u stavu VIII.11 delotvorna je samo kada treba dokazati da za dva kvadratna broja postoji njihov srednje proporcionalni broj. Dokaz da je *razmera kvadratnog broja prema kvadratnom broju dva puta viša od razmere strane prema strani* izlazi iz okvira aritmetike oblutaka i zahteva razumevanje pitagorejske teorije muzike.[25]

Budući da je upotreba oblutaka u dokazivanju aritmetičkih stavova tekovina bavljenja aritmetikom ranih pitagorejaca baš kao što je to i muzička teorija o sabiranju intervala, stav VIII.11 je mogao biti poznat u najranijem periodu pitagorejstva. Znajući da Nikomah iz Gerase tvrdi da je pojam neprekidne proporcije utemeljio sam Pitagora,[26] sasvim je moguće da je stav VIII.11 Pitagorin.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.11

Za razliku od VIII.2, u dokazu stava VIII.11 Euklid neće upotrebiti stavove VII.27 i VIII.1 pa će deduktivna struktura ovog dokaza biti mnogo jednostavnija od deduktivne strukture dokaza stava VIII.2 jer joj ne pripadaju stavovi iz teorije međusobno prostih brojeva kojoj pripada stav VII.27, a ni stavovi o najvećoj zajedničkoj meri s početka sedme knjige.

Jedanaesti stav osme knjige može se sa lakoćom uopštiti na četvoročlane neprekidne proporcije, i dokazati da je

$$r : s = r^3 : r^2 s = r^2 s : rs^2 = rs^2 : s^3,$$

kakvigod da su brojevi r i s. To Euklid čini u stavu VIII.12.[27] U dokazu se poziva na iste stavove kao i u dokazu stava VIII.11, tako da se on u osnovi ne razlikuje od dokaza prethodnog stava. Ni njihove deduktivne srukture se ne razlikuju. I dokaz

---

[24] Da je zaista tako videli smo dokazujući teoremu 31 (VIII.11). Slika na kojoj su brojevi predstavljeni oblucima čini ovaj dokaz očiglednim. Naprotiv, Euklidova slika koja ide uz dokaze stava VIII.11 nije ni od kakve pomoći za njegovo razumevanje budući da se sastoji samo iz pet duži.

[25] O ovome će biti reči u odeljku 12.4.

[26] Prema njegovim rečima

> *Postoje tri proporcije poznate starima — Pitagori, Platonu i Aristotelu. To su aritmetička, geometrijska i harmonijska...* (Nicomachus, II.21.1).
> *One do Platona i Aristotela dolaze od Pitagore* (Nicomachus, II.28.6).

Videti [**56**, str. 173].

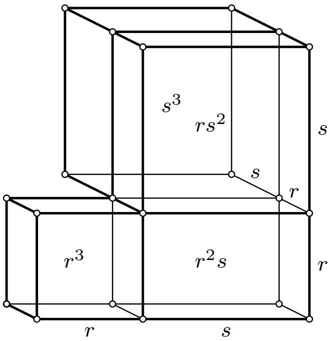
[27] Dokazujući da

> *Za dva kubna broja postoje dva srednje proporcionalna broja i razmera kuba prema kubu je tri puta viša od razmere strane prema strani,* (VIII.12),

kao i u dokazu stava VIII.11, Euklid umnogome ponavlja dokaz stava VIII.2.

da je *razmera kuba prema kubu tri puta viša od razmere strane prema strani* u punoj je analogiji sa tvrdnjom iz stava VIII.11 o *razmeri kvadrata prema kvadratu* i svodi se na dokaz da je $r^3 : s^3 = (r : s)^3$. U tu svrhu upotrebljava se definicija V. def. 10 umesto V. def. 9.

I ovaj stav bi se, u analogiji sa teoremom 31 (VIII.11), mogao dokazati upotrebom oblutaka, s tim što onda nije dovoljno da se obluci raspoređuju u ravni, već u prostoru. Možemo ga ilustrovati stereometrijskom slikom. Međutim, iz potrebe da slika bude jednostavna i vizuelno jasna, na njoj brojevi nisu predstavljeni jedinicama-oblucima već dužima.



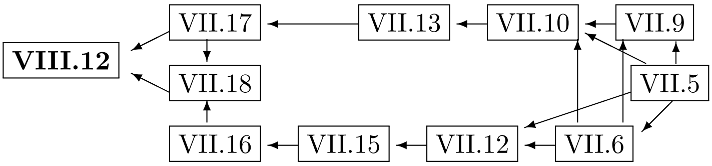
Slika 10.3.1. $r : s = r^3 : r^2s = r^2s : rs^2 = rs^2 : s^3$ (VIII.12, XI.33)

Iako se može učiniti da bi za rane pitagorejce ovakvo rasuđivanje bilo suviše složeno, izgleda da ipak nije nemoguće da ono pripada ranom perioda razvoja aritmetike, budući da nas o stavovima VIII.11 i VIII.12 obaveštavaju autori iz petog i četvrtog veka stare ere. Ova dva stava su morali biti poznati Hipokratu sa Hiosa, koji je u drugoj polovini petog veka stare ere problem udvostručenja kocke sveo na nalaženje dveju srednjih proporcionala četvoročlane neprekidne proporcije.[28] Do brojevnih primera takvih proporcija Hipokrat je mogao doći samo upotrebom stava VIII.12. Međutim, njegovo razmatranje je geometrijsko tako da dokaz ovog stava ne možemo pripisati njemu. Budući da je Hipokrat bio aktivan u drugoj polovini petog veka state ere, dokaz stava VIII.12 s dobrim razlogom možemo smestiti u prvu polovinu petog veka i, zajedno sa stavom VIII.11, pripisati ga ranim pitagorejcima. To možemo učiniti i zbog toga što Platon stavove VIII.11 i VIII.12 pominje u *Timaju*, u kojem iznosi principe svoje prirodne filozofije kojima koreni mogu biti samo u pitagorejstvu.[29]

[28] Diels, 47.A14. Videti i [**35**, 9.4].

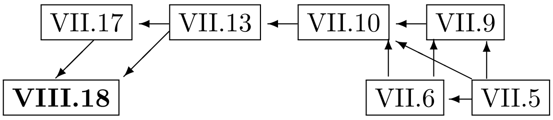
[29] Kad govori o *telu sveta* (štagod to bilo) koje ima četiri sastavna dela, vodu, vatru, zemlju i vazduh, Platon izdvaja *najlepšu vezu* koju na *najlepši način postiže srazmera* u kojoj se *prvi član odnosi prema srednjem kao što se srednji odnosi prema poslednjem* (*Timaj*, 32a). Kasnije (32b) objašnjava da su sastavni delovi tela sveta u međusobnoj srazmeri takvoj da je *vatra prema vazduhu kao vazduh prema vodi, a vazduh prema vodi kao voda prema zemlji.* Razume se, prvi fragmenat se odnosi na tročlane, a drugi na četvoročlane neprekidne proporcije. Način da se dospe

Deduktivne strukture dokaza ovih dvaju stavova međusobno se ne razlikuju i sastoje se iz stavova koji su posledice samo stava VII.5. Među njima su stavovi VII.13, VII.16, VII.17 i VII.18 koji se, kao i stav VII.5 mogu dokazati upotrebom oblutaka.[30] Međutim, i dokazi stavova VIII.11 i VIII.12 upotrebom oblutaka (teorema 31 (VIII.11) i njen stereometrijski analogon) podrazumevaju znanje ovih četiriju stavova tako da i njih, zajedno sa temeljnim stavom VII.5, s visokom pouzdanošću možemo pripisati ranim pitagorejcima.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.12

U stavu VIII.18, Euklid će utvrditi da važi opštija tvrdnja od one iz stava VIII.11, nalazaći da *za dva slična površinska broja postoji srednje proporcionalni broj*. Proizvodi rs i $r's'$ su *slični* ako su im stranice proporcionalne (VII. def. 22) tako da Euklid u dokazu pretpostavlja da je $r : s = r' : s'$, tj. $r : r' = s : s'$ (VII.13) i, u analogiji sa dokazom stava VIII.11, upotrebom stava VII.17 dolazi do zaključka da je $sr : sr' = r : r' = s : s' = r's : r's'$. Međutim, na osnovu stava VII.16 (koji u Euklidovom dokazu nije eksplicitno upotrebljen) je $sr = rs$ i $sr' = r's$ pa će zato $r's$ biti srednje proporcionalni broj za rs i $r's'$, tj. $rs : r's = r's : r's'$. Štaviše, kao i u stavu VIII.11, na osnovu devete definicije pete knjige, on zaključuje i da je *razmera površinskog broja prema sličnom površinskom broju dva puta viša od razmere homolognih strana.*



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.18

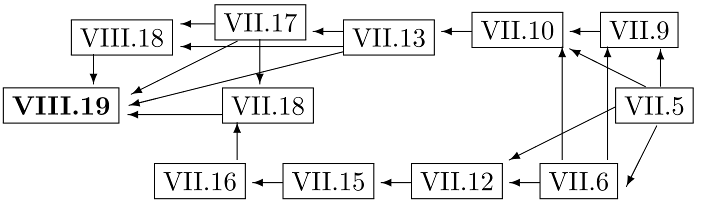
Stav VIII.19 u kojem Euklid dokazije da „*za dva slična zapreminska broja postoje dva srednje proporcionalna broja*“, u analogiji je sa stavom VIII.18. Na isti način na koji smo upotrebom sterometrijske slike utvrdili da stav VIII.12 pripada aritmetici oblutaka, možemo utvrditi da joj pripada i stav VIII.19.

Kao i stavovi VIII.11 i VIII.12, stavovi VIII.18 i VIII.19 su posledice samo jednog Euklidovog stava — VII.5. Njihovi dokazi su slični, počivaju na istim pretpostavkama, i svi su podjednako jednostavni. Štaviše, obluci su dovoljno sredstvo

do primera ovakvih proporcija bio je dostupan upotrebom tvrdnji koje će Euklid kasnije dokazati u stavovima VIII.11 i VIII.12.

[30] Videti poglavlje 3.

za njihovo dokazivanje,[31] tako da bi i stavovi VIII.18 i VIII.19 mogli pripasti periodu ranog pitagorejstva kao što mu pripadaju i stavovi VIII.11 i VIII.12.

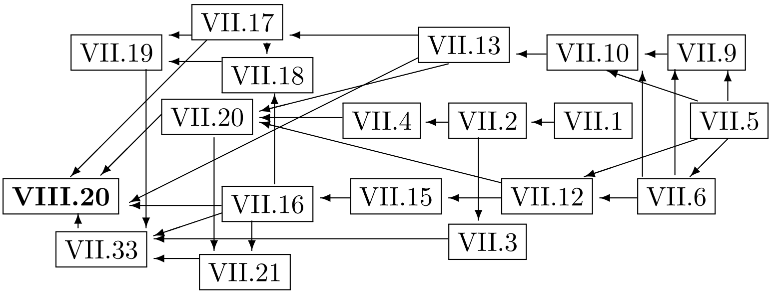


Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.19

10.4. Slični površinski i zapreminski brojevi

U stavu VIII.20 Euklid dokazuje da će površinski brojevi biti slični, ako za njih postoji srednje proporcionalni broj. Ovaj stav je obrat stava VIII.18. Pretpostavljajući da su j, l i m brojevi takvi da je $j : l = l : m$, Euklid dokazuje da postoje brojevi p, q, r i s takvi da je $j = qp$, $m = rs$ i $p : q = r : s$.

Kao i dokaz stava VIII.18, dokaz njemu obratnog stava — VIII.20 zasnovan je samo na znanju stavova sedme knjige. Zaista, ako su p i r najmanji brojevi takvi da je $p : r = j : l = l : m$ (VII.33), tada postoji broj q takav da je $j = qp$ i $l = qr$ (VII.20). Kako je $l = rq$ (VII.16!) i $m = rs$, biće $l : m = q : s$ (VII.17), a kako je $p : r = l : m$ biće i $p : r = q : s$. Sada je i $p : q = r : s$ (VII.13), pa su qp i rs slični površinski brojevi. Kao i u dokazu stava VIII.18, ni u ovom Euklidovom dokazu stav VII.16 nije eksplicitno upotrebljen, tako da i on ostaje nedorečen.[32]



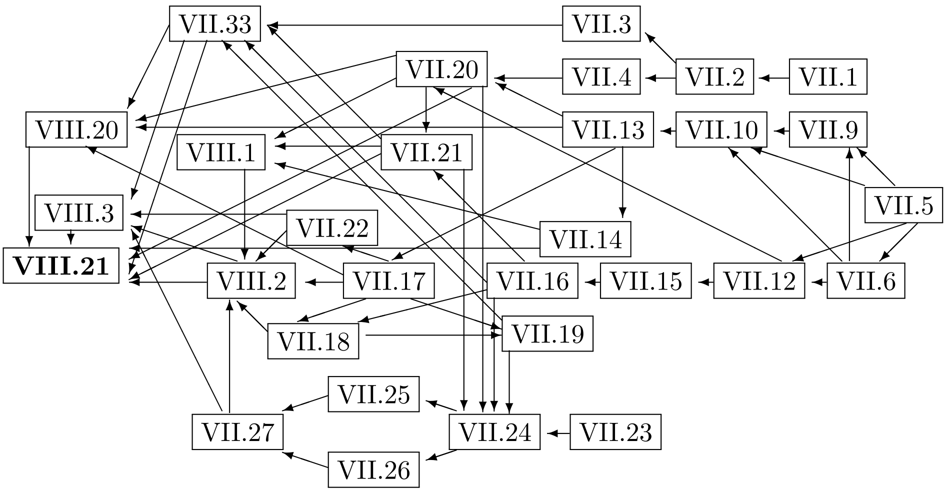
Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.20

Stav VIII.21 je obrat stava VIII.19. On je u analogiji sa stavom koji mu neposredno prethodi budući da se njime utvrđuje da će zapreminski brojevi biti slični ako za njih postoje dva srednje proporcionalna broja. Njegov dokaz, međutim,

[31] Videti dokaz teoreme 32 (VIII.18).

[32] Tome bi mogla biti od pomoći upotreba stava VIII.18 na sledeći način: Ako su p i r najmanji brojevi takvi da je $p : r = j : l = l : m$ (VII.33), tada postoji broj q takav da je $j = qp$ i $l = qr$ i broj s takav da je $l = sp$ i $m = sr$ (VII.20). Međutim, tada je $p : r = j : l = l : m = qr : sr$. Zato je $p : r = q : s$ (VII.18) pa je i $p : q = r : s$ (VII.13). Videti [**22**, vol. ii, str. 377].

nije u analogiji sa dokazom stava VIII.20, budući da se ne poziva samo na stavove sedme, već i osme knjige *Elemenata*. Zato je deduktivna struktura dokaza stava VIII.21 znatno složenija od deduktivne strukture dokaza stava VIII.20.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.21

Dokaz stava VIII.22 zahteva punu pažnju budući da nije potpun. U njemu Euklid upotrebljava stav VIII.20 u nameri da dokaže tvrdnju prema kojoj, *ako je* $j : l = l : m$ *i ako postoji broj* p *takav da je* $j = p^2$, *tada postoji broj* q *takav da je* $m = q^2$. Iz stava VIII.20 naizgled neposredno sledi da će, u posebnom slučaju kada je površinski broj jednak nekom kvadratnom broju, i njemu sličan broj biti takođe kvadratni broj ako za njih postoji srednje proporcionalan broj. Međutim, time je dokazan Euklidov stav VIII.22 samo u slučaju kada je p prost broj. Tada se j može rastaviti samo na međusobno jednake činioce pa se i njemu sličan broj m može rastaviti na međusobno jednake činioce. Da bi bila dokazana opšta teorema, neophodno je utvrditi da, i ako se kvadratni broj j može rastaviti na nejednake činioce, njemu sličan broj m svejedno može biti rastavljen na jednake činioce.[33] U Euklidovom dokazu ovo prosto nedostaje.

Stav VIII.23, prema kojem je krajnji broj neke četvoročlane neprekidne proporcije kub ako je prvi broj kub, u analogiji je sa stavom VIII.22. Zato je i njegov dokaz koji je takođe u analogiji sa dokazom stava VIII.22, podjednako nepotpun kao i dokaz stava VIII.22.

Budući da se u dokazima sledećih dvaju stavova — VIII.24 i VIII.25, poziva na prethodna dva stava, i oni ostaju nedorečeni. U stavu VIII.24 Euklid dokazuje da *ako su dva broja jedan prema drugom u razmeri kvadratnog broja prema kvadratnom i prvi broj je kvadrat, onda je i drugi kvadrat.* On je jednostavna posledica stavova VIII.8, VIII.18 i VIII.22. Stav VIII.25 je u analigiji sa stavom VIII.24. Odnosi se na kubove, a ne na kvadrate. I njegov dokaz je u analogiji sa dokazom

[33] Ovaj nedostatak Euklidovog dokaza primetio je Van der Verden [**53**, str. 154].

stava VIII.24. Na isti način na koji je stav VIII.24 posledica stavova VIII.8, VIII.18 i VIII.22, stav VIII.25 je posledica stavova VIII.8, VIII.19 i VIII.23.

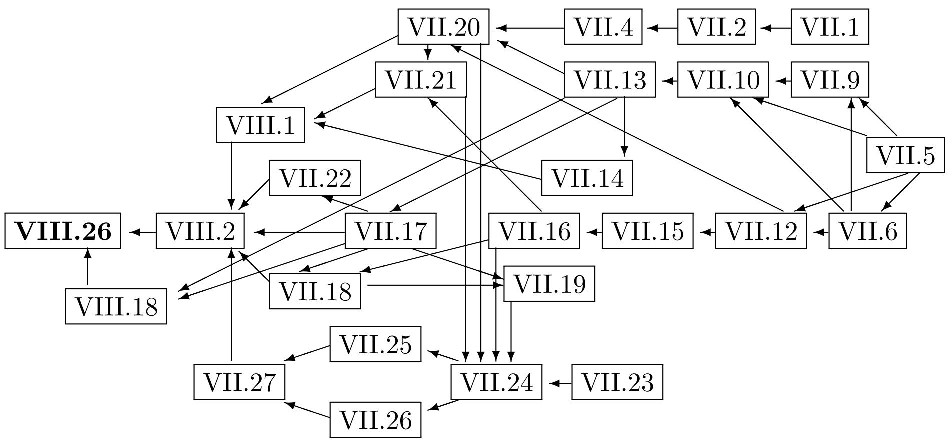
Iako se u njihovim dokazima upotrebljavaju stavovi o neprekidnim proporcijama, stavovi VIII.24 i VIII.25 se ne tiču neprekidnih proporcija već odnósa kvadratnih (i kubnih) brojeva. I u dokazima stavova VIII.26 i VIII.27 koji dolaze za njima, kojima se završava osma knjiga *Elemenata*, upotrebljavaju se stavovi o neprekidnim proporcijama. Međutim, ni oni se ne odnose na neprekidne proporcije.

U stavu VIII.26 Euklid dokazuje tvrdnju prema kojoj

> *slični površinski brojevi su jedan prema drugom u razmeri kvadratnog broja prema kvadratnom broju*,

a stav VIII.27 je njegov sterometrijski analogon koji se odnosu na kubne brojeve.

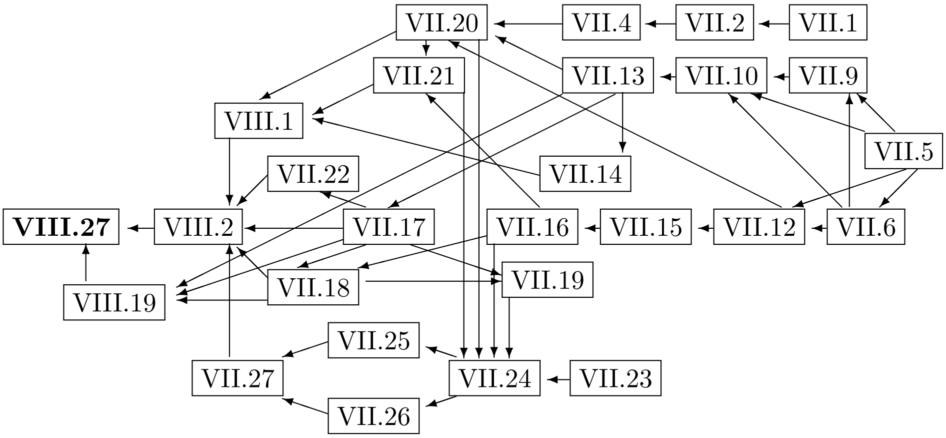
U dokazu stava VIII.26 Euklid pretpostavlja da su j i m dva slična površinska broja i, na osnovu stava VIII.18 nalazi da postoji njihov srednje proporcionalni broj l. Tada postoje najmanji brojevi j', l' i m', srazmerni brojevima j, l i m (VIII.2 ili VII.33). Na osnovu posledice koja dolazi uz Euklidov stav VIII.2, j' i m' su kvadratni brojevi, pa su brojevi j i m srazmerni dvama kvadratnim brojevima.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.26

U analogiji sa dokazom stava VIII.26, Euklid dokazuje stav VIII.27 prema kojem *slični zapreminski brojevi su jedan prema drugom u razmeri kubnog broja prema kubnom broju* (VIII.27). Umesto stava VIII.18 u dokazu upotrebljava njegov stereometrijski analogon, stav VIII.19. U tome je sva razlika deduktivnih struktura dokaza stavova VIII.26 i VIII.27. Uloga stava VIII.2 (i njegove posledice) u dokazima ovih dvaju stavova je ista.

Problematici sličnih površinskih brojeva Euklid će se vratiti na samom početku devete knjige *Elemenata*. U stavu IX.1 dokazaće da je proizvod dvaju sličnih površinskih brojeva kvadratni broj, a stav IX.2 je njegov obrat. U njemu Euklid pretpostavlja da je proizvod dvaju brojeva kvadratni broj i dokazuje da su onda ta dva broja slični površinski brojevi.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.27

10.5. Kanonsko predstavljanje neprekidnih proporcija

Iz pretpostavke da je p, q par najmanjih brojeva koji su u istoj proporciji, sledi da su svi ostali parovi brojeva koji su im proporcionalni oblika kp, kq (VII.20), tako da se postavlja pitanje da li će, u analogiji, formulom

$$kp^2 : kpq = kpq : kq^2$$

biti zadate sve trojke neprekidno proporcionalnih brojeva koje su upotrebom stava VIII.2 generisane odnosom međusobno prostih brojeva p i q. Iz istog razloga postavlja se i pitanje da li će formulom

$$kp^3 : kp^2q = kp^2q : kpq^2 = kpq^2 : kq^3$$

biti zadate sve četvorke neprekidno proporcionalnih brojeva koji su u istom odnosu $p : q$. Na ova dva pitanja Euklid je dao uputstvo za odgovor dokazavši stavove VIII.20, VIII.21 i poslednja dva stava osme knjige *Elemenata*. Zaista, na osnovu stava VIII.20, j i m će biti dva slična površinska broja ako postoji njihov srednje proporcionalni broj l, a na osnovu stava VIII.26 oni će biti srazmerni dvama kvadratnim brojevima p^2 i q^2. Dakle, ako je $j : l = l : m$, tada postoje brojevi k, p i q takvi da je $j = kp^2$ i $m = kq^2$. Međutim, kako je $p : q = p^2 : pq = pq : q^2$ (VIII.11), biće $l = kpq$ pa, ako su p i q međusobno prosti pa zato i najmanji brojevi u toj proporciji (VII.21), formulom $kp^2 : kpq = kpq : kq^2$ će biti zadate sve trojke neprekidno proporcionalnih brojeva koji su u razmeri $p : q$ (VII.20). U analogiji sa prethodnim rasuđivanjem, uz upotrebu stavova VIII.21, VIII.27 i VIII.12 umesto VIII.20, VIII.26 i VIII.11, može se utvrditi da su formulom $kp^3 : kp^2q = kp^2q : kpq^2 = kpq^2 : kq^3$ zadate sve četvorke neprekidno proporcionalnih brojeva koji su u razmeri dvaju međusobno prostih brojeva p i q.

U skladu sa Euklidovim običajem s početka osme knjige, da stavove dokazuje samo u slučaju tročlanih i četvoročlanih neprekidnih proporcija, a da ih formuliše kao opšte stavove koji se odnose na proizvoljne neprekidne proporcije, dodaćemo da su, na isti način kao i u prethodnim dvama izdvojenim slučajevima, formulom

$$kp^n : kp^{n-1}q = kp^{n-1}q : kp^{n-2}q^2 = \ldots = kpq^{n-1} : kq^n,$$

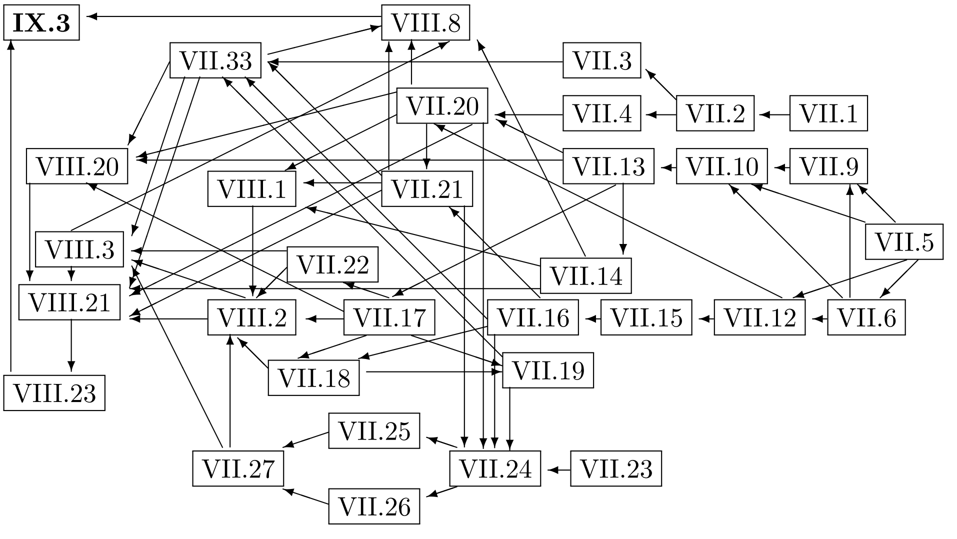
iscrpljene sve neprekidne proporcije sa proizvoljno mnogo članova kojima je razmera $p : q$.

Dakle, ako su tri broja neprekidno proporcionalni, oni će biti oblika kp^2, kpq, kq^2 (VIII.20, VIII.26) pa, ako je prvi od njih kvadratni broj, i k će biti kvadratni broj. Zato će i poslednji — kq^2, biti kvadratni broj. Time je dokazan stav VIII.22. Na isti način, u analogiji, može se dokazati i stav VIII.23. Zato je ovim dvama stavovima i njihovim posledicama, stavovima VIII.24–25, mesto na samom kraju osme knjige, iza Euklidovih stavova VIII.26–27. Za njima bi mogao da dođe već pomenuti stav IX.1, a posle njega i njegov obrat, stav IX.2. To su poslednji stavovi u *Elementima* koji se odnose na slične površinske brojeve.

10.6. Kubni brojevi

Upotrebom neprekidnih proporcija Euklid u stavovima IX.3–7 dokazuje nekoliko jednostavnih osobina kubnih brojeva. U stavovima IX.3 i IX.6 on dokazuje da je neki broj kub ako i samo ako je njegov kvadrat takođe kub, a u stavovima IX.4 i IX.5 da je proizvod nekog broja i nekog kubnog broja, kubni broj ako i samo ako je taj broj takođe kubni broj. Stavom IX.7 u kojem dokazuje da je proizvod složenog (ili površinskog) broja i bilo kojeg broja zapreminski broj, on bliže objašnjava sadržaj definicija VII. def. 16 i VII. def. 18. U stavu IX.3, Euklid pretpostavlja da je zadat neki kubni broj i dokazuje da je i njegov kvadrat takođe kubni broj. Zaista, ako je zadat kubni broj p^3, tada je

$$1 : p = p : p^2 = p^2 : p^3 \quad \text{i} \quad 1 : p^3 = p^3 : (p^3)^2$$



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.3

(VII. def. 20). Dakle, postoje dve srednje proporcionale između 1 i p^3, pa zato postoje dve srednje proporcionale i između p^3 i $(p^3)^2$ (VIII.8). Međutim, budući da je p^3 kubni broj, i $(p^3)^2$ će biti kubni broj (VIII.23). Stav IX.6 u kojem Euklid dokazuje obratno tvrđenje, podjednako je jednostavno dokazati kao i stav IX.3, a njegova deduktivna struktura je čak malo složenija. Slično se može reći i o stavovima IX.4 i IX.5. Naprotiv, deduktivna struktura dokaza stava IX.7 je trivijalna. I sam dokaz je sasvim jednostavan. U njemu Euklid primećuje da je složeni broj proizvod dvaju brojeva pa se zato njegovim množenjem sa bilo kojim brojem dobija zapreminski broj. Drugim rečima, dokazao je da je $(pq)r = pqr$ za bilo koje brojeve p, q i r. Ovim stavom Euklid je uskladio definiciju proizvoda dvaju brojeva (VII. def. 16) sa definicijom zapreminskog broja (VII. def. 18).

10.7. Neprekidne proporcije u IX knjizi

Problematici neprekidnih proporcija sa proizvoljno mnogo članova u posebnom slučaju kada im je jedinica na prvom mestu, Euklid će se vratiti i u devetoj knjizi u stavovima IX.8–13. Pretpostavljajući da je

$$1 : p_2 = p_2 : p_3 = \ldots = p_{n-2} : p_{n-1} = p_{n-1} : p_n.$$

u njima on dokazuje:

- da će brojevi $p_3, p_5, p_7, \ldots$ biti kvadrati, da će brojevi $p_4, p_7, p_{10}, \ldots$ biti kubovi, a da će brojevi $p_7, p_{13}, p_{19}, \ldots$ biti i kvadrati i kubovi (IX.8),
- da, ako je p_2 kvadratni broj, onda će svi ostali brojevi koji pripadaju neprekidnoj proporciji, biti kvadratni brojevi, a ako je p_2 kubni broj, svi ostali će biti kubni brojevi (IX.9),
- da, ako p_2 nije kvadrat, onda nijedan od ostalih brojeva neće biti kvadrat osim $p_3, p_5, p_7, \ldots$, a ako nije kub, onda nijedan od ostalih brojeva neće biti kub osim $p_4, p_7, p_{10}, \ldots$ (IX.10),
- da je količnik brojeva p_n i p_k broj p_{n-k} (IX.11),[34]
- da, ako je p_n deljiv nekim prostim brojem, onda je tim prostim brojem deljiv i broj p_2 (IX.12),
- da, ako je p_2 prost broj, onda broj p_n neće biti deljiv ni sa jednim brojem osim sa $p_2, p_3, \ldots p_{n-1}$ (IX.13).

Sa izuzetkom stava IX.11 koji je posledica samo jednog stava — VII.15, svi ostali stavovi iz ove skupine imaju složene deduktivne strukture.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbf{IX.11}} & \boxed{\mathrm{VII.5}} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\boxed{\mathrm{VII.15}} \arrow[u] & \boxed{\mathrm{VII.12}} \arrow[l] & \boxed{\mathrm{VII.6}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.11

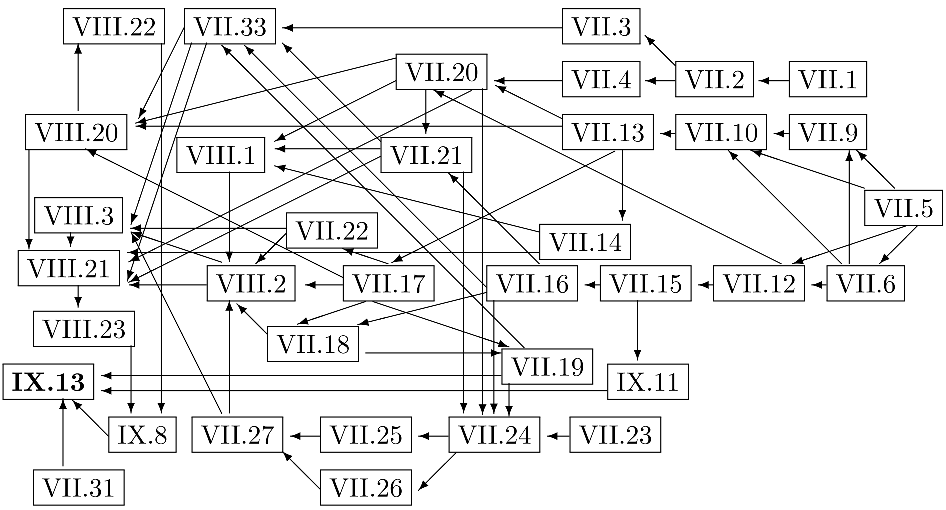
[34] Drugim rečima, $p_k p_l = p_{k+l}$, ili $p^k p^l = p^{k+l}$.

Među njima najsloženije deduktivne strukture imaju stavovi IX.12 i IX.13. Prvi od ovih dvaju stavova Euklid neće kasnije koristiti, a stav IX.13 upotrebiće u dokazima stavova IX.32 i IX.36. U dokazu stava IX.32 njegova upotreba je suvišna,[35] dok je u dokazu stava IX.36 o savršenim brojevima, značajna. U deduktivnoj strukturi dokaza stava IX.13 sadržana je i deduktivna struktura stava IX.8.

Svi stavovi devete knjige koji se odnose na neprekidne proporcije kojima je jedinica na prvom mestu jednostavno se dokazuju znajući da su formulom

$$1 : p = p : p^2 = \ldots = p^{n-1} : p^n$$

zadate sve takve proporcije. Međutim, ovu tvrdnju o kanonskom predstavljanju neprekidne proporcije sa jedinicom na prvom mestu, Euklid ne dokazuje tako da mu je preostalo da pojedinačno dokazuje osobine ovih proporcija koje u mnogome opisuju prethodnu formulu. On to čini dokazujući stavove IX.8–13.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.13

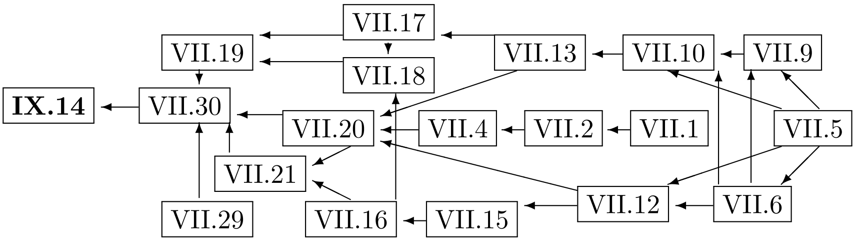
Neprekidnim proporcijama sa proizvoljno mnogo članova Euklid će se vratiti dokazujući stavove IX.17 i IX.35. Međutim, za razliku od prethodnih stavova devete knjige, u ovim stavovima neće pretpostaviti da je jedinica na prvom mestu neprekidne proporcije.

10.8. Prosti i međusobno prosti brojevi u IX knjizi

U dokazima stavova IX.14–20, uz jedan izuzetak, Euklid upotrebljava samo stavove sedme knjige *Elemenata* tako da je i njima mesto moglo biti u sedmoj knjizi. Izuzetak je stav IX.15 prema kojem će zbir dvaju brojeva biti uzajamno prost sa trećim brojem ako su ta tri broja najmanji među onima koji su u neprekidnoj proporciji. U njegovom dokazu Euklid upotrebljava i stav osme knjige — VIII.2,

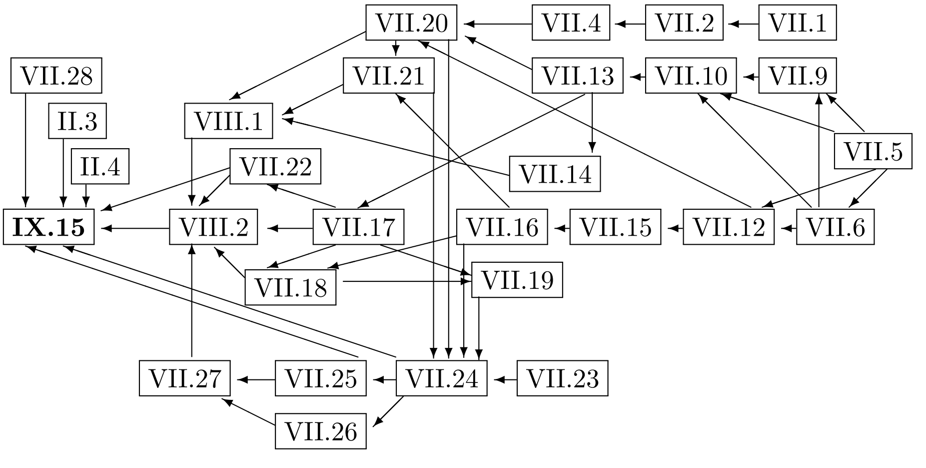
[35] O ovome je već bilo reči reči u odeljku 6.2.

ali i dva stava druge knjige — II.3 i II.4.[36] Razume se, stavove druge knjige koji su dokazani za proizvoljne duži on sme da upotrebi kao aritmetičke stavove budući da se oni odnose i na celobrojne duži.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.14

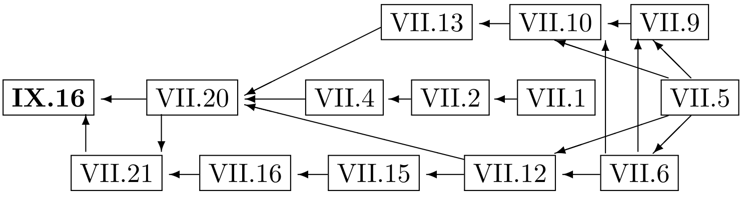
Prvi iz ove skupine stavova — IX.14, odnosi se na faktorizaciju prostim brojevima. Ovaj stav je značajan bez obzira na to što ga Euklid kasnije ne upotrebljava. On u njemu dokazuje da najmanji zajednički sadržalac proizvoljnog skupa prostih brojeva nije deljiv ni sa jednim prostim brojem koji ne pripada tom skupu. Dokaz je jednostavan. Ako je p najmanji broj koji dele prosti brojevi p_1, p_2, i p_3 i, ako za neki prost broj k koji je različit od svakog od ovih triju prostih brojeva, postoji broj q takav da je $p = kq$, tada prosti brojevi p_1, p_2, i p_3 dele p, a ne dele m pa, na osnovu stava VII.30, dele q. Međutim, tada p nije najmanji broj koji dele brojevi p_1, p_2, i p_3, a po pretpostavci on to jeste. Razume se, dokaz ostaje isti i ako prostih brojeva koji dele p ima više od tri.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.15

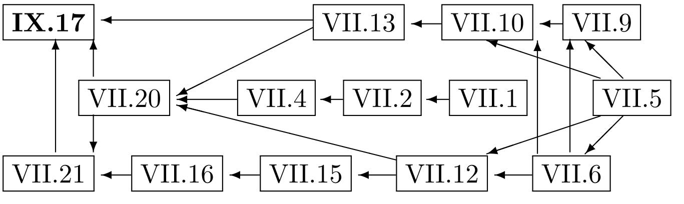
[36] U stavu II.3 Euklid dokazuje da je $(a+b)a = ab + a^2$, a u stavu II.4 da je $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Iako je naizgled tako, stav IX.14 nije stav o jedinstvenoj faktorizaciji prirodnih brojeva prostim brojevima.[37] Euklid zapravo ne primećuje da se svaki broj na jedinstven način može iskazati kao proizvod prostih brojeva tako da njemu izmiče osnovni stav aritmetike o jedinstveno faktorizaciji. Da bi ga dokazao morao je da utvrdi da je svaki broj proizvod prostih brojeva i da se isti prosti brojevi ne mogu javiti različit broj puta u različitim faktorizacijama istog broja. Međutim, u dokazu stava IX.14 on to ne čini. Štaviše, on ne primećuje ni to da će najmanji zajednički sadržalac nekog skupa prostih brojeva biti proizvod tih prostih brojeva.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovoog stava IX.16

U stavu IX.16 Euklid dokazuje da ne postoji broj r takav da je $p : q = q : r$ ako su brojevi p i q uzajamno prosti. Dokaz je jednostavan. Iz pretpostavke da su p i q uzajamno prosti brojevi sledi da su i najmanji u toj proporciji (VII.21), pa zato, redom, dele brojeve q i r (VII.20), a to je u neskladu sa pretpostavkom da su p i q međusobno prosti.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.17

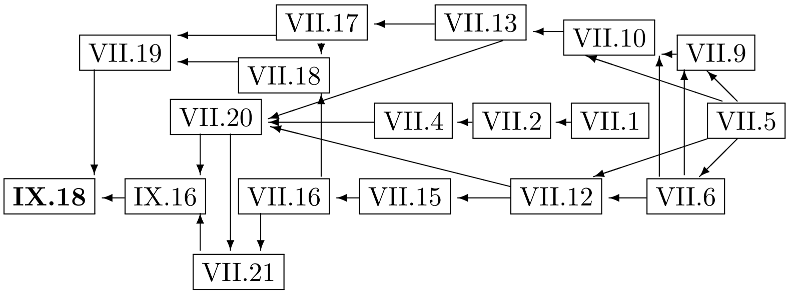
U stavu IX.17 Euklid pretpostavlja da je zadata proporcija

$$p_1 : p_2 = p_2 : p_3 = \ldots = p_{n-2} : p_{n-1} = p_{n-1} : p_n,$$

kojoj su njen prvi i poslednji član, p_1 i p_n, međusobno prosti brojevi, i dokazuje da onda ne postoji broj p takav da je $p_1 : p_2 = p_n : p$. Ako bi postojao, bilo bi i $p_1 : p_n = p_2 : p$ (VII.13), a kako su p_1 i p_n međusobno prosti oni bi bili najmanji brojevi u toj razmeri (VII.21) pa bi postojao broj m takav da je $p_2 = mp_1$ (VII.20). Tada p_1 deli p_2, a kako je $p_1 : p_2 = p_2 : p_3$ i p_2 deli p_3, pa p_1 deli p_3, a zatim i p_4 itd., a na posletku, i broj p_n. Ovo je opet u suprotnosti sa pretpostavkom da su p_1 i p_n međusobno prosti brojevi.

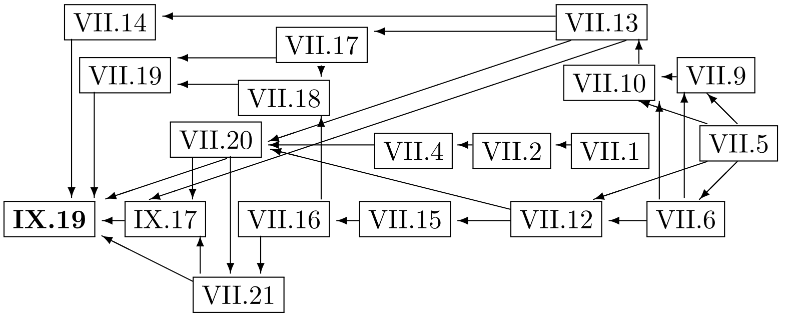
[37] Hit ovo previđa [**22**, vol. II, str. 403].

U stavovima IX.18 i IX.19 Euklid utvrđuje kada je moguće naći drugu i treću proporcionalu zadatih brojeva. U stavu IX.18 nalazi kada je, i kako, za dva zadata broja p i q moguće naći broj r takav da je $p : q = q : r$. Na početku dokaza on (bez potrebe) primećuje da brojevi p i q ne smeju biti međusobno prosti (IX.16) da bi zatim, upotrebom stava VII.19, dokazao da broj r postoji ako i samo ako broj p deli broj q^2.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.18

U analogiji, on u stavu IX.19 nalazi kada je, i kako, za tri zadata broja p, q i r moguće naći broj s takav da je $p : q = r : s$.[38] Uz stav VII.19 koji koristi i u dokazu stava IX.18, u dokazu stava VII.19 on koristi i stav VII.14, a umesto stava IX.16, stav IX.17.

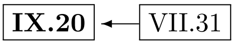


Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.19

U poslednjem stavu ove skupine — IX.20, Euklid dokazuje da prostih brojeva ima neograničeno mnogo. On pretpostavlja da postoje tri prosta broja, p, q i r i dokazuje da, mimo njih, mora biti još prostih brojeva. Ako ih ne bi bilo, broj $pqr + 1$ ne bi mogao da bude prost. Međutim, tada postoji prost broj s koji deli broj $pqr + 1$ (VII.31). Ako bi broj s bio jedan od brojeva p, q, r, on bi delio proizvod pqr, pa bi delio i jedinicu, a takav broj ne postoji. Dakle, s je prost broj

[38] Hit je mišljenja da tekst dokaza stava IX.19 nije do nas dospeo u izvornom obliku budući da u njemu ima ozbiljnih materijalnih grešaka [**22**, vol. II, str. 411].

koji se razlikuje od prostih brojeva p, q i r. Razume se, dokaz ostaje isti i ako se pretpostavi da prostih brojeva ima više od tri.



Deduktivna strukture dokaza Euklidovog stava IX.20

10.9. Geometrijska progresija i savršeni brojevi

Posle stavova IX.21–34 koji se odnose na parne i neparne brojeve, u stavu IX.35 Euklid nalazi poznati obrazac za sumu zadate geometrijske progresije, da bi u poslednjem stavu devete knjige — IX.36, prikazao formulu za nalaženje savršenih brojeva — onih koji su jednaki sumi svojih delitelja.

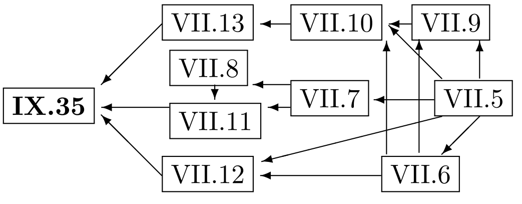
U stavu IX.35 Euklid pretpostavlja da su $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ članovi geometrijske progresije i upotrebom stavova VII.11–13 dokazuje da je tada

$$(p_2 - p_1) : p_1 = (p_{n+1} - p_1) : (p_1 + p_2 + \cdots + p_n).$$

Zato, ako sa S_n označimo sumu $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, lako je utvrditi da je tada

$$S_n = \frac{p_1(p_{n+1} - p_1)}{p_2 - p_1} = \frac{p_1(\frac{p_{n+1}}{p_1} - 1)}{\frac{p_2}{p_1} - 1} = \frac{p_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

gde je q količnik progresije.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.35

Budući da se odnosi na neprekidne proporcije proizvoljne dužine ovaj stav ne može pripadati ranom pitagorejstvu iako njegovoj deduktivnoj strukturi pripadaju samo stavovi sedme knjige *Elemenata* koji se mogu dokazati upotrebom oblutaka.[39]

U poslednjem, trideset šestom stavu devete knjige *Elemenata*, on dokazuje da će broj n koji je zadat formulom $n = p \cdot 2^{k-1}$, gde je k broj takav da je suma $p = 1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}$ prost broj, biti savršen.[40] Pored stavova sedme knjige, u dokazu on neposredno upotrebljava dva stava devete knjige — IX.13 i IX.35.

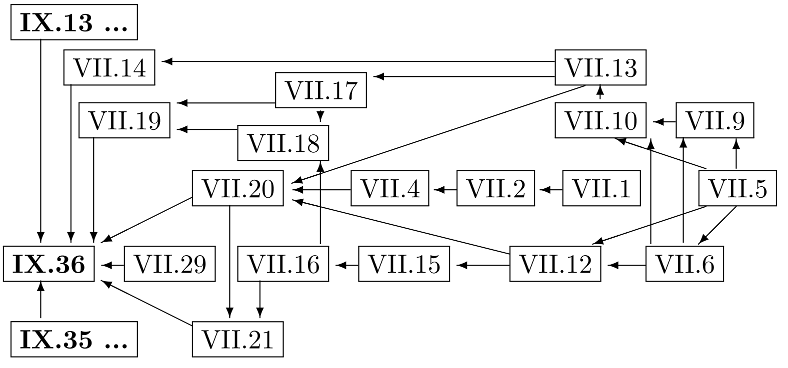
[39] Burkert [**9**, str. 435] je mišljenja da ovaj stav pripada Akademiji.

[40] Prema Euklidovim rečima

> *Ako se uzme ma koliko neprekidno proporcionalnih brojeva sa jedinicom na prvom mestu u razmeri jedan prema dva i to dotle dok zbir svih tih brojeva ne postane prost broj i ako taj zbir pomnožen poslednjim brojem proizvodi nešto, biće dobiveni broj savršen.*

Razume se, stav IX.35 upotrebljava da bi našao sumu neprekidno proporcionalnih brojeva $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{k-1}$.

Deduktivna struktura dokaza stava IX.36 je izuzetno složena. Njoj pripada mnoštvo stavova Euklidovih aritmetičkih knjiga od kojih neki sami imaju veoma složenu deduktivnu strukturu (poput stava IX.13).[41] Zato je ovaj dokaz mogao nastati tek u Euklidovo vreme ili neposredno pre njega.[42] Budući da je ovo poslednji stav aritmetičkih knjiga koji, uz to, ima deduktivnu strukturu koja je složenija od bilo koje druge, njegov dokaz je i kruna Euklidove deduktivno utemeljene aritmetike, na isti način na koji je i dokaz Pitagorine teoreme kruna njegove geometrije u prvoj knjizi *Elemenata*.[43] Zato nije isključeno da dokaz stava IX.36 pripada samom Euklidu.



Nepotpuna deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava IX.36

[41] Deduktivnoj strukturi dokaza stava IX.36 pripada 29 stavova VII knjige *Elemenata* (svi od prvog do dvadeset sedmog, dvadeset deveti i trideset prvi), sedam stavova VIII knjige i stavovi IX.8, IX.11, IX.13 i IX.35.

[42] Burkert [**9**, str. 431] je mišljenja da savršenih brojeva ne može biti pre Aristotela. Naprotiv, Beker [**6**, str. 539–544] je na stanovištu da stav IX.36 dopire iz najranijeg perioda pitagorejstva budući da ga je moguće dokazati upotrebom stavova IX.21–34 o parnim i neparnim brojevima koji se mogu dokazati upotrebom oblutaka.

[43] Proklo tvrdi da je Euklid Pitagorinu teoremu „*načinio izvesnom zahvaljujući najsjajnijem dokazu*“. Proclus, str. 426. Videti i [**37**].

POGLAVLJE 11

Teetetove teoreme

Na prvi pogled izgleda da stavovima VIII.14–17 i nije mesto u osmoj knjizi *Elemenata* jer se u njihovim formulacijama ne pominju neprekidne proporcije. Međutim, teorema VIII.6 i njena posledica VIII.7, koje pripadaju teoriji neprekidnih proporcija, imaju ključnu ulogu u njihovim dokazima. Budući da se na njih Euklid ne poziva ni u jednom drugom stavu u aritmetičkim knjigama *Elemenata*, ova dva stava — VIII.6 i VIII.7, očigledno su dokazani samo u nameri da budu upotrebljeni u dokazima stavova VIII.14 i VIII.15, a potom, posredno, i u dokazima njima ekvivalentnih stavova VIII.16 i VIII.17. Pokazaće se da su stavovi VIII.14 i VIII.15 najznačajniji stavovi osme knjige jer daju odgovor na jedno od otvorenih pitanja rane aritmetike: koji brojevi imaju racionalne, a koji iracionalne korenove?

11.1. Kada kvadrat meri kvadrat?

Pre nego što će u stavu VIII.7 dati odgovor na pitanje koji je potreban uslov da prvi član neke neprekidne proporcije deli poslednji, Euklid u stavu VIII.6 dokazuje da,

> *ako u nizu proizvoljnog broja neprekidno proporcionalnih brojeva prvi ne meri drugi, onda nijedan od ostalih neće meriti nijedan drugi.*

U nameri da u dokazu stava VIII.6 upotrebi indirektnu metodu, Euklid pretpostavlja da su j, l i m prva tri uzastopna broja u neprekidnoj proporciji sa proizvoljno mnogo članova, takvi da j ne deli l, a deli m. Tada postoje tri najmanja broja p, q, r takva da je $j : l : m = p : q : r$ (VII.33), pa su, na osnovu stava VIII.3, p i r međusobno prosti brojevi. Međutim, kako je $j : l = p : q$ i, po pretpostavci, j ne deli l, tada p ne deli q. Dakle, p nije 1, jer 1 deli svaki broj. Zato, budući da su p i r međusobno prosti, p ne deli r. Međutim, $j : m = p : r$ (VII.14) pa ni j ne deli m što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

Stav VIII.7 prema kojem

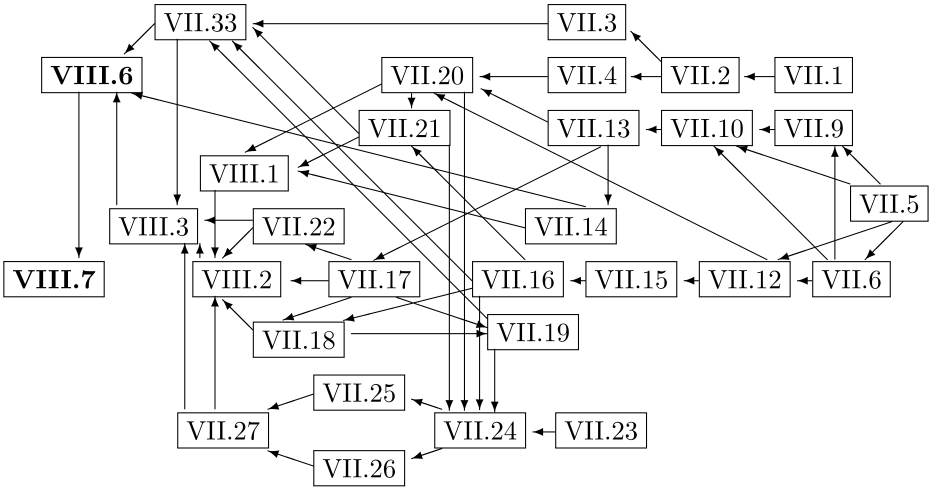
> *ako u nizu neprekidno proporcionalnih brojeva prvi meri krajnji, onda on meri i drugi,*

Euklid dokazuje neposrednom upotrebom prethodnog stava na sledeći način: ako je $j : l = l : m$ i ako broj j ne bi delio l, ne bi delio ni m, a deli ga po pretpostavci.

Sada se može dati odgovor i na pitanje koji je potreban i dovoljan uslov da neki kvadratni broj p^2 deli neki drugi kvadratni broj q^2. Euklid to čini u stavu VIII.14 tvrdnjom da

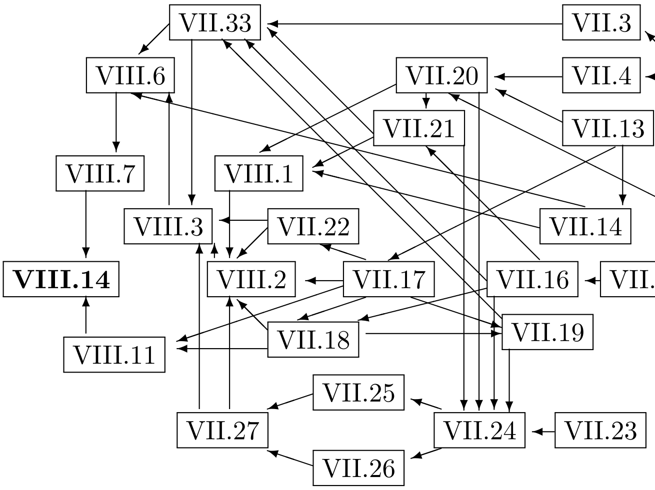
kvadrat meri kvadrat ako i samo ako strana meri stranu.

U dokazu on primećuje da, budući da je $p : q = p^2 : pq = pq : q^2$ (VIII.11), ako p^2 deli q^2 tada, na osnovu stava VIII.7, p^2 deli i pq i zaključuje da zato p deli q (VII. def. 21). I obrat je sasvim jednostavan. Ako p deli q onda i p^2 deli pq jer je $p : q = p^2 : pq$ (VII. def. 21). Međutim $p^2 : pq = pq : q^2$ (zato pq deli q^2) pa p^2 deli q^2.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovih stavova VIII.6 i VIII.7

Iako je dokaz Euklidovog stava VIII.14 sasvim kratak, njegova deduktivna struktura je složena. U njoj su našli mesto skoro svi stavovi sedme knjige kao i nekoliko značajnih stavova osme knjige koji mu prethode — VIII.1–3, VIII.6–7 i VIII.11. Već smo primetili da su neki od ovih stavova dokazani samo iz potrebe da se dokaže stav VIII.14 i time utvrdi koji je potreban i dovoljan uslov da jedan kvadratni broj bude deljiv drugim kvadratnim brojem. Ovaj problem je tištao matematiku petog veka. Dokazima teorema VII.24 i VIII.6 prevaziđene su prepreke na putu ka njegovom rešenju. Kogod da je dokazao stav VIII.6, dokazao ga je u nameri da iz njega sasvim jednostavno najpre izvede stav VIII.7, a iz ovoga stav VIII.14. To potvrđuje i već pomenuta činjenica da se stavovi VIII.6 i VIII.7 nigde više ne upotrebljavaju u Euklidovim aritmetičkim knjigama osim u dokazima stavova VIII.14–17. Stoga stavovi VIII.6–7 i VIII.14–17 pripadaju jednoj celini. Njoj pripada i teorija međusobno prostih brojeva iz sedme knjige *Elemenata* (stavovi VII.23–27) na kojoj počivaju dokazi stavova VIII.2 i VIII.3, a potom i stava VIII.6. Zato je moguće da sve ove teoreme — VII.23–27, VIII.2–3, VIII.6–7 i VIII.14–17, potiču od jedne osobe. Videćemo da je ta osoba mogao biti samo Teetet.



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.14

Euklidov stav VIII.14 ima jednu veoma važnu, iako sasvim jednostavnu posledicu koja izgleda da je promakla istraživačima istorije nesamerljivosti. Ovim stavom se zapravo tvrdi da postoje brojevi p, q i n takvi da je $q^2 = np^2$, ako i samo ako postoji i broj k takav da je $q = kp$. Međutim, $q = kp$ ako i samo ako je $q^2 = k^2p^2$, pa je $q^2 = np^2$ ako i samo ako je n kvadratni broj. Drugim rečima, kvadratni koren broja n je racionalan broj ako i samo ako je n kvadratni broj. Štaviše, ako je n kvadratni broj, njegov kvadratni koren je (prirodni) broj.

Razume se, budući da 2 nije kvadratni broj, njegov kvadratni koren nije racionalan broj. Na isti način, to nisu ni kvadratni korenovi brojeva: 3, 5, 6, 7, 8, $10, \ldots, 17, \ldots$, itd. Sada je jasno zašto Euklid u Elementima ne dokazuje da kvadratni koren broja 2 nije racionalan broj, kao što ne dokazuje ni Teodorove stavove o iracionalnosti kvadratnih korenova brojeva 3, 5, itd. Prosto, dokazao je mnogo opštiju tvrdnju — stav VIII.14. O značaju koji Euklid daje ovom stavu govori i to što u stavu VIII.16 (nepotrebno) dokazuje i njemu ekvivalentnu tvrnju prema kojoj kvadratni broj ne meri kvadratni broj ako i samo ako strana ne meri stranu.

11.2. Stav VIII.14 je Teetetova teorema

Aritmetički stav VIII.14 naizgled je formulisan kao geometrijska teorema prema kojoj kvadratna površ meri kvadratnu površ ako i samo ako ivica meri ivicu. Međutim, ova geometrijska tvrdnja prosto nije istinita. Kvadratne površi mogu meriti jedna drugu i kada njihove ivice ne mere jedna drugu. Euklid ovo primećuje u posledici koja dolazi uz stav X.9, tvrteći da *veličine samerljive po dužini, samerljive su uvek i u stepenu, a one samerljive u stepenu nisu uvek samerljive i po dužini.* Tako, na primer, kvadratna površ ivice 1 meri (dva puta) kvadratnu površ ivice $\sqrt{2}$, a njihove ivice nisu samerljive.

U stavu X.9 Euklid dokazuje da su

> *dve duži samerljive ako i samo ako se kvadratne površi kojima su one ivice, odnose jedna prema drugoj kao kvadratni broj prema kvadratnom broju.*

Međutim, duži a i b su samerljive ako i samo ako postoje brojevi m i n takvi da je $a : b = m : n$ (X.5–6),[1] tako da se ovim stavom zapravo tvrdi da da je $a : b = m : n$, ako i samo ako postoje brojevi j i k takvi da je $a^2 : b^2 = j^2 : k^2$. U posebnom slučaju, kada je $m = 1$ i $j = 1$, prema ovoj teoremi biće $b = na$, ako i samo ako postoji broj k takav da je $b^2 = k^2a^2$. Međutim, ako su a i b celobrojnih dužina p i q, biće $q = np$ ako i samo ako je $q^2 = k^2p^2$, pa p deli q ako i samo ako p^2 deli q^2. Ovo nije ništa drugo do tvrdnja iz stava VIII.14. Zato je ovaj stav samo poseban slučaj stava X.9.

S obzirom na to da Papos Aleksandrijski na samom početku *Komentara X knjige Euklidovih Elemenata* tvrdi da je Teetet prvi

> *... napravio razliku između kvadrata (i ostalih stepena) kojima su strane samerljive i onih kojima nisu,*[2]

stav X.9 pripada Teetetu, budući da se baš njime daje odgovor na pitanje koji je potreban i dovoljan uslov da ivice dvaju kvadrata budu samerljive. I prema autoru šezdeset druge sholije u Hajbergovom izdanju Euklidovih dela, koja dolazi uz stav X.9, *ova teorema je Teetetovo otkriće.*[3] Štaviše, autor sholije dodaje da je *Platon pominje u* Teetetu *ali u manje opštem obliku.*[4] Budući da je stav VIII.14 samo poseban slučaj stava X.9, opaska autora ove sholije bi se morala odnositi upravo na stav VIII.14. To potvrđuje i čuveni fragment iz Platonovog *Teeteta* (147 d–148 b) koji se odnosi na pitanje samerljivosti ivica kvadrata kojima su površine celobrojne.

Ovaj fragment sadrži Teetetovu pripovest o sopstvenim otkrićima, koja započinje definicijom prema kojoj se *kvadratnim brojevima* nazivaju oni koji se dobijaju množenjem nekog broja samim sobom. Brojeve koji se tako ne mogu dobiti već samo množenjem dvaju različitih brojeva, on naziva *duguljastim* (*pravougaonim*) *brojevima.*[5] Budući da ističe primere brojeva 3 i 5 koji su prosti,

---

[1] U stavu X.5 Euklid dokazuje da su *samerljive veličine u razmeri jedna prema drugoj kao broj prema broju*, a stav X.6 je obrat stava X.5. Iako to ne ističe, Euklid ove stavove dokazuje upotrebom antifairetičke definicije proporcionalnosti. Videti odeljak 8.3.

[2] Videti [**44**, str. 63].

[3] O ovome raspravljaju Knor [**29**, str. 64] i Hit [**22**, vol. III, str. 30].

[4] Videti [**29**, str. 97, f. 6].

[5] Prema Teetetovoj pripovesti:

> *Sve brojeve podelismo u dve vrste. Oni brojevi koji mogu da nastanu od množenja dvaju jednakih faktora, a prikazali smo ih likom kvadrata, nazvali smo kvadratnim ili jednakostranim...*
>
> *A one brojeve između tih, u koje pripadaju i tri i pet i svaki broj koji ne može postati od množenja dvaju jednakih faktora, nego nastaje ili od većeg broja pomnoženog sa manjim ili od manjeg pomnoženog sa većim i ti brojevi određeni su (kao likovi) jednom većom i jednom manjom stranom, a prikazali smo ih opet duguljastim četvorouglom, tj. pravougaonikom, nazvali smo duguljastim (pravougaonim) brojevima ...*
>
> *Sve prave (duži) koje prikazuju jednakostran broj kao kvadrat definisali smo kao dužine, a one koje prikazuju duguljast broj kao pravougaonik definisali*

jasno je da i linearne brojeve svrstava u pravougaone. Za njega su pravougaoni brojevi zapravo svi oni brojevi koji nisu kvadratni.

Nakon ovih definicija dolazi ključno mesto u Teetetovoj pripovesti koju nam prenosi Platon:

> *pravougaoni brojevi ... po dužini ne mogu se meriti sa onim veličinama (kvadratnim brojevima), a mogu se meriti sa onim veličinama s obzirom na površinu koju sačinjavaju.*[6]

Iza ove geometrijske formulacije krije se zapravo aritmetički stav. Zaista, prema Teetetovoj tvrdnji ivica kvadrata kojem je površina pravougaoni broj, nije samerljiva sa ivicom kvadrata kojem je površina kvadratni broj, pa stoga ona nije samerljiva ni sa jednom celobrojnom duži, a za pravougaoni i kvadratni broj, kakvi god da su, postoji njihova zajednička mera. Dakle, ako je k pravougaoni broj, prema Teetetovoj tvrdnji odnos ivice kvadrata kojem je površina k i bilo koje celobrojne duži, nije jednak odnosu nekih dvaju brojeva p i q (X.7).[7] Zato ne postoje kvadratni brojevi p^2 i q^2 takvi da je $q^2 = kp^2$.[8] Međutim, ova tvrdnja je dokazana u Euklidovom stavu VIII.14. Razume se, ako je k kvadratni broj, onda je ivica kvadrata kojem je površina k, celobrojna duž. Dakle, važi i obrat Teetetove tvrdnje ali on je mogao biti poznat još iz ranopitagorejskog perioda jer ga je jednostavno dokazati upotrebom oblutaka,[9] pa ga Platon u *Teetetu* i ne pominje.

Na samom kraju Platonovog fragmenta Teetet dodaje da važi i analogni stav koji se odnosi na kubove. Drugim rečima, on tvrdi da ne postoje brojevi p^3 i q^3 takvi da je $q^3 = kp^3$ ako k nije kubni broj. Ovu tvrdnju Euklid dokazuje u stavu VIII.15. Zato se i ovaj stav pripada Teetetu. Razume se, njemu pripadaju i stavovi VIII.16 i VIII.17 koji su ekvivalentni dvama stavovima koji im prethode.

11.3. Euklidov dokaz stava X.9

U stavu VIII.14 Euklid najpre dokazuje aritmetičku tvrdnju prema kojoj, *ako strana meri stranu, onda kvadrat meri kvadrat,* a u stavu X.9 i geometrijsku tvrdnju prema kojoj, *ako su ivice samerljive, onda su i kvadrati samerljivi (jer se jedan prema drugome odnose kao kvadratni broj prema kvadratnom broju).*[10] Da

---

> *smo kao pravougaone brojeve (korene) jer se po dužini ne mogu meriti sa onim veličinama, a mogu se meriti sa onim veličinama s obzirom na površinu koju sačinjavaju. I o kubnim brojevima napravili smo nešto slično.*

Teetet, 147 d–148 b.

[6] Drugim rečima, ivica kvadrata koji je površinom jednak površini pravougaonika celobrojnih ivica, nije samerljiva sa ivicom nekog kvadrata celobrojnih ivica, a njihove (celobrojne) površine su samerljive.

[7] Prema stavu X.7 *nesamerljive veličine se ne nalaze u razmeri jedna prema drugoj kao broj prema broju.* Ovaj stav Euklid dokazuje neposrednom upotrebom stava X.6, a stav X.6 je dokazao upotrebom antifairetičke definicije proporcionalnosti brojeva koja pripada aritmetici oblutaka. Videti odeljak 8.3.

[8] O ovome raspravlja Van der Verden [**53**, str. 166].

[9] Videti odeljak 3.5.

[10] Prema Euklidovoj formulaciji:

> *Kvadrati na samerljivim dužima se nalaze u razmeri kvadratnog broja prema kvadratnom broju. I kvadrati koji se nalaze u razmeri kvadratnog broja*

kvadrat meri kvadrat ako strana meri stranu (VIII.14) može se dokazati upotrebom oblutaka (slika 3.5.1). Međutim, na isti način, upotrebom očiglednih sredstava, lako se dokazuje da su *kvadrati samerljivi ako su im ivice samerljive* (X.9).[11] Budući da su očigledne, ove činjenice morale su biti poznate i pre Teetetova vremena. Međutim, u stavovima VIII.14 i X.9 Euklid dokazuje i njima obratne tvrdnje. U stavu VIII.14 dokazuje da

> *ako kvadrat meri kvadrat, onda strana meri stranu,*

a u stavu X.9 opštiju tvrdnju prema kojoj

> *ako su kvadrati samerljivi (jer se jedan prema drugome odnose kao kvadratni broj prema kvadratnom broju), onda su i ivice samerljive.*

U dokazu stava X.9 Euklid najpre pretpostavlja da su duži a i b samerljive, a zatim primenjuje stav X.5 da bi zaključio da se one jedna prema drugoj odnose kao neki broj m prema broju n, tj. da je $a : b = m : n$. Na osnovu posledice stava VI.20 prema kojoj su slični poligoni u *dvaput višoj razmeri* od odgovarajućih ivica, on zaključuje da je $(a : b)^2 = a^2 : b^2$. Međutim, i razmera kvadratnog broja prema kvadratnom broju *dvaput viša* od razmere strane prema strani (VIII.11) te da je, zbog toga, $(m : n)^2 = m^2 : n^2$. Međutim, $(a : b)^2 = (m : n)^2$ jer je $a : b = m : n$ pa je zbog toga i $a^2 : b^2 = m^2 : n^2$.

Euklid sasvim jednostavno dokazuje i obratnu tvrdnju. On pretpostavlja da se geometrijski kvadrati kojima su ivice a i b odnose jedan prema drugome kao kvadratni broj m^2 prema kvadratnom broju n^2, tj. da je $a^2 : b^2 = m^2 : n^2$, i znajući da je $a^2 : b^2 = (a : b)^2$ i $m^2 : n^2 = (m : n)^2$, zaključuje da je $(a : b)^2 = (m : n)^2$. Zbog toga je $a : b = m : n$ pa je par duži a, b proporcionalan paru brojeva m, n. Kako se odnose jedna prema drugoj kao broj prema broju, duži a i b će, na osnovu stava X.6, biti samerljive.

Euklidov dokaz je manjkav.[12] U njemu se istražuje kada je par duži proporcionalan paru brojeva, a ova proporcionalnost u *Elementima* nigde nije definisana. Definicija V. def. 5 se odnosi na proporcionalnost veličina, a VII. def. 21 na proporcionalnost brojeva. O usklađenosti ovih dveju definicija na skupu samerljivih duži, Euklid ne raspravlja. On ne daje odgovor na pitanje da li samerljive veličine koje su proporcionalne jer zadovoljavaju uslove Eudoksove definicije V. def. 5, zadovoljavaju i uslove aritmetičke definicije VII. def. 21.[13] A ipak, u svom dokazu

---

> *prema kvadratnom broju imaju za strane samerljive duži. — A kvadrati na nesamerljivim dužima se ne nalaze u razmeri jedan prema drugom kao kvadratni broj prema kvadratnom broju. I kvadrati koji se ne nalaze u razmeri jedan prema drugom kao kvadratni broj prema kvadratnom broju nemaju za strane samerljive duži.*

[11] O ovome će biti više reči u sledećem odeljku 11.4.

[12] O ovome raspravljaju Knor [**29**, str. 253] i Van der Verden [**53**, str. 159].

[13] Simsonov dokaz da je odgovor na ovo pitanje potvrdan prenosi Hit [**22**, vol. III, str. 25].

Euklid upotrebljava stav VI.20 koji dokazuje upotrebom Eudoksove definicije.[14] Zato dokaz stava X.9 ne može biti Teetetov jer on nije mogao upotrebljavati ovu definiciju. Eudoksova teorija proporcija dolazi kasnije.

Međutim, ako se antifairetička definicija proporcije veličina (duži) primeni na celobrojne duži, dolazi se do antifairetičke definicije proporcije brojeva,[15] pa teorija proporcija koja je bila već razvijena u Teetetovo vreme ima jednostavnija sredstva za dokaz stava X.9 od Eudoksove teorije proporcija. I stavovi X.5–8 kojima se utvrđuje da su dve veličine samerljive ako i samo ako se jedna prema drugoj odnose kao broj prema broju (X.5–6) i (nepotrebno) da su nesamerljive ako i samo ako se jedna prema drugoj ne odnose kao broj prema broju (X.7–8), neposredno se dokazuju upotrebom antifairetičkih definicija proporcionalnosti veličina i brojeva.[16]

I dokazi tvrdnji da je $(a : b)^2 = a^2 : b^2$, i da je $(m : n)^2 = m^2 : n^2$, morali su biti poznati Teetetu budući da dolaze iz antifeiretičke teorije proporcija i pitagorejske teorije muzike o kojoj piše Euklid u *Kanonskom preseku*.[17] Zato je dokaz stava X.9 mogao nastati preradom starog dokaza koji je počivao na antifairetičkoj teoriji proporcija, u nameri da se dobije dokaz koji je zasnovan na Eudoksovoj teoriji proporcija iz V knjige i aritmetičkoj teoriji proporcija iz VII knjige *Elemenata*.

11.4. Kako je mogao izgledati Teetetov dokaz?

Dokaz stava X.9 mogao je biti i drukčiji. Iako Euklid to ne primećuje, mogao je biti utemeljen na (aritmetičkom) stavu VIII.14 i na antifairetičkoj definiciji proporcionalnosti. Zaista, ako pretpostavimo da su duži a i b samerljive, onda postoji duž e koja se konačno mnogo puta sadrži i u jednoj i u drugoj (X. def. 1). Ona je njihova (ne neophodno najveća) zajednička mera. Ako je c najveća zajednička mera duži a i b, onda se duž e sadrži konačno mnogo puta i u duži c (posledica stava X.3).[18] Ako se e sadrži p puta u duži a, q puta u duži b, a s puta u duži c, onda broj s deli i broj p i broj q pa, na osnovu teoreme VIII.14, broj s^2 deli brojeve p^2 i q^2. Zato kvadratna površ kojoj je ivica c meri kvadratne površi kojima su ivice a i b, prvu p^2/s^2 puta, a drugu q^2/s^2 puta, pa se te dve kvadratne površi odnose jedna prema dugoj kao broj p^2 prema broju q^2, budući da se prva sastoji iz p^2 kvadratnih površi ivice e, a druga iz q^2 takvih površi.

Obratno, ako se kvadratne površi kojima su ivice a i b, odnose jedna prema drugoj kao kvadratni broj p^2 prema kvadratnom broju q^2, onda postoji kvadratni broj s^2 koji deli i p^2 i q^2 (jer postoji najveća zajednička mera brojeva p i q) pa, na

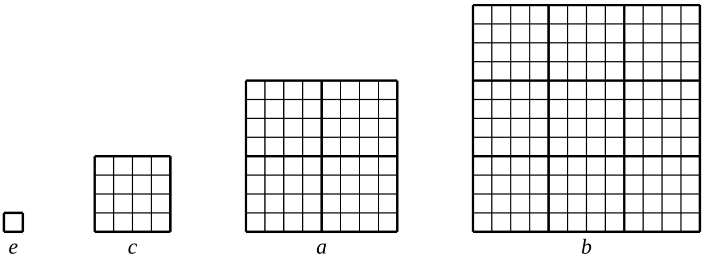
[14] U stavu VI.20 Euklid dokazuje da se *slični mnogouglovi mogu rastaviti na slične trouglove* i da je *mnogougao prema mnogouglu u dvaput višoj razmeri odgovarajućih strana*, a u njegovoj posledici zaključuje da istu osobinu imaju četvorouglovi, pa dakle i kvadrati.

[15] O ovome je bilo reči u odeljku 8.3.

[16] I o ovome je bilo reči u odeljku 8.3.

[17] Videti odeljak 12.4.

[18] U stavu X.3 Euklid *za dve samerljive veličine nalazi njihovu najveću zajedničku meru*, a u posledici primećuje da *ako neka veličina meri dve veličine, ona meri i njihovu najveću zajedničku meru*. Dokaz ovog stava u osnovi se ne razlikuje od dokaza stava VII.2 u kojem Euklid nalazi najveću zajedničku meru dvaju brojeva. Međutim, stav VII.2 može da se dokaže upotrebom oblutaka (teorema 19 (VII.2)) pa zato i stav X.3 pripada aritmetici oblutaka.



SLIKA 11.4.1. Ivice a i b su samerljive ako i samo ako je $a^2 : b^2 = p^2 : q^2$

osnovu stava VIII.14, broj s deli i p i q. Zato duž c koja je celobrojne dužine s, meri i a i b koje su celobrojnih dužina p i q, pa su a i b dve samerljive duži.

Znajući da su stavovi VIII.14 i X.9 srodni i da imaju istog autora — Teeteta, malo je verovatno da su njihovi prvi dokazi izvedeni dvema tako raznorodnim tehnikama kao što to čini Euklid u *Elementima.* Sva je prilika da je Teetet najpre dokazao stav VIII.14, a potom, njegovom upotrebom dokazao od njega opštiji stav X.9. Euklid nije tako učinio. Umesto zastarele antifairetičke, on koristi Eudoksovu definiciju proporcionalnosti veličina i svoj dokaz usklađuje sa zahtevom upotrebe ove nove definicije. Zato stav X.9 mora biti jedan od onih stavova u *Elementima* do čijeg dokaza je Euklid došao *usavršavanjem Teetetovih stavova*, o čemu nas obaveštava Proklo u svom *Pregledu.*[19]

11.5. Kada kub meri kub?

Euklidov dokaz stava VIII.15 u potpunoj je analogiji sa dokazom stava VIII.14. U njemu on dokazuje da

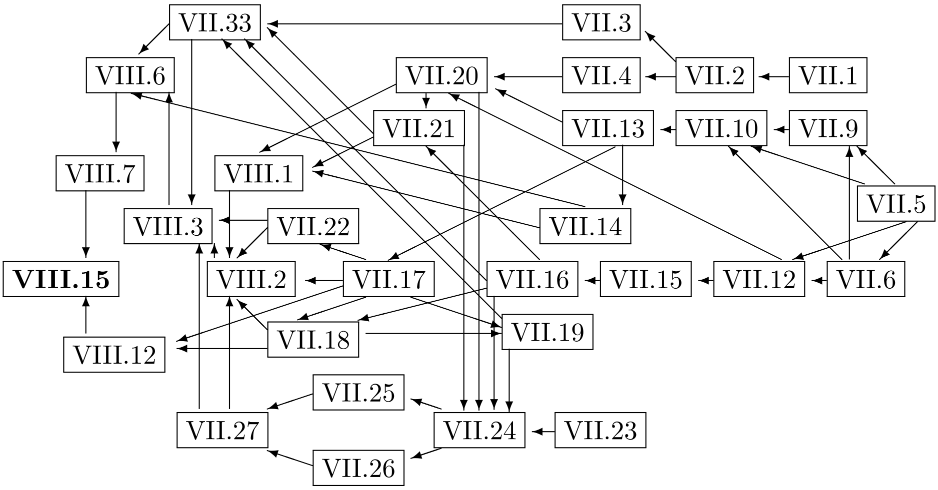
kubni broj meri kubni broj ako i samo ako strana meri stranu.

Na početku dokaza Euklid primećuje da, budući da je $p : q = p^3 : p^2q = p^2q : pq^2 = pq^2 : q^3$ (VIII.12), ako p^3 deli q^3 tada, na osnovu stava VIII.7, p^3 deli i p^2q i zaključuje da zato p deli q (VII. def. 21). I obrat je sasvim jednostavan. Ako p deli q onda i p^3 deli svaki član proporcije $p^3 : p^2q = p^2q : pq^2 = pq^2 : q^3$ (VII. def. 21) pa, dakle, i p^3.

Deduktivna struktura njegovog dokaza ista je kao i deduktivna struktura dokaza stava VIII.14, samo je stav VIII.11 zamenjen stavom VIII.12. Doduše, na samom početku dokaza stava VIII.15 Euklid pominje da važi i proporcija $p : q = p^2 : pq = pq : q^2$ (VIII.11), međutim, on ovu osobine nigde ne upotrebljava u dokazu, tako da stav VIII.11 ne pripada deduktivnoj strukturi dokaza stava VIII.15.

Kao što dokazuje stav VIII.16 koji je ekvivalentan stavu VIII.14, Euklid dokazuje i stav VIII.17 koji je ekvivalentan stavu VIII.15. Budući da su suvišni, nije isključeno da su stavovi VIII.16 i VIII.17 zapravo interpolacija.

[19] Prema Proklovim rečima Euklid je sastavio *Elemente* „*ređajući mnoge Eudoksove teoreme, usavršavajući mnoge Teetetove, ...*“. Videti [**46**, str. 68].



Deduktivna struktura dokaza Euklidovog stava VIII.15

Kao što se stav VIII.14 može uopštiti da bi se dobio stav VIII.15, i stav X.9 može se uopštiti da bi se dokazala tvrdnja da su *ivice dveju kocki samerljive ako i samo ako se kocke odnose jedna prema drugoj kao kubni broj prema kubnom broju.* To je jednostavno učiniti u analogiji sa dokazom koji je izložen u odeljku 11.2, i to Teetetu nije moglo promaći. Euklid ne dokazuje da važi ovo uopštenje iako bi, u analogiji sa dokazom stava X.9, mogao to da učini upotrebom stava VIII.12 umesto stava VIII.11, i stava prema kojem su *slični poliedri jedan prema drugome u triput višoj razmeri odgovarajućih strana*. Međutim, dokaza ovog stava nema u *Elementima*, iako se on može izvesti u analogiji sa dokazom stava VI.20, upotrebom stava XII.8.[20]

11.6. Nesklad u osmoj knjizi

Za razliku od sedme knjige *Elemenata*, osma se čita sa teškoćama jer u njoj ima logičkih nejasnoća. Već s njenog početka nailazi se na prvu poteškoću. Knjiga je posvećena neprekidnoj proporciji, a ovaj aritmetički pojam Euklid i ne definiše, tako da čitaocu preostaje da sebi pomogne razumevanjem geometrijskog pojma neprekidne proporcije iz pete knjige *Elemenata* ili nalaženjem aritmetičke definicije kod drugih antičkih autora.

Euklid se u osmoj knjizi s njenog početka bavi neprekidnim proporcijama koje imaju proizvoljno mnogo članova, da bi se kasnije okrenuo neprekidnim proporcijama sa tri ili četiri člana. Istorijski redosled svakako je bio drukčiji. Doduše, sve teoreme o neprekidnim proporcijama sa proizvoljno mnogo članova Euklid dokazuje kao da se odnose na tročlane ili četvoročlane proporcije, i s početka su ove teoreme tako morale biti dokazane, da bi kasnije pojam neprekidne proporcije bio uopšten, a

[20] Prema stavu XII.8 *razmera sličnih piramida sa trougaonim osnovama triput je viša od razmere odgovarajućih ivica.*

teoreme formulisane kao da se odnose na neprekidne proporcije proizvoljne dužine. Međutim, u upotrebi ovog pojma Euklid je nedosledan. U stavu VIII.4, kada nalazi četiri „neprekidno proporcionalna“ broja koji su, par po par, u zadatim razmerama, on ne zahteva da ti parovi budu proporcionalni međusobno, već samo da su proporcionalni unapred zadatim brojevima. Budući da u dokazu stava VIII.5 upotrebljava stav VIII.4, i u ovom dokazu se ne zahteva pomenuta međusobna proporcionalnost. U ostalim stavovima aritmetičkih knjiga ona se podrazumeva.

Međutim, u osmoj knjizi nisu samo definicije problematične. I sa stavovima je slično jer i među njima mogu se naći logičke nejasnoće i nedoslednosti, a ima čak i problematičnih dokaza. Kao što smo već utvrdili, takav je slučaj sa dokazom stava VIII.22 koji je nepotpun i, zbog toga, logički neispravan.[21] Isto se može reći i za stav VIII.23, a i za dve posledice ovih stavova VIII.24–25. Da bi se ove greške ispravile nije dovoljno promeniti dokaze ovih stavova, već je potrebno promeniti i raspored materijala u osmoj knjizi ne bi li se ovi stavovi logički uskladili sa njenim ostalim stavovima.

Nadalje, dokaz stava VIII.2 koji se odnosi na neprekidne proporcije sa proizvoljno mnogo članova, sadrži u sebi dokaze stavova VIII.11 i VIII.12 koji se odnose na tročlane i četvoročlane proporcije. Međutim, Euklid to i ne primećuje. On ne nalazi nikakvu logičku vezu među njima. To je vidljivo i iz njihovih deduktivnih struktura. Odsustvo ove logičke veze upućuje na postojanje bar dvaju različitih izvora koje je kompilator (ako to već nije sam Euklid) imao pred sobom kada je sastavljao osmu knjigu. Stariji izvor sadržao je stavove VIII.11 i VIII.12 koji su jednostavniji za dokazivanje i u svojim dokazima pretpostavljaju stavove koji neposredno ili posredno slede samo iz stava VII.5. Svi ovi stavovi pripadaju aritmetici oblutaka. Stav VIII.2 očigledno pripada kasnijem izvoru budući da se u njegovom dokazu koriste i stavovi VII.23–27 o međusobno prostim brojevima kojima nije mesto u aritmetici oblutaka.

Ako je istinita tvrdnja Nikomaha iz Gerase da je geometrijska proporcija bila poznata Pitagori, onda se podrazumeva da su mu morali biti poznati neki primeri takvih proporcija, a ne samo prazna definicija. Mogao mu je biti poznat i neki postupak kojim se dolazi da takvih primera. Sudeći prema Euklidovim *Elementima*, taj postupak je jedino mogao biti utemeljen stavom VIII.11. Budući da ga je moguće dokazati očiglednim sredstvima,[22] ovim stavom su mogla biti započeta istraživanja iz teorije neprekidnih proporcija, koja su, na posletku, rezultirala osmom knjigom *Elemenata*. Zapravo, osim stava VIII.11 drugih kandidata i nema. Posle njega istraživanja su mogla biti nastavljena dokazom stava VIII.12 koji je morao biti poznat Hipokratu sa Hiosa, ali i stavova VIII.18 i VIII.19 koji su samo jednostavna uopštenja stavova VIII.11 i VIII.12. Po svemu sudeći, ova četiri stava su najstariji stavovi osme knjige.

Tvrdnji da je Euklid koristio više različitih izvora u kompilaciji osme knjige ide u prilog i nagli prekid sleda dokaza posle stava VIII.10. Stavovi VIII.11 i VIII.12 su njegove neposredne posledice ali Euklid to ne primećuje već se u njihovim dokazima

[21] Na to posebnu pažnju obraća Van dr Verden koji je to prvi primetio. Videti [**53**, stre. 154].
[22] Videti odeljak 5.4.

vraća rasuđivanju iz stava VIII.2. Time je nagovešten i treći izvor. Njemu pripadaju stavovi VIII.8, VIII.9 i VIII.10 koji se upotrebljavaju u Arhitinoj muzičkoj teoriji. Oni čine jednu celinu. Ovu celinu Euklid ne narušava dodajući joj stavove VIII.11 i VIII.12 i zato ova dva stava koji su stariji od Arhitinih stavova, ne izvodi iz stava VIII.10.

Dokaz stava VIII.2 mogao je nastati tek nakon utemeljenja teorije međusobno prostih brojeva iz stavova VII.23–27. Kako se ovi stavovi upotrebljavaju neposredno i u dokazu stava VIII.3, a posredno i u dokazima stavova VIII.6 i VIII.7 iz kojih sledi Teetetova teorema — stav VIII.14, cela ova teorija mogla je doći iz samo jednog izvora. Ako je zaista tako, ona pripada Teetetu. Doduše, i Arhita u stavovima VIII.8–9 upotrebljava teoriju međusobno prostih brojeva tako da se ne može isključiti mogućnost da ona pripada njemu. U tom slučaju Teetetu ostaju stavovi VIII.6–7 i VIII.14–17. Ipak, verovatnije je da njemu pripada i teorija međusobno prostih brojeva i, sledstveno, dokazi stavova VIII.2 i VIII.3, te da zbog toga Teetet intelektualno prethodi Arhiti.[23]

Ostaje utisak da je osma knjiga nedorečena i zbog toga što u njoj nema stava o kanonskom obliku neprekidne proporcije kojim bi teorija neprekidnih proporcija bila zaokružena. Međutim, ni nedorečenost, ni nesklad u osmoj knjizi ne mogu se pripisati Arhiti (i krugu njegovih sledbenika)[24] jer Arhita svakako nije jedini izvor koji koristi autor ove knjige, već je „krivica“ eventualnog kompilatora koji je bio nekritičan i, na posletku, samog Euklida koji je nije valjano logički uskladio.

Svejedno, budući da sadrži teoriju kojoj je vrhunac jedan od najznačajnijih rezultata Euklidove aritmetike — Teetetov stav, osma knjiga ima mesto među draguljima grčkog matematičkog stvaralaštva.

[23] O intelektualnom poretku Teeteta, Arhite i Eudoksa raspravlja Miler [**41**, str. 274].

[24] Videti [**53**, str. 153–155].

POGLAVLJE 12

Aritmetika i muzika

Najstariji sačuvani izvor iz kojeg saznajemo kakav je u helenskom periodu bio odnos matematike i muzičke teorije pripisuje se Euklidu. To je kratka rasprava sa naslovom *Kanonski presek* (grčki, Κατατομὴ κανόνος — *Katatome kanonos*; latinski, *Sectio Canonis*), koja se sastoji iz prologa i 20 stavova. U njoj je ukratko izložena pitagorejska harmonijska doktrina.[1]

Prvih devet stavova *Kanonskog preseka* su aritmetičke teoreme. Sudeći prema njima, ova rasprava o muzici utemeljena je na veoma istančanoj teoriji brojeva. U dokazima njenih stavova Euklid upotrebljava stavove iz aritmetičkih knjiga *Elemenata*. Tako, na primer, u dokazu stava SC.2 upotrebljava stav VIII.7, a u dokazu stava SC.3, stav VIII.8. Međutim, jezik koji Euklid upotrebljava u stavovima svoje rasprave o muzici nije isti kao jezik *Elemenata* već je prilagođen teoriji muzike. Zbog toga je analitičarima Euklidovog dela izmakla činjenica da u *Kanonskom preseku* Euklid dokazuje neke stavove koje je već dokazao u *Elementima*. To su stavovi SC.1, SC.2, SC.4 i SC.5.[2] U stavovima SC.1 i SC.2 on dokazuje tvrdnje koje je dokazao i u stavu VIII.14, a u stavovima SC.4 i SC.5 tvrdnje koje je (delom) dokazao u stavu VIII.16. Štaviše, u njihovim dokazima upotrebljava i slične argumente, između ostalih i stav VIII.7. Budući da smo utvrdili da stav VIII.14 i njemu ekvivalentni stav VIII.16 pripadaju Teetetu, sa pouzdanjem možemo tvrditi da njemu pripadaju i stavovi SC.1, SC.2, deo stava SC.4 i stav SC.5.[3]

Iako je u *Kanonskom preseku* pre svega vidljiv dominantan uticaj aritmetike na muzičku teoriju, ipak uticaj jedne od ovih teorija na drugu nije bio jednosmeran. Način na koji su neki pojmovi utemeljeni u aritmetičkim knjigama *Elemenata* ne može se do kraja razumeti bez razumevanja pitagorejske muzičke teorije.

---

[1] U komentarima Ptolemajevih *Harmonika* Porfirije doslovce citira šesnaest stavova ove rasprave pripisujući ih „geometru Euklidu" [**32**, str. 433]. I Proklo u *Komentarima prve knjige Elemenata* (69.3) Euklidu pripisuje raspravu o *Elementima muzike*. Videti [**2**, str. 190] i [**23**, vol. I, str. 444]. Boetije je na latinski preveo delove rasprave, ne kazujući ko je autor. On nas obaveštava da je treći stav dokazao Arhita [Diels, 47.A19]. Za četvrti i deseti stav rasprave Ptolemaj tvrdi da su primeri geometrijskog tumačenja muzičkih intervala koje potiče od pitagorejaca [**47**, str. 19].

[2] O njima će biti reči u odeljku 12.5.

[3] Drugi deo stava SC.4 je posledica stava SC.3 koji pripada Arhiti. O ovome će biti više reči u odeljku 12.5.

12.1. Monohord

Potreba da se aritmetika upotrebi u objašenjima muzičkih fenomena nastala je kao posledica otkrića ranih pitagorejaca da se neki skladni muzički intervali mogu objasniti odnosima brojeva. Prema rečima neopitagorejca Teona iz Smirne, u najranijem periodu pitagorejstva, Las iz Hermione na Peloponezu,[4] a kasnije i Hipasovi učenici takođe, načinili su eksperiment i utvrdili da se muzički akordi mogu objasniti brojevima. U tome su uspeli služeći se posudama koje su bile jednake po veličini i načinjene od istog materijala.

> *Ako jedna ostane prazna, a druga se napuni vodom do pola, udarivši ih istovremeno odjekivao bi muzički akord oktave. Iznova ostavljajući jednu posudu praznom, a drugu napunivši do njene četvrtine, odjekivao bi muzički akord kvarte, a akord kvinte ako se posuda napuni do njene trećine. Odnos praznog prostora u posudama bio je* 2 *prema* 1 *u akordu oktave, u akordu kvinte* 3 *prema* 2*, a u akordu kvarte* 4 *prema* 3.[5]

I Hipasu se pripisuje sličan eksperiment. Prema Aristoksenovim rečima,[6] on je koristio bronzane diskove jednakih prečnika takve da je odnos debljine prvog prema debljini drugog bio 4 : 3, prema debljini trećeg 3 : 2, a četvrtog 2 : 1. Njihovim udaranjem postizao je izvesnu harmoniju.[7]

Izgleda da je pre Hipasa, Lasa i Hipasovih učenika do istih zaključaka došao sam Pitagora. Prema rečima Diogena Laertija, *on je otkrio muzičke intervale na monohordu.*[8] Pomeranjem kobilice na ovom instrumentu koji se sastoji iz samo jedne žice zategnute preko drvene rezonantne kutije,[9] on je izgleda prvi utvrdio da konsonantni akordi nastaju kao posledica aritmetičkih odnosa dužina žica koje trepere. O njegovom istraživanju skladnih muzičkih intervala obaveštava nas i Ksenokrat iz Halkedona kazujući da je *Pitagora otkrio i to da muzički intervali nisu odvojeni od broja.*[10] Budući da je najjednostavnije dokučiti da su muzički intervali oktave, kvinte i kvarte posledice odnosa među brojevima 1, 2, 3 i 4 iz kojih se sastoji tetraktis, sva je prilika da se Pitagora bavio upravo ovim intervalima, baš kao što su to posle njega činili Hipas, Las i Hipasovi učenici. Iako se to u sačuvanoj antičkoj literaturi eksplicitno ne ističe, nema sumnje da je on prvi utvrdio da, ako se

---

[4] Las je bio mlađi Pitagorin svremenik ali nije pripadao pitagorejskom bratstvu. U *Sudi*, velikom vizantijskom leksikonu nastalom u desetom veku, tvrdi se da je on sastavio prvi traktat o muzici.

[5] Theon II, XII a, [**51**, str. 39].

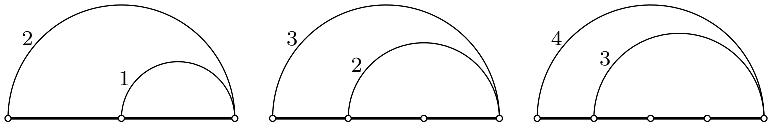
[6] Diels, 18 A 12.

[7] Videti [**1**, str. 126–132].

[8] Diogen, VIII.11–12.

[9] Monohord nije bio samo muzički instrument, već je služio i kao sredstvo za izvođenje akustičkih eksperimenata. Razume se, Pitagora je u ovom eksperimentu mogao korisiti bilo koji žičani muzički instrument, a ne samo monohord.

[10] Ksenokrat je bio drugi po redu upravitelj *Akademije* posle Platona. Prema njegovim rečima Pitagora je *istraživao pod kojim uslovima nastaju skladni i neskladni intervali i sve što je harmonično i neharmonično.* Videti [**41**, 8.II.2, str. 291]. O otkriću konsonantnih akorda obaveštava nas i Teon, II, XII a.



SLIKA 12.1.2. Oktava, kvinta i kvarta

žica na monohordu kobilicom podeli na pola, ton koji proizvodi upola kraća žica za oktavu je viši od tona koji proizvodi cela žica. Odnos dužine cele žice prema dužini ostatka na kojem se proizvodi ton tada je 2 : 1. Na isti način, ako je taj odnos 3 : 2, dobija se kvinta, a žica podeljena u odnosu 4 : 3, proizvodi kvartu. Tako je došao do zaključka da muzički intervali — kvarta, kvinta i oktava, zavise od aritmetičkih odnosa. Hipas, Las i Hipasovi učenici su upotrebom drugih instrumenata samo potvrdili ove Pitagorine nalaze.

12.2. Intervali

Imajući pred sobom primere skladnih muzičkih intervala koji su bili poznati ranim pitagorejcima, autor *Kanonskog preseka* polazi u potragu za ostalim akordima koji zvuče skladno. Razume se, poveden primerima oktave, kvinte i kvarte, on istražuje samo odnose (prirodnih) brojeva, pretpostavljajući da samo oni za posledicu mogu imati zvučno saglasje. Zato odnosima brojeva on daje ime koje jasno sugeriše njihovu ulogu u muzičkoj teoriji. Naziva ih *intervalima.* Razume se, intervali $p : q$ i $r : s$ biće međusobno jednaki ako su p, q i r, s parovi međusobno proporcionalnih brojeva, tj. ako je

$$p : q = r : s.$$

Međutim, ako su p i q najmanji od brojeva koji su sa njima u istoj proporciji, oni će biti međusobno prosti (VII.22), a svi ostali parovi njima proporcionalnih brojeva biće oblika kp, kq (VII.20). Zato se svaki interval može predstaviti kao odnos dvaju međusobno prostih brojeva.[11]

Euklid u *Kanonskom preseku* pojedinim intervalima daje imena. U prologu ove rasprave kazuje da su neki odnosi brojeva *umnošci*, neki su *epimorički*, a neki su *epimerički.* Međutim, on podrazumeva da su ovi pojmovi već poznati čitaocu, tako da se tek iz konteksta može razumeti njihov sadržaj. On *umnoškom* naziva svaki interval koji je zadat odnosom $n : 1$. Umnožak 2 : 1, koji odgovara muzičkom akordu oktave, on naziva *dvostrukim*, a umnožak 3 : 1 naziva *trostrukim intervalom.* Razume se, ako je interval $p : q$ umnožak, tj. ako je $p : q = n : 1$, tada je $p = nq$ (VII.19) pa je pojam intervala koji Euklid u *Kanonskom preseku* naziva umnoškom, istovetan pojmu multipluma (umnoška) iz sedme knjige *Elemenata* (VII. def. 5).[12]

[11] Ove parove prostih brojeva Arhita naziva *pitmenima.* On u ovome sledi neke pitagorejce koji su pre njega ove brojeve nazivali *prvim brojevima* (πρῶτοι ἀριθμοί) ili *pitmenima* (πυθμένες) (Diels, 47 A17). U svojoj *Istoriji aritmetike* (fr. 142) Eudem tvrdi da su ih pitagorejci koristili opisujući muzičke intervale.

[12] O definiciji multipluma u *Elementima* bilo je reči u odeljku 9.1.

Intervale koji su oblika $(n+1):n$, Euklid naziva *epimoričkim.*[13] Za epimoričke odnose $3:2$ i $4:3$, koji odgovaraju muzičkim akordima kvinte i kvarte, on ima posebne nazive. Prvi naziva *hemioličkim*, a drugi *epitritičkim*, dok odnos $9:8$ naziva *epogdoičkim. Epimeričkim* naziva intervale $(n+k):k$ $(k \neq 1; k \neq jn, j = 1, 2, \ldots)$.

Razume se, odnosi $p:q$ i $q:p$ predstavljaju isti interval tako da se jedan interval može predstaviti na dva načina, kao opadajući ili kao rastući par brojeva. Zato je, na primer, umnožak svaki od odnosa $1:n$ i $n:1$. Euklid bira način na koji će predstaviti neki interval, kao rastući ili kao opadajući par brojeva, u zavisnosti od toga šta mu je pogodnije. Tako, na primer, u stavovima SC.1–2 upotrebljava rastući, a u stavu SC.3 opadajući odnos.

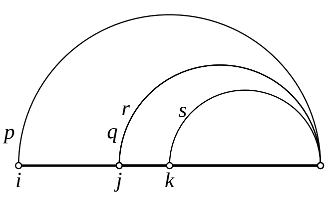
12.3. Sabiranje i oduzimanje intervala

U *Kanonskom preseku* nema definicija sabiranja i oduzimanja intervala ali, na osnovu dokaza pojedinih stavova u ovoj raspravi, može se zaključiti šta Euklid podrazumeva pod ovim pojmovima. Za njega to su dve operacije koje zapravo odgovaraju množenju i deljenju razlomaka. Razume se, budući da za Grke razlomci nisu bili brojevi, oni nisu mogli definisati proizvod razlomaka pa su svoj račun sa odnosima-razlomcima morali predočiti u skladu sa svojom muzičkom teorijom.

Kada sabira intervale $p:q$ i $r:s$, Euklid traži brojeve i, j i k takve da je

$$p:q = i:j \quad \text{i} \quad r:s = j:k,$$

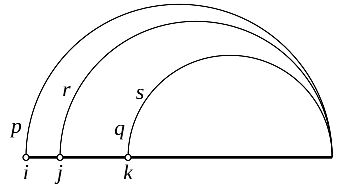
i nalazi da je interval $i:k$ zbir intervala $p:q$ i $r:s$ (slika 12.3.1). Lako je utvrditi da brojevi i, j i k postoje. Zaista, ako se uzme da je j najmanji zajednički sadržalac brojeva q i r (ili da je j prosto proizvod ovih dvaju brojeva), brojevi i i k su jednoznačno određeni proporcijama $p:q = i:j$ i $r:s = j:k$.[14] Ovaj način sabiranja (kombinacije) dvaju intervala da bi se dobio novi interval — njihov zbir, nastao je iz potreba muzičke teorije. Zaista, ako je zategnuta žica dužine i, ton koji proizvodi žica dužine j odgovaraće intervalu $p:q$, a ton koji proizvodi žica dužine k odgovaraće intervalu $r:s$ pa se sabiranjem (kombinacijom) intervala $p:q$ $(= i:j)$ i $r:s$ $(= j:k)$ dobija interval $i:k$.



Slika 12.3.1. Interval $i:k$ je zbir intervala $p:q$ i $r:s$

[13] Ovaj odnos naziva se i *superpartikularnim*, u skladu sa latinskim prevodom.

[14] U nameri da u stavu SC.7 sabire intervale $2:1$ i $3:2$, Euklid zapravo nalazi da brojevi 6, 3 i 2 zadovoljavaju uslove $2:1 = 6:3$ i $3:2 = 3:2$, pa je zbir intervala $2:1$ i $3:2$ interval $6:2$, tj. $3:1$. O ovome će biti reči u odeljku 12.6.



SLIKA 12.3.2. Interval $i : j$ je razlika intervala $p : q$ i $r : s$

Slično, kada oduzima interval $r : s$ od intervala $p : q$, Euklid nalazi brojeve i, j i k takve da je

$$p : q = i : k \quad \text{i} \quad r : s = j : k$$

i zaključuje da je interval $i : j$ razlika ovih dvaju intervala (slika 12.3.2). Ako se uzme da je k najmanji zajednički sadržalac brojeva q i s (ili da je proizvod ovih dvaju brojeva) brojevi i i j su jednoznačno određeni proporcijama $p : q = i : k$ i $r : s = j : k$.[15] Zato, kakvigod da su intervali $p : q$ i $r : s$, njihova razlika postoji.

12.4. Udvostručavanje i polovljenje intervala

U posebnom slučaju, kada hoće interval $p : q$ da sabere sa samim sobom (i time da ga udvostruči), Euklid nalazi brojeve i, j i k takve da je

$$p : q = i : j = j : k$$

i kazuje da se interval $i : k$ dobija kada se interval $p : q$ *uzme dva puta*.[16] S obzirom na to da je $p : q = p^2 : pq = pq : q^2$ (VII.17–18), može se uzeti da je $i = p^2$, $j = pq$, a $k = q^2$, pa se udvostručenjem intervala $p : q$ dobija interval $p^2 : q^2$. Drugim rečima, $(p : q)^2 = p^2 : q^2$. Međutim, lako je dokazati da će ista relacija biti zadovoljena i ako su p i q bilo koje veličine, a ne samo brojevi. Štaviše, dokaz ove tvrdnje ostaje isti kao i u slučaju brojeva, s tom razlikom što se u njemu, umesto aritmetičkog stava VII.17 upotrebljava geometrijski stav V.15.[17] Sada je jasno šta Euklidu daje pouzdanje da u definiciji V. def. 9 može da pretpostavi da, *ako su tri veličine (neprekidno) proporcionalne* (tj. ako je $i : j = j : k$), *onda je razmera prve veličine prema trećoj* ($i : k$) dvaput viša *od razmere prve veličine prema drugoj* ($i : j$).

Štaviše, u definiciji V. def. 10 Euklid na sličan način definiše tri puta višu razmeru, i tu se ne zaustavlja već dodaje da se ovaj pojam može uopštiti i na razmere proizvoljne dužine. Prema ovoj definiciji, *ako su četiri veličine (neprekidno) proporcionalne, kaže se da je razmera prve veličine prema četvrtoj* triput viša *od razmere prve veličine prema drugoj; i tako uvek, na sličan način, dok postoji proporcionalnost.* Uverenje da ova definicija ima smisla počiva na znanju koje dolazi

[15] U stavu SC.8 on upotrebljava prethodni postupak da bi interval $4 : 3$ oduzeo od intervala $3 : 2$ i dobio interval $9 : 8$.

[16] Na primer, u stavu SC.1 on na ovaj način udvostručava umnožak $1 : n$ i dobija umnožak $1 : n^2$.

[17] Stav V.15 prema kojem je $a : b = ma : mb$ (a, b i m su duži), neposredno se dokazuje upotrebom antifairetičke definicije proporcije. Videti odeljak 8.1.

iz računa intervala. Zaista, budući da je $p : q = p^3 : p^2q = p^2q : pq^2 = pq^2 : q^3$ (VII.17–18), utrostručenjem intervala $p : q$ dobija se interval $p^3 : q^3$, a zatim, njegovim učetvorostručenjem interval $p^4 : q^4$ itd. Drugim rečima, $(p : q)^3 = p^3 : q^3$, $(p : q)^4 = p^4 : q^4$ itd. Sada je jasno da deveta u deseta definicija pete knjige *Elemenata* imaju korene u pitagorejskoj teoriji muzike. Štaviše, i želja da se se u osmoj knjizi formulišu i dokažu stavovi o neprekidnim proporcijama koje nisu samo dužine 3 ili 4 već proizvoljne dužine n, dolazi iz potrebe da se nađe muzički interval koji je n puta ponovljeni zadati interval.[18]

Pisac *Kanonskog preseka* rešava i obratni problem u nameri da zadati interval podeli na n jednakih intervala. Kada hoće da prepolovi interval $p : q$, on traži brojeve i, j i k takve da je $p : q = i : k$ i $i : j = j : k$ i nalazi da je $i : j$ tražena polovina. Da li je interval $p : q$ moguće prepoloviti, ili nije, zavisi od toga da li postoji, ili ne postoji, srednja proporcionala za brojeve p i q, a stoga i za brojeve i i k (VIII.8). Ako brojevi p i q nisu slični površinski brojevi, onda ne postoji njihova srednja proporcionala (VIII.20).[19] Kako se dva slična površinska broja odnose kao kvadratni broj prema kvadratnom broju (VIII.26), onda brojevi p i q moraju biti proporcionalni dvama kvadranim brojevima da bi postojao njihov srednje proporcionalni broj. Obratno, ako su brojevi p i q proporcionalni dvama kvadratnim brojevima p'^2 i q'^2, budući da za p'^2 i q'^2 postoji srednje proporcionalni broj $p'q'$ (VIII.11), i za p i q će postojati srednje proporcionalni broj (VIII.8). Dakle, interval $p : q$ je moguće prepoloviti ako i samo ako su brojevi p i q proporcionalni dvama kvadratnim brojevima. Ovu činjenicu Euklid ne dokazuje ali ona je jednostavna posledica stavova o neprekidnim proporcijama iz osme knjige *Elemenata*. Opštije, interval $p : q$ je moguće podeliti na tri jednaka dela ako i samo ako su brojevi p i q proporcionalni dvama kubnim brojevima, na četiri jednaka dela ako i samo ako su brojevi p i q proporcionalni četvrtim stepenima dvaju brojeva itd.

Sada je jasno zašto je teorija neprekidnih proporcija koja je sadržana u osmoj knjizi *Elemenata*, bila u ranom periodu od posebnog značaja. Razvijena je da bi se moglo računati sa intervalima u cilju razvoja muzičke teorije. U ovoj teoriji stav VIII.8 je nezaobilazan. Njegova neposredna posledica je stav SC.3 koji Boetije pripisuje Arhiti, tako da se i stav VIII.8 može pripisati Arhiti budući da se podela proizvoljnog intervala na jednake intervale temelji na upotrebi ovog stava. Međutim, upotreba neprekidnih proporcija nije se zaustavila samo na rešavanju muzičkih problema. Zahvaljujući njoj došlo se do rešenja nekih problema koji su tištali matematiku petog veka stare ere. Arhita je rešio problem udvostručenja kocke nalazeći dve srednje proporcionale za dve zadate duži,[20] a Teetet je, upotrebljavajući stavove o neprekidnim proporcijama, utvrdio da je kvadratni koren nekog broja racionalan ako i samo ako je taj broj potpuni kvadrat.

[18] U stavu SC.9 Euklid šest puta ponavlja isti interval 8 : 9.

[19] Prema Boetijevoj tvrdnji, Arhita je umeo da dokaže da se superpartikularni (epimorički) interval ne može prepoloviti [Diels, 47.A19]. Euklid to dokazuje u stavu SC.3.

[20] Diels, 47,A14.

12.5. Stavovi SC.1–5

Stavovi sa početka *Kanonskog preseka* odnose se na sabiranje i oduzimanje umnožaka i epimoričkih intervala. U prvim dvama od njih autor ove rasprave tvrdi sledeće:

SC.1: *Ako se interval* $(1 : n)$ *koji je umnožak uzme dva puta, tako dobijeni interval takođe će biti umnožak* $(1 : k)$.

SC.2: *Ako je neki interval koji je uzet dva puta umnožak* $(1 : k)$, *onda je i on umnožak* $(1 : n)$.

U dokazu stava SC.1 Euklid pretpostavlja da je zadati interval $p : q$ umnožak, tj. da postoji broj n takav da je $q = np$, a da je r broj takav da je $p : q = q : r$.[21] Zatim primećuje da p deli broj q, a kako je $p : q = q : r$, q deli r, pa zato i p deli r (VII. def. 21). Tada postoji broj k takav da je $r = kp$, pa je i interval $p : r$ umnožak.

Obratno, u dokazu stava SC.2 Euklid pretpostavlja da je zadat interval $p : q$, da je $p : q = q : r$, a da je $r = kp$. Budući da p deli r, deliće i q (VIII.7), pa postoji broj n takav da je $q = np$.

Kako možemo razumeti stavove SC.1 i SC.2? U prvom od njih Euklid dokazuje da, ako je interval $p : q$ umnožak, onda je i dva puta uzeti isti interval — $p^2 : q^2$, takođe umnožak. Drugim rečima, ako je $p : q = 1 : n$, onda postoji broj k takav da je $p^2 : q^2 = 1 : k$, tj. ako je $q = np$, tada je i $q^2 = kp^2$. Zato, ako p deli q, onda p^2 deli q^2. Stav SC.2 je obrat prvog stava: ako je $p^2 : q^2 = 1 : k$, onda postoji broj n takav da je $p : q = 1 : n$, tj. ako je $q^2 = kp^2$, tada je i $q = np$. Drugim rečima, ako broj p^2 deli q^2, onda i p deli q.

Stavove SC.1 i SC.2 sada možemo iskazati u jedoj rečenici: broj p deli broj q ako i samo ako broj p^2 deli broj q^2. Upravo ovu tvrdnju Euklid dokazuje u *Elementima* u stavu VIII.14. Kao i u dokazu stava VIII.14, u Euklidovim dokazima stavova SC.1–2 ključna je upotreba stava VIII.7.

Dakle, u prvim dvama stavovima *Kanonskog preseka* dokazana je Teetetova teorema upotrebom istih argumenata koji vode dokazu stava VIII.14. Razlika je samo u jeziku koji je u *Kanonskom preseku* prilagođen muzičkoj teoriji.

Sudeći prema jednoj Boetijevoj opasci, stav koji dolazi za njima — SC3, nije Teetetov, već Arhitin.[22] Prema ovom stavu:

SC.3: *Između dvaju brojeva koji su u* epimoričkom *odnosu nema srednje proporcionalnih brojeva.*

Njegov dokaz je jednostavna posledica Euklidovog stava VIII.8. Zaista, ako između dvaju brojeva koji su u epimoričkom odnosu $(n+1) : n$ ima srednje proporcionalnih brojeva, onda ih isto toliko ima i između brojeva n i $n + 1$, a između njih uopšte nema brojeva. Međutim, Euklidov dokaz stava SC.3 je malo detaljniji. U njemu on citira stav VIII.8 ali najpre primećuje da je jedinica jedina zajednička mera dvaju najmanjih brojeva koji su u epimoričkom odnosu. Zbog toga se ovi brojevi

[21] Razume se, takav broj postoji jer je $p : np = np : n^2p$.

[22] Diels, 47.A19. Iscrpnu analizu dokaza ovog stava načinio je Knor [**29**, str. 212–225]. Videti i [**23**, vol. I, str. 215–216].

razlikuju za jedan, pa između njih nema srednje proporcionalnih brojeva jer, ako bi postojao, on bi delio jedinicu, što nije moguće.

Arhitin dokaz koji citira Boetije je sličan Euklidovom. I u njemu je upotreba stava VIII.8 od ključnog značaja. Sva razlika ovog dokaza od dokaza stava SC.3 je u tome što Arhita upotrebom indirektne metode dokazuje da su n i $n+1$ najmanji brojevi u epimoričkom odnosu. On pretpostavlja da su to brojevi n i $n+l$ $(l \neq 1)$, i primećuje da tada l deli i n i $n+l$.[23] Zato n i $n+l$ nisu međusobno prosti pa nisu ni najmanji brojevi u toj proporciji (VII.22).[24] Dakle, $l = 1$.

Neposrednom primenom prvih triju stavova *Kanonskog preseka* Euklid dokazuje stavove SC.4 i SC.5. U prvom od njih on tvrdi da:

> **SC.4:** *Ako se udvostruči interval koji nije umnožak, dobiće se interval koji nije ni umnožak ni epimorički.*

U dokazu on pretpostavlja da interval $p : q$ nije umnožak pa, na osnovu stava SC.2, zaključuje da ni udvostručeni interval $p^2 : q^2$ nije umnožak. Nije ni epimorički na osnovu stava SC.3, jer za udvostručeni interval postoji srednja proporcionala.[25]

Ako interval $p^2 : q^2$ nije umnožak, onda na osnovu stava SC.1 ni $p : q$ nije umnožak pa je time dokazan i Euklidov stav SC.5 u kojem se tvrdi da:

> **SC.5:** *Ako interval dobijen udvostručenjem zadatog intervala nije umnožak, onda ni zadati interval nije umnožak.*

Razume se, kao što je stav SC.1 ekvivalentan tvrdnji da *strana meri stranu ako kvadrat meri kvadrat* koju Euklid dokazuje u stavu VIII.14, tako je i ovaj stav SC.5 ekvivalentan tvrdnji koju Euklid dokazuje u stavu VIII.16, prema kojoj *strana ne meri stranu ako kvadrat ne meri kvadrat*. Da važi i obrat ove tvrdnje Euklid je utvrdio u stavu SC.4 dokazujući da će se udvostručavanjem intervala koji nije umnožak dobiti interval koji takođe nije umnožak. Međutim, u istom stavu Euklid dokazuje da se udvostručavanjem intervala koji nije umnožak dobija interval koji nije ni epimorički. Da bi ovo dokazao Euklid upotrebljava Arhitin stav SC.3. Dakle, stav SC.4 je hibrid koji je nastao spajanjem jednog stava koji je dokazao Teetet (VIII.16) i jednog koji je posledica stava koji je dokazao Arhita.

Preostali aritmetički stavovi *Kaknonskog preseka* — SC.6–9, odnose se na konkretne intervale: hemiolički (3 : 2), epitritički (4 : 3) i epogdoički (9 : 8).

12.6. Stavovi SC.6–9

U stavovima SC.6–8 Euklid razvija račun sa epimoričkim intervalima — 3 : 2, 4 : 3, 9 : 8, i umnošcima 2 : 1 i 3 : 1. U šestom stavu on sabira intervale 3 : 2 i 4 : 3 i dobija interval 2 : 1, u sedmom sabira intervale 2 : 1 i 3 : 2 i dobija interval 3 : 1, a u osmom on oduzima interval 4 : 3 od intervala 3 : 2 i dobija interval 9 : 8.

U prvom od ovih stavova Euklid tvrdi da:

---

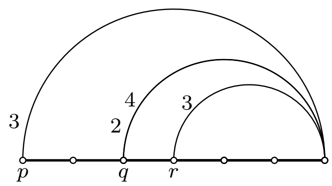
[23] Ovu osobinu epimoričkog odnosa ističe i Nikomah iz Gerase. Videti [**43**, XIX.1].

[24] Arhita kazuje da „brojevi koji su najmanji u istoj proporciji s drugim brojevima, uzajamno su prosti i razlikuju se samo za ... jedinicu“, odakle možemo zaključiti da je njemu bio poznat stav VII.22.

[25] Srednja proporcionala za brojeve p^2 i q^2 je broj pq (VIII.11).

SC.6: *Dvostruki interval je* kombinacija *dvaju najvećih epimoričkih intervala* — hemioličkog $(3 : 2)$ *i* epitritičkog $(4 : 3)$.

U dokazu Euklid pretpostavlja da je odnos dveju duži p i q hemiolički, tj. da je $p : q = 3 : 2$, i zaključuje da je tada duž $p - q$ trećina duži p, a polovina duži q. Na isti način, ako je odnos duži q i r epitritički, tj. ako je $q : r = 4 : 3$, onda je duž $q - r$ četvrtina duži q, a trećina duži r. Kako je $q - r$ četvrtina duži q, a $p - q$ je polovina iste duži, $q - r$ će biti polovina duži $p - q$. Dakle, budući da je $p - q$ trećina duži p, $q - r$ će biti šestina duži p pa je r polovina duži p. Zato je zbir (kombinacija) hemioličkog i epitritičkog intervala, dvostruki interval.



SLIKA 12.6.1. SC.6

Dakle, dokazavši da je $q - r$ šestina duži p, Euklid zapravo nalazi da je $p : q = 3 : 2 = 6 : 4$, pa sabiranjem intervala $p : q = 6 : 4$ i $q : r = 4 : 3$ dobija interval $p : r = 6 : 3$, tj. $p : r = 2 : 1$. Međutim, u svom dokazu on koristi očigledna sredstva predstavljajući intervale odnosima duži, stavljajući nam na znanje da njegov račun intervala ima svoj izvor u muzici.

Zaista, ako osnovni ton proizvodi žica dužine p, ton koji proizvodi žica dužine q biće kvinta (koja je posledica hemioličkog intervala $p : q = 3 : 2$). Ako se kobilica stavi u tačku r, onda će, u odnosu na ton koji proizvodi žica dužine q, ton koji proizvodi žica dužine r biti kvarta (koja je posledica epitritičkog intervala $q : r = 4 : 3$). Međutim, u odnosu na ton koji proizvodi žica dužine p, ista žica dužine r proizvodiće ton koji je oktava (koja je posledica dvostrukog intervala $p : r = 2 : 1$). Stoga je zbir kvarte i kvinte — oktava, baš kao što kazuje Filolaj u fragmentu koji prenosi Stobej.[26] Sada je jasno da, za razliku od aritmetičkih knjiga *Elemenata* u kojima nema upotrebe očiglednih sredstava, *Kanonski presek* eksplicitno sadrži primese konkretnog.

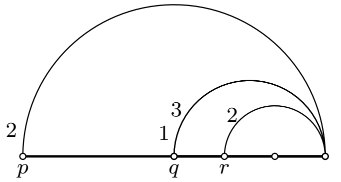
Na isti način kao u prethodnom stavu, Euklid u stavu SC.7 dokazuje da:

SC.7: *Dvostruki* $(2 : 1)$ *i hemiolički interval* $(3 : 2)$ *sabiranjem daju trostruki interval* $(3 : 1)$.

On pretpostavlja da je $p : q = 2 : 1$ tj. da je $p = 2q$, i da je $q : r = 3 : 2$ tj. da je $2q = 3r$, i zaključuje da je $p = 3r$, tj. da je $p : r = 3 : 1$. Zato je zbir dvostrukog i hemioličkog intervala, trostruki interval.

I ilustracija ovog stava slična je ilustraciji stava SC.6.

[26] Diels, 44.B6.

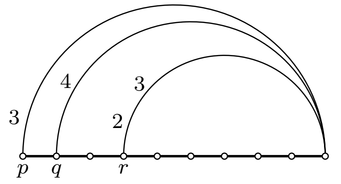


SLIKA 12.6.2. SC.7

Dokazujući stav SC.8 prema kojem:

> **SC.8:** *Ako se epitritički interval* (4 : 3) *oduzme od hemioličkog* (3 : 2), *ostatak je* epogdoički (9 : 8),

pisac *Kanonskog preseka* oduzima interval 4 : 3 od intervala 3 : 2 i dobija interval 9 : 8.



SLIKA 12.6.3. SC.8

U dokazu on pretpostavlja da je odnos dveju duži p i r hemiolički, tj. da je $p : r = 3 : 2$, i zaključuje da je tada $8p = 12r$, tj. $p : r = 12 : 8$. Na isti način, ako je odnos duži q i r epitritički, tj. ako je $q : r = 4 : 3$, onda je $9q = 12r$, tj. $q : r = 12 : 9$. Zato je $8p = 9q$, tj. $p : q = 9 : 8$ pa je odnos duži p i q epogdoički.

U stavu SC.9 prema kojem:

> **SC.9:** *Šest epogdoičkih intervala* (9 : 8) *veće je od dvostrukog intervala* (2 : 1),

pisac *Kanonskog preseka* zapravo dokazuje da je $(9 : 8)^6 > 2$. Njegov račun koji dovodi do ovog rezultata veoma je zanimljiv. U tu svrhu on traži sedam neprekidno proporcionalnih brojeva koji su u razmeri 8 : 9. Upotrebom stava VIII.2 on nalazi da je

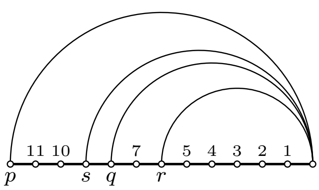
$$8^6 : 9 \cdot 8^5 = 9 \cdot 8^5 : 9^2 \cdot 8^4 = 9^2 \cdot 8^4 : 9^3 \cdot 8^3 = 9^3 \cdot 8^3 : 9^4 \cdot 8^2 = 9^4 \cdot 8^2 : 9^5 \cdot 8 = 9^5 \cdot 8 : 9^6.$$

pa su $8^6 = 262.144$, $9 \cdot 8^5 = 294.912$, $9^2 \cdot 8^4 = 331.776$, $9^3 \cdot 8^3 = 373.248$, $9^4 \cdot 8^2 = 419.904$, $9^5 \cdot 8 = 472.372$, $9^6 = 531.441$ traženi brojevi. Međutim, $2 \cdot 8^6 = 2 \cdot 262.144 = 524.288 < 531.441 = 9^6$, pa je $9^6 : 8^6 > 2 : 1$. Kako je šest puta ponovljeni interval 9 : 8, tj. $(9 : 8)^6$, zapravo interval $9^6 : 8^6$ biće i $(9 : 8)^6 > 2 : 1$, pa je šest epogdoičkih intervala veće od dvostrukog intervala.

12.7. Celi tonovi i polutonovi

Prvih pet stavova *Kanonskog preseka* su opšti stavovi o intervalima. Oni se odnose na umnoške i epimoričke intervale. Stavovi koji slede, SC.6–8 nisu opšteg karaktera i odnose se na intervale: $3:2$, $4:3$ i $9:8$. Oni ne zavise od teorema koje im prethode i ne zahtevaju znanje složenih stavova teorije neprekidnih proporcija, kao što su VIII.7 ili VIII.8. Njihovi dokazi su očigledni jer je svaki od njih lako ilustrovati slikom ili demonstracijom na monohordu. Od njih ipak odudara stav SC.9 u čijem dokazu se upotrebljava stav VIII.2 koji se odnosi na neprekidne proporcije proizvoljne dužine.

Stavovi SC.6–8 su jednostavniji od stavova koji im prethode u *Kanonskom preseku* i svakako stariji od njih. To potvrđuje sačuvani fragment iz Filolajevog dela u kojem se pominju tvrdnje koje Euklid dokazuje u stavovima SC.6 i SC.8.[27] Doduše, za razliku od Euklida koji u *Kanonskom preseku* pravi razliku između muzičkog intervala (koji je odnos dužina žica monohorda) i aritmetičkog pojma intervala (koji je odnos dvaju brojeva), Filolaj upotrebljava pojmove muzičke teorije kao da su aritmetički. Tako, umesto da sabira hemiolički i epitritički interval da bi dobio dvostruki interval kao što će kasnije Euklid učiniti dokazujući stav SC.6, Filolaj sabira kvintu i kvartu i dobija oktavu.[28] Štaviše, on ističe da je ovo sabiranje komutativno. Time nam stavlja na znanje da su sredinom petog veka stare ere pitagorejci već imali razvijen račun sa intervalima. Prema Filolajevom nalazu, ako



Slika 12.7.1. Zbir intervala $p:s$ i $s:r$ jednak je zbiru $p:q$ i $q:r$

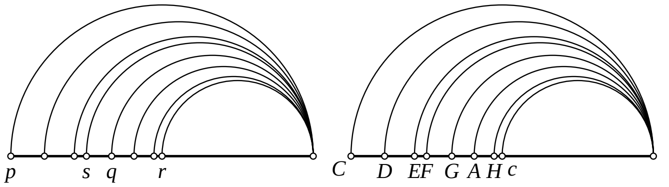
(najduža) žica koja je dužine p proizvodi najniži ton, a (srednja) žica koja je dužine s proizvodi srednji ton koji je za kvartu viši, i ako (najkraća) žica koja je dužine r, proizvodi najviši ton koji je za kvintu viši od tona koji proizvodi žica dužine s, onda je ton koji proizvodi najkraća žica, za oktavu viši od tona koji proizvodi

[27] Prema Filolajevim rečima:

> *Potpuna harmonija obuhvata kvartu i kvintu. A kvinta je veća od kvarte za ceo ton. Jer od najnižeg tona do srednjeg je jedna kvarta, a od srednjeg do najvišeg je jedna kvinta, a od najnižeg do terce jedna kvarta, a od terce do najvišeg tona jedna kvinta; između srednjeg tona i terce je ceo ton. Kvarta ima odnos* $4:3$*, kvinta* $3:2$*, oktava* $2:1$*. Tako se oktava sastoji iz pet celih tonova i dva polutona, kvinta iz tri cela tona i jednog polutona, a kvarta iz dva cela tona i jednog polutona. (Diels, 44.B6)*

[28] Filolaj koristi termine *harmonia*, *syllaba* i *di' oxeian*, a Nikomah kazuje da su ovo nazivi za oktavu, kvartu i kvintu koji su koristili stari mislioci. Videti [**26**, str. 146–147].

najduža žica. Zato se sabiranjem kvarte i kvinte dobija oktava. Drugim rečima, ako je $p : s = 4 : 3$ i $s : r = 3 : 2$, tada je $p : r = 2 : 1$. Međutim, prema njegovoj tvrdnji, ako je q dužina treće žice (terce) koja proizvodi za kvintu viši ton od žice dužine p, tada je ton koji proizvodi žica dužine r za kvartu viši od tona koji proizvodi (treća) žica koja je dužine q. Drugim rečima, ako je $p : q = 3 : 2$ i $q : r = 4 : 3$, tada je $p : r = 2 : 1$,[29] pa se sabiranjem kvinte i kvarte opet dobija oktava. Dakle, ovo sabiranje je komutativno.



Slika 12.7.2. Oktava

Filolaj dodaje da je odnos $s : q$ ceo ton. Međutim, odnos dužina s i q je $9 : 8$ pa ceo ton proizvodi interval $9 : 8$. Sada je jednostavno izračunati da, ako se od intervala $4 : 3$ oduzmu dva intervala $9 : 8$ preostaje interval $256 : 243$, a ako se od intervala $3 : 2$ oduzmu tri intervala $9 : 8$, opet preostaje interval $256 : 243$. Dakle, interval $2 : 1$ može se podeliti na pet intervala $9 : 8$ i dva intervala $256 : 243$. Zato se, kao što tvrdi Filolaj, oktava sastoji iz pet celih tonova i dva polutona.

Filolaj ne objašnjava kakav je raspored celih tonova i polutonova u njegovoj skali. Međutim, u raspravi o sastavu duše sveta Platon u *Timaju* (36 b) popunjava ovu prazninu opisujući sledeći raspored intervala:[30]

$$9 : 8,\ \ 9 : 8,\ \ 256 : 243,\ \ 9 : 8,\ \ 9 : 8,\ \ 9 : 8,\ \ 256 : 243.$$

Dakle, interval kvarte $(p : s)$ se sastoji iz dva intervala $9 : 8$ za kojima sledi interval $256 : 243$, a interval kvinte $(s : r)$, iz tri intervala $9 : 8$ za kojima sledi ostatak $256 : 243$. Ovo je u skladu sa Filolajevom strukturom skale koju on na početku sačuvanog fragmenta naziva *harmonijom*. Ako je C ton koji proizvodi žica dužine p, onda su tonovi koji proizvode žice raspoređene u skladu sa Platonovim rasporedom intervala, redom, C, D, E, F, G, A, H, c.

Ako se između tonova C i D, D i E, zatim između F i G, G i A, A i H dodaju polutonovi (crne dirke na klavijaturi) dobiće se lestvica koja se sastoji iz dvanaest polutonova. Ovako dobijeni tonovi i polutonovi, za nevolju, imaju jedno loše svojstvo. Zbir dvaju polutonova je manji od jednog tona jer je $(245/243)^2 = 1,110 < 1,125 = 9/8$.[31]

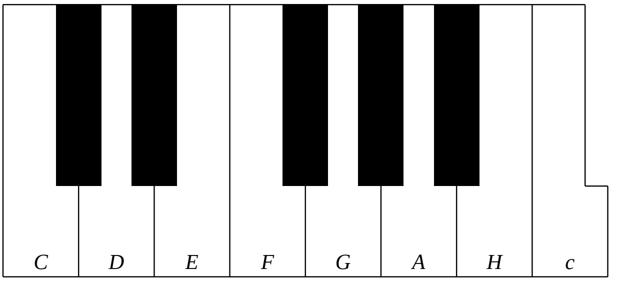
Razume se, ovo loše svojstvo moglo je biti poznato Filolaju. On je mogao znati da je zbir šest celih tonova veći od oktave kao što Euklid dokazuje u stavu SC.9, i

[29] Ovu tvrdnju Euklid dokazuje u stavu SC.6.

[30] U raspravi o duši sveta Platon tvrdi da se interval $4 : 3$ sastoji iz dva intervala $9 : 8$ i ostatka $256 : 243$, ne dajući bilo kakvo objašnjenje o motivima svog razmatranja koji očigledno dolaze iz muzičke teorije. O ovome raspravlja Hafman [**26**, str. 149–150].

[31] Ovaj problem rešen je *dobrim temperovanjem* tek u dvadesetom veku. Videti [**50**, str. 55].

da se oktava sastoji iz pet celih tonova i dva polutona, a odatle neposredno sledi da je zbir dvaju polutonova manji od jednog tona.



SLIKA 12.7.3. Klavijatura

POGLAVLJE 13

Antički dokazi postojanja nesamerljivih veličina

U Euklidovim *Elementima* nema eksplicitno formulisnog i dokazanog aritmetičkog stava prema kojem ne postoje dva kvadratna broja od kojih je jedan dvostruko veći od drugog. Nema ni dokaza geometrijske tvrdnje da su stranica i dijagonala kvadrata dve nesamerljive veličine. Odsustvo dokaza neke od ovih dveju tvrdnji iz kojih neposredno sledi da kvadratni koren broja dva nije racionalan broj, moralo je izazvati nedoumice kod Euklidovih sledbenika i komentatora. Zato je već u antici bilo pokušaja da se ovaj nedostatak prevaziđe dodavanjem novog stava *Elemenatima*. Tako je nastao stav X.117 koji je formulisan kao geometrijski stav o nesamerljivosti stranice i dijagonale kvadrata, ali se u njegovom dokazu upotrebljavaju argumenti koji dolaze iz aritmetike. Ovaj stav se ipak izostavlja u savremenim izdanjima *Elemenata* budući da je nedvosmisleno utvrđeno da je interpolacija.[1]

Međutim, ispostavilo se da nije bilo potrebe za ovom intervencijom na Euklidovom tekstu budući da, iako je to dugo ostalo neprimećeno, Euklid u stavu VIII.14 dokazuje mnogo opštiju tvrdnju prema kojoj nijedan broj koji nije potpun kvadrat, pa zato ni broj dva, nema racionalan kvadratni koren.[2] Zbog toga je razumljivo zašto Euklid ne oseća potrebu da posebno istakne stav koji se odnosi na iracionalnost kvadratnog korena broja dva.

13.1. Antički izvori

Svi antički izvori koji nas obaveštavaju o otkriću postojanja iracionalnih veličina veoma su zakasneli budući da su nastali bar sedam vekova nakon otkrića, ali su svi saglasni u tome da otkriće pripada pitagorejcima. Štaviše, iz njih saznajemo i imena dvojice mogućih autora ovog otkrića — Pitagore i Hipasa. Međutim, sačuvana literatura je ipak ostala nedorečena, tako da ostaje nerazjašnjeno ko je zaista, i kada, došao do ovog važnog otkrića. Ni na pitanje kako je izgledao najstariji dokaz, sačuvana literature ne daje jasan odgovor.

Iz *Komentara X knjige Euklidovih Elemenata* koji se pripisuju Paposu Aleksandijskom, saznajemo samo to da su se pitagorejci prvi bavili samerljivim i nesamerljivim, racionalnim i iracionalnim veličinama.[3] Bližih objašnjenja o otkriću

[1] O ovome opširnije raspravlja Knor [**29**, str. 229].

[2] Videti [**36**].

[3] Prema Paposovim rečima [**44**, §1]:

> ... izvorno znanje (o samerljivim i nesamerljivim, i racionalnim i iracionalnim veličinama) dolazi od pitagorejaca.

nema. Međutim, nepoznati autor jedne sholije desete knjige *Elemenata*,[4] koji najverovatnije sledi Paposa, daje bliža objašnjenja. Pored toga što tvrdi da su pitagorejci, baveći se proučavanjem brojeva, prvi došli do otkrića nesamerljivih veličina, on objašnjava da su do otkrića došli zahvaljujući tome što su umeli da naprave razliku između brojeva, koji uvek imaju zajedničku meru, i veličina koje je ne moraju imati.[5] On dodaje i to da je ovo otkriće neko iz bratstva saopštio „drugima" i da ga je, zbog toga, zadesila zla sudbina — stradao je u brodolomu. O tome ko je stradao u brodolomu sholijasta ne kazuje ništa.

U spisu *O Pitagorinom životu* Jamblih daje bliže objašnjenje o pitagorejcu koga je zadesila ova zla sudbina. On potvrđuje legendu o brodolomu, ali dodaje i da se pripoveda kako je verolomni pitagorejac za kaznu samo izbačen iz bratstva nakon čega mu je za života napravljen nadgrobni spomenik. Međutim, on otkriva i mogućeg autora otkrića, Hipasa iz Metaponta, tvrdeći da je on stradalnik o kojem govori nepoznati sholijasta. Zapravo, do Jambliha su dospele bar dve verzije ovog događaja tako da on iznosi dva moguća razloga Hipasovog stradanja. Jedan je iznošenje van bratstva tajne o postojanju nesamerljivih veličina, a drugi, tajne o konstrukciji pravilnog dodekaedra. Na posletku, on dodaje da je Hipas drugima ipak saopštio Pitagorinu, a ne svoju nauku.[6] Zato se otkriće nesamerljivih ipak ne može pripisati Hipasu. U skladu sa time je i Proklova opaska da oba otkrića koja pominje Jamblih u sačuvanom fragmentu, i otkriće nesamerljivih i konstrukcija pravilnog dodekaedra, zapravo pripadaju samom Pitagori.[7] Međutim, imajući

---

[4] Sholija X. no. i Hajbergovog izdanja *Elemenata* o kojoj je ovde reč, najverovatnije pripada antici. Videti [**52**, vol. I, str. 215–217] i [**29**, str. 50, f. 1].

[5] Prema rečima autora sholije:

> *... pitagorejci su bili prvi kojima se pripisuje istraživanje nesamerljivosti, otkrivši je zahvaljujući tome što su se bavili posmatranjem brojeva; jer, dok je jedinica zajednička mera svih brojeva oni nisu uspeli da utvrde da postoji zajednička mera svih veličina. To je stoga što svi brojevi kakvigod da su i kakogod podeljeni imaju ostatak koji se više ne može deliti, a sve veličine su deljive* neograničeno *i nikada ni jedna nije toliko mala da ne dopušta dalju deobu jer je ostatak jednako deljiv neograničeno.*
> *... prvi pitagorejac koji je ovu istinu otkrio drugima, nestao u brodolomu.*

[6] Prema Jamblihovim rečima:

> *... o Hipasu pripovedaju da je bio pitagorejac te da je poginuo u brodolomu kao skrnavitelj zato što je prvi objavio i opisao sferu sa dvanaest petouglova, ... a bio je to dodekaedar, jedno od takozvanih čvrstih geometrijskih tela, ...*
> *... a neki su pak rekli da je taj udes snašao onoga koji je ispripovedao drugima o iracionalnim brojevima i nesamerljivosti... Kažu svakako da je pitagorejac Hipas budući da je bio kriv što je u spisima jasno izneo Pitagorinu nauku, oteran iz zajednice i da mu je napravljen nadgrobni spomenik kao da se upokojio.* (Diels, *Predsokratovci*, 18.4.)

[7] Prema Proklovim rečima

> *on je otkrio postojanje iracionalnih (veličina) i strukturu kosmičkih tela.* (Proklo, 65.19.)

u vidu složenost klasičnih dokaza na koje upućuju sačuvani antički izvori,[8] ostaje pitanje da li je uopšte bilo moguće da neko od njih dvojice dođe do otkrića nesamerljivih veličina.

13.2. Teodorovi primeri

Najstariji zapis o nekim konkretnim primerima iracionalnih veličina dolazi od Platona. U *Teetetu* on prenosi Teetetovu pripovest da je Teodor iz Kirene umeo da dokaže da kvadrati celobrojnih površina 3 i 5 stopa imaju ivice koje nisu samerljive sa ivicom jediničnog kvadrata i dodaje da je Teodor iz nekog razloga sa svojim razmatranjem zastao kod kvadrata površine 17 stopa.[9] Zato se, ako je verovati Platonu, Teodoru može pripisati otkriće da kvadratni korenovi nekih brojeva — 3, 5, sve do 17, nisu racionalni brojevi. Međutim, Platonov Teetet ne kazuje zašto je Teodor zastao kod broja 17. Iz njegovih reči ne može se pouzdano zaključiti da li je zastao zato što je 17 prvi broj u nizu $3, 5, \ldots, 17, \ldots$, za koji nije umeo da dokaže da je njegov kvadratni koren iracionalna veličina ili je to poslednji broj za koji je to uspeo da dokaže. U *Teetetu* nema reči o tome kako je Teodorov dokaz mogao izgledati te mi na osnovu ovog Platonovog spisa ne možemo saznati čak ni to da li se on temeljio na argumentima koji dolaze iz aritmetike ili iz geometrije. Platonov Teetet jednostavno ne daje bliža objašnjenja. On se i ne osvrće na kvadratni koren broja 2. Razlog može biti samo okolnost da je činjenica da kvadratni koren broja dva nije racionalan broj, i pre Tedora bila već dobro poznata.

Budući da je razgovor koji je opisan u *Teetetu* istorijski smešten u 399. godinu stare ere, neposredno pred suđenje i smrt Sokratovu, možemo zaključiti da je, prema Platonovoj hronologiji, Teodor do svojih primera došao najkasnije do početka četvrtog veka. Tada je imao oko sedamdeset godina.[10] Međutim, znajući da starost nije životno doba u kojem se mogu očekivati značajna otkrića u matematici, pre će biti da Teodorovo otkriće treba pomeriti koju deceniju ranije, bliže vremenu kada je bio u naponu snage.

Proklova tvrdnja da ovo otkriće pripada Pitagori izazvala je nedoumicu zbog toga što su klasični aritmetički i geometrijski dokaz ove tvrdnje, koje pominje antička literatura, neprikladni za objašnjenje kako se do ovog otkrića moglo doći u tako ranoj fazi pitagoreizma. Zato su pojedini autori stali na stanovište da Proklo tvrdi je Pitagora zapravo otkrio teoriju proporcija, a ne iracionalnih veličina. Videti i [**52**, vol. I, str. 149, f. c] i [**23**, vol. I, str. 84].

[8] Svaki od klasičnih dokaza, i aritmetički i geometrijski, u sebi sadrži rafinirani pristup matematičkim problemima koji podrazumeva upotrebu indirektnog dokaza — reductio ad absurdum, ili beskonačnog ponavljanja nekog geometrijskog postupka. O klasičnom aritmetičkom dokazu biće više reči u odeljku 13.3, a o geometrijskom u odeljku 13.5.

[9] Prema Platonovim rečima Teodor je:

> *... crtao nešto o kvadratima pokazujući da kvadrat površine od tri stope i kvadrat površine od pet stopa nisu po dužini stranica samerljivi sa stranicom kvadrata površine jedne stope. I tako je uzimao svaki pojedini kvadrat do onoga od sedamnaest stopa. Kod toga je nekako stao.* (Platon, *Teetet*, 147 d.)

[10] O oskudnim podacima koji se odnose na Tedorov životopis izveštava nas Žmud [**57**, str. 128].

Razume se, dokaz da je kvadratni koren broja dva iracionalna veličina morao je biti još stariji. Sudeći prema razgovoru iz *Parmenida*, otkriće nesamerljivih Platon smešta najkasnije u prvu polovinu petog veka. Zaista, u pokušaju da da odgovor na pitanje šta je *jedno* i kakve su mu osobine, Parmenid u dijalogu pominje veličine koje nisu samerljive.[11] Prema Platonovim rečima, u vreme vođenja dijaloga Parmenid je imao šezdeset pet godina,[12] a Sokrat je bio „veoma mlad“. Odatle možemo zaključiti da se razgovor koji je opisan u *Parmenidu* vodio oko 450. godine.[13] Zbog toga, ako je verovati Platonovoj hronologiji, otkriće da postoje nesamerljive veličine treba smestiti najkasnije u prvu polovinu petog veka. Ono zato može pripasti samo pitagorejcima iz ranog perioda.

Antički izvori iz kojih saznajemo ko bi sve mogao biti autor otkrića da postoje iracionalne veličine, ne kazuju ništa o tome kako je mogao izgledati dokaz njihovog postojanja. Oni nas ne obaveštavaju ni o tome na koju se veličinu odnosio najstariji dokaz. Ipak, zahvaljujući Platonu i Aristotelu mi imamo nagoveštaje dvaju dokaza do kojih su mogli doći pitagorejci. Oba se odnose na iracionalnost kvadratnog korena broja dva. Pored toga, zahvaljujući nepoznatom autoru stava X.117 i Aleksandru iz Afrodizije, imamo sačuvana i tri antička dokaza da su dijagonala i stranica kvadrata dve nesamerljive veličine. Ostaje pitanje da li neki od njih može biti najstariji.

13.3. Klasični par-nepar dokaz

Aristotel upućuje na dihotomiju par-nepar koja za posledicu ima dokaz o postojanju nesamerljivih veličina. Budući da su se pitagorejci najpre bavili aritmetikom, moguće je da je i najstariji dokaz da postoje iracionalne veličine bio aritmetički. Njihova prva aritmetika se odnosila na parne i neparne brojeve pa je i najstariji dokaz mogao biti *klasični par-nepar dokaz.*[14] On započinje pretpostavkom da postoje brojevi p i q koji nisu iste parnosti takvi da je $q^2 = 2p^2$, i tu pretpostavku dovodi do kontradikcije. Zaista, budući da je broj q^2 dva puta veći od broja p^2, on će biti paran, a kako je proizvod neparnih brojeva neparan (IX.29), i q mora biti paran broj. Zato postoji broj r takav da je $q = 2r$. Tada je $4r^2 = 2p^2$, tj. $p^2 = 2r^2$. Sada su i p^2 i p parni brojevi, pa su, dakle, i p i q parni brojevi, a pretpostavili smo da nisu.

Sasvim je moguće da je ovaj dokaz bio poznat u četvrtom veku stare ere budući da Aristotel najverovatnije na njega misli kada nas obaveštava da:

---

[11] U dijalogu Parmenid kazuje:

> *... da bi bilo veće ili manje [jedno] bi moralo, upoređeno sa veličinama sa kojima je samerljivo, da ima više jedinica mere nego manja veličina, a manje jedinica mere nego veća veličina. A upoređeno sa veličinama sa kojima nije samerljivo, ono bi se sastojalo iz jedinica mere ovde manjih, a tamo većih.* (Platon, *Parmenid*, 140 c.)

[12] Platon, *Parmenid*, 127 b.

[13] Videti [**3**, 84, str. 206].

[14] O raznovrsnosti metoda za dokazivanje da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj obaveštavaju nas Konvej i Šipman [**10**].

> *... nesamerljivost dijagonale dokazuje se iz toga što bi pri pretpostavci njene samerljivosti neparni brojevi postali jednaki parnima.*[15]

Aristotel ne kazuje na čiju stranicu i dijagonalu se odnosi prethodna opaska, ali pominje upotrebu dihotomije par-nepar, koja je delotvorna ako su u pitanju stranica i dijagonala kvadrata.[16] On nas ne obaveštava ni o tome kako je ovaj dokaz mogao izgledati, ali iz njegovih reči može se zaključiti da je bio indirektan i da je imao i geometrijsku i aritmetičku komponentu. Pretpostavka u dokazu koji pominje Aristotel, formulisana je geometrijskim jezikom, a u obaranju pretpostavke, prema njegovim rečima, upotrebljava se aritmetika parnih i neparnih brojeva.[17] Zato bi klasični par-nepar dokaz mogao da bude aritmetički deo dokaza stava koji pominje Aristotel.

13.4. Stav X.117

Izgleda da je stav X.117 koji je dodat *Elementima*, nastao iz potrebe da se Aristotelove reči opravdaju. Sačuvana su tri antička dokaza ovog pseudo-Euklidovog stava. Dva dolaze sa njim, a jedan dolazi iz Aleksandrovih komentara Aristotelove *Prve analitike*. U svakom od njih, u obaranju pretpostavke da su dijagonala i stranica kvadrata dve samerljive veličine, upotrebljavaju se argumenti koji dolaze iz aritmetike.[18]

Na samom početku dokaza stava X.117 njegov autor upotrebljava Euklidov stav X.5 da bi utvrdio da, ako su međusobno samerljive, onda se dijagonala d i stranica a kvadrata odnose jedna prema drugoj kao neki broj q prema broju p. Štaviše, on pretpostavlja da su q i p najmanji brojevi takvi da je $d : a = q : p$, i zaključuje da tada q ne može biti jedinica.[19] Sada je, na osnovu stava X.9, i $d^2 : a^2 = q^2 : p^2$ pa, kako je $d^2 = 2a^2$ (na osnovu Pitagorine teoreme), biće i $q^2 = 2p^2$. Međutim, ako su najmanji, brojevi q i p će biti i međusobno prosti (na osnovu stava VII.22) pa upotreba klasičnog par-nepar dokaza vodi ka protvrečnosti da su brojevi q i p i iste i različite parnosti.

Uz prethodni dokaz, stav X.117 sadrži još jedan — alternativni dokaz nesamerljivosti stranice i dijagonale kvadrata. Geometrijsko razmatranje u ovom dokazu suštinski se ne razlikuje od onog iz dokaza stava X.117. I u alternativnom dokazu se upotrebljava stav X.5 da bi se došlo do zaključka da se dijagonala d i stranica a odnose jedna prema drugoj kao broj q prema broju p. Koristi se i stav X.9 da bi se zaključilo da je $d^2 : a^2 = q^2 : p^2$, a zatim i Pitagorina teorema da bi se utvrdilo da je $d^2 = 2a^2$, odakle sledi da je i $q^2 = 2p^2$. Upotrebljava se i stav VII.22 iz potrebe da

---

[15] Aristotel, *Prva analitika*, 41 a.

[16] Fon Fric je istražio mogućnost da se ova opaska odnosi na dijagonalu i stranicu pravilnog petougla [**20**].

[17] Knorov pokušaj rekonstrukcije dokaza koji nagoveštava Aristotel [**29**, str. 26–27], svodi se na klasični aritmetički dokaz kojem je dodato kratko geometrijsko objašnjenje.

[18] O dokazima stava X.117 opširno raspravlja Knor [**29**, str. 23–31, 228–233].

[19] Činjenicu da q ne može biti jedinica autor kasnije neće nigde upotrebiti u dokazu. Ipak, primećuje da, ako bi bila, onda bi broj p bio manji od 1 jer je stranica a manja od dijagonale d, a $d : a = q : p$. To, međutim, nije moguće, jer nema broja manjeg od jedinice.

se dokaže da su brojevi q i p prosti jer su najmanji. Ipak, postoji mala razlika među ovim dokazima. U geometrijskom razmatranju kojim započinje alternativni dokaz, njegov autor dodatno primećuje da p ne može biti jedinica jer, ako pretpostavi da jeste, onda je $q^2 = 2$, a 2 nije potpuni kvadrat. Ono što čini suštinsku razliku između ovih dvaju dokaza je aritmetički deo. U alternativnom dokazu autor ne upotrebljava argumente iz klasičnog par-nepar dokaza, već Euklidov stav VIII.14 da bi dokazao da strana (broj) p meri (deli) stranu (broj) q ako (kvadratni broj) p^2 deli (kvadratni broj) q^2. Međutim, ako p deli q, a p nije jedinica, onda brojevi q i p neće biti međusobno prosti, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da jesu.

Zahvaljujući Aleksandru iz Afrodozije sačuvan je još jedan dokaz stava X.117. Komentarišući Aristotelovu *Prvu analitiku* (41 a) Aleksandar oseća potrebu da iznese dokaz Aristotelove tvrdnje da, *pri pretpostavci samerljivosti stranice i dijagonale, neparni brojevi postaju jednaki parnima*. Ovaj dokaz se unekoliko razlikuje od dvaju dokaza stava X.117.[20] I u njemu se najpre zaključuje da iz pretpostavke o samerljivosti dijagonale d i stranice a kvadrata sledi da postoje brojevi q i p takvi da je $d : a = q : p$ (X.5) za koje se može pretpostaviti da su najmanji, pa stoga i međusobno prosti (VII.22). Međutim, za razliku od dokaza stava X.117, Aleksandar upotrebljava stav VII.27 da bi utvrdio da su i brojevi q^2 i p^2 međusobno prosti pa, upotrebom stava X.9 i Pitagorine teoreme, zaključuje da je $q^2 : p^2 = 2 : 1$. Na posletku, upotrebom klasičnog par-nepar dokaza, dolazi do protivrečnosti da brojevi q^2 i p^2 moraju biti i iste i različite parnosti.

I u dokazu stava X.117, i u njegovom alternativnom dokazu, kao i u Aleksandrovom dokazu, upotrebljavaju se stavovi X.5 i X.9 da bi se došlo do zaključka da se dijagonala i stranica kvadrtata odnose jedna prema drugoj kao broj q prema broju p, a kvadrati na njima kao broj q^2 prema broju p^2. Odavde se, opet upotrebom Pitagorine teoreme, izvodi formula $q^2 = 2p^2$ koja vodi ka protivrečnosti. Međutim, stav X.9 pripada Teetetu,[21] tako da do bilo kojeg od triju sačuvanih dokaza stava X.117 niko nije mogao doći pre njega. Štaviše, u Aleksandrovom dokazu upotrebljava se i Euklidov stav VII.27 na kojem se temelji dokaz Teetetovog stava VIII.14, a u aritmetičkom delu alternativnog dokaza upotrebljava se i sam stav VIII.14, budući da je tvrdnja da ne postoje brojevi q i p takvi da je $q^2 = 2p^2$, samo je poseban slučaj ovog Teetetovog stava. Čak i ako se dokaz stava X.117 svede samo na aritmetički deo i, kao u klasičnom par-nepar dokazu, iz pretpostavke da je $q^2 = 2p^2$ zaključi besmislica — da su p i q brojevi u isto vreme iste i različite parnosti — opet se ovaj dokaz ne može smestiti u vreme koje prethodi Teetetu, dakle, pre samog kraja petog veka. Razlog tome je Platonova opaska o Teodorovim otkrićima. Naime, ako u formuli $q^2 = 2p^2$ zamenimo broj 2 bilo kojim prostim brojem k (recimo $k = 17$ ili $k = 19$), dokaz iracionalnosti $\sqrt{k}$ ostaće skoro istovetan

[20] Razlika ovih dvaju dokaza navodi Knora na zaključak da Aleksandrov primerak *Elemenata* nije u sebi sadržao dodati stav X.117. Zbog toga je Aleksandar sam morao da dokaže tvrdnju stava X.117 ako dokaz već nije našao u nekom drugom izvoru. Time Knor potvrđuje Hajbergov zaključak da je stav X.117 interpolacija nastala posle Aleksandra. Budući da se stav X.117 nalazi u svim prepisima *Elemenata* koji sadrže Teonove intervencije, on je dodat Elementima u periodu od drugog do četvrtog veka koje deli Aleksandra i Teona. Videti [**29**, str. 52 f15].

[21] Videtu odeljak 11.2.

klasičnom par-nepar dokazu. Zaista, ako su p i q brojevi takvi da je $q^2 = kp^2$, možemo pretpostaviti da nisu oba deljivi brojem k jer, ako jesu, uvek se njihovim uzastopnim deljenjem brojem k može doći do dvaju brojeva koji nisu oba deljivi sa k, a opet je kvadrat jednog od njih k puta veći od kvadrata drugog. Međutim, ako je $q^2 = kp^2$, onda je broj q^2 deljiv brojem k, pa kako prost broj koji deli proizvod, deli bar jedan činilac (VII.30),[22] i q će biti deljiv njime. Stoga postoji broj m takav da je $q = km$. Tada je $q^2 = k^2m^2 = kp^2$, pa je $p^2 = km^2$. Sada je i p^2 deljiv brojem k, pa je i p deljiv istim brojem. Kako nije moguće da k i deli i ne deli broj p, pretpostavka da je $q^2 = kp^2$ dovedena je do protivrečnosti. Ovime je, u punoj analogiji sa klasičnim par-nepar dokazom, dokazano da, ako je k prost broj, onda $\sqrt{k}$ nije racionalan broj pa zato duži kojima su dužine p i q nisu samerljive.

Dakle, da je klasični par-nepar dokaz bio poznat Teodoru, on bi morao najpre da pokuša njega da uopšti. Kako je njega sasvim jednostavno uopštiti da bi se došlo do zaključka da je kvadratni koren bilo kojeg prostog broja iracionalan broj, Teodor ne bi imao razloga da stane kod kvadratnog korena broja 17. Budući da je Teetet rešio opšti problem još za Teodorova života, pre Teeteta niko nije mogao doći do klasičnog par-nepar dokaza. Razume se, mi ne možemo sa sigurnošću tvrditi da je Teetet prvi došao do njega, već samo to da je ovaj dokaz svakako bio poznat u četvrtom veku budući da ga pominje Aristotel.

Iako je stav X.117 interpolacija, on nam je jedini pouzdani putokaz kako je jedan antički dokaz stava o nesamerljivisti dijagonale i starnice mogao izgledati. Međutim, dokaz stava X.117 nije mogao biti jedini antički dokaz ovog stava. Morao je postojati stariji dokaz od ovoga, onaj koji pripada ranim pitagorejcima. Budući da su se oni bavili aritmetikom parnih i neparnih brojeva, aritmetička sredstva koja bi u njemu bila dopuštena mogla bi se sastojati samo iz stavova o parnim i neparnim brojevima koje je Euklid smestio na kraj devete knjige *Elemenata.* Dokaz iz aritmetike oblutaka zadovoljava taj uslov.[23]

13.5. Klasični geometrijski dokaz

O mogućnosti da su Grci nesamerljivost stranice i dijagonale mogli da dokažu i geometrijski možemo naslutiti samo na osnovu nekoliko napomena koje nam dolaze iz antike. Međutim, pouzdano znamo da im je bio poznat kriterijum na osnovu kojeg su to mogli učiniti. Možemo ga naći u Euklidovom stavu X.2, prema kojem su *dve veličine nesamerljive ako pri neprekidnom oduzimanju manje od veće nijedan ostatak ne meri prethodni ostatak.* Upravo ovaj kriterijum Aristotel ima na umu kada tvrdi da postoje veličine koje se ni najmanjim ne mogu meriti, i za primer uzima dijametar.[24] I prema rečima već pomenutog sholijaste desete knjige, dok

[22] Dokaz ovog stava je jednostavan i direktan. Videti odeljak 9.7.

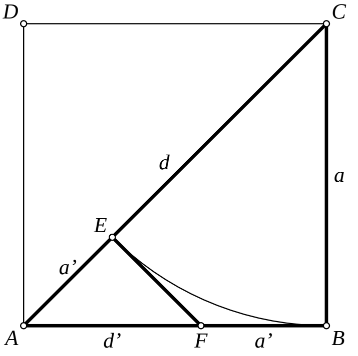
[23] Videti odeljak 3.4, teorema 14.

[24] Prema Aristotelovim rečima (*Metafizika*, 983 a 15–22):

> ... svima onima koji još nisu shvatili uzrok (nesamerljivosti dijametra) izgleda začuđujuće to ako se nešto ne može ni onim najmanjim meriti.
>
> ... Čoveka koji poznaje geometriju ništa ne bi tako začudilo kao kad bi dijametar postao samerljiv.

Ova napomena jasno upućuje na upotrebu geometrije u teoriji nesamerljivih.

je jedinica zajednička mera svih brojeva, ne postoji zajednička mera svih duži. Opet je primer dijametar, tj. dijagonala (i stranica) kvadrata, budući da postupak uzastopnog oduzimanja stranice od dijagonale neće dovesti do duži koja meri i jednu i drugu.



SLIKA 13.5.1. Nesamerljivost ivice i dijagonale kvadrata

Zaista, primenjen na dijagonalu $AC = d$ i stranicu $AB = a$ kvadrata $ABCD$, postupak uzastopnog oduzimanja započinje oduzimanjem duži a od duži d (slika 13.5.1). Ako je E tačka duži CA takva da je $BC = CE$, a F tačka u kojoj upravna na AC u tački E seče duž AB, onda je, $d - a = AE = EF = FB = a'$. Sada se ostatak $a' = d - a = FB$ može oduzeti od $a = AB$, da bi se dobio novi ostatak $d' = AF$. Time se dolazi do dveju duži a' i d' koje služe kao stranica i dijagonala novog, manjeg kvadrata pa je problem nalaženja najveće zajedničke mere ivice a i dijagonale d nekog kvadrata sveden na isti problem, problem nalaženja najveće zajedničke mere ivice a' i dijagonale d' sada manjeg kvadrata. Stoga se ovaj postupak nikada ne može završiti, te su ivica i dijagonala kvadrata dve nesamerljive duži (X.2).

Da je prethodni dokaz bio poznat Grcima možemo zaključiti posredno, na osnovu jedne napomene u Platonovoj *Državi* i Proklovog komentara ovog Platonovog dijaloga. Platon u svom dijalogu pominje racionalnu dijagonalu broja 5,[25] a Proklo pojam racionalne dijagonale objašnjava rekurzivno, definišući ivične i dijagonalne brojeve. On uzima da su i početni ivični i početni dijagonalni broj oba jedinice, a zatim novi ivični broj dobija sabiranjem starog ivičnog i dijagonalnog broja, a novi dijagonalni broj sabiranjem dvostrukog starog ivičnog i dijagonalnog broja, i nastavlja taj postupak. Ako su a' i d' stari, a a i d novi ivični i dijagonalni broj, onda je $a = a' + d'$, a $d = 2a' + d'$. Zato su $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(5, 7)$ itd., redom, parovi ivičnih i dijagonalnih brojeva, u skladu sa rekurzivnim formulama $a_{n+1} = a_n + d_n$, $d_{n+1} = 2a_n + d_n$. Stoga je, prema Proklovom objašnjenju, racionalna dijagonala broja 5, broj 7.

Proklo ne objašnjava odakle dolazi motivacija da brojeve koji zadovoljavaju prethodne formule nazove *ivičnim* i *dijagonalnim* ali Van der Verden nalazi da se

[25] *Držva*, 546. c.

ove rekurzivne formule dobijaju upravo analizom slike kojom se ilustruje klasični geometrijski dokaz.[26] (Zaista, ako su a i d stranica i dijagonala kvadrata $ABCD$, a a' i d' ostaci u procesu uzastopnog oduzimanja stranice od dijagonale, biće $a = a' + d'$, i $d = 2a' + d'$). Ako je zaista tako, onda je klasični geometrijski dokaz da stranica i dijagonala kvadrata nisu dve samerljive veličine, Platonu morao biti poznat.

Aluzija na ovaj dokaz može se naći i u peripatetičkoj raspravi *O nedeljivim linijama*.[27] U nameri da se utvrdi da *nedeljive linije* ne postoje, tj. da ne postoji duž koja je najmanja i koja meri svaku drugu duž, u njoj se polazi od primera stranice i dijagonale kvadrata. Prema ovom razmatranju, ako se pretpostavi da je neka duž najmanja, onda postoji kvadrat kojem je ona ivica, a ako se stranica tog kvadrata oduzme od dijagonale, dobija se duž manja od stranice. Proces uzastopnog oduzimanja ovde se završava već posle prvog koraka, ali je primer indikativan i ukazuje na mogućnost da je samo izvučen iz konteksta dokazivanja da stranica i dijagonala nisu samerljive.

Dakle, sudeći prema pomenutim fragmentima iz Platonove *Drževe* i spisa *O nedeljivim linijama*, geometrijski dokaz nesamerljivosti stranice i dijagonale kvadrata mogao je biti poznat u četvrtom veku stare ere. To potvrđuje i činjenica da Euklid dokazuje stav X.2 koji sadrži kriterijum na osnovu kojeg je dokaz mogao biti izveden. Ostaje pitanje da li je klasični geometrijski dokaz bio poznat i ranije i da li je on mogući kandidat da bude najstariji.

13.6. Geometrijski dokaz Teetetove teoreme

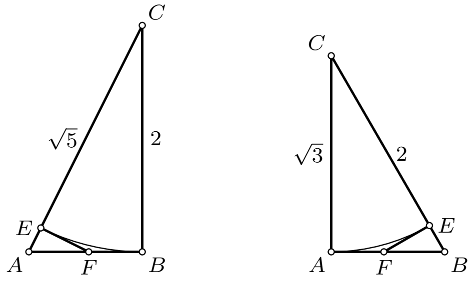
Budući da je Teodor umeo da dokaže da kvadratni korenovi brojeva 3 i 5 nisu racionalni brojevi, postavlja se pitanje da li je dokaze mogao da zasnuje na istoj ideji koja se koristi u klasičnom geometrijskom dokazu da kvadratni koren broja 2 nije racionalan. U nameri da damo odgovor na ovo pitanje razmotrićemo najpre najjednostavniji slučaj posle jednakokrako-pravouglog trougla, koji se odnosi na pravougli trougao kojem su katete dužina 1 i 2. Razume se, njegova hipotenuza će biti dužine $\sqrt{5}$ (I.47). Ako je ona samerljiva sa sa jednom katetom, biće samerljiva i sa drugom.

Primenjen najpre na hipotenuzu dužine $\sqrt{5}$ i katetu dužine 2 (slika 13.6.1), postupak uzastopnog oduzimanja vodi do zaključka da su ove dve duži nesameljive, na isti način na koji do istog zaključka dovodi postupak primenjen na hipotenuzu i katetu jednakokrako pravouglog trougla (tj. na dijagonalu i stranicu kvadrata). To je stoga što se problem samerljivosti hipotenuze i katete trougla kojem su ivice 1, 2 i $\sqrt{5}$, svodi na isti problem sada manjeg, njemu sličnog trougla. Zato se se postupak uzastopnog oduzimanja katete od hipotenuze nikada ne može završiti pa su one dve nesamerljive duži (X.2). Zbog toga kvadratni koren broja 5 nije racionalan broj.

Slično, ako je jedna kateta dužine 1, a hipotenuza dužine 2, onda je druga kateta koja je dužine $\sqrt{3}$, nesamerljiva sa drugim dvema ivicama zato što se postupak uzastopnog oduzimanja koji započinje oduzimanjem katete dužine $\sqrt{3}$ od hipotenuze

[26] Videti [**53**, str. 126–127].

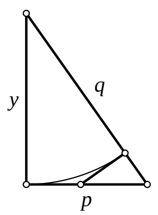
[27] *De Lineis Insecabilibus*, 970 a 14–17.



SLIKA 13.6.1. Iracionalnost $\sqrt{5}$ i $\sqrt{3}$

dužime 2, ne može završiti budući da se njime dolazi uvek do trouglova koji su slični polaznom trouglu ivica 1, $\sqrt{3}$ i 2.[28] Zbog toga ni $\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

Postupak uzastopnog oduzimanja može se primeniti i na pravougle trouglove ivica 1 i 3 i na isti način dokazati da $\sqrt{8}$ i $\sqrt{10}$ nisu racionalni brojevi. Primena na pravougle trouglove kojima su ivice dužina 1 i 4, vodi do zaključka da su $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$ iracionalni brojevi, a ako su ivice dužina 1 i 5, do iracionalnosti brojeva $\sqrt{24}$ i $\sqrt{26}$, itd. Pravougli trouglovi kojima je jedna ivica dužine 1, a druga dužine k vode do zaključka da $\sqrt{k^2+1}$ i $\sqrt{k^2-1}$ nisu racionalni brojevi, tako da bavljenje ovakvim trouglovima ne daje odgovor na pitanje da li je $\sqrt{19}$ iracionalan broj ili nije.



SLIKA 13.6.2. Teetetova teorema

Međutim, prethodni postupak uzastopnog oduzimanja katete od hipotenuze može biti upotrebljen i ako su jedna kateta i hipotenuza, redom, celobrojnih dužina p i q (slika 13.6.2). Ako je i druga kateta celobrojne dužine, postupak će se završiti nalaženjem najveće zajedničke mere te ivice i jedne od ostalih dveju (VII.2). Međutim, ako dužina y druge katete nije ceo broj, postupak se neće završiti pa y neće biti racionalan broj. Zaista, ako bi se postupak završio, onda bi postojala zajednička mera x jedinične duži i katete koja je dužine y, pa bi tada postojali brojevi y', q' i p' takvi da je $y = y'x$, $q = q'x$ i $p = p'x$. Razume se, tada je $y'^2 = q'^2 - p'^2$ pa je (y', q', p') Pitagorina trojka brojeva. Štaviše, brojevi y, p, q su proporcionalni brojevima y', p', q' pa je i (y, p, q) Pitagorina trojka brojeva. Dakle, ako (y, p, q) nije Pitagorina trojka brojeva, y je iracionalan broj.

[28] U osnovi ovog razmatranja je izmenjena Sojtenova rekonstrukcija Teodorovog dokaza da $\sqrt{3}$ nije racionalan broj, koju reprodukuje Hit [**23**, vol. I, str. 207–209].

Da bismo dobili odgovor na pitanje koji (prirodni) brojevi imaju kvadratni koren koji nije racionalan broj, dovoljno je utvrditi koji se sve nekvadratni brojevi mogu predstaviti kao razlika dvaju kvadratnih brojeva. Ispostaviće se da za svaki prirodni broj k koji nije potpun kvadrat postoje brojevi q i p takvi da je $k = q^2 - p^2 = (q-p)(q+p)$. Zaista, ako je k neparan broj, onda možemo pretpostaviti da je $q-p=1$ i $q+p=k$, a odavde naći rešenja za q i p. Ako je k deljiv sa 4, onda iz pretpostavke da je $q-p=2$ i $q+p=k/2$ opet sa lakoćom nalazimo rešenja za q i p. Međutim, ako je k deljiv sa dva ali ne i sa četiri, možemo ga pomnožiti sa 4 i dokazati da se $4 \cdot m$ može predstaviti kao razlika dvaju kvadratnih brojeva. Zato $2\sqrt{k}$ nije racionalan broj pa ni $\sqrt{k}$ nije racionalan broj. Dakle, kvadratni koren broja k je racionalan broj ako i samo ako je k potpuni kvadrat. Međutim, ovo je Teetetova teorema — stav VIII.14.

Da je Teodor znao klasični geometrijski dokaz mogao je da ga uopšti i dokaže Teetetovu teoremu. Međutim, on je stao već kod kvadratnog korena broja 17. Da je geometrijskom metodom samo tražio primere iracionalnih brojeva, a ne opšti stav do kojeg je kasnije došao Teetet, lako bi utvrdio da ni $\sqrt{17}$ ni $\sqrt{19}$ nisu racionalni brojevi, tako da, opet, nije morao da stane kod kvadratnog korena broja 17. Zaista, ako je $k=17$ tada je $p=8$ i $q=9$, a ako je $k=19$, onda je $p=9$ i $q=10$, pa su i kvadratni korenovi brojeva 17 i 19 iracionalni brojevi.

Dakle, Teodor nije geometrijskom metodom došao do svojih primera iracionalnih veličina. Njemu nije bio poznat klasični geometrijski dokaz da kvadratni koren broja 2 nije racionalan broj. Da ga je znao, on bi najpre njega pokušao da uopšti. Razume se, nije nemoguće da je, kasnije, Teetet upotrebio geometrijsku metodu i Euklidov stav X.2, da bi dokazao svoju teoremu. Međutim, sam Euklid nikada ne upotrebljava stav X.2. Zato nema razloga da sumnjamo u to da je Teetetov dokaz bio aritmetički, baš kao što je to dokaz stava VIII.14. Kao što je on aritmetički, aritmetička je morala da bude i metoda koju je koristio Teodor da bi došao do svojih primera. Razume se, to nije mogla biti aritmetika koju je razvio Teetet da bi dokazao svoju teoremu.

POGLAVLJE 14

Otkriće nesamerljivosti

Iako o tome na postoji nijedan trag u sačuvanim rukopisima, pored klasičnog par-nepar dokaza i klasičnog geometrijskog dokaza, postoji mogućnost da još jedan dokaz da kvadratni koren broja 2 nije racionalan broj dolazi iz najranijeg perioda. Kao i klasični par-nepar dokaz, i on je na sasvim jednostavan način utemeljen na dihotomiji parnih i neparnih brojeva. Uz to, ovaj dokaz je i veoma kratak.

14.1. Dokaz na osnovu stava o jedinstvenoj faktorizaciji

Među prostim deliocima, kako broja q^2 tako i broja p^2, ima parno mnogo faktora jednakih broju 2, dvostruko više nego među prostim deliocima brojeva q i p, dok broj $2p^2$ ima neparno mnogo takvih faktora. Međutim, prema *osnovnom stavu aritmetike*, koji se naziva i *stavom o jedinstvenoj faktorizaciji prostim brojevima*, brojevi su različiti ako i samo ako imaju različite faktorizacije, pa ne postoje brojevi p i q takvi da je broj q^2 jednak broju $2p^2$. Zbog toga kvadratni koren broja 2 nije racionalan broj.

Ovaj dokaz utemeljen je na aritmetici parnih i neparnih brojeva, međutim, ključni argument u njemu ne pripada toj aritmetici. On dolazi kao posledica stava o jedinstvenoj faktorizaciji brojeva. Međutim, ovaj stav se nigde ne pominje u antičkoj literaturi. Razume se, to ne znači da nije mogao biti upotrebljavan i bez dokaza.[1] Za time ipak nije bilo potrebe budući da, iako nedostaje opšti stav, u *Elementima* ima stavova koji se odnose na faktorizaciju, koji se takođe mogu upotrebiti u dokazu tvrdnje da kvadratni koren broja 2 nije racionalan broj.

Najpre, u stavu IX.14 Euklid dokazuje da proizvod međusobno različitih prostih brojeva nema drugih prostih delitelja, osim tih prostih brojeva, što je poseban slučaj opšteg stava o jedinstvenoj faktorizaciji. I stav IX.34 se odnosi na faktorizaciju, iako se na osnovu njegove formulacije ne bi reklo da je tako. Međutim, on se odnosi samo na faktorizaciju parnih brojeva. Prema ovom stavu,

> *ako broj ne pripada ni brojevima koji se dobivaju od dvojke neprekidnim udvostručavanjem, ni brojevima koji imaju neparnu polovinu, on je ili parno-paran ili parno-neparan.*

[1] Mnogo kasnije, matematičari, među kojima je i Ojler, umeli su da upotrebljavaju ovaj stav ne primetivši da on zahteva bilo kakvu proveru ili dokaz, sve dok Gaus konačno nije shvatio potrebu da ga eksplicitno formuliše i dokaže. Videti [**39**, str. 238].

Drugim rečima, ako neki broj nije ni stepen broja dva, a nije ni proizvod broja 2 i nekog neparnog broja, onda se on može predstaviti i kao proizvod dvaju parnih brojeva, i kao proizvod jednog parnog i jednog neparnog broja. Zato je on i parno-paran broj (VII. def. 8) i parno-neparan broj (VII. def. 9–10). U dokazu Euklid polovi zadati broj, zatim polovi njegovu polovinu i nastavlja ovaj postupak *uzastopnog polovljenja* sve dok ne dođe do nekog neparnog broja, da bi na posletku zaključio da se polazni broj parno-paran jer se u njegovoj faktorizaciji broj 2 pojavljuje više nego jednom, i parno-neparan jer se u njegovoj faktorizaciji pojavljuje i neparan broj. Dakle, svaki paran broj je ili stepen broja 2 ili proizvod nekog neparnog broja i stepena broja 2.

Deduktivna struktura Euklidovog dokaza stava IX.34 je trivijalna jer se u njemu ne upotrebljava nijedan stav koji je već dokazan. Štaviše, Euklid ga kasnije neće upotrebiti ni u jednom dokazu u *Elementima* tako da je ovaj stav logički izolovan. Niti se u njegovom dokazu upotrebljavaju stavovi koji mu prethode, niti se se on koristi u dokazima stavova koji dolaze za njime. Reklo bi se da je nevažan. Mogao je biti izostavljen bez posledica po deduktivnu strukturu *Elemenata*. Ipak, budući da ga je uvrstio u devetu knjigu, Euklid je ovaj stav smatrao važnim. Razlog tome mogla bi biti njegova uloga u dokazu da ne postoje brojevi p i q takvi da je $q^2 = 2p^2$.

14.2. Kako je mogao izgledati Euklidov dokaz?

Upotrebom postupka uzastopnog polovljenja, Euklid u stavu IX.34 zapravo dokazuje da se svaki parni broj p na jedinstven način može iskazati kao proizvod nekog neparnog broja c (uključujući i jedinicu) i stepena broja 2, tj. da je $p = c\cdot 2^m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Na osnovu ovog stava i stavova IX.28 i IX.29 o proizvodu parnih i neparnih brojeva, Euklid je jednostavno mogao dokazati da ne postoje brojevi p i q takvi da je $q^2 = 2p^2$.

Zaista, ako je $q^2 = 2p^2$, onda q^2 mora biti paran broj jer mu je jedan činilac paran broj (IX.28). Zato i q mora biti paran broj jer, ako nije, onda je q^2 neparan broj (IX.29). Tada postoji broj r takav da je $q = 2r$, a odavde sledi da je $q^2 = 4r^2$. Međutim, $q^2 = 2p^2$ pa je $p^2 = 2r^2$, a tada su p^2, a stoga i p, parni brojevi.

Dakle, ako je $q^2 = 2p^2$, onda brojevi q^2 i q, a zatim i p^2 i p, moraju biti parni. Tada, na osnovu stava IX.34, postoje neparni brojevi a i c (koji mogu biti i jedinice) takvi da je $q = a \cdot 2^n$ i $p = c \cdot 2^m$, $1 \leq m < n$. Svaki od njih se može prepoloviti. Međutim, brojevi $2p^2$ i q^2 su međusobno jednaki ako i samo ako su jednake njihove četvrtine, pa je $2p^2 = 2c^2 2^{2m}$ potpun kvadrat ako i samo ako je i $2(p/2)^2 = 2c^2 2^{2(m-1)}$ potpun kvadrat. Sada, ako je broj $p/2$ paran, on se opet može prepoloviti. Nastavljajući postupak polovljenja koji započinje brojem $p = c\cdot 2^m$, na posletku će se doći do parnog broja $c\cdot 2$. Sada preostaje samo još jedno polovljenje da bi se došlo do broja c koji može biti jednak jedinici ili kojem drugom neparnom broju. Dakle, $2p^2 = 2c^2 2^{2m}$ je potpun kvadrat ako i samo ako su svi brojevi

$$2c^2 2^{2(m-1)}, 2c^2 2^{2(m-2)}, \ldots, 2c^2 2^2, 2c^2$$

potpuni kvadrati.

Ako neparni broj c nije jedinica, tada $2c^2$ nije potpun kvadrat (budući da bi c bio paran broj ako je $2c^2$ potpun kvadrat), pa ne može biti ni $2p^2 = 2c^2 2^{2m}$. Ako je c jedinica, tada je $2p^2 = 2 \cdot 2^{2m}$ potpun kvadrat ako i samo ako su i svi brojevi

$$2 \cdot 2^{2(m-1)}, 2 \cdot 2^{2(m-2)}, \ldots, 2 \cdot 2^2,$$

potpuni kvadrati. Međutim, $2 \cdot 2^2 = 8$ nije potpun kvadrat pa ne može biti ni $2p^2$. Dakle, nezavisno od toga da li se pretpostavi da je c jedinica ili nije, $2p^2$ ne može biti potpun kvadrat, a zbog toga kvadratni koren broja 2 nije racionalan broj.

Iako je prethodni dokaz, u kojem se upotrebljava savremena terminologija, jednostavno interpretirati oblucima,[2] on je ipak izložen načinom koji je mogao biti Euklidov, budući da ima deduktivnu strukturu koja sa sastoji samo iz stavova o parnim i neparnim brojevima koje nalazimo u devetoj knjizi *Elemenata*.

14.3. Zaključci Menonovog roba

Tvrdnja da broj 8 nije potpun kvadrat koja je upotrebljena u prethodnom dokazu, toliko je jednostavna da ne zahteva nikakvu posebnu potvrdu. Međutim, Platon baš ovu činjenicu ističe i, štaviše, eksplicitno je dokazuje u čuvenom fragmentu iz *Menona* u kojem mladi Menonov rob uz Sokratovu pomoć pokušava da utvrdi koji će kvadrat biti dvostruko veći od zadatog kvadrata čija je ivica dužine 2 stope.[3] Ovaj razgovor Platonov Sokrat vodi sa namerom da potvrdi svoje filozofsko stanovište prema kojem je svako saznanje sećanje, izmamljujući iz roba znanje matematike kojem ga niko nije podučio, što dokazuje da ga je on i pre razgovora već imao. Trebalo je samo da ga se *seti*. Sokrat mu je u tome pomogao.

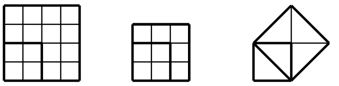
Platonov dokaz nije aritmetički već je geometrijski. U njemu su brojevi predstavljeni jediničnim kvadratima koji imaju funkciju jedinica, tako da je dokaz zbog toga vizuelno očigledan. Do njega se ne dolazi na temelju nekog već usvojenog znanja ili upotrebom nekih poznatih činjenica, već prostim posmatranjem slike. Razume se, dokaz i nije mogao biti drukčiji budući da Menonov rob nikada nije prošao kroz bilo kakvu matematičku obuku, tako da bi njemu bilo neubedljivo ili čak nerazumljivo bilo šta što se ne može empirijski proveriti.

Pre no što će roba navesti na zaključak da je kvadrat kojem je ivica dijagonala zadatog kvadrata dvostruko veći od tog kvadrata, Sokrat predlaže da se najpre proveri da li se ivice zadatog kvadrata mogu produžiti tako da se dobije dvostruko veći kvadrat (slika 14.3.1). Ako se ivica udvostruči, rob zaključuje da će se dobiti kvadrat četvorostruke, a ne dvostruke površine. On će se sastojati iz 16 kvadrata kojima su ivice dužine jedne stope, a dvostruko veći kvadrat od kvadrata ivice 2 stope bi se mogao sastojati samo iz 8 takvih kvadrata. Pošto je novi kvadrat prevelik, Sokrat sugeriše da se načini pokušaj sa kvadratom kojem je ivica dužine 3 stope. Ona je veća od ivice polaznog kvadrata, ali je manja od ivice četvorostruko većeg kvadrata. Međutim, rob zaključuje da će tada biti dobijen kvadrat površine 9, a ne 8 stopa.

Time su iscrpljene sve mogućnosti za nalaženje kvadrata celobrojne ivice, dvostruko većeg od zadatog kvadrata ivice čija je dužna 2 stope. Nije uspeo pokušaj da se nađe aritmetičko rešenje problema. Međutim, kao što ne uspeva

[2] Videti odeljak 3.4.

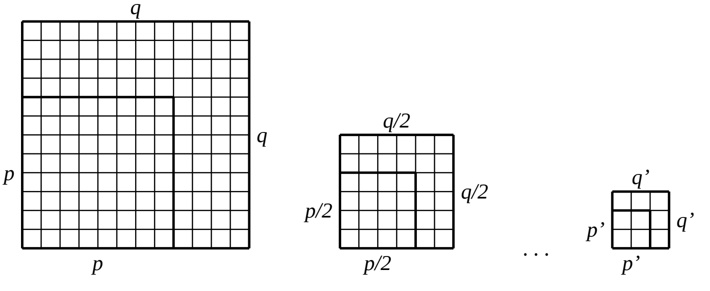
[3] Platon, *Menon*, 82 b–85 b.



Slika 14.3.1. Razmišljanje Menonovog roba

ovaj, ne može uspeti nijedan drugi pokušaj da se za zadati kvadrat celobrojnih ivica nađe dvostruko veći kvadrat koji je takođe celobrojnih ivica. Sokrat i rob to i ne pokušavaju da ispitaju, već zastaju nakon najjednostavnijeg primera.

Sokrat ne sugeriše mladom robu da pokuša sa kvadratom kojem je ivica dužine 3 ili 4 stope iako bi i u tim slučajevima rob proverom jednostavno došao do istog zaključka. Međutim, opšte aritmetičko istraživanje bilo bi preteško za mladog roba. Zato Sokrat i ne pokreće potragu za celim brojevima p i q takvim da je $q^2 = 2p^2$, jer zna da njih nema, već samo ispituju slučaj kada je $p = 2$. Slika kojom je mogao ilustrovati opštu tvrdnju (slika 14.3.2) ne razlikuje se od slike sa oblucima (slika 3.4.3), samo što ulogu jedinica umesto oblutaka imaju jedinični kvadrati.



Slika 14.3.2. Kada je $q^2 = 2p^2$?

Tek posle neuspešnog pokušaja sa kvadratom celobrojne ivice, Sokrat navodi roba da u razmatranje uzme i dijagonalu zadatog kvadrata — *liniju iz jednog ugla kvadrata u drugi*, a sa njome i novi kvadrat kojem je ona ivica. Taj novi kvadrat će, zaključuje mladi rob, biti dvostruko veće površine jer se sastoji iz četiriju trouglova dobijenih podelom zadatog kvadrata njegovom dijagonalom (slika 14.3.1), a zadati kvadrat iz samo dvaju takvih trouglova.

Sugerišući mladom robu da pokuša sa geometrijskim rešenjem, Platonov Sokrat priznaje da do rešenja problema ne vodi aritmetika, već geometrija jer je ivice dvaju kvadrata, od kojih je jedan dvostruko veći od drugog, moguće naći u skupu duži, ali ne i u skupu celobrojnih duži.

14.4. Kome pripada otkriće nesamerljivosti?

U nameri da najpre potraže aritmetičko rešenje problema udvostručenja zadatog kvadrata kojem su ivice dužine 2 stope, Sokrat i mladi rob upotrebljavaju jedinične kvadrate kojima predstavljaju jedinice. Ovakva upotreba jediničnih kvadrata ne razlikuje se od upotrebe kamenčića u predstavljanju kvadratnih brojeva.

Razume se, Sokrat i rob su prinuđeni da koriste kvadrate zato što se problem udvostručenja kvadrata ne može rešiti samo upotrebom kamenčića. Razlog tome je to što konačno rešenje problema ne pripada aritmetici već geometriji. Svejedno, njihovo rešenje je vizuelno evidentno i kada pokušavaju da nađu kvadrat celobrojne ivice dvostruko veći od zadatog kvadrata i kada nalaze geometrijski kvadrat koji je dvostruko veći od zadatog.

Za razliku od klasičnog par-nepar dokaza, kao i od svakog od sačuvanih dokaza stava X.117, dokaz da ne postoji kvadratni broj dvostruko veći od nekog drugog kvadranog broja (iz odeljaka 3.4 i 14.2) vizuelno je evidentan bez obzira na to da li su kvadratni brojevi predstavljeni oblucima (slika 3.4.3) ili jediničnim kvadratima (slika 14.3.2). Štaviše, on je i direktan. Sredstva koja su upotrebljena u njemu sasvim su jednostavna. To su samo osobine parnih i neparnih brojeva koje Euklid dokazuje u devetoj knjizi *Elemenata*. Jednostavnost upotrebljenih argumenata upućuje na starost dokaza.[4] Razume se, Sokrat sa neobrazovanim robom nije mogao da razgovara o najnovijim naučnim otkrićima. Pre će biti da je on sa njime raspravljao o nečemu što je u vreme razgovora bilo uobičajeno u obuci mladih ljudi te je, bez sumnje, bilo uveliko poznato već decenijama. Zbog svega toga, sa visokom stepenom pouzdanosti možemo tvrditi da znanje matematike o kojoj razgovaraju Sokrat i Menonov mladi rob, dolazi iz vremena ranog pitagorejstva, pa zato nije anahronizam tvrdnja da je ono moglo biti dostupno i Pitagori i Hipasu. Zato je uverljiva i tvrdnja da im je mogao biti poznat i dokaz da kvadratni koren broja dva nije racionalan broj. Ovaj zaključak potvrđuje i upotreba stava IX.34 u dokazu budući da ovaj stav pripada aritmetici parnih i neparnih brojeva koja dolazi iz ranopitagorejskog perioda. Potvrđuje ga i razgovor Sokrata i Menonovog roba, koji se odnosi na primer broja dva čiji dvostruki kvadrat nije jednak ni jednom kvadratnom broju. S obzirom na to da u kontekstu otkrića nesamerljivih veličina literatura pominje samo Pitagoru i Hipasa, nema razloga da sumnjamo da otkriće pripada jednom od njih dvojice. Znajući da Jamblih pominje Hipasa koji bi mogao biti autor, ali dodaje da je ta nauka koju je Hipas otkrio drugima zapravo Pitagorina,[5] a da Proklo tvrdi da je baš Pitagora otkrio postojanje iracionalnih veličina, ovo otkriće možemo pre pripisati Pitagori nego Hipasu.

14.5. Kvadratni koren parnog broja

Budući da se upotrebom samo Euklidovih stavova IX.21–34 može dokazati da ne postoje brojevi p i q takvi da je $q^2 = 2p^2$, ostaje pitanje da li se istim sredstvima može utvrditi za koji broj k postoje brojevi p i q takvi da je $q^2 = kp^2$. Sudeći prema Platonovom svedočenju, Teodor je našao samo delimično rešenje ovog problema dokazavši da za $k = 3$ i $k = 5$ takvi brojevi ne postoje, a iz nekog razloga je sa svojim dokazivanjem stao kod broja $k = 17$. Ako je u tom cilju upotrebljavao ista sredstva kao i njegovi prethodnici — ranopitagorejci, onda je razlog zbog kojeg je sa svojim istraživanjem stao kod broja 17 morao doći kao posledica upotrebe tih

[4] Beker dokazuje da Euklidovi stavovi o parnim i neparnim brojevima (IX.21–34) dolaze iz najranijeg peroida pitagorejstva. Videti [**6**] i [**53**, str. 108].

[5] Videti [**55**, str. 262].

sredstava. Budući da ona podrazumevaju upotrebu dihotomije par-nepar, možemo najpre načiniti *analizu* postavivši pitanje o tome kakve su posledice pretpostavke da je k paran broj, a potom, znajući odgovor na ovo pitanje, i pretpostavke da je k neparan broj.

Upotrebom stava IX.34 možemo izvesti nekoliko jednostavnih zaključaka o racionalnosti kvadratnog korena parnog broja k. Zaista:

(1) Ako je broj k stepen broja 2, tj. ako postoji broj n takav da je $k = 2^n$, tada n može biti ili paran ili neparan broj.

   (a) Ako je k neparni stepen broja 2, tj. ako postoji broj l takav da je $k = 2^{2l+1}$, tada je $q^2 = kp^2 = 2 \cdot (2^l p)^2 = 2p'^2, p' = 2^l p$, pa se upotrebom ranopitagorejskog dokaza lako dolazi do zaključka da je kvadratni koren broja k iracionalan broj.

   (b) Ako je k parni stepen broja 2, tj. ako postoji broj l takav da je $k = 2^{2l}$, tada je broj k potpuni kvadrat pa je kvadratni koren broja 2 racinalan broj. Štaviše, to je broj 2^l.

(2) Ako je k paran broj koji nije stepen broja 2, onda je on, prema stavu IX.34, proizvod neparnog broja c (koji nije jedinica) i stepena broja 2, tj. $k = c \cdot 2^n$. Opet, broj n može biti paran ili neparan.

   (a) Pretpostavimo najpre da je broj n neparan. U posebnom slučaju kada je k proizvod neparnog broja c i broja 2, tj. kada je $k = 2c$, ranopitagoreski dokaz može biti ponovljen korak po korak da bi se utvrdilo da, u tom slučaju, kvadratni koren broja k nije racionalan broj. Ova činjenica ima za posledicu jednu opštiju tvrdnju: ako je $k = c \cdot 2^{2l+1}$, onda je $q^2 = 2c \cdot (2^l p)^2 = 2c \cdot p'^2, p' = 2^l p$, pa je kvadratni koren broja k opet iracionalan.

   (b) Ako je broj n paran, tj. ako je $k = c \cdot 2^{2l}$, tada je $q^2 = c \cdot 2^{2l} p^2 = c \cdot (2^l p)^2 = c \cdot p'^2, p' = 2^l p$. Dakle, kvadratni koren parnog broja k će biti iracionalan broj ako i samo ako je kvadratni koren neparnog broja c iracionalan broj.
   Razume se, kvadratni koren broja k je racionalan broj ako je broj c potpuni kvadrat. Ako c nije potpun kvadrat, onda pitanje da li je k racionalan ili iracionalan broj ostaje otvoreno.

Dakle, kvadratni koren broja 2^n je racionalan broj ako i samo ako je n paran broj. Kvadratni koren broja $c \cdot 2^n$ će biti iracionalan broj ako je n neparan broj, a ako je paran, onda će $c \cdot 2^n$ biti racionalan broj ako i samo ako je kvadratni koren neparnog broja c racionalan broj. Odgovorivši na pitanje kada je kvadratni koren neparnog broja racionalan broj, a kada nije, daćemo odgovor i na pitanje kada je kvadratni koren bilo kojeg broja racionalan broj, a kada nije.

14.6. Zašto 17?

Teodor je našao delimičan odgovor na pitanje o iracionalnosti kvadratnih korenova utvrdivši da kvadratni korenovi brojeva 3 i 5 nisu racionalni. Prema Platonovim rečima, sa svojim istraživanjem on je stao kod broja 17. Rukovodeći se Itardovom idejom,[6] razlog ovome našli su Bašmakova i Lapin.[7] Njihov dokaz je indirektan kao što je to i klasični par-nepar dokaz, a ključni argument koji koriste je činjenica da je svaki neparni kvadratni broj oblika $8n+1$.

Oni najpre primećuju da, ako se pretpostavi da je k paran broj koji nije potpuni kvadrat, onda se dokaz da je $\sqrt{k}$ iracionalan broj ne razlikuje od klasičnog par-nepar dokaza. Zato pretpostavljaju da je k neparan broj koji nije potpuni kvadrat, a da su p i q najmanji brojevi takvi da je $q^2 = kp^2$. Tada su q i p međusobno prosti brojevi pa ne mogu biti oba parni. Oni su zato oba neparni budući da je k neparan broj. Dakle, oni su oblika $2n+1$ pa su njihovi kvadrati oblika $4(n^2+n)+1$ ili

$$8\frac{n(n+1)}{2}+1, \quad \text{jer je } \frac{n(n+1)}{2} \text{ ceo broj.}$$

Zato iz pretpostavke $q^2 = kp^2$, sledi da je

$$8\Big(\frac{n(n+1)}{2} - k\frac{m(m+1)}{2}\Big) = k-1.$$

Dakle, broj $k-1$ je deljiv sa 8 pa postoji broj n takav da je $k = 8n+1$. Ako k nije ovog oblika, a takvi su, na primer, brojevi 5, 7, 11, 13, 15, onda nije $q^2 = kp^2$, pa su kvadratni korenovi ovih brojeva iracionalni. Ako je $k = 8n+1$, onda prethodna metoda nije delitvorna pa se za kvadratne korenove brojeva 17, 25, 33, itd., ne može reći da li su iracionalni ili nisu. I broj 9 je oblika $8n+1$ ali on je potpuni kvadrat pa je 17 najmanji broj za koji se na ovaj način ne može utvrditi da li je racionalan ili nije. Zato je Teodor stao kod ovog broja.

Kao što klasični par-nepar dokaz nije mogao biti poznat pre Teeteta, tako pre Teeteta nije mogao biti poznat ni dokaz koji su rekonstruisali Bašmakova i Lapin. To je zbog toga što je i njihov dokaz indirektan, i u njemu se upotrebljavaju isti argumenti kao i u par-nepar dokazu. Međutim, upotreba indirektne metode može se izbeći korišćenjem procesa uzastopnog polovljenja koji Euklid uvodi u dokazu stava IX.34. Zato Teodorovo otkriće pripada aritmetici koji su razvili rani pitagorejci.

Zaista, ako je k neparan broj koji nije potpun kvadrat, takav da je $q^2 = kp^2$, brojevi p^2 i q^2 biće ili oba parni ili oba neparni. Ako su neparni, onda su brojevi p^2-1 i q^2-1 deljivi sa 8.[8] Štaviše, ako je $q^2 = 8n+1 = k(8m+1) = kp^2$, onda je $k = 8(n-km)+1$, pa će i broj k, kada se umanji za 1, biti deljiv sa 8.

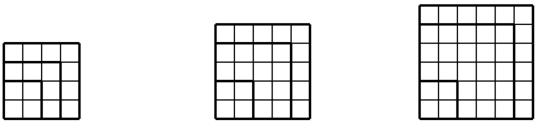
Ako su p^2 i q^2 parni brojevi, onda su i p i q parni pa se postupak uzastopnog polovljenja broja p završava ili nekim neparnim brojem ili brojem 2. Ako se završava neparnim brojem p', tada je i q'^2 $(= kp'^2)$ neparan broj budući da su i k i p'^2 neparni brojevi. Zato je i k broj oblika $8n+1$. Ako se postupak uzastopnog polovljenja broja p završava brojem 2, onda se upotrebom metode Menonovog roba može lako proveriti da brojevi $3\cdot 2^2 = 12$, $5\cdot 2^2 = 20$, $7\cdot 2^2 = 28$, $11\cdot 2^2 = 44$, $13\cdot 2^2 = 52$ i $15\cdot 2^2 = 60$ nisu potpuni kvadrati budući da je $3^2 < 3\cdot 2^2 < 4^2 < 5\cdot 2^2 < 5^2 < 7\cdot 2^2 < 6^2 < 11\cdot 2^2 < 7^2 < 13\cdot 2^2 < 15\cdot 2^2 < 8^2$. Štaviše, i slike kojima se ove nejedakosti mogu ilustrovati u analogiji su sa slikom kojom se ilustruju zaključci

[6] Videti [**27**, str. 33–39] i [**29**, str. 113f].

[7] Videti [**4**].

[8] Ova tvrdnja dokazana je upotrebom oblutaka, u odeljku 1.3 (slika 1.3.5).

Menonovog roba. Zato ne postoje brojevi p i q takvi da je $q^2 = kp^2$ kada je k neki od brojeva 3, 5, 7, 11, 13 i 15.



$$3^2 < 3 \cdot 2^2 < 4^2, \quad 4^2 < 5 \cdot 2^2 < 5^2, \quad 5^2 < 7 \cdot 2^2 < 6^2$$

Dakle, nezavisno od toga da li su brojevi p i q parni ili neparni, ako je k neparan broj koji nije oblika $8n+1$, i koji nije potpun kvadrat, ne postoje brojevi p i q takvi da je $q^2 = kp^2$. Zato su kvadratni korenovi brojeva 3, 5, 7, 11, 13 i 15 iracionalni. Odavde sledi da su iracionalni i kvadratni korenovi brojeva 6, 10, 12, 14 (zbog 2.b), a takođe i kvadratni koren broja 8 (zbog 1.a). Međutim, do istog zaključka ne možemo doći i za brojeve 17, 25, 33, ... koji su oblika $8n + 1$, tako da pitanje da li su i njihovi kvadratni korenovi iracionalni ili nisu, ostaje otvoreno.

14.7. Šta je crtao Teodor?

U Platonovom *Teetetu* (147 d), od Teeteta saznajemo da je Teodor *crtao nešto o kvadratima* ne bi li dokazao da kvadrati celobrojnih površina *od* 3 *stope,* 5 *stopa itd., imaju ivice koje nisu samerljive sa ivicom kvadrata površine jedne stope.*[9] Saznajemo i to da je Teodor razmatrao *svaki pojedini kvadrat do onog od* 17 *stopa*, a da je kod njega, iz nekog razloga, stao.

Sudeći prema Teetetovim rečima, Teodorovi dokazi su bili vizuelno očigledni, a njegovi crteži odnosili su se na pojedinačne primere kvadrata sve od onog koji je površine 3 stope pa do onog od 17 stopa. Međutim, iz Teetetovih reči sledi da je svoje dokaze Teodor mogao lako uopštiti tako da važe u neograničeno mnogo slučajeva budući da su se kvadrati, među kojima su istaknuti samo oni od 3, 5 i 17 stopa, prema ovim rečima, *po broju pokazivali beskonačni.*[10]

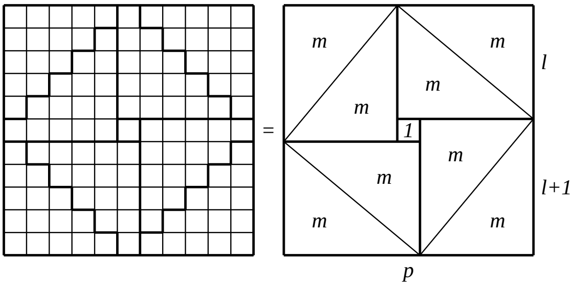
Ostaje pitanje kako su mogli izgledati Teodorovi argumenti u dokazima koje je demonstrirao svojim sagovornicima u dijalogu i, posebno, kako su izgledali njegovi crteži kvadrata o kojima je pripovedao. Budući da je pošao od kvadrata kojem je površina 3 stope, morao je najpre naći odgovor na pitanje da li postoje brojevi p^2 i q^2 takvi da je $q^2 = 3p^2$. Međutim, da bi bilo $q^2 = 3p^2$, brojevi p^2 i q^2 moraju biti ili oba parni ili oba neparni. Ako su oba neparni, onda postoje brojevi m i n takvi da je $p^2 = 8m + 1$ i $q^2 = 8n + 1$. Ovu tvrdnju jednostavno je ilustrovati slikom na kojoj su brojevi predstavljeni jediničnim kvadratima, na isti način na koji su predstavljeni u dijalogu Sokrata i Menonovog roba. Zaista, ako se iz, na

---

[9] Treba imati na umu da su ovo Teetetove reči, tako da terminologija koju on u Platonovom dijalogu upotrebljava da bi nas obavestio o Teodorovim otkrićima, možda nije morala biti svojstvena i Teodoru.

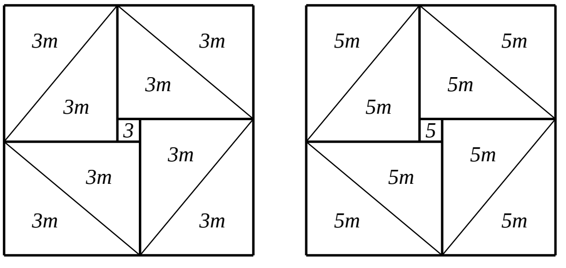
[10] O uslovima koje treba da zadovolji rekonstrukcija Teodorovog dokaza raspravlja Knor [**29**, str. 96].

taj način predstavljenog kvadratnog broja p^2, isključi jedinica u sredini, ostatak se može razložiti na 8 međusobno jednakih trougaonih brojeva (slika 14.7.1).[11]



SLIKA 14.7.1. Ako je $p = 2l+1$, onda je $p^2 = 8m+1$, $m = l(l+1)/2$

Ostaje da se utvrdi da li postoje brojevi m i n takvi da je $p^2 = 8n + 1 = 3(8m + 1) = 3q^2$. I u tome slika može da bude od pomoći.



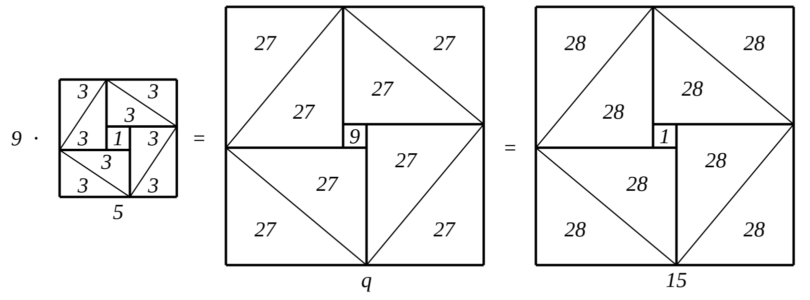
SLIKA 14.7.2. $3(8m + 1) \neq 8n + 1$, $5(8m + 1) \neq 8n + 1$

Zaista, ako kvadratni broj $8m + 1$ pomnožimo sa 3, onda jedinicu u sredini ovog kvadratnog broja treba zameniti brojem 3, a svaki trougaoni broj m, brojem $3m$ (slika 14.7.2). Da bi broj $3(8m + 1)$ bio jednak kvadratnom broju $8n + 1$, u njegovoj sredini mora ostati jedinica, a ostatak $(3 - 1 = 2)$ treba podeliti na 8 *delova* koje zatim treba dodati trougaonim brojevima na koje je razložen kvadratni broj $p^2 = 8m + 1$. Međutim, broj dva nije deljiv sa 8 pa to nije moguće. Zato ne postoje neparni brojevi p^2 i q^2 takvi da je $q^2 = 3p^2$. Potraga za parnim brojevima p^2 i q^2 takvim da je $q^2 = 3p^2$, upotrebom postupka njihovog uzastopnog polovljenja jednostavno se svodi na problem nalaženja takvih neparnih brojeva,[12] a njih nema. Zato ivica kvadrata kojem je površina 3 stope nije samerljiva sa ivicom kvadrata od jedne stope.

Budući da ni broj $5 - 1 = 4$ nije deljiv sa 8, ni ivica kvadrata kojem je površina 5 stopa neće biti samerljiva sa ivicom kvadrata od jedne stope (slika 14.7.2). Isto

[11] Videti odeljak 1.3.

[12] Videti prethodni odeljak 14.6.



SLIKA 14.7.3. $p^2 = 25 = 5^2$, $q^2 = 9p^2 = 225 = 15^2$

se može dokazati i za ivicu kvadrata kojem je površina 7 stopa. Štaviše, iz istih razloga nijedna ivica kvadrata kojem je površina k stopa neće biti samerljiva sa jediničnom duži, kadgod je k neparan broj koji, kada se umanji za jedan, nije deljiv sa 8.

Iako to Platon ne pominje, prvi broj koji, umanjen za jedan ostaje deljiv sa 8, je broj 9. Neposredno se proverava da je on kvadrat broja tri ali, svejedno, može se postaviti pitanje da li se upotrebom prethodne metode može doći do zaključka da postoji par brojeva m, n takav da su $8m+1$ i $8n+1$ jednaki kvadratnim brojevima p^2 i q^2, a da je $8n+1 = 9(8m+1)$. Razume se, ako je $m = 1$ onda je $n = 10$, pa je $p^2 = 9 = 3^2$, a $q^2 = 81 = 9^2$. Na isti način, za $m = 3$ biće $n = 28$, pa je $p^2 = 25 = 5^2$, a $q^2 = 225 = 15^2$ (slika 14.7.3). Štaviše, brojevi $8m+1$ i $8n+1$ biće potpuni kvadrati i za $m = 6, 10, 15$ itd. Zato je ivica kvadrata kojem je površina $9 = 3^2$ stopa, samerljiva sa ivicom kvadrata od jedne stope. Iz istih razloga će ivica kvadrata kojem je površina k stopa biti samerljiva sa jediničnom duži kadgod je k potpun kvadrat.[13]

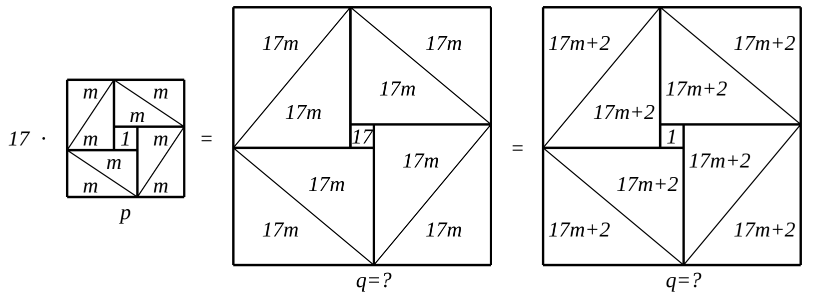
Sledeći broj koji, kada se umenji za jedan, ostaje deljiv sa 8, je broj 17. Međutim, ovaj slučaj bitno se razlikuje od prethodnih. Sada postoje brojevi m i n takvi da je $8n+1 = 17(8m+1)$, štaviše, za neke m broj $8m+1$ biće kvadratni broj (npr. za $m = 3$ biće $p^2 = 25$), ali pokušaji da se uvećavanjem broja m dođe do broja $8n+1$ koji je takođe neki kvadratni broj, uvek ostaju neuspešni (slika 14.7.4). Zato se ne može doći do odgovora na pitanje da li je ivica kvadrata kojem je površina 17 stopa, samerljiva sa ivicom kvadrata od jedne stope. Iz istih razloga, ovim načinom ne može se utvrditi da li je ivica kvadrata kojem je površina k stopa, samerljiva sa ivicom jediničnog kvadrata, ako je k neparan broj koji nije potpun kvadrat takav da, kada se umanji za jedan, ostaje deljiv sa 8.

Upotrebom postupka uzastopnog polovljenja iz stava IX.34 sada se problem nalaženja kvadrata kojima je površina k stopa takvih da k paran broj, a ivica im je samerljiva sa ivicom jediničnog kvadrata, može jednostavno svesti na isti problem kada je k neparan broj.[14]

---

[13] Videti i dokaz iz odeljka 3.5.

[14] Videti prethodni odeljak 14.6.



SLIKA 14.7.4. Postoji li m takav da je $17(8m+1) = 17p^2$ potpun kvadrat?

14.8. Nova aritmetika

Budući da je 17 prvi nekvadratni broj koji je oblika $8n+1$, Teodor je kod njega morao da zastane. Posle njegovih istraživanja problem iracionalnosti kvadranih korenova prirodnih brojeva ostao je otvoren samo za brojeve koji su oblika $2^m(8n+1)$. Do opšteg rešenja problema došao je Teetet, a Euklid je njegovo rešenje smestio u osmu knjigu *Elemenata*.

Teodorovi zaključci, kao i ranopitagorejski dokaz da kvadratni koren broja 2 nije racionalan broj, zasnovani su na istom znanju teorije parnih i neparnih brojeva iz devete knjige. To je znanje koje dolazi iz aritmetike oblutaka. Kao što nije u *Elemente* uvrstio stav o iracionalnosti kvadratnog korena broja dva, Euklid to nije učinio ni sa Teodororovim primerima. Teodorova teorija nije bila delotvorna samo u slučaju brojeva koji su oblika $2^m(8n+1)$. U nameri da utvrdi koji su od ovih brojeva racionalni, a koji nisu, i time reši opšti problem, Teetet je morao da utemelji novu aritmetiku. Za razliku od Teodorove, ona je sačuvana u *Elementima*.

Sudeći prema Euklidovom dokazu stava VIII.14, nova teorija bila je nezavisna od aritmetike parnih i neparnih brojeva. Za razliku od rane pitagorejske aritmetike, nova aritmetika koja je utemeljena u nameri da se dokaže stav VIII.14, nije počivala na očiglednosti slika. Štaviše, neke od ključnih teorema ove teorije, poput stavova VII.24 i VIII.6, imaju relativno složene indirektne dokaze. Uz to je i deduktivna struktura dokaza stava VIII.14 znatno složenija od deduktivnih struktura ranopitagorejskih i Teodorovih dokaza koje su sasvim jednostavne, a najčešće trivijalne. Složenost teorije koju je bilo neophodno razviti da bi se rešio opšti problem u mnogome prevazilazi ranopitagorejsku teoriju parnih i neparnih brojeva.

U nameri da dokaže stav VIII.14, Teetet je morao da utemelji aritmetiku koja se razlikovala od aritmetike koju je upotrebljavao Teodor i pitagorejci koji su mu prethodili. U međuvremenu niko drugi nije mogao to da učini budući da je Teetet bio Teodorov učenik te se između njih dvojice niko drugi nije mogao umetnuti. Sudeći prema upotrebi indirektne metode u ovoj teoriji, tradicionalni par-nepar dokaz pripada ovoj novoj aritmetici koja započinje sa Teetetovim otkrićima.

Razvojem nove teorije očiglednost aritmetičkih dokaza postala je nevažna. To se nije dogodilo sa geometrijskim dokazima budući da bi većinu njih bilo veoma teško, ako ne i nemoguće pratiti bez slika kojima su ilustrovani. Ova prednost aritmetike u odnosu na geometriju, koju pominje Aristotel tvrdeći da je *aritmetika tačnija od geometrije*, došla je kao posledica Teetetovih dostignuća. Slédeći njega, Grci su prihvatili novi pristup aritmetici u kojem je *tačnost* prevladala vizuelnu očiglednost. Aritmetičke knjige Euklidovih *Elemenata* slede tradiciju ove nove aritmetike. Neopitagorejci Nikomah i Teon će se vratiti ranopitagorejskoj tradiciji.

Literatura

[1] M. Arsenijević, *Prostor Vreme Zenon*, Filozofske studije, Beograd, Zagreb, 1986.

[2] A. Barker, *The Euclidean Sectio Canonis*, in: Andrew Barker (ed.), *Greek Musical Writings* **2**, Harmonic and Acoustic Theory, 190–208, Cambridge University Press, 1990.

[3] DŽ. Barnet, *Rana grčka filozofija,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2004.

[4] И. Г. Башмакова, А. И. Лапин, *Пифагор*, Квант **1** (1986).

[5] O. Becker, Eudoxus-Studien: I: Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik* B. II (1933), 311–330. [reprinted in Jean Christianidis, ed. Classics in the history of Greek Mathematics, Boston Studies in the Philosophie of Science, vol. 240, Dordrecht/Boston: 2004, 191–209, with intro. by Ken Saito, 188–9.]; II: Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen, 369–387; III: Spuren eines Stetigkeitsaxioms in der Art des Dedekindschen zur Zeir des Eudoxos, vol. 3 (1936) 236–244; IV: Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten in der griechischen Mathematik, 370–388; V: Die eudoxische Lehre von den Ideen und den Farben, 3 (1936) 389–410.

[6] O. Becker, *Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der euklidischen Elemente*, in: Begründet von O. Neugebauer, J. Stenzel, O. Toeplitz (eds.), *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik: Abteilung B: Studien* **3**, 533–553, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1936.

[7] K. Borsuk, W. Szmielew, *Foundations of Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[8] M. Božić, *Pregled istorije i filozofije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2002.

[9] W. Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1972.

[10] J. H. Conway, J. Shipman, *Extreme proofs I: The irrationality of* $\sqrt{2}$, The Mathematical Intelligencer **35**(3) (2013), 2–7.

[11] R. Courant, H. Robbins, *What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, Oxford, England, 1996.

[12] H. Diels, *Predsokratovci, fragmenti*, vol. I–II, Naprijed, Zagreb, 1983.

[13] Diogen Laertije, *Životi i mišljenja istaknutih filozofa*, BIGZ, Beograd, 1979.

[14] M. Đurić, *Platonova Akademija i njen politički rad*, Naučno delo, Beograd, 1960.

[15] M. Đurić, *Istorija helenske književnosti*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1996.

[16] M. Đurić, *Istorija helenske etike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1997.

[17] Euklid, *Elementi*, Naučna knjiga, Beograd, 1957.

[18] D. Fowler, *Ratio in early Greek mathematics*, Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) **1**(6) (1979), 807–846.

[19] D. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Press, Oxford, 1999.

[20] K. von Fritz, *The discovery of incommensurability by Hypassus of Metapontum*, Ann. Math. (2) **46**(2) (1945), 242–264.

[21] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5^{th} Ed., Claredon Press, Oxford, 1979.

[22] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* I–III (2^{nd} Ed.), Dover, New York, 1956.

[23] T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. I–II, Dover, New York, 1981.

[24] T. L. Heath, *The Works of Achimedes* Dover, New York, 2002.

[25] J. P. Hogendijk. *Anthyphairetic Ratio Theory in Medieval Islamic Mathematics*, in: Yvonne Dold-Samplonius et al. (eds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Boethius Band 46, str. 187–202, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2002.

[26] C. A. Huffman, *Philolaus of Croton: Pythagorean and Presocratic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[27] J. Itard, *Livres arithmétiques d'Euclide*, Hermann, Paris, 1961.

[28] Jamblih, *Pitagorin život*, Dereta, Beograd, 2012.

[29] W. Knorr, *The Evolution of The Euclidean Elements*, Reidel, Dordrecht, 1975.

[30] W. Knorr, *"La Croix des Mathématiciens": The Euclidean Theory of Irrational Lines*, Bull. Am. Math. Soc. **9**(1) (1983), 41–69.

[31] W. Knorr, *The Ancient Tradition of Geometric Problems,* Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1986.

[32] F. R. Levin, *Unity in Euclid's 'Sectio Canonis'*, Hermes **118**(4) (1990), 430–443.

[33] D. Lopandić, *Geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1980.

[34] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Total Design, Beograd, 1997.

[35] Z. Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, 2009.

[36] Z. Lučić, *Irrationality of the Square Root of Two — The Early Pythagorean Proof, Theodorus's and Theaetetus's Generalizations*, Math. Intell. **37**(3) (2015), 26–32.

[37] Z. Lučić, *Who proved Pythagoras's theorem?*, Math. Intell. **44** (2022), 373–381.

[38] Z. Lučić, *Traces of 'geometric algebra' in Euclid's elements*, British Journal for the History of Mathematics (2025), 1–16. https://doi.org/10.1080/26375451.2025.2456896

[39] B. Mazur, *How Did Theaetetus Prove his Theorem?*, in: P. Kalkavage, E. Salem (eds.), *The Envisioned Life: Essays in Honor of Eva Brann*, 227–250, Paul Dry Books, Philadelphia, 2007.

[40] E. E.Moise. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1974.

[41] I. Mueller, *Greek arithmetic, geometry and harmonics: Thales to Plato*, in: C. C. W. Taylor (ed.), *Routledge History of Philosohy* **I**, 249–297, Routledge, London and New York, 1998. (Prevod na srpski, Plato, Beograd, 2007).

[42] I. Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Dover, Mineola, New York, 2006.

[43] Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic*, in: R. M. Hutchins (ed.), *Great Books of Western World* **11**, 811–848, William Benton, Encyclopedia Britanica, Chicago etc., 1978.

[44] Pappus of Alexandria, *The Commentary of Pappus on Book X of Euclids Elements*, by W. Thomson translation, Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1930.

[45] Plutarch's *Morals*, Litle, Brown, and Company, Boston, 1878.

[46] Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, by G. R. Morrow translation, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[47] Ptolemy *Harmonics*, by Jon Solomon translation and commentary, Brill, Leiden, Boston, Köln, 2000.

[48] M. Radojčić, *Opšta matematika*, Naučna knjiga, Beograd, 1950.

[49] M. Radojčić, *Elementarna geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1961.

[50] Z. Šikić, *Matematika i muzika*, HMD, Zagreb, 1999.

[51] Theon of Smyrna, *Mathematics Useful for Understanding Plato*, Wizards Bookshelf, San Diego, 1979.

[52] I. Thomas, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, vol. I–II*, The Loeb Classical Library, Harvard University Press, Cambridge, London, 1998.

[53] B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, P. Noordhoff, Groningen, 1954.

[54] B. L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, 1983.

[55] L. Zhmud, *Pythagoras as a mathematician*, Hist. Math. **16** (1989), 249–268.
[56] L. Zhmud, *The Origin of the History of Science in Clasical Antiquity*, Walter de Gruyter, Belin, New York, 2006.
[57] L. Zhmud, *Pythagoras and the Early Pythagoreans*, Oxford University Press, 2012.

Indeks imena

Mathematical Institute
of the Serbian Academy
of Sciences and Arts