Omaggio dell'Autore

DEI PRINCIPALI METODI
IN GEOMETRIA

E IN ISPECIAL MODO DEL METODO ANALITICO

PRELEZIONE

AL CORSO DI GEOMETRIA ANALITICA

LETTA IL GIORNO 10 DICEMBRE 1881

DAL

D.r GIUSEPPE VERONESE

PROFESSORE STRAORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI PADOVA

DRUCKER & TEDESCHI
LIBRAI-EDITORI
VERONA | PADOVA
Libreria alla Minerva | Libreria all'Università
1882

Padova Tip. Seminario.

Signori

Sono appena quattro anni che ottenni nella Regia Università Romana il diploma di Laurea nelle matematiche discipline, dopo aver percorso tre anni di studio nella sezione di meccanica e matematica del Politecnico di Zurigo. Qui feci i miei primi passi nello studio della Geometria, di questa scienza così altamente filosofica, ponendo mano a due lavori; uno dei quali intitolato Nuovi Teoremi sull'Hexagrammum mysticum ebbe più tardi l'onore d'essere inserito negli Atti della R. Accademia dei Lincei e di trovare benevola accoglienza in Italia e fuori, dove varie pubblicazioni si seguirono sullo stesso argomento [1]).

1) *Cremona*. Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'Esagrammo di Pascal. Atti della R. Acc. dei Lincei 1877.
Caporali. Sui punti e sui piani singolari della superficie di Kummer. Atti della R. Acc. dei Lincei 1878. — Sull' Esaedro completo. Atti della R. Acc. di Napoli 1881.
Miss Ladd. On the Pascal theorem. American Iournal Vol II.
Wedekind. Ueber perspectiwisch liegende Dreiecke. Math. Annalen Vol. XVI.
Bellavitis. Sull' Esagrammo di Pascal. — Rivista scientifica del R. Istituto Veneto 1877.
Veronese. Sopra alcune notevoli configurazioni ecc. Atti della R. Acc. dei Lincei 1881.

Un anno prima che io conseguissi la Laurea fui assistente del professore di Geometria projettiva e descrittiva nella R. Università Romana e tale rimasi sino alla fine del 1880, sebbene nel 1879 io abbia avuto l'onore d'indossare per un anno la gloriosa divisa del soldato. Durante l'anno scolastico testè decorso fui mandato dal Ministero della Pubblica Istruzione a perfezionarmi all'Estero negli studî geometrici. Ebbi occasione in quest'anno sotto l'influenza potente del celebre matematico tedesco prof. Klein di approfondirmi in molte questioni matematiche, che alla mia mente erano rimaste sin allora oscure se non del tutto sconosciute.

Ho ricordato questi modestissimi titoli della mia operosità, solo perchè a sfogo dell'anima mia e a testimonianza dei miei più vivi sentimenti di amore e di gratitudine verso i miei maestri, mi fosse data occasione di render pubbliche grazie agli illustri professori Fiedler di Zurigo, Cremona e Battaglini di Roma e Klein di Lipsia, ai quali devo e dovrò tanto finchè mi basti la memoria.

Ed ora, signori, come posso serbare l'animo tranquillo nel presentarmi a voi, in questa celebre Università, dovo Galileo insegnava le sue grandi dottrine, facendo accorrere intorno a sè la gioventù avida di sapere d'ogni parte d'Europa, e segnando l'epoca più gloriosa della scienza Italiana? Com'è possibile che io non sia trepidante dinanzi a voi, pensando che appena è sceso nel sepolcro quell'uomo che or già un anno spandeva ancora tanta luce da questo seggio insegnando la Geometria analitica; quell'uomo,

al quale mi legò sempre un profondo sentimento di amore, d'ammirazione e di venerazione e la cui immagine è scolpita a caratteri indimenticabili sul vostro cuore? Fu quell'uomo che in tempi di ansia, di sconforto e di dolore per l'Italia nostra seppe tener alta la bandiera della scienza Italiana, quando le scienze matematiche risorgevano maestose in altri paesi; quell'uomo infine che più che gloria d'Italia è gloria della scienza.

Io sentirei mancarmi le forze ed esiterei dinanzi alla grande responsabilità di seguire le orme dell'illustre Bellavitis, se non fosse la speranza che mi conforta, che voi vorrete, o giovani carissimi, aiutarmi nel mio difficile incarico con la vostra fiducia, e che volonterosi v'accompagnerete a me nei diversi argomenti, a cui volgeremo la nostra attenzione in quest'anno. I ricordi ancor freschi della mia vita di studente e la mia giovinezza vi sieno pegno che io nel mio insegnamento cercherò più che altro di esser vostro aiutatore ed amico, e che non risparmiando fatica nell'appianarvi le vie della scienza ambirò solo il vostro profitto e la cara lusinga che le nostre relazioni sieno cementate sempre dai più cordiali sentimenti di amore, di stima e di rispetto reciproco.

Non è cosa facile di conciliare la forma e lo scopo della prelezione con la natura della nostra scienza. In un corso qualunque di matematica tutto si segue con tale concatenamento, che a chi non abbia ben apprese le verità prime è impossibile di comprendere quelle che da esse scaturiscono. Ed è per tal ragione che io vi parlerò dei metodi principali in geometria e specialmente del metodo analitico, e solo serberò all'ultimo di toccar dei sommi criterî del programma del nostro corso.

Sono due le parti fondamentali delle matematiche pure, l'analisi e la geometria. La prima si può definire come la scienza delle quantità, fatta astrazione da qualsiasi loro significato, mentre la geometria è la scienza delle figure nello spazio, sia rispetto alla loro grandezza, sia rispetto alla loro posizione.

Nella storia delle matematiche, questi due grandi rami si contendono alternativamente il primato, e ciò dipende sempre dalla scoperta in uno o nell'altro campo di qualche grande verità, sulla quale si volge l'attenzione del mondo scientifico. Mi occuperò qui della sola geometria nei suoi rapporti con l'analisi.

Sin dall'epoca più remota vediamo la geometria esser tenuta in alto onore dai più grandi filosofi greci, come Pitagora e Platone, e svolgersi con grande splendore per le mirabili scoperte di Euclide, di Archimede e di Apollonio. All'epoca di questi due ultimi la geometria si divise in due grandi rami, la geometria delle misure o d'Archimede e la geometria di posizione o d'Apollonio [1]). Queste due grandi divisioni esistono ancora tuttodì, quantunque in modo più generale. Esse determinano due grandi classi di

1) *Chasles.* Aperçu hystoriche p. 22.

proprietà geometriche, le proprietà *metriche*, quelle cioè relative alla grandezza delle figure e le proprietà *projettive*, che rimangono inalterate mediante il principio del projettare e il principio correlativo del segare.

Gli studi astronomici diedero origine alla geometria della sfera e pare sia stato il primo Ipparco, 150 anni av. Cristo, a scrivere sulla trigonometria rettilinea e sferica, al quale si attribuisce pure l'invenzione della projezione stereografica [2]). Questa projezione consisteva nel projettare da un punto di una sfera i punti di essa sopra il suo piano tangente nel punto diametralmente opposto al primo. La projezione stereografica è ancora oggi un metodo efficace nelle ricerche e nelle applicazioni geometriche, e si estende a tutte le superficie di 2.º grado, di quelle superficie cioè, che sono incontrate da una retta qualunque dello spazio in due punti.

Quantunque la geometria antica vanti tanti luminari, pure manca di quelle grandi generalità, che distinguono essenzialmente la moderna; le questioni vengono in essa trattate una per una, staccate le une dalle altre con metodi affatto speciali, e non riesce allo spirto di scoprire il nesso intimo che tutte le compenetra.

Una grande epoca per la geometria, foriera dell'epoca nostra, fu segnata dal Cavalieri con la sua teoria degli indivisibili, dal Desargues, che per primo ridusse a scienza la prospettiva, dal Pascal colle sue

1) *Chasles.* Aperçu hystorique p. 24.

ricerche sulla cicloide, studiata già dal Galileo e dal Torricelli, e col suo famoso teorema sull'Hexagrammum mysticum; e finalmente dal genio dei due geometri francesi Fermat e Descartes, i quali seppero trarre dall'analisi un potente aiuto per la geometria, ponendo le basi di quella, che si chiama comunemente *Cartesiana* o *analitica*. In essa un punto del piano viene determinato da due grandezze o *coordinate*, cioè dalle due distanze di esso punto da due rette fisse del piano stesso, chiamate *assi coordinati*. Queste due distanze sono misurate sopra le due rette parallele condotte dal punto agli assi. Se un punto si muove nel piano in modo continuo e in due direzioni opposte, avanti e indietro, secondo una legge matematica, esso descrive una curva. Le coordinate del punto mobile, legate da questa legge, devono soddisfare ad un' equazione algebrica o trascendente, che esprime quella legge, l'equazione cioè della curva. Se l'equazione è di grado n, la curva dicesi d'ordine n, vale a dire ch'essa viene incontrata da una retta qualunque del piano della curva in n punti. La determinazione analitica di questi n punti, dipende da un'equazione di grado n ad un'incognita; quindi se tutte o alcune delle radici sono reali, ne viene che i punti d'incontro della retta con la curva sono tutti o in parte reali.

Analogamente un pnnto dello spazio a tre dimensioni viene determinato da tre grandezze, o coordinate. Se un punto si muove in modo continuo in due direzioni opposte secondo una legge matematica, esso genera una curva non piana, che si chiama perciò gobba

o a doppia curvatura. Se una curva si muove con la stessa legge di quel punto, essa genera un ente a due dimensioni, vale a dire una superficie, la quale viene rappresentata da un' equazione di grado n nelle coordinate di un suo punto qualunque, se una retta qualunque dello spazio la incontra in n punti.

Da ciò è manifesto quale aiuto sia l'analisi alla geometria e come questa possa considerarsi sotto un certo punto di vista quale applicazione dell' analisi allo spazio; poichè rappresentando un' espressione di n^{mo} grado a due incognite una grandezza, eguagliandola a zero e riguardando le incognite come le coordinate di un punto nel piano, quell' espressione algebrica ci dà un ente geometrico, cioè una curva d'ordine n.

È con questa grande scoperta dei due geometri francesi e specialmente del Descartes che la geometria cominciò ad acquistare quei metodi generali di ricerca, che tanto distinguono la geometria moderna dall'antica [1]).

Accanto alla geometria analitica del Descartes sorse un'altra non meno importante. Il trattato sulle coniche d'Apollonio, le collezioni di Pappo Alessandrino, i metodi di projezione usati già praticamente dagli antichi pittori, la prospettiva del Desargues e il suo celebre teorema su sei segmenti, determinati sopra una retta dai sei lati di un quadrangolo, il teorema

1) Dallo scritto del *Günther*. Anfänge und Entwikelungsstadien des Coordinatenprincipes Nürnberg 1877, risulta chiaro come della scoperta di questa geometria non si possa dire con lo Chasles *Prolem sine matre creatam*.

di Pascal sull'Hexagrammum, formano un corpo di dottrine che oggidì servono di base alla geometria *projettiva;* la quale viene eziandio chiamata da molti geometria *pura* o *sintetica.* Geometria projettiva indica benissimo le materie ch'essa tratta, non già il metodo che impiega; poichè si può anche fare della geometria projettiva con l'aiuto dell'analisi; geometria pura invece non indica di quali questioni essa si occupa, ma determina esattamente il metodo di ricerca in essa predominante.

E qui mi sia permesso di dire qualche cosa intorno all'origine della proiettiva.

La prospettiva pratica era già conosciuta dagli antichi artisti tra i quali il Vinci, il Vignola e il Dürer, e siccome dal processo geometrico della prospettiva scaturiscono i concetti fondamentali della geometria projettiva e descrittiva moderna, così a me pare che lo storico non possa dimenticar troppo quegli artisti, come fece lo Chasles nel suo eruditissimo Aperçu hystorique. La teoria delle figure omologiche piane risulta infatti immediatamente dalla prospettiva di una figura piana. Per ottenere la prospettiva di un oggetto si projettano tutti i suoi punti dall'occhio sopra il piano del disegno; si ha così un fascio di raggi uscente dall'occhio, il quale interseca il quadro secondo una figura, ch'è l'immagine geometrica dell'oggetto. Questa esercita sull'occhio, geometricamente parlando, la stessa impressione dell'oggetto, fatta astrazione, s'intende, dal colore. Ebbene; se l'oggetto è una figura piana, esso e la sua immagine sono due figure *omologiche.* Un punto od una retta dell'og-

getto e la immagine, si dell'uno che dell'altra, sono denominati punti o rette *corrispondenti.* Da ciò è evidente che le rette corrispondenti s'intersecano nella retta, ove il piano dell'oggetto incontra quello del quadro.

Gli antichi pittorl — è ovvio a vedersi — non hanno il merito di aver usato del principio prospettivo quale metodo di ricerca in geometria, ma non bisogna neppure disconoscere, che il geometra studiando quei metodi pratici ha potuto trarne grandissimo profitto.

La geometria pura ha metodi suoi propri e non fa uso dell'analisi, almeno per quanto può, onde scoprire la dipendenza mutua delle cose. Essa studia le figure coi loro elementi, e per mezzo del puro ragionamento scopre la catena che le unisce. Il pensiero s'addentra nei loro più reconditi penetrali e direi qnasi vi spazia unendole e separandole a vicenda. Questa geometria è più luminosa e alletta lo spirito più dell'analitica, perchè nel processo dimostrativo nulla rimane oscuro. Ma convien pur dire che essa è molto meno generale ed esatta della sua compagna o più propriamente dell'analisi; ed anzi fino ad oggi non è riuscita ad emanciparsi nel tutto da qualche suo concetto fondamentale; come ad esempio quello, che serve a determinare i punti d'incontro di due curve piane. Tante cose nel processo analitico sono una pura conseguenza del calcolo, senza che noi finora possiamo conoscere l'intima ragione della loro verità, mentre non è così nella geometria pura, dove non si giunge ad un risultato qualsiasi, senza essersi data pienamente ragione di ogni passo fatto nel procedimento della dimostrazione. L'analitica oltre a ciò ha, per le difficoltà o complicazioni del calcolo, il difetto di far perdere di vista nella maggior parte dei casi la figura, oggetto principale delle nostre investigazioni. Essa trova però maggiori applicazioni nello studio dei fenomeni naturali ed ha una grandissima importanza nella maggior parte delle altre scienze matematiche.

Questi due metodi geometrici si completano l'un l'altro; se il primo procede con maggior esattezza e si presta meglio allo studio delle proprietà metriche, il secondo ci rende le cose più visibili, più trasparenti, più plastiche. Che sia più difficile l'uno o l'altro, ciò dipende in parte dalle questioni, che vogliansi considerare, e in parte anche dalla maggiore o minore abitudine del geometra piuttosto in un metodo che nell'altro. E mi rattrista l'animo di dover dire che non sono pochi coloro, i quali provano una certa ripugnanza per la geometria e in ispecial modo pel metodo puro; è conseguenza questa più che altro del non essersene occupati e di non averne l'abitudine. L'analisi ha senza dubbio dei grandi vantaggi sulla geometria, ma non si deve dimenticare che la più sublime e grande scoperta dell'analisi, il calcolo infinitesimale, ebbe origine dalla geometria. Nell'analitica l'analisi è il mezzo non già lo scopo, ond'è mestieri di rendere i risultati ottenuti più visibili, che sia possibile, con l'aiuto di considerazioni geometriche pure, affinchè la mente possa meglio afferrarli e percepirli.

L'analisi stessa e le altre scienze esatte rendono

i loro risultati più chiari e maggiormente percepibili con le risorse inesauribili della geometria.

La maggior parte dei matematici s'occupava già della geometria cartesiana, quando sorse un'era novella per le scienze matematiche pure ed applicate con la più grande scoperta, che sia mai stata fatta nel campo matematico, la scoperta del calcolo infinitesimale del Newton e del Leibnitz verso la fine del XVII secolo. Se la geometria fu per qualche tempo abbandonata, con questo grande ritrovato le si aprirono nuovi vasti e sconfinati orizzonti. E così infatti doveva essere, perchè una scoperta fatta in un ramo delle matematiche non può rimanere senza influenza sulle altre scienze, scopo delle quali è la ricerca della pura e semplice verità.

Il Newton stesso coi suoi Principì della filosofia naturale, il Maclaurin col suo trattato delle proprietà generali delle curve geometriche, l'Eulero colle sue ricerche sulle curve, sui raggi di curvatura delle superficie e col suo teorema sui poliedri, il Legendre e il Lambert contribuirono moltissimo allo studio della geometria. Ma già l'attenzione generale s'era rivolta all'analisi e mentre questa trovò sommi cultori come l'Eulero, il Laplace, il Legendre e il Lagrange, la geometria pura cadde in oblio, fino al principio del nostro secolo, che segnerà senza dubbio nella storia delle matematiche una delle epoche più feconde.

Spettava al genio creatore di Monge di rialzare alla fine del secolo passato gli studî geometrici con la nuova scienza della geometria *descrittiva*.

Questa scienza è piuttosto pratica che teorica; essa trae profitto dalle leggi geometriche dei corpi, onde rappresentarli in un piano, cosicchè si può benissimo chiamarla la scienza del disegno e del modellare geometrico.

La prima rappresentazione conosciuta anticamente di un corpo sopra un piano è la prospettiva, in essa il centro di projezione è l'occhio, cioè un punto a distanza finita. Il Monge invece di generalizzare il concetto della prospettiva considerando l'occhio come un punto e il quadro come un piano qualsiasi, considerò addirittura il centro di projezione all'infinito. Il primo concetto sarebbe stato una conseguenza logica del procedimento adoperato in matematica, col quale dal particolare si passa al generale, onde ottenere come dipendenti da un solo principio molte cose, che sono senza legame.

Nella projezione del Monge tutti i raggi projettanti i punti dell'oggetto sono paralleli ed è perciò ch'essa viene chiamata projezione parallela. Perchè la geometria descrittiva servisse meglio alla pratica, il Monge immaginò i raggi projettanti perpendicolari al piano di projezione, e in luogo di considerare un solo piano ne considerò due perpendicolari fra loro. Un esempio semplicissimo di questa projezione è il metodo adoperato per disegnare la pianta e l'alzato di un edificio.

Oggi giorno questa scienza ha acquistato la sua generalità col metodo della projezione centrale, le

cui basi sono già stabilite nel trattato delle proprietà projettive delle figure del sommo Poncelet e che venne adoperato con grande maestria dal Fiedler nel suo trattato di geometria descrittiva. Con questo metodo si usa di un solo centro e di un solo piano di projezione. Tutti i metodi di projezione ne sono una immediata conseguenza; ma se esso serve meglio a far vedere il concatenamento dei diversi sistemi, se esso serve meglio a sviluppare la mente del giovane, se esso infine è in più perfetta armonia con la geometria moderna, pure in onta a questo è a preferirsi nella pratica il metodo della projezione ortogonale di Monge.

Pochi sono quei geometri, che si occupano di geometria descrittiva, e questo dipende, come già dissi, perchè essa è una scienza eminentemente pratica e non è in generale un metodo di ricerca. Non si deve però credere, che si possano ottenere con la geometria analitica e projettiva gli stessi risultati della descrittiva. Per esempio quando si tratta di determinare nella proiettiva o nell'analitica l'intersezione di due corpi, si dice: tagliamo i due corpi con un piano, esso li interseca secondo due curve; i punti comuni a queste due curve appartengono evidentemente alla linea d'intersezione di essi. Ma in geometria descrittiva non basta, perchè qui si tratta di disegnare la linea d'intersezione dei due corpi e bisogna a tal uopo adoperare quegli artifizî di costruzione, di cui non fa punto uso nè l'analitica nè la projettiva. Oltre a ciò, di certi teoremi delle figure piane, che si possono spiegare con la geometria descrittiva non si occupa la projettiva, perchè essi dipendono dagli elementi, che fissano l'oggetto rispetto al centro e al piano di projezione, come io spero di poter meglio dimostrare in un lavoro sulla geometria descrittiva dello spazio a quattro dimensioni.

Se essa, come abbiam detto, non è un metodo di ricerca, diede però coll'opera del Monge un immenso impulso agli studi geometrici puri ed analitici, essa ha contribuito nel far sorgere l'idea di ciò che i tedeschi chiamano Anschauungsvermöge (potenza intuitiva dello spazio); e credo anzi che oggi stesso la descrittiva, trattata specialmente col metodo della projezione centrale, valga meglio della geometria pura a famigliarizzare lo spirto coi concetti dello spazio; tant'è vero, che in qualcuna delle Università germaniche, dove la scienza pura forma l'esclusivo esercizio della mente, si è accettato l'insegnamento della geometria descrittiva.

Le belle scoperte di Apollonio, di Desargues, e di Pascal sono senza dubbio l'embrione della geometria projettiva moderna, ma fu il Poncelet, a cui riuscì al principio di questo secolo di porne le basi nel suo celebre Traité des propriétes projectives des figures con leggi generali usando la projezione prospettica e il principio di dualità, adoperato anche dal Brianchon.

Il principio di dualità è un semplice assioma se si considerano solamente le proprietà projettive, esso stabilisce una corrispondenza fra punto e retta nel piano, fra punto e piano nello spazio a tre dimensioni.

Mediante questo principio, da un teorema di geometria piana se ne ricava tosto un altro scambiando le parole punto e retta ed analogamente per la geometria dello spazio scambiando le parole punto e piano. Per esempio alla figura formata da due o tre ecc. o da n punti nel plano è duale la figura determinata due o tre ecc. o da n rette del piano stesso. Un altro principio fecondo adoperato dal Poncelet è quello delle figure polari reciproche, che è analogo a quello di dualità, ma non del tutto identico, poichè concreta quest'ultimo ponendo a base delle nostre considerazioni una conica.

Accanto alle teorie del Poncelet ebbero origine le teorie del Carnot nel suo trattato della Geómétrie de position, il quale adoperando un metodo fondato sulle ricerche degli antichi, ha saputo risvegliare il gusto dei giovani geometri per la geometria pura.

Queste nuove teorie dei tre grandi geometri francesi non potevano rimanere senza una grande influenza per la geometria analitica. Il principio di dualità diede origine al sistema delle coordinate Plückeriane. Ho detto che un punto nel sistema Cartesiano viene determinato da due coordinate ed una retta da un'equazione di 1° grado. L'elemento generatore in questa geometria è dunque il punto. Il principio di dualità lascia presentire la possibilità di introdurre la retta come elemento del piano, ed è questo che fece precisamente il Plücker.

Una retta determina sui due assi coordinati due segmenti a partire dall'origine sino ai punti d'incontro con gli assi, i valori inversi di questi due segmenti presi negativamente sono nel sistema Plückeriano le coordinate della retta. Se la retta si muove nel piano in modo continuo in due direzioni opposte, essa inviluppa una curva, la quale viene rappresentata da un' equazione di grado n nelle coordinate della retta mobile, se da un punto del piano si possono condurre n tangenti alla curva.

Un sistema di coordinate molto importante nella geometria analitica moderna è quello delle coordinate omogenee e projettive, come le chiamò il Fiedler. In questo sistema il punto o la retta vengono determinate da due rapporti p. es. $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ con lo stesso denominatore x_3, e perciò si dice che x_1, x_2, x_3 sono le coordinate del punto o della retta. Questo sistema di coordinate mette in accordo perfetto la geometria projettiva e la geometria analitica.

Il sistema Cartesiano si presta però meglio allo studio dei fenomeni naturali e nella pratica, onde a questo metodo io darò nel nostro corso maggior sviluppo, che agli altri, dovendo tener conto degli studî pratici, a cui la maggior parte di voi vuol dedicarsi. Sarebbe però assurdo di allontanare dai vostri corsi le innovazioni del progresso scientifico matematico, perchè se alcune teorie rigorose non hanno ancora avuto una diretta applicazione, fecondano però il pensiero nel modo di percepire e d' immaginare le cose.

Una delle teorie maggiormente studiate dai geometri del nostro secolo è quella delle sezioni coniche, che secondo Keplero sono le vere orbite descritte dai pianeti e dai loro satelliti, e nei fuochi delle quali

Newton scoprì come il nucleo delle forze, che animano i corpi nel sistema mondiale. Con gli studî dei celebri geometri Chasles, Steiner, Plücker, Möbius, Staudt, Salmon e di tanti altri ricevettero queste curve il pieno loro significato. Lo Steiner, il più grande dei geometri del nostro secolo, seppe innalzare la geometria pura allo splendore attuale e col metodo puro investigare anche campi allora inaccessibili all'analisi; spingendo questa veduta fino al punto da sentire una certa ripugnanza per la geometria analitica, così da sostenere nel suo famoso libro « Systematische Entwikelung der geometrischen Gestalten » che il metodo analitico deve sempre seguire le vie tracciate dalla sintesi. Se questo però poteva esser vero al tempo dello Steiner, in cui si dovevano nelle operazioni analitiche eseguire dei calcoli lunghi e complicati, è men vero in questi ultimi anni, in cui la geometria analitica ha acquistato nuovi e potenti mezzi di ricerca. Col calcolo abbreviato, con l'applicazione delle *funzioni Abeliane* alla geometria del Clebsch, con la teoria degli *Invarianti*, fondata dai celebri matematici inglesi Cayley e Sylvester, nella quale tanto si distinsero i matematici italiani Brioschi e Battaglini e i matematici tedeschi Arohnold, Clebsch e Gordan, con le scoperte del profondo matematico tedesco Riemann, il metodo analitico, questo maraviglioso strumento, è ora senza dubbio al di sopra del suo compagno.

Accanto alla teoria delle coniche s'approfondì quella delle superficie di 2.° grado, che hanno pure una grande importanza nelle scienze matematiche. Le coniche e le superficie di 2.° grado non assorbirono però completamente l'attenzione dei geometri, il metodo analitico fornì i mezzi onde passare a concetti più generali e studiare le curve e superficie d'ordine qualunque dello spazio a tre dimensioni, la cui teoria venne oltremodo facilitata dalle famose formole del Plückér. E il Cremona adoperando il metodo puro coi suoi due celebri trattati l'uno sulle curve piane, l'altro sulle superficie e con molti altri lavori contribuì potentemente allo studio di esse.

Il principio di omologia nel piano e nello spazio è un caso particolarissimo del principio delle *trasformazioni delle figure*. Questo principio consiste nel passare da una figura più semplice ad una più complessa, le cui proprietà si deducono dalla prima, in modo che a un punto dell'una corrisponde in modo unico un punto dell'altra e viceversa. Di questo principio se ne occuparono molti geometri, specialmente il Bellavitis, lo Steiner, lo Schiaparelli e l'Hirst, ma chi ha saputo generalizzare le ricerhe degli altri in un solo principio fondamentale è il Cremona, questo geometra, che va senza dubbio annoverato fra i primi geometri del secolo.

Un altra teoria importante è quella degli *elementi immaginarî*, che se noi non possiamo trattare direttamente nel nostro corso, pure ci sarà necessario di volgervi spesso l'attenzione. Questi elementi introdotti dal Gauss in analisi nella ricerca delle radici di una equazione di grado n ad un' incognita, furono introdotti in geometria col metodo puro dallo Staudt. Per darvi un' idea di questi elementi supponete di avere

in un piano un cerchio ed una retta. Il cerchio e la retta vengono rappresentati rispettivamente da un' equazione di 1.° e di 2.° grado; le soluzioni comuni a queste due equazioni sono due, esse possono essere tutte due reali, eguali o immaginarie. Nel primo caso i due punti d'incontro della retta col cerchio sono reali, nel secondo coincidenti e nel terzo immaginarî. Lo Staudt ha il gran merito di aver dato forma rigorosa al principio di continuità del Poncelet, per mezzo del quale le proprietà projettive di una figura, determinata da punti reali, si trasportano senz'altro ad una figura analoga, nella quale tutti o alcuni dei suoi punti sono immaginarî. Noi non possiamo percepire questi elementi, eppure essi non solamente esistono ma possiamo anche adoperarli nelle costruzioni geometriche; ed io spero che non tarderà molto che vedremo introdotte le teorie dello Staudt nell'insegnamento della geometria projettiva, come richiedono l'esigenze delle nuove teorie.

I progressi degli studî sulla geometria pura e in pari tempo i progressi ancor più rapidi dell' analisi arricchirono di nuovi metodi e di nuove teorie la geometria analitica. Essa è suscettibile dei vantaggi sì della geometria pura come dell'analisi, essa è l'anello di congiunzione fra questi due grandi mezzi di ricerca. Rivestendo talvolta di forma geometrica i risultati dell'analisi si arricchisce la geometria di nuovi e fecondi ritrovati, come del pari rivestendo del linguaggio analitico i risultati di geometria pura si aprono all'analisi nuove vie da esplorare. Ond'è per questo che il matematico sente oggi più che in altri tempi il bisogno di tener dietro all'una e all'altra, e può sapendole combinare insieme trarre quei vantaggi, che non sono concessi a chi esclusivamente si occupa d'una di esse. Una prova del mio dire sono i sapientissimi lavori del Cayley, del Clebsch, del Klein, del Darboux, del Beltrami e del Battaglini nei quali si trae maraviglioso profitto dei due metodi; e non è una prova meno efficace il principio di Chasles, il quale da un semplice fatto analitico trasse una serie di feconde conseguenze per le ricerche geometriche.

Come dissi fin da principio la geometria può considerarsi quale l'applicazione dell'analisi allo spazio.

Noi percepiamo lo spazio o meglio l'ambiente, in cui sono contenute le cose, per mezzo delle impressioni esterne e lo misuriamo per mezzo degli istrumenti, di cui possiamo disporre. Siamo dunque costretti di porre a fondamento della geometria dei postulati, i quali hanno una certezza empirica considerevole nel limite delle nostre osservazioni.

A base della geometria ordinaria sta il postulato di Euclide, che esprime la proprietà, che per un punto non si può tirare che una sola parallela ad una retta data, oppure (ciò ch'è lo stesso) che la somma degli angoli in un triangolo qualunque è eguale a due angoli retti. Da questo postulato dipende il nostro sistema di misurazione.

Il Gauss, il Lobatschewscky e il Bolyai hanno innalzato questo postulato ad una tale generalità, da

potersi ammettere, che da un punto si possano tirare due parallele ad una retta data, reali o immaginarie. Ciò ha dato luogo alla geometria *non Euclidea*, che si divide in due: l'*iperbolica* quando quelle due parallele sono reali, l'*ellittica* quando sono immaginarie. Questa geometria quantunque di natura affatto astratta, ha il grande vantaggio di far sparire la differenza notevole esistente tra le proprietà metriche e projettive nella geometria Euclidea.

L'infinito del nostro spazio nella geometrin Euclidea è rappresentato da un piano; nella non Euclidea da una superficie di 2.° grado reale o immaginario, al di là della quale c'è lo spazio *ideale.* Nel caso che questa superficie si scomponga in due piani coincidenti, si ha la geometria ordinaria, onde questa è un caso particolare di quella.

Lo *spazio illimitato* è un' ipotesi, che è compatibile colle nostre sensazioni, ma l'illimitato, come giustamente osserva il Remiann [1]), non trae seco il concetto dell'*infinitamente grande.* Se si suppone che la così detta curvatura del nostro spazio in ogni suo punto non sia zero, come comunemente si ammette, ma sia eguale ad una quantità positiva, costante, quanto piccola si voglia, lo spazio nostro sarebbe illimitato ma finito.

Bisogna però intenderci bene. Il matematico espone i suoi dubbi, ma il suo scopo principale è sempre quello di trovare generalizzando dei metodi fecondi di ricerca. Che i suoi concetti non siano concreti

1) Riemann's Werke p. 254.

nella realtà, non importa, basta ch'essi abbiano il loro fondamento nelle leggi del pensiero matematico.

Un' altra specie di geometria fino ad oggi trascurata, ma che spero avrà un avvenire brillante, è la geometria degli spazî a quante si vogliano dimensioni. Un punto nello spazio a tre dimensioni ha tre coordinate, che corrispondono alle tre dimensioni, un piano invece viene rappresentato da un'equazione di 1.° grado a tre variabili. Nell'analisi non solamente si considerano dell'equazioni a 3 ma anche a un numero n qualunque di variabili; la qual cosa ha dato origine alla considerazione degli *spazi a n dimensioni*, dove un punto viene determinato da n grandezze o coordinate.

La maggior parte dei matematici rifugge d'attendere ad una tale geometria, preoccupati dall'idea metafisica dello spazio, cosicchè tranne qualche parte, si può dire che la geometria a n dimensioni è un campo ancor vergine alle indagini degli scienziati.

Se la quarta dimensione dello spazio esistesse realmente, una pietra potrebbe entrare in una stanza ermeticamente chiusa senza forarne le pareti, passando per la quarta dimensione, cioè uscendo prima dal nostro spazio a tre dimensioni; come una piccola porzione di piano può uscendo dal piano stesso, passando cioè per la terza dimensione, entrare in un cerchio di esso senza forarne la striscia circolare, dal quale esso cerchio è chiuso. Quest' ultimo fatto, che per noi è chiarissimo, perchè concepiamo la terza dimensione, non lo sarebbe per un *essere a due dimensioni* situato dentro quel cerchio, il quale non potesse concepire, che le due dimensioni del piano, ove ei vive. Esistendo *un essere a quattro dimensioni* egli comprenderebbe benissimo il fatto della pietra, che noi con la nostra esperienza non possiamo comprendere, ma che però possiamo comprendere fino a un certo punto col *puro ragionomento*. Si dimostra infatti, che unendo un punto qualunque O di quella stanza con un punto fuori del nostro spazio, si ha una retta la quale ha *un solo* punto comune col nostro spazio, cioè il punto O, perchè altrimenti sarebbe tutta in esso contenuta. Immaginiamo ora un punto A [1]) il quale sia già uscito dal nostro spazio e vi rientri secondo la direzione di quella retta. È chiaro che, percorrendo la retta, il punto A potrà giungere al punto O, ossia dentro la stanza, senza passare nel suo tragitto per alcun altro punto del nostro spazio e perciò nemmeno della stanza, vale a dire senza forarne le pareti; poichè altrimenti, come abbiamo detto, la retta direttrice sarebbe tutta contenuta nel nostro spazio.

Il matematico non deve già preoccuparsi dell'esistenza materiale di questi spazî, egli deve osservare, se ricercando le leggi di essi, queste possano illuminare molte vie rimaste oscure o ignote della geometria dello spazio a tre dimensioni e del piano. E in una parola vorrei sommariamente aggiungere, *che le realtà ideali della nostra mente sono altrettanto vere che le realtà di fatto dell'esistenza, e se non aprono direttamente uno spiraglio*

1) Invece della pietra considero un pnnto.

a ricerche positive, controllano, ampliano e fecondano i campi della ricerca reale.

Questi spazî si possono investigare col puro ragionamento senza ricorrere all'analisi, come si dimostra ancora, che questa geometria degli spazî a n dimensioni è *molto utile* per molte questioni dello spazio a tre dimensioni [1]). Ricorrendo alla geometria del nostro spazio si possono dimostrare più facilmente molte proprietà delle figure piane, cioè dello spazio a due dimensioni, rendendole più intuitive; e lo stesso accade, come credo di aver dimostrato, se si ricorre alle figure dello spazio a n dimensioni per dimostrare le leggi proiettive del piano e dello spazio a tre dimensioni. Così data una figura a due dimensioni, onde studiare le sue proprietà proiettive, noi cerchiamo nello spazio a n dimensioni un ente geometrico pure a due dimensioni, del quale la figura data sia una proiezione univoca, vale a dire che un punto di quell'ente dia in generale per proiezione un solo punto della figura data. Questo ente tanto più è generale quanto più si aumenta il numero delle dimensioni dello spazio, in cui deve esser contenuto e perciò più comprensivo a studiarsi. Questo non è il solo vantaggio. Proiettando univocamente questo ente in tutte le maniere possibili sul nostro spazio si ottengono tante altre figure, che appartengono alla stessa famiglia di quella data e le cui proprietà proiettive dipendono da quel solo ente ideale.

1) Vedi la mia mia memoria « Behandlung der projectivischen Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens » Math. Annalen Vol. XIX.

E ben mi piace di riportare un giudizio del Kant stesso, il quale nel secolo passato presentì le nuove geometrie. Nel suo scritto « Gedanken von der wahren Schätzung der lebendingen Kräfte » egli dice: *Una scienza di tutte le possibili forme dello spazio, sarebbe senza dubbio la più alta geometria, che un' intelligenza finita possa concepire.*

Il che se non m' inganno viene a risolversi in un' altra idea: *che le leggi della ragione pura rappresentata nella geometria, di cui ho cercato di darvi un' idea, comprendono in sè necessariamente non solo tutte le leggi della geometria dei corpi, come li conosciamo, ma queste stesse non ricevono nè il loro valore nè la loro autorità, che dalle leggi della prima.*

Dovrei parlarvi di altre importanti teorie del nostro secolo, come la teoria dei complessi di Plücker, ove entra come elemento generatore nello spazio a tre dimensioni la retta, la teoria delle coordinate curvilinee iniziata dal Bordoni e dal Gauss e promossa dal Lamé [1]); delle superficie flessibili ed inestensibili applicabili le une sulle altre, la teoria delle linee geodetiche, ecc. ma essendo troppo elevate per la vostra mente e non consentendomelo il tempo, passo subito a delinearvi a grandi tratti il programma delle nostre lezioni. Vi ho parlato dei metodi principali della geometria toccandovi sommariamente i

1) *Cremona.* Prolusione ad un corso di Geometria superiore, letta nella R. Università di Bologna 1880.

loro pregi e i difetti, onde voi possiate meglio distinguerli ed apprezzarli nei loro giusti rapporti.

Nel nostro corso tratteremo di quelle teorie principali, che servono di fondamento ai vostri studî ulteriori. Cercherò di rendervi, per quanto posso, chiari e trasparenti i risultati del calcolo con considerazioni geometriche; e darò nel mio corso uno sviluppo speciale agli esercizî, onde possiate acquistare quella facilità dei concetti analitici e geometrici, tanto necessarî nella pratica. Non basta conoscer bene una teoria generale, ma bisogna anche saperla applicare.

Cominceremo le nostre lezioni dal concetto cartesiano riferendo i punti del piano a due assi obbliqui qualunque. La distanza di due punti, le coordinate polari, la trasformazione delle coordinate, l'equazione generale della retta e la sua forma normale e molti problemi relativi al punto e alla retta saranno il primo oggetto dei nostri studî. L'introduzione delle annotazioni abbreviate ci servirà per dedurre le proprietà di quattro raggi coniugati armonici e dei fasci proiettivi. Il sistema di coordinate Plücheriane ci servirà invece a dimostrare la proprietà di quattro punti armonici e delle punteggiate projettive e a stabilire il principio di dualità, accennando pure al sistema di coordinate omogenee, che meglio mette in relazione la geometria analitica con la projettiva.

Dopo lo studio sul punto e sulla retta seguono le coniche, quelle curve cioè, che vengono rappresentate in coordinate di punti da un'equazione di 2.° grado. In generale se una curva è descritta da un punto, essa ammette in ogni suo punto una retta

tangente, cioè una retta che la tocca in due punti infinitamente vicini; dico in generale, perchè non tutte le curve trascendenti godono di questa proprietà. Le coniche ammettono però in ogni loro punto una tangente, onde si lasciano generare anche dal movimento di una retta; e considerando la retta come elemento generatore del piano l'equazione di una conica è pure di 2.° grado, ciò che si esprime dicendo che la curva è della seconda classe. La conica è adunque un ente duale di sè stesso, e quindi ad una proprietà projettiva dei suoi punti corrisponde una proprietà analoga per le sue tangenti.

Uno dei teoremi più importanti delle coniche è il teorema di Pascal, ch'è conseguenza immediata dal potersi generare la conica mediante due fasci projettivi, e serve a costruire un sesto punto di essa, allorquando se ne conoscano altri cinque.

Tratteremo pure la teoria dei poli e delle polari e, come caso speciale di essa, quella dei diametri conjugati.

Le diverse forme sotto le quali si presentano le coniche nella geometria Euclidea dipendono dalla loro posizione rispetto alla retta all'infinito del piano, ciò, che, cambia le loro proprietà metriche, non però quelle projettive, quando non si faccia distinzione tra reale e immaginario.

Per determinare una conica devono esser dati cinque punti, invece per un cerchio bastano tre punti solamente. Questo, che a prima vista sembra un paradosso, si spiega facilmente sapendo, che tutti i cerchi del piano passano per due punti immaginarî all'infinito, detti *punti circolari* del piano, e che perciò una conica qualunque passante per essi è un cerchio. Se una conica incontra la retta all'infinito in due punti immaginarî, che non siano i punti circolari, essa è un ellisse; se la incontra in due punti reali è un iperbole, se finalmente questi due punti coincidono in un solo, la curva è una parabola. Queste sono le curve più importanti del nostro corso ed è perciò debito nostro di studiarne le principali proprietà con l'aiuto delle diverse forme, sotto le quali si presentano le loro equazioni.

Una delle più importanti teorie delle coniche è quella dei fuochi, di quei punti cioè le cui tangenti alla conica passano pei punti circolari del piano. Le coniche omofocali, le coniche simili, il cerchio osculatore, le evolute di queste curve, nonchè un cenno delle curve superiori fanno parte del nostro programma.

Per la Geometria dello spazio procederemo con lo stesso metodo adoperato nel piano, considerando prima come elemento il punto, indi il piano. È per noi interessante lo studio delle proprietà projettive e metriche delle superficie di 2.° grado, delle superficie omofocali, e di quelle similmente poste, come anche lo studio di alcune curve gobbe di maggior importanza.

Questi, giovani carissimi, sono gli argomenti principali sui quali si volgerà la nostra attenzione. Negli anni venturi introdurrò quelle modificazioni, che

mi verranno suggerite dall'esperienza e dall'esigenze del progresso scientifico, che si sviluppa talmente rapido, che appena è dato di seguirlo.

Ho parlato in principio di molte altre questioni, che non formano oggetto dei nostri studî, perchè troppo elevate, onde dimostrarvi quanto siano vasti e sconfinati gli orizzonti della scienza dell'estensione e onde invogliare voi, che vi accingete a studiare con me i fondamenti col metodo analitico ad applicarvi con amore e con energia, doti essenziali per rendersi padroni di una scienza.

Non sono pochi coloro che a conforto della loro ignoranza sorridono ironicamente dinanzi ai progressi delle matematiche pure, dimenticando che lo sviluppo ch'esse non ebbero mai come in questo secolo influì potentemente sullo spirito della nostra epoca, e dimenticando che i giovani ingegneri istruiti nelle nuove dottrine poterono compiere quelle meravigliose opere, che segnano l'epoca più gloriosa della scienza dell'ingegnere. Egli è certo però che la matematica è una scienza che vive per sè stessa senza bisogno dell'industria, mentre questa ha bisogno dei progressi della prima.

S'ingannano ancora coloro, ai quali sembrano aride le scienze esatte, se è pur vero che la poesia della scienza e del vero invaghisce e sublima l'animo più che la poesia della leggenda.

L'Italia avvilita nelle sue più nobili aspirazioni da sospettosi oppressori che, a maggior loro sicurezza, la tenevano incatenata nell'ignoranza e nel pregiudizio, è ora mercè la grandezza e il valore dei padri nostri libera e forte. Ma se allora il morir per la Patria era il più bel sogno della gioventù, ora la nostra più bella aspirazione deve esser quella di renderla grande nelle scienze e nelle arti, come fu un giorno. Se le battaglie dell'indipendenza sono vinte, restano ora a vincere le battaglie del pensiero. E se noi giovani useremo del nostro ingegno e della nostra volontà a render onorata e temuta questa nostra Italia, pronti sempre a correre dai campi del pensiero ai campi di battaglia in difesa della Patria minacciata, ben meriteremo dei nostri padri; e la gloria del soldato sarà emulata da quella del cittadino e dello scienziato.

Già conta l'Italia parecchi valentissimi sacerdoti delle scienze matematiche e l'amor crescente verso queste scienze lascia presentire non molto lontana l'epoca, in cui la Patria nostra, come oggi è la Germania, rivendicherà a buon diritto quel primato, che il mondo le riconobbe una volta.

La religione delle memorie gloriose di questa celebre Università, dove Galileo il principe degli scienziati del suo tempo, stampava orme così sicure e poderose nella scienza, vi sia auspice negli studi che imprendete; e possa il suo nome, ricco di tanti ammaestramenti, farvi volger fiduciosi lo sguardo all'astro della verità che vien, via via, dissipando intorno a sè le tenebre dei pregiudizi e degli errori che lo attraversano.
