

S U L L A

GEOMETRIA DESCRITTIVA A QUATTRO DIMENSIONI ⁽¹⁾

PER

G. V E R O N E S E

(con 3 Tavole).

Il metodo ch' io espongo in questa memoria riposa sullo stesso principio del proiettare e del segare, che ho svolto recentemente in un'altra memoria sulla geometria proiettiva a n dimensioni ⁽²⁾.

Quantunque la geometria descrittiva sia una scienza eminentemente pratica, e non sia in generale un metodo di ricerca, tuttavia io credo ch' essa giovi moltissimo a sviluppare nei giovani matematici la potenza intuitiva dello spazio (*Anschauungsvermöge*), specialmente se insegnata col metodo della proiezione centrale; imperocchè disegnando o modellando si percepiscono molto meglio le forme dello spazio.

Come la geometria descrittiva ordinaria insegna a rappresentare un corpo a tre dimensioni sopra un piano (foglio del disegno), così quella di cui ci occuperemo

(1) È già un anno che ho comunicato i risultati principali di questo lavoro ai miei colleghi del Seminario matematico diretto dal prof. Klein nell' Università di Lipsia.

(2) *Math. Annalen*. Vol. XIX, Heft II.

ha per iscopo di rappresentare i corpi a quattro dimensioni in uno spazio a tre dimensioni.

La parte principale di questa geometria è quella relativa ai metodi di rappresentazione, dei quali il più generale è quello della proiezione centrale, che il Fiedler seppe utilizzare da vero maestro nel suo trattato di geometria descrittiva.

Io mi occuperò soltanto di questi metodi, specialmente della proiezione centrale, e tratterò dei problemi più semplici e principali.

Scelgo come spazio immagine il nostro spazio a tre dimensioni S_3 , e quindi data una figura dello spazio a quattro dimensioni R_4 ne costruisco l'immagine o il modello. In S_3 si ottengono in tal guisa dei teoremi, che dipendono soltanto dagli elementi di determinazione rispetto al centro ed allo spazio di proiezione, e che per ciò non hanno bisogno di alcuna dimostrazione, siccome sono una conseguenza immediata delle figure a quattro dimensioni. Proiettando i modelli di queste figure sopra un piano R_2 di S_3 mediante un nuovo centro situato in S_3 , si ottiene sul piano R_2 l'immagine piana di esse. Allora in ogni retta di R_2 , quale proiezione di una retta di R_4 , vi sono due specie di elementi di determinazione, l'una relativa alla rappresentazione in S_3 , l'altra invece alla rappresentazione in R_2 .

Analoghe considerazioni valgono per lo spazio a n dimensioni R_n , e per conseguenza si può determinare l'immagine di ciascuna figura a n dimensioni successivamente in uno spazio a $n-1$, $n-2$ ecc. a 3 dimensioni e in un piano.

Basta addentrarsi un pò nello studio di questi spazi per convincersi che si possono intuire e trattare geometricamente come lo spazio ordinario. Che questi spazi esistano o no, non importa; basta ch'essi abbiano il loro

fondamento nelle leggi del pensiero matematico. Anche il punto, la retta e il piano matematico sono astrazioni della mente, ma queste astrazioni sono senza dubbio necessarie allo studio delle leggi dei corpi, quali li conosciamo. E qui ripeto ciò che già dissi nella mia prelezione al corso di geometria analitica nella R. Università Patavina ⁽¹⁾: « Le realtà ideali della nostra mente sono altrettanto vere che le realtà di fatto dell' esistenza, e se non aprono uno spiraglio a ricerche positive controllano, ampliano e fecondano i campi della ricerca reale. »

(1) Drücher e Tedeschi ed. Padova.

INTRODUZIONE.

1. Prima di passare alla geometria descrittiva ricordo qui le definizioni del parallelismo e dell'ortogonalità degli spazi, che io diedi nella mia citata memoria (1).

Per il parallelismo in R_n abbiamo:

Due spazi $R_m R_m'$, dove $m' \geq m$, sono paralleli quando lo spazio $R_{m'-1}$ di R_m all'infinito è contenuto nello spazio $R_{m'-1}$ di R_m' all'infinito (2).

Se $n=4$ una retta è parallela ad un piano o ad uno spazio a 3 dimensioni quando il suo punto all'infinito è situato sulla retta o sul piano all'infinito del piano o dello spazio dato. Analogamente un piano R_2 è parallelo ad uno spazio R_3 , quando la retta all'infinito di esso giace sul piano all'infinito di R_3 ; e finalmente due spazi R_3 sono paralleli se hanno lo stesso piano all'infinito.

Quando una retta ed un piano di R_4 non giacciono in uno stesso spazio R_3 , si può far passare per la retta un solo spazio a 3 dimensioni parallelo al piano dato, e viceversa per il piano si può far passare uno spazio a 3 dimensioni parallelo alla retta data.

2. Per l'ortogonalità in R_n si ha:

Quando due spazi $R_m R_m'$ non giacciono in uno stesso spazio di un numero di dimensioni minore di n , i loro spazi all'infinito R_{m-1} , $R_{m'-1}$ determinano rispetto alla

(1) *Math. Annalen*, I. c., p. 164, 186.

(2) L'apice di R_m' si riferisce alla m e non alla R .

sfera J_{n-2}^2 immaginaria a $n-2$ dimensioni di R_n due spazi polari R_{n-m-1} , $R_{n-m'-1}$. I due spazi R_m , $R_{m'}$ sono perpendicolari quando lo spazio R_{m-1} è contenuto nello spazio R_{n-m-1} , oppure passa per esso. Quando invece R_m , $R_{m'}$ giacciono in unq spazio R_p , ($p < n$), vale la stessa definizione per lo spazio R_p , considerando il sistema polare sferico di R_p all' infinito (1).

Mediante l' ortogonalità possiamo operare il ribaltamento di uno spazio R_{n-1}' sopra un altro R_{n-1} in R_n' . Tiriamo da un punto P_0' di R_{n-1}' il piano P_2 perpendicolare allo spazio d' intersezione R_{n-2} di R_{n-1} , che incontra R_{n-2} in un punto R_0 (2). Se si fa la stessa operazione per tutti i punti di R_{n-1}' e si fanno muovere uniformemente nel loro piano P_2 in cerchi di raggio $R_0 P_0'$, noi diciamo che lo spazio R_{n-1}' ruota intorno allo spazio R_{n-2} . Finalmente se uno dei punti P_0' di R_{n-1}' cade in R_{n-1} , ciò accade per tutti i punti di R_{n-1}' , vale a dire lo spazio R_{n-1}' si ribalta su R_{n-1} .

Se $n=4$ per fissare le idee chiamo con $Q_{0,n}$, $Q_{1,n}$, $Q_{2,n}$ gli elementi polari degli elementi all' infinito di uno spazio R_3 , di un piano R_2 e di una retta R_1 , rispetto alla sfera immaginaria all' infinito di R_4 . Una retta R_1 è perpendicolare ad un piano R_2 , che non giace con la retta in uno stesso spazio a 3 dimensioni, o ad uno spazio R_3 , quando il piano polare $Q_{2,n}$ del punto all' infinito della retta rispetto alla sfera immaginaria passa per la retta all' infinito di R_2 , oppure giace nel piano all' infinito di R_3 . E viceversa un piano R_2 od uno spazio R_3 sono perpendicolari ad una retta R_1 , quando la polare $Q_{1,n}$ della

(1) Nella mia memoria, l. c., invece di R_m è stato stampato R'_m , ciò che particularizza il teorema.

(2) Due spazi R_m , $R_{m'}$ s' incontrano in uno spazio R_a , ove $a = m + m' - n$, l. c., p. 163.

retta all'infinito di R_2 , rispetto alla sfera immaginaria passa per il punto all'infinito della retta, oppure il polo $Q_{0,n}$ del piano all'infinito di R_3 coincide con questo punto.

3. Consideriamo ora tutte le combinazioni degli elementi R_0, R_1, R_2, R_3 di R_3 due a due e vediamo quanti e quali elementi perpendicolari si possono condurre da uno di essi all'altro.

1.° Punto R_0 e retta R_1 . Noi possiamo tirare pel punto un solo spazio R_3 perpendicolare alla R_1 , basta a tal uopo congiungere il punto R_0 col piano $Q_{2,n}$ della retta. Tutte le rette e i piani di R_3 sono perpendicolari alla R_1 .

2.° Punto R_0 e piano R_2 . Per il punto si possono condurre infinite perpendicolari ad R_2 , le quali giacciono tutte nel piano che congiunge R_0 con la retta $Q_{1,n}$ di R_2 . Che ci siano infinite direzioni perpendicolari ad un piano risulta anche dal fatto che per esso passano infiniti spazi R_3 . C'è però una sola perpendicolare che incontra il piano R_2 ed è precisamente quella che giace nello spazio determinato dal punto e dal piano.

3.° Punto R_0 e spazio R_3 . Per il punto passa una sola retta perpendicolare R_1 ad R_3 , che si ottiene congiungendo R_0 col punto $Q_{0,n}$ di R_3 . La retta R_1 è evidentemente perpendicolare a tutti i piani e a tutte le rette di R_3 .

Per ottenere questa perpendicolare basta anche descrivere una sfera a 3 dimensioni col centro in R_0 , essa taglia lo spazio R_3 secondo una sfera a due dimensioni il cui centro è il piede della perpendicolare richiesta.

4.° Retta R_1 e piano R_2 . Se essi non giacciono in uno spazio R_3 , per la retta R_1 passa un solo spazio R_3 normale a R_2 , che si ottiene congiungendo R_1 con la retta $Q_{1,n}$ di R_2 .

Si possono tirare infinite rette parallele normali a R_1

e R_2 , il cui punto all' infinito è il punto d' incontro del piano $Q_{1..n}$ di R_1 con la retta $Q_{1..n}$ di R_2 .

In generale non si può far passare per R_1 un piano perpendicolare al piano dato R_2 . Ciò è sempre possibile quando R_1 e R_2 sono situati in uno spazio R_3 , o quando la R_1 incontra la retta $Q_{1..n}$ di R_2 .

5.° *Retta R_1 e spazio R_3* . Per R_1 passa un solo piano perpendicolare a R_3 , che si ottiene congiungendo R_1 col punto $Q_{0..n}$ di R_3 , e per conseguenza per una retta R_1 si possono condurre infiniti spazi a tre dimensioni perpendicolari a R_3 .

6.° *Piano R_2 e piano R_2'* . Se non sono situati in uno spazio R_3 , per R_2 passa un solo spazio a tre dimensioni perpendicolare a R_2' quando la retta all' infinito di R_2 incontra la $Q_{1..n}$ di R_2' . Se i due piani sono situati in uno spazio R_3 ci sono (secondo 3.°) infinite rette parallele perpendicolari a tutti e due i piani.

7.° *Piano R_2 e spazio R_3* . Congiungendo R_2 col punto $Q_{0..n}$ di R_3 si ottiene uno ed un solo spazio perpendicolare ad R_3 .

Per ottenere il ribaltamento di uno spazio R_3' sopra un altro spazio R_3 basta applicare la regola del nr.° 2 per $n = 4$.

La *rotazione* intorno ad un asse a_1 o ad un piano E_2 in R_1 si può eseguire con l' aiuto dell' ortogonalità. Conduciamo per un punto P_0 lo spazio R_3 perpendicolare ad a_1 , che l' incontra in un punto P_0' . Nel movimento intorno ad a_1 , P_0 descrive una sfera a due dimensioni col centro in P_0' e che giace nello spazio R_3 .

Se si tratta invece della rotazione intorno ad un piano E_2 , P_0 descrive un cerchio, il cui centro P_0' giace in E_2 nel punto d' incontro del piano perpendicolare E_2' condotto da P_0 ad E_2 .

4. ANGOLI IN R_1 .

- 1.° *Retta R_1 e spazio R_3 .* Conduciamo per la retta il piano perpendicolare a R_3 , il quale taglia R_3 secondo una retta, che forma con R_1 l'angolo di R_1 con R_3 .
- 2.° *Retta R_1 e piano R_3 .* Per un punto del piano tiriamo la parallela R_1' alla data, la R_1' e il piano formano l'angolo cercato.
- 3.° *Due rette.* Due rette determinano uno spazio R_3 , onde l'angolo di esse in R_4 è lo stesso di quello delle due rette in R_3 .
- 4.° *Piano e spazio R_3 .* Il piano R_2 incontra R_3 in una retta R_1 . Conduciamo da un punto del piano R_2 una retta perpendicolare S_1 a R_3 un'altra S_1' alla R_1 . Le rette S_1S_1' formano l'angolo complementare a quello di R_2 con R_3 .
- 5.° *Due piani.* Per l'angolo di due piani qualunque possiamo ricorrere alla definizione del Jordan (1). Si tirino pel punto d'incontro dei due piani due rette situate rispettivamente su di essi, Jordan chiama angoli dei due piani i massimi e i minimi dell'espressione analitica del coseno dell'angolo delle due rette. Secondo questa definizione i due piani hanno due angoli.
In seguito però noi considereremo soltanto il caso in cui i due piani stanno ad angolo retto.
- 6.° *Due spazi R_3 .* Da un punto si tirino le due perpendicolari ai due spazi dati, l'angolo da esse formato è il complementare di quello cercato.

(1) Jordan, *Essai sur la géométrie à n dimensions*. Bulletin de la Société mathématique de France, 1875.

PARTE I.

PROJEZIONE CENTRALE.

§ 1.

*Rappresentazione di un punto, di una retta,
di un piano e di uno spazio a tre dimensioni.*

5. Sia S_3 lo spazio immagine e C il centro di proiezione in R_4 . — Congiungiamo tutti i punti di un oggetto di R_4 col centro C e determiniamo i punti d'intersezione dei raggi proiettanti con S_3 ; la figura che si ottiene in S_3 si chiama l' *immagine* o la *proiezione centrale* dell'oggetto.

Prima di tutto bisogna fissare la posizione del centro di proiezione rispetto allo spazio S_3 ; a tal uopo tiriamo per C una perpendicolare a S_3 (fig. 4), e col piede C' di essa (*punto principale*) come centro descriviamo una sfera a due dimensioni in S_3 col raggio CC' , cioè la *sfera di distanza* (1).

Se il centro C dato è all'infinito la proiezione dicesi *parallela*, e se C è situato anche in una direzione perpendicolare allo spazio S_3 , abbiamo la *proiezione ortogonale parallela*.

In questa parte ci occuperemo soltanto della *proiezione centrale* riserbando di parlare nella II parte di quella *ortogonale*.

Per ottenere l'immagine A_0' di un punto A_0 determiniamo il punto d'incontro della retta CA_0 con S_3 . Il

(1) Io mi servo delle denominazioni analoghe a quelle usate per la *proiezione centrale* nello spazio a tre dimensioni. (Vedi Fiedler, *vorstellende Geometrie*).

punto A_0' non basta però a determinare il punto A_0 del raggio proiettante CA_0 . Tiriamo per A_0 una retta qualunque R_1 ; essa viene proiettata dal centro C mediante un piano proiettante in una retta R_1' dello spazio S_3 . La R_1' non determina la R_1 , se però sono date in R_1' le proiezioni dei due punti d'intersezione della retta R_1 con *due spazi a tre dimensioni fissi*, la retta R_1 è allora pienamente determinata.

Noi prendiamo come spazi fissi lo spazio S_3 stesso e lo spazio all'infinito Q_3 di R_4 . Il punto d'incontro S_0 , traccia, della retta R_1 con S_3 coincide con la sua immagine. Per ottenere l'immagine del punto Q_0 all'infinito della retta tiriamo per C la parallela a R_1 , che incontra R_1' in Q_0' , cioè nel punto di fuga della retta. Una retta R_1 è dunque pienamente determinata dalla sua traccia e dal suo punto di fuga.

Ora dal punto A_0' si può passare al punto A_0 , perchè costruita da R_1' la R_1 , il punto A_0 deve trovarsi nel punto d'incontro di R_1 col raggio CA_0' . Dunque *per determinare un punto A_0 di R_4 bisogna assegnare una retta, che passa per esso.*

Consideriamo ora un piano E_2 passante per R_1 . Congiungiamo E_2 con C mediante uno spazio proiettante P_3 , che incontra S_3' in un piano E_2' , l'immagine di E_2 . È chiaro che il piano E_2 è perfettamente determinato dalla sua traccia S_1 con S_3 , e dalla proiezione della sua retta Q_1 all'infinito, ossia dalla sua retta di fuga Q_1' . È altresì chiaro che le tracce e i punti di fuga delle rette esistenti nel piano E_2 giacciono rispettivamente nella traccia e nella retta di fuga di esso.

Finalmente tutti i punti di uno spazio E_3 passante per E_2 vengono proiettati univocamente nei punti di S_3 ; esso è dunque *pienamente determinato dal suo piano S_2 d'intersezione con S_3 , ossia dalla sua traccia, e dal piano*

proiezione Q'_2 del suo piano all' infinito, ossia dal suo piano di fuga. Da ciò che precede si deduce che tutte le rette, tutti i piani e spazi paralleli hanno gli stessi elementi di fuga, da cui: tutte le rette normali a S_3 hanno il loro punto di fuga in C' , e tutte le rette e piani di fuga di piani o spazi normali a S_3 passano per C' . Così si ha:

« Due rette giacciono in un piano se le loro traccie e i loro punti di fuga sono situati rispettivamente su due rette parallele. »

« Un piano e una retta giacciono in uno spazio R_3 se la traccia del piano e la traccia della retta sono situate su un piano parallelo a quello determinato dalla retta e dal punto di fuga del piano e della retta. »

« Due piani giacciono in uno spazio R_3 quando le due traccie e le due rette di fuga sono rispettivamente situate su due piani paralleli. »

6. Pel centro C conduciamo ora uno spazio parallelo V_3 a S_3 , che chiamiamo *spazio anteriore*. Tutti i suoi punti vengono proiettati evidentemente all' infinito. Il punto, la retta e il piano d' intersezione con questo spazio di una retta, di un piano e di uno spazio R_3 siano indicati con V_0, V_1, V_2 .

Pel punto V_0 di una retta $S_0 Q_0'$ si ha evidentemente

$$CV_0 \# S_0 Q_0'$$

ove il segno $\#$ dinota nello stesso tempo eguaglianza e parallelismo de' due segmenti (fig. 2).

Analogamente per la retta V_1 di un piano $S_1 Q_1'$ e per il piano V_2 di uno spazio $S_2 Q_2'$ si ha

$$CV_1 = S_1 Q_1', \quad CV_2 = S_2 Q_2'$$

indicando con CV_1 e CV_2 le distanze normali di C da V_1 e V_2 e con $S_1 Q_1'$ e $S_2 Q_2'$ le distanze normali tra $S_1 Q_1'$ e $S_2 Q_2'$.

Di qui si ricava :

Quando due rette hanno le loro immagini parallele, esse s' incontrano in un punto di V_3 .

Analogamente quando le immagini di due piani sono parallele, essi s'incontrano in un punto di V_3 . Se inoltre le loro traccie e rette di fuga sono parallele e se la distanza normale dalla traccia alla retta di fuga dei due piani è la stessa in senso e grandezza, i due piani s' incontrano in una retta di V_3 .

Se le traccie $S_2, S_{2,1}$ e i piani di fuga $Q_2', Q_{2,1}'$ di due spazi sono parallele e le distanze $S_2 Q_2', S_{2,1} Q_{2,1}'$ sono eguali in senso e grandezza i due spazi s' intersecano secondo un piano di V_3 .

Se per il punto V_0 di una retta si tira la perpendicolare ad S_3 , il cui piede sia V_0' , è chiaro che si ha

$$S_0 V_0' \# Q_0' C'.$$

Questa osservazione ci permette di costruire in S_3 la intersezione di una figura di R_4 con V_3 in vera grandezza.

7. Ciascun punto A_0 di una retta R_1 ci dà un punto A_0' dell' immagine R_1' ; quando A_0 cade in S_0 anche A_0' cade in questo punto (fig. 2). Al punto di mezzo M_0' di $S_0 Q_0'$ corrisponde un punto M_0 di R_1 , che è distante dallo spazio S_3 quanto il punto V_0 . I punti M_0 per tutte le rette di R_4 determinano uno spazio M_3 parallelo allo spazio S_3 e alla stessa distanza da questo quanto V_3 . M_3 può esser chiamato *spazio posteriore*:

Se dunque il punto A_0 si muove da S_0 nella direzione $S_0 M_0 Q_0$, il punto A_0' si muove da S_0 nella direzione $S_0 M_0' Q_0'$. Noi abbiamo dunque sopra una retta R_1 le quattro regioni

$$S_0 M_0, M_0 \infty, \infty V_0, V_0 S_0$$

alle quali corrispondono le quattro regioni dell' immagine.

$$S_0 M_0', M_0' Q_0', Q_0' \infty, \infty S_0$$

cosicchè dato un punto A_0' sopra la R_1' sapremo tosto determinare la regione di R_1 , ove egli è situato.

8. Invece dello spazio Q_3 all' infinito si può anche adoperare uno spazio O_3 parallelo a S_3 , oppure uno spazio O_3 , che interseca S_3 secondo un piano fisso O_2 . Tanto nell' uno come nell' altro caso una retta, un piano e uno spazio sono determinati mediante le loro traccie e le proiezioni delle loro intersezioni con lo spazio ausiliario O_3 . Nel secondo caso la traccia S_1 e la retta ausiliaria O_1' di un piano s' incontrano in un punto del piano O_2 ; così il piano traccia S_2 e il piano ausiliario O_2' di uno spazio si tagliano secondo una retta di O_2 .

§ 2.

Problemi proiettivi.

9. In geometria descrittiva si dividono i problemi in proiettivi e metrici. I primi dipendono solamente dagli elementi traccie e di fuga, vale a dire sono indipendenti dalla posizione del centro. Se si vuole però costruire la figura di R_4 data l'immagine bisogna naturalmente fissare il centro di proiezione, cosicchè per ogni posizione del centro corrisponde una figura di R_4 , che ha sempre la stessa immagine; ma siccome il centro può esser preso anche all' infinito, così vediamo che *per i problemi proiettivi l'immagine può esser considerata tanto come una proiezione centrale quanto anche come una proiezione parallela.*

I problemi metrici invece non si possono risolvere senza aver fissato fin da principio il centro.

Per la risoluzione dei problemi proiettivi è più generale il metodo di rappresentazione, ove in luogo dello spazio Q_3 si considera un altro spazio ausiliario O_3 che incontra lo spazio S_3 secondo un piano fisso O_2 . Per ot-

tenere il caso in cui O_3 coincide con Q_3 , basta osservare che O_3 cade allora all'infinito di S_3 .

10. Una retta $S_0 O_0'$ e un piano $S_1 O_1'$ sono situati su uno stesso spazio R_3 quando i due piani $S_0 S_1$ e $O_0' O_1'$ s'intersecano nel piano O_2 . In questo caso il punto d'incontro A_0' dell'immagine della retta con quella del piano è la proiezione del punto d'incontro della retta col piano. Se invece $S_0 O_0'$ e $S_1 O_1'$ non sono situati in un medesimo spazio R_3 il punto A_0' ci dà l'incontro apparente della retta col piano rispetto ad un occhio posto nel centro di proiezione.

Due rette invece non hanno nessun incontro apparente perchè vengono proiettate dal centro secondo due rette qualunque di S_3 ; lo hanno nel caso in cui lo spazio da esse determinato passa pel centro di proiezione.

11. *Punto d'incontro di una retta $S_0 O_0'$ con uno spazio $S_2 O_2'$.*

Si tiri per la retta $S_0 O_0'$ un piano qualunque $S_1 O_1'$ che incontri lo spazio $S_2 O_2'$ in una retta, la cui immagine avrà per traccia e per punto di fuga i punti ove le rette S_1, O_1' incontrano rispettivamente S_2, O_2' . Questa retta incontrerà la retta data nel punto richiesto.

Questa costruzione ci dà il teorema: *Se in uno spazio S_3 da due punti arbitrari $S_0 O_0'$ si tirano due rette incontrantisi in un piano fisso O_2 esse incontrano rispettivamente due piani, che s'intersecano in O_3 , in due punti la cui congiungente incontra la retta $S_0 O_0'$ in un punto fisso.*

12. *Punto d'incontro di due piani qualunque.*

Siano dati due piani $S_1 O_1', S_{1,1} O'_{1,1}$. Pel primo facciamo passare uno spazio $S_2 O_2'$, che taglierà il secondo in una retta, la cui immagine $S_0 O_0'$ è data dai punti $S_0' O_0'$ ove le rette $S_{1,1} O'_{1,1}$ incontrano i piani $S_2 O_2'$. Questa retta incontra il primo piano nel punto richiesto.

Da qui risulta :

Siano dati in uno spazio S_3 due piani, e in questi piani rispettivamente due coppie di rette $S_1 O_1'$; $S_{1,1} O_{1,1}'$, che s'incontrano in un piano fisso O_2 . Si tirino per le rette, per es.: $S_1 O_1'$ due piani $S_2 O_2'$ intersecantisi in O_2 , essi tagliano le rette $S_{1,1} O_{1,1}'$ in due punti la cui congiungente passa per un punto fisso dell' intersezione dei due piani dati.

Osservo che due piani qualunque di R_1 hanno rispetto al centro C una retta d' intersezione apparente.

a) Se i piani sono situati in uno stesso spazio R_3 , le loro tracce $S_1, S_{1,1}$ e le rette di fuga $O_1', O_{1,1}'$ devono essere situate rispettivamente su due piani, che s' intersecano in O_2 . In tal caso la retta d' intersezione dei due piani ha per immagine la retta d' intersezione delle loro immagini.

13. Retta d' intersezione di un piano con uno spazio.

Siano $S_1 O_1'$ e $S_2 O_2'$ il piano e lo spazio dati. Basta determinare i punti d' intersezione $S_0 \equiv S_1 S_2$, $O_0' \equiv O_1' O_2'$, la retta $S_0 O_0'$ risolve il problema.

14. Piano d' intersezione di due spazi $E_3, E_{3,1}$. Basta anche qui determinare le rette d' intersezione dei piani traccie e dei piani O_2' dei due spazi dati.

15. Trasversale comune a tre rette qualunque $S_{0,1}$; $O_{0,1}'$; $S_{0,2} O_{0,2}'$; $S_{0,3} O_{0,3}'$.

Si determina lo spazio a 3 dimensioni che passa per due di esse e quindi il punto d' incontro di questo spazio con la terza. Da questo punto si tira allora la retta che incontra le prime due.

Per determinare lo spazio R_3 delle due prime basta condurre per $S_{0,1} S_{0,2}$ un piano che passi pel punto d' incontro della retta $O_{0,1}' O_{0,2}'$ col piano fisso O_2 ; così si ottiene il piano traccia di R_3 . Tirando a questo da $O_{0,1}'$, $O_{0,2}'$ il piano parallelo si ha il suo piano di fuga. Si vede

che tre rette qualunque di R_1 hanno rispetto al centro infinite trasversali apparenti situate sopra un iperboloide.

Data una quaterna di rette qualunque in R_1 , tre a tre determinano 4 rette, che formano la quaterna complementare alla prima ⁽¹⁾.

16. a) *Data una retta che s'appoggia a due rette date $S_{0,1} O'_{0,1}$; $S_{0,2} O'_{0,2}$ determinare i suoi punti di determinazione $S_0 O'_0$.*

Pel punto d'incontro A_0 della retta data con $S_{0,1} O'_{0,1}$ si tiri la retta che passa pel punto $S_{0,2}$, della quale si determina tosto il punto O''_0 giacendo essa in un piano con la retta $S_{0,1} O'_{0,1}$. Il piano della retta $S_{0,2} O'_{0,2}$ e della retta $S_0 O'_0$ è così pienamente determinato; la sua retta O'_1 congiunge i due punti $O'_{0,2} O''_0$ e la sua traccia S_1 passa per $S_{0,2}$ e incontra la O'_1 nel piano fisso O_2 ; onde S_1 e O'_1 determinano sulla retta i punti $S_0 O'_0$.

b) *Dato un piano E, che interseca un piano ed una retta $S_{1,1} O'_{1,1}$; $S_{0,1} O'_{0,1}$, il primo in una retta, la seconda in un punto, costruire le sue rette $S_1 O'_1$.*

Per la retta d'intersezione A'_1 del piano dato con $S_{1,1} O'_{1,1}$ si fa passare un piano pel punto $S_{0,1}$; di questo piano si conosce già la traccia e la retta O'_1 , perchè di A'_1 si conosce la traccia e il punto O'_0 . Costruito così questo piano, si determina lo spazio che passa per esso e per la retta $S_{0,1} O'_{0,1}$, i cui piani $S_2 O'_2$ incontrano il piano dato E nelle sue rette S_1, O'_1 .

c) *Dato un piano E, che interseca due piani dati $S_{1,1}, O'_{1,1}$, $S_{1,2}, O'_{1,2}$ in due rette, costruire le sue rette $S_1 O'_1$.*

Si congiunge un punto A_0 della retta d'intersezione del piano dato con $S_{1,1} O'_{1,1}$, con un punto qualun-

(1) A. I. c., p. 190.

que della traccia $S_{1,2}$ e si determina il punto O_0'' della retta congiungente; essendo essa situata in uno spazio R_3 , col piano $S_{1,1} O_1',1$, del quale si determinano facilmente i piani $S_2 O_2'$. Così si può anche costruire lo spazio passante pel punto A_0 e pel secondo piano $S_{1,2} O_1',2$, e così vengono determinate e la traccia e la retta O_1' del piano dato E .

Questi sono i problemi proiettivi più semplici mediante i quali si risolvono i problemi più complicati sulla costruzione e sull'intersezione delle superficie a 2, a 3 dimensioni tenendo conto delle proprietà di questi enti geometrici sviluppate nella mia citata memoria. Così si vede che una superficie di 2.° grado a 3 dimensioni in R_4 ha per contorno apparente in S_3 una superficie di 2.° grado a due dimensioni, e che le sezioni con gli spazi R_3 di R_4 vengono rappresentate da altrettante superficie di 2.° grado, che toccano il contorno apparente.

La superficie d'intersezione di due superficie del 2.° ordine si proietta in una superficie del 4.° ordine con una conica doppia, perchè c'è un cono di 2.° ordine a due dimensioni le cui generatrici incontrano l'ultima superficie in due punti. Da questo metodo si ricavano dunque nuove costruzioni per questa superficie (4).

§ 3.

Problemi metrici.

17. Per la risoluzione dei problemi metrici nel metodo della proiezione centrale è più conveniente scegliere come

(1) Secondo il teorema, p. 167, l. c., una superficie di 2.° ordine a p dimensioni non può esser contenuta che nello spazio R_{p+1} .

secondo spazio di determinazione lo spazio Q_3 all'infinito di R_4 .

Angolo di un raggio proiettante collo spazio immagine S_3 .

Siano dati la sfera di distanza D e il raggio proiettante mediante il punto Q_0' (fig. 3). Ribaltiamo il triangolo $CC'Q_0'$, che è rettangolo in C' , intorno al lato $C'Q_0'$ sullo spazio S_3 . È chiaro che il punto C dovrà ribaltarsi sulla sfera di distanza D , e siccome esso descrive in R_4 una sfera a due dimensioni il cui spazio è perpendicolare a $C'Q_0'$ e il cui centro giace in $C'Q_0'$, così C si ribalterà sul piano d'intersezione di questo spazio con S_3 . Questo piano deve riuscire evidentemente perpendicolare all'asse di rotazione e deve passare per C' , poichè l'asse di rotazione è perpendicolare a qualunque piano di uno spazio normale ad esso. *Il centro C può dunque cadere in un punto qualunque del cerchio massimo della sfera di distanza D , il cui piano riesce perpendicolare a $C'Q_0'$.* Se C' è il ribaltamento del centro è chiaro che l'angolo $C'Q_0'(C)$ è l'angolo cercato. Da qui si deduce che tutte le rette aventi lo stesso punto di fuga Q_0' formano con S_3 lo stesso angolo $C'Q_0'(C)$. Dunque:

Tutti i punti di fuga delle rette egualmente inclinate con lo spazio S_3 giacciono in una sfera concentrica a D . Quando l'angolo è di 45° questa sfera cade in D .

Per determinare gli angoli di elementi dati determiniamo quelli degli elementi paralleli condotti pel centro di proiezione.

18. Angolo di un piano proiettante con S_3 .

Sia dato il piano mediante la retta Q_1' (fig. 3). Tiriamo per $C C'$ un piano normale alla retta Q_1' tale che la incontri in un punto per es. nel punto Q_0' . La traccia $C'Q_0'$ di questo piano dovrà riuscire normale alla retta Q_1' stessa. Fatto ciò ribaltiamo come prima il triangolo

$CC' Q_0'$ intorno a $C' Q_0'$, l'angolo $C' Q_0'$ (C) sarà l'angolo cercato. Da qui si deduce:

Tutte le rette di fuga dei piani egualmente inclinati con S_3 toccano una sfera concentrica alla sfera D.

19. Angolo di uno spazio proiettante con S_3 (fig. 3).

Sia Q_2' la traccia dello spazio dato $C Q_2'$. Per CC' tiriamo un piano R_1 perpendicolare a questo spazio e a S_3 ; ciò è sempre possibile, perchè basta far passare un piano per C e per i due poli Q_0, Q_0' dei piani all'infinito dei due spazi rispetto alla sfera immaginaria. Il piano R_1 sarà anche normale al piano Q_2' , e quindi incontrerà lo spazio S_3 in una retta $C' Q_0'$ perpendicolare al piano Q_2' .

Ribaltando il triangolo $CC' Q_0'$ si avrà l'angolo domandato.

Di qui si ricava che tutti i piani di fuga degli spazi egualmente inclinati con lo spazio S_3 toccano una sfera concentrica a D.

20. Ribaltamento di un piano (1).

Sia $S_1 Q_1'$ il piano dato. Noi ribaltiamo dapprima il piano $C Q_1'$ intorno a Q_1' in S_3 , e poi da S_1 tiriamo il piano parallelo (fig. 4).

Per ribaltare il piano $C Q_1'$ basta trovare il ribaltamento del centro C. Egli è chiaro che esso deve cadere sulla retta $C'H$ condotta ad angolo retto da C' alla retta Q_1' , vale a dire sulla retta ove lo spazio S_3 viene incontrato dal piano CHC' ad esso perpendicolare. Siccome la distanza HC è data da $H(C)$, così il ribaltamento $(C)'$ del centro è pienamente determinato; basta fare $H(C') = H(C)$. Egli è altresì evidente che ciascun piano proiettante si ribalta sopra un piano passante pel punto principale C' .

(1) Intendo che il ribaltamento avvenga sempre sullo spazio di proiezione, almeno quando non è detto diversamente.

Se $S_0 Q_0'$ è una retta del piano $S_1 Q_1'$ il ribaltamento (R_1) di questa retta riesce parallelo alla $(C)' Q_0'$. L'immagine A_0' e il ribaltamento A_0 di un punto devono essere evidentemente allineati col centro $(C)'$.

a). *Angolo di due rette qualunque* $S_0 Q_0'$, $S_{0,1} Q_{0,1}'$ (fig. 4).

Basta determinare l'angolo CQ_0' , $CQ_{0,1}'$; e a ciò ribaltiamo il piano $CQ_0' Q_{0,1}'$ sopra S_3 , l'angolo $Q_0'(C) Q_{0,1}'$ soddisfa al problema.

b). *Distanza di due punti.*

La retta che congiunge i due punti sia $S_0 Q_0'$. Ribaltiamo questa retta mediante un piano qualunque passante per essa e avremo la distanza cercata.

21. Ribaltamento di uno spazio R_3 (fig. 5).

Sia $S_2 Q_2'$ lo spazio dato, $C'H$ sia perpendicolare a Q_2' . Nella rotazione dello spazio $C Q_2'$ intorno a Q_2' il punto C descrive un cerchio di raggio $CH = (C)H$ nel piano CHC' normale a Q_2' . Il punto C cade dunque sulla retta HC' in $(C)'$, ove $H(C)' = H(C)$. Fatto ciò si può ottenere il ribaltamento di una figura qualunque. Sia data, per es., una retta R_1 di questo spazio mediante la sua immagine $S_0 Q_0'$. Per averne il ribaltamento basta tirare da S_0 la parallela (R_1) alla $(C)' Q_0'$. L'immagine A_0' e il ribaltamento (A_0) di un punto sono evidentemente per diritto col centro $(C)'$. Dunque:

Data l'immagine di una figura in uno spazio $S_2 Q_2'$ si può costruirne il ribaltamento e viceversa.

In tal modo possiamo determinare gli angoli di rette e di piani esistenti nello spazio $S_2 Q_2'$.

Dalla figura precedente si deduce che il ribaltamento e l'immagine di una figura sono omologiche pel centro C e pel piano S_2 , quale piano di omologia; ossia formano una collineazione di 1.^a specie (1).

(1) A. I. c. p. 181-83.

Lo stesso teorema ha pure luogo per uno spazio qualunque R_n , vale a dire:

Il ribaltamento delle figure dello spazio R_{n-1} di R_n col metodo della proiezione centrale sullo spazio immagine S_{n-1} e la loro immagine appartengono ad una collineazione di 1.^a specie.

22. Per un piano $S_1 Q_1'$ si può far passare un solo spazio R_3 perpendicolare a S_3 , che contiene tutte le perpendicolari condotte dai punti del piano a S_3 . Il piano di fuga di questo spazio è il piano $C'Q_1'$, il punto H del num. precedente cade in questo caso in C' , onde il centro C si ribalta in uno dei punti d'incontro (C) della perpendicolare, innalzata da C' sul piano CQ_1' , colla sfera di distanza (fig. 6). Congiungiamo (C) con Q_1' mediante un piano, e tiriamo da S_1 il piano parallelo, che sarà il ribaltamento (E_2) del piano dato $S_1 Q_1'$. Se $S_0 Q_0'$ è una retta del piano, si ha tosto il suo ribaltamento tirando da S_0 la parallela alla retta $(C) Q_0'$; così un punto A_0 di R_1 si ribalta in A_0' .

Supponiamo ora condotta dal punto A_0 la normale allo spazio S_3 ; il piede di essa P_0 dovrà essere situato sul piano (E_2) , perchè questo è la traccia dello spazio R_3 . Si vede anche subito che P_0 e A_0' devono essere allineati col punto principale C' .

Chiamiamo *ordinata* la distanza normale del punto A_0 da S_3 .

Ponendo :

$$A_0 P_0 = (A_0) P_0 = y \quad CC' = (C)C' = d$$

dai triangoli simili $(A_0)P_0 S_0$, $(C) C'Q_0'$ e $P_0 S_0 A_0'$, $C'Q_0' A_0'$ si ha :

$$(A_0) P_0 : (C) C' = y : d = P_0 S_0 : C'Q_0' = SA_0' : Q_0' A_0'.$$

Abbiamo dunque : *Il rapporto tra l'ordinata di un punto A_0 e il raggio della sfera di distanza è eguale a*

quello delle distanze $S_0 A_0'$, $Q_0' A_0'$ di una retta qualunque passante pel punto A_0 .

Quando A_0' giace nel segmento finito $S_0 Q_0'$ il punto A_0 giace rispetto allo spazio immagine dalla parte opposta a quella del centro di proiezione. Consideriamo come *positive* le ordinate dei punti situati dalla stessa parte del centro e *negative* le altre. Cosicchè essendo date le coordinate dei punti di una figura di R_1 si può costruirne tosto l'immagine.

Per es. siano date le ordinate y_1, y_2, y_3 di tre punti A_0, B_0, C_0 e i loro piedi P_0, R_0, S_0 in S_3 , i quali determinano un piano (E_2) . Da C' conduciamo la perpendicolare ad (E_2) , che incontra la sfera di distanza nel punto (C) . Tiriamo ora da P_0 la parallela alla retta $C'(C)$ e si prenda su di essa $P_0(A_0)$ eguale a y_1 nello stesso senso o in senso opposto a $C'(C)$, secondo che l'ordinata è positiva o negativa. Ottenuto così (A_0) si determina A_0' come punto d'incontro delle rette $C'P_0$ e $(C)(A_0)$. Analogamente si opera per gli altri punti.

23. Spazi ortogonali (fig. 7).

Dato uno spazio $C Q_3'$ vogliamo determinare la retta che passa per C e riesce perpendicolare a $C Q_3'$. Questa retta giace nel piano HCC' , dunque ribaltiamo il triangolo HCC' in $H(C)C'$, e tiriamo per (C) la normale a $(C)H$, che incontrerà la retta $C'H$ nel punto $Q_{0..n}$, traccia della retta cercata. È chiaro che $Q_{0..n}$ è il punto di fuga di tutte le rette perpendicolari allo spazio $C Q_3'$ e a tutti gli spazi il cui piano di fuga è Q_3' .

Sia $S_2 Q_3'$ un tale spazio; una retta $S_0 Q_{0..n}$ normale ad esso forma pure un angolo retto con tutte le rette e con tutti i piani dello spazio. Se la retta $S_0 Q_{0..n}$ incontra un piano $S_1 Q_1'$ di $S_2 Q_3'$ in un punto, e si ribalta lo spazio determinato da questa retta e dal piano, il ribaltamento

della retta dovrà riuscire perpendicolare al ribaltamento del piano.

Si ha pure: *Tutte le rette o piani di fuga dei piani o degli spazi normali allo spazio CQ'_2 passano per $Q'_{0,n}$.*

Viceversa per ciascuna retta CQ'_0 si può determinare analogamente la traccia $Q'_{2,n}$ dello spazio normale ad essa condotto pel centro C .

Dato un piano passante per C , per es. CQ'_1 situato nello spazio precedente $S_2 Q'_2$, determiniamo il piano normale condotto da C che non giace col primo in uno spazio R_3 . Basta far passare per C uno spazio perpendicolare al piano dato, per es. quello che riesce perpendicolare alla retta CH stessa. Si determina quindi il punto di fuga $Q'_{0,n1}$ relativo a quest'altro spazio, e congiungendo $Q'_{0,n}$ con $Q'_{0,n1}$ si ha una retta $Q'_{1,n}$, che è la retta di fuga di tutti i piani normali al piano dato e non situati con esso in uno spazio R_3 .

Se i due piani sono situati in uno spazio $S_2 Q'_2$ siano $Q'_1, Q'_{1,1}$ le loro rette di fuga. La retta $Q'_{1,1}$ dovrà essere situata sul piano Q'_2 e oltre a ciò dovrà passare pel punto d'incontro di Q'_2 con la retta $Q'_{1,n}$ relativa al primo piano. Da ciò che precede si vede che: *quando due piani perpendicolari non sono situati in uno stesso spazio R_3 , tutte le rette di uno di essi riescono normali all'altro.* Questo può essere verificato col ribaltamento dello spazio R'_3 dato da uno dei piani e da una parallela ad una retta qualunque dell'altro piano, che incontra il primo in un punto.

Chiamo *antipolo* il punto $Q_{0,n}$ relativo ad uno spazio R_3 , e così *retta e piano antipolare* gli elementi $Q'_{1,n}, Q'_{2,n}$ relativi ad un piano e ad una retta.

Le relazioni fra gli elementi di fuga di una retta, di un piano, di uno spazio e gli elementi antipolari sono pienamente stabilite mediante la sfera di distanza.

Tra questi elementi hanno luogo gli stessi teoremi della

teoria dei poli e delle polari rispetto ad una superficie di 2.° grado in S_3 . E così infatti deve essere, perchè gli elementi antipolari sono la proiezione degli elementi polari rispetto alla sfera immaginaria all'infinito di R_4 .

24. a) *Angolo di due spazi $S_2 Q'_2, S_{2,1} Q'_{2,1}$.*

Si determinino gli antipoli $Q'_{0,n}, Q'_{0,n1}$ dei due spazi, la congiungente $Q'_{1,n}$ è la retta antipolare del piano di intersezione. Il piano $C Q'_{1,n}$ interseca i due spazi secondo due rette $C Q'_0, C Q'_{0,1}$ che formano l'angolo desiderato. I punti $Q'_0, Q'_{0,1}$ sono i punti d'incontro della retta $Q'_{1,n}$ con i due piani $Q'_2, Q'_{2,1}$.

b) *La più corta distanza fra una retta ed un piano non situati in uno spazio R_3 .*

La più corta distanza fra una retta ed un piano è data dalla retta normale, che incontra la retta ed il piano.

Siano $S_0 Q'_0$ e $S_1 Q'_1$ la retta e il piano. Si costruiscano la retta $Q'_{1,n}$ e il piano $Q'_{2,n}$ antipolari del piano e della retta dati. La $Q'_{1,n}$ incontra il piano $Q'_{2,n}$ nel punto $Q'_{0,n}$, punto di fuga di tutte le rette normali alla retta e al piano.

Congiungiamo Q'_0 con $Q'_{0,n}$ mediante una retta $Q'_{1,1}$, e per S_0 tiriamo la parallela $S_{1,1}$; e così uniamo $Q'_{0,1}$ con $Q'_{0,n}$ mediante un piano Q'_2 , e per S_1 facciamo passare il piano parallelo S_2 . Il piano $S_{1,1} Q'_{1,1}$ e lo spazio $S_2 Q'_2$ s'intersecano in una retta perpendicolare alla retta e al piano dato, che vengono da essa intersecati. Col ribaltamento, per es., del piano $S_{1,1} Q'_{1,1}$, si ottiene la vera grandezza della più corta distanza domandata.

25. Si potrebbero risolvere molti altri problemi, i quali però si potrebbero trattare coi metodi, che abbiamo fin qui esposti, e che in gran parte sono analoghi a quelli che si adoperano nella geometria descrittiva a tre dimensioni (1).

(1) Vedi Fiedler, *Darstell. Geometrie*.

Quando la parte di spazio S_3 di cui si dispone e nella quale si vuole costruire l'immagine di una figura è troppo piccola, allora mediante una trasformazione del centro in direzione perpendicolare o parallela a S_3 o mediante una trasformazione del centro e dello spazio di proiezione si può impiccolire l'immagine; oppure se si devono eseguire delle costruzioni complicate in una figura troppo piccola, con la trasformazione del centro si possono eseguire in una immagine ingrandita, e poi si possono trasportare nella primitiva immagine.

PARTE II.

PROJEZIONE ORTOGONALE.

§ 1.

Proiezione ortogonale con un solo spazio di proiezione.

26. Supponiamo ora che il centro di proiezione sia situato all'infinito e precisamente nella direzione perpendicolare allo spazio S_3 . In questo caso siccome il centro giace nello spazio Q_3 , così bisogna scegliere un altro spazio di determinazione O_3 a distanza finita. Noi supponiamo che lo spazio O_3 sia parallelo ad S_3 e sia situato da questo alla distanza data d .

Una retta viene determinata dai suoi punti $S_0 O'_0$, un piano dalle sue rette $S_1 O'_1$ e uno spazio da' suoi piani $S_2 O'_2$. In questo sistema i problemi proiettivi si risolvono come nella proiezione centrale. Resta dunque a vedere come si devono risolvere i problemi metrici, poichè qui non abbiamo la sfera di distanza.

27. *Angolo di una retta con S_3 (fig. 8).*

Sia $S_0 O'_0$ la proiezione della retta R_1 ; il piano normale condotto per essa ad S_3 ha per traccia la retta $S_0 O'_0$ stessa. Per avere il ribaltamento di questo piano fatto intorno alla $S_0 O'_0$ tiriamo per O'_0 una retta ad angolo retto colla $S_0 O'_0$ e prendiamo su di essa una distanza $O'_0 (O_0)$ eguale a d ; congiungendo (O_0) con S_0 si ha così il ribaltamento della retta e l'angolo $(O_0) S_0 O'_0$, che essa forma con S_3 .

Se A'_0, B'_0 sono le proiezioni di due punti A, B qualunque della R_1 , per avere i ribaltamenti $(A_0), (B_0)$ basta

tirare da A'_0, B'_0 le parallele alla O'_0 (S_0) sino ad incontrare la retta S_0 (O_0). Da ciò che precede risulta:

Tutte le rette per le quali i punti $S_0 Q'_0$ hanno la stessa distanza formano lo stesso angolo collo spazio S_3 .

28. Angolo di un piano con S_3 (fig. 9).

Sia $S_1 O'_1$ il piano dato. Per un punto S_0 della traccia S_1 tiriamo un piano normale al piano $S_1 O'_1$ e allo spazio S_3 nello spazio proiettante di $S_1 O'_1$ ⁽¹⁾. La traccia di questo piano dovrà chiaramente formare un angolo retto con la retta S_1 stessa e, giacendo nello spazio proiettante del piano dato, la sua traccia dovrà essere situata sul piano $S_1 O_1$, ossia sarà la retta $S_0 O'_0$. È evidente che la retta $S_0 O_0$ forma con S_3 l'angolo cercato. Basterà quindi ribaltare il triangolo $S_0 O'_0 O_0$ in $S_0 O'_0$ (O_0).

Noi vediamo che: *tutti i piani per i quali le rette $S_1 O'_1$ sono egualmente distanti formano lo stesso angolo con lo spazio S_3 .*

a) Ribaltamento di un piano sulla sua proiezione (fig. 9).

Il ribaltamento ha luogo entro lo spazio proiettante del piano intorno alla sua traccia S_1 . Ciascun punto del piano descrive un cerchio il cui centro è situato sull'asse di rotazione, cioè sulla traccia, e il cui piano riesce normale a quest'asse; quindi il punto O_0 cadrà sul prolungamento di $S_0 O'_0$ in $(O_0)'$ ad una distanza

$$S_0(O_0)' = S_0 O_0.$$

29. Angolo di uno spazio $S_2 O'_2$ con S_3 (fig. 10).

Tiriamo un piano normale ad S_3 e a $S_2 O'_2$, che sa-

(1) In generale per un punto non si può condurre un piano normale ad uno spazio R_3 e ad un piano R_2 , perchè lo spazio determina all'infinito un punto $Q_{0,n}$, il piano invece una retta $Q_{1,n}$ rispetto alla sfera immaginaria; vale a dire pel punto si può condurre un solo spazio normale a R_3 e R_2 , il cui piano all'infinito è $Q_{0,n} Q'_{1,n}$.

rà anche normale al piano S_2 ; la traccia S_1 di questo piano dovrà dunque essere perpendicolare ad S_2 . Ribaltiamo questo piano intorno ad S_1 , la sua retta O_1 si ribatterà sulla (O_1) (vedi n.° 28) alla distanza d da S_1 , siccome il piano è anche perpendicolare a S_3 .

Se (O_0) è il punto ove la retta (O_1) incontra O_2 l'angolo $O'_0 S_0 (O_0)$ è quello cercato. Così abbiamo: *tutti gli spazi egualmente inclinati con S_3 hanno i piani $S_2 O'_2$ ad eguale distanza.*

a) *Ribaltamento dello spazio $S_2 O'_2$ (fig. 10).*

Facendo ruotare lo spazio intorno al piano S_2 è chiaro che il punto O_0 della retta ribaltata in $S_0 (O_0)$ verrà a cadere nel prolungamento di $S_0 O'_0$ in $(O_0)'$, in modo che $S_0 (O_0)' = S_0 (O_0)$. Tirando quindi da $(O_0)'$ il piano (O_2) parallelo a O_2 si ha il ribaltamento del piano O_2 dello spazio dato.

Se $S_{0.1} O'_{0.1}$ è una retta di questo spazio, il suo ribaltamento cade in $S_{0.1} (O_{0.1})$, e così un punto A_0 di questa retta si ribalta in (A_0) .

Si vede chiaramente che in questo sistema il ribaltamento di una figura situata in uno spazio a tre dimensioni e la sua immagine sono due figure simili.

30. Spazi ortogonali.

Sia data una retta $S_0 O'_0$; si tratta di condurre ad essa una normale da un punto dato.

Si sa che tutte le normali condotte da un punto ad una retta nello spazio R_1 giacciono in uno spazio R_3 , tra queste ne esiste una che incontra la retta data.

Due rette perpendicolari, delle quali una è parallela allo spazio S_3 , vengono proiettate secondo due rette ad angolo retto.

Siano R_1 e G_1 le due rette, R'_1 , G'_1 le loro immagini, e sia R_1 la parallela a S_3 . Il piano proiettante della G_1 è perpendicolare a S_3 ed anche alla retta R_1 , perchè la

sua retta all' infinito è evidentemente situata sul piano polare $Q_{2,n}$ del punto all' infinito di R_1 rispetto alla sfera immaginaria. Questo piano è quindi anche normale alla R'_1 , vale a dire la sua traccia G'_1 è normale alla R'_1 .

Sia ora data una retta G_1 ossia S_0O_0' e un punto A_0 sopra un' altra retta S_0O_0' . Nel caso che A_0 fosse dato sopra una retta qualunque si potrebbe sempre determinare il punto $O'_{0,1}$ della retta S_0A_0 . Per A_0 vogliamo condurre la normale a G_1 , che la incontra in un punto. A ciò ribaltiamo il piano A_0G_1 , per es. sulla sua proiezione $A_0'G'_1$, e dal ribaltamento (A_0) tiriamo la normale a quello di G_1 ossia (G_1). Sia (P_0) il piede di essa sopra (G_1). Si avrà tosto la proiezione P_0' di P_0 , che congiunta con A_0' ci darà la retta cercata.

31. Retta e piano.

Se la retta R_1 è parallela a S_3 la sua proiezione R'_1 sarà normale alla proiezione R'_2 del piano R_2 ad essa ortogonale.

Infatti lo spazio proiettante di R_2 forma un angolo retto colla R_1 , poichè il suo piano all' infinito passa pel centro di proiezione (che giace in una direzione normale alla R_1) e per la retta all' infinito di R_2 . È chiaro dunque che la proiezione R'_2 deve essere perpendicolare a R'_1 .

32. Retta e spazio.

In questo caso si vede che la proiezione R'_1 della retta deve riuscire normale alla traccia S_2 dello spazio R_3 essendo il piano proiettante di R_1 perpendicolare tanto a R_3 quanto a S_3 . Sarà dunque facile di costruire la proiezione della retta normale ad uno spazio R_2 passante per un punto dato A_0 .

Per costruire lo spazio normale ad una retta data S_0O_0' da un punto A_0 , dato sopra una retta $S_{0,1}O'_{0,1}$ basta costruire la normale condotta da A_0 alla retta e situata con questa sopra un piano (n.° 30), e dai suoi punti

$S_{0,1} O_{0,1}'$ basta quindi tirare due piani $S_1 O_1'$ ad angolo retto con la proiezione $S_0 O_0'$ della retta data.

33. Piano e spazio.

Per una retta data $S_0 O_0'$ si può far passare il piano normale ad uno spazio dato R_3 . Si costruisce la perpendicolare condotta da un punto della retta allo spazio R_3 , la quale con la retta $S_0 O_0'$ determina il piano cercato.

34. Piano e piano.

Dato un piano R_2 ed un punto A_0 vogliamo costruire il piano normale al dato passante per A_0 e che non giace con R_2 in uno spazio R_3 . Si fanno passare due spazi pel punto e perpendicolari a R_3 ; questi due spazi s'incontreranno nel piano desiderato.

I problemi della determinazione degli angoli si risolvono evidentemente mediante quelli già risolti. L'angolo per es. di due rette si determina ribaltando il piano individuato dall'una di esse e dalla parallela condotta all'altra da un punto della prima; e l'angolo di una retta con un piano si ottiene col ribaltamento dello spazio individuato dal piano e da una parallela condotta alla retta da un punto di esso piano ecc.

§ 2.

Proiezione ortogonale con due spazi perpendicolari.

35. Siano O_3, V_3 i due spazi di proiezione che stanno ad angolo retto. I due centri sono situati all'infinito in due direzioni rispettivamente parallele ad O_3, V_3 .

Il piano F_2 d'intersezione dei due spazi di proiezione si chiami *piano fondamentale*. Le proiezioni fatte su O_3 s'indichino con un apice, quelle su V_3 con due.

Per determinare le proiezioni di un punto A_0 di R_4

tiriamo per A_0 le normali a $O_3 V_3$; i piedi di esse $A_0' A_0''$ sono la *prima e seconda proiezione* del punto.

Per operare con un solo spazio O_3 a tre dimensioni, che noi supponiamo coincidere col nostro, ribaltiamo lo spazio V_3 intorno al piano fondamentale sullo spazio O_3 . *Le proiezioni $A_0' A_0''$ di un punto A_0 vengono a giacere sopra una retta perpendicolare al piano fondamentale. E viceversa due punti qualunque $A_0' A_0''$ che soddisfano a questa condizione sono le proiezioni di un punto A_0 di R_4 .*

Una retta G_1 e un piano E_2 hanno due proiezioni G_1' , G_1'' ed E_2' , E_2'' . Le tracce di una retta, di un piano e di uno spazio R_3 sono date dall'intersezioni di essi con gli spazi $O_3 V_3$. È chiaro che le tracce S_1' , S_1'' di un piano E si devono incontrare in un punto dello spazio fondamentale F_2 , vale a dire nel punto ove E_2' incontra F_2 .

Se il piano E_2 incontra F_2 secondo una retta, le tracce del piano coincidono con questa retta.

Così le tracce S_2' , S_2'' di uno spazio R_3 devono incontrarsi necessariamente in una retta di F_2 .

36. Risolviamo ora alcuni dei problemi più semplici.

Determinare le tracce di una retta data mediante le sue proiezioni A_1' , A_1'' .

Per ottenere la prima traccia S_0' si prolunghi la A_1'' sino ad incontrare la retta α_1 d'intersezione del piano A_1' , A_1'' col piano fondamentale; quindi dal punto d'incontro si tiri la perpendicolare ad F_2 , che determina sulla A_1 la traccia S_0 .

Se la retta A_1 in R_3 è parallela, per es., ad O_3 , la sua 2.^a proiezione A_1'' sarà parallela al piano F_2 . Se A_1 è normale ad O_3 , A_1' giace ad angolo retto con F_2 e A_1'' si riduce ad un punto.

Analogamente si possono costruire le tracce di un piano, dato mediante le sue proiezioni A_2' , A_2'' . Questi due

piani intersecano F_2 in due rette α_1 e β_1 , che si segano nel punto pel quale devono passare le traccie del piano. Se dunque da α_1 si tira un piano perpendicolare a F_2 , esso interseca il piano A_2'' nella 2.^a traccia S_1'' .

Se il piano A_2 di R_4 riesce parallelo, per es. ad O_3 , il piano A_2'' dovrà giacere parallelamente al piano F_2 . Se invece esso riesce normale ad O_3 , la sua 1.^a proiezione A_2' si riduce alla sua 1.^a traccia, e la sua 2.^a traccia forma un angolo retto col piano F_2 . Infatti il piano contiene il 1.^o centro di proiezione, dunque la traccia S_1'' di esso dovrà passare per questo centro, essendo quest'ultimo contenuto nello spazio V_3 , e perciò dovrà riuscire normale a F_2 .

Se il piano è perpendicolare a tutti due gli spazi di proiezione le sue traccie coincidono in una sola retta normale a F_2 .

Finalmente se uno spazio è parallelo ad uno degli spazi di proiezione, per es. O_3 , la sua 1.^a traccia S_3' giace parallelamente al piano fondamentale, mentre la 2.^a cade all'infinito. Se invece lo spazio è normale ad O_3 la 2.^a sua traccia S_3'' riuscirà normale a F_2 . Infatti lo spazio contiene il 1.^o centro di proiezione, la traccia S_3'' deve dunque passare per il 1.^o centro di proiezione, ossia deve essere perpendicolare a F_2 .

37. Quando due rette G_1, R_1 in R_4 s'incontrano in un punto A_0 , le prime e seconde proiezioni di esse s'intersecano rispettivamente in due punti A_0', A_0'' , la cui congiungente deve giacere normalmente al piano fondamentale.

Analogamente se una retta ed un piano s'incontrano in un punto A_0 le 1.^e e 2.^e proiezioni di essi tagliansi rispettivamente in due punti A_0', A_0'' , cioè nelle proiezioni del punto A_0 . Si possono allora costruire facilmente le traccie dello spazio determinato dalla retta e dal piano.

Data la proiezione A_0' di un punto A_0 situato in uno spazio dato $S_2'S_2''$, si costruisca la proiezione A_0'' (fig. 11).

A ciò tiriamo per A_0 una parallela al piano S_2' , la prima proiezione α_1' di questa retta giacerà parallelamente al piano S_2' . Si determini quindi il punto α_0 d'incontro di α_1' con F_2 , e da α_0 s'innalzi una perpendicolare ad F_2 sino all'incontro β_0 con S_2'' . Da β_0 si conduca finalmente la parallela a F_2 che taglia la perpendicolare condotta da A_0' a F_2 in un punto, che è il punto cercato A_0'' .

38. Avendo imparato a determinare un punto, una retta, un piano e uno spazio si possono risolvere i problemi proiettivi, che abbiamo risolti coi metodi precedenti.

Così per es. il punto d'incontro o la retta d'intersezione di uno spazio a 3 dimensioni con una retta o con un piano, il piano d'intersezione di due spazi si ottengono generalizzando le costruzioni analoghe usate nella geometria descrittiva a tre dimensioni.

Per costruire il punto d'incontro di due piani dati mediante le loro proiezioni $E_2'E_2''$, $E_2'.1$ $E_2''.1$ basta far passare per uno di essi uno spazio, che interseca l'altro lungo una retta, la quale incontra il primo piano nel punto cercato.

39. Anche i problemi metrici più semplici possono essere risolti con questo metodo molto facilmente.

Per la posizione reciproca delle proiezioni di elementi ortogonali valgono le stesse considerazioni, che abbiamo fatte pel caso di un solo spazio di proiezione, cosicchè potremo costruire la retta o il piano normale condotto da un punto o da una retta ad uno spazio dato, oppure il piano normale di un punto ad un piano dato e che non giace col primo in uno spazio R_3 ecc.

Anche i ribaltamenti di una retta di un piano e di uno spazio possono essere eseguiti come pel caso della proje-

zione con un solo spazio, o con le costruzioni analoghe della geometria ordinaria.

Il problema della trasformazione degli spazi O_3, V_3 trova qui un'analoga soluzione dello stesso problema nello spazio a tre dimensioni (1).

§ 3.

Proiezione assonometrica ortogonale.

40. Siano dati nello spazio R_3 quattro assi Ox, Oy, Oz, Ow ortogonali. Prendiamo come positivi gli assi a partire dall'*origine* O nel senso indicato dalle frecce, negative nel senso contrario (fig. 12).

Da un punto P_0 si conducano le normali ai quattro spazi coordinati $(yzw), (xzw), (xyw), (xyz)$, e siano $P_0', P_0'', P_0''', P_0''''$ i piedi di esse. Le grandezze

$$P_0 P_0' = x, P_0 P_0'' = y, P_0 P_0''' = z, P_0 P_0'''' = w,$$

si chiamano le *coordinate* del punto P_0 , alcune delle quali o tutte possono essere negative.

I punti $P_0', P_0'', P_0''', P_0''''$ sono la 1.^a, 2.^a, 3.^a, 4.^a proiezione del punto P_0 .

Da qui risulta che ci sono 16 punti, che hanno le stesse coordinate, se si prescinde dal segno di esse.

Se le coordinate di P sono eguali, per es. all'unità, i 16 punti sono :

(1) Vedi § seguente nr.° 43.

1	1	1	1	1	1'	-1	-1	-1	1	h_1
2	-1	-1	1	1	2'	1	1	-1	-1	h_2
3	-1	1	-1	1	3'	1	-1	1	-1	h_3
4	-1	1	1	-1	4'	1	-1	-1	1	h_4
5	-1	1	1	1	5'	1	-1	-1	-1	h_5
6	1	-1	1	1	6'	-1	1	-1	-1	h_6
7	1	1	-1	1	7'	-1	-1	1	-1	h_7
8	1	1	1	-1	8'	-1	-1	-1	1	h_8

I punti indicati dagli stessi numeri stanno rispettivamente per diritto coll' origine O degli assi. Siano $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8$ le rette che li congiungono con O . Queste rette si separano in due gruppi $h_1, h_2, h_3, h_4; h_5, h_6, h_7, h_8$ tali che si passa da una retta di uno di essi ad una retta dello stesso gruppo con uno scambio pari di segni, mentre si passa ad una retta dell' altro gruppo con uno scambio dispari ⁽¹⁾.

Consideriamo ora i dodici spazi:

- I. $H_{xy} \equiv z - w = 0; H_{xz} \equiv w - y = 0; H_{xw} \equiv y - z = 0;$
 $H_{yz} \equiv x - w = 0; H_{yw} \equiv x - z = 0; H_{zw} \equiv x - y = 0;$
 II. $H'_{xy} \equiv z + w = 0; H'_{xz} \equiv w + y = 0; H'_{xw} \equiv y + z = 0;$
 $H'_{yz} \equiv x + w = 0; H'_{yw} \equiv x + z = 0; H'_{zw} \equiv x + y = 0.$

Questi spazi passano rispettivamente per i due assi indicati dagli indici di essi, così per es. H_{xy} passa per i due assi x, y , mentre per ogni asse passano 3 dei 12 spazi. I primi 6 spazi formano un gruppo tale, che due delle coordinate dei punti dei 6 spazi, che lo compongono, sono eguali in grandezza e direzione. Essi s' incontrano tre a tre in quattro piani H_x, H_y, H_z, H_w ; per es. H_{xy}, H_{xz}, H_{xw} pas-

(1) In un nuovo mio lavoro, che verrà pubblicato negli *Annali di matematica*, tratterò diffusamente delle proprietà della figura formata da questi 16 punti.

degli spazi coordinati, cioè disponendo prima di tutto il 2.^o spazio V_3 di proiezione normalmente ad S_3 ; ciò che si fa prendendo il nuovo piano fondamentale normale alla 1.^a traccia S_1' di S_3 , e poi facendo ruotare il 1.^o spazio di proiezione sino a cadere in S_3 .

Noi possiamo così ottenere le proiezioni dei 4 assi x, y, z, w sullo spazio S_3 e oltre a ciò i rapporti di accorciamento tra le proiezioni di una distanza presa sugli assi e la distanza stessa; cosicchè data una figura di R_4 mediante le coordinate dei suoi punti potremo costruire la sua proiezione assonometrica ortogonale nello spazio S_3 (1).

Qui si possono pure distinguere differenti specie di proiezione assonometrica secondo che due o tre o tutti quattro i rapporti d'accorciamento sono eguali.

Come è chiaro, la geometria descrittiva a quattro dimensioni è un campo molto più vasto di quella a tre dimensioni per la molteplicità e varietà dei problemi, che si presentano da risolvere. Io non ho trattato che dei problemi più semplici, ma egli è evidente che i problemi più complicati relativi alle curve e superficie a due e a tre dimensioni danno luogo nello spazio nostro a nuove costruzioni e teoremi, che sarebbe interessante di studiare.

Padova, aprile 1882.

(1) In proiezione ortogonale la proiezione di una distanza S al massimo eguale ad essa.

G. Veronese - Geom. descrittiva a quattro dimensioni.

Fig. 1.

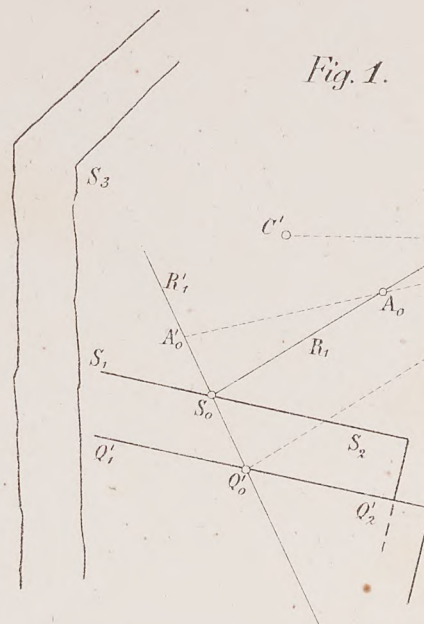


Fig. 2.

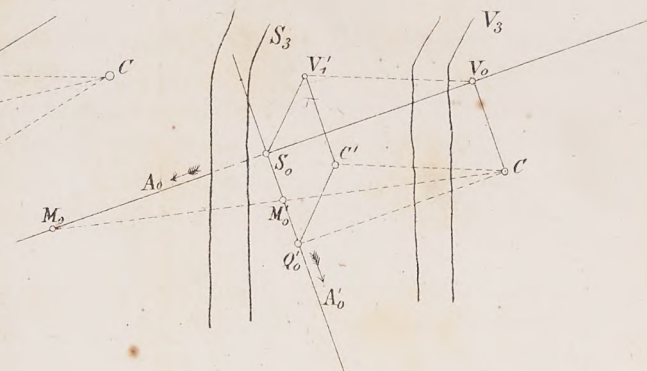


Fig. 3.

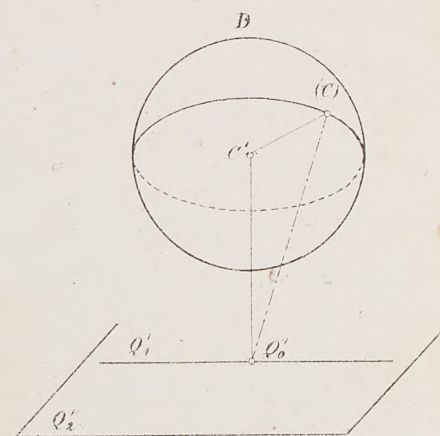
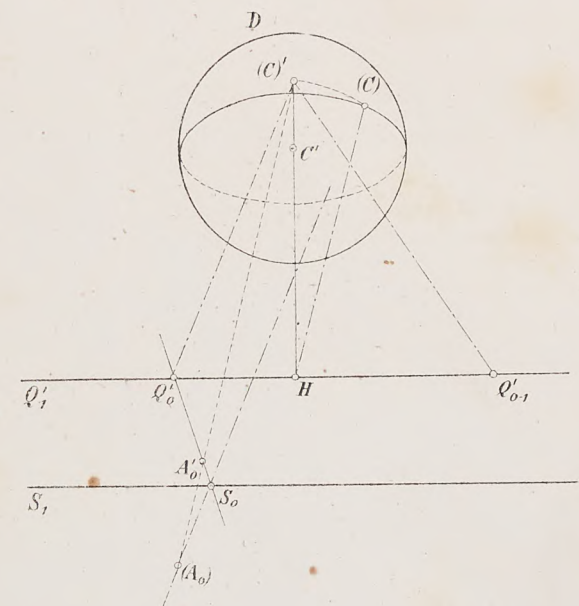


Fig. 4.



G. Veronese - Geom. descrittiva a quattro dimensioni.

Fig. 5.

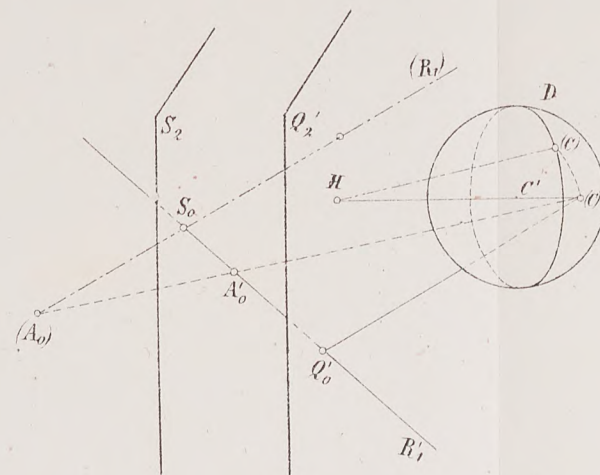


Fig. 6.

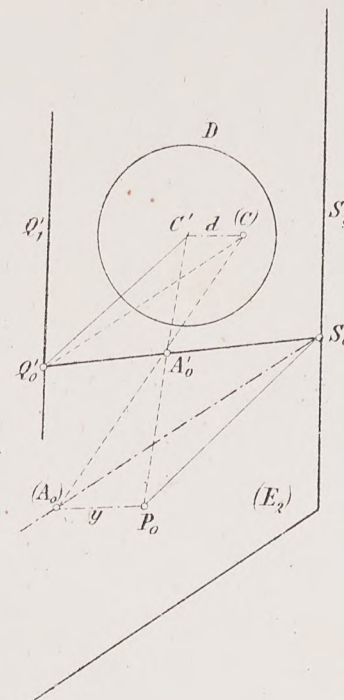


Fig. 7.

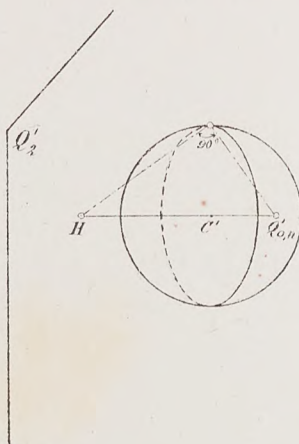
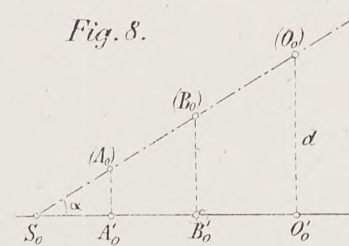


Fig. 8.



G. Veronese - Geom. descrittiva a quattro dimensioni.

Fig. 9

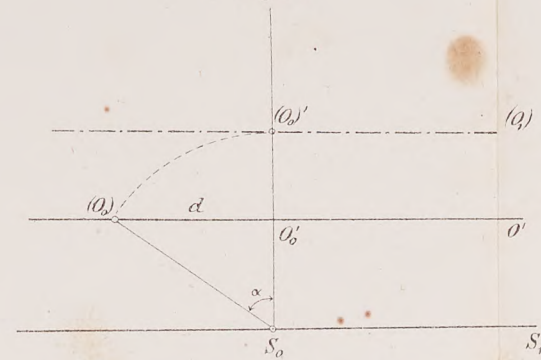


Fig. 10

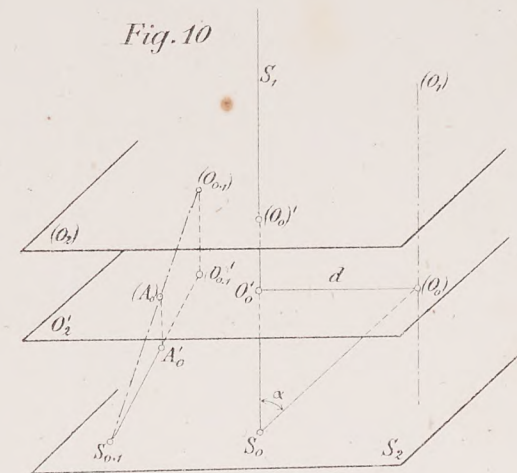


Fig. 11

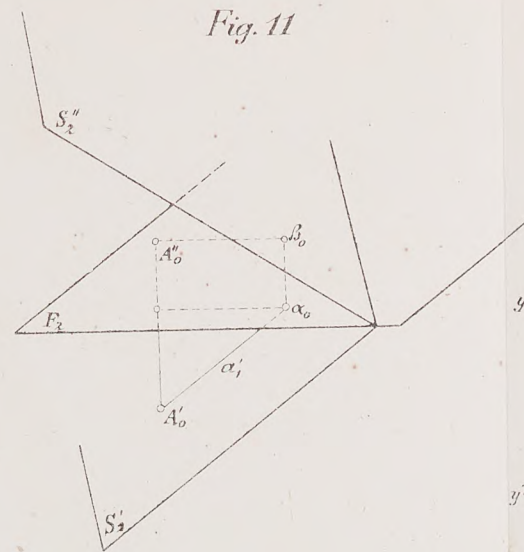


Fig. 12

