RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 19 settembre 1897.

Matematica. — *Sul postulato della continuità.* Nota del Corrispondente G. VERONESE.

Nella introduzione dei miei *Fondamenti di Geometria* ho dato due ipotesi (VI e VIII) per stabilire la continuità relativa e la continuità assoluta della forma fondamentale (che corrisponde alla retta nella geometria), vale a dire la continuità in un campo *finito*, per tutti i segmenti del quale vale il postulato d'Archimede, e la continuità quando si ammettono i segmenti infiniti e infinitesimi attuali (1). Nei *Fondamenti* ho detto che il continuo intuitivo non si definisce, ma che pel geometra basta definire il continuo come un gruppo di punti assoggettato a certe proprietà. In qual modo si formi in noi l'intuizione del continuo è un problema che spetta al psicologo risolvere, se pure può essere risolto; come si determini il continuo come un gruppo di punti spetta al geometra. Il metodo più naturale per determinare

(1) Le critiche dei sigg. G. Cantor, W. Killing e L. Schönflies contro la mia teoria degli infiniti e infinitesimi non sono esatte. Nulla ho da mutare sostanzialmente alla mia teoria. I miei critici stessi non sono d'accordo sui punti che essi credono difettosi della teoria stessa. Il sig. Killing trova possibile ciò che per G. Cantor non era possibile; il sig. Schönflies critica le osservazioni critiche del sig. Killing, ma il sig. Schönflies erra anche lui sostenendo che non è possibile la moltiplicazione coi miei numeri transfiniti e infinitesimi, perchè i numeri da lui scelti non appartengono al mio sistema, e non è vera la distinzione che egli fa tra i miei numeri e quelli del sig. Levi-Civita. Infine non è esatta l'asserzione che non si possa stabilire una geometria proiettiva con segmenti infiniti e infinitesimi attuali.

questo continuo è appunto quello che ricava le varie proposizioni fondamentali (postulati o ipotesi) dall'osservazione, di guisa che esse o esprimano dei fatti semplici da tutti osservati, sia pure facendo astrazione da alcune qualità degli oggetti a cui si riferiscono, oppure esprimano delle proprietà che non contraddicano a quelle le quali servono a costruire o a determinare la figura corrispondente al campo della nostra osservazione. Determinando il continuo rettilineo mediante i numeri reali ordinari stabiliti per via di simboli, a partire da un punto come origine, oltre che si introducono nel concetto del continuo geometrico altri concetti ad esso estranei, si subordina il continuo a quello dei numeri ordinari, assoggettando così il continuo rettilineo al postulato d'Archimede.

Nei *Fondamenti* ho fatto vedere che anche ammettendo gl' infiniti e infinitesimi non si contraddice alle proposizioni ricavate direttamente dall' osservazione e necessarie per dimostrare la proprietà della figura corrispondente allo spazio fisico. Ma ho anche osservato che non ho bisogno di ammettere l' esistenza fisica di segmenti infiniti o infinitesimi attuali, nello stesso modo che non ho bisogno di supporre che lo spazio fisico sia contenuto in uno spazio materiale a un numero maggiore di dimensioni per giustificare la concezione dello spazio generale che ha un numero infinito di dimensioni (1).

La questione sulla validità dei postulati e da me accennata nei *Fondamenti* e altrove (2), è questa: Dato un primo postulato *semplice* A (vale a dire non scomponibile in parti) (3), un altro postulato B è compatibile o non col postulato A, in modo cioè che da A e B non si deduca qualche contraddizione? Nei *Fondamenti* ho sostenuto che tale possibilità ha maggiore sicurezza quando è dimostrata logicamente; ma in difetto di tale dimostrazione possiamo contentarci dell' esperienza quando i postulati A e B sono tratti dalla diretta osservazione interna od esterna, la quale ultima si estende ad una sola parte dello spazio fisico. Ammessi universalmente per veri i postulati che si osservano direttamente sugli oggetti esterni, la questione è ridotta a provare per via logica che la estensione dei detti postulati a tutto lo spazio, costruito ad es. mediante le rette illimitate passanti per un punto O, come l' ammissione di altri postulati, è logicamente possibile; e che lo è anche geometricamente in quanto agli enti contenuti in S, anche se S è il nostro spazio generale, possiamo applicare l' intuizione spaziale e quindi anche il metodo geometrico costruttivo.

(1) La confusione fra lo spazio geometrico e lo spazio fisico generò alcune critiche di filosofi e anche di matematici contro la mia concezione dello spazio, che non hanno alcun fondamento.

(2) *Osservazioni sui principî della geometria.* Atti della R. Acc. di Padova, 1894.

(3) Ad es. il postulato che una retta è determinata da ogni coppia dei suoi punti, contiene tante parti quante sono le coppie di punti della retta.

Le ipotesi VI e VIII dei *Fondamenti* le ho giustificate brevemente mediante i numeri stessi che da quelle ipotesi si ricavano, supponendo come è possibile che quei numeri siano poi stabiliti indipendentemente da quelle ipotesi. Ma nella mia Nota: *Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali*, ho accennato ad un metodo diretto e geometrico più generale per dimostrare la possibilità di quelle ipotesi (1). Un tale metodo mi permette anche di dimostrare che per stabilire i fondamenti della geometria *non è necessario dare un postulato per la continuità della retta.* Ciò chiarirà ancora meglio la indipendenza del continuo dal postulato d'Archimede, mentre dal postulato del continuo del sig. Dedekind si trae tosto quello d'Archimede, appunto perchè, per formulare il suo postulato, Dedekind si fonda sulla corrispondenza dei punti della retta ai numeri reali ordinari.

Questo metodo sarà svolto interamente nell'Appendice dei miei *Elementi di Geometria* (2), ma per l'importanza che ha nella matematica il concetto del continuo non parmi inopportuno di comunicare intanto in questi Rendiconti i risultati della mia ricerca.

1. Le ipotesi VI e VIII dei *Fondamenti* sono riunite negli *Elementi* nel post. XI, cioè:

A. *Se un segmento* (XX′) *sulla retta cogli estremi sempre variabili in verso opposto diventa indefinitamente piccolo, esso contiene almeno un punto distinto dagli estremi.*

Il segmento viene qui considerato in quanto esso diventa indefinitamente piccolo, e quindi possiamo supporre che i punti X si mantengano sempre da una stessa parte dei punti X′ e viceversa.

Indefinitamente piccolo significa che il segmento diventa e rimane da un certo suo stato più piccolo di ogni segmento scelto ad arbitrio.

Al detto postulato sono premessi nei *Fondamenti* e negli *Elementi*:

I) il post. I: *esistono punti distinti*;

II) il post. II secondo il quale: *dato un punto qualsiasi* A *nella retta, esistono in un dato verso due segmenti l'uno col primo l'altro col secondo estremo nel punto* A *ed eguali ad un segmento* XY *nella stessa retta e nel verso dato.*

Negli *Elementi* ammettiamo semplicemente (post. VI) e nei *Fondamenti* implicitamente nel concetto di eguaglianza che *un segmento non è eguale ad una sua parte* (3).

(1) Math. Annales, vol. 47, 3.

(2) Padova, ed. Drucher, 1897.

(3) Nel post. II degli *Elementi* è ammessa per ragioni didattiche la invertibilità del segmento, cioè $AB \equiv BA$, mentre nei *Fondamenti* è dimostrata. Essa non ha del resto alcuna influenza sulla questione di cui qui ci occupiamo.

Oltre alle prop. I) e II) dobbiamo ammettere pure quest'altro postulato:

III) *in ogni segmento* (AC) *a partire da un punto* A *in un dato verso della retta, vi è almeno un punto distinto dagli estremi* (1).

Colla prop. II) si dimostra la prop. III) per ogni punto della retta.

Dalla II) si deducono facilmente i teoremi della somma e della differenza di due e più segmenti, dei multipli e summultipli di un segmento (2).

Dalla II) e dalla III) si deduce facilmente che la somma di due segmenti che diventano indefinitamente piccoli diventa pure indefinitamente piccola.

Dalle prop. I), II), III) non si deduce senza la A che il segmento è divisibile in n parti eguali, e per ciò non possiamo far uso, anche volendo, dei numeri frazionarî.

Posto ciò procediamo così:

Def. I. Dicesi *punto improprio* ogni segmento (XX′) che ha gli estremi sempre variabili in versi opposti sulla retta e diventa indefinitamente piccolo.

I punti dati dal post. I si chiamano *punti proprî*.

Secondo questa definizione il punto improprio è determinato non tanto dalle serie dei punti X e X′ quanto dal fatto che (XX′) diventa indefinitamente piccolo; vale a dire scelto uno dei segmenti (XX′) piccolo ad arbitrio, i segmenti (XX′) in esso contenuti determinano lo stesso punto improprio.

Ogni punto proprio è determinato da un punto improprio.

Def. II. Due punti dati (XX′) e (YY′), tali che X, X′, Y e Y′ si seguono nel verso da X a X′, si dicono *coincidenti*, quando ogni punto proprio X sia un punto Y o compreso fra punti Y; ovvero ogni punto X′ sia un punto Y′ o compreso fra punti Y′. Ciascuna di queste condizioni ha per conseguenza l'altra.

Tale definizione è verificata da tutti i punti improprî che determinano lo stesso punto proprio, o da due punti improprî che determinano due punti proprî coincidenti.

Osservo ancora che quando i due punti (XX′), (YY′) coincidono non può essere che fra punti Y vi siano punti X′.

Dalla def. II segue inoltre che il segmento (XY′) resta maggiore di un certo segmento ε, se i due punti (XX′), (YY′) sono distinti, e inversamente.

Def. III. Due punti improprî (XX′), (YY′) si seguono in un verso della retta, quando considerati i detti punti determinati da segmenti (X_1 X_1'), (Y_1 Y_1') abbastanza piccoli (def. I), i punti X_1, X_1', Y_1, Y_1', si seguono nel verso dato.

In virtù di questa definizione valgono per l'ordine dei punti improprî le stesse regole che pei punti proprî.

(1) Questa prop. è contenuta con la prop. A nel post. XI degli *Elementi* ed è invece dimostrata nei *Fondamenti* mediante le ipotesi sugli infiniti e infinitesimi.

(2) Vedi *Elementi*, nn. 7, 8, 9, 10: se non si fa uso della prop. AB ≡ BA, allora bisogna tralasciare il teor. I del n. 8; vedi anche *Fondamenti* (nn. 72, 73, 74 e 79).

Def. IV. *Per segmento di due punti improprî* (XX'), (YY') s' intende la coppia delle due serie di segmenti proprî (XY), $(X'Y')$ e che indicheremo col simbolo $[(XX'), (YY')]$.

Per la determinazione del segmento basta considerare quei punti X e X', Y e Y' tali da essere contenuti in due segmenti $(X_1 X_1')$ e $(Y_1 Y_1')$ piccoli a piacere, e tali dunque che $(X'Y)$ si mantiene superiore al segmento dato $(X_1' Y_1)$.

Se i punti (XX'), (YY') determinano due punti proprî L e L', il segmento $[(XX') (YY')]$ determina il segmento (LL'), e viceversa.

Ogni segmento proprio (LL') può essere considerato come un segmento che unisce due punti improprî.

Def. V. Due segmenti $[(XX') (YY')]$, $[(X_1X_1') (Y_1Y_1')]$ si dicono *eguali* se la differenza di $(X' Y)$ e $(X_1' Y_1)$ diventa indefinitamente piccola.

Per ciò, se ad ogni segmento $(X' Y)$ è eguale un segmento $(X_1' Y_1)$ e viceversa, i due segmenti improprî sono eguali.

Def. VI. Il segmento $[(XX') (YY')]$ dicesi *minore* o *maggiore* del segmento $[X_1 X_1') (Y_1 Y_1')]$, se si può dare un segmento ε tale che la differenza $(X' Y) - (X_1' Y_1)$ oppure $(X_1' Y_1) - (X' Y)$ diventi e resti maggiore di ε.

Mediante le premesse definizioni si dimostra:

a) *Ogni segmento improprio non è eguale ad una sua parte.*

b) *Dato un punto* (AA') *e un segmento* $[(XX') (YY')]$ *in un dato verso esistono in questo verso due segmenti improprî l'uno col primo estremo l'altro col secondo estremo in* (AA') *eguali al segmento dato.*

La prop. II) è così completamente verificata anche dai punti improprî, e quindi anche i teoremi sopra citati della somma, differenza e dei multipli e summultipli dei segmenti (1).

Si dimostrano inoltre queste altre proposizioni:

c) *Dato un segmento qualunque* $[(XX') (YY')]$ *esiste in esso un punto improprio distinto dagli estremi.*

E date le definizioni di segmento improprio variabile e di segmento improprio che diventa indefinitamente piccolo come pei segmenti proprî si ha:

d) *Se un segmento improprio* $[(XX') (YY')]$ *cogli estremi sempre variabili in versi opposti diventa indefinitamente piccolo, esso contiene un punto improprio distinto dagli estremi.*

Questa prop. corrisponde al postulato A della continuità dato nei *Fondamenti* e negli *Elementi* pei punti proprî.

Se si ammette pei segmenti proprî anche il post. d' Archimede (post. XII degli *Elementi*) *allora si dimostra la stessa proposizione anche pei segmenti improprî.*

(1) Se si ammette la prop. $AB \equiv BA$ nella II), come negli *Elementi*, allora si dimostra facilmente mediante la def. V che la stessa prop. vale pei segmenti improprî.

Con questi postulati si dimostra la divisibilità del segmento in n parti eguali.

I postulati fin qui dati per la retta riguardano la retta in sè, e con essi, eccettuato il post. d'Archimede, estendendo il concetto del punto si può evitare di dare un postulato per la continuità della retta.

2. Ma ammessi gli altri postulati necessarî per stabilire la geometria dello spazio, si può evitare di dare un nuovo postulato per la continuità della retta? Negli *Elementi* questi postulati sono per la geometria Euclidea i postulati III, IV, VI,, VII e X [1] che sono indipendenti dal postulato d'Archimede ed anche dai concetti d'infinito e infinitesimo, come lo è la prop. A. A tale scopo dobbiamo rendere il concetto del punto improprio indipendente dalla retta.

A tal proposito osserviamo che se due rette hanno un punto proprio O in comune, supponendo determinato questo punto nelle due rette da due punti improprî (XX′), (YY′) nel senso della def. I, n. 1, i segmenti (XY), (X′Y′) diventano pure indefinitamente piccoli, perchè gli altri due lati nei triangoli OXY, OX′Y′ decrescono indefinitamente. Per la stessa ragione diventano indefinitamente piccoli i seguenti (XY′), (X′Y). Dunque diremo:

Def. I. Date due serie distinte qualunque di punti (X) (X′) tali che il segmento (XX′) diventi indefinitamente piccolo e in quanto esso diventa indefinitamente piccolo lo chiameremo *punto improprio.*

Questa definizione comprende come caso particolare quella del punto improprio del n. 1.

Def. II. Due punti dati (XX′), (YY′) si dicono *coincidenti* se il segmento (XY) diventa indefinitamente piccolo.

Da ciò segue che tutti i segmenti determinati dai punti X e X′ coi punti Y e Y′ diventano indefinitamente piccoli.

Def. III. L'insieme delle rette proprie che si ottengono congiungendo due punti proprî (XX′), (YY′) lo chiameremo *retta impropria.*

E per *segmento improprio* dei due punti (XX′), (YY′) intenderemo l'insieme dei segmenti proprî determinati dalle stesse due serie di punti (XX′), (YY′).

Se i punti (XX′), (YY′) determinano due punti proprî L e M, la loro retta impropria determina la retta propria LM. In tal caso i due punti improprî a cui danno luogo nella retta i punti L e M coincidono rispettivamente coi punti (XX′), (YY′) (def. II).

La eguaglianza e la diseguaglianza di due segmenti improprî si definiscono come precedentemente (def. V e VI, n. 1).

[1] I rimanenti postulati III, V, VIII, IX, XIII e XIV possono essere dimostrati mediante i rimanenti, come dirò nell'appendice degli *Elementi,* e ammessi i postulati I, II, IV, VI, VII e X in un campo C corrispondente al campo della nostra osservazione, essi possono essere ammessi o dimostrati per tutto lo spazio S.

Così si dimostrano in modo analogo le proposizioni *a*) *b*) *c*) *d*) del n. 1, e ammesso che sia il postulato d' Archimede pei segmenti proprî, lo si dimostra pei nuovi segmenti improprî, onde resta dimostrato che ogni segmento improprio è divisibile in n parti eguali.

Oltre a ciò si dimostrano i postulati IV, VI, VII e X sopra accennati.

Per i punti improprî così stabiliti non è dunque necessario stabilire la prop. A della continuità con un postulato, e si può svolgere la geometria per essi come per i punti proprî, senza bisogno di tener più conto della distinzione fra punti proprî e punti improprî.

3. Ciò che precede non solo conduce a questo risultato ma anche a quello che la prop. A applicata ai punti proprî mediante un postulato (ip. VI e VIII dei *Fondamenti* o post. XI degli *Elementi*) non può condurre ad alcuna contraddizione, perchè essa equivale alla prop. *d*) che fu dimostrata pei punti improprî.

La differenza sta solo in ciò: che colle ipotesi suddette o col postulato XI degli *Elementi* imaginiamo intuitivamente che come ogni punto proprio può essere considerato come un punto improprio, inversamente ogni punto improprio determina un punto proprio. Ma tale intuizione non ha alcuna conseguenza sullo svolgimento logico della geometria che è lo stesso tanto pei punti improprî come pei punti proprî pei quali si dà la prop. A senza dimostrazione.

Passando poi dalla teoria alle applicazioni pratiche, non occorre dare alcun postulato pratico, come abbiamo dovuto darlo per le tre dimensioni dello spazio fisico e per il movimento senza deformazione, perchè ogni punto improprio determina un punto nello spazio fisico, e quindi i risultati ottenuti coi punti improprî si applicano senz' altro anche in questo spazio nei limiti dell' osservazione.

Un' ultima avvertenza. Il post. XI dei miei *Elementi* o la prop. A accennata in principio di questa Nota ha il vantaggio rispetto all' ip. VI e VIII dei *Fondamenti* di essere indipendente da qualunque considerazione sui segmenti finiti, infiniti e infinitesimi, e di porre quindi tale questione sotto un altro punto di vista. Dai post. I-X dei miei *Elementi* (di cui, come dissi, alcuni sono conseguenza degli altri) non si può dimostrare il *postulato* d'Archimede (post. XII). Ciò risulta sia dai *Fondamenti*, sia dai numeri del sig. Levi-Civita [1].

Costruita colla prop. II) una scala a partire da un' origine A sulla retta con un segmento (AB) come unità, i segmenti (AC) maggiori di (AB) e compresi nel campo della scala soddisfano rispetto ad (AB) il post. d' Archimede, e tali segmenti li ho chiamati *finiti*. Per i segmenti (AC) minori di (AB) può esservi o non un numero n tale che

$$(1) \qquad (AC)\, n > (AB);$$

[1] Atti del. R. Istituto Veneto, 1894.

nel primo caso (AC) e (AB) sono finiti, nel secondo (AC) è infinitesimo rispetto ad (AB), e (AB) è infinito rispetto ad (AC). Considerando il solo campo dei segmenti finiti rispetto ad (AB), quando un segmento (YY′) di questo campo diventa indefinitamente piccolo, vuol dire che non diventa già più piccolo di ogni segmento scelto ad arbitrio, come diventa il segmento (XX′) della prop. A, ma diventa e rimane più piccolo di ogni segmento finito scelto ad arbitrio.

Se ammettiamo il postulato d' Archimede per tutti i segmenti della retta, allora i due segmenti (YY′) e (XX′) si confondono e quindi i punti Y,Y′ determinano un solo punto. Ma se si ammette che il postulato d' Archimede non valga per tutti i segmenti della retta (come risulta appunto possibile dai postulati I-X sopra citati) allora il segmento (YY′) determina un campo di punti che sono estremi di segmenti infinitesimi. E costruendo una scala in questo campo si può ripetere la stessa considerazione, di guisa che si viene a costruire così degli infinitesimi di un ordine sempre inferiore ai precedenti. E così si possono immaginare costruiti degli infiniti di ordine diverso rispetto alla unità (AB).

La differenza che c' è fra il mio sistema di infiniti e infinitesimi e quello del sig. Levi-Civita nel campo dei segmenti infiniti e infinitesimi d' ordine finito, è questa: che mediante la ipotesi IV dei *Fondamenti*, io ammetto che esista un primo segmento infinitesimo rispetto ad (AB), così che ho i segmenti infinitesimi di 1°, 2°... n^{mo}... ordine ed i segmenti infiniti di 1°, 2°... n^{mo}... ordine rispetto ad (AB) (e così rispetto ad un qualunque segmento dato), mentre gli ordini d' infinitesimo o d' infinito del sig. Levi-Civita corrispondono a tutti i numeri reali ordinari. Il mio sistema di segmenti e di numeri è compreso in quello del sig. Levi-Civita, ma forma un gruppo nel senso che colle operazioni fondamentali dell' aritmetica ordinaria esso si trasforma in sè medesimo.

È possibile dunque in questo campo una geometria proiettiva contrariamente all' asserzione del sig. Schönflies.

Matematica. — *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie.* Nota del Corrispondente CORRADO SEGRE.

1. Sia dato un punto, il quale stia, con singolarità qualunque, su una o più curve algebriche. Si soglion considerare per esso certi numeri invarianti per trasformazioni proiettive: come le multiplicità, immediate e successive, gli ordini dei vari rami completi, le loro classi, ecc., i contatti fra questi rami, ecc.: numeri da cui dipendono i caratteri plückeriani delle curve, le loro multiplicità d' intersezione nel punto nominato, ecc. All' infuori di questi