Bulletin des sciences mathématiques

MÉLANGES.

LA GÉOMÉTRIE NON ARCHIMÉDIENNE;

Par M. G. VERONESE [1],
de Padoue.

Le sujet que j'ai choisi pour cette conférence est celui même qu'on m'avait demandé de traiter au Congrès de Heidelberg : il me paraît qu'il peut vous interesser encore aujourd'hui, puisque des mathématiciens comme Poincaré en ont reconnu l'importance. La critique en a déjà reconnu la validité logique; aussi, plutôt que d'essayer une exposition systématique, comme j'aurais fait à Heidelberg, je crois utile maintenant d'éclairer quelques-unes des questions de contenu et de méthode qui se rattachent à l'essence des principes de la Mathématique pure et de la Géométrie, et sur lesquelles il me semble que les géomètres ne sont pas encore d'accord, quoiqu'il s'agisse de questions géométriques [2].

Qu'est-ce que la Géométrie non archimédienne? Est-elle valable comme système de vérités abstraites? Et satisfait-elle aussi aux conditions auxquelles doit être soumis tout système géométrique?

Il serait utile de rappeler ici les discussions séculaires sur l'infini et l'infiniment petit actuel; dans l'histoire de la Science nous trouvons des mathématiciens favorables, contraires ou incertains; d'un côté, par exemple, G. Bernoulli, de l'autre, Gauss; incertain, Leibniz; enfin d'autres, par exemple M. G. Cantor,

---

[1] D'après l'aimable invitation de M. Darboux, je suis heureux de publier dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* la traduction française de ma conférence, qui a été imprimée dans les *Atti del IV Congresso intern. dei Matematici* (Roma, 6-11 apr. 1908).

[2] L'auteur aurait aussi voulu provoquer au sein du Congrès une discussion sur ces questions, mais ce but est manqué, car l'auteur est tombé malade dès son arrivée à Rome.

favorables à l'infini actuel et contraires à l'infiniment petit actuel envisagé comme un segment rectiligne continu.

Ces discussions s'étaient, on peut dire, assoupies, lorsque l'Analyse, grâce au concept de limite, se fut placée sur des bases solides dans le champ de la grandeur finie, et que prévalut la tendance contraire à l'infini et à l'infiniment petit actuel, provoquée aussi par l'essai manqué d'une géométrie de l'infini de Fontenelle (¹).

Mais, quoique Gauss eût protesté contre l'usage de la grandeur infinie déterminée dans les Mathématiques, ici et là ressuscitaient les anciennes disputes.

Cependant personne n'avait jamais bien défini ce que l'on entendait par *infini* et *infiniment petit actuel;* ceux-ci peuvent avoir, comme on l'a vu ensuite, des formes diverses; ni Bernoulli ni l'idéaliste de M. du Bois-Reymond ne les ont définis. Ce n'est pas non plus une définition acceptable que celle de l'infiniment petit actuel de Poisson. Tout d'un coup, la lumière commence à se répandre avec l'introduction légitime des grandeurs infinies et infiniment petites actuelles, c'est-à-dire avec les nombres transfinis de M. G. Cantor, avec les *moments* de M. Stolz et avec les ordres d'infini des fonctions de M. du Bois-Reymond. Il ne s'agissait pas d'infinis et d'infiniment petits géométriques : M. Cantor, en faisant usage de ses nombres transfinis, affirmait avoir démontré l'impossibilité du segment rectiligne continu infiniment petit. M. A. Stolz avait déjà fait observer que le problème de l'existence de l'infini et de l'infiniment petit actuel dépend d'un axiome, selon lequel, étant donnés deux segments rectilignes, l'un plus petit que l'autre, il y a toujours un multiple du premier plus grand que le second. A cet axiome on donna le nom d'*Archimède;* il est en effet l'axiome V de l'Ouvrage : *De Sphoera* et *cylindro* du grand Syracusain; mais il avait été déjà employé par d'autres (²).

(¹) *Éléments de Géométrie de l'infini* (Paris, 1727). Voir G. Veronese, *Fondamenti di Geometria,* 1891, p. 620, traduction allemande par A. Schepp, 1894, p. 697. Contrairement à ce qu'affirme M. Cantor (*Math. Ann.*, t. XLVI), les infinis de Fontenelle n'ont rien à faire avec la Géométrie non archimédienne.

(²) G. Veronese, *Fondam. di Geom.*, Appendice. A propos des récentes discussions sur les nombres transfinis de M. Cantor, *voir* Schœnflies, *Die Entwikelung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten,* 1908. Pour les infinis de M. du Bois-Reymond, *voir* aussi les récents travaux de MM. Borel et Bortolotti.

M. Stolz remarquait que la démonstration de Cantor ne pouvait pas toucher ni ses *moments*, ni les ordres d'infini de du Bois-Reymond, qui, quoiqu'ils ne satisfassent pas à l'axiome d'*Archimède*, ne sont pas des grandeurs linéaires; mais M. Stolz affirmait aussi l'impossibilité du segment rectiligne infiniment petit actuel, en donnant une démonstration de l'axiome même fondée sur le postulat du continu dans la forme donnée par Dedekind. Des postulats du continu donnés par Weierstrass et Cantor sous des formes plus appropriées au calcul, on déduit aussi, comme de celui de Dedekind, l'axiome d'*Archimède* (1).

Il ne s'agissait donc pas de voir s'il existe des grandeurs infinies et infiniment petites actuelles, mais s'il existe des segments rectilignes qui satisfassent aux propriétés fondamentales de la droite, excepté à l'axiome d'*Archimède*.

Et les voies ordinaires semblaient closes après les démonstrations de MM. Cantor et Stolz. Ce n'était donc pas par la voie analytique que pouvaient se présenter spontanément ces segments, puisque les auteurs cités partaient de la correspondance uni-univoque entre le continu rectiligne et le continu numérique, ou bien des nombres transfinis de Cantor, qui semblaient être les seuls nombres transfinis; de même, ce n'est pas par l'analyse que pouvait se présenter spontanément mon espace général à un nombre infini de dimensions, lorsque l'on ne pouvait considérer que des variétés à un nombre fini de variables.

La réponse devait donc être donnée par le continu rectiligne même, intuitivement considéré et décomposé dans ses éléments possibles.

Et alors, nous nous sommes aperçu que lesdits postulats du continu contiennent quelque chose qui n'est pas suggéré nécessairement par le continu même. En vérité, ce continu nous est fourni par l'expérience; y fixer des points pour sa détermination ou pour les opérations pratiques que nous devons faire avec lui, c'est une

---

(1) M. le professeur Enriques, qui, dans son écrit sur les principes de la Géométrie (*Encykl. der Math. Wissensch.*, t. III, 1907), réfère exactement sur la Géométrie non archimédienne, se méprend pourtant lorsqu'il donne au postulat de M. Cantor (*Math. Ann.*, t. V) une forme équivalente à la mienne et lorsqu'il conclut que du postulat de Cantor on ne peut déduire l'axiome d'Archimède.

opération arbitraire. Si nous idéalisons le point, en le regardant comme l'extrémité de la ligne, nous voyons qu'il ne peut pas servir à composer le continu, parce que nous nous trouvons toujours en présence d'un segment qui comprend au moins idéalement d'autres points distincts des extrêmes. Le postulat en vertu duquel à tout nombre rationnel correspond un point n'est pas pratiquement vérifié. Et de même, en idéalisant le point, et de telle manière que le segment comprenne toujours des points distincts des extrêmes, la correspondance uni-univoque entre les points de la droite et les nombres réels ordinaires n'est pas non plus justifiée.

A M. Stolz, j'avais déjà fait remarquer que l'axiome d'Archimède se déduit du postulat du continu de Dedekind, car ce postulat se fonde aussi sur la même correspondance, tandis que l'on peut séparer l'axiome d'Archimède de celui du continu en donnant à ce dernier la forme suivante :

Si dans un segment AB *existe un segment* XX′ *variable, tel que* AX *soit toujours croissant et plus petit que* AX′ *toujours décroissant, et si* XX′ *devient indéfiniment petit* (c'est-à-dire plus petit que chaque segment donné), *il contient un point* Y *distinct de* X *et* X′.

Au postulat du continu dans la nouvelle forme, on en ajoute un autre analogue à celui d'Archimède, c'est-à-dire que *si* α *et* β *sont deux segments rectilignes, tels que* α *soit plus petit que* β, *on peut construire un multiple de* α (*selon un symbole de multiplicité* η), *qui soit plus grand que* β. Naturellement, si η est un nombre entier fini, ce postulat devient celui d'Archimède.

Et dans les *Fondamenti j'ai précisément construit des segments infinis et infiniment petits actuels qui satisfont à la condition que,* α *étant donné comme unité, on peut construire* β *et vice versa* (¹). Avec les segments, on peut faire toutes les opérations ordinaires de l'addition et de la soustraction; on peut trouver des multiples de ces segments et des sous-multiples, exécuter enfin avec eux des opérations rationnelles et irrationnelles, de

(¹) *Voir* aussi G. Veronese, *Il continuo rectilineo e l'assioma d'Archimède* (*Atti r. Acc. Lincei,* 1890). Hoelder, *Die Quantität und die Lehre v. Mass* (*Leipz. Ber.*, 1901). Dans la Géométrie non archimédienne aussi, on peut parler de la mesure des segments, lorsque l'un d'eux est pris pour unité de mesure.

sorte que, avec les symboles (nombres) qui représentent ces segments, on peut exécuter les opérations fondamentales que régissent les règles ordinaires. La question de l'existence des segments infinis et infiniment petits actuels ayant été posée d'abord, comme on le devait, la conception arithmétique de ces nombres devait rester en seconde ligne, parce que, comme je l'ai dit, il était d'abord avantageux d'affronter une telle question non pas du côté arithmétique, mais du côté géométrique.

Et ce fut cette insuffisance de développement arithmétique qui donna lieu à quelques-unes des critiques dirigées contre les nouveaux infinis et infiniment petits. Et c'est pour cela que M. Lévi-Civita, lorsqu'il était encore étudiant, d'après mon conseil, traita le premier le problème arithmétique qu'il compléta d'ailleurs par l'introduction d'unités nouvelles nécessaires pour d'autres opérations. Par une autre voie, M. Hilbert, en construisant un champ géométrique non archimédien, vint donner, avec son autorité, une confirmation de la possibilité logique d'une telle géométrie; M. Bindoni, dans sa Thèse doctorale, démontra que le champ géométrique de Hilbert est compris dans le mien. Les recherches récentes sur la théorie des ensembles, celles de M. Schœnflies en particulier, confirment la validité logique de cette géométrie; les dernières recherches sur le problème du continu rectiligne présentent un très grand intérêt, car il reste à reconnaître définitivement si, comme il me semble, il y a un seul type de nombres non archimédiens qui y satisfont, en y ajoutant aussi, s'il est nécessaire, d'autres unités pour le compléter, questions dont se sont occupés récemment MM. Hahn, Schœnflies et Vahlen.

La validité logique du continu rectiligne non archimédien étant ainsi établie, par là même est établie celle de la Géométrie non archimédienne, pour laquelle j'ai choisi dans mes *Fondamenti* la forme riemannienne : alors, dans un champ infiniment petit autour d'un point, en ne considérant que les segments finis entre eux, ou qui satisfont à l'axiome d'Archimède, c'est la Géométrie euclidienne.

Ce théorème a été ensuite démontré par M. Lévi-Civita pour la Géométrie non archimédienne d'Euclide et de Bolyai-Lobatschewsky.

Et de ce théorème peuvent être regardés comme corollaires les théorèmes de M. Dehn trouvés en suivant les méthodes de Hilbert, sur les relations entre la somme des angles d'un triangle et les parallèles conduites par un point à une droite; c'est-à-dire qu'il existe deux systèmes géométriques non archimédiens, dans lesquels la somme des angles d'un triangle est plus grande que deux ou égale à deux droits, tandis que par un point passent plusieurs parallèles à une droite donnée (1).

La validité logique de la Géométrie non archimédienne entraîne l'indépendance de la théorie des proportions, ainsi que celle de la projectivité; d'autres géomètres se sont aussi occupés de ces théories, en suivant des méthodes plus simples que les miennes, entre autres MM. Hilbert et Schur.

Mais, une fois établie la validité logique de la Géométrie non archimédienne, reste la question du contenu et de la méthode qui ont été l'objet de critiques, quoique moins déterminées et pour cela moins saisissables. Permettez-moi, Messieurs, de vous entretenir, autant que le temps me le permet, de ce point, qui peut paraître sortir du champ mathématique à celui qui est habitué, dans les recherches supérieures de la Science, à ne tenir compte que des formes purement logiques, et à ne pas accorder d'importance au contenu des objets mathématiques ni à la méthode; pourtant le contenu est par lui-même un élément essentiel dans les principes de la Science, et la méthode, si elle n'est pas bien choisie, peut aussi conduire à des pétitions de principe. Je me servirai ici sous une autre forme de considérations déjà vieilles, que j'ai développées dans les *Fondamenti* et auparavant encore dans les leçons données à l'Université de Padoue de 1885 à 1890, leçons qui servirent de préparation à la publication des *Fondamenti* mêmes; je tiendrai compte aussi des publications ultérieures.

Les objets de la Mathématique pure n'ont pas nécessairement une représentation hors de la pensée, par exemple, le nombre, qui est, dans sa première formation, le résultat de l'opé-

---

(1) Il suffit, en effet, de considérer un champ infiniment petit non archimédien dans lequel la somme absolue des angles d'un triangle dans la Géométrie riemannienne ou elliptique est plus grande que deux droits et dans la Géométrie euclidienne est égale à deux droits. Par un point dans le champ susdit, passe précisément un nombre infini de parallèles à la droite donnée quand l'on considère la partie de ces droites qui est comprise dans le même champ.

ration mentale de la numération des objets aussi abstraits. *La vérité a son premier fondement dans les principes logiques et dans de simples opérations mentales, universellement consenties; la liberté de l'esprit dans ses créations est limitée seulement par le principe de contradiction*, d'où il s'ensuit qu'une hypothèse est mathématiquement possible lorsqu'elle n'est pas en contradiction avec les prémisses. La Mathématique pure, de même que la logique formelle, est pour nous exacte.

La Géométrie au contraire a son origine nécessaire dans l'observation directe des objets du monde extérieur, qui est l'espace physique; de l'observation idéalisée de ces objets elle tire ses premières et précises vérités indémontrables et nécessaires à son développement théorique, qui sont les axiomes proprement dits, tels que celui, par exemple, en vertu duquel par deux points du champ de notre observation passe un seul objet rectiligne. Mais, pour que la Géométrie soit exacte, elle doit représenter les objets fournis par l'observation au moyen de formes abstraites ou mentales, et les axiomes par des hypothèses bien déterminées, c'est-à-dire indépendantes de l'intuition spatiale, de manière que la Géométrie devienne une partie de la Mathématique pure, ou de l'extension abstraite, où le géomètre, jusqu'à ce qu'il les applique au monde physique, effectue des constructions sans qu'il ait besoin de voir si elles ont ou non une représentation extérieure et sans pourtant devoir abandonner la vision des figures et tous les avantages qui dérivent de l'usage de l'intuition dans la recherche géométrique. Pour cela, l'exactitude de la Géométrie sera d'autant plus grande que sera plus sûre celle des axiomes suggérés par l'observation, et par conséquent qu'ils seront plus simples et en moindre nombre [1]. Et en effet, l'observation n'est qu'approximative et quelquefois aussi apparente et fallacieuse, ainsi, lorsqu'en nous mouvant, nous voyons changer la grandeur

---

[1] M. Klein remarque aussi que les données de chaque observation sont valables entre certaines limites d'exactitude et sous des conditions particulières, tandis que, lorsque nous fixons des axiomes, nous pouvons poser, au lieu de ces données, des propositions d'une précision et d'une généralité absolues; en recourant au principe de Mach sur l'économie de la pensée, il soutient aussi que les axiomes doivent être simples et dans le moindre nombre (voir *Vorles. üb. nicht Eucl. Geom.*, Bd. I, 1893; *Gutachten zur Verth. des Lobatsch. Preises,* nov. 1897, *Kasan; Math. Ann.*, t. L, 1898).

des objets, tandis que, par les lois de la perspective, nous savons qu'un tel changement n'existe pas.

Certes l'exigence de la simplicité et du moindre nombre des axiomes conduit à d'inévitables recherches minutieuses; cette minutie fait perdre de vue les concepts généraux; elle rend difficile la lecture de ces recherches, lorsqu'on ne suppose rien de mathématiquement connu et que l'on se pose devant soi tout le problème des principes, comme dans les *Fondamenti*.

Il est clair aussi que les axiomes doivent être consentis universellement, *et pour cela nous pouvons admettre*, *comme évidents*, *les axiomes seulement qui nous sont consentis par le philosophe empiriste, pour lequel il est inutile de donner la démonstration de leur compatibilité logique*. Mais, au contraire, une telle démonstration est nécessaire lorsque l'on étend les mêmes axiomes à l'espace illimité, car personne n'a jamais observé et ne pourra jamais observer un tel espace. Voilà pourquoi nous ne pouvons pas accepter comme axiome suggéré par l'observation celui des parallèles, lorsqu'on définit ces droites comme des droites du plan qui prolongées indéfiniment ne se rencontrent pas, car personne n'a jamais observé effectivement deux telles droites, d'autant que nous ne pouvons pas admettre comme axiome primitif, tiré de l'observation, celui par exemple que la droite illimitée est un système linéaire ouvert.

Mais les axiomes tirés de la même observation ne suffisent pas pour la recherche géométrique. La Géométrie étant devenue une partie de la Mathématique pure, ou de l'extension abstraite, nous admettons ensuite dans la Géométrie toutes ces hypothèses ou postulats qui ne se contredisent pas entre eux, ni avec les axiomes admis tout d'abord; ces hypothèses ou limitent ou étendent le champ de la Géométrie, comme par exemple les postulats d'Archimède, du continu ordinaire, des espaces à plus de trois dimensions, etc., ou bien servent à choisir une des formes possibles, déterminées par des axiomes ou des hypothèses déjà donnés, tels que le postulat des parallèles [1].

---

[1] Par exemple, dans les *Grundlagen der Geometrie* de M. Hilbert, le système des axiomes paraît au contraire plutôt un système de vérités abstraites arbitraires qu'un système de vérités fournies en partie par l'expérience et en partie comme vérités nécessaires au développement de la Géométrie.

De ce qui précède, il suit aussi qu'*on doit distinguer l'espace physique de l'espace intuitif, qui est une représentation idéalisée du premier et qui est une intuition, et l'espace intuitif de l'espace géométrique abstrait, qui est un concept.* Ces formes n'ont pas été bien distinctes pour des auteurs éminents, tels que Helmholtz. *L'espace géométrique abstrait est précisément la partie de l'extension pure dans laquelle est représenté l'espace intuitif; mais il n'a pas inversement pour toutes ses formes une représentation effective, pas même approximative, ou bien il n'est pas nécessaire qu'il ait dans l'espace physique ou intuitif une telle représentation.* De manière que non seulement l'égalité des figures n'est pas nécessairement déterminée par le mouvement des corps rigides, comme le croyait Helmholtz, mais c'est plutôt l'égalité des figures géométriques (laquelle dépend à son tour du concept logique de l'égalité de deux choses distinctes) qui est nécessaire pour définir le mouvement des corps rigides. De cela dérive aussi cette autre conséquence que la Géométrie théorique n'est pas une partie de la Mécanique, comme le croyait Newton, ni ne dépend de la Physique, comme le pensait Helmholtz.

La distinction de l'espace physique de l'espace géométrique entraîne des postulats qui ne sont nécessaires que pour les applications pratiques, comme celui approximatif du mouvement des corps rigides, celui des trois dimensions, celui aussi d'Archimède, tandis qu'il y a des postulats de l'espace géométrique, comme ceux de l'espace général, du continu non archimédien, que nous n'avons pas besoin d'admettre pour l'espace physique ([1]).

([1]) G. Veronese, *Fond. di Geom.*, 1891. L'exclusion du mouvement des corps rigides de la définition de l'égalité des figures fut accueillie aussi par Hilbert (1899) et par d'autres; elle fut aussi acceptée, et cela était plus difficile, dans des Traités de Géométrie élémentaire, avant tous par l'auteur (1re édition, 1897), après par Ingrami, Enriques-Amaldi. Quoiqu'on ait beaucoup disputé sur cette exclusion, dont on trouve quelque trace dans les *Éléments* d'Euclide, elle n'avait été jamais obtenue effectivement (voir *Fondamenti di Geom.*, App.). Aussi B. Russell et Poincaré affirment que la possibilité de ce mouvement n'est pas une vérité évidente par elle-même, ou au moins qu'elle l'est de la même manière que le postulat d'Euclide. Et en effet la vérification empirique du postulat des parallèles se peut faire dépendre de celle du mouvement d'une figure invariable. Mais, par la distinction que je fais entre l'espace géométrique et l'espace physique et par conséquent entre la Géométrie pure (pour laquelle le principe susdit n'est pas

Mais dans l'espace géométrique (tel que je l'ai défini dans les *Fondamenti* à un nombre infini de dimensions) est représenté l'espace intuitif; nous pouvons donc travailler dans cet espace géométrique avec l'intuition en y imaginant le point, la droite et le plan, tels que dans l'espace ordinaire, et en opérant comme dans la Géométrie pure; naturellement nous n'avons pas et ne pouvons avoir l'intuition d'un espace à quatre dimensions; alors, nous combinons l'intuition avec l'abstraction, de même que nous faisons pour passer de l'espace intuitif à l'espace illimité, et l'habitude que nous acquérons est telle que, de même que nous croyons imaginer tout l'espace illimité, de même nous croyons voir deux plans qui, dans l'espace à quatre dimensions, se rencontrent en un seul point (¹).

Par la distinction entre l'espace physique et l'espace géométrique se concilient l'affirmation de Stuart Mill, que la droite du mathématicien n'existe pas dans la nature (on devrait dire plus proprement dans l'espace physique), et l'observation de Cayley, que nous ne pourrions pas affirmer cela si nous n'avions pas le concept de la droite.

Dans la Géométrie donc, la liberté de l'esprit n'est pas seulement limitée par le principe de contradiction, comme dans la Mathématique pure, mais bien aussi par les données de l'intuition spatiale.

Par conséquent, nous ne pouvons pas admettre, par exemple, un plan dans lequel ne vaille pas le théorème de Desargues sur les triangles homologiques (Hilbert), ni un plan dans lequel une droite qui tourne autour d'un point ne puisse pas prendre la position d'une autre droite passant par le même point (Poincaré); nous ne pourrions pas admettre les *plans* de Bolyai-Lobatschewsky,

---

nécessaire) et ses applications pratiques, je ne m'accorde pas avec l'éminent mathématicien français, lorsqu'il soutient (sans faire ladite distinction) « qu'en étudiant les définitions de la Géométrie, on voit qu'on est obligé d'admettre, sans le démontrer, non seulement la possibilité de ce mouvement, mais encore quelques-unes de ses propriétés ». Ce principe et ses propriétés sont nécessaires, au contraire, seulement pour les applications pratiques de la Géométrie, comme est nécessaire l'axiome des trois dimensions de l'espace physique.

(¹) Cela explique pourquoi nous employons le mot *espace* au lieu du mot *variété*, qui a une signification plus étendue, mais tout à fait générique et abstraite.

de Riemann ou elliptique, s'il était prouvé que le postulat d'Euclide est valable intuitivement (comme le soutiennent les Kantiens); nous ne pourrions pas non plus admettre une géométrie dans laquelle la droite fût déterminée par trois points au lieu de deux. Cependant toutes ces formes sont possibles dans l'extension abstraite et peuvent avoir en tout ou en partie une représentation dans la Géométrie même, de la même manière que les variétés à deux dimensions de Riemann, de Bolyai-Lobatschewsky ou elliptique auraient toujours une représentation dans la géométrie de la surface sphérique, de la pseudosphère et du plan impropre à l'infini, si le postulat d'Euclide était valable physiquement ou intuitivement. Il y a là un contraste, mais non une contradiction avec le principe selon lequel, pour certaines catégories de propriétés, nous pouvons regarder comme équivalents deux objets divers, par exemple, deux formes qui peuvent se transformer l'une dans l'autre projectivement ou birationnellement, parce que, avec ce principe, on se passe des autres propriétés géométriques, ou de ce contenu qui, au contraire, constitue l'essence des objets. Par exemple, l'espace physique et l'espace géométrique sont, par leur contenu, essentiellement divers entre eux, de même qu'ils sont distincts des variétés analytiques qui les représentent, et la construction de l'espace géométrique, ainsi que l'existence de l'espace physique, constitue un élément essentiel dans la Géométrie, qui *ne va pas être oublié;* ce qui arrive au contraire ordinairement. Et que le contenu ait une importance fondamentale, c'est ce que prouve par exemple le fait que Cayley, qui a employé le premier la méthode projective dans l'étude de la Géométrie non euclidienne, considérait la Géométrie euclidienne comme valable au sens absolu; c'est pour cela que, dans les recherches de Cayley, il s'agit moins de la Géométrie non euclidienne que d'une de ses représentations dans la Géométrie euclidienne même, obtenue en modifiant la notion de distance, de même que la pseudosphère, la sphère et le plan impropre à l'infini dans l'espace euclidien sont des représentations des géométries non euclidiennes dans la Géométrie euclidienne. *Au contraire, à présent, le contenu de cette Géométrie a une remarquable importance : il nous dit que l'observation actuelle extérieure ne suffit pas à établir exactement l'une ou l'autre Géométrie.* Et un tel contenu a aussi, comme on le voit, une portée philosophique pour la forme de l'espace, tandis que les recherches de Cayley n'en pouvaient avoir aucune, non plus que la théorie des imaginaires ou l'infini impropre, car il ne s'agit là que de noms employés pour indiquer des formes déjà existantes et effectives, qui n'ajoutent rien à la genèse de l'espace.

De tout cela il résulte que les recherches mathématiques sur les principes de la Science sont bien distinctes et doivent être tenues comme distinctes des recherches philosophiques sur la genèse des idées mathématiques; et nous-même, en déterminant le contenu des objets de la Mathématique pure et de la Géométrie, nous n'avons pas entendu prendre parti pour un système philosophique ou un autre : en disant que le nombre, pour le mathématicien, n'a pas nécessairement une représentation hors de la pensée, nous n'avons pas voulu affirmer que le nombre ne soit pas lui-même d'origine empirique; de même, en disant que le point a une représentation empirique nécessaire, nous n'avons pas voulu dire qu'il ne soit pas une attitude prise *a priori* par l'esprit et nécessaire à toute expérience extérieure. Et cette distinction est heureuse, car la Mathématique nous unit, tandis que la Philosophie nous divise, au moins à présent. Sans doute, les études sur les principes de la Science ont donné et donneront lieu encore à des discussions, même parmi les mathématiciens; mais l'erreur en Mathématique va toujours en s'éliminant, et restent enfin les nouvelles idées définitivement acquises à la Science. L'erreur dépend ou directement du mathématicien, ou bien de l'indétermination de quelques-unes des nouvelles idées, ou encore de l'obscurité dans laquelle elles se présentent ou sont présentées; mais souvent aussi l'erreur dérive de la contrariété qu'elles rencontrent tout d'abord lorsqu'elles se heurtent contre de vieilles convictions profondément enracinées et renforcées par l'autorité d'éminents mathématiciens, ou contre l'indifférence des uns qui, pour ne pas se donner la peine de réfléchir, voudraient exclure du domaine de la Mathématique les recherches sur les principes de la Science, ou contre l'opposition des autres, pour lesquels les nouveaux penseurs sont les révolutionnaires de la Science. Et à obscurcir la lumière naissante des nouvelles vérités mathématiques contribuèrent ces philosophes qui, fermes dans les principes mathématiques appris, voyaient ou croyaient voir dans les nouvelles idées un attentat à diverses hypothèses sur la connaissance ou l'interprétation de la nature, tandis qu'un nouvel arrangement des principes suggérés et renforcés par des faits nouveaux peut profiter non seulement à la Mathématique, mais aussi à la Philosophie.

La Philosophie doit accepter les idées mathématiques, lorsqu'elles sont définitivement formées. Cependant, si les recherches mathématiques se doivent distinguer des recherches philosophiques, il convient que le mathématicien s'abstienne de justifier ses conceptions par des considérations philosophiques ou par des fictions qui se prêtent facilement à la critique du philosophe, comme font par exemple l'empiriste et l'idéaliste de du Bois-Reymond, ou comme a fait quelquefois M. Cantor pour justifier ses nombres transfinis, lesquels ont pourtant une légitime existence malgré quelques récentes critiques philosophiques. Mais, d'un autre côté, par crainte de ces critiques, *le mathématicien ne doit pas se retrancher dans un champ purement abstrait, ou bien dans un formalisme symbolique, en se montrant indifférent devant les questions de contenu mathématique*, comme il est arrivé et comme il arrive encore à présent, lorsqu'on confond la Géométrie avec la théorie générale des variétés d'éléments purement abstraits.

Et pour cela, il est préférable que l'arrangement des principes réponde au développement logique et le plus simple des idées mathématiques et, par conséquent, que *la méthode ne soit pas un artifice sans vie ou ne paraisse pas un jeu de symboles ou de mots,* si utile qu'il soit, *mais elle doit être philosophique*. Ainsi la Mathématique peut aussi être utile aux recherches philosophiques sur la genèse des idées mathématiques, de même qu'elle a aussi pour tâche d'être utile aux Sciences appliquées, qui ont pour objet direct l'étude des phénomènes de la nature en choisissant les méthodes approchées les mieux appropriées à ce but. Et lorsque, au contraire, on suit une méthode indirecte, en représentant par exemple l'espace au moyen d'une variété à plusieurs variables, pour en étudier les principes, il est nécessaire d'examiner si, en suivant le contenu de l'espace même, ou sa construction, les postulats de ladite variété peuvent être justifiés sans recourir aux concepts qui sont définis avec ces postulats, car un tel recours constituerait une pétition de principe et philosophiquement une erreur.

Sur le choix de la méthode les plus éminents mathématiciens sont d'accord. Du Bois-Reymond remarquait que si, dans les opérations avec les signes de la Mathématique pure, on oublie leur signification, dans la discussion des concepts fondamentaux de la Mathématique on ne doit pas oublier leur origine : et pour la Géométrie, Newton remarquait justement que la simplicité de la figure dépend de la simplicité de la genèse des idées, c'est-à-dire non pas de leur équation, mais de leur description; et Gauss affirmait que, pour la liaison et la représentation des vérités géométriques, les moyens logiques ne peuvent rien produire par eux-mêmes et ne font que bourgeonner sans fruit, quand la féconde et vivifiante intuition ne domine pas partout. De la même façon s'expriment Weierstrass, Lie, Klein et d'autres. Et c'est à ces concepts que se conforment mes *Fondamenti*, aussi dans la genèse de la Géométrie non archimédienne. Cependant cette méthode, sans l'appui de l'Analyse, lorsqu'on ne suppose rien de mathématiquement connu, devient dans la lecture beaucoup plus malaisée; aussi, ce n'est que dans ces dernières années, en Italie et ailleurs, que la méthode fondée sur le raisonnement pur prévaut de plus en plus dans les recherches sur les principes de la Géométrie. Tout le monde se rappelle en effet le sort réservé à l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann de 1844, assurément préférable à celle de 1862.

En revenant à la Géométrie non archimédienne, il est nécessaire de s'assurer si elle satisfait aux conditions susdites de contenu et de méthode. En examinant le continu, tel qu'il nous est fourni par l'observation directe et simple, pour deux objets rectilignes l'axiome d'Archimède est valable, parce que, quels qu'ils soient, on peut toujours considérer des parties $n^{\text{ièmes}}$ de chacun, assez petites pour que la vérification de l'axiome soit possible pour ces parties $n^{\text{ièmes}}$ et, par conséquent, pour les objets mêmes. *Mais l'extension de cet axiome à tout l'espace illimité n'est pas également justifiée.* En effet, quand nous admettons que dans *chaque* segment idéalisé il y a des points distincts des points extrêmes, ni l'observation ni l'intuition ne nous obligent à affirmer l'axiome d'Archimède entre deux segments *qui ne peuvent pas être observés*. Et puisqu'on démontre que le segment infiniment petit actuel peut être considéré comme nul par rapport à un segment fini avec une approximation infinie, l'on conclut que, si un tel segment existait aussi physiquement, nous ne pourrions pas le voir. Nous pouvons pourtant employer notre intuition dans chaque champ de segments finis, c'est-à-dire qui satisfont à l'axiome d'Archimède.

La Géométrie non archimédienne satisfait donc aux conditions qui sont imposées en général à la Géométrie par l'intuition spatiale, et par conséquent son contenu est géométriquement justifié.

Mais un autre problème, géométrique aussi, se présente à la suite de nos prémisses; c'est à savoir si les hypothèses non confirmées par l'expérience peuvent avoir, grâce à des observations ultérieures plus exactes ou plus étendues, une représentation effective dans le monde physique. Parmi ces hypothèses, les plus caractéristiques sont celles des parallèles, du continu et des hyperespaces. Nous avons déjà remarqué que, si l'hypothèse euclidienne était exclue, on ne pourrait plus parler de l'espace euclidien. Quant, au contraire, nous remarquons que, physiquement, l'existence de l'infini et de l'infiniment petit actuels n'est pas contradictoire avec notre intuition, cependant aucune expérience ne conduit et ne pourra jamais conduire hors des grandeurs finies. Seulement nous pouvons dire, par un théorème déjà mentionné, que *si l'espace physique était infini actuel, par rapport au champ de nos observations, dans l'espace physique fini, supposé aussi illimité, la Géométrie euclidienne* serait valable. Au contraire, j'ai combattu ailleurs, en m'associant à Helmholtz (¹), l'hypothèse physique d'un espace à quatre dimensions ou plus.

En tout cas, aucune utilité ne nous pousse à cette hypothèse, qui serait purement fantastique. Et pourtant, il est curieux comment certaines idées ont surgi d'intuitions aussi erronées. En effet, l'idée d'un espace à plus de trois dimensions n'est pas née de l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann, pour lequel l'espace fut toujours à trois dimensions et par conséquent aussi la Géométrie;

(¹) G. Veronese, *Il Vero nella Matematica* (discours d'inauguration à l'Université de Padoue), nov. 1906.

elle provient encore moins du nominalisme géométrique de Cayley, Cauchy, Riemann et autres dans l'étude de certaines variétés analytiques à plus de trois dimensions, non plus que de ma construction géométrique des hyperespaces; c'est bien de l'hypothèse physique même qu'elle surgit, hypothèse qui fut la première à se présenter, qui a pourtant empêché l'acceptation de l'hypothèse mathématique et qui a fait souvent confondre, près de la foule, les défenseurs de la Géométrie à plus de trois dimensions avec les médiums ainsi dits à la Zöllner ou avec les spirites.

Et quant à l'utilité de la Géométrie non archimédienne, je remarque qu'on ne peut pas confondre cette Géométrie avec quelque Géométrie que ce soit, obtenue en négligeant ou en modifiant quelque axiome. La Géométrie non archimédienne, ainsi que la non euclidienne, a résolu une question sur laquelle on discutait depuis des siècles et a éclairé la constitution du continu et de l'espace géométrique. Et cela suffit pour la Mathématique pure. Du reste, chaque loi mathématique étant une loi de la pensée est aussi une loi de la nature. Et, à cause de l'harmonie merveilleuse qui existe entre les lois de la pensée et celles du monde hors d'elle, on ne peut pas affirmer *a priori* que les plus hautes et les plus abstraites conceptions mathématiques ne puissent avoir une application utile dans ce monde même. Mais cette utilité relative ne peut pas être le but direct de la recherche mathématique en général, et en particulier de la recherche sur les principes de la Science; cependant nous n'excluons pas; au contraire nous voulons, aujourd'hui plus que jamais, que l'un des buts les plus importants soit celui aussi de satisfaire aux besoins des sciences appliquées et de répondre du mieux qu'il est possible à leur importante fonction sociale.

Ici, comme géomètres, nous aurions fini; mais si ce n'est pas notre tâche de faire de la Philosophie, quoique, comme nous l'avons dit plus haut, nous ne puissions admettre comme propositions indémontrables que le minimum de faits simples qui nous sont consentis par les philosophes, c'est-à-dire par le philosophe empiriste, cependant nous ne pouvons accepter les restrictions du pur empirisme sur l'extension de la recherche mathématique. M. Pasch même, qui a fait un essai utile dans cette direction et louable pour d'autres raisons, n'a pu rester cohérent à son programme ([1]). Et nous ne pouvons non plus admettre, comme géomètre, que l'espace et ses postulats soient des formes *a priori* de l'intuition pure, selon la critique de Kant, parce qu'aucune preuve n'a été donnée, par exemple, pour le postulat des parallèles d'Euclide, le seul que Kant connût. Et ces philosophes positivistes qui combattent contre les hypothèses non euclidiennes ne sont pas moins métaphysiciens que leurs collègues kantiens. Et moins encore, nous ne pouvons admettre que le postulat d'Euclide n'ait pas la même évidence que les autres et qu'il puisse n'être pas vérifié par des observations ultérieures et que pourtant nous ayons une intuition *a priori* ou subjective du même postulat, telle que ces observations ultérieures ne puissent pas le modifier, tandis qu'on admet que cette intuition dérive des représentations tactiles et visuelles ([2]). En tout cas, nous n'avons aucune preuve géométrique de la nécessité subjective du postulat d'Euclide et des autres postulats, en sorte que *le géomètre ne peut pas admettre les axiomes donnés par les représentations tactiles et visuelles pour tout l'espace illimité sans justifier une telle extension.* Notre intuition est faite, selon moi, d'observation et d'expérience idéalisées, parce que, lorsque je *me* figure la droite intuitivement, je ne sais l'imaginer que comme un objet rectiligne, quel qu'il soit, idéalisé, et quoique, *ensuite par l'abstraction*, une telle représentation s'étende à un segment rectiligne quelconque de la droite illimitée. Nous nous assurons, en effet, de la présence des objets extérieurs et de leurs propriétés au moyen de nos sens et des qualités de nos sensations, qu'ils produisent en nous, et nous entretenons avec l'abstraction seulement celle de l'extension pour avoir les premières formes géométriques. Et ainsi, de même que le langage, l'intuition spatiale est le produit d'une longue expérience. Les hommes la possèdent à divers degrés ; elle est plus parfaite chez les géomètres et les peintres, elle est insuffisante chez ceux qui, aveugles depuis le premier âge, ont, en acquérant la vue, une intuition imparfaite des formes géométriques les plus simples.

([1]) *Fondamenti di Geom.*, Appendice.

([2]) Enriques, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria* (*Riv. filos.* di G. Cantoni, Pavia, 1903; *Enc. der Math. Wiss.*, *loc. cit.*, *Einleitung*).

M. A. Russell a posé la question de l'*a priori* sous une nouvelle forme en distinguant l'*a priori* logique de l'*a priori* psychologique, qui pourtant se confondent. Mais, quoique nous soyons d'accord dans quelques considérations fondamentales, parmi lesquelles celle de l'indépendance de la Géométrie et de la Physique, je ne puis être d'accord avec lui, par exemple, dans la démonstration que l'espace comme forme d'extériorité doit avoir un nombre fini de dimensions, ou dans cette autre par où il a essayé de prouver que tous les axiomes communs aux géométries euclidienne et non euclidienne sont nécessaires pour toute expérience, tandis que, selon lui, les postulats des parallèles sont d'origine empirique. Il serait opportun d'examiner les conséquences de pareilles hypothèses par rapport à la Géométrie non archimédienne.

Il y a des concepts qui ne nous sont pas donnés directement par l'observation, par exemple celui de l'*illimité* (dont nous avons fait dépendre celui de la démonstration par induction complète), ou bien celui de l'égalité des figures indépendamment du principe approximatif du mouvement des corps rigides, et, de ces concepts, il n'est pas encore clair quelle partie appartient à la pensée et quelle autre à l'expérience (1).

Mais le fait que, dans la Géométrie, nous substituons des formes précises, comme celle de la droite, aux données imprécises de l'expérience, ne signifie point, comme M. Klein paraît le soutenir (2), que ces formes précises soient des formes nécessaires de toute expérience, parce que les postulats non euclidiens peuvent aussi être remplacés par des formes mathématiques précises, sans pourtant qu'ils puissent être regardés comme des formes transcendantes de notre esprit.

Cependant, il est certain que la Géométrie théorique a son origine dans l'expérience; mais elle s'en rend indépendante en formulant d'une façon précise ses axiomes, lorsqu'ils sont étendus à l'espace illimité et en construisant des formes qui ne sont pas suggérées par l'expérience même. Ces formes pourtant sont des constructions auxquelles conduisent les axiomes tirés de l'expérience

---

(1) *Il Vero nella Matematica*, note 3.
(2) *Nicht Eucl. Geom.*, *loc. cit.*

et élaborés par la pensée logique, sans manquer aux conditions posées par l'intuition spatiale.

La pensée, la psyché et le sens sont si intimement liés entre eux, que la séparation de ce qui est spécial à chacun est presque toujours un problème ardu, sinon impossible à résoudre; la philosophie tourne tout autour, depuis des siècles, sans pouvoir y pénétrer complètement et aboutir à une solution définitive. C'est seulement par la spécialisation des recherches et par une direction expérimentale et scientifique qu'on pourra arriver dans quelques problèmes au moins à une synthèse philosophique claire et sûre, dont les savants spécialistes pourront préparer les éléments. Si, parmi ces problèmes, nous considérons ceux qui concernent les idées mathématiques, la contribution que les mathématiciens ont apportée à leur solution est un des plus beaux monuments de la Science.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Tannery (Jules). — *Elemente der Mathematik.* Mit e. geschichtl. Anh. v. *Paul Tannery*. Deutsch v. *P. Klœss.* Mit e. Einführungswort v. *F. Klein.* Grand in-8°, XII-339 p. avec 184 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 7 m.; relié, 8 m.

Sturm (Rud.). — *Die Lehre v. den geometrischen Verwandtschaften.* 3. Bd.: Die eindeut. linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. (B.-G. Teubner's Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.) Bd. XXVII, 3. Grand in-8°, VIII-574 p. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 20 m.

Xavier (Agliberto). — *Théorie des approximations numériques et du calcul abrégé.* In-8°, x-281 p. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique,* trad. par *Ed. Davaux,* avec notes par *Eug.* et *Fr. Cosserat.* T. II, fasc. 4. In-8°, 182 fig. Paris, A. Hermann. 17 fr.