Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens.

Von

Giuseppe Veronese in Chioggia.

Mehrere Mathematiker haben sich schon mit einigen Capiteln der n-dimensionalen Geometrie, meistentheils mit der Krümmungstheorie der Räume nach der Grundarbeit Riemann's „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen"*), beschäftigt.

Ich habe hier nicht die Absicht eine historische Uebersicht der bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand auseinanderzusetzen, sondern ich will nur hervorheben: erstens, dass alle diese Arbeiten analytische Form besitzen, und zweitens, dass man die n-dimensionale Geometrie, so viel mir scheint, noch nicht consequent als ein Hülfsmittel benutzt hat um die projectivischen Beziehungen in Räumen von verschiedenen Dimensionen, daher auch in der Ebene und dem gewöhnlichen Raume zu studiren.

Ich gebrauche in dieser Abhandlung die synthetische Methode und zwar diejenige Methode, die aus den beiden Fundamentaloperationen des Projicirens und Schneidens hervorgeht. Ich benutze auch hier und dort die analytische Methode, aber ich interpretire sie immer in anschaulicher Weise.

Um eine Configuration von $n+1$ Punkten, oder eine Curve, oder eine 2-dimensionale Fläche, die gewisse Singularitäten besitzt, im gewöhnlichen Raume R_3 zu studiren, ist es in vielen Fällen nützlich, zuvörderst eine Configuration oder ein Gebilde 1ter oder 2ter Dimension in dem n-dimensionalen Raume R_n zu suchen, aus welchem mittelst geeigneten Projicirens oder Schneidens das gegebene Gebilde in eindeutiger Weise entsteht. Und zugleich kann man nicht nur jene Configuration, Curve oder Fläche, sondern auch eine Classe dieser Gebilde studiren, welche sämmtlich mittelst des Projicirens oder Schneidens aus jenem Gebilde im Raume R_n hervorgehen. — Dieses Gebilde.

*) Riemann's Werke pag. 254.

in R_n ist immer einfacher als das gegebene in R_3 und lässt sich daher viel besser behandeln.

Betrachten wir z. B. $n+1$ beliebige Punkte einer Ebene R_2 oder eines Raumes R_3, so kann man sie als Projectionen der $n+1$ Ecken unendlich vieler Pyramiden in R_n ansehen. Und umgekehrt lassen sich aus einer solchen $(n+1)$-eckigen Pyramide in R_n (welche die einfachste Pyramide in R_n ist) durch geeignetes Projiciren alle *Arten* von Configurationen von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Punkten in den Räumen von niedrigerer Dimensionenzahl erhalten; indem man unter zwei Configurationen derselben Art solche versteht, bei welchen die $n+1$ Punkte dieselbe Lage haben, ohne auf die metrischen Beziehungen zwischen ihnen Rücksicht zu nehmen.

Als zweites Beispiel mögen die rationalen Curven dienen. Betrachten wir irgend eine rationale Curve n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in R_m, wo $m<n$ ist, so beweise ich, dass sie immer die Projection einer rationalen Normalcurve C^n in R_n ist. Und umgekehrt kann man aus einer solchen Normalcurve C^n alle Arten von Rationalcurven n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in den niedrigeren Räumen erhalten. Diese Normalcurve C^n besitzt keinerlei Singularität und ihre Charaktere sind vermöge der verallgemeinerten Plücker'schen Formeln, die ich ebenfalls in nachstehender Abhandlung aufstelle, sehr leicht zu berechnen. Ueberdies lässt sie sich leicht durch projectivische Büschel oder Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe construiren. Es wird also äusserst vortheilhaft sein, die rationalen Curven derselben oder niedrigerer Ordnung in nieder ausgedehnten Räumen aus dieser Normalcurve durch Schneiden oder Projiciren zu gewinnen.

Ich habe die gewöhnliche Nomenclatur für Punkt, Gerade, Ebene, Curve, Fläche, Kegel etc. beibehalten, und zwar habe ich die linearen Räume einfache Räume genannt und mit den Symbolen $R_0, R_1, R_2, R_3, \cdots R_n$ bezeichnet. Desgleichen habe ich auch $2, 3, \cdots (n-1)$-dimensionale Flächen und in analoger Weise $2, 3, \cdots (n-1)$-dimensionale R_0-Kegel (deren Spitze bezüglich ein Punkt R_0 ist), und $3, 4 \cdots (n-1)$-dimensionale R_1-Kegel (deren Spitze jeweils eine Gerade R_1 ist) u. s. w. unterschieden.

Die Arbeit ist in fünf Abschnitte mit der Einleitung, und jeder Abschnitt in Paragraphen eingetheilt, so dass es meinem Leser nicht schwer sein wird, sich sofort eine allgemeine Uebersicht derselben zu verschaffen*).

Zum Schlusse ergreife ich diese Gelegenheit, um Herrn Prof. Klein für die vielfache Anregung und Unterstützung bei meinen mathematischen Studien in Leipzig den besten Dank auszusprechen.

*) Der Kürze halber habe ich bei leichten Sätzen, zumal im dritten Abschnitte, die Beweise unterdrückt.

Einleitung.

1. Es ist bekannt, dass eine Ebene R_2 durch eine gerade Linie R_1 und einen Punkt R_0 ausser ihr erzeugt werden kann, indem man alle Punkte der Geraden mit dem Punkte R_0 verbindet. In derselben Weise kann man den Raum von 3 Dimensionen durch eine Ebene R_2 und einen Punkt R_0 ausser ihr erzeugen. Wie man die Gerade als Element der Ebene, und die Ebene als Element des Raumes von 3 Dimensionen betrachtet, so können wir den Raum R_3 als Element eines Raumes von 4 Dimensionen ansehen. Der Raum von 4 Dimensionen R_4 wird von einem Raume R_3 und von einem beliebigen Punkte R_0 *ausser ihm* erzeugt, indem man alle Punkte des Raumes R_3 mit R_0 verbindet. Wie die Ebene in R_3 von einer Geraden nur in einem Punkte geschnitten wird, insofern die Gerade nicht in der Ebene liegt, so wird auch ein R_3 in R_4 von einer Geraden nur in einem Punkte und von einer Ebene in einer Geraden geschnitten, wenn die Gerade oder die Ebene nicht selbst in dem R_3 enthalten ist. Wenn man diese Erzeugung der linearen Räume*) fortsetzt, so sieht man, dass der Raum von n Dimensionen R_n durch einen Raum R_{n-1} und einen ausser ihm liegenden Punkt erzeugt werden kann. Man sieht auch, dass der Raum R_n durch $n+1$ beliebige Punkte, die in keinem niedrigeren Raume gelegen sind, bestimmt wird. Es ist auch aus dem Vorhergehenden ersichtlich, dass in dem Raume von n Dimensionen R_n ∞^n Punkte enthalten sind, und dass, wenn ein Raum R_m $p+1$ beliebige Punkte eines Raumes R_p enthält, wo $m > p$ ist, R_p ganz in R_m enthalten ist.

Zwei beliebige Räume R_m und $R_{m^{(1)}}$, die respective durch $m+1$ und $m^{(1)}+1$ Punkte bestimmt sind, gehören dem Raume $R_{m+m^{(1)}+1}$ an, der durch die $m+m^{(1)}+2$ Punkte bestimmt wird. Die Räume R_m und $R_{m^{(1)}}$ schneiden sich im Allgemeinen nicht, d. h. sie haben keinen Punkt gemein. Haben sie aber z. B. einen Punkt A_0 gemein, so werden wir, um R_m und $R_{m^{(1)}}$ zu bestimmen, ausser A_0 noch m und $m^{(1)}$ Punkte willkürlich annehmen, und daher werden die beiden Räume in einem Raume $R_{m+m^{(1)}}$ enthalten sein. Haben sie allgemein einen Raum R_a gemein, d. h. $a+1$ beliebige Punkte, so liegen sie in einem Raume $R_{m+m^{(1)}-a}$.

Wir betrachten als Fundamentalraum unserer Operationen den Raum von n Dimensionen. Setzen wir daher $R_{m+m^{(1)}-a} = R_n$, so sehen wir, dass zwei beliebige Räume R_m und $R_{m^{(1)}}$ in R_n in einem Raume R_a sich schneiden, wo $a = m + m^{(1)} - n$ ist. Wenn $a = 0$ ist, so haben sie einen einzigen Punkt gemein; ist dagegen a negativ, so haben sie kein Element gemein. Ist $m > m^{(1)}$, so ist klar, dass

*) Weiterhin nennen wir die linearen Räume einfach Räume.

a höchstens $= m^{(1)}$ sein kann, in welchem Falle $R_{m^{(1)}}$ in R_m ganz enthalten sein wird.

Zwei Räume R_m und $R_{m^{(1)}}$ schneiden sich, wie gesagt, in einem Raume R_a, wo:

$$a = m + m^{(1)} - n$$

ist. Der Raum R_a wird von einem dritten beliebigen Raume $R_{m^{(2)}}$ in einem Raume R_{a_1} geschnitten, wo:

$$(1) \qquad a_1 = a + m^{(2)} - n = m + m^{(1)} + m^{(2)} - 2n$$

ist. Der Raum R_{a_1} wird von einem beliebigen vierten Raume $R_{m^{(3)}}$ in einem Raume R_{a_2} geschnitten, wo

$$(2) \qquad a_2 = a_1 + m^{(3)} - n = m + m^{(1)} + m^{(2)} + m^{(3)} - 3n$$

ist, u. s. w. Endlich der Raum $R_{a_{s-2}}$ wird von einem $(s+1)^{\text{ten}}$ beliebigen Raume $R_{m^{(s)}}$ in einem Raume $R_{a_{s-1}}$ geschnitten, wo

$$(3) \qquad a_{s-1} = a_{s-2} + m^{(s)} - n = \sum_{i=0,\ldots s} m^{(i)} - sn$$

ist, so dass $s+1$ ganz beliebige Räume R_m, $R_{m^{(1)}} \cdots R_{m^{(s)}}$ in R_n in einem Raume R_p sich schneiden, wo:

$$p = \sum_{i=0,i\ldots s} m^{(i)} - sn$$

ist. Schneiden sich aber R_m und $R_{m^{(1)}}$ anstatt in einem Raume R_a in einem Raume R_{a+d}, so muss man in (2) anstatt a, $a+d$ setzen, so dass R_m, $R_{m^{(1)}}$, $R_{m^{(2)}}$ in einem Raume R_{a_1+d} sich schneiden werden. Schneiden sie sich statt dessen in einem Raume $R_{a_1+d+d_1}$, so werden sich R_m, $R_{m^{(1)}}$, $R_{m^{(2)}}$, $R_{m^{(3)}}$ in einem Raume $R_{a_2+d+d_1}$ schneiden und *allgemein werden sich* $s+1$ *Räume* R_m, $R_{m^{(1)}}$, $R_{m^{(2)}} \cdots R_{m^{(s)}}$ *in* R_n *in einem Raume* R_q *schneiden, wo:*

$$q = \sum_{i=0,1\ldots s} m^{(i)} + \sum_{k=0,1\ldots s-2} d_k - sn$$

*ist und einige oder alle d verschwinden können**).

2. Um den Parallelismus der Räume zu definiren, denken wir uns, dass jede Gerade in R_n einen unendlich fernen Punkt (im Euklidischen Sinne) hat, d. h. wir nehmen an, dass der Raum R_n einen unendlich fernen Raum R_{n-1} hat, so dass die Räume $R_1, R_2, \cdots R_{n-1}$ von R_n den unendlich fernen Raum in einem $R_0, R_1, \cdots R_{n-2}$ schneiden. Wir sagen: *Zwei Räume* R_m, $R_{m^{(1)}}$, *wo* $m^{(1)} \geqq m$ *ist,*

*) Ueber die Bedingungen, dass mehrere Räume von verschiedenen Dimensionen sich schneiden, sehe man Jordan: „Essai sur la géométrie à n dimensions. Bulletin de la Société mathématique de France 1875" und D'Ovidio: „Le Funzioni metriche fondamentali etc." R. Accademia dei Lincei 1877 (oder auch Math. Annalen XII).

sind einander parallel, wenn der unendlich ferne Raum R_{m-1} *von* R_m *in dem unendlich fernen Raume* $R_{m^{(1)}-1}$ *von* $R_{m^{(1)}}$ *enthalten ist.*

Aus dieser Definition geht hervor, dass man durch einen Raum R_m einen parallelen Raum $R_{m+m^{(1)}}$ zu einem beliebigen gegebenen Raume $R_{m^{(1)}}$ legen kann, wenn $m + m^{(1)} < n$ ist; in der That, die unendlich fernen Räume R_{m-1}, $R_{m^{(1)}-1}$ liegen ganz beliebig und daher bestimmen sie einen Raum $R_{m+m^{(1)}-1}$, welcher der unendlich ferne Raum von unendlich vielen Räumen $R_{m+m^{(1)}}$ ist, die den beiden Räumen R_m und $R_{m^{(1)}}$ parallel sind. Durch einen beliebigen Punkt von R_n geht ein solcher Raum, und wenn dieser Punkt in R_m fällt, so wird der Raum $R_{m+m^{(1)}}$ durch R_m gehen, da er den unendlich fernen Raum R_{m-1} von R_m enthält. Wenn $m + m^{(1)} > n$ d. h.: $m + m^{(1)} - n = a$ ist, so schneiden sich die unendlich fernen Räume R_{m-1}, $R_{m^{(1)}-1}$ in einem Raume R_{a-1}, und da sie im Allgemeinen in R_{n-1} ganz beliebig liegen, ohne in einem niedrigeren Raume enthalten zu sein, so kann man durch R_m keinen parallelen Raum zu $R_{m^{(1)}}$ ziehen. Wenn die beiden Räume R_{m-1}, $R_{m^{(1)}-1}$ in einem Raume R_{n-a-1} liegen, so kann man durch den Raum R_m einen parallelen Raum R_{n-a} zu $R_{m^{(1)}}$ ziehen. — Aus dieser Definition folgt noch, dass zwei parallele Räume A_m, B_m von zwei parallelen Räumen A_{m-n}, B_{n-m} in zwei Paaren von Punkten geschnitten werden, die ein Parallelogramm bilden.

3. Aus Nr. 1. geht hervor, dass zwei Räume R_{n-1} in einem R_{n-2}, drei in einem R_{n-3} u. s. w., n in einem R_0 sich schneiden. Wie n beliebige Punkte einen Raum R_{n-1} bestimmen, so bestimmen n beliebige Räume R_{n-1} einen Punkt. Wir nennen daher den Punkt und den $(n-1)$-dimensionalen Raum *duale Räume* in R_n. Während $m + 1$ beliebige Punkte einen Raum R_m bestimmen, so bestimmen $m + 1$ beliebigen R_{n-1} einen Raum R_{n-m-1}; R_m und R_{n-m-1} sind auch dual. — *Wir sehen also, dass zwei Räume* R_m, $R_{m^{(1)}}$ *dual sind, wenn* $m + m^{(1)} = n - 1$ *ist.* — Wenn n ungerade ist, d. h. $= 2m + 1$, so ist der Raum $R_{\frac{n-1}{2}}$ sich selbst dual.

4. Wird ein Punkt nach einem algebraischen Gesetze sich stetig bewegen, so dass er von seiner Anfangslage nur in zwei Richtungen (vorwärts und rückwärts) fortrücken kann, so beschreibt er einen Raum von einer Dimension. Derselbe ist von der m^{ten} Ordnung, wenn er von einem R_{n-1} in R_n in m Punkten geschnitten wird. Einen solchen Raum nennt man *eine Curve* m^{ter} *Ordnung**). Eine Curve m^{ter} Ordnung

*) Die Erzeugung der linearen Mannigfaltigkeiten von mehreren Dimensionen durch Bewegung eines Elementes findet man bei Grassmann, Ausdehnungslehre p. 13 etc. 1844. Sie ist auch später von Riemann gebraucht worden in der Abhandlung: „Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen. 1854."

kann nur in einem R_2, R_3, $\cdots$ R_m enthalten sein*). Denn wäre eine solche Curve in einem R_{m+1} enthalten, ohne einem niedrigeren Raume R_m zu gehören, so könnten wir sie mit einem Raume R_m, der die Curve nur in m Punkten treffen kann, schneiden, und durch diese m Punkte und einen andern Punkt der Curve einen Raum R_m hindurchlegen. Dieser Raum wird dann die Curve in mehr als m Punkten schneiden, was nicht möglich ist. Wenn man die Tangenten, Schmiegungsebenen, Schmiegungsräume R_3, R_4, $\cdots$ R_{n-1} der Curve betrachtet, so bilden die Tangenten die 2-dimensionale Developpable der Curve (mit Rücksicht auf die Zahl der Punkte), die, wie man sieht, in einen R_2, R_3, $\cdots$ R_{n-2} entwickelbar ist**). — Die Schmiegungsebenen der Curve sind Tangentialebenen der Fläche, während die anderen Schmiegungsräume der Curve auch Schmiegungsräume ihrer 2-dimensionalen developpablen Fläche genannt werden können.

Die Schmiegungsebenen bilden aber eine 3-dimensionale developpable Fläche, die in einen R_3, R_4, $\cdots$ R_{n-2} entwickelbar ist. Die Schmiegungsräume R_3 der Curve sind Tangentialräume ihrer 3-dimensionalen Developpablen u. s. w. Endlich bilden ihre Schmiegungsräume R_{n-2} eine $(n-1)$-dimensionale Developpable, die in einen R_{n-2} entwickelbar ist. Die Schmiegungsräume R_{n-1} der Curve sind Tangentialräume dieser Developpable. — Wir sehen also, dass *eine Curve in R_n, $n-2$ developpable Flächen besitzt.*

Wenn eine Curve sich stetig in zwei entgegengesetzten Richtungen bewegt, so wird sie einen 2-dimensionalen Raum erzeugen, der von der m^{ten} Ordnung ist, wenn er von einem beliebigen Raume R_{n-1} von R_n in einer Curve C^m geschnitten wird. Einen solchen Raum nenne ich *eine 2-dimensionale Fläche m^{ter} Ordnung F_2^m.* Man beweist in analoger Weise, wie bei den Curven, dass eine solche Fläche nur in Räumen R_3, R_4, $\cdots$ R_{m+1} enthalten sein kann, ohne gleichzeitig niedrigeren Räumen anzugehören. Eine solche Fläche hat $n-3$ Developpablen, respective von 3, 4 etc. $(n-1)$ Dimensionen, die respective in einen R_3, R_4, $\cdots$ R_{n-2}; R_4, R_5, $\cdots$ R_{n-2} etc. R_{n-2} entwickelbar sind. Man sieht ohne Weiteres, wie man fortzufahren hat, um die 3, 4 $\cdots$ $(n-1)$-dimensionalen Flächen m^{ter} Ordnung F_3^m, F_4^m $\ldots$ F_{n-1}^m zu erzeugen. Wir finden mit leichter Mühe folgende Sätze:

Eine p-dimensionale Fläche m^{ter} Ordnung F_p^m wird von einem beliebigen Raume R_{n-1} in einer $(p-1)$-dimensionalen Fläche m^{ter} Ordnung F_{p-1}^m geschnitten.

---

*) Clifford. Phil. Transactions 1878, On the Classification of Loci, p. 663.

**) Wie zwei Räume R_{n-1} in R_n zur Deckung gebracht werden können, werden wir später nach der Definition der Perpendicularität der Räume kennen lernen (Nr. 21.).

Eine Fläche F_p^m kann nur in einem $R_{p+1}, R_{p+2}, \cdots, R_{p+m-1}$, d. h. in $m-1$ verschiedenartigen Räumen enthalten sein, ohne in niedrigeren Räumen zu liegen.

Die Flächen 2^{ter} Ordnung von irgend einer Dimension sind also nur in einem bestimmten Raume enthalten.

Die F_p^m besitzt $n-p-1$ Developpablen.

5. Betrachten wir jetzt einen Punkt R_0 und einen zu ihm dualen Raum Σ_{n-1}, der nicht durch R_0 geht. Wenn wir von R_0 irgend eine Curve C^m von Σ_{n-1} projiciren, wo natürlich $m < n-1$ ist, so bekommen wir um R_0 eine einfache unendliche Mannigfaltigkeit von Geraden, die *einen R_0-Kegel von zwei Dimensionen und von der m^{ten} Ordnung* bilden, da er von irgend einem Raume R_{n-1} in einer Curve m^{ter} Ordnung geschnitten wird. Wenn man von R_0 eine p-dimensionale Fläche $F_p{}^m$ von Σ_{n-1} projicirt, die nicht in einem niedrigeren Raume als Σ_{n-1} liegt, so erhalten wir um R_0 einen *$(p+1)$-dimensionalen R_0-Kegel m^{ter} Ordnung.* So kann man alle R_m-*Kegel* erhalten, indem man von einem fest angenommenen R_m aus die Curven und Flächen eines Raumes R_{n-m-1} projicirt, der R_m nirgends schneidet. Wir sehen auch, dass *die Anzahl der Dimensionen eines R_m-Kegels $m+2$ bis $m-1$ betragen kann.**)

Wenn eine 2-dimensionale Fläche $F_2{}^m$ einen Doppelpunkt R_0 hat, so wird sie von allen Räumen R_{n-1} durch R_0 in Curven m^{ter} Ordnung mit einem Doppelpunkte in R_0 geschnitten; analog wenn es sich um einen k-fachen Punkt handelt. Wir sehen auch, dass alle in einem Doppelpunkte osculirenden Geraden einen R_0-Kegel 2^{ter} Ordnung bilden, und dass alle Geraden, die im k-fachen Punkte $k+1$ Punkte mit der $F_2{}^m$ gemein haben, einen 2-dimensionalen R_0-Kegel k^{ter} Ordnung bilden. Im Allgemeinen, wenn eine Fläche $F_p{}^m$ in R_n einen k-fachen Punkt R_0 hat, *so bilden alle Geraden, die mit der $F_p{}^m$ in R_0 $k+1$ Punkte gemein haben, einen p-dimensionalen R_0-Kegel k^{ter} Ordnung.* Hier kann man verschiedene Arten von Doppelpunkten oder k-fachen Punkten unterscheiden je nach der Natur des p-dimensionalen R_0-Kegels. Wenn man eine $(n-1)$-dimensionale Fläche m^{ter} Ordnung in R_n betrachtet, so sicht man, dass sie von allen ihren Tangentialräumen in einem ihrer Punkte R_0 in Flächen niedrigerer Dimension mit einem Doppelpunkte in R_0 geschnitten wird. —

Die hiermit in der Einleitung gegebenen Sätze sind einfache Verallgemeinerungen von bekannten Sätzen der 3-dimensionalen Geometrie, sie werden uns aber später sehr nützlich sein.

---

*) Wenn eine Gerade oder irgend ein Raum R_m in R_n sich stetig in zwei Richtungen fortbewegt, so erhält man eine 2-*dimensionale gerade Fläche* (R_1-Fläche; Regelfläche) oder eine $m+1$-*dimensionale R_m-Fläche.*

Abschnitt I.

Configurationen aus einer endlichen Anzahl von linearen Räumen.

§ 1.

Perspectivische Figuren.

6. Es seien N beliebige Punkte $1, 2, 3 \cdots N$ in R_n gegeben, wo $N \geqq n+1$ ist. Sie bestimmen

$$\frac{N(N-1)}{2} R_1, \quad \frac{N(N-1)(N-2)}{2} R_2, \cdots, \quad \frac{N(N-1)\cdots(N-m)}{(m+1)!} R_m,$$

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-(n+r))}{(n-r+1)!} R_{n-r}, \frac{N(N-1)\cdots(N-n+r-1)}{(n-r+2)!} R_{n-r+1}\cdots$$

und

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} R_{n-1}.$$

Durch jeden R_1 gehen $(N-2)$ $R_2, \cdots, \frac{(N-2)\cdots(N-m)}{(m-1)!} R_m, \cdots;$

„ „ R_2 „ $(N-3)$ $R_3, \cdots, \frac{(N-3)\cdots(N-m)}{(m-2)!} R_m, \cdots;$

„ „ R_r „ $(N-r-1)$ $R_{r+1}, \cdots, \frac{(N-r-1)\cdots(N-m)}{(m-r)!} R_m, \cdots;$

„ „ R_{n-r} „ $(N-(n-r+1))$ $R_{n-r+1}, \cdots,$

$$\frac{(N-(n-r+1))\cdots(N-n+1)}{(r-1)!} R_{n-1};$$

„ „ R_{n-r+1} „ $(N-(n-r+2))$ $R_{n-r+2}, \cdots,$

$$\frac{(N-(n-r+2))\cdots(N-n+1)}{(r-2)!} R_{n-1};$$

„ „ R_{n-r+2} „ $(N-(n-r+3))$ $R_{n-r+3}, \cdots,$

$$\frac{(N-(n-r+3))\cdots(N-n+1)}{(r-3)!} R_{n-1};$$

„ „ R_{n-2} „ $(N-n+1)$ R_{n-1}.

Jeder R_1 enthält $2R_0$,

„ R_2 „ $3R_0$, $3R_1$,

„ R_r „ $(r+1)R_0$, $\frac{r(r+1)}{2} R_1$, $\frac{r(r+1)(r-1)}{23} R_2, \cdots,$

$(r+1)$ R_{r-1};

„ R_{n-r} „ $(n-r+1)$ $R_0, \cdots,$ $(n-r+1)$ R_{n-r-1};

„ R_{n-r+1} „ $(n-r+2)$ $R_0, \cdots,$ $(n-r+2)$ R_{n-r};

Jeder R_{n-r+2} enthält $(n-r+3)\ R_0, \cdots, \frac{(n-r+2)(n-r+3)}{2}\ R_{n-r},$

$(n-r+3)\ R_{n-r+1}$;

„ R_{n-2} „ $(n-1)\ R_0, \cdots\cdots, \frac{(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-2)!}\ R_{n-r},$

$\frac{(n-1)\cdots(n-r+3)}{(r-3)!}\ R_{n-r+1}, \cdots,$

$\frac{(n-1)\cdots(n-r+4)}{(r-4)!}\ R_{n-r+2}, \cdots,$

$(n-1)\ R_{n-3}$;

„ R_{n-1} „ $n\ R_0, \cdots\cdots\cdots\cdots, \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\ R_{n-r},$

$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}\ R_{n-r+1},$

$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+3)}{(r-2)!}\ R_{n-r+2}, \cdots,$

$n\ R_{n-2}$.

Schneiden wir jetzt die Figur mit einem Raume R_r. Ein R_r schneidet die Räume R_{n-r} der Figur in Punkten, die Räume R_{n-r+1} in Geraden u. s. w., die Räume R_{n-1} in Räumen R_{r-1}. Somit erhält die Schnittfigur so viel Punkte, Geraden etc. R_{r-1}, als Räume R_{n-r}, R_{n-r+1} etc. R_{n-1} in der vorigen Figur enthalten sind. Da jeder Raum R_{n-r} derselben durch eine Combination der N Punkte $(n-r+2)$ zu $(n-r+2)$ gebildet wird, und jeder Raum R_{n-r+1} durch eine Combination der N Punkte $(n-r+2)$ zu $(n-r+2)$ etc., so können wir diese Combinationen zur Bezeichnung der Punkte, Geraden, Ebenen u. s. w. der Schnittfigur benutzen. — So sehen wir z. B., dass durch den Punkt $1\,2\,3\cdots(n-r)\,(n-r+1)$ alle Geraden gehen, deren Symbole das Symbol des Punktes enthalten, wie z. B. die Geraden:

$$1\,2\,3\cdots(n-r+1)\,(n-r+2),\ 1\,2\,3\cdots(n-r+1)\,(n-r+3), \cdots$$
$$1\,2\,3\cdots(n-r+1)\,(N-(n-r+1)).$$

Auf jeder dieser Geraden liegen ausser dem Punkte $1\,2\,3\cdots(n-r+1)$ noch $(n-r+1)$ Punkte; sie entsprechen den Combinationen der $(n-r+2)$ Zahlen des Symbols der Geraden, $n-r+1$ zu $n-r+1$. So z. B. liegen in der ersten Geraden die n Punkte

$$1\,2\,3\cdots(n-r)\,(n-r+2),\ \ 2\,3\cdots(n-r-1)\,(n-r+1)\,(n-r+2), \cdots,$$

in der zweiten

$$1\,2\,3\cdots(n-r)\,(n-r+3),\ \ 2\,3\cdots(n-r-1)\,(n-r+1)\,(n-r+3), \cdots$$

Wenn wir die Punkte in derselben Verticallinie verbinden, so erhalten wir wieder Geraden der Schnittfigur, nämlich:

$$1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+2)\,(n-r+3),$$
$$2\,3 \cdots (n-r-1)\,(n-r+1)\,(n-r+2)\,(n-r+3) \text{ etc.};$$

diese zwei Geraden treffen sich in einem Punkte der Figur, nämlich $2\,3 \cdots (n-r-1)\,(n-r+2)\,(n-r+3)$. Durch jeden Punkt, z. B. $1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+1)$, gehen $N-(n-r+1)$ Geraden der Schnittfigur und in jeder derselben liegen ausser ihm noch $n-r+1$ Punkte. Wir können mit ihnen $n-r+1$ Pyramiden von $N-(n-r+1)$ Ecken bilden, die respective in jenen $N-(n-r+1)$ Geraden liegen. Eine solche Pyramide ist von denjenigen Punkten gebildet, deren Symbole $n-r$ Zahlen gemein haben, wie z. B.

$$1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+2),\quad 1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+3); \cdots;$$
$$1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(N-(n-r+1)).$$

Man kann sich nun fragen, ob die Figur dieser $n-r+1$ Pyramiden eine allgemeine Figur sein kann oder nicht, d. h. ob eine allgemeine Figur in R_r von $n-r+1$ solchen Pyramiden, deren Ecken respective in $N-(n-r+1)$ beliebigen durch einen Punkt gehenden geraden Linien liegen, auch als Schnitt einer Configuration von N Punkten in R_n betrachtet werden kann. *Dies ist in der That der Fall.* In der That, denken wir uns die $N-(n-r+1)$ Geraden durch einen Punkt $1\,2\,3 \cdots (n-r+1)$ und die darauf liegenden Ecken der Pyramiden in R_r ganz beliebig gegeben, und bezeichnen wir sie mit denselben Symbolen wie vorher. Von dem Punkte $1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+1)$ ziehen wir einen beliebigen Raum R_{n-r} und in diesem Raume nehmen wir $n-r+1$ ganz beliebige Punkte $1, 2, 3, \cdots, n-r+1$ an. Wir verbinden dann die Ecken, die in der Geraden $1\,2\,3 \cdots (n-r+1)\,(n-r+2)$ liegen; z. B. die Ecke $1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+2)$, mit den Punkten $1, 2, 3, \cdots, n-r$ von R_{n-r}; so erhalten wir für alle Ecken der Geraden, $n-r+1$ Räume R_{n-r}, die in einem Raume R_{n-r+1} enthalten sind, nämlich in dem Raume R_{n-r+1}, der durch den gewählten Raum R_{n-r} und die Gerade $1\,2\,3 \cdots (n-r+1)\,(n-r+2)$ geht, da diese Geraden den gewählten R_{n-r} in dem Punkte $1\,2\,3 \cdots (n-r+1)$ schneidet; daher werden sich alle R_{n-r}, die durch die Punkte der Geraden gehen, in einem Punkte $n-r+2$ schneiden. Wenn wir diese Operation für alle Geraden durch den Punkt $1\,2\,3 \cdots (n-r)\,(n-r+1)$ ausführen, so erhalten wir in der That $N-(n-r+1)$ Punkte, die mit den gewählten $1, 2, 3, \cdots, n-r+1$ Punkten N Punkte liefern, aus deren vollständiger Figur diejenige von R_r als Schnitt hervorgeht. *Diese Umkehr ist aber äusserst wichtig, denn so können wir die Sätze über allgemeine perspectivische Figuren einfach durch Schneiden oder Projiciren erhalten.* Also:

Wenn in einem Raume R_r die p Ecken von $q-1$ Pyramiden, respective in p Geraden, durch einen Punkt liegen, und man setzt

$$q = n - r + 2, \quad p = N - (n - r + 1),$$

so bestimmen sie durch das Durchschneiden ihrer Kanten, Seitenebenen, $\cdots$, Seitenräume R_{r-1} eine Figur von

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+r)}{(n-r+1)!} R_0,$$

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{(n-r+2)!} R_1, \ldots \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} R_{r-1}.$$

Durch jeden R_0 gehen $N-(n-r+1)\ R_1, \frac{(N-(n-r+1))(N-(n-r+2))}{2} R_2, \cdots,$

$$\frac{(N-(n-r+1))\cdots(N-n+1)}{(r-1)!} R_{r-1},$$

$$\text{„} \quad \text{„} \quad R_1 \quad \text{„} \quad N-(n-r+1)\ R_2, \cdots, \frac{(N-(n-r+2))\cdots(N-n+1)}{(r-2)!} R_{r-1},$$

$$\vdots$$

$$\text{„} \quad \text{„} \quad R_{r-2} \quad \text{„} \quad N-(n-1)\ R_{r-1}.$$

Jeder R_1 enthält $(n-r+2)\ R_0,$

$$\vdots \qquad \frac{(n-r+2)(n-r+3)}{2} R_0, \quad n-r+3\ R_1,$$

$$\text{„} \quad R_{r-1} \quad \text{„} \quad \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} R_0, \quad \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!} R_1, \ldots.$$

Diese Figur ist im gewissen Sinne symmetrisch in Bezug auf jeden ihrer Räume derselben Dimension. Zum Beispiel hat man von einem beliebigen Punkte der Figur ausgehend $q-1$ neue Pyramiden von $p-1$ Ecken, die respective $q-1$ zu $q-1$ in p Geraden durch den Punkt liegen, und die zu derselben Figur führen.

Diese Figur kann nun als Schnitt des Raumes R_r, in welchem sie liegt, mit einer vollständigen Figur von N Punkten im Raume R_n angesehen werden, und umgekehrt aus einer solchen Configuration von N Punkten in R_n bekommt man eine der vorigen ähnliche Figur in R_r. Jede solche Figur in R_r kann auch als Projection von einer Configuration in einem höheren Raume erhalten werden.

Wenn wir von dem Punkte $1\,2\,3 \cdots (n-r+1)$ ausgehen, so werden wir zu dem Raume $(n-r+2)\cdots(N-(n-r+1))$ geführt (wenn dies auch das Symbol eines Raumes der Figur ist, siehe die Beispiele des § 2.). Wir nennen den Punkt und den Raum, da ihre Symbole sich zu N ergänzen, zu einander *complementär*, und überhaupt nennen wir zwei Räume der Figur complementär, wenn ihre Symbole sich zu N ergänzen.

7. Die einfachste Pyramide in R_r ist durch $r+1$ beliebige Punkte gegeben, wir wollen sie als *Fundamentalpyramide* des Raumes

R_r bezeichnen. Wenn man den Punkt des Raumes R_r durch $r+1$ homogene Grössen (Coordinaten) $x_1 \cdots x_{r+1}$ bestimmt denkt (dem entsprechend, dass der Raum R_r, wie wir in Nr. 1. gesehen haben, ∞^r Punkte enthält) und wir setzen alle diese Grössen bis auf eine gleich null, so bekommen wir eine Fundamentalpyramide von $r+1$ Punkten, deren Coordinaten bis auf eine null sind. Wenn man die Coordinaten $x_1 \cdots x_{r+1}$ mit einander vertauscht, so geht die Pyramide in sich über; deshalb nenne ich sie *regulär*, obgleich dieses Wort nicht wie im gewöhnlichen Sinne zu verstehen ist.

Betrachten wir zwei solche Pyramiden in R_r, deren Ecken paarweise in geraden Linien durch einen Punkt O liegen, so ist:

$$q = 3 = n - r + 2, \quad p = r + 1 = N(n - r + 1),$$

d. h.

$$n = r + 1, \quad N = r + 3.$$

Somit ist die vollständige Figur von zwei solchen Pyramiden der Schnitt einer Configuration von $r+3$ beliebigen Punkten eines Raumes R_{r+1}.

Wenn wir im Satze der vorigen Nummer für N und n ihre neuen Werthe einsetzen, so sehen wir, dass die Zahl der Räume R_{r-1} der Figur d. h. $\frac{(r+2)(r+3)}{2}$ gleich ist der Zahl der Punkte derselben, d. h. die Figur ist also zu sich selbst dual; überdies sind ihre complementären Räume zu einander dual. Wir können die Punkte der Figur durch die Symbole 12, 13, etc. die Geraden durch 1 2 3, 1 2 4 etc. und die R_{r-1} durch die Symbole $1\,2\,3\,4 \cdots (r+1)$ bezeichnen, so dass z. B. der Raum $3\,4 \cdots (r+3)$ und der Punkt 1 2 complementär sind. — Wird der Punkt O als 1 2 bezeichnet, so können wir die Ecken der beiden Pyramiden durch die Symbole

$$1\,3,\ 1\,4,\ \cdots,\ 1(r+2),$$
$$2\,3,\ 2\,4,\ \cdots,\ 2(r+2)$$

bezeichnen; die Kanten der Pyramiden sind daher

$$1\,3\,4,\ 1\,3\,5,\ \cdots,\ 1\,4\,5,\ 1\,4\,6, \text{ u. s. w.},$$
$$2\,3\,4,\ 2\,3\,5,\ \cdots,\ 2\,4\,5,\ 2\,4\,6,\ \cdots.$$

Die Schnittpunkte der entsprechenden Kanten

$$1\,3\,4,\ 2\,3\,4 \quad \text{oder} \quad 3\,4,$$
$$1\,3\,5,\ 2\,3\,5 \quad \text{„} \quad 3\,5$$

gehören dem Raume $3\,4\,5 \cdots (r+2)(r+3)$ an, der 1 2 entspricht. Also:

Wenn die Ecken von zwei Fundamentalpyramiden in R_r paarweise in Geraden durch einen Punkt O liegen, so schneiden sich ihre entsprechenden Kanten, Ebenen, ..., Räume R_{r-1} in Punkten, Geraden, *Ebenen etc. eines Raumes R_{r-1}, der dem Perspectivitätscentrum O entspricht. — Die vollständige Figur ist der Schnitt mit einer Configuration von $r+3$ Punkten eines Raumes R_{r+1}. Sie enthält*

$$\frac{(r+2)(r+3)}{2}R_0,\ \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}R_1,\ \cdots,\ \frac{(r+2)(r+3)}{2}R_{r-1}.$$

Vor jedem R_0 *gehen* $r+1\ R_1,\ \frac{r(r+1)}{2}R_2,\ \cdots,\ \frac{r(r+1)}{2}R_{r-1}$,

„ R_1 „ $r\ R_2,\ \frac{r(r-1)}{2}R_{r-1}$,

Jeder R_1 *enthält* $3R_0$,

„ R_2 „ $6R_0,\ 3R_1$, *etc.*

Wir nennen in diesem Falle die beiden Pyramiden *perspectivisch.* Im Allgemeinen nennen wir zwei Figuren perspectivisch, wenn nicht nur ihre Ecken paarweise in durch einen Punkt gehenden Geraden liegen, sondern auch wenn ihre Kanten, Ebenen u. s. w. in einem Raume R_{r-1} (Collineationsraum) sich schneiden.*)

Mit dieser Methode erhält man also nicht nur zum Beispiel den Beweis des Satzes der perspectivischen Dreiecke in der Ebene oder der perspectivischen Tetraeder in R_3, sondern erhält man auch die vollständige Figur derselben.

8. Betrachten wir wieder zwei perspectivische Fundamentalpyramiden in R_r, deren perspectivisches Centrum 12 ist. Wir bilden mit 12 und mit den Ecken von einer der gegebenen Pyramiden z. B. 13, 14, $\cdots$, $1\,r+2$ eine $(r+2)$-eckige Pyramide, nämlich 12, 13, $\cdots$, $1\,(r+2)$, und betrachten auch die duale Pyramide $34\cdots(r+3)$, $245\cdots(r+3)$, $\cdots$ $23\cdots(r+1)\,(r+3)$. Wir sehen dann, dass diese beiden Pyramiden keinen Raum gemein haben, denn alle Symbole der Räume der ersten enthalten die Zahl 1, während 1 nicht in den Symbolen der Räume der zweiten vorkommt. Wir sehen aber zugleich, dass z. B. die $r+2$ Ecken der ersten und die $\frac{r(r+2)(r+1)}{2}$ Ecken der zweiten zusammengenommen die $\frac{(r+2)(r+3)}{2}R_0$ der vollständigen Figur bilden. Solche Gruppen von zwei dualen Pyramiden giebt es ebensoviele als Zahlen in den Symbolen der Räume der Figur, d. h. $r+3$. Also:

Die Figur von zwei perspectivischen Fundamentalpyramiden in einem Raume R_r zerfällt in $r+3$ Gruppen von zwei dualen Pyramiden zu je $r+2$ Ecken, respective von $r+2$ R_{r-1}, die keinen Raum der Figur gemein haben und die zusammengenommen die vollständige Figur bilden.

---

*) Der zweite Theil dieser Definition ist eben in Folge unseres Satzes für zwei Fundamentalpyramiden in R_r nicht nöthig.

9. Wir können auch andere Figuren in R_r finden, die mit sich selbst dual sind. Es muss dann immer die Zahl der R_0 gleich der Zahl der Räume R_{r-1}, d. h.

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+r)}{(n-r+1)!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}.$$

Diese Gleichung können wir nur befriedigen, indem wir setzen

$$N-n+r=n+1 \quad \text{oder} \quad N-n+1=n-r+2$$

d. h.

$$N=2n-r+1.$$

Soll die Figur in R_r des Satzes der sechsten Nummer dual zu sich selbst sein, so muss $N=2n-r+1$ sein.

Es ist auch leicht, folgenden Satz zu beweisen:

Wenn eine solche Figur mit sich selbst dual ist, so erhält man sie als Schnitt einer Configuration in R_{r+1} und zugleich als Projection der dualen Configuration in R_{r+1}.

§ 2.

Specialfälle $r=2,3$.

10. Aus dem Satze der Nr. 6. haben wir für $r=2$

$$q=n, \quad p=N-n+1.$$

(1) Der einfachste Fall ist $q=3$ und $p=2$, dann wird $N=4$, d. h. man erhält in der Ebene ein Vierseit.

(2) $$q=3, \quad p=3, \quad N=5.$$

Wir erhalten in der Ebene die vollständige Figur von zwei perspectivischen Dreiecken, d. h. wir erhalten 10 Punkte, die drei zu drei in 10 Geraden liegen. Aus dem Satze (Nr. 8.) geht hervor, dass diese Figur 5 mal in ein Viereck und in ein Vierseit zerfällt, die keine Ecke und keine Seite gemein haben und die zusammengenommen die ganze Figur bilden.*) Man erhält diese Figur als Schnitt einer Ebene mit der vollständigen Figur eines Fünfecks in R_0.

(3) $$q=4, \quad p=3, \quad N=6.$$

In diesem Falle bekommt man 20 Punkte, die vier zu vier in 15 Geraden liegen, die drei zu drei durch 20 Punkte gehen. Die Figur

*) Ich habe in meiner Abhandlung über das Hexagrammum mysticum (Atti della R. accademia dei Lincei 1877) bewiesen, dass die 60 Pascal'schen Linien 6 solche Figuren bilden, wobei die 10 Punkte Kirkman'sche Punkte sind; ich habe ebendort bewiesen, dass die Figur polar reciprok von sich selbst ist im Bezug auf einen Kegelschnitt π. Das Viereck und das Vierseit einer beliebigen der fünf oben erwähnten Gruppen sind polar und polarreciprok in Bezug auf den Kegelschnitt π. (Siehe Abschnitt III, § 5.)

trennt sich in zehn Paaren von Punkten, z. B. 1 2 3, 4 5 6 etc., wo 1 2 3, 4 5 6 complementär sind. Diese Figur ist analog der Figur, welche von den zehn Paaren der Steiner'schen Punkte in dem Hexagrammum mysticum gebildet wird.

(4) $q = 4, \quad p = 4, \quad N = 7.$

In diesem Falle haben wir drei Vierecke:

$$1\,2\,4,\ 1\,2\,5,\ 1\,2\,6,\ 1\,2\,7;\quad 1\,3\,4,\ 1\,3\,5,\ 1\,3\,6,\ 1\,3\,7;$$
$$2\,3\,4,\ 2\,3\,5,\ 2\,3\,6,\ 2\,3\,7,$$

deren Ecken paarweise in der Geraden:

$$1\,2\,3\,4,\ 1\,2\,3\,5,\ 1\,2\,3\,6,\ 1\,2\,3\,7$$

durch 1 2 3 liegen.

Die Seiten der drei Vierecke sind:

$$\begin{array}{cccccc} 1\,2\,4\,5, & 1\,2\,4\,6, & 1\,2\,4\,7, & 1\,2\,5\,6, & 1\,2\,5\,7, & 1\,2\,6\,7, \\ 1\,3\,4\,5, & 1\,3\,4\,6, & 1\,3\,4\,7, & 1\,3\,5\,6, & 1\,3\,5\,7, & 1\,3\,6\,7, \\ 2\,3\,4\,5, & 2\,3\,4\,6, & 2\,3\,4\,7, & 2\,3\,5\,6, & 2\,3\,5\,7, & 2\,3\,6\,7. \end{array}$$

Die entsprechenden Seiten treffen sich in den Punkten

$$\begin{array}{cccccc} 1\,4\,5, & 1\,4\,6, & 1\,4\,7, & 1\,5\,6, & 1\,5\,7, & 1\,6\,7, \\ 2\,4\,5, & 2\,4\,6, & 2\,4\,7, & 2\,5\,6, & 2\,5\,7, & 2\,6\,7, \\ 3\,4\,5, & 3\,4\,6, & 3\,4\,7, & 3\,5\,6, & 3\,5\,7, & 3\,6\,7, \end{array}$$

die drei zu drei in den Geraden:

$$\begin{array}{cccc} 1\,4\,5\,6, & 1\,4\,5\,7, & 1\,4\,6\,7, & 1\,5\,6\,7, \\ 2\,4\,5\,6, & 2\,4\,5\,7, & 2\,4\,6\,7, & 2\,5\,6\,7, \\ 3\,4\,5\,6, & 3\,4\,5\,7, & 3\,4\,6\,7, & 3\,5\,6\,7 \end{array}$$

liegen, welche drei zu drei in den vier Punkten 456, 457, 467, 567 sich schneiden, die in der Geraden 4567 liegen. Die Gerade 4567 entspricht dem Punkte 1 2 3. Die Figur besteht also aus 35 Punkten, die vier zu vier in 35 Geraden liegen, welche vier zu vier durch die 35 Punkte gehen. —

Für die dualen Figuren in der Ebene muss man haben:

$$N = 2n - 1$$

d. h.

$$p = n, \quad q = n.$$

11. *Nehmen wir jetzt* $r = 3$.

In diesem Falle hat man:

$$q = n - 1, \quad p = N - n + 2.$$

(1) Es sei:

$$q = 3, \quad p = 4 \quad \text{d. h.} \quad n = 4, \quad N = 6.$$

Wir bekommen die Figur zweier perspectivischer Tetraeder, d. h. 13, 1 4, 1 5, 1 6; 2 3, 2 4, 2 5, 2 6, deren Ecken paarweise in den vier Geraden 1 2 3, 1 2 4, 1 2 5, 1 2 6 durch den Punkt 1 2 liegen. Nach dem Satze (Nr. 7.) treffen sich die entsprechenden Kanten und Ebenen in Punkten und Geraden einer Ebene. Die Figur besteht aus 15 Punkten, die drei zu drei in 20 Geraden liegen und sechs zu sechs in 15 Ebenen, welche drei zu drei durch die 20 Geraden gehen. Durch jeden Punkt gehen vier Gerade, und in jeder Ebene sind vier solche enthalten. Einem Punkte 1 2 entspricht die Ebene 3 4 5 6. Hierzu ist zu bemerken:

*Da zwei perspectivische Tetraeder immer polarreciprok in Bezug auf eine einzige Fläche zweiten Grades in R_3 sind (wie wir später Abschnitt III, § 5. sehen werden), so ist die ganze Figur polarreciprok von sich selbst in Bezug auf die Fläche zweiten Grades. Nach dem Satze (Nr. 8.) zerfällt die Figur in sechs Paare, die je aus einem Fünfeck und Fünfflach bestehen, die polar und polarreciprok in Bezug auf die Fläche zweiten Grades sind,**)

(2) $q = 4, p = 5,$ d. h. $n = 5, N = 8.$

Man erhält in diesem Falle 56 Punkte, die vier zu vier in 70 Geraden liegen, die fünf zu fünf durch jene Punkte gehen und fünf zu fünf in 56 Ebenen liegen, d. h. man erhält eine mit sich selbst duale Figur. Dem Punkte 123 z. B. entspricht die Ebene 45678.

Wir werden später auf diese Figuren bei den Polarfiguren in Bezug auf die Flächen zweiten Grades (Abschnitt III, § 5.) zurückkommen.

§ 3.

Allgemeine Configurationen.

12. Betrachten wir jetzt $n + 1$ beliebige Punkte in einer Ebene R_2, die natürlich nicht alle in gerader Linie liegen sollen, und projiciren wir sie aus einem beliebigen Raume R_{n-3}, der die Ebene n irgendwo trifft; so erhalten wir $n + 1$ von R_{n-3} ausgehende Räume R_{n-2}, die in keinem Raume R_{n-1} liegen. Wir können daher in den $n + 1$ Räumen R_{n-2} $n + 1$ Punkte so wählen, dass sie in keinem niedrigeren Raume als R_n liegen; sie bilden dann eine Fundamentalpyramide von R_n (die in unserem Sinne regulär ist). Das heisst: jede beliebige Configuration von $n + 1$ Punkten der Ebene, die nicht alle in einer Geraden liegen, ist die Projection von ∞ vielen Fundamentalpyramiden des R_n. Man versteht noch besser den dualen Satz. Wenn nämlich $n + 1$ Gerade in R_2 gegeben sind, die nicht alle durch einen Punkt gehen, so können wir durch sie $n + 1$ beliebige Räume R_{n-1}

*) Dieser Figur begegnet man auch bei der vollständigen Klein'schen Figur von sechs linearen Complexen in Involution. (Siehe meine Abhandlung „Sopra alcune notevoli configurazioni etc.“ Memoria II, Nr. 34. Atti della R. Accademia dei Lincei 1881.)

ziehen, die eben eine solche Fundamentalpyramide in R_n bilden. Es ist leicht zu sehen, dass derselbe Beweis noch für jede Configuration von $n+1$ Punkten oder von $n+1$ Räumen R_{r-1} in einem Raume R_r gilt, wenn $r < n$ ist. Man sieht auch, dass aus einer Fundamentalpyramide in R_n nicht nur alle *Arten* von Configurationen von $n+1$ Punkten oder von $n+1$ R_{r-1} in R_r durch Projiciren oder Schneiden erhalten werden, sondern auch alle Configurationen von s Elementen, wo $r < s < n+1$ ist. *Unter den verschiedenen Arten einer Configuration von m Punkten* verstehen wir die verschiedenen Lagen, welche die m Punkte in der Configuration annehmen können, ohne dass sie theilweise zusammenfallen, und ohne auf die metrischen Beziehungen Rücksicht zu nehmen. Also:

Jede Configuration von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Punkten in einem Raume R_r, die nicht gleichzeitig in einem niedrigeren Raume als R_r liegen, kann als Projection von ∞ vielen Fundamentalpyramiden in R_n oder als Schnitt ∞ vieler Fundamentalpyramiden eines höheren Raumes als R_r angesehen werden. Jede solche Configuration kann in eben solcher Weise aus unendlich vielen Fundamentalpyramiden beliebiger höherer Räume als Projection oder als Schnitt erhalten werden. Umgekehrt kann man aus einer Fundamentalpyramide in R_n durch Projiciren (oder Schneiden) alle Arten von Configurationen von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Punkten (oder Räumen R_{r-1}) eines niedrigeren Raumes R_r erhalten.

Da wir die Theorie des Imaginären von Staudt als bekannt voraussetzen, so sehen wir, dass der Satz auch für imaginäre Configurationen gilt, indem wir, mit Staudt, zwei imaginäre Elemente durch eine elliptische Involution bestimmt denken.*)

Das Studium der Configurationen einer endlichen Anzahl von Punkten oder Geraden in der Ebene; von Punkten, Ebenen in R_3 etc. gewinnt mit diesem Satze an Einfachheit und Anschaulichkeit. Um ein Beispiel der Wichtigkeit dieses Satzes zu geben, betrachten wir die wohlbekannte Configuration von sechs Punkten eines Kegelschnittes. Die sechs Punkte bestimmen zwei zu zwei 15 Gerade D, die sich noch in 45 Punkten P schneiden, welche drei zu drei in 60 Pascal'schen Linien p liegen. Diese treffen sich drei zu drei in 20 Steiner'schen Punkten und andrerseits drei zu drei in 60 Kirkman'schen Punkten. Sie bilden sechs Figuren π von zehn Geraden p, die sich drei zu drei in den 10 entsprechenden Kirkman'schen Punkten schneiden und daher sechs Kegelschnitte π bestimmen. Ich habe auch in meiner citirten Arbeit bewiesen, dass die 60 Kirkman'schen Punkte nicht die duale Figur der 60 Pascal'schen Linien bilden, und dass es unendlich viele

*) Man kann alle diese Theoreme natürlich auch sehr leicht analytisch beweisen.

Systeme $[Zz]$ von 60 Punkten Z und 60 Geraden z giebt, welche die analogen Eigenschaften des Pascal'-Kirkman'schen Systems besitzen, die aber nicht durch sechs Fundamentalpunkte eines Kegelschnittes bestimmt werden. Die ganze Figur ist zunächst durch die sechs Fundamentalpunkte bestimmt; sie kann aber auch durch die 45 Punkte P oder durch die 60 Kirkman'schen Punkte k oder durch 60 Punkte Z eines Systems $[Zz]$, nicht aber durch die 20 Steiner'schen Punkte bestimmt werden. Die sechs Fundamentalpunkte der Ebene ergeben sich als Projection einer sechseckigen Pyramide in R_6; die 45 Punkte P werden aus einer 45-eckigen Fundamentalpyramide in R_{44} mittelst geeigneter Projection in der Ebene erhalten; es giebt also in R_3 Figuren von 45 Punkten, die weiter von einem *gewissen* Punkte A_0 projicirt, die Figur der 45 Punkte P in der Ebene ergiebt. Eine solche Figur ist eben von Cremona mit Hülfe der Geraden einer Fläche dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte studirt worden.*)

Der Doppelpunkt ist in diesem Falle jener gewisse Punkt A_0, von welchem man die Projection in der Ebene machen muss, um die Figur der 45 Punkte P zu erhalten.

Wir können aber die Figur des Hexagrammum auch aus den 60 Kirkman'schen Punkten bestimmt denken; dann kann sie als Projection von einer 60-eckigen Fundamentalpyramide eines Raumes R_{59} angesehen werden. Hier können wir wieder bemerken, dass in R_3 Figuren von 60 Punkten existiren müssen, die aus einem *gewissen* Punkte projicirt die Figur der 60 Kirkman'schen Punkte liefern, Figuren, unter die auch die von Cremona behandelte gehört. Wenn man aber die Figur des Hexagrammum durch 60 Punkte Z bestimmt denkt, so muss sie auch aus der Fundamentalpyramide in R_{59} als Projection erhalten werden.

Andrerseits ist das Hexagrammum durch die 15 Geraden D bestimmt; diese können als Schnitt der Ebene mit einer 15-eckigen Pyramide in R_{14} betrachtet werden, so dass in R_3 Figuren von 15 Ebenen existiren, die von einer *gewissen* Ebene geschnitten, die Figur der 15 Geraden D liefern. Analog mit den 60 Pascal'schen Linien p oder mit 60 Geraden z.

Es ist also die Existenz von verschiedenen Figuren in R_3 bewiesen, aus welchen durch Projiciren oder Schneiden aus bestimmten Punkten oder mit bestimmten Ebenen die Figur des Hexagrammum erhalten werden kann.

Es wäre eine sehr interessante Aufgabe, diese verschiedenen Figuren in R_3 in der Weise, die ich angedeutet habe, wirklich zu finden.

---

*) Teoremi stereometrici dai quali si deducono le propietá dell'esagrammo di Pascal. Atti della R. Accademia dei Lincei 1877.

Abschnitt II.

Grundgebilde.

§ 1.

Classification der Grundgebilde — Projectivische Zuordnung.

13. Im Raume R_0 hat man, wie bekannt, drei Grundgebilde bezüglich von der ersten, zweiten und dritten Stufe, im Raume R_n dagegen hat man, wie man sofort sieht, n Grundgebilde respective von der 1ten, 2ten, ..., $n$ten Stufe. Das Grundgebilde $n$ter Stufe ist der Raum R_n selbst. Die anderen Grundgebilde haben entweder einen Raum als *Träger* oder als *Axe*, d. h. entweder liegen sie „in einem Raume“ oder sie gehen durch „einen Raum“. Es ist klar, dass zwei duale Räume, wie z. B. R_m und R_{n-m-1}, Träger und Axe von zwei dualen Gebilden derselben Stufe sind, weil den Punkten von R_m, oder den Räumen R_{n-1} durch R_m, die Räume R_{n-1} durch R_{n-m-1}, oder die Punkte desselben entsprechen.

Wir nennen zwei Grundgebilde derselben Stufe, welche beide einen Träger oder eine Axe besitzen, *gleichartig*, wenn sie von demselben Elemente erzeugt werden, ungleichartig, wenn sie durch duale Elemente erzeugt sind. Wenn das eine der Grundgebilde einen Träger S_m und das andere eine Axe S_{n-m-1} hat, so nenne ich sie gleichartig, wenn das zweite den Träger des ersten in einem zu diesem gleichartigen Gebilde schneidet. Analog für ungleichartige Gebilde.

Wenn zwei gleichartige Gebilde derselben Stufe, das eine aber in einem Träger, das andere um eine Axe, gegeben sind, und die Elemente des zweiten durch die Elemente des ersten hindurchgehen, so sagen wir, dass die Gebilde *perspectivisch* liegen.

14. Ehe wir zu der allgemeinen Definition der Projectivität der Grundgebilde übergehen, wollen wir folgenden Satz vorausschicken.

Wenn zwei Gruppen von $n+1$ beliebigen Punkten $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n+1)}$, $A_0'^{(1)}, A_0'^{(2)}, \ldots, A_0'^{(n+1)}$ in zwei Räumen Σ_{n-1} Σ'_{n-1}, ohne in niedrigeren Räumen zu liegen, enthalten sind, so kann man sie durch successives Projiciren und Schneiden aus $n+1$ Punkten $A_{(1)}^{(1)}, \ldots, A_{(n+1)}^{(n+1)}$ eines dritten Raumes Σ''_{n-1} erhalten und somit ineinander überführen.

In der That, projiciren wir von $A_0'^{(1)}\, A_0^{(1)}$ respective die Punkte $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \ldots, A_0^{(n+1)}$, $A_0'^{(1)}, A_0'^{(2)}, \ldots, A_0'^{(n+1)}$ in zwei Räume R_{n-1} durch einen Punkt $A_{(1)}^{(1)}$ der Geraden $A_0'^{(1)}\, A_0^{(1)}$, der nicht in einen dieser Punkte fällt; so bekommen wir in diesen Räumen R_{n-1}, R'_{n-1} zwei Gruppen von n Punkten $A_{(1)}^{(2)}, A_{(1)}^{(3)}, \ldots, A_{(1)}^{(n+1)}$; $A_{(1)}'^{(2)}, \ldots, A_{(1)}'^{(n+1)}$. Wir projiciren jetzt von $A_{(1)}'^{(2)}$, $A_{(1)}^{(2)}$ respective die Punkte $A_{(1)}^{(2)}, \ldots, A_{(1)}^{(n+1)}$,

$A_{(1)}^{(2)}, \ldots, A_{(1)}'^{(n+1)}$ auf zwei neue Räume $R_{n-1}^{(1)}$, $R_{n-1}'^{(1)}$, die durch $A_{(1)}^{(1)}$ und durch einen Punkt $A_{(2)}^{(2)}$ von $A_{(1)}^{(2)}A_{(1)}'^{(2)}$ gehen, aber so dass die Projectionen $A_{(2)}^{(3)}, \ldots, A_{(2)}^{(n+1)}$, $A_{(2)}'^{(3)}, \ldots, A_{(2)}'^{(n+1)}$ in zwei Räumen R_{n-2} liegen, die sich in einem Raume R_{n-3} schneiden, während im Allgemeinen zwei Räume R_{n-2} in R_n in einem R_{n-4} sich schneiden. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass die zwei Räume R_{n-1}, die durch die n Punkte $A_{(1)}'^{(2)}, A_{(1)}^{(3)}, \ldots, A_{(1)}^{(n+1)}$ und $A_{(1)}^{(2)}, A_{(1)}'^{(3)}, \ldots, A_{(1)}'^{(n+1)}$ bestimmt sind, in einem $(n-2)$-dimensionalen Raum X_{n-2} sich schneiden. Wir legen durch $A_{(1)}^{(1)}$ und X_{n-2} einen $(n-1)$-dimensionalen Raum X_{n-1}, der die Gerade $A_{(1)}^{(2)} A_{(1)}'^{(2)}$ in dem Punkte $A_{(2)}^{(2)}$ schneidet. Die Gerade $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ schneidet den Raum X_{n-2} in einem Punkte X_0, da $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ in X_{n-1} liegt. Wir legen daher durch X_0 zwei Räume R_{n-2}, die respective in den beiden Räumen $A_1'^{(2)} A^{(3)} \ldots A_1^{(n+1)}$, $A_1^{(2)} A_1'^{(3)} \ldots A_1'^{(n+1)}$ liegen, so dass sie sich in einem Raume R_{n-3} von X_{n-2} schneiden. Verbinden wir dann $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ mit diesen beiden Räumen R_{n-2} durch zwei Räume $R_{n-1}^{(1)}$, $R_{n-1}'^{(1)}$ (was möglich ist, da die Gerade $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ die beiden Räume R_{n-2} in X_0 schneidet), so sind diese die zwei gewünschten Räume.

Jetzt projiciren wir wieder von $A_2'^{(3)} A_2^{(3)}$ respective die Punkte $A_{(2)}^{(3)}, \ldots, A_{(2)}^{(n+1)}$; $A_{(2)}'^{(3)}, \ldots, A_{(2)}'^{(n+1)}$ auf zwei neue Räume $R_{n-1}^{(2)}$ $R_{n-1}^{(2)}$, die durch $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}$ und einen Punkt $A_{(3)}^{(3)}$ der Geraden $A_2'^{(3)} A_2^{(3)}$ gehen, so dass die Projectionen $A_{(3)}^{(4)}, \ldots, A_3^{(n+1)}$; $A_{(3)}'^{(4)}, \ldots, A_{(3)}'^{(n+1)}$ in zwei Räumen R_{n-3}' liegen, die sich in einem $(n-4)$-dimensionalen Raume R_{n-4}' schneiden. Wir können diese zwei Räume $R_{n-1}^{(2)}$ $R_{n-1}'^{(2)}$ in der analogen Weise, wie wir vorher $R_{n-1}^{(1)}$ $R_{n-1}'^{(1)}$ bestimmt haben, bestimmen.

Wenn man so fortfährt, so erhält man endlich zwei Räume $R_{n-1}^{(n-1)} R_{n-1}^{(n-1)}$, die durch $n-1$ feste Punkte gehen, d. h. durch $A_{(1)}^{(1)} A_{(2)}^{(2)}, \ldots, A_{(n-1)}^{(n-1)}$ und respective durch $A_{(n-1)}^{(n)}, A_{(n-1)}^{(n+1)}$; $A_{(n-1)}'^{(n)}, A_{(n-1)}'^{(n+1)}$ gehen, so dass die Geraden $A_{(n-1)}'^{(n)} A_{(n-1)}^{(n+1)}$; $A_{(n-1)}^{(n)} A_{(n-1)}'^{(n+1)}$ in einem Punkte S_0 sich schneiden. — Projicirt man endlich von S_0 aus auf einen Raum $R_{n-2}^{(n)}$ der durch die $(n-1)$ festen Punkte $A_{(1)}^{(1)}, A_{(2)}^{(2)}, \ldots, A_{(n-1)}^{(n-1)}$ geht, so erhält man in der That die n verlangten Punkte $A_{(1)}^{(1)}, A_{(2)}^{(2)}, \ldots$ $\ldots, A_{(n)}^{(n)} A_{(n+1)}^{(n+1)}$, aus welchen rückwärts durch Projiciren und Schneiden die gegebenen Gruppen von $n+1$ Punkten erhalten werden können.*)

*) Für zwei Gruppen von vier beliebigen Punkten zweier Ebenen in R_3 ist dieser Satz von Grassmann Bd. 49, Crelle bewiesen worden. Der Beweis aber für diesen Fall ist viel einfacher als im allgemeinen Falle.

15. *Wir werden die Definition von Möbius über collineare und reciproke Gebilde des Raumes R_3 auch für die Gebilde im Raume R_n gebrauchen. Zwei m-dimensionale Räume S_m und S'_m heissen also collinear oder reciprok verwandt, wenn einem Punkte R_0 von S_m ein Punkt R_0' oder ein Raum R'_{m-1} von S'_m entspricht, so dass, wenn der Punkt R_0 ein Gebilde p^{ter} Stufe in S_m beschreibt, das entsprechende Element das entsprechende Gebilde p^{ter} Stufe von S'_m beschreibt.* — Es ist dann ohne Weiteres klar, dass 4 harmonischen Elementen eines Gebildes 1^{ter} Stufe von S_m 4 harmonische Elemente des entsprechenden Gebildes von S'_m entsprechen. Man kann auch leicht beweisen, dass, wenn zwei collineare Räume $S_m S'_m$ in einem Raume R_{m+1} liegen und alle Punkte ihres Schnittraumes S_{m-1}, oder auch, wenn sie ineinander liegen, alle Punkte eines beliebigen in ihnen enthaltenen Raumes S_{m-1}, entsprechend gemein haben, so liegen alle entsprechenden Punkte von S_m und S'_m in Geraden durch einen Punkt S_0, *so dass also die 2 Gebilde S_m und S'_m perspectivisch liegen;* S_0 ist dann das *perspectivische Centrum und S_{m-1} der Collineationsraum einer m-dimensionalen Perspectivität.*

Man kann auch folgenden Satz beweisen. Zwei Räume S_m, S'_m können auf einander reciprok bezogen werden, indem man zwei Gebilden $(m-1)^{ter}$ Stufe $R_0^{(1)} R_0^{(2)}$ von S_m zwei Gebilde $(m-1)^{ter}$ Stufe $R'^{(1)}_{m-1} R'^{(2)}_{m-1}$ von S'_m entsprechen lässt, so dass den $R_2 \cdots R_{m-2}$ durch die Gerade $R_0^{(1)} R_0^{(2)}$ die Räume $R_{m-3} \cdots R_0$ des Schnittraumes R'_{m-2} von $R'^{(1)}_{m-1} R'^{(2)}_{m-1}$ entsprechen. Daraus folgt, dass zwei Räume $S_m S'_m$ durch $m+2$ allgemein gelegene Paare von entsprechenden Elementen $R_0^{(1)}, \cdots, R_0^{(m+2)}$; $R'^{(1)}_{m-1}, \cdots, R'^{(m+2)}_{m-1}$ reciprok auf einander bezogen werden können.

Wir sagen ferner, dass zwei Gebilde m^{ter} Stufe um 2 Axen S_{n-m-1}, S'_{n-m-1} in R_n collinear oder reciprok auf einander bezogen sind, wenn sie von einem R_m in zwei collinearen oder reciproken Gebilden $S_m S'_m$ geschnitten werden; sie werden daher durch $m+2$ Paare entsprechender Elemente collinear oder reciprok auf einander bezogen. Nur im Falle, dass R_m eine Gerade ist, wenn also die Gebilde S_{n-m-1}, S'_{n-m-1} erster Stufe sind, tritt eine Besonderheit ein. Da ein Punkt der Gerade als duales Element in der Gerade den Punkt selbst hat, *so sehen wir, dass zwei projectivische Gebilde 1^{ter} Stufe in R_n gleichzeitig collinear und reciprok sind. Dies gilt nur für Gebilde 1^{ter} Stufe.* Z. B. zwei projectische Ebenenbüschel in R_3 können sowohl als collineare, wie auch als reciproke Gebilde 1^{ter} Stufe betrachtet werden.

Aus dem Vorhergehenden folgt: Wenn zwei collineare Gebilde S_m und S'_m 3 Punkte eines geraden Gebildes, 4 Punkte eines ebenen Gebildes u. s. w. entsprechend gemein haben, so haben sie das ganze Gebilde entsprechend gemein.

Wenn wir anstatt S_m' ein Gebilde S_{n-m-1}' betrachten, das zu S_m collinear ist, so gilt der analoge Satz. Wenn z. B. 4 Räume S_{n-m}' von S_{n-m-1}' durch 4 entsprechende Punkte eines Ebenengebildes von S_m gehen, so liegen alle Punkte des Gebildes in ihren entsprechenden Räumen S_{n-m}'. Das gilt aber nicht mehr, wenn das Gebilde S_{n-m-1} reciprok zu S_m ist, *es gilt dann nur, wenn* S_{n-m-1} *ein Gebilde* 1ter *Stufe ist, da dann die zwei Gebilde auch als collinear betrachtet werden können.* Ich mache auf diesen Umstand aufmerksam, denn es scheint mir, dass derselbe auch in Lehrbüchern der projectivischen Geometrie nicht genügend beachtet ist.*)

16. Zwei collineare Räume R_{n-1} in R_n sind durch $n+1$ Paare von Punkten bestimmt. Wir haben also nach dem Satze der Nr. 13.: *Zwei collineare Gebilde* $(n-1)$ter *Stufe* $S_{n-1}^{(1)}$, $S_{n-1}^{(2)}$ *in* R_n *lassen sich durch fortgesetztes Projiciren und Schneiden mittelst der Elemente eines dritten Gebildes* $(n-1)$ter *Stufe* $S_{n-1}^{(3)}$ *in einander überführen.*

Das gilt durchaus nicht für reciproke Gebilde, denn aus Projiciren und Schneiden kann man nur collineare Gebilde derselben Stufe erhalten. Es gilt wieder nur für reciproke Gebilde 1ter Stufe, da sie auch als collinear angesehen werden können.**)

§ 2.

In einander liegende collineare Räume.

17. Zwei collineare Räume $\Sigma_n \Sigma_n'$ in R_n können nur $n+1$ Punkte gemein haben, da sie durch $n+2$ beliebige Paare entsprechender Punkte bestimmt sind.***) Denken wir uns, es seien $A_0^{(1)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ die $n+1$ gemeinsam entsprechenden Punkte von Σ_n, Σ_n' und betrachten wir den Raum $A_{n-1}^{(1)}$, der durch die Punkte

---

*) Reye in der 2. Abtheilung seiner Geometrie der Lage p. 20 sagt: „Wenn zwei collineare oder *reciproke* räumliche Systeme (*im Raume* R_3) drei Elemente eines einförmigen Grundgebildes oder auch vier gleichartige Elemente *eines Grundgebildes der zweiten Stufe* entsprechend gemein haben, so haben sie *jedes Element dieses Grundgebildes entsprechend gemein*, was unserer obigen Bemerkung widerspricht.

**) Man kann diesen Satz als Definition der projectivischen Gebilde 1ter Stufe annehmen (wie z. B. in der projectivischen Geometrie von Cremona geschieht), nicht aber für projectivische Gebilde 2ter oder 3ter Stufe, denn sie schliesst dann die reciproken Gebilde aus und überdies muss man, wenn man in einem Lehrbuche der projectivischen Geometrie diese Definition für die collinearen Gebilde 3ter Stufe gebrauchen will, den Raum von 4 Dimensionen heranziehen.

***) Analytisch sieht man in der That, dass zwei collineare Räume $\Sigma_n \Sigma_n'$ in R_n immer $n+1$ Punkte entsprechend gemein haben, die theilweise oder alle imaginär sein können. Der letzte Fall kann nur eintreten, wenn n gerade ist.

$A_0^{(2)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ bestimmt wird. Im Allgemeinen haben Σ_n, Σ_n' mit $A_{n-1}^{(1)}$ nur die n Punkte $A_0^{(2)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ entsprechend gemein; haben sie noch einen anderen Punkt in diesem Raume entsprechend gemein, so werden sie alle Punkte von $A_{n-1}^{(1)}$ gemein haben, und daher auch das Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe um $A_0^{(1)}$. Alle entsprechenden Punkte $P_0 P_0'$ liegen daher in Geraden durch $A_0^{(1)}$, während die entsprechenden Räume $P_{n-1} P_{n-1}'$ etc. in Räume P_{n-2} von $A_{n-1}^{(1)}$ sich schneiden, d. h. *die Gebilde $\Sigma_n \Sigma_n'$ liegen perspectivisch.* Man sieht auch leicht, dass $A_0^{(1)} P_0 P_0'$ und der Schnittpunkt dieser Geraden mit $A_{n-1}^{(1)}$ ein constantes Doppelverhältniss bilden, die als *Charakteristik* der n-dimensionalen Perspectivität bezeichnet werden kann. Ist die Charakteristik $= -1$, so erhält man eine involutorische Perspectivität oder *Involution.*

Wir wollen uns die $n+1$ Punkte $A_0^{(1)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ in zwei Räume, bez. von einer und von $(n-2)$ Dimensionen, vertheilt denken, die wir mit den Symbolen $A_1^{(12)}$ und $A_{n-2}^{(12)}$ bezeichnen. Haben die beiden Gebilde $\Sigma_n \Sigma_n'$ mit dem Raume $A_{n-2}^{(12)}$ und mit der Geraden $A_1^{(12)}$ mehr als $n-1$ respective 2 Punkte gemein, so haben sie die ganzen Gebilde $A_{n-2}^{(12)}$ und $A_1^{(12)}$ entsprechend gemein. Irgend zwei entsprechende Punkte $P_0 P_0'$ liegen in einer Geraden, die $A_1^{(12)}$ und $A_{n-2}^{(12)}$ schneidet. Dabei ist das Doppelverhältniss $P_0 P_0' A_1^{(12)} A_{n-2}^{(12)}$ für zwei beliebige entsprechende Punkte constant; dasselbe kann als *Charakteristik dieser Collineation 2^{ter} Species* bezeichnet werden. Wenn die *Charakteristik* -1 ist, so haben wir eine *involutorische Collineation 2^{ter} Species.*

Wenn wir so fortfahren, so haben wir den Satz: *Wenn $n = 2r-1$ (oder $n = 2r$) ist, so giebt es in R_n r Collineationen bezüglich von der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \cdots, r^{\text{ten}}$ Species, indem respective alle Punkte zweier dualen Räume, d. h. A_0, A_{n-1}; A_1, A_{n-2}; $\cdots$; A_{r-1}, A_{r-1} (oder A_{r-1}, A_r) den beiden collinearen Räumen $\Sigma_n \Sigma_n'$ gemein sind. Die Gerade zweier entsprechenden Punkte $P_0 P_0'$ trifft die beiden Grundräume z. B. in $S_0 R_0$, und die vier Punkte $P_0 P_0' S_0 R_0$ bilden ein constantes Doppelverhältniss, die Charakteristik der Collineation.*

Ist die Charakteristik -1, so ist die Collineation involutorisch. Ist sie gleich einer m^{ten} primitiven Einheitswurzel, so ist die Collineation eine cyklische der Ordnung m).*

18. Es ist bekannt, dass im Raume R_3 das Doppelverhältniss der 4 Schnittpunkte einer Geraden mit den Seitenflächen eines Tetraeders

---

*) Die verschiedenen Fälle, die für zwei in einander liegende collineare Gebilde vorkommen können, können erschöpfend mit Hülfe der sogenannten *Elementartheiler* von Weierstrass behandelt werden (Weierstrass, Monatsber. der Berliner Akad. 1858, 1868); die Beispiele des Textes geben nur die wichtigsten Fälle.

gleich ist dem Doppelverhältnisse der 4 Ebenen, die durch die Gerade und die Ecken des Tetraeders gehen. Ein analoger Satz findet in jedem Raume R_{2m+1} statt. Man hat nämlich:

*Jeder Raum R_m schneidet eine $(2m+2)$-eckige Pyramide in R_{2m+1} in einer Configuration, die reciprok der Configuration ist, welche durch die Projection derselben Pyramide aus R_m entsteht.**)

Abschnitt III.

$(n-1)$-dimensionale Flächen 2ten Grades: F^2_{n-1}.

§ 1.

Erzeugung einer F^2_{n-1} durch zwei ineinander liegende reciproke Gebilde n^{ter} Stufe.

19. Es seien zwei reciproke Gebilde n^{ter} Stufe Σ_n, Σ_n' in R_n gegeben, so beweist man leicht, dass alle Punkte $(P_0 Q_0')$, die in ihren entsprechenden Räumen P'_{n-1} oder Q_{n-1} liegen, eine $(n-1)$-dimensionale Fläche F^2_{n-1} erfüllen, welche *Polfläche* der 2 reciproken Gebilde genannt werden kann. Die Räume P'_{n-1} oder Q_{n-1} umhüllen dann eine andere $(n-1)$-dimensionale Fläche 2ter Classe, die als *Polarfläche* bezeichnet werden mag.

Wenn die reciproken Gebilde eine Involution oder ein sogenanntes *Polarsystem* bilden, d. h. wenn jedem Punkte P_0 in R_n derselbe Raum P_{n-1} in Σ_n wie in Σ_n' entspricht, so hat man in jeder Geraden g_1 eine Involution, anstatt zweier allgemeinen projectivischen Reihen, wie im allgemeinen Falle; und die Doppelpunkte derselben gehören der Polfläche an. Zieht man aus einem Punkte P_0 alle möglichen Geraden, so schneiden dieselben die Polfläche in zwei Punkten und der vierte harmonische Punkt P_0' von P_0 in Bezug auf dieselben erfüllt den Raum P_{n-1}, den wir als *Polarraum* des Punktes P_0 in Bezug auf die Polfläche bezeichnen können. Die Berührungspunkte der von P_0 an die Polfläche gehenden Tangenten liegen natürlich auch in dem Polarraume P_{n-1}, und da dieser Raum die Polfläche in einer $(n-2)$-dimensionalen Fläche F^2_{n-2} schneidet, so sehen wir, dass alle Tangenten durch P_0 an die Fläche einen $(n-1)$-dimensionalen P_0-Kegel 2ter Ordnung bilden. Die Begriffe Polfläche und Polarfläche

---

*) Man kann diesen Satz beweisen, indem man eine Reciprocität bestimmt, bei welcher den Ecken der Pyramide die gegenüberliegenden Räume R_{2m} entsprechen, und so, dass den Punkten von R_m die durch R_m hindurchgehenden $2m$-dimensionalen Räume eindeutig entsprechen.

fallen daher zusammen, *d. h. eine* $(n-1)$*-dimensionale Fläche* 2^{ter} *Ordnung ist auch der zweiten Classe.* Man sieht auch leicht: *Ein Raum* R_m *schneidet die* $(n-1)$*-dimensionale Fläche* 2^{ten} *Grades* F^2_{n-1} *in einer Fläche* F^2_{m-1}, *in welchem die* F^2_{n-1} *von dem entsprechenden* $(n-1)$*-dimensionalen* R_{n-m-1}*-Kegel* 2^{ter} *Ordnung des Polarraumes* R_{n-m-1} *von* R_m *berührt wird.* Man beweist ebenfalls, *dass jeder Tangentialraum* R_{n-1} *der Fläche* F^2_{n-1} *dieselbe in einem* $(n-2)$*-Kegel* 2^{ter} *Ordnung schneidet, dessen Scheitel der Berührungspunkt ist. Alle Erzeugenden des Kegels gehören der Fläche* F^2_{n-1} *selbst.**)

Man muss natürlich beweisen, dass wirklich 2 reciproke Gebilde $\Sigma_n \Sigma_n'$ ein *Polarsystem* bilden können. Es ist aber leicht zu sehen, dass ein Polarsystem durch $n+1$ Ecken einer Fundamentalpyramide in R_n $A_0^{(1)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ und deren Räume $A^{(1)}_{n-1}, \cdots, A^{(n+1)}_{n-1}$, wo z. B. $A^{(1)}_{n-1} \equiv A_0^{(2)}, \cdots, A_0^{(n+1)}$ ist, und noch durch ein beliebiges Paar entsprechender Elemente P_0 und P_{n-1} bestimmt wird.

20. Eine Pyramide, wie sie soeben betrachtet wurde, nennen wir in Bezug auf die Kernfläche 2^{ten} Grades F^2_{n-1} des Polarsystems *conjugirt.*

Wenn man einen Punkt P_0 und seinen Polarraum P_{n-1} in Bezug auf F^2_{n-1} betrachtet, so schneidet P_{n-1} die F^2_{n-1} in einer F^2_{n-2}; jede n-eckige conjugirte Pyramide von F^2_{n-2} giebt mit P_0 verbunden eine conjugirte Pyramide im Bezug auf F^2_{n-1}. Wir haben daher in P_0 n Kanten der Pyramide, die ein *Entupel conjugirter Geraden in Bezug auf die* F^2_{n-1} *bilden,* indem wir als Conjugirte einer gegebenen Geraden g_1 diejenigen bezeichnen, die den Polarraum G_{n-2} von g_1 schneiden.

Wir haben also um P_0 so viele Entupeln conjugirter Geraden, als es n-eckige conjugirte Pyramiden in Bezug auf die F^2_{n-2} giebt.

Wenn insbesondere P_0 der Pol des unendlichen fernen Raumes P_{n-1} ist, so wird er das *Centrum der Fläche* sein, und die Entupeln conjugirter Geraden um P_0 nennen wir dann *Entupeln conjugirter Durchmesser der* F^2_{n-1}. Einem Durchmesser g_1 der Fläche entspricht ein Raum G_{n-2}, der ganz im Unendlichen liegt.

Man sieht auch, dass zwei parallele Räume R_m, die F^2_{n-1} in ähnlichen $(m-1)$-dimensionalen Flächen 2^{ten} Grades schneiden.

---

*) Ich halte diese Erzeugung als Definition der Fläche 2^{ten} Grades für besser als die durch 2 reciproke Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$; denn so ziehen wir auch die imaginären F^2_{n-1} heran. Wir werden aber später auch die Erzeugung der F^2_{n-1} durch 2 beliebige reciproke Gebilde m^{ter} Stufe, wo $m < n$ ist, kennen lernen.

§ 2.

Die $(n-1)$-dimensionale Kugel und die Definition der Perpendicularität.

21. Wenn alle Durchmesser einer F^2_{n-1} einander gleich sind*), so nennt man die F^2_{n-1} eine $(n-1)$-*dimensionale* Kugel und das zugehörige Polarsystem kann als *ein n-dimensionales sphärisches Polarsystem* bezeichnet werden. Die $(n-1)$-dimensionale Kugel bestimmt im Unendlichen ein $(n-1)$-dimensionales sphärisches Polarsystem, das eine imaginäre $(n-2)$-dimensionale Fläche 2ten Grades bestimmt, *die wir als die unendlich ferne imaginäre Kugel J^2_{n-2} benennen wollen.*

So sieht man, dass jeder Raum R_m durch das Centrum, und daher auch jeder Raum R'_m, der zu diesem parallel ist, die $(n-1)$-dimensionale Kugel in einer $(m-1)$-dimensionalen Kugel schneidet, deren Polarsystem durch das Polarsystem der ersten mitbestimmt ist.

Jetzt geben wir folgende Definition der Perpendicularität der Räume:

Wenn zwei Räume R_m und R'_m in keinem niedrigeren Raume als R_n gegeben sind, so bestimmen sie im Unendlichen des R_n zwei Räume R_{m-1}, R'_{m-1}, die in Bezug auf die imaginäre Kugel J^2_{n-2} des R_n zwei Polarräume R_{n-m-1}, R'_{n-m-1} haben. Die zwei Räume R_m und R'_m sind zu einander senkrecht, wenn der Raum R_{m-1} in dem Raume R'_{n-m-1} enthalten ist oder durch ihn geht. Wenn dagegen R_m und R'_m in einem niedrigeren Raume R_p als R_n gegeben sind, so gilt die entsprechende Definition für R_p, indem man das unendlich ferne sphärische Polarsystem von R_p betrachtet.

Wenn man ein Entupel conjugirter Durchmesser der $(n-1)$-dimensionalen Kugel betrachtet, so sieht man aus der vorigen Definition, dass sie zu einander senkrecht sind, und dass *jeder Raum R_m, der durch m conjugirte Durchmesser eines Entupels der Kugel geht, und jeder Raum R_s, der durch eine beliebige Anzahl der übrigen $n-m$ Durchmesser bestimmt wird, zu einander senkrecht sind.***)

---

*) Ich nehme die Definition der Länge der gewöhnlichen Geometrie in der Ebene oder in R_3 an.

**) Bemerkung. Wir können mit Hülfe der Perpendicularität auch die *Umklappung* von zwei Räumen R_{n-1}, R'_{n-1} in R_n ausführen. Es genügt, von einem Punkte P_0' von R'_{n-1}, die senkrechte Ebene P_2 zu dem Schnittraume R_{n-2} von R_{n-1}, R'_{n-1} zu ziehen, die R_{n-2} in einem Punkte R_0 trifft. Wenn wir das für alle Punkte des R'_{n-1} machen, und wir lassen diese Punkte in den entsprechenden senkrechten Ebenen P_2 in einem Kreise mit dem Radius R_0P_0' sich gleichförmig bewegen, so sagen wir, dass der Raum R'_{n-1} um R_{n-2} sich *dreht.* Schliesslich, wenn einer der Punkte P_0' des R'_{n-1} in R_{n-1} fällt, so ist der ganze Raum R'_{n-1} in R_{n-1} umgeklappt.

§ 3.

Büschel von $(n-1)$-dimensionalen Flächen F^2_{n-1}, speciell von einer F^2_{n-1} mit einer Kugel K^2_{n-1}.

22. Es ist leicht zu beweisen, dass im Allgemeinen zwei Polarsysteme des R_n eine conjugirte Pyramide gemein haben. Die beiden F^2_{n-1} der beiden Polarsysteme können verschiedene Lagen gegen ihre conjugirte Pyramide haben. Wir betrachten nur die allgemeinen Fälle*) und haben:

Wenn die $(n-1)$-dimensionalen Flächen zweiten Grades zweier Polarsysteme zwei reciproke Räume $A_m^{(1,2,\ldots m)}$, $A_{n-m-1}^{(m+1,\ldots n+1)}$ ihrer conjugirten Pyramide in denselben $(m-1)$ und $(n-m-2)$-dimensionalen Flächen zweiten Grades schneiden, so haben sie auch die $(n-1)$-dimensionalen Berührungskegel, deren Scheitelräume $A_m^{(1,2,\ldots m)}$, $A_{n-m-1}^{(m+1,\ldots,n+1)}$ sind, gemein. Sie haben noch unendlich viele conjugirte Pyramiden gemein, deren Ecken respective in den beiden Räumen $A_m^{(1,2,\ldots m)}$, $A_{n-m-1}^{(m+1,\ldots,n+1)}$ enthalten sind.

Im allgemeinen Falle schneiden sich die beiden Flächen zweiten Grades in einer $(n-2)$-dimensionalen Fläche vierter Ordnung. In dem durch zwei Flächen bestimmten Büschel giebt es $(n+1)$ R_0-Kegel von $n-1$ Dimensionen, deren Scheitel in den Ecken der conjugirten Pyramide liegen und deren Erzeugenden die F^4_{n-2} in zwei Punkten schneiden.

*Wenn in zwei Räumen R_{n-1} zwei $(n-2)$-dimensionale Flächen zweiten Grades liegen, die eine $(n-3)$-dimensionale Fläche in dem Schnittraume R_{n-2} der gegebenen Räume R_{n-1} gemein haben, so geht durch sie ein Büschel von $(n-1)$-dimensionalen Flächen zweiten Grades.***)

---

*) Nach dem Bezout'schen Theoreme weiss man, dass zwei $(n-1)$-dimensionale Flächen F^m_{n-1}, $F^{m'}_{n-1}$ sich in einer $(n-2)$-dimensionalen Fläche $F^{mm'}_{n-2}$ schneiden. Man findet auch, *dass, wenn s Flächen $F^{m^{(1)}}_{a^{(1)}}$ $F^{m^{(2)}}_{a^{(2)}}$, ... $F^{m^{(s)}}_{a^{(s)}}$ gegeben sind und die beiden ersten einem Raume R_{n-d}, die drei ersten einem Raume R_{n-d_1} u. s. w. angehören, so schneiden sie sich in einer Fläche von: $\Sigma d_k + \Sigma a^{(i)} - sn$ Dimensionen und von der Ordnung $m^{(1)} \cdot m^{(2)} \cdot m^{(3)} \ldots m^{(s)}$, wo einige d verschwinden können und wo $i = 1, 2, \ldots s$ und $k = 0, 1, \ldots s-3$* zu nehmen ist.

**) *Bemerkung.* Die Zahl der Punkte, die eine F^m_{n-1} in R_n bestimmen, ist

$$\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{n!} - 1 = G_{(m)}.$$

Für die Flächen zweiten Grades ist

$$G_{(2)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2},$$

23. Wir betrachten jetzt eine F^2_{n-1} und eine mit ihr concentrische Kugel K^2_{n-1}. Da ihre unendlich fernen Polarsysteme eine n-eckige conjugirte Pyramide gemein haben, *so sehen wir, dass die F^2_{n-1} im Allgemeinen ein Entupel, aber nur ein Entupel senkrechter conjugirter Durchmesser besitzt. Diese Durchmesser nennen wir die Axen der F^2_{n-1}, und die Räume, die durch sie gehen, Haupträume der Fläche.*

Die F^2_{n-1} und die Axen derselben können aus einem Entupel conjugirter Durchmesser, die in Grösse und Richtung durch das Centrum C_0 der Fläche gegeben sind, construirt werden.

Denn es genügt, zu jedem Raume R_{n-1} durch das Centrum C_0 der Fläche den conjugirten Durchmesser R_1 und die senkrechte Gerade N_1 zu ziehen, dann bilden R_1 und N_1 um C_0 zwei Gebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe, welche n *Strahlen* gemein haben, die eben die *Axen* sind. Wie man leicht sieht, ist die Beziehung dieser zwei Gebilde um C_0 mit Hülfe des gegebenen Entupels von conjugirten Durchmessern in der That bestimmbar.

24. Die unendlich ferne Fläche F^2_{n-2} und J^2_{n-2} der F^2_{n-1} und der K^2_{n-1} haben eine Fläche F^4_{n-3} gemein. Jede im Unendlichen gelegene Gerade, die diese Fläche zweimal schneidet, ist die unendlich ferne Gerade von ∞^{n-2} Ebenen des R_n, welche F^2_{n-1} in *Kreisen* schneiden. Da die F^4_{n-3} von den n-Ecken der conjugirten Pyramide von F^2_{n-2} und J^2_{n-2} durch Geraden projicirt wird, die sie zweimal schneiden, so sehen wir, *dass alle Ebenen, die durch jede Axe einer allgemeinen* $(n-1)$-*dimensionalen Fläche F^2_{n-1} gehen und diese in einem Kreise schneiden, einen* $(n-1)$-*dimensionalen Kegel zweiter Ordnung umhüllen.*

Die im Unendlichen gelegene F^4_{n-3} kann im Besonderen zerfallen, und aus den verschiedenen Fällen, die entstehen können, erhält man $(n-1)$-dimensionale Flächen zweiten Grades, *deren metrische Eigenschaften verschieden sind.*

25. *Wir betrachten als Beispiel die $F_3{}^2$ in R_4.*

Sie schneidet den unendlich fernen Raum in einer $F_2{}^2$, welche die imaginäre Kugel $J_2{}^2$ in einer Curve C^4 trifft. *Im Allgemeinen also giebt es keinen Raum R_3 des R_4, der die $F_3{}^2$ in einer Kugel schneidet.*

Die C^4 kann aber auch in zwei Kreise zerfallen. Dann giebt es nur zwei Kegel zweiter Ordnung, die beide Kreise enthalten; ihre

---

d. h. gleich der Anzahl der Punkte, die eine Curve $n$ter Ordnung in der Ebene bestimmen. Allgemein findet man so auch

$$G_{(m)} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!} - 1.$$

Scheitel M_0 M_0' liegen in der conjugirten Geraden der Schnittlinie der Ebenen der beiden Kreise im Bezug auf J_2^2 oder F_2^2. — In diesem Falle berühren zwei Axen der F_3^2 die Fläche selbst im Unendlichen, während die beiden andern Axen durch M_0 M_0' gehen.

Es giebt also eine F_3^2 in R_4, die vier Axen $a_1^{(1)}$ $a_1^{(2)}$ $a_1^{(3)}$$a_1^{(4)}$ hat, von denen zwei $a_1^{(1)}$ $a_1^{(2)}$ die Fläche im Unendlichen berühren. Es giebt zwei Richtungen von Räumen R_3, welche die F_3^2 in Kugeln schneiden. Die beiden Räume R_3, welche durch das Centrum der F_3^2 und parallel zu den genannten Richtungen verlaufen, bilden mit den beiden Haupträumen R_3, die als $a_1^{(1)}$ $a_1^{(2)}$ $a_1^{(3)}$, $a_1^{(1)}$ $a_1^{(2)}$ $a_1^{(4)}$ zu bezeichnen sind, eine harmonische Gruppe.

Die F_2^2 und die J_2^2 können sich auch längs eines Kreises berühren; sie haben dann unendlich viele Polartetraeder gemein. *In diesem Falle ist die F_3^2 eine Rotationsfläche zweiten Grades um eine Axe a_1*: um die Axe, die den Mittelpunkt von F_3^2 mit dem Scheitel des gemeinsamen Berührungskegels von F_2^2 und J_2^2 verbindet.*)

Die Flächen F_2^2 und J_2^2 können sich auch in einem windschiefen Vierseite schneiden. Dann haben sie wieder unendlich viele Polartetraeder gemein, deren Ecken in zwei Geraden $R_1 R_1'$ liegen, d. h.: in den übrigen Kanten des Tetraeders, das durch das Vierseit bestimmt wird. *In diesem Falle ist die F_3^2 eine Rotationsfläche zweiten Grades in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Ebenen $R_2 R_2'$, deren unendlich ferne Geraden $R_1 R_1'$ sind. Wenn man die Rotation um R_2 ausführt, so beschreibt jeder Punkt einen Kreis, dessen Ebene durch R_1' geht, und umgekehrt.*

Die F_2^2 und J_2^2 können sich auch in einer Geraden und in einer C^3 schneiden, was wir nicht näher unternehmen.

§ 4.

Anzahl der linearen Räume, die in einer $(n-1)$-dimensionalen F^2_{n-1} enthalten sind. Erzeuguug derselben durch reciproke Gebilde.

26. Wir wollen jetzt die Anzahl der Räume bestimmen, die in einer $(n-1)$-dimensionalen Fläche zweiten Grades liegen können. Zu diesem

*) Die *Bewegung* um eine Axe a_1 oder um eine Ebene E_2 in R_4 kann mit Hülfe der Perpendicularität ausgeführt werden. Wir ziehen durch einen Punkt P_0 den senkrechten Raum R_3 zu a_1, der a_1 in einem Punkte P_0' trifft. In der Bewegung um a_1 wird P_0 eine 2-dimensionale Kugel mit dem Centrum P_0' beschreiben, die in R_3 enthalten ist — oder wenn es sich um die *Rotation* um eine Ebene E_2 handelt, so beschreibt der Punkt P_0 einen Kreis, dessen Centrum P_0' in E_2 liegt und zwar in dem Schnittpunkte der senkrechten Ebene, die man von P_0 zu E_2 ziehen kann und die mit E_2 nicht in dem Raume $P_0 E_2$ liegt; und dessen Ebene die senkrechte Ebene selbst ist. —

Zwecke brauchen wir die *stereographische Projection*, d. h. wir projiciren die F^2_{n-1} aus einem ihrer Punkte P_0 in denjenigen Tangentialraum S_{n-1}, der zu dem Tangentialraume in P_0 parallel ist.*)

Betrachten wir zuerst eine $F_3{}^2$ in R_n und projiciren wir sie von einem ihrer Punkte P_0 auf den Tangentialraum S_3, der zu dem Tangentialraume P_3 in P_0 parallel ist. S_3 und P_3 schneiden sich in einer unendlich fernen Ebene, welche die $F_3{}^2$ in einem Kegelschnitte $K_1{}^2$ trifft. Verbinden wir die Punkte dieses Kegelschnittes mit P_0, so bekommen wir einen 2-dimensionalen Kegel zweiter Ordnung, dessen Erzeugenden in der $F_3{}^2$ selbst liegen. Dieser Kegelschnitt kann nicht in zwei Geraden zerfallen, denn sonst wäre die unendlich ferne Ebene Tangentialebene an die Fläche, was nicht möglich ist. Jede Gerade g_1 von $F_3{}^2$ wird aus P_0 in eine Gerade g_1' von S_3 projicirt, die den Kegelschnitt $K_1{}^2$ trifft. Denn die Ebene durch P_0 und g_1 schneidet die $F_3{}^2$ in einer andern Geraden, die durch P_0 geht und die parallel zu g_1' ist. Umgekehrt jede Gerade g_1' in S_3, die $K_1{}^2$ trifft, ist die Projection einer und nur einer Geraden der $F_3{}^2$, die nicht durch P_0 geht. Zweien solchen Geraden g_1', die sich in einem endlichen Punkte A_0' von S_3 treffen, entsprechen zwei Geraden von $F_3{}^2$, die sich in einem Punkte A_0 schneiden. Wir sehen also, dass *die Geraden der* $F_3{}^2$ *eine* ∞^3*-fache Mannigfaltigkeit bilden.*

Wenn drei beliebige Geraden der $F_3{}^2$ gegeben sind, die nicht in einem R_3 liegen und sich nicht schneiden, so haben sie nur eine Transversale, die auch in der Fläche liegt. In der That, der Raum R_3, der durch zwei derselben bestimmt ist, trifft die dritte in einem Punkte A_0, und wenn wir von diesem Punkte die Transversale zu den beiden ersten ziehen, so ist eben diese die gewünschte Gerade. Man hat also:

Wenn ein Quadrupel von vier beliebigen geraden Linien einer $F_3{}^2$ *derart gegeben ist, dass sich die Geraden zu zwei und zwei nicht schneiden und auch nicht zu drei und drei in einem Raume* R_3 *liegen, so bestimmt dasselbe vier Transversalen, die auch in der* $F_3{}^2$ *liegen und die das zu dem ersten complementäre Quadrupel bilden. Wenn fünf beliebige Geraden der* $F_3{}^2$ *gegeben sind, so kann man in dieser Weise beliebige viele andere Geraden der* $F_3{}^2$ *construiren.*

*) In verschiedenen Aufsätzen der Comptes Rendus (siehe z. B. t. LXIX „Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques), sowie in seinem Buche: „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques (Paris 1873)“ hat Darboux die stereographische Projection der F_{n-1}^2 in einen R_{n-1} für *metrische* Geometrie benutzt; desgleichen Lie in den Göttinger Nachrichten 1871, 1872, sowie Klein im V. Bande der mathem. Annalen (Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie), oder Göttinger Nachrichten 1872 (Ueber einen liniengeometrischen Satz).

Da eine F_3^2 in R_n durch 14 beliebige Punkte bestimmt wird (siehe Bemerkung Nr. 24.), so kann man 12 von diesen Punkten drei zu drei in vier beliebigen Geraden wählen. Das Quadrupel dieser Geraden hat ein complementäres Quadrupel von vier Geraden, die auch in der F_3^2 liegen. *Somit sind die acht Geraden zweier complementären Quadrupel der vollständige Durchschnitt von drei Flächen F_3^2.*

27. Wenn wir jetzt eine F_4^2 in R_5 stereographisch von einem ihrer Punkte P_0 in den Tangentialraum S_4 projiciren, der zu dem Tangentialraum P_4 in P_0 parallel ist, so bekommen wir im Unendlichen eine F_2^2 (d. h. in dem Schnittraume von S_4 und P_4), die kein Kegel sein kann. Hieraus schliessen wir, dass die F_4^2 keinen Raum R_3 enthält.*)

Wenn wir die zwei Systeme von Geraden von F_2^2 mit P_0 verbinden, so erhalten wir die zwei Systeme von Ebenen des 3-dimensionalen Kegels P_0, der zur Fläche F_4^2 gehört. Jede Gerade g_1 von F_4^2 wird in S_4 in eine Gerade g_1' projicirt, welche die unendlich ferne Fläche F_2^2 schneidet, und umgekehrt. Eine Ebene G_2 von F_4^2 wird von P_0 in eine Ebene G_2' von S_4 projicirt, die durch eine Gerade der F_2^2 geht. Umgekehrt, jede Ebene G_2' von S_4, welche die F_2^2 in einer Geraden schneidet, ist die Projection einer einzigen Ebene G_2 von F_4^2, die nicht durch P_0 geht. Zwei Ebenen G_2' von S_4, die sich in einem im Endlichen gelegenen Punkte A_0' treffen und überdies die F_2^2 in zwei Geraden desselben Systems schneiden, entsprechen zwei Ebenen G_2 der F_4^2, die sich nur in einem Punkte A_0 schneiden; dagegen zwei Ebenen G_2', die sich in einer Geraden schneiden (und also die F_2^2 in zwei Geraden von verschiedenen Systemen treffen), entsprechen zwei Ebenen der F_4^2, die eine Gerade gemein haben. Die Zahl der Ebenen durch eine Gerade in R_4 ist ∞^2 und die Zahl der Geraden von F_2^2 ist $2\infty^1$, daher besitzt die F_4^2 zwei Systeme von ∞^3 Ebenen.**)

Wenn wir eine F_5^2 in R_6 betrachten, so haben wir im Unendlichen eine F_3^2, die ∞^3 Gerade hat, und da die Zahl aller Ebenen durch eine Gerade R_5 ∞^3 ist, so hat die F_5^2 $\infty^{3.3} = \infty^9$ Ebenen. Sie kann keinen höheren Raum enthalten.

Das Gesetz ist evident, und wir können daher sagen:

Im Allgemeinen enthält die $(2m-1)$-dimensionale Fläche zweiten Grades in R_{2m} ein System von

---

*) Das Studium der projectivischen Eigenschaften der F_4^2 in R_5 ist nach Klein (Mathem. Annalen V, p. 263) ohne Weiteres für Liniengeometrie zu verwerthen und also für projectivische Geometrie des gewöhnlichen R_3 sehr wichtig.

**) Cayley hat diese zwei Systeme von Ebenen der F_4^2 bereits in einer Note: On the superlines of a Quadric surface in five-dimensional space. Quartely XII, 1873, betrachtet.

$$\infty^3 \cdot \infty^{3.4.5\ldots(m-1)n}$$

Räumen R_{m-1}, dagegen die $2m$-dimensionale Fläche zweiten Grades in R_{2m+1} zwei Systeme von

$$\infty^3 \cdot \infty^{3.4\ldots m(m-1)}$$

Räumen R_m. Diese Flächen können keinen höheren Raum enthalten, ohne in einen Kegel auszuarten. Für $m = 1$ hat die F_2^2 nur $2\infty^1$ R_1, wie bekannt.

Man sieht auch aus dem Vorhergehenden, dass ein R_0-Kegel zweiter Ordnung in R_4 und von drei Dimensionen zwei Systeme von Ebenen, ein 4-dimensionaler R_0-Kegel zweiter Ordnung in R_5 nur Ebenen und zwar ∞^3 besitzt u. s. w.

Im Allgemeinen hat ein $(2m - 2)$-dimensionaler R_0-Kegel zweiter Ordnung im Raume R_{2m-1} oder ein $(2m - 1)$-dimensionaler R_0-Kegel zweiter Ordnung in R_{2m} nur Räume R_m, andernfalls artet er aus.

28. Wir wollen über die Erzeugung der F_{n-1}^2 durch reciproke Gebilde nur die Sätze mittheilen.

Betrachten wir zwei projectivische Büschel von Räumen R_{n-1} um $S_{n-2}^{(1)}$, $S_{n-2}^{(2)}$. Diese können sowohl als reciproke wie auch als collineare Gebilde angesehen werden. Wir haben:

Zwei collineare (oder reciproke) Gebilde erster Stufe, deren Axen zwei Räume $S_{n-2}^{(1)}$, $S_{n-2}^{(2)}$ sind, erzeugen einen $(n - 1)$-dimensonalen Kegel zweiter Ordnung, dessen Scheitel ein Raum S_{n-4} ist.

Wenn wir zwei beliebige reciproke Gebilde nehmen, deren Axen $S_p^{(1)}$, $S_p^{(2)}$ sich nirgendwo schneiden, so haben wir folgenden Satz:

Die $(n - 1)$-dimensionale Fläche zweiten Grades in R_n wird durch zwei beliebige reciproke Gebilde erzeugt, deren Axen $S_p^{(1)}$, $S_p^{(2)}$ sich nirgendwo schneiden und übrigens ganz beliebig in der Fläche liegen $\left(p \leqq \frac{n-1}{2}\ \text{oder} \leqq \frac{n}{2} - 1\right)$.

Wenn eine einzige Gerade der Fläche reell ist, so sind alle Räume $R_1, R_1, \ldots, R_{\frac{n-1}{2}}$ oder $R_1, \ldots, R_{\frac{n}{2}-1}$ der Fläche reell.

Wenn die zwei Axen $S_p^{(1)}$, $S_p^{(2)}$ in einem Raume S_q sich schneiden, so erzeugen die beiden reciproken Gebilde einen $(n - 1)$-dimensionalen S_q-Kegel zweiter Ordnung. —

§ 5.

Polarfiguren in Bezug auf eine $(n - 1)$-dimensionale F_{n-1}^2.

29. Betrachten wir eine $(n + 1)$-eckige Fundamentalpyramide in R_n. Wir können die Ecken und die gegenüberliegenden Räume R_{n-1} als entsprechende Elemente eines Polarsystems ansehen. Es giebt dann

∞^n reelle Polarsysteme (in denen jedem reellen Elemente ein reelles entspricht), die die Fundamentalpyramide als conjugirt gemein haben.

Es sei dagegen eine Pyramide von N Räumen $1, 2, \ldots, N$, wo $N \leqq 2n$ ist, gegeben, so nennen wir sie *polar* in Bezug auf eine Fläche F^2_{n-1}, wenn jedem Punkte der Pyramide z. B. $1, 2, 3, \ldots, n$, ein Polarraum entspricht, der durch den Raum geht, in welchem sich die übrigen Räume $n+1, \ldots, N$ schneiden. Es ist dann leicht, folgenden Satz zu beweisen:

Es giebt $m-1$ Polarfiguren eines Raumes R_m, die aus einer Fundamentalpyramide der Räume $R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots, R_{2m-1}$ durch Schneiden mit R_m entstehen. Sie sind Polarfiguren in Bezug auf ∞^{m+1}, $\infty^{m+2}, \ldots, \infty^{2m-1}$ F^2_{m-1}.

30. Es sei wieder eine $(n+1)$-eckige Pyramide in R_n gegeben. Schneiden wir sie mit einem Raume S_{n-1}, so erhalten wir in S_{n-1}, wie es aus Nr. 6. hervorgeht, wenn man $N = n+1$, $r = n-1$ setzt, eine Figur von

$$\frac{n(n+1)}{2} R_0, \quad \frac{n(n+1)(n-1)}{2} R_1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2} R_{n-3}, \quad n+1 \; R_{n-2},$$

so dass in dieser Figur jeder Punkt einem Raume R_{n-3} complementär ist. Durch jeden R_0 gehen $n-1$ $R_1, \ldots,$

$$\frac{(n-1)\cdots(n-m)}{(m-1)!} R_m, \text{ etc.}, \frac{(n-1)(n-2)}{2} R_{n-3}, \quad n-1 \; R_{n-1}.$$

In jedem R_1 liegen $3\,R_0$ etc., in jedem R_{n-2} $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ R_0.

Nun schneiden wir mit S_{n-1} auch alle ∞^n F^2_{n-1}, in Bezug auf welche die Fundamentalpyramide in R_n sich selbst conjugirt ist. So erhalten wir in S_{n-1} ∞^n F^2_{n-2}, welche die Schnittfigur A als Polarfigur haben. Greifen wir eine solche F^2_{n-2} heraus und bezeichnen wir die $n+1$ Räume R_{n-2} der Figur A mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n+1$. Der Punkt R_0, der durch die Räume $1, 2, \ldots, n-1$ bestimmt wird, hat in Bezug auf die gewählte Fläche F^2_{n-2} einen Polarraum R_{n-2}, der durch den Schnittraum R_{n-3} geht, der in der Figur A zu dem Punkte $1, 2, \ldots, n-1$ complementär ist, d. h. durch denjenigen Raum R_{n-3}, der durch die übrigen Räume R_{n-2}, nämlich n und $n+1$, gegeben ist. Wenn wir das für alle Punkte R_0 von A machen, so erhalten wir die polarreciproke Figur von A in Bezug auf F^2_{n-2}, die also aus $\frac{n(n+1)}{2}$ R_{n-2} besteht, welche eine $(n+1)$-eckige Pyramide in S_{n-1} bilden. Die $n+1$ Ecken liegen natürlich in $\frac{n(n+1)}{2}$ Geraden, die den Räumen R_{n-3} der Figur A entsprechen. In dem Raume $n, n+1$

z. B. liegen, nach dem Vorhergehenden, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ R_0 der Figur A. Die Polarräume R_{n-2} dieser Punkte in Bezug auf F^2_{n-2} gehen durch die Polargerade des Raumes $R_{n-3}: n, n+1$, welche zwei Ecken der reciproken Figur verbindet, die wir als $\bar{n}, \overline{n+1}$ bezeichnen. Die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ R_0 liegen aber auch in dem Polarraume R_{n-2} des Punktes $1, 2, 3, \ldots, n-1$ der Figur A. Dieser Punkt muss daher in der Geraden $\bar{n}, \overline{n+1}$ liegen.

Die $\frac{n(n+1)}{2}$ Geraden der reciproken Figur gehen also respective durch die $\frac{n(n+1)}{2}$ Punkte der Figur A. Die Pyramide aus $n+1$ Räumen R_{n-2} und die reciproke in Bezug auf F^2_{n-2}, die aus $n+1$ Ecken besteht, bilden zusammen eine Figur von

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \; R_0 \text{ und ebensovielen } R_{n-2}.$$

Diese Punkte R_0 liegen drei zu drei in

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{2\cdot 3} + \frac{n(n+1)}{2\cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}$$

Geraden, die n zu n durch jeden Punkt R_0 gehen.

Wie aus Nr. 7. ersichtlich ist, ist dies die Figur von zwei perspectivischen n-eckigen Pyramiden in S_{n-1}; es genügt, im Satze Nr. 7. $r = n-1$ zu setzen. Das perspectivische Centrum der beiden Pyramiden hat als Polarraum in Bezug auf F_{n-2} den perspectivischen Raum R_{n-2}. Somit haben wir folgenden Satz:*)

Zwei perspectivische Fundamentalpyramiden $13, 14, \ldots, 1(n+1)$; $23, 24, \ldots, 2(n+1)$ *in* R_n, *die das perspectivische Centrum* 12 *haben, sind in Bezug auf eine und nur eine* $(n-1)$-*dimensionale Fläche zweiten Grades* F^2_{n-1} *einander polarreciprok, so dass der Punkt* 12 *den Raum* $34, \ldots, n+1$ *als Polarraum hat.*

Jeder Punkt der Figur (Nr. 7.) kann als Centrum von zwei solchen in Bezug auf F^2_{n-1} *einander reciproken Pyramiden angesehen werden, deren Ecken zu der Figur selbst gehören; d. h. die ganze von zwei perspectivischen Pyramiden gebildete Figur ist in Bezug auf* F^2_{n-1} *sich selbst reciprok.*

Aus Nr. 7. geht ferner hervor:

Für eine jede der $n+3$ *Gruppen, die aus der vorigen Figur entstehen, sind die* $(n+2)$-*eckige Pyramide und die duale Pyramide in Bezug*

---

*) Ich spreche den Satz für zwei perspectivische Fundamentalpyramiden des R_n, statt des R^{n-1}, aus.

*auf die F^2_{n-1} sich selbst polar und einander polarreciprok. Die Gleichungen der F^2_{n-1} bezogen auf die $n+3$ $(n+2)$-eckigen Pyramiden oder auf die $n+3$ dualen Pyramiden enthalten daher nur die Quadrate der Variabeln.**)

Abschnitt IV.

[illegible]

§ 1.

Charaktere der Curven in R_n und die zwischen ihnen stattfindenden unabhängigen Gleichungen.**)

31. Für eine ebene Curve m^{ter} Ordnung und k^{ter} Classe mit D Doppelpunkten, R Spitzen, d Doppeltangenten und w Inflexionstangenten hat man folgende drei unabhängige Plücker'sche Gleichungen:

$$h = k(k-1) - 2D - 3R, \quad k = n(n-1) - 2d - 3w,$$
$$w - R = 3(k-n);$$

man hat ferner aus diesen Formeln

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - D - R = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - d - w.$$

Eine Curve C^m in R_3 hat im Allgemeinen neun Charaktere und zwischen ihnen bestehen zwei Gruppen von drei unabhängigen Cayley-Plücker'sche Gleichungen.

Man erhält die erste Gruppe aus den Plücker'schen Gleichungen derjenigen ebenen Curve, die durch Projection der Raumcurve von einem beliebigen Punkte in eine beliebige Ebene entsteht; die zweite Gruppe aus den Plücker'schen Gleichungen der Schnittcurve der zur Raumcurve gehörigen Developpable mit einer beliebigen Ebene.

Betrachten wir jetzt eine C^m im Raume R_4. Wir bestimmen ihre Charaktere, indem wir zuerst die Curve C^m von einem beliebigen Punkte O in einen Raum von drei Dimensionen S_3 projiciren und nachher die Developpable der C^m mit einem 3-dimensionalen Raume R_3 schneiden.

Es sei ${}_3C^m$ die Projectionscurve in S_3 und ${}_3C_1^{m'}$ die Schnittcurve von R_3 mit der Developpablen. Um die Charaktere der ${}_3C^m$ zu erhalten, projiciren wir sie einmal von einem Punkte O' von S_3 in eine beliebige Ebene S_2 von S_3, und schneiden sodann ihre Developpable mit einer Ebene S_2'.

---

*) Der Beweis vereinfacht sich für zwei perspectivische Dreiecke in der Ebene oder für zwei perspectivische Tetraeder in R_3 beträchtlich.

**) Vergl. meine Notiz im 18. Bande dieser Annalen, p. 448.

Um die Charaktere der ${}_3C_1^{m'}$ zu erhalten, projiciren wir sie aus einem Punkte O_1' von R_3 in eine Ebene R_2 von R_3 und schneiden übrigens ihre Developpable mit einer Ebene R_2'. Es ist klar, dass das Schneiden der Developpable von ${}_3C^m$ mit der Ebene S_2' und das Projiciren der ${}_3C_1^{m'}$ in eine Ebene äquivalente Operationen sind, d. h. die Curve in S_2' und die Curve in R_2 liefern dieselben Charaktere der C^m.

Wir haben also für die C^m nur drei Gruppen von unabhängigen Gleichungen.

Wenn man in dieser Weise fortfährt, so sieht man, dass man für eine C^m in einem n-dimensionalen Raume R_n (wo $m \geqq n$) $n-1$ Gruppen von drei unabhängigen Gleichungen erhält.

Die erste Gruppe bekommen wir durch successives Projiciren. Wir projiciren die C^m zunächst von einem Punkte O aus in einem $(n-1)$-dimensionalen Raum S_{n-1} in ${}_{n-1}C^m$, dann projiciren wir die ${}_{n-1}C^m$ von einem Punkte $O^{(1)}$ von S_{n-1} in einen Raum S_{n-2}; etc.; endlich projiciren wir die ${}_3C^m$ aus einem Punkte $O^{(n-3)}$ von S_3 in eine Ebene S_2 als Curve ${}_2C^m$; d. h. wir projiciren die C^m selbst in S_2 von dem $(n-3)$-dimensionalen Raume aus, der durch die $n-2$ Punkte $O, O^{(1)}, \ldots$ $\ldots, O^{(n-3)}$ bestimmt wird.

Die weiteren Gruppen erhalten wir, indem wir die Developpable der C^m und aller Projectionscurven ${}_{n-1}C^m$, ${}_{n-2}C^m$, etc., ${}_3C^m$ respective mit Ebenen schneiden, die in $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots, S_3$ enthalten sind. Die Schnittcurven seien ${}_{n-1}C_1^{m^{(n-2)}}$, ${}_{n-2}C_1^{m^{(n-3)}}$, $\ldots$, ${}_2C_1^{m^{(1)}}$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die $n-1$ ebenen Curven ${}_2C^m$, ${}_{n-1}C^{m^{(n-2)}}, \ldots, {}_2C_1^{(1)}$ genügen, um die Charaktere und die Gleichungen aller Curven zu bestimmen, die aus der C^m durch Schneiden und Projiciren entstehen können.

32. Wir wollen jetzt die Charaktere der C^m mittelst der obengenannten Curven finden.

Um dies auszuführen, fangen wir mit der ebenen Projectionscurve ${}_2C^m$ an, deren Charaktere m, k, w, D, R, d sein mögen. Wir interpretiren sie für die C^m.

m liefert die *Ordnung* m aller Projectionscurven und der C^m selbst.

k „ den *ersten Rang* k der Developpable der C^m und aller Projectionscurven, d. h. k ist die Zahl der Tangenten der C^m, die einen Raum R_{n-2} schneiden;

w „ für die C_3^m die Classe, für die ${}_4C^m$ die Zahl der Schmiegungsebenen, die eine Gerade schneiden, für die ${}_5C^m$ die Zahl von Schmiegungsebenen, die eine beliebige Ebene treffen u. s. w., und endlich die Zahl der Schmiegungsebenen der C^m, die einen beliebigen Raum R_{n-3} schneiden. *Wir nennen w den zweiten Rang der C^m.* Also:

Die Schmiegungsebenen der C^m bilden eine einfache Mannigfaltigkeit, die eine 3-dimensionale Fläche w^{ter} Ordnung bilden.

R liefert die Zahl der *Spitzen* der C^m selbst und aller ihrer Projectionscurven;

D „ die Zahl der Räume R_{n-2}, die durch den Projectionsraum $O_{n-3} \equiv O, O^{(1)}, \ldots, O^{(n-3)}$ gehen und die Curve C^m zweimal schneiden;

d „ die Zahl der Räume R_{n-1} durch O_{n-3}, die zwei nicht aufeinanderfolgende Tangenten der C^m enthalten.

Hat die C^m D_1 *Doppelpunkte* und d_1 *Doppeltangenten*, so vermehren sich D und d respective um D_1 und d_1. —

Anstatt nun die verschiedenen Curven ${}_2C^{m^{(1)}}, \ldots, {}_{n-1}C^{m^{(n-2)}}$ einzeln zu betrachten, wie wir es jetzt für die ${}_2C^m$ gemacht haben, wollen wir jeden Charakter bei allen Curven zugleich für die C^m interpretiren. Es seien

$$m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(n-2)};\ k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(n-2)};\ w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n-2)};$$
$$R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(n-2)};\ D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(n-2)};\ d^{(1)}, d^{(2)}, \ldots, d^{(n-2)}$$

die Charaktere dieser Curven. Dann folgt zunächst:

Die Ordnungen $m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(n-2)}$ *sind alle gleich* k.

Die Inflexionstangenten $w^{(1)}$ der ${}_2C^{m^{(1)}}$ liefern die stationären Ebenen der ${}_3C^m$, die Classe der ${}_4C^m$, und für die folgenden Curven ${}_5C^m, {}_6C^m, \ldots, C^m$ die Zahl der Schmiegungsräume R_3, welche eine Gerade, eine Ebene, u. s. w., einen beliebigen Raum R_{n-4} schneiden. *Wir nennen $w^{(1)}$ den dritten Rang der C^m, wie auch ihrer Projectionscurven ${}_{n-1}C^m, \ldots, {}_5C^m$.*

Wir können also sagen:

Die Schmiegungsräume R_3 der C^m bilden eine einfache Mannigfaltigkeit von Räumen R_3 und erzeugen zusammengenommen eine 4-dimensionale Fläche $w^{(1)\,ter}$ Ordnung.

Die Inflexionstangenten $w^{(2)}$ der ${}_3C_1^{m^{(2)}}$ liefern die stationären Räume R_3 der ${}_4C^m$, die Classe der ${}_5C^m$, dann ferner für die ${}_6C^m$, die ${}_7C^m$ etc., die Zahl der Schmiegungsräume R_4, die eine Gerade, eine Ebene u. s. w., schneiden. *Wir nennen $w^{(2)}$ den vierten Rang der C^m ebenso von ${}_{n-1}C^m, \ldots, {}_6C^m$. Alle Schmiegungsräume R_4 der C^m bilden eine 5-dimensionale Fläche $w^{(2)\,ter}$ Ordnung.*

Das Gesetz der Bildung der Ränge der C^m und ihrer Projectionscurven ist hiernach klar; insbesondere giebt $w^{(n-3)}$ die Classe der C^m und $w^{(n-2)}$ die Zahl ihrer stationären Räume R_{n-1}. Die C^m kann noch w_1 Inflexionstangenten, $w_1^{(1)}$ stationäre Schmiegungsräume R_{n-2} haben, die dann auch respective bei den Projectionscurven vorhanden sein werden. — *Die C^m hat also $n-2$ Ränge $k, w, w^{(1)}, \ldots, w^{(n-4)}$*, und wir können sagen:

Die Schmiegungsräume R_p der C^m ($p > 1 \leq n-2$) bilden eine einfache Mannigfaltigkeit von Räumen R_p einer $(p+1)$-dimensionalen Fläche der $w^{(p-2)\text{ten}}$ Ordnung. Für $p=1$ hat man $w^{-1}=k$.

Die fernere Uebersicht über die Singularitäten unserer Curven gestaltet sich folgendermassen:

1) *Die Classen*

$$\begin{array}{llll} k^{(1)} & \text{von} & {}_2C_1^{m^{(1)}} & \text{ist} = w, \\ k^{(2)} & ,, & {}_3C_1^{m^{(2)}} & ,, \; = w^{(1)}, \\ \vdots & & & \\ k^{(n-2)} & ,, & {}_{n-1}C_1^{m^{(n-2)}} & ,, \; = w^{(n-3)}. \end{array}$$

2) *Die Zahl der Spitzen*

$$\begin{array}{lllllllll} R^{(1)} & \text{von} & {}_2C_1^{m^{(1)}} & \text{ist gleich der Ordnung} & & \text{von} & {}_3C^m & \text{d. h.} & = m, \\ R^{(2)} & ,, & {}_3C_1^{m^{(2)}} & ,, \; ,, \; \text{dem Range} & k & ,, & {}_4C^m & ,, & = k, \\ R^{(3)} & ,, & {}_4C_1^{m^{(3)}} & ,, \; ,, \; ,, \; ,, & w & ,, & {}_5C^m & ,, & = w, \\ \vdots & & & & & & & & \\ R^{(n-2)} & ,, & {}_{n-1}C_1^{m^{(n-2)}} & ,, \; ,, \; ,, \; ,, & w^{(n-4)} & \text{der} & C^m & ,, & = w^{(n-4)}. \end{array}$$

3) *Doppelpunkte.*

a) *Die Zahl der Doppelpunkte $D^{(1)}$ von ${}_2C^{m^{(1)}}$* liefert die Zahl der Paare von nicht aufeinanderfolgenden Tangenten der ${}_3C^m$, die sich in einem Punkte einer festen Ebene schneiden. Insofern man die C^m aus dem Raume $O_{n-4} \equiv O, O^{(1)}, \ldots, O^{(n-4)}$ projicirt, liefert sie also die Zahl der Paare von zwei nicht consecutiven Tangenten der C^m, die einen beliebigen Raum R_{n-1} (nämlich den Raum der durch O_{n-4} und die Ebene der Curve ${}_2C^{m^{(1)}}$ bestimmt wird) in zwei Punkten einer Gerade schneiden, welche einen beliebigen Raum O_{n-4} in R_n trifft. *Hat die C^m d_1 Doppeltangenten, so vermehrt sich $D^{(1)}$ ersichtlich um d_1.*

b) *Die Zahl der Doppelpunkte $D^{(2)}$ von ${}_3C^{m^{(2)}}$.* In analoger Weise, wie für $D^{(1)}$, sieht man, dass $D^{(2)}$ die Zahl der Paare von nicht aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen der C^m liefert, die einen beliebigen R_{n-2} von R_n in zwei Punkten einer Geraden schneiden, welche einen beliebigen festen Raum O_{n-5} von R_{n-2}

trifft. *Hat die* C^m $d_1^{(1)}$ *Doppelschmiegungsebenen, so vermehrt sich* $D^{(2)}$ *um* $d_1^{(1)}$.

Das Gesetz der Bildung dieser Charaktere ist hiernach evident. Schliesslich kommt:

Die Zahl der Doppelpunkte $D^{(n-2)}$ *von* ${}_{n-1}C^{m^{(n-2)}}$ liefert die Zahl von Paaren nicht aufeinanderfolgender Schmiegungsräume R_{n-2} der C^m, die sich in einem Punkte einer festen Ebene schneiden.

$D^{(n-2)}$ *ist also die Ordnung der* $(n-2)$*-dimensionalen Doppelfläche derjenigen Developpable, die aus den Schmiegungsräumen* R_{n-2} *der* C^m *gebildet ist, etc.*

Hat die C^m $d_1^{(n-2)}$ *doppelte Schmiegungsräume* R_{n-2}, *so vermehrt sich* $D^{(n-2)}$ *um* $d_1^{(n-2)}$.

4) *Doppeltangenten.*

a) *Die Zahl der Doppeltangenten* $d^{(1)}$ von ${}_2C^{m^{(1)}}$ liefert die Paare von nicht aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen der ${}_3C^m$, die sich in einer Geraden einer festen Ebene schneiden, d. h. $d^{(1)}$ liefert die Zahl der Paare von nicht aufeinanderfolgenden Schmiegungsebenen der C^m, die einen Raum R_{n-1} in zwei Geraden schneiden, welche mit einem festen Raume O_{n-4} von R_{n-1} in einem Raume R_{n-2} liegen. *Hat die* C^m $d_1^{(1)}$ *doppelte Schmiegungsebenen, so vermehrt sich* $d^{(1)}$ *um* $d_1^{(1)}$ *etc.*

b) *Die Zahl der Doppeltangenten* $d^{(n-2)}$ von ${}_{n-1}C^{m^{(n-2)}}$ liefert die Zahl der Paare von nicht aufeinanderfolgenden Schmiegungsräumen R_{n-1} der C^m, die sich in einer Geraden einer festen Ebene schneiden.

33. Jede der $n-1$ Curven ${}_2C^m$, ${}_2C_1^{m^{(1)}}$, $\ldots$, ${}_{n-1}C^{m^{(n-2)}}$ besitzt sechs Charaktere. Für die C^m ergeben sich also zunächst $6n-6$ Charaktere. Wir haben aber gesehen, dass:

$$m^{(1)} = m^{(2)} = \cdots = m^{(n-2)} = k;\ k^{(1)} = w,\ k^{(2)} = w^{(1)}, \cdots, k^{(n-4)} = w^{(n-3)};$$
$$R^{(1)} = m,\ R^{(2)} = k,\ R^{(3)} = w, \ldots,\ R^{(n-2)} = w^{(n-2)}.$$

Es sind also $3n-6$ der $6n-6$ Charaktere respective anderen gleich. Daher hat die C^m nur $3n$ allgemeine Charaktere; sie kann überdies noch $n-2$ verschiedenartige stationäre Elemente respective in der Anzahl w_1, $w_1^{(1)}$, $\cdots$, $w_1^{(n-3)}$ und n verschiedenartige Doppelelemente D_1, d_1, d_1^1, $\cdots$, $d_1^{(n-2)}$, nämlich D_1 Doppelpunkte, d_1 Doppeltangenten etc., $d_1^{(n-2)}$ Doppelschmiegungsräume R_{n-1} besitzen.

Wir haben also folgende $(n-1)$-Gruppen von 3 Gleichungen:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} k = m(m-1) - 2[D + D_1] - 3R; \\ m = k(k-1) - 2[d + d_1] - 3(w + w_1); \\ w + w_1 - R = 3(k - m); \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} w = k(k-1) - 2[D^{(1)} + d_1] - 3(m + w_1); \\ k = w(w-1) - 2[d^{(1)} + d_1^{(1)}] - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}); \\ m + w_1 - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) = 3(k - w); \end{array}\right.$$

$$(3)\quad \left|\begin{array}{l} w^{(1)} = w(w-1) - 2[D^{(2)} + d_1^{(1)}] - 3(k + w_1^{(1)}); \\ w = w^{(1)}(w^{(1)} - 1) - 2[d^{(2)} + d_1^{(2)}] - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}); \\ k + w_1^{(1)} - (w^{(2)} + w_1^{(2)}) = 3(w - w^{(1)}); \end{array}\right.$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$(n-1)\quad \left|\begin{array}{l} w^{(n-3)} = w^{(n-4)}(w^{(n-4)} - 1) - 2[D^{(n-2)} + d_1^{(n-3)}] - 3(w^{(n-5)} + w_1^{(n-3)}); \\ w^{(n-4)} = w^{(n-3)}(w^{(n-3)} - 1) - 2[d^{(n-2)} + d_1^{(n-2)}] - 3w^{(n-2)}; \\ \qquad w^{(n-5)} + w_1^{(n-3)} - w^{(n-2)} = 3(w^{(n-4)} - w^{(n-3)}). \end{array}\right.$$

Für das Geschlecht aber erhält man $2(n-1)$ Gleichungen:

$$(n)\quad \left\{\begin{array}{l} p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - [D + D_1] - R = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - [d + d_1] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - (w + w_1), \\ = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - [D^{(1)} + d_1] - (m + w_1) = \frac{(w-1)(w-2)}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - (d^{(1)} + d_1^{(1)}) - (w^{(1)} + w_1^{(1)}), \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ = \frac{(w^{(n-4)} - 1)(w^{(n-4)} - 2)}{2} - [D^{(n-2)} + d_1^{(n-3)}] - (w^{(n-2)} + w^{(n-3)}) \\ = \frac{(w^{(n-3)} - 1)(w^{(n-3)} - 2)}{2} - [d^{(n-2)} + d_1^{(n-2)}] - w^{(n-2)}. \end{array}\right.$$

Wir haben also die Sätze:

Eine Curve C^m in einem n-dimensionalen Raume R_n hat $3n$ allgemeine Charaktere, zwischen welchen $n-1$ Gruppen von 3 unabhängigen Gleichungen bestehen.

Sie kann noch $n-2$ Arten von stationären und n Arten von Doppelelementen enthalten.

Wenn Doppelelemente vorhanden sind, so treten sie in den vorausgehenden Gleichungen nur in den eckigen Klammern auf, d. h. wir können alsdann die Summen $[D + D_1]$, $[d + d_1]$ etc. als $2(n-1)$ Charaktere betrachten.

Man sieht zugleich aus dem Vorhergehenden, dass die Projectionscurven und die Schnittcurven mit ihren Developpablen oder mit den von C^m selbst *dasselbe Geschlecht p besitzen*, wie es sein muss.

Ich sage nun überdiess:

Wenn 3 Charaktere gegeben sind, so kann man die übrigen berechnen.

In der That aus dem Ausdrucke

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - [D + D_1] - R$$

hat man

$$[D + D_1] + R = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p,$$

und aus den Formeln (1), (2), $\cdots$, $(n-1)$ folgt:

$$\begin{aligned}
k &= 2(m-1) - R + 2p, \\
w &= 3(m-2) - 2R - w_1 + 6p, \\
w^{(1)} &= 4(m-3) - 3R - 2w_1 - w_1^{(1)} + 12p, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
w^{(n-4)} &= (n-1)(m-n+2) - (n-2)R - [(n-3)w_1 + (n-2)w_1^{(1)} + \cdots \\
&\qquad + w_1^{(n-4)}] + (n-1)(n-2)p, \\
w^{(n-3)} &= n(m-n+1) - (n-1)R - [(n-2)w_1 + \cdots + w_1^{(n-3)}] + n(n-1)p, \\
w^{(n-2)} &= (n+1)(m-n) - nR - [(n-1)w_1 + \cdots +] + n(n+1)p.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben uns aber das Mittel um die Ränge, die Classe und die stationären Räume R_{n-1} der C_m zu berechnen, wenn das Geschlecht p, die Ordnung m, die Zahl der Spitzen und die andern stationären Elemente gegeben sind, was zu beweisen war.

34. Die Projectionscurven der C^m des R_n in die niedrigeren Räume R_{n-1}, R_{n-2}, $\cdots$, R_3, R_2 werden, wie wir wissen, erhalten, indem man von einem R_0, R_1, $\cdots$, R_{n-3} respective projicirt. Wenn wir specielle Lagen der Projectionsräume R_0, R_1, $\cdots$, R_{n-3} betrachten, so bekommen wir Curven der m^{ten} oder niedrigerer Ordnung, deren Singularitäten von der speciellen Lage der Projectionsräume abhängen.

Ein Raum R_{n-3} kann z. B. einen Punkt A_0 mit der Curve gemein haben. Dann legen wir durch die Tangente in A_0 an die Curve einen Raum R_{n-1}, der die Curve C^m noch in $m-2$ Punkten schneidet. Daher wird $[D + D_1]$ sich um $m-2$ vermindern; *und allgemein, wenn R_{n-3} $\frac{n}{2}$ Punkte mit der C^m gemein hat, so vermindert sich $[D + D_1]$ um $m-n$.*

Wenn der R_{n-3} eine Tangente schneidet, so erhält die ebene Projectionscurve der C^m eine Spitze, dasselbe geschieht für die Projectionscurve in einem Raume R_p $(p < n)$, wenn der projicirende Raum R_{n-p-1} von einer Tangente der C^m getroffen wird. Trifft der Raum R_{n-p-1} eine Schmiegungsebene der C^m in einem Punkte, so erhält die Projectionscurve in R_p eine Inflexionstangente; wenn R_{n-p-1} einen

:hmiegungsraum R_s der Curve schneidet, $(s < p)$, so bekommt die :ojectionscurve einen stationären Raum R_s.

Wir sehen also, dass die verschiedenen Singularitäten der Projectionsrve der C^m aus den verschiedenen Lagen der Projectionsräume $_0$, $R_1, \cdots, R_{n-3}$ *gegen die C^m entstehen. Analoge Betrachtungen :nn man natürlich auch mit der Developpablen der C^m machen. So kennen wir, wie wichtig das Princip des Projicirens und Schneidens r das Studium der Singularitäten der Curven und in analoger Weise :ch der Flächen sein muss.*

Wir werden das besser in den folgenden Paragraphen durch Beiiele verstehen.

§ 2.

Einfachste Anwendungen.

35. Wenn wir in den letzten Formeln Nr. 33. $p=0$, $w_1=w_1^{(1)}=\cdots$: $w_1^{(n-3)}=0$, $R=0$, $n=m$ setzen, so haben wir die Ränge, die .asse und die stationären R_{n-1} der allgemeinen rationalen Curve C^n. 'ir finden:

$$k=2(n-1),\quad w=3(n-2),\ \cdots,\ w^{(n-4)}=2(n-1),$$
$$w^{(n-2)}=n,\quad w^{(n-3)}=0.$$

Die Rationalcurve C^n in R_n hat also die Ränge 1^{ten} und $(n-2)^{\text{ten}}$, ^{n} *und $(n-3)^{\text{ten}}$ Grades u. s. w. respective einander gleich. Sie hat e Classe n und hat keine stationären oder Doppelelemente.*

Nun werde für das Folgende verabredet:

Wir nennen zwei Curven derselben Art, wenn sie dieselben Charaktere sitzen.

Für jede C^n des R_n ist das Geschlecht p nothwendig gleich null, ıd die Zahl der Spitzen sowie der wirklichen Doppelpunkte auch ıll, denn sonst müsste sie in einem R_{n-1} enthalten sein. Daher folgt:

Alle C^n des R_n gehören zu derselben Art. Wir wollen sie daher tionale Normalcurven des Raumes R_n nennen. Die rationalen Normalrven des Raumes R_n haben keine stationären und keine Doppelelemente.

Für die elliptische Curve $C^{n+1}(p=1)$, mit

$$w_1=w_1^{(1)}=\cdots=w_1^{(n-3)}=0$$

.t man:

$$k=2(n-1)+2,\quad w=3(n-2)+6,\ \cdots,\ w^{(n-4)}=n^2-1,$$
$$w^{(n-3)}=n(n+1),\quad w^{(n-3)}=(n+1)^2.$$

Eine einfache Ueberlegung lässt nun folgenden Satz sehen:

Die elliptische Curve C^{n+1} des R_n hat keine doppelten oder statio:ren Elemente, sie hat nur $(n+1)^2$ stationäre Räume R_{n-1}. Alle iptischen Curven C^{n+1} in R_n gehören also zu derselben Art. —

Wir nennen die C^{n+1} daher die elliptische Normalcurve des R_n. Sie hat die Classe $n(n+1)$ und ihre Ränge sind respective

$$k = 2(n-1)+2, \quad w = 3(n-2)+6, \cdots, w^{(n-4)} = n^2-1.$$

36. Wir wollen jetzt die Charaktere einer Curve bestimmen, die den vollständigen Schnitt von $n-1$ $(n-1)$-dimensionalen Flächen ist, deren Ordnungen respective $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(n-1)}$ betragen, und zwar setze ich zuerst voraus, dass sie keine Doppelpunkte und keine Spitzen besitzt. Ich verallgemeinere zu dem Zwecke die Methode, die in der Salmon-Fiedler'schen Geometrie des Raumes (Bd. 2, Art. 83.) angewandt ist.*)

Es sei ein Raum R_{n-2} durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} = 0, \quad b_1x_1 + \cdots + b_{n+1}x_{n+1} = 0,$$

und es seien

$$u^{(1)} = 0, \quad u^{(2)} = 0, \cdots, u^{(n-1)} = 0$$

als Gleichungen der $n-1$ Flächen gegeben. Wir bilden folgende Determinante:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ u_1^{(1)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_{n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}, & u_2^{(n-2)} & \cdots & u_{n+1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

wo $u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, \cdots, u_1^{(n-1)}; u_2^{(1)}, u_2^{(2)}, \cdots, u_2^{(n-1)}$ etc. die ersten Differentialen von $u^{(1)} \cdots u^{(n-1)}$ respective nach $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ sind.

Die Determinante (1) stellt eine $(n-1)$-dimensionale Fläche dar, die der Ort derjenigen Punkte P_0 ist, deren Polarräume R_{n-1} in Bezug auf die $n-1$ Flächen u in einer Geraden p_1 sich schneiden, die den gegebenen Raum R_{n-2} trifft. Für die Punkte P_0, in denen die Fläche (1) der Durchschnittcurve der $n-1$ Flächen begegnet, ist die Gerade p_1 eine Tangente derselben in P_0, und da die Fläche (1) von der Ordnung

$$\mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \cdots + \mu^{(n-1)} - (n-1) = \sum_{i=1,\ldots,(n-1)} \mu^{(i)} - n + 1$$

ist, so wird

$$k = \mu^{(1)}\mu^{(2)} \cdots \mu^{(n-1)}\left(\sum \mu^{(i)} - n + 1\right)$$

sein.

Nunmehr können wir aus der Gleichung

---

*) Man sehe auch den synthetischen Beweis von Cremona: „Theorie der Oberflächen", p. 99, für die Durchschnittcurve zweier Flächen in R_3.

$$k = m(m-1) - 2D$$

D bestimmen. Wir finden:

$$2D = \mu^{(1)}\mu^{(2)} \cdots \mu^{(n-1)}\left[\mu^{(1)}\mu^{(2)} \cdots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right].$$

Hieraus ergiebt sich sofort der Werth des Geschlechtes. Wir haben in

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - D$$

für m und D ihre Werthe einzusetzen. Dann folgen alle anderen Singularitäten aus den Formeln des vorigen Paragraphen.

Haben zwei der $(n-1)$-dimensionalen Flächen $u^{(i)}$ eine einfache Berührung, so hat ihre Durchschnittsfläche von $n-2$ Dimensionen einen Doppelpunkt R_0, und daher wird auch die vollständige Durchschnittcurve der $n-1$ Flächen u_i an der betreffenden Stelle einen Doppelpunkt erhalten. Alle Geraden, welche in R_0 mit der Schnittfläche 3 Punkte gemein haben, bilden nach Nr. 5. einen $(n-2)$-dimensionalen R_0-Kegel 2ter Ordnung. Zerfällt dieser Kegel in zwei Räume R_{n-2}, so bleibt R_0 für die Durchschnittcurve noch immer ein Doppelpunkt; fallen die beiden Räume zusammen, so sagen wir, dass die zwei $(n-1)$-dimensionalen Flächen $u^{(i)}$ sich *stationär* berühren. In diesem Falle ist R_0 eine Spitze der Durchschnittcurve der $n-1$ Flächen $u^{(i)}$. Es wird daher:

$$k = \mu^{(1)} \cdots \mu^{(n-1)}\left(\sum \mu^{(i)} - n + 1\right) - 2D_1 - 3R$$

sein, wenn D_1 einfache Berührungen und R stationäre Berührungen stattfinden. Daraus folgt:

$$2D = \mu^{(1)} \cdots \mu^{n-1}\left(\mu^{(1)} \cdots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right) - 2D_1$$

und

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - D - D_1 - R.$$

Wenn also die vollständige Durchschnittcurve der $n-1$ Flächen $u^{(i)}$ D_1 Doppelpunkte und R Spitzen erhält, so vermindert sich das p um $D_1 + R$.

Uebrigens sind ihre Charaktere, wie wir sehen, vollstängig bestimmt.

Als Beispiel nehmen wir 3 beliebige 3-dimensionale Flächen in R_4; sie schneiden sich in einer C^8. Somit kommt:

$$n = 8,\quad k = 8,\quad D = 16,\quad p = 5,\quad w = 48,\quad w^{(1)} = 32,\quad w^{(2)} = 120.$$

Die vollständige Durchschnittcurve von 3 beliebigen 3-dimensionalen Flächen 2ter Ordnung in R_4 hat den 1ten Rang $= 8$, den 2ten $= 48$; sie hat die Classe 32, das Geschlecht 5, und 120 stationäre Räume R_3. — Welche Lage haben diese 120 Räume?

37. Wir wollen jetzt annehmen, dass die Durchschnittscurve der $(n-1)$-Flächen $u^{(i)}$ in zwei Curven der Ordnung m und m' zerfällt, und wollen unter dieser Annahme D berechnen, indem wir voraussetzen, dass weder Doppelpunkte noch Spitzen vorhanden sind.

Die Schnittpunkte eines R_{n-2} mit der Durchschnittscurve, welche sie zweimal trifft, können entweder auf einer oder auf der andern Curve, respective auf beiden Curven liegen. Wir benennen diese drei Fälle mit den 3 Zahlen D, D', D''. Wir haben gesehen, dass im allgemeinen Falle

$$2D = \mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} \left[\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right]$$

ist. Es giebt dann eine $(n-1)$-dimensionale Fläche der Ordnung

$$\left(\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right),$$

welche die Curve in denjenigen $2D$ Punkten schneidet, die mit einen bestimmten Raume R_{n-3} (welchem die Fläche entspricht) verbunden, die D durch R_{n-3} hindurchlaufende Räume R_{n-2} liefern, die die Curve zweimal schneiden*). Dieselbe Fläche muss jetzt in den $2(D+D'+D'')$ Punkten schneiden. Daher müssen wir haben

$$m\left(\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right) = 2D + D'',$$
$$m'\left(\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right) = 2D' + D''.$$

Daraus folgt:

$$2(D - D') = (m - m')\left(\mu^{(1)} \dots \mu^{(n-1)} - \sum \mu^{(i)} + n - 2\right).$$

Wenn also die Charaktere der einen Curve bekannt sind, so kann man die der zweiten berechnen.

Wir denken uns nun, dass die $n-1$ Flächen $u^{(i)}$ in einer festen Curve $C^{m'}$ sich schneiden. Sie schneiden sich dann im Allgemeinen in einer andern Curve C^m, die im Allgemeinen keine Doppelpunkte oder Spitzen besitzt. Wenn jetzt zwei Flächen $u^{(i)}$ eine einfache oder eine stationäre Berührung in D_1 respective R Punkten bekommen, so wird die C^m D_1 Doppelpunkte und R Spitzen erhalten, und es folgt dann, dass D um D_1 sich vermehrt, und dass p um $D_1 + R$ sich vermindert.

Da man eine beliebige Curve in R_n als (vollständigen oder unvollständigen) Schnitt von $n-1$ Flächen $u^{(i)}$ betrachten kann, so schliesst man allgemein: *Wenn eine Curve C^m vom Geschlechte p in R_n ge-*

---

*) Man sieht dies, indem man die Gleichung des $(n-1)$-dimensionalen Kegels bildet, welcher aus einem Raume R_{n-3}, der mit der Curve einen Punkt gemein hat, die Schnittcurve der $n-1$ Flächen $u^{(1)}$ projicirt. Man sehe auch den synthetischen Beweis von Cremona, l. c. p. 101, für den Fall $n = 3$.

geben ist und sie erhält noch D_1 neue Doppelpunkte und R Spitzen, so vermindert sich ihr Geschlecht p um $D_1 + R$.

Als Beispiel betrachten wir drei 3-dimensionale Flächen 2ten Grades $F_3{}^2$ in R_4:

1) Schneiden sich die drei Flächen in einer C^3 eines R_3, so schneiden sie sich im Allgemeinen noch in einer C^5. — Wir haben also:

$$D' = 1, \quad m' = 3, \quad m = 5,$$

daher:

$$D = 5, \quad p = 1.$$

Wir bekommen also die elliptische Normalcurve des R_4, die $(m+1)^2 = 25$ stationäre Räume R_3 hat*).

Wenn sich zwei der Flächen in einem Punkte berühren, so wird die C^5 einen Doppelpunkt erhalten, d. h.

$$D = 6, \quad p = 0$$

sein.

2) Schneiden sich die $F_3{}^2$ in einem Kegelschnitte, so schneiden sie sich weiter in einer C^6:

$$D' = 0, \quad m' = 2, \quad m = 6,$$
$$D = 8, \quad p = 2.$$

3) Schneiden sie sich in einer Geraden g_1, so schneiden sie sich weiter in einer C^7. Man hat für letztere:

$$D' = 0, \quad m' = 1,$$
$$D = 12, \quad p = 3.$$

Diese C^7 hat also das Geschlecht 3.

Die Gerade g_1 ist eine dreifache Secante der C^7. (Uebrigens die einzige dreifache Secante.)

In der That, man betrachte, um Letzteres nachzuweisen, drei 3-dimensionale R_0-Kegel 2ter Ordnung in R_4. Dieselben schneiden sich im Allgemeinen in einer C^8. Haben sie aber eine erzeugende g_1 gemein, so erzeugen sie eine C^7, die durch die Spitzen der 3 Kegel geht. Ueberdies gehen durch die C^7 und die g_1 ∞^2 $F_3{}^2$. Oder auch so: Die 3 Kegel können so liegen, dass 3 Ebenen derselben sich in einer Geraden g_1 schneiden. Dann legen wir durch g_1 einen R_3; er wird die 3 Kegel in drei $F_2{}^2$ schneiden, die durch g_1 gehen und daher noch 4 Punkte gemein haben. Die Gerade g_1 ist also in der That eine dreifache Secante der C^7.

---

*) Klein hat in einer kurzen Note dieser Annalen, Bd. XVII, die elliptische Curve C^{n+1} des Raumes R_n als Vertreterin des elliptischen Integrals 1ter Gattung angenommen. — Die C^5 in R_4 ist in diesem Sinne von Dr. Bianchi in demselben Bande studirt worden.

In dem Netze von drei beliebigen $F_3{}^2$, die sich in einer C^7 und einer Geraden g_1 schneiden, giebt es unendlich viele R_0-Kegel, die dem Netze zugehören, und zwar liegen ihre Spitzen in der Jacobi'schen Fläche des Netzes. Daher ist unser Satz allgemein bewiesen.

§ 3.

Rationale Curven.*)

38. Wir haben in § 1. gesehen, dass irgend zwei rationale Normalcurven C^n des R_n dieselben Charaktere besitzen; sie sind von der n^{ten} Classe und haben keine stationären Räume.

Das ergiebt sich auch aus der Thatsache, *dass zwei rationale Normalcurven C^n, C'^n des $R_n \infty^3$ oft sich linear in einander transformiren lassen*, wie wir jetzt beweisen werden. Eine rationale Curve C^n des R_n kann durch n projectivische Büschel von $(n-1)$-dimensionalen Räumen

$$A^{(1)}_{n-1} + \lambda B^{(1)}_{n-1} = 0, \quad \cdots, \quad A^{(n)}_{n-1} + \lambda B^{(n)}_{n-1} = 0$$

erzeugt werden (wie wir im nächsten Abschnitte näher erläutern wollen). Es geht aus dieser Construction der C^n hervor, dass die Coordinaten jedes ihrer Punkte bei Einführung eines passenden Coordinatensystems sich folgendermassen darstellen lassen:

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_{n+1} = \lambda^n : \lambda^{n-1} : \lambda^{n-2} : \cdots : 1,$$

wo λ ein Parameter ist.

Betrachten wir nun eine andere Curve C'^n. Wir können dann die Coordinaten ihrer Punkte bei Festhaltung des Coordinatensystems durch rationale ganze Functionen von λ darstellen:

$$(2) \qquad x_1' : x_2' : x_3' : \cdots : x_{n+1}' = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda) : \cdots : f_{n+1}(\lambda).$$

Hier lassen sich $f_1, f_2, \cdots f_{n+1}$ linear durch $\lambda^n, \lambda^{n-1}, \cdots 1$ zusammensetzen, so dass wir zwischen den x_i und x_i' folgende Transformationsformeln haben werden:

$$(3) \qquad \varrho x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n,$$

wo die a_{ik} die Coefficienten der Function $f_i(\lambda)$ sind.

Aus (3) geht hervor, dass nicht nur einem Punkte x_i der C^n ein Punkt der C'^n projectivisch entspricht, sondern auch dass jedem Punkte des Raumes R_n ein anderer Punkt des R_n in projectivischer Weise entspricht, d. h. wir haben zwei collineare Räume S_{n-1}, S_{n-1}' in R_n, bei welchen die Curven C^n, $C^{n\prime}$ sich projectivisch entsprechen. Wenn wir nun beachten, dass derselbe Schluss bestehen bleibt, indem wir in (2)

*) Siehe auch Abschnitt V, § 3.

λ durch $\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ ersetzen, so sehen wir in der That, dass die beiden Curven, die auch zusammenfallen können, durch ∞^3 lineare Transformationen in sich übergehen.

39. Betrachten wir jetzt eine Normalcurve C^n des R_n. Wenn wir sie aus einem ihrer Punkte in einen Raum R_{n-1} projiciren, so erhalten wir eine Curve C^{n-1}, die auch eine rationale Normalcurve des R_{n-1} ist. Verfahren wir in derselben Weise mit der C^{n-1} u. s. w., so bekommen wir folgenden Satz:

Jede rationale Normalcurve C^m des $R_m (m < n)$ kann durch Projection der C^n des R_n von einem R_{n-m-1} aus, der $n - m$ beliebige Punkte mit der Curve C^n gemein hat, erhalten werden.

Betrachten wir jetzt eine Rationalcurve C'^n n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in R_m, so lassen sich die Coordinaten ihrer Punkte durch rationale ganze Functionen n^{ten} oder niedrigeren Grades eines Parameters λ darstellen, d. h. wir haben:

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : \cdots : x_{m+1} = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : \cdots : f_{(m+1)}(\lambda).$$

Jetzt fügen wir noch $n - m$ Coordinaten $x_{m+2}, \ldots, x_{n+1}$ und noch $n - m$ rationale ganze Functionen n^{ten} Grades von λ hinzu, so erhalten wir eine rationale Normalcurve des R_n, aus welcher die gegebene Curve mittelst Projection entsteht. Die Curve (1) mag also Singularitäten haben, welche sie will, sie wird immer als Projection einer Normalcurve C^n des R_n erhalten, und da alle rationale Normalcurven des R_n projectivisch sind, so sehen wir, dass durch geeignete Projection einer und derselben C^n des R_n alle Arten von Rationalcurven n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in den Räumen von weniger als n Dimensionen erhalten werden können.

Dieser Satz ist dem früher aufgestellten Theoreme analog, dass man aus einer Fundamentalpyramide des R_n alle in niedrigeren Räumen gelegene Arten von Configurationen von $n + 1$ oder weniger als $n + 1$ Punkten durch geeignete Projection erhält. Wir haben also den folgenden Satz:

Jede beliebige Rationalcurve n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in R_2, $R_3, \ldots, R_{n-1}$ ist immer die eindeutige Projection einer Normalcurve C^n des R_n. Und umgekehrt aus einer Rationalcurve der n^{ten} Ordnung in R_n kann man durch geeignete Projection jede Art von Rationalcurven der n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in den Räumen $R_{n-1}, R_{n-2}, \ldots, R_3, R_2$ erhalten.

Analog kommt:

Jede rationale Curve n^{ter} oder niedrigerer Classe in $R_2, R_3, \ldots R_{n-1}$ kann immer durch geeignetes Schneiden aus der developpablen Fläche einer C^n in R_n erhalten werden, und umgekehrt.

Also können wir auch sagen:

Wenn eine Rationalcurve in $R_2, \ldots R_{n-1}$ von der n^{ten} Ordnung und von der m^{ten} Classe ist, wo $m = n + q$ sein mag, so kann man sie durch Projection aus der Normalcurve C^{n+q} des R_{n+q} oder durch Schneiden der zugehörigen Developpabeln erhalten.

40. Aus den Formeln der 33. Nummer finden wir für $p=0$ und $m=n$

$$D + R = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad w = 3(n-2) - 2R,$$

so dass die *Maximalzahl der Spitzen* einer Rationalcurve n^{ter} Ordnung in R_2

(1) $$R_2 = \left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$$

ist.

Sind w Inflexionstangenten vorhanden, so kommt entsprechend

(1') $$R = \left[\frac{3}{2}(n-2) - \frac{w}{2}\right].$$

Für die rationalen Curven in R_3 ergiebt sich als Maximalzahl der Spitzen:

(2) $$R = \left[\frac{4}{3}(n-3)\right],$$

und wenn $w_1^{(1)}$ stationäre Ebenen und w_1 Inflexionstangenten vorhanden sind, so ist:

(3) $$R = \left[\frac{4}{3}(n-3) - \frac{2}{3}w_1 - \frac{w^{(1)}}{3}\right].$$

Allgemein erhält man für die Rationalcurve C^n in R_m die Maximalzahl der Spitzen

$$R = \left[\frac{m+1}{m}(n-m)\right],$$

und wenn w_1 Inflexionstangenten, $w_1^{(1)}$ stationäre Ebenen u. s. w., $w^{(m-2)}$ stationäre Räume R_{m-1} vorhanden sind, so ist:

$$R = \left[\frac{m+1}{m}(n-m) - \frac{m-1}{m}w_1 + \frac{m-2}{m}w_1^{(1)} + \cdots + \frac{w^{(m-2)}}{m}\right].$$

Wir werden jetzt sehen: *Dass die C^n in R_m wirklich das betreffende Maximum erreichen kann, dass überdies auch alle anderen Fälle wirklich vorkommen.*

Betrachten wir zu dem Zwecke die C^n des R_n und projiciren wir dieselbe zunächst von einem allgemein gelegenen Raume R_{n-3} auf eine Ebene, so hat man für die Projectionscurve allgemein:

$$D = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Nun ist ein R_{n-3} in R_n durch $n-2$ Punkte bestimmt; der R_{n-3} hängt also von $3(n-2)$ unabhängigen Constanten ab. Wenn $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n-2)}$ die Coordinaten der $n-2$ beliebigen Punkte von

R_{n-3} sind, so haben die Coordinaten jedes Punktes dieses Raumes die Form:

$$\lambda^{(1)} x_i^{(1)} + \lambda^{(2)} x_i^{(2)} + \dots + \lambda^{(n-2)} x_i^{(n-2)}.$$

Wenn eine Ebene

$$\mu^{(1)} x_i'^{(1)} + \mu^{(2)} x_i'^{(2)} + \mu^{(3)} x_i'^{(3)}$$

den Raum R_{n-3} schneiden soll, so muss eine Bedingung erfüllt werden, nämlich es muss folgende Determinante verschwinden:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_1'^{(1)}, & x_1'^{(2)}, & x_1'^{(3)}, & x_1^{(1)}, & x_2^{(2)} & \dots & x_1^{(n-2)} \\ x_2'^{(1)}, & x_2'^{(2)}, & x_2'^{(3)}, & x_2^{(1)}, & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n-2)} \\ \vdots & & & & & & \\ x'^{(1)}_{n+1}, & x'^{(2)}_{n+1}, & x'^{(3)}_{n+1}, & x^{(1)}_{n+1}, & x^{(2)}_{n+1} & \dots & x^{(n-2)}_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Dagegen müssen zwei Bedingungen erfüllt werden, wenn eine Gerade den Raum R_{n-3} schneiden soll, denn statt einer $(n-1)$ gliedrigen Determinante (1) haben wir eine Matrix mit $n+1$ Zeilen und n Columnen. Also:

Wenn $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ *beliebige Geraden oder* $3(n-2)$ *Ebenen in* R_n *gegeben sind, so giebt es wenigstens einen* R_{n-3}, *der sie alle trifft.**)

Wenn man jetzt die $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ beliebigen Geraden als Tangenten der C^n annimmt und die C^n von einem Raume R_{n-3}, der diese Tangenten trifft, projiciren, so erhält die Projectionscurve in der Ebene wirklich $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ Spitzen. Die ebene Rationalcurve n^{ter} Ordnung erreicht dann also die Maximalzahl der Spitzen, *und umgekehrt sehen wir, dass es keinen Raum* R_{n-3} *giebt, der mehr als* $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ *Tangenten der* C^n *schneidet.*

Wir können einen Raum R_{n-3} nach Belieben natürlich auch so wählen, dass er weniger als $\left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ Tangenten der C^n schneidet. Die C^n in R_2 kann also $R=0, 1, 2, \cdots \left[\frac{3}{2}(n-2)\right]$ haben, wie behauptet wurde.

Wenn ein R_{n-3} eine Schmiegungsebene der C^n trifft, aber nicht die Tangenten in ihr, so erhält die C^n eine Inflexionstangente. Soll nun ein R_{n-3} w Schmiegungsebenen der C^n in einem Punkte treffen, so kann man noch so über ihn verfügen, dass er $\left[\frac{3}{2}(n-2) - \frac{w}{2}\right]$

---

*) Durch Ueberlegungen, die ich hier nicht ausführe, kann man sich in aller Strenge überzeugen, dass die Zahl der betreffenden R_{n-3} immer > 0 sein muss.

Tangenten trifft; diese Zahl stimmt mit der Maximalzahl der Spitzen der ebenen Rationalcurve, wenn w Inflexionstangenten vorhanden sind, überein. Da $3(n-2)$ beliebige Ebenen in R_n immer von einem R_{n-3} respective in einem Punkte geschnitten werden, und im Allgemeinen für die ebene Curve

$$w = 3(n-2)$$

ist, so sehen wir umgekehrt, *dass ein R_{n-3} in R_n nur $3(n-2)$ Schmiegungsebenen der C^n schneiden kann, dass dies im Allgemeinen aber auch wirklich geschieht.*

41. Wir projiciren jetzt die C^n von einem Raume R_{n-4} in einen Raum R_3. Der Raum R_{n-4} hängt von $4(n-3)$ Constanten ab, und daher werden $\left[\frac{4}{3}(n-3)\right]$ beliebige Geraden, oder $2(n-3)$ beliebige Ebenen, oder $4(n-1)$ R_3, in R_n wenigstens von einem R_{n-4} in Punkten geschnitten.

Wenn wir so fortfahren und die nämlichen Schlüsse ziehen, die wir vorher für die ebenen Curven gezogen haben, so sehen wir, dass eine Curve n^{ter} Ordnung in einem Raume R_m die Maximalzahl der Spitzen, Inflexionstangenten u. s. w. stationären Räume R_{m-1} wirklich erreichen kann.

Nun überlege man sich, dass, wenn die stationären Elemente w_1, $w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(n-4)}$ gegeben sind, man die anderen Charaktere durch das Geschlecht p, die Ordnung m und Zahl der Spitzen berechnen kann.

Man beachte ferner, dass, wenn ein System positiver ganzer Lösungen der $3(m-1)$ Gleichungen, die zwischen den Singularitäten der Curven in R_n bestehen, gegeben ist, auch R ganz und positiv sein muss, zugleich aber auch das Maximum von R nicht übersteigen kann. Somit haben wir folgenden Satz:

Alle ganzen positiven Lösungen der $3(n-1)$ Gleichungen einer C^m in R_n (daher auch der Plücker'schen Gleichungen in der Ebene und der Cayley-Plücker'schen Gleichungen in R_3) sind für $p=0$ Charaktere wirklich existirender Curven. —

Andere Eigenschaften der Rationalcurven mittelst des Projicirens und Schneidens werden wir im nächsten Abschnitt kennen lernen.

§ 4.

Elliptische Curven und Curven von beliebigem p.

42. *Elliptische Curven.*

Man hat auch für die elliptischen Normalcurven das Analogon desjenigen Satzes, den wir für die rationalen Normalcurven der Räume $R_2, R_3, \cdots R_{n-1}$ in Nr. 38. gegeben haben, d. h. *dass die elliptischen Normalcurven der Räume $R_2, R_3, \cdots R_{n-1}$ durch Projection der*

C^{n+1} des R_n hervorgehen, in derselben Weise wie die rationalen Normalcurven derselben Räume aus der C^n des R_n entstehen.

Die Coordinaten der Punkte einer elliptischen Normalcurve C^{n+1} des R_n lassen sich als elliptische Functionen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades eines Parameters darstellen, welche identische Periodicitätsmoduln ω, ω' besitzen.*)

Die Coordinaten einer elliptischen Curve C^q in einem Raume R_m, wo $m < n$ ist, lassen sich auch als elliptische Functionen eines Parameters darstellen, so dass man durch Hinzufügung von $n-m$ Coordinaten und betreffenden elliptischen Functionen mit identischen Periodicitätsmoduln ω, ω' eine Normalcurve in R_n erhält, aus welcher die gegebene Curve in R_m als Projection entsteht.

Wir haben gesehen, dass alle elliptischen Curven C^{n+1} des R_n dieselben Charaktere besitzen und also zu derselben Art gehören. Somit:

Jede elliptische Curve der $(n+1)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Ordnung in einem R_m, wo $m < n$ ist, kann als eindeutige Projection einer elliptischen Normalcurve des Raumes R_n angesehen werden. — Und umgekehrt, aus der einzelnen elliptischen Normalcurve C^{n+1} in R_n kann man alle Arten von elliptischen Curven von der $(n+1)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Ordnung in den Räumen $R_2, R_3, \cdots, R_{n-1}$ erhalten, die bei demselben Modul möglich sind.

Es gilt natürlich der duale Satz, aber nicht in derselben Form wie bei den Rotationalcurven, denn die Classe der C^n in R_n ist auch n, während die Classe der elliptischen Curven C^{n+1} in R_n gleich $n(n+1)$ ist (Nr. 36.).

Dass bei allen diesen Projectionen der Modul der elliptischen Functionen (der für die Curven ein Doppelverhältniss bedeutet) ungeändert bleibt, erläutere ich im Texte der Kürze halber nicht. Der Hauptzweck meiner Arbeit ist der, das Studium der projectivischen Eigenschaften eines geometrischen Gebildes eines Raumes R_m durch Projection oder Schneiden eines allgemeineren und einfacheren Gebildes des R_n zu erleichtern, und in diesem Sinne z. B. die verschiedenen Arten von Curven und Flächen nach ihren Singularitäten zu studiren, wie ich schon in der Einleitung betont habe. Daher werde ich diejenigen Sätze der Theorie der algebraischen Functionen als gegeben betrachten, die mich zu meinem Ziele führen.

43. *Curven von beliebigem Geschlechte p.*

Man unterscheidet auf einer ebenen Curve $F(s,z)=0$ Punktgruppen, durch welche keine adjungirte Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung φ hindurchgeht und Punktgruppen (Specialgruppen), bei denen dieses der Fall

---

*) Siehe Clifford l. c. und Klein, Math. Annalen Bd. XVII l. c.

ist.*) Wenn wir in irgend einer Curve $F(s, z) = 0$ der Ordnung n und des Geschlechts p, m Punkte nehmen, die eine Gruppe der ersten Art bilden, so geht durch sie keine φ, aber wohl eine adjungirte Curve $C^{n'}$, wo $n' > n - 3$ sein wird. Dann sind genau p der nn' Schnittpunkte der beiden Curven durch die übrigen bestimmt. Daher gehen durch sie $m - p + 1$ unabhängige Curven $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, ... $F^{(m-p+1)}$.

Setzt man jetzt

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{m-p+1} = F^{(1)} : F^{(2)} : \ldots : F^{(m-p+1)},$$

so hat man eine C^m in R_{m-p} mit dem Geschlechte p, und eine solche C^m kann nicht in einem höheren Raume als R_{m-p} enthalten sein, ohne in einem R_{m-p} zu liegen.**) Wir sehen also: Dass die C^n in R_n nothwendig $p = 0$, die C^{n+1} höchstens $p = 1$ etc., die C^{n+r}, wo $r < n$ ist, höchstens $p = r$ hat. Für die C^{n+n} hört das Gesetz auf, weil Punktsysteme 2ter Art auftreten. Die C^{n+n} kann höchstens das Geschlecht $n + 1$ haben, wie z. B. die C^4 in der Ebene das Geschlecht 3 erreichen kann. Solche Curven kann man *Curven* 2ter *Art* des bezüglichen Raumes nennen. Wir werden aber für unsern Zweck nur Curven 1ter Art betrachten, denn wir können immer in einem höheren Raume Curven 1ter Art mit einem bestimmten p finden. So z. B. ist die C^7 in R^4 eine Curve 1ter Art mit $p = 3$, wie die allgemeine C^4 in der Ebene, die eine Curve 2ter Art ist.

Die C^{n+r} des R_n, mit $p = r < n$, kann keine Doppelpunkte oder Spitzen erhalten, denn nach unseren früheren Untersuchungen (Nr. 37.) würde das p sich dann vermindern.

Sie kann aber stationäre Elemente erhalten. Daher zerfallen die C^{n+r} in R_n mit $p = r$ in verschiedene Arten von Curven, die wir alle *Normalcurven* des Geschlechtes $p = r < n$ in R_n nennen.

Wenn man eine solche C^{n+r} von einem Raume R_{n-r-2} in einen R_{r+1} projicirt, der mit der C^{n+r} $n - m - 1$ Punkte gemein hat, so erhält man in R_{r+1} eine Normalcurve C^{2r+1} desselben Geschlechtes r, und welche die letzte Normalcurve des R_{r+1} ist, wenn man als erste die rationale Normalcurve bezeichnet. Projicirt man aber die C^{n+r} von einem Raume R_{n-r-1}, der mit C^{n+r} $n - m$ Punkte gemein hat, in einen R_n, so erhält man eine C^{2r}, die in R_r keine Normalcurve, in unserem Sinne, ist; nur die rationalen und elliptischen Normalcurven des R_n haben die Eigenthümlichkeit, dass sie von einem beliebigen solchen Raume R_{n-r-1} in einen R_n projicirt, eine rationale oder elliptische Normalcurve des R_r liefern. Also:

*) Brill und Nöther: „Ueber algebraische Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie," Math. Annalen Bd. VII, p. 269.

**) Diesen Satz hat Clifford l. c. mit Hülfe des Abel'schen Theorems bewiesen.

Jede Normalcurve C^{n+r} mit dem Geschlechte $p = r < n$ ergiebt, durch geeignetes Projiciren, Normalcurven desselben Geschlechtes in den Räumen $R_{n-1}, R_{n-2}, \cdots, R_{r+1}$.

44. Projiciren wir jetzt eine Normalcurve C^{n+r} des R_n von einem beliebigen Raume R_{n-m-1} in R_m, so erhalten wir eine Curve C'^{n+r} des R_m von dem Geschlechte $p = r$ und von der Ordnung $n + r$, sofern R_{n-m-1} die C^{n+r} nirgendwo schneidet.

Projiciren wir jetzt weiter die C'^{n+r} in eine ebene Curve ${}_1C'^{n+r}$. Diese Curve ${}_1C'^{n+r}$ und die Curve $F(s, z) = 0$ der vorigen Nummer, die uns zur Bestimmung der C^{n+r} gedient hat, sind auf einander transformirbar, daher kann man die $C'^{(n+r)}$ auch durch algebraische Functionen eines Parameters darstellen, die nach Riemann*) mit denjenigen der Normalcurven C^{n+r} des R_n zu derselben Classe gehören.

Umgekehrt kann man von jeder Curve $(n + r)^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung zur Normalcurve C^{n+r} des R_n aufsteigen. Also:

Wenn man alle Normalcurven eines Geschlechtes $p < n$ in R_n in allen möglichen Weisen projicirt, so erhält man alle Arten von Curven der $(n + p)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Ordnung in den niedrigeren Räumen als R_n, und umgekehrt:

Jede beliebige Curve der $(n + p)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Ordnung in R_m (wo $m < n$ ist) vom Geschlechte p kann als eindeutige Projection einer Normalcurve des Geschlechtes p des Raumes R_n erhalten werden.

45. Ob die ganzzahligen Lösungen der $3(n - 1)$ unabhängigen Gleichungen, welche für die Singularitäten einer Curve in R_n, $p > 0$, bestehen, die Charaktere existirender Curven sind, bleibt zu untersuchen. Man muss zusehen, welches das Maximum von Tangenten, z. B. der elliptischen Normalcurve ist, die von einem R_{n-3} etc. geschnitten werden können. Man bekommt dann in der Ebene u. s. w. die Maximalzahl der Spitzen der Projectionscurve der Ordnung $n + 1$. Jedenfalls lassen sich die Betrachtungen, die wir für die rationale Normalcurve des R_n in Nr. 40. gemacht haben, ganz ebenso für die anderen Normalcurven des R_n^p anstellen und daher gewinnen wir folgenden Satz:

Eine Curve in R_2, R_3 etc. der $(n + p)^{\text{ter}}$ Ordnung mit dem Geschlechte p kann wenigstens $0, 1, \cdots, \frac{3}{2}(n-2)$ respective $0, 1, \cdots, \frac{4}{3}(n-3)$ etc. Spitzen etc.; $0, 1, \cdots, 3(n - 2)$ respective $0, 1, \cdots, 2(n - 3)$ etc. Inflexionstangenten und eine Curve in R_3 etc. $0, 1, \cdots, 4(n - 3)$ stationäre Ebenen etc. erhalten.

---

*) Theorie der Abel'schen Functionen; siehe Riemanns Werke, p. 112.

Abschnitt V.

Erzeugnisse durch collineare Grundgebilde.

§ 1.

Doppelerzeugung derselben.

46. Die Erzeugnisse durch collineare Grundgebilde in der 3-dimensionalen Geometrie besitzen eine doppelte Erzeugung.

Zum Beispiel wird die C^3 in der Ebene durch zwei lineare Systeme 2ter Stufe von collinearen Geradensystemen erzeugt. Die F_2^3 in R_3 lässt sich durch zwei lineare Systeme 2ter Stufe von collinearen Ebenenbündeln erzeugen, deren Scheitel auf der F_2^3 selbst liegen. Diesen zwei Systemen entsprechen zwei Systeme von Curven 3ter Ordnung der Fläche, wie es bekannt ist.*)

Ehe ich zu den Erzeugnissen des R_n übergehe, die ich später behandeln will, schicke ich den allgemeinen Beweis ihrer doppelten Erzeugung voraus.

Es seien $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \cdots, p_m^{(1)}$ m Räume, die ein Gebilde $S_{n-m}^{(1)}$ $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe bestimmen, und in analoger Weise $p_i^{(2)}, p_i^{(3)}, \cdots, p_i^{(s)}$ (wo $i = 1, 2, \cdots, m$ ist) andere $s-1$ Gruppen von m Räumen R_{n-1}, welche die Gebilde $S_{n-m}^{(2)}, S_{n-m}^{(3)}, \cdots, S_{n-m}^{(s)}$ bestimmen. Um die Ideen besser zu fixiren, schreiben wir die s Gebilde in folgender Form:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \lambda^{(2)} p_2^{(1)} + \cdots + \lambda^{(m)} p_m^{(1)} = 0, \\ \vdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda^{(1)} p_1^{(s)} + \lambda^{(2)} p_2^{(s)} + \cdots + \lambda^{(m)} p_m^{(s)} = 0. \end{array}\right.$$

Das Erzeugniss dieser Gebilde wird dann durch das Verschwinden folgender Matrix dargestellt:

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{l} p_1^{(1)},\ p_2^{(1)},\ \cdots,\ p_m^{(1)} \\ \vdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_1^{(s)},\ p_2^{(s)},\ \cdots,\ p_m^{(s)} \end{array}\right| = 0.$$

Wenn wir uns nun folgende m collineare Gebilde M_{n-s}^{k} $(s-1)^{\text{ter}}$ Stufe gebildet denken, nämlich

*) Herr Dr. Schur hat sich in seiner Habilitationsschrift, Math. Annalen, Bd. XVIII, 1. Heft, mit der doppelten Erzeugung der C^3 in der Ebene und in R_3, der F_2^3, einer F_2^4 und der C^6 vom Geschlechte $p = 3$ des R_3 beschäftigt. Er giebt aber für jeden Fall dieser Erzeugnisse einen Beweis, obgleich er in der Vorrede bemerkt, dass ihre Doppelerzeugung aus den einfachsten Determinanteneigenschaften hervorgeht.

$$(1')\quad \begin{cases} \mu^{(1)}p_1^{(1)} + \mu^{(2)}p_1^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)}p_1^{(s)} = 0, \\ \vdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_1^{(1)}p_m^{(1)} + \mu^{(2)}p_m^{(2)} + \cdots + \mu^{(s)}p_m^{(s)} = 0, \end{cases}$$

so sehen wir, dass sie die nämliche Fläche (2) erzeugen. Denn der Uebergang von (1) zu (1′) kommt darauf hinaus, die Zeilen mit den Columnen der Matrix zu vertauschen.

Wenn wir jetzt aus dem linearen System (1) s beliebige collineare Gebilde S_{n-m} herausgreifen, z. B.

$$\sigma_1(\lambda^{(1)}p_1^{(1)} + \cdots + \lambda^{(m)}p_m^{(1)}) + \cdots + \sigma_s(\lambda^{(1)}p_1^{(s)} + \cdots + \lambda^m p_m^{(s)}) = 0$$
etc.,

und diese vermöge der σ collinear beziehen, so erzeugen sie wieder dieselbe Fläche, da die Matrix (2) unverändert bleibt; denn das kommt darauf hinaus, für das erste geschriebene Gebilde die Columnen respective mit $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m)}$ zu multipliciren und zu der ersten zu addiren.

Dasselbe gilt natürlich auch für das System (1′). Liegt ein Raum $S^{(i)}_{n-m}$ oder ein $M^{(k)}_{n-s}$ der zwei Systeme (1) und (1′) in der Fläche, d. h. gehören alle seine Punkte der Fläche an, so liegt offenbar jeder solche Raum S_{n-m} oder M_{n-s} in der Fläche.

Wir wollen die zwei Systeme (1) und (1′) *conjugirt* nennen.

Man hat also folgende allgemeine Sätze:

Ist eine Fläche F von irgend einer Dimension und Ordnung durch s collineare Grundgebilde $(m-1)^{ter}$ Stufe $S^{(1)}_{n-m}, S^{(2)}_{n-m}, \cdots, S^{(s)}_{n-m}$ erzeugbar, so ist sie es auch durch m collineare Grundgebilde $(s-1)^{ter}$ Stufe $M^{(1)}_{n-s}, M^{(2)}_{n-s}, \cdots, M^{(m)}_{n-s}$. Die s collinearen Gebilde $S^{(i)}_{n-m}$ und die m Gebilde $M^{(k)}_{n-s}$ (wo $i = 1, 2, \cdots, s$; $k = 1, 2, \cdots, m$ ist) bilden zwei conjugirte lineare Systeme respective der $(s-1)^{ten}$ und $(m-1)^{ten}$ Stufe. s beliebige collineare Gebilde des 1^{ten} oder m des 2^{ten} erzeugen ebenfalls die Fläche F, insofern sie nicht zu einem linearen Systeme niedriger Stufe gehören. Wenn die Räume $S^{(i)}_{n-m}$ oder $M^{(k)}_{n-s}$ in der Fläche F liegen, so werden auch alle S_{n-m} oder M_{n-s} der beiden linearen Systeme in der Fläche enthalten sein.

Man hat auch selbstverständlich den Satz:

Wenn irgend s oder m entsprechende Räume der s Gebilde $S^{(i)}_{n-m}$ oder der m Gebilde $M^{(k)}_{n-s}$ in einem Raume R_q sich schneiden, der entweder in der Fläche liegt, oder ein Secantenraum R_q) derselben ist;*

*) Es sei eine Fläche F^q_m des R_n gegeben ($m < n-1$); ein beliebiger Raum R_s schneidet im Allgemeinen die F^q_m in einer $(m+s-n)$-dimensionalen Fläche q^{ter} Ordnung. Schneidet aber R_s die F^q_m in einer $(m+s-n+p)$-dimensionalen Fläche q^{ter} Ordnung, so nenne ich R_s *einen Secantenraum der* F^q_m.

so kann man die Räume R_q *der Fläche auf die Punkte eines Raumes* R_{m-1} *oder* R_{s-1} *eindeutig abbilden.*

Greift man aus der Matrix (2) eine Determinante mit m oder s Zeilen heraus, so stellt sie, gleich Null gesetzt, eine $(n-1)$-dimensionale Fläche vor, die offenbar die Fläche (2) enthält. Also:

Die Fläche F *liegt in allen denjenigen* $(n-1)$*-dimensionalen Flächen* m^{ter} *oder* s^{ter} *Ordnung, die durch* m *collineare Gebilde* S_{n-m} *oder durch* s *collineare Gebilde* M_{n-s} *der beiden linearen Systeme* (1) *und* (1′) *entstehen.*

47. Unter den Flächen, welche durch das Verschwinden einer Matrix dargestellt werden, sind in erster Linie diejenigen bemerkenswerth, bei denen sich jene Matrix (2) auf eine einzelne Determinante reducirt. Für sie insbesondere hat man folgende Eigenschaften:

Alle Flächen F^m_{n-1} *in* R_n*, die durch* m *collineare Gebilde* $(m-1)^{\text{ter}}$ *Stufe erzeugt werden, besitzen 2 Erzeugungssysteme* $(m-1)^{\text{ter}}$ *Stufe, welchen zwei Systeme von Flächen niedrigerer Dimension, als* F^m_{n-1}*, entsprechen, die ganz in* F^m_{n-1} *liegen und unter einander gleichberechtigt sind.*

Zwei Flächen M, M' *derselben Ordnung und Dimension, die nicht zu demselben System gehören, liegen in einer bestimmten Fläche* N*, die dieselbe Ordnung und Dimension für jedes Paar von Flächen* M, M' *hat.*

Wenn $m \leq n+1$ *ist, so sind die Axen der* m *collinearen Gebilde Räume* S_{n-m}*, die in der Fläche selbst liegen. Die Räume* S_{n-m} *der* F^m_{n-1} *können eindeutig auf die Punkte eines Raumes* R_{m-1} *bezogen werden.**)

§ 2.

Einige Specialfälle.

48. Ich will in diesem Paragraphen einige der wichtigsten Specialfälle betrachten, die ich im Folgenden zu gebrauchen habe.

1) Zwei projectivische Büschel $S^{(1)}_{n-2}$, $S^{(2)}_{n-2}$ in R_n erzeugen einen $(n-1)$-dimensionalen S_{n-4}-Kegel 2^{ter} Ordnung, drei solche projectivische Bündel erzeugen dagegen einen $(n-2)$-dimensionalen Kegel 3^{ter} Ordnung, und allgemein:

---

*) Wenn $p_1^{(1)}, \cdots, p_1^{(s)}; \cdots; p_m^{(1)}, \cdots, p_m^{(s)}$ statt lineare $(n-1)$-dimensionale Räume $(n-1)$-dimensionale Flächen respective der Ordnung $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(m)}$ bedeuten, so gelten, wie man sieht, einige analoge Sätze.

m projectivische Büschel $S^{(1)}_{n-2}$, $S^{(2)}_{n-2}$, $\cdots$, $S^{(m)}_{n-2}$ in R_n erzeugen eine $(n-m+1)$-dimensionale Fläche m^{ter} Ordnung, die auch ein Kegel sein kann, wenn nämlich $S^{(1)}_{n-2}$, $\cdots$, $S^{(m)}_{n-2}$ in einem Raume R_s sich schneiden.

2) Zwei, drei, vier collineare Gebilde 2^{ter} Stufe in der Ebene erzeugen, wie man weiss, respective 3 Punkte, eine C^3, und 6 Punkte, so dass zwei, drei, vier Bündel im Raume R_3 respective eine C^3, F_2^3 und eine allgemeine C^6 vom Geschlechte $p = 3$ erzeugen.*)

Dementsprechend finden wir folgende Sätze:

n, $n+1$, $n+2$ collineare Gebilde n^{ter} Stufe in R_n erzeugen respective eine Fläche $F_{n-2}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, eine Fläche F_{n-1}^{n+1}, und eine Fläche $F_{n-2}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, und daher:

$n-1$, n, $n+1$ collineare Gebilde $(n-1)^{ter}$ Stufe $S_0^{(i)}$ erzeugen respective eine Fläche $F_{n-2}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, eine Fläche F_{n-1}^{n}, eine Fläche $F_{n-2}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Um die ersten Sätze zu beweisen, nimmt man sie für den Raum R_{n-1} als richtig an; dann betrachten wir n collineare Gebilde n^{ter} Stufe $\Sigma_n^{(1)}$, $\Sigma_n^{(2)}$, $\cdots$, $\Sigma_n^{(n)}$ des R_n. Es seien $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$, $\cdots$, $S_0^{(n)}$ n entsprechende Gebilde $(n-1)^{ter}$ Stufe derselben; sie erzeugen eine F_{n-1}^n. Bewegt sich nun $S_0^{(1)}$ in einer Geraden $g_1^{(1)}$, so werden sich auch die entsprechenden Punkte $S_0^{(2)}$, $\cdots$, $S_0^{(n)}$ in Geraden $g_1^{(2)}$, $\cdots$, $g_1^{(n)}$ bewegen. Die bezüglichen Flächen F_{n-1}^n bilden daher ein Büschel; sie schneiden sich aber in der Fläche $F_{n-2}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, die durch die n collinearen Gebilde $(n-2)^{ter}$ Stufe $g_1^{(1)}$, $g_1^{(2)}$, $\cdots$, $g_1^{(n)}$ nach den obigen Sätzen erzeugt wird. Daher schneiden sich die F_{n-1}^n ausserdem noch in einer $(n-2)$-dimensionalen Fläche von der Ordnung $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, die das Erzeugniss der n collinearen Gebilde $\Sigma_n^{(1)}$, $\Sigma_n^{(2)}$, $\cdots$, $\Sigma_n^{(n)}$ ist.

In der vorigen Nummer haben wir gesehen, dass $n+1$ solche

---

*) Die Haupteigenschaften der C^6 lassen sich aus den vorhergehenden Sätzen ableiten. Da sie vom Geschlechte 3 ist, so gehen durch jeden ihrer Punkte 3 dreifache Secanten derselben.

Diese C^6 und verschiedene Fälle, bei welchen sie zerfällt, sind gleichzeitig von Cremona (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Mai 1871 und Math. Annalen Bd. IV, „Ueber die Abbildung algebraischer Flächen") und von Nöther, „Eindeutige Raumtransformationen", Math. Annalen Bd. III, p. 345 untersucht worden. Man findet sie auch in der citirten Abhandlung von Schur.

Gebilde eine F_{n-1}^{n+1} erzeugen; und wenn man $n+2$ solche betrachtet, so findet man in der That, dass sie eine $F_{n-2}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ erzeugen.

Da die Sätze für $n-1=3$ richtig sind, so sind sie es auch für ein beliebiges n.

§ 3.

Rationalcurven.

49. Ich habe im vorigen Abschnitte bewiesen, dass die C^n in R_n eine Normalcurve ist, aus welcher man durch geeignetes Projiciren oder Schneiden alle Arten von Rationalcurven in niedrigeren Räumen erhalten kann; es ist desshalb äusserst wichtig, die Eigenschaften der C^n zu studiren.

Nach dem Vorhergehenden lässt sich die C^n durch n Büschel $S_{n-2}^{(1)}, S_{n-2}^{(2)}, \cdots, S_{n-2}^{(n)}$ bestimmen, z. B.

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \lambda^{(2)} p_1^{(2)} = 0, \\ \vdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda^{(1)} p_n^{(1)} + \lambda^{(2)} p_n^{(2)} = 0, \end{cases}$$

d. h. sie ist durch das Verschwinden einer Matrix der folgenden Art gegeben:

$$(2)\qquad \left| \begin{matrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} \\ \vdots & \cdot \;\; \cdot \\ p_n^{(1)} & p_n^{(2)} \end{matrix} \right| = 0.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die C^n auch durch zwei collineare Gebilde $S_0^{(1)}, S_0^{(2)}$ $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe erzeugbar ist, nämlich:

$$(1')\qquad \begin{cases} \mu^{(1)} p_1^{(1)} + \cdots + \mu^{(n)} p_n^{(1)} = 0, \\ \mu^{(1)} p_1^{(2)} + \cdots + \mu^{(n)} p_n^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Nun sehen wir, dass die Axen $S_{n-2}^{(i)}$ der Gebilde des Systems (1) *mit der C^n $n-1$ Punkte gemein haben; daher nennen wir sie Secantenräume der C^n.*

In der That, wenn wir z. B. $S_{n-2}^{(1)}$ mit den übrigen entsprechenden Gebilden $S_{n-2}^{(2)}, \cdots, S_{n-2}^{(n)}$ schneiden, so erhalten wir in $S_{n-2}^{(1)}$ $n-1$ Büschel $S_{n-4}^{(2)}, \cdots, S_{n-4}^{(n)}$, die nach dem Vorhergehenden $n-1$ Punkte bestimmen, welche natürlich in der C^n liegen. Man hat ferner:

Eine Gerade R_1, eine Ebene R_2 u. s. w., ein Raum R_m können mit der C^n höchstens respective 2, 3, u. s. w. $m+1$ Punkte gemein haben. Hätte z. B. ein Raum R_m $m+2$ Punkte mit der C^n gemein, so könnten wir durch ihn und durch andere $n-m-1$ Punkte einen

R_{n-1} legen, der die Curve in $n+1$ Punkten schneiden würde; was nicht möglich ist, ohne dass die C^n in R_{n-1} selbst liegt.

Wir haben also $n-2$ Arten von Secantenräumen zu betrachten, nämlich Secantengeraden, Secantenebenen u. s. w., Secantenräume S_{n-2}.

Wir haben auch:

Ist die Curve durch zwei Gebilde $(n-1)^{ter}$ Stufe $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$ erzeugt, und schneiden sich 2 entsprechende Räume $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$ in einem Raume S_{m-1}, so ist dieser Raum ein Secantenraum der Curve.

In der That, die projectivischen Gebilde in den Räumen $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$, welche zu den Gebilden $(n-1)^{ter}$ Stufe $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$ gehören, schneiden S_{m-1} in zwei collinearen Gebilden $(m-1)^{ter}$ Stufe, die m Punkte gemein haben, welche wieder der Curve C^n angehören.

50. Nehmen wir jetzt einen Punkt A_0 in R_n und legen wir durch A_0 und $S_0^{(1)}$ eine Gerade $S_1^{(1)}$. Dieser Geraden entspricht eine Gerade $S_1^{(2)}$ durch $S_0^{(2)}$, die im Allgemeinen nicht durch A_0 geht; durch $S_1^{(2)}$ und A_0 geht aber eine Ebene $S_2^{(2)}$, welcher eine Ebene $S_2^{(1)}$ durch $S_1^{(1)}$ entspricht. Die zwei collinearen Gebilde $(n-3)^{ter}$ Stufe $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$ erzeugen einen 3-dimensionalen A_0-Kegel $(n-2)^{ter}$ Ordnung. Ist A_0 ein Punkt der Curve, so schneiden sich in ihm die beiden Strahlen $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ und daher sind die Secantenräume durch ihn Secantenräume eines 2-dimensionalen A_0-Kegels $(n-1)^{ter}$ Ordnung. Also:

Alle Secantenräume S_{n-2} der C^n, die durch einen Punkt A_0 gehen, sind die Secantenräume eines 3-dimensionalen A_0-Kegels $(n-2)^{ter}$ Ordnung.

Alle Secantenräume S_{n-2}, die durch einen Punkt A_0 der C^n gehen, sind die Secantenräume eines 2-dimensionalen A_0-Kegels $(n-1)^{ter}$ Ordnung, nämlich des von A_0 ausgehenden die Curve projicirenden Kegels.

Betrachten wir jetzt eine Gerade A_1 und verbinden wir sie mit $S_0^{(1)}$ durch eine Ebene $S_2^{(1)}$, so entspricht derselben eine Ebene $S_2^{(2)}$ durch $S_0^{(2)}$, die A_1 im Allgemeinen weder trifft noch enthält.

Es geht aber durch $S_2^{(2)}$ und A_1 ein Raum $S_4^{(2)}$, welchem ein Raum $S_4^{(1)}$ durch $S_2^{(1)}$ entspricht, und daher sind alle Secantenräume S_{n-2}, die durch A_1 gehen, Secantenräume eines 5-dimensionalen Kegels $(n-4)^{ter}$ Ordnung.

Wird dagegen A_1 von $S_2^{(2)}$ in einem Punkte geschnitten, so geht durch A_1 von $S_2^{(2)}$ ein Raum $S_3^{(3)}$, welchem ein Raum $S_3^{(1)}$ durch $S_2^{(1)}$ entspricht; in diesem Falle sind daher alle Secantenräume S_{n-2} durch A_1 Secantenräume eines 4-dimensionalen A_1-Kegels $(n-3)^{ter}$ Ordnung. Endlich wenn die Ebene $S_2^{(2)}$ durch A_1 geht, d. h. wenn die Gerade A_1 eine Secantengerade der C^n ist, so sind alle Secantenräume S_{n-2} durch A_1 die Secantenräume eines 3-dimensionalen A_1-Kegels $(n-2)^{ter}$ Ordnung, nämlich des von A_1 ausgehenden, die

Curve projicirenden Kegels. Man sieht, wie man fortzufahren hat, um folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

Durch einen beliebigen Raum A_m geht kein Secantenraum S_{n-2} der C^n, wenn $2m + 3 > n + 1$ ist. Dem Raume $S_0^{(1)} A_m$ entspricht in dem collinearen Gebilde $S_0^{(2)}$ ein Raum $S_{m+1}^{(2)}$. Liegen $S_{m+1}^{(2)}$ und A_m in einem Raume R_s, wo $s > m + 1 < n$ ist, so sind alle durch A_m hindurchgehenden Secantenräume S_{n-2} Secantenräume eines $(s + 1)$-dimensionalen A_m-Kegels $(n - s)^{ter}$ Ordnung.

Ist speciell $m = n - 3$, so geht durch A_{n-3} entweder kein Secantenraum S_{n-2} oder einer. Ist $m = n - 4$, so geht durch A_{n-4} entweder kein Secantenraum S_{n-2}, oder einer, oder ∞^1, die einen $(n - 1)$-dimensionalen A_{n-4}-Kegel 2^{ter} Ordnung bilden. Wir erkennen auch, dass keine anderen speciellen Lagen von Räumen A_{n-3}, A_{n-4} gegen die Secantenräume S_{n-2} der C^n vorkommen können.

51. Wir haben im vorigen Abschnitte (Nr. 39.) gesehen, dass von den verschiedenen Lagen, die ein Raum A_{n-m-1} gegen die Curve C^n annehmen kann, die verschiedenen Arten von Rationalcurven n^{ter} oder niedrigerer Ordnung im Raume R_m abhängen. *Je nach der Lage des projicirenden Raumes A_{n-m-1} gegen die Secantenräume S_{n-2} der C^n bekommen wir in R_m verschiedene Hauptarten von rationalen Curven C^n, die wir Species nennen wollen.*

Aus der vorigen Nummer wissen wir, dass ein Raum A_{n-3} zwei verschiedene Lagen in Bezug auf die Secantenräume S_{n-2} haben kann. Entweder nämlich geht durch ihn ein Secantenraum S_{n-2} oder keiner; *daher sind die Rationalcurven n^{ter} Ordnung in der Ebene von 2 Species, entweder haben sie einen $(n - 1)$-fachen Punkt oder nicht,* wobei natürlich ausgeschlossen ist, dass die Curven zerfallen.

Die einzigen Ausnahmefälle sind der Kegelschnitt, der keinen Doppelpunkt haben kann, ohne zu zerfallen, und die rationale Curve 3^{ter} Ordnung, die immer einen Doppelpunkt oder eine Spitze besitzt.

Wir sehen ferner, dass ein Raum A_{n-4} 3 verschiedene Lagen gegen die Secantenräume S_{n-2} der C^n haben kann. Entweder geht durch ihn kein Secantenraum S_{n-2}, oder einer, oder einfach unendlich viele, die einen $(n - 1)$-dimensionalen A_{n-4}-Kegel 2^{ter} Ordnung bilden. *Daher sind die Rationalcurven n^{ter} Ordnung in R_3 von 3 Species: entweder haben sie keine $(n - 1)$-fache Secantengerade, oder eine, oder einfach unendlich viele, die dann einem Hyperboloid angehören, das als Schnitt des R_3 mit dem A_{n-4}-Kegel 2^{ter} Ordnung erhalten wird.*

Die einzigen Ausnahmefälle davon sind die rationalen Curven 3^{ter} und 4^{ter} Ordnung, die nur von einer Species sind, und die von der 5^{ten} Ordnung, welche nur in 2 Species vorkommen. Die Curven fünfter Ordnung der einen Species haben nur eine vierfache Secante, die der zweiten haben deren einfach unendlich viele, die einem Hyperboloid angehören, wie es bekannt ist.

Desgleichen findet man nach den Sätzen der vorigen Nummer, *dass die Rationalcurven n^{ter} Ordnung des R_m von m Species sind. Bei der ersten hat die Curve keinen $(n-1)$-fachen Secantenraum R_{m-2}, bei der zweiten nur einen, bei der dritten einfach unendlich viele, die einen $(m-1)$-dimensionalen R_{m-n}-Kegel 2^{ter} Ordnung bilden etc., und bei der s^{ten}, wo $s \leq m$ ist, einfach unendlich viele, welche die Secantenräume S_{n-2} eines $(n-s+2)$-dimensionalen R_{m-2s+2}-Kegels $(s-1)^{ter}$ Ordnung sind, der eine gewöhnliche Fläche (ohne Kegelspitze) sein wird, sobald $m-2s+2$ eine negative Zahl ist.* Wir finden auch:

Bei den Rationalcurven n^{ter} Ordnung in R_m können auch $(n-2)$-fache Secantenräume R_{m-2}, $(n-3)$-fache Secantenräume R_{m-3} u. s. w. $(n-m+2)$-fache Secantengeraden auftreten, da nämlich der projicirende Raum A_{n-m-1} in einem Secantenraum S_{n-3}, S_{n-4} etc. S_{n-m+2} der C^n liegen kann. Daher hat man bei $m > 3$ noch *Unterspecies*, die wir nicht weiter studiren.

52. Für die Entstehung der Singularitäten der Rationalcurven in niedrigeren Räumen als R_n will ich folgende Beispiele für die rationalen Curven C^4 und C^5 in R_3 und R_2 geben. Analoge Betrachtungen werden auch für solche Curven gelten, die ein höheres Geschlecht besitzen.

1. Beispiel. *Die Rationalcurven C^4.*

Es geht aus der 50. Nummer hervor, dass alle Secantenebenen der C^4 in R_4 (welche die C^4 in 3 Punkten schneiden) eine 3-fach unendliche Mannigfaltigkeit bilden, und dass alle Secantenebenen durch einen beliebigen Punkt A_0 von R_4 ein einfach unendliches System von Ebenen eines 3-dimensionalen A_0-Kegels 2^{ter} Ordnung $K_3{}^2$ bilden. Daher wird die C^4 von einem beliebigen Punkte A_0 des R_4 in einen Raum S_3 nach einer Curve C'^4 projicirt, welche mit den Geraden eines Systems von Erzeugenden eines Hyperboloids (Schnitt von S_3 mit dem Kegel $K_3{}^2$) 3 Punkte gemein hat. Die C'^4 ist also eine allgemeine Curve 4^{ter} Ordnung, wie sie gewöhnlich von der 2^{ten} Species genannt wird, die aber in unserem Sinne der 1^{ten} und einzigen Species angehört, die für die rationalen C^4 in R_3 existirt.

Der Kegel $K_3{}^2$ hat auch ein zweites System von Ebenen, und da zwei Ebenen von verschiedenen Systemen in einem R_3 liegen, so st klar, dass die Ebenen des zweiten Systems von $K_3{}^2$ die Curve C^4 aes R_4 nur in einem Punkte schneiden.

Liegt nun der Punkt A_0 in einer Secantengeraden oder in einer Tangente von C^4, *so erhält die C'^4 einen Doppelpunkt oder eine Spitze.*

Liegt A_0 in einer Schmiegungsebene der C^4, *so erhält die C'^4 eine Inflexionstangente.* Zwei nicht aufeinander folgende Schmiegungsebenen der C^4 schneiden sich in einem Punkte A_0; projiciren wir die C^4 von diesem Punkte aus, *so erhält die C'^4 zwei Inflexionstangenten.*

Projicirt man ferner die C^4 von einer beliebigen Geraden A_1 in eine Ebene S_2, so erhält man in S_2 eine C''^4 mit drei Doppelpunkten. *Eine beliebige Gerade A_1 von R_4 schneidet also drei Secantengeraden der C^4.*

Nehmen wir umgekehrt drei Secantengeraden der C^4, so giebt es immer eine Transversale A_1, die sie alle drei schneidet (Nr. 26.); wenn eine, zwei oder alle drei Secanten Tangenten sind, *so erhält die C''^4 eine, zwei oder drei Spitzen.*

Liegt A_1 in einer Secantenebene der C^4, *so erhält die C''^4 einen dreifachen Punkt mit getrennten Tangenten.*

Berührt die Secantenebene die Curve, *so erhält die C''^4 im dreifachen Punkte eine Spitze.*

Liegt endlich A_1 in einer Schmiegungsebene der C^4, *so erhält die C''^4 einen dreifachen Punkt mit lauter zusammenfallenden Tangenten.*

Diese Arten der rationalen Curven vierter Ordnung in R_2 und R_3 sind alle bekannt; wir sehen auf unserem Wege, wie leicht und anschaulich sie aus einer einzigen Quelle erhalten werden können.

Zweites Beispiel. Die Rationalcurven C^5.

Wir wollen jetzt nur die verschiedenen Arten der rationalen C^5 in R_3 hervorheben. Man muss zu diesem Zwecke die C^5 des R_5 von einer Geraden A_1 in R_3 projiciren. *Im Allgemeinen geht durch eine Gerade A_1 nur ein Secantenraum S_3 der C^5, daher bekommt die Projectionscurve C'^5 in R_3 im Allgemeinen nur eine vierfache Secante.* Es kann aber auch geschehen, dass durch A_1 unendlich viele Secantenräume S_3 gehen, die dann einen 4-dimensionalen Kegel zweiter Ordnung bilden. *Daher erhält dann die C'^5 unendlich viele vierfache Secantengeraden, die eine Regelschaar in R_3 bilden.*

Liegt A_1 in einem Schmiegungsraume R_3 der C^5, *so erhält die C'^5 eine dreifache berührende Tangente. Die C'^5 zweiter Species kann zwei solche Tangenten haben,* weil zwei nicht folgende Schmiegungsräume R_3 der C^5 in einer Geraden A_1 sich schneiden. Schneidet A_1 eine oder zwei Secantengeraden der C^5, *so erhält die C'^5 einen oder zwei Doppelpunkte;* wenn eine dieser Geraden oder beide Tangenten sind, *so erhält die C'^5 eine oder zwei Spitzen.*

Liegt A_1 in einer Secantenebene der C^5, *so erhält die C'^5 einen dreifachen Punkt mit zusammenfallenden Tangenten.*

In analoger Weise kann man natürlich die verschiedenen Arten der rationalen Curven 6ter, 7ter Ordnung u. s. w. in R_2 und R_3 etc. studiren.

Ich bemerke auch, dass, wenn in einer Curve oder in einer Fläche F_2, F_3, F_4, ..., F_{m-1} des R_n Configurationen von Punkten, Geraden,

$R_2, \ldots, R_{m-1}$ existiren, die gewisse projectivische Beziehungen zu jener Curve oder Fläche haben, dieselben durch die Projection in einen niederen Raum R_m nicht zerstört werden können.

§ 4.

Die in einer Ebene eindeutig abbildbaren 2-dimensionalen Linienflächen.*)

53. Die in eine Ebene eindeutig abbildbaren Linienflächen bilden die einfachste Classe von den eindeutig abbildbaren 2-dimensionalen Flächen, von denen wir in der Anmerkung sprechen. Sie sind alle die Projection einer „normalen" Linienfläche, welche selbst eine Projection der in der Anmerkung genannten „Normalfläche" ist.

Die F_2^{n-1} in R_n ist die 2-dimensionale Fläche niedrigster Ordnung des Raumes R_n (Nr. 4.); sie wird von irgend einem Raume R_{n-1} in einer Normalcurve C^{n-1} geschnitten.

Wir wollen insbesondere diejenige F^2_{n-1} in R_n betrachten, die

*) *Alle 2-dimensionalen Flächen des Raumes R_n, deren Schnittcurven mit den Räumen R_{m-1} von R_m durch Curven n^{ter} Ordnung in einer Ebene eindeutig abbildbar sind, sind immer die Projectionen einer einzigen Normalfläche der Ordnung n^2 des Raumes $R_{\frac{n(n+3)}{2}}$, deren Punkte folgendermassen sich darstellen lassen:*

$$(1)\quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : \cdots : x_{\frac{n(n+3)}{2}+1} = \xi_1^{\,n} : \xi_2^{\,n} : \xi_3^{\,n} : \xi_1^{\,n-1}\xi_2 : \xi_1^{\,n-1}\xi_3 : \cdots : \xi_2\xi_3^{\,n-1}.$$

Die Glieder rechter Hand sind die verschiedenen Potenzen der drei homogenen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3. Die Parameter ξ_1, ξ_2, ξ_3, als die Coordinaten eines Punktes der Ebene angesehen, liefern die eindeutige Abbildung der Fläche (1) in der Ebene. Man sieht, *dass die Schnittcurven der Fläche* (1) *mit den Räumen $R_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$ des $R_{\frac{n(n+3)}{2}}$ durch Curven n^{ter} Ordnung sich abbilden, die keine Punkte* (*Fundamentalpunkte*) *gemein haben.*

Projicirt man die Fläche von einem ihrer Punkte in einen Raum $R_{\frac{n(n+3)}{2}-1}$, so erhält man eine Fläche der Ordnung n^2-1, die sich evident durch Curven n^{ter} Ordnung abbildet, welche einen Fundamentalpunkt gemein haben. Und allgemein, *wenn man die Normalfläche durch einen Raum $R_{\frac{n(n-1)}{2}-1}$, der mit ihr $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkte gemein hat, in einen Raum R_n projicirt* (da $R_{\frac{n(n-1)}{2}-1}$ und R_n duale Räume in $R_{\frac{n(n+3)}{2}}$ sind), *so erhält man in R_n eine Fläche der Ordnung $\frac{n(n+1)}{2}$, deren Schnittcurven mit den Räumen R_{n-1} des R_n durch Curven n^{ter} Ordnung sich abbilden, welche $\frac{n(n-1)}{2}$ Fundamentalpunkte gemein haben.*

Eine solche Fläche des R_n wird durch n collineare Gebilde zweiter Stufe durch $n-1$ projectivische Büschel oder, was dasselbe ist, durch zwei collineare Gebilde $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ erzeugt wird. Es seien

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda^{(1)}p_1^{(1)}+\cdots+\lambda^{(n-2)}p_1^{(n-1)}=0,\\ \lambda^{(1)}p_2^{(1)}+\cdots+\lambda^{(n-2)}p_2^{(n-1)}=0\end{cases}$$

die zwei collinearen Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ $(n-2)^{\text{ter}}$ Stufe.

Die Fläche ist dann:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} p_1^{(1)}, & \ldots, & p_1^{n-1}\\ p_2^{(1)}, & \ldots, & p_2^{n-1}\end{vmatrix}=0;$$

sie wird also zugleich von den $n-1$ Büscheln

$S_{n-3}^{(1)},\cdots, S_{n-3}^{(n)}$ *oder durch drei collineare Gebilde* $(n-1)^{ter}$ *Stufe* $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$, $S_0^{(3)}$ erzeugt. Wir schreiben die conjugirten Systeme der Fläche folgendermassen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi_1 A^{(1)}+\xi_2 B^{(1)}+\xi_3 C^{(1)}=0,\\ \xi_1 A^{(2)}+\xi_2 B^{(2)}+\xi_3 C^{(2)}=0,\\ \quad\vdots\\ \xi_1 A^{(n)}+\xi_2 B^{(n)}+\xi_3 C^{(n)}=0,\end{cases}$$

$$(1')\qquad \begin{cases} \lambda^{(1)}A^{(1)}+\cdots+\lambda^{(n)}A^{(n)}=0,\\ \lambda^{(1)}B^{(1)}+\cdots+\lambda^{(n)}B^{(n)}=0,\\ \lambda^{(1)}C^{(1)}+\cdots+\lambda^{(n)}C^{(n)}=0.\end{cases}$$

Die Coordinaten der Punkte dieser Fläche aus dem System (1) lassen sich folgendermassen darstellen:

$$(2)\qquad x_1:\cdots\cdots:x_{n+1}$$

$$=\begin{vmatrix} \xi_1 a_2^{(1)}+\xi_2 b_2^{(1)}+\xi_3 c_2^{(1)}, & \xi_1 a_3^{(1)}+\xi_2 b_3^{(1)}+\xi_3 c_3^{(1)}, & \cdots, & \xi_1 a_{n+1}^{(1)}+\xi_2 b_{n+1}^{(1)}+\xi_3 c_{n+1}^{(1)}\\ \xi_1 a_2^{(2)}+\xi_2 b_2^{(2)}+\xi_3 c_2^{(2)}, & \xi_1 a_3^{(2)}+\xi_2 b_3^{(2)}+\xi_3 c_3^{(1)}, & \cdots, & \xi_1 a_{n+1}^{(2)}+\xi_2 b_{n+1}^{(2)}+\xi_3 c_{n+1}^{(2)}\\ \vdots & & & \vdots\\ \xi_1 a_2^{(n)}+\xi_2 b_2^{(n)}+\xi_3 c_2^{(n)}, & \xi_1 a_3^{(n)}+\xi_2 b_3^{(n)}+\xi_3 c_3^{(n)}, & \cdots, & \xi_1 a_{n+1}^{(n)}+\xi_2 b_{n+1}^{(n)}+\xi_3 c_{n+1}^{(n)}\end{vmatrix}\ \text{etc.}$$

oder

$$x_1:\cdots:x_{n+1}=f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3):\cdots:f_{n+1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3),$$

wo $f_1,\ldots,f_{n+1}$ homogene rationale Functionen n^{ten} Grades in ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind. Betrachtet man wie vorher ξ_1,ξ_2,ξ_3 als Coordinaten eines Punktes der Ebene, so findet man in der That, dass die Schnittcurven der Fläche (2) mit den Räumen R_{n-1} des R_n durch C^n sich abbilden, welche $\frac{n(n-1)}{2}$ Fundamentalpunkte gemein haben.

Die Normalfläche (1) *spielt für die eindeutig in eine Ebene abbildbaren Flächen die analoge Rolle wie die rationale Normalcurve* C^n *für die rationalen Curven.*

Ich wünsche das Studium dieser Flächen zu vervollständigen und werde bei einer andern Gelegenheit meine betreffenden Resultate publiciren.

$$(1')\qquad \begin{cases} \mu^{(1)}p_1^{(1)} + \mu^{(2)}p_2^{(1)} = 0, \\ \vdots \\ \mu^{(1)}p_1^{(n-1)} + \mu^{(2)}p_2^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

erzeugt. *Die Fläche hat einfach unendlich viele erzeugende Geraden,* wie aus (1′) ersichtlich ist, *daher bezeichnen wir sie mit dem Symbol* $R_1 - F_2^{n-1}$.

Betrachten wir die Erzeugung der Fläche durch die zwei Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$. *Die Geraden* $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ *sind zwei Erzeugenden der* $R_1 - F_2^{n-1}$, *und daher auch nach Nr.* 46. *alle Axen der Gebilde des Systems* (1).

Zwei entsprechende Räume $S_{n-1}^{(1)}$, $S_{n-1}^{(2)}$ durch $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ schneiden sich in einem Raume S_{n-2}, der die F_1^{n-1} in einer Curve C^{n-2} trifft; denn die collinearen Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ in $S_{n-1}^{(1)}$, $S_{n-1}^{(2)}$ schneiden S_{n-2} in zwei colinearen Gebilden $(n-3)^{\text{ter}}$ Stufe $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$, die eine C^{n-2} der F_2^{n-1} erzeugen. *Wir nennen* S_{n-2} *einen Secantenraum der Fläche* $R_1 - F_2^{n-1}$. *Diese Secantenräume sind an Zahl* ∞^{n-2}, *und schneiden die* F_2^{n-1} *in rationalen Normalcurven* C^{n-2}.

Schneiden sich zwei entsprechende Räume $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$ durch $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ in einem Raume S_a, $a < m - 1 < n - 2$, so sieht man in analoger Weise wie vorher, dass S_a $a + 1$ Punkte mit der F_2^{n-1} gemein hat. *Wir nennen* S_a *einen Secantenraum erster Art.* Derselbe hat mit der Curve $a + 1$ Punkte gemein, während im Allgemeinen ein Raum R_a die $R_1 - F_2^{n-1}$ nirgendwo schneidet.

Schneiden sich die beiden entsprechenden Räume $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$ in einem Raume S_{m-1}, so beweist man in derselben Weise, *dass dieser Raum die* $R_1 - F_2^{n-1}$ *in einer Normalcurve* C^{m-1} *schneidet. Wir nennen einen solchen Raum einen Secantenraum* S_{m-1} *zweiter Art.*

Es ist nicht nöthig eine solche Unterscheidung für die Secantenräume S_{n-2} zu machen, da jeder beliebige S_{n-2} die F_2^{n-1} in $n-1$ Punkten schneidet.

Aus der Construction der Fläche hat man schliesslich noch folgenden Satz:

Wenn man $n-1$ *beliebige Secantenräume* S_{n-2} *mit den Punkten der* $R_1 - F_2^{n-1}$ *verbindet, so erhält man* $n-1$ *projectivische Büschel, welche die Fläche erzeugen.*

54. Betrachten wir jetzt einen Punkt A_0 des R_n, und verbinden wir ihn mit $S_1^{(1)}$ durch eine Ebene $S_2^{(1)}$; so entspricht derselben eine Ebene $S_2^{(2)}$ durch $S_1^{(2)}$, die im Allgemeinen nicht durch A_0 geht. Es geht aber durch $S_2^{(2)}$ und durch A_0 ein Raum $S_3^{(2)}$, welchem ein Raum $S_3^{(1)}$ durch $S_2^{(1)}$ entspricht. Die zwei collinearen Gebilde $(n-4)^{\text{ter}}$ Stufe $S_3^{(1)}$, $S_3^{(2)}$ erzeugen also ∞^{n-4} Secantenräume S_{n-2} der $R_1 - F_2^{n-1}$, welche Secantenräume eines 4-dimensionalen A_0-Kegels $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung sind.

Geht die Ebene $S_2^{(2)}$ durch A_0, so ist A_0 ein Punkt der F_2^{n-1} selbst, denn ein R_{n-1} durch A_0 schneidet die $R_1 - F_2^{n-1}$ in einer durch A_0 hindurchlaufenden C^{n-1}. Also:

Die $R_1 - F_2^{n-1}$ ist der Ort aller derjenigen Punkte, in denen sich zwei entsprechende Ebenen von zwei collinearen Gebilden des Systems (1) *schneiden.*

Durch einen beliebigen Punkt A_0 des R_n gehen ∞^{n-4} Secantenräume S_{n-2}, welche Secantenräume eines 4-dimensionalen A_0-Kegels $(n-3)^{ter}$ Ordnung sind.

Liegt A_0 in der Fläche, so gehen durch ihn ∞^{n-3} Secantenräume S_{n-2}, welche Secantenräume eines 3-dimensionalen Kegels sind, nämlich des von A_0 ausgehenden projicirenden Kegels der $R_1 - F_2^{n-1}$.

Betrachten wir jetzt eine Gerade A_1, so finden wir:

Alle durch eine beliebige Gerade hindurchgehenden Secantenräume S_{n-2} bilden eine ∞^{n-6}-fache Mannigfaltigkeit, welche die Secantenräume eines 6-dimensionalen A_1-Kegels $(n-5)^{ter}$ Ordnung sind. Die Gerade A_1 kann auch so liegen, dass durch sie ∞^{n-5} Secantenräume S_{n-2} hindurchgehen, welche die Secantenräume eines 5-dimensionalen A_1-Kegels $(n-4)^{ter}$ Ordnung bilden.

Ist endlich die Gerade A_1 eine Secantengerade der $R_1 - F_2^{n-1}$, d. h. trifft sie die $R_1 - F_2^{n-1}$ in zwei Punkten, so gehen durch sie ∞^{n-4} Secantenräume S_{n-2}, welche die Secantenräume eines 4-dimensionalen A_1-Kegels $(n-3)^{ter}$ Ordnung sind, nämlich des von A_1 ausgehenden projicirenden Kegels der $R_1 - F_2^{n-1}$.

Aus dem letzten Satze geht auch hervor:

Eine Gerade A_1 kann mit der R_1-Fläche höchstens zwei Punkte gemein haben, ohne ganz in der Fläche enthalten zu sein.

Ist allgemein ein Raum A_m gegeben, so findet man:

Verbindet man A_m mit $S_1^{(1)}$, so erhält man einen Raum $S_{m+2}^{(1)}$, welchem ein Raum $S_{m+2}^{(2)}$ durch $S_1^{(2)}$ entspricht. Liegen A_m und $S_{m+2}^{(1)}$ in einem Raume R_s, wo $s \leq n-1 > m+2$ ist, so sind alle Secantenräume S_{n-2} der $R_1 - F_2^{n-1}$ durch A_m die Secantenräume eines $(s+1)$-dimensionalen A_m-Kegels $(n-s)^{ter}$ Ordnung.

Im speciellen Falle geht durch einen A_{n-4} kein Secantenraum S_{n-2}, oder nur einer.

Man findet aus diesem Satze:

Ein Raum R_m ist entweder kein Secantenraum, oder ein Secantenraum erster oder zweiter Art der $R_1 - F_2^{n-1}$.

55. Wir können eine Parameterdarstellung der $R_1 - F_2^{n-1}$ leicht aufstellen. Zu dem Zwecke schneiden wir sie mit zwei Räumen R_{n-1}. Wir haben dann zwei Normalcurven C^{n-1}, deren Punkte durch rationale Functionen $(n-1)^{ten}$ Grades eines Parameters λ sich darstellen lassen. Die Fläche hat einfach unendlich viele geradlinige Erzeugenden, die auf beiden Curven zwei projectivische Punktreihen ausschneiden. Ein Punkt der $R_1 - F_2^{n-1}$ kann daher in der Form:

(1) $$\sigma x_i = \varphi_i'(\lambda) + \mu\, \varphi_i''(\lambda)$$

geschrieben werden.*)

Umgekehrt kann jede R_1-Fläche, für welche die Formeln (1) *bestehen, durch $n - 1$ projectivische Büschel erzeugt werden.* Diese Fläche ist daher auch durch zwei collineare Gebilde $(n - 2)^{\text{ter}}$ Stufe $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ erzeugbar.

Die zwei Axen $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ können keine specielle Lage unter einander haben. *Denn treffen sie sich in einem Punkte R_0, so wird die $R_1 - F_2^{n-1}$ ein R_0-Kegel,* und diesen Fall haben wir hier nicht näher zu betrachten. Die speciellen Lagen aber, die zwei entsprechende Räume $R_2, R_3, \ldots, R_{n-2}$ der beiden Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ im einzelnen Falle haben mögen, kommen nothwendigerweise auch bei allen andern Fällen vor. Daher müssen alle eigentlichen $R_1 - F_2^{n-1}$ des R_n projectivisch gleichberechtigt sein.

Wir nennen die $R_1 - F_2^{n-1}$ daher die in eine Ebene eindeutig abbildbare Normal R_1-Fläche des R_n.

Wenn man jetzt in irgend einem Raume R_m eine Linienfläche $(m - 1)^{\text{ter}}$ oder niedriger Ordnung hat, so kann man die Coordinaten ihrer Punkte in der Form (1) darstellen; wir haben also:

Jede Normal-$R_1 - F_2^{m-1}$ des R_m $(m < n)$ kann durch Projection der Normalfläche $R_1 - F_2^{n-1}$ des R_n von einem R_{n-m-1} aus, der $n - m$ beliebige Punkte mit der $R_1 - F_2^{n-1}$ gemein hat, erhalten werden.

Jede beliebige in einer Ebene eindeutig abbildbare Linienfläche in $R_3, R_4, \ldots, R_{n-1}$ von niederer als der n^{ten} Ordnung ist immer die eindeutige Projection einer Normalfläche $R_1 - F_2^{n-1}$ des R_n. Und umgekehrt aus einer solchen Normalfläche kann man durch geeignete Projection jede Art von in einer Ebene eindeutig abbildbaren Flächen der $(n - 1)^{\text{ten}}$ oder niedrigerer Ordnung erhalten.

Beispiele von der Wichtigkeit dieser Sätze geben wir im nächsten Paragraphen.

56. Wie bei den rationalen Curven (Nr. 51.) kann man bei unseren Flächen ebenfalls eine Unterscheidung in Species machen, je nach der

---

*) Siehe Clebsch, Mathem. Annalen Bd. I. Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p = 0$ (in R_3).

Die Abbildungsgleichungen sind also $\varrho x_i = \xi_3 \cdot \varphi_i(\xi_1 \xi_3) + \xi_2 \cdot \psi_i(\xi_1 \xi_3)$, wo $\lambda = \frac{\xi_1}{\xi_3}$, $\mu = \frac{\xi_2}{\xi_3}$, und ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten eines Punktes der Ebene andeuten.

Die Schnitte der $R_1 - F_2^{n-1}$ mit den Räumen R_{n-1} des R_n bilden sich also als Curven n^{ter} Ordnung ab. Dieselben haben einen $(n - 1)$ fachen Punkt bei $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ und einen einfachen Punkt bei $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ und daher ausserdem noch $n - 1$ einfache Fundamentalpunkte gemein.

Lage des projicirenden Raumes gegen die Secantenräume S_{n-2} der Fläche $R_1 - F_2^{n-1}$; und in Unterspecies je nach der Lage des projicirenden Raumes gegen die anderen Secantenräume derselben. Es ist nicht schwer zu sehen, *dass die Linienflächen* ($p = 0$) *in* R_m ($m < n$) *von* $m - 1$ *Species sind.*

Im Raume R_3 *sind sie speciell von zwei Species, entweder haben sie, nach Nr.* 54., *keine* ($n - 2$)*-fache Gerade, oder nur eine.*

In analoger Weise kann man die auf einen Raum R_m eindeutig abbildbaren F_m studiren.

§ 5.

Die Flächen F_2^3, F_2^6, F_3^4 des R_4, die durch collineare Grundgebilde erzeugt werden.*)

57. *2-dimensionale Flächen dritter Ordnung* F_2^3.

Wir betrachten zwei collineare Gebilde zweiter Stufe $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$, d. h.

$$(1) \qquad \begin{cases} \lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \lambda^{(2)} p_2^{(1)} + \lambda^{(3)} p_3^{(1)} = 0, \\ \lambda^{(1)} p_1^{(2)} + \lambda^{(2)} p_2^{(2)} + \lambda^{(3)} p_3^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Sie erzeugen eine F_2^3, nämlich:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & p_3^{(1)} \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & p_3^{(2)} \end{vmatrix} = 0,$$

die auch aus den drei folgenden projectivischen Büscheln $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_3^{(3)}$

---

*) Wenn man eine F_2^m in R_n von einem beliebigen Punkte A_0 in einen R_3 projicirt, so erhält man in R_3 eine 2-dimensionale Fläche $F_2'^m$ derselben Ordnung. Man kann die Charaktere der F_2^m durch diejenigen von $F_2'^m$ bestimmen, und umgekehrt kann man die Singularitäten der $F_2'^m$ durch die F_2^m studiren. Ich will nur einige Charaktere hervorheben.

Eine Gerade durch A_0, welche die Fläche F_2^m in zwei Punkten B_0, C_0 schneidet, liefert einen *biplanaren* Punkt $B_0' \equiv C_0'$ der $F_2'^m$. Die Tangentialebenen in B_0 und C_0 an die F_2^m werden in die beiden Tangentialebenen, welche in B_0' $F_2'^m$ berühren, projicirt.

Liegen die zwei in B_0 und C_0 construirbaren Tangentialebenen in einem Raume R_3 durch A_0, so erhält die $F_2'^m$ in B_0' einen *uniplanaren* Punkt.

Liegt A_0 in der Tangentialebene von B_0, *so erhält die* $F_2'^m$ *einen Doppelpunkt, bei welchem der osculirende Kegel zweiter Ordnung sich auf eine Gerade reducirt, nämlich auf die Schnittlinie der Tangentialebene in* B_0 *mit* R_3.

Ein conischer Doppelpunkt der $F_2'^m$ muss also durch einen conischen Doppelpunkt der F_2^m selbst hervorgerufen sein.

Ein Raum S_3, welcher durch die in B_0 berührende Tangentialebene hindurchgeht, schneidet die F_2^m in einer Curve mit einem Doppelpunkte in B_0, deren zwei Tangenten in der Tangentialebene liegen.

Aus einem parabolischen Punkte der $F_2'^m$ erhält man zwei unendlich nahe Tangentialebenen der F_2^m, die in einem R_3 liegen, der durch A_0 geht, d. h. die in einem Schmiegungsraume R_3 der F_2^m liegen.

$$(1')\qquad \begin{cases} \mu^{(1)}p_1^{(1)} + \mu^{(2)}p_1^{(2)} = 0, \\ \mu^{(1)}p_2^{(1)} + \mu^{(2)}p_2^{(2)} = 0, \\ \mu^{(1)}p_3^{(1)} + \mu^{(2)}p_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

construirt werden kann.

Aus dem vorigen Paragraphen geht hervor, *dass die F_2^3 eine Linienfläche $R_1 - F_2^3$ ist, und dass sie ∞^2 Secantenebenen besitzt, die sie in einem Kegelschnitte schneiden, während jede andere Ebene die $R_1 - F_2^3$ in drei Punkten schneidet.*

Die entsprechenden Ebenen von zwei collinearen Gebilden des Systems (1) *schneiden sich je in einem Punkte, der der Fläche angehört.*

Betrachten wir jetzt drei Erzeugende der F_2^3. Dieselben können sich nicht wechselseitig schneiden; denn durch einen Punkt der F_2^3 geht nur eine Erzeugende derselben, wie aus der zweiten Erzeugung ersichtlich ist. Sie können auch nicht in einem R_3 liegen, weil eine Gerade, welche drei Erzeugende trifft, ganz in der Fläche enthalten ist, und daher das durch die drei Erzeugenden bestimmte Hyperboloid zur F_2^3 gehören würde, die F_2^3 also in eine Ebene und ein Hyperboloid zerfallen würde. Aber drei beliebige Erzeugende der F_2^3 haben eine Transversale gemein (Nr. 26.), die natürlich alle anderen Erzeugenden trifft, da sie in F_2^3 selbst liegt. Wir haben also folgenden Satz:

Alle Erzeugenden der F_2^3 haben eine und nur eine Transversale d_1 gemein, die wir als Directrixgerade d_1 bezeichnen.

58. Indem wir die erste Erzeugung unserer Fläche näher betrachten, sehen wir, dass man die Ebenen der beiden collinearen Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ oder die Punkte der F_2^3 auf die Punkte einer Ebene Σ_2 abbilden kann. Wir haben:

Die F_2^3 ist Punkt für Punkt in einer Ebene Σ_2 abbildbar. Den Geraden von Σ_2 entsprechen die Kegelschnitte der F_2^3, den Raumcurven C^3 der F_2^3 entsprechen Kegelschnitte von Σ_2, die durch einen Fundamentalpunkt gehen, welchem die Directrixgerade d_1 der F_2^3 entspricht.

Wir finden auch folgende Sätze:

Sind vier beliebige Gerade in R_4 gegeben, die aber eine gemeinsame Transversale d_1 haben, so ist durch sie eine F_2^3 bestimmt. Denn nimmt man zwei von diesen Geraden als $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ an, so kann man die zwei collinearen Gebilde $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ mit Hülfe der übrigen zwei Geraden in nur einer Weise bestimmen.

Durch zwei Kegelschnitte in zwei Ebenen $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, die sich in dem Schnittpunkte der beiden Ebenen schneiden, und durch eine dritte Ebene $S_2^{(3)}$, ist eine und nur eine F_2^3 bestimmt, die $S_2^{(3)}$ als Secantenebene hat, und durch beide Kegelschnitte hindurchgeht.

59. Aus dem vorigen Paragraphen geht hervor, *dass durch einen* *beliebigen Punkt A_0 von R_n nur eine Secantenebene der F_2^3 geht; wenn aber der Punkt A_0 in F_2^3 selbst liegt, so bilden alle Secantenebenen durch ihn das System von Ebenen eines 3-dimensionalen A_0-Kegels zweiter Ordnung.*

Durch einen beliebigen Punkt A_0 geht also nur eine Secantenebene E_2. *Es giebt ausser dieser Ebene keine Gerade, die durch A_0 geht und dabei die F_2^3 in zwei Punkten schneidet.* Denn ist eine solche Gerade vorhanden, so lege man durch sie und durch eine Gerade von E_2, welche durch A_0 hindurchgeht, eine Ebene. Diese Ebene hat dann vier Punkte mit der F_2^3 gemein, sie ist also nach dem letzten Satze der Nr. 54. eine Secantenebene der F_2^3, d. h. durch den Punkt A_0 gehen zwei Secantenebenen der F_2^3, was nicht möglich ist. Ziehen wir jetzt durch A_0 in der Secantenebene E_2 eine Gerade, die den Kegelschnitt K^2 derselben, der zu der F_2^3 gehört, in zwei Punkten X_0, Y_0 schneidet. Durch X_0, Y_0 gehen zwei Erzeugende X_1, Y_1 der F_2^3, welche die Directrix in zwei Punkten X_0', Y_0' schneiden. Dieselben liegen also mit d_1 in einem Raume R_3, der natürlich durch A_0 geht. Drehen wir die Gerade $X_0\,Y_0$ um A_0 in E_2, so bilden $X_0\,Y_0$ eine Involution in K^2, und daher auch die Punkte $X_0'\,Y_0'$ auf d_1. Also:

Alle Räume R_3, welche durch die Directrix d_1 und einen beliebigen Punkt A_0 des R_4 hindurchgehen, schneiden die F_2^3 in Paaren von Erzeugenden, die eine Involution bilden. Man hat auch:

Die Directrixgerade d_1 schneidet keine Secantenebene der F_2^3.

60. *Jetzt projiciren wir die F_2^3 von einem beliebigen Punkte A_0 in allen möglichen Weisen in einen Raume S_3; so erhalten wir in S_3 nach den Sätzen der Nr. 55. alle Arten von Linienflächen dritten und zweiten Grades.*

Wir bekommen im Allgemeinen in S_3 eine Linienfläche dritten Grades $F_2'^3$. Alle Erzeugenden der F_2^3 werden von A_0 in die Erzeugenden der $F_2'^3$ projicirt, und da alle Erzeugenden der F_2^3 den Kegelschnitt K^2 von E_2 schneiden, so sieht man, dass die $F_2'^3$ eine Doppelgerade e_1 hat, die von allen Erzeugenden geschnitten wird. Die Directrix d_1 der F_2^3 wird in eine Gerade d_1' der $F_2'^3$ projicirt, die alle ihre Erzeugenden schneidet. Das Büschel von Räumen R_3, die durch A_0 und d_1 hindurchgehen, bestimmt in S_3 ein Büschel von Ebenen R_2, die durch d_1' hindurchgehen, und welche die $F_2'^3$ in zwei Geraden x_1', y_1' schneiden. Diese Geraden treffen sich offenbar auf der Geraden e_1. Und da x_1, y_1 eine Involution bilden, so bilden auch x_1', y_1' eine Involution.

Liegt A_0 ausserhalb des Kegelschnittes K^2, so kann man durch ihn an K^2 zwei Tangenten ziehen, welche *die zwei in e_1 gelegenen Cuspidalpunkte* der $F_2'^3$ ausschneiden. Liegt dagegen A_0 innerhalb von K^2, so fallen diese Tangenten und mit ihnen die Cuspidalpunkte fort.

Wenn A_0 in einer Ebene liegt, die durch d_1 und eine beliebige Erzeugende von F_2^3 geht, *so entsteht in* S_3 *eine* $F_2'^3$, *für welche die Doppelgerade* e_1 *mit der Directrix* d_1' *zusammenfällt.*

Projicirt man die F_2^3 von einem ihrer Punkte A_0, so erhält man in S_3 eine Linienfläche zweiten Grades. Das System der Directricen derselben wird durch die unendlich vielen durch A_0 hindurchgehenden Secantenebenen veranlasst.

Diese verschiedenen Arten der Linienflächen dritten Grades des R_3 sind lange bekannt, aber wir sehen hier, wie man sie *alle* aus einer einzigen Fläche durch Projection erhalten kann. Zugleich erkennt man an diesem Beispiele, wie man in andern Fällen zu verfahren hat.

61. *2-dimensionale Flächen* F_2^6, *die durch drei collineare Gebilde dritter Stufe* $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$, $S_0^{(3)}$ *oder durch vier collineare Gebilde zweiter Stufe* $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$, $S_1^{(3)}$, $S_1^{(4)}$ *erzeugt werden.*

Ich theile hier über diese Fläche nur die Sätze mit:

Sie geht durch alle Scheitel S_0 *der Gebilde des ersten Erzeugungssystems, und sie hat alle Axen* S_1 *der Gebilde des zweiten als dreifache Secantengeraden.*

Ein beliebiger Raum R_3 *des* R_4 *schneidet die* F_2^6 *in einer allgemeinen* C^6 *vom Geschlechte* $p = 3$.

Aus der ersten Erzeugung der F_2^6 geht hervor:

Die F_2^6 *hat* ∞^3 *dreifache Secantengeraden. Durch einen beliebigen Punkt des* R_n *geht nur eine solche Secante hindurch; und die dreifachen Secantengeraden durch einen Punkt* R_n *der* F_2^6 *selbst bilden einen 2-dimensionalen* R_0*-Kegel dritter Ordnung.*

Aus der zweiten Erzeugung haben wir:

Bezieht man eine Ebene Σ_2 *auf vier collineare Gebilde zweiter Stufe des* R_4, *welche dem zweiten Erzeugungssystem gehören, so entspricht jedem Punkte bez. jeder Geraden von* Σ_2 *respective ein Punkt und eine rationale Normalcurve* C^4 *der* F_2^6. *Zwei solche Normalcurven schneiden sich immer in einem und nur in einem Punkte.*

Den Schnittcurven C^6 *aller* R_3 *des* R_4 *mit* F_2^6 *entsprechen in* Σ_2 *Curven vierter Ordnung des Geschlechtes* $p = 3$, *die zehn Fundamentalpunkte gemein haben, welche im Allgemeinen beliebig liegen. Den letzteren entsprechen zehn Geraden der* F_2^6. — *Dieselben schneiden sich wechselweise nicht.* —

Den zehn Curven dritter Ordnung durch neun der zehn Fundamentalpunkte in Σ_2 *entsprechen zehn ebene Curven dritter Ordnung* Z^3 *der* F_2^6.

Den 45 *Verbindungslinien der zehn Fundamentalpunkte entsprechen* 45 *Kegelschnitte der* F_2^6.

Den Geraden, die durch einen Fundamentalpunkt hindurchgehen, entsprechen Raumcurven C^3 *der* F_2^6.

Je zwei Kegelschnitten in Σ_2, die respective durch die zehn Fundamentalpunkte gehen, entsprechen ein Paar von Raumcurven C^3 der F_2^6, die in einem R_3 liegen. Es giebt 120 solche Paare.

Einer Curve vierter Ordnung in Σ_2, die einen Fundamentalpunkt als Doppelpunkt hat und durch die übrigen hindurchgeht, entspricht eine C^5 der F_2^6, die in einem R_3 liegt, welcher durch eine Gerade der Fläche hindurchgeht.

Den 45 C^4 von Σ_2, die zwei Fundamentalpunkte als Doppelpunkte haben und durch die übrigen hindurchgehen, entsprechen Curven C^4 der F_2^6, die respective in den 45 Räumen R_3 liegen, welche durch die zehn Geraden der F_2^6 zwei zu zwei bestimmt werden. Allen C^3 durch acht der zehn Fundamentalpunkte in Σ_2 entsprechen Curven C^4 der F_2^6, deren Räume R_3 durch den Kegelschnitt gehen, welcher dem verbindenden Strahle der zwei übrigen Fundamentalpunkte entspricht.

62. Projiciren wir jetzt die F_2^6 von einem beliebigen Punkte A_0 des R_4 in einen Raum S_3, *so erhält man eine $F_2'^6$, welche, wie man leicht sieht, eine Doppelcurve siebenter Ordnung besitzt.* Da durch A_0 eine dreifache Secantengerade der F_2^6 geht, *so hat die $F_2'^6$ einen triplanaren Punkt, der in die Doppelcurve selbst fällt.*

Die $F_2'^6$ hat zehn Geraden, und es giebt zehn Ebenen (die den Curven Z^3 der F_2^6 entsprechen), welche die $F_2'^6$ in zwei Curven dritter Ordnung schneiden.

In analoger Weise findet man für die $F_2'^6$ die entsprechenden Sätze zu allen andern Sätzen der vorigen Nummer.*)

Man kann die F_2^6 insbesondere aus einem ihrer Punkte projiciren. Man erhält dann in S_3 eine $F_2'^5$, welche eine Doppelcurve dritter Ordnung besitzt, wie aus der vorigen Nummer hervorgeht.

Andere interessante Flächen erhält man in S_3, wenn man den Projectionspunkt in verschiedenen andern Lagen gegen die F_2^6 annimmt.

Wenn die Erzeugungssysteme der F_2^6 speciell sind, so bekommt man specielle F_2^6, F_2^5, F_2^4 des R_4, und durch Projection erhält man in S_3 specielle in einer Ebene eindeutig abbildbare Flächen $F_2'^6$, $F_2'^5$, $F_2'^4$, $F_2'^3$, die ich der Kürze halber nicht weiter studiren will.

63. Endlich wollen wir etwas über die F_3^4 des R_4, die durch vier collineare Gebilde dritter Stufe erzeugbar ist, mittheilen.

Die F_3^4 ist Punkt für Punkt in einen Raum Σ_3 abbildbar und man erhält folgende Sätze:

Vier collineare Gebilde $S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(4)}$ dritter Stufe in R_4 erzeugen eine 3-dimensionale Fläche F_3^4. Sie besitzt zwei conjugirte Erzeugungs-

*) Es scheint mir diese Fläche $F_2'^6$ des R_3 ganz neu zu sein, obgleich Clebsch, Cremona und Nöther mit anderen in einer Ebene eindeutig abbildbaren $F_2'^6$, welche auch 10 Geraden besitzen, sich beschäftigt haben.

systeme dritter Stufe, welchen zwei Systeme von Normalcurven C^4 *und zwei Systeme von* F_2^6 *entsprechen.* (Nr. 47.)

Zwei Flächen F_2^6, *die verschiedenen Systemen angehören, liegen in einer* F_3^3.

Eine C^4 *und eine* F_2^6 *desselben Systems treffen sich in einem und nur in einem Punkte, sofern die* C^4 *nicht selbst in* F_2^6 *liegt. Zwei* F_2^6 *desselben Systems schneiden sich in einer* C^4.

Die zwei Systeme der F_2^6 *und der* C^4 *sind gleichberechtigt.*

Die F_3^4 *hat* ∞ *viele Geraden, die den Punkten einer* C^{10} *des Bildraumes* Σ_3 *entsprechen.*

Es giebt ∞^2 *viele Ebenen, welche die* F_3^4 *in zwei Kegelschnitten schneiden.*

Ich habe in dieser Arbeit die nächtstliegenden projectivischen Beziehungen zwischen den Räumen von verschiedenen Dimensionen behandelt; es bleiben aber viele interessante Fragen nicht nur für den Raum von n Dimensionen, sondern auch für den gewöhnlichen Raum zu erledigen.

Leipzig, im Sommer 1881.