Ma Q_v, Q_p non restano determinati, quando si conosca solamente l'equazione caratteristica del corpo.

6. — Termino col notare una analogia curiosa. Per un'evoluzione finita si ha

$$Jq = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} Jt \frac{d\Phi}{dn} \frac{d\sigma}{dn} d\sigma :$$

si immagini ora, che un punto si muova sulla curva σ sollecitato da una forza uguale a $Jt \frac{d\Phi}{dn}$ in grandezza ed agente nella direzione n: il lavoro da essa sviluppato mentre il punto passa dalla posizione σ_0 alla σ_1 è uguale precisamente al valore del secondo membro dell'equazione scritta testè; mentre il primo rappresenta il lavoro equivalente al calore speso durante il passaggio del corpo dallo stato corrispondente alla posizione iniziale del punto a quello corrispondente alla posizione finale del medesimo ».

Il Socio Battaglini presenta una Memoria del sig. Giuseppe Veronese, studente dell'Università di Roma, intitolata: *Nuovi teoremi sull'hexagrammum mysticum*, e legge il seguente sunto a nome dell'Autore:

« Come è noto, le 60 rette di Pascal, che si ottengono da 6 punti di una conica, s'incontrano tre a tre in 20 punti di Steiner, situati quattro a quattro in quindici rette di Steiner-Plücker. Quelle 60 rette s'incontrano pure tre a tre in 60 punti di Kirkman, situati tre a tre in 20 rette di Cayley-Salmon, passanti quattro a quattro per 15 punti di Salmon, e su ciascuna delle quali è situato un punto di Steiner. Hesse cercò di rilevare in questa figura una certa reciprocità rispetto ad una conica, ch'egli chiamò *ideale* fra i punti di Kirkman e le rette di Pascal, fra i punti di Steiner e le rette di Cayley-Salmon, fra i punti di Salmon e le rette di Steiner-Plücker.

Se dei quindici lati dei 6 punti fondamentali si tralasciano quelli di un esagono, formato con essi, restano ancora nove lati che determinano altri tre esagoni, le cui rette di Pascal s'incontrano in un punto di Kirkman, che corrisponde in certa guisa alla retta di Pascal di quel primo esagono. Ebbene, io dimostro che le 60 rette di Pascal si scindono in 6 gruppi di dieci rette, che contengono i loro dieci punti di Kirkman corrispondenti, e che sono polari di essi rispetto ad una conica; onde in tutto l'esagrammo si hanno 6 di tali coniche. Cinque di queste figure determinano la sesta. Importanti sono le relazioni che legano insieme queste 6 figure π e vengono da esse dedotti con maggior evidenza e simmetria i teoremi già noti. Oltre di ciò, io dimostro che non solamente c'è il sistema [Kp] delle 60 rette di Pascal e dei 60 punti di Kirkman, ma bensì infiniti sistemi analoghi [Zz] ciascun dei quali si compone di sei figure analoghe alle π del sistema [Kp], che dànno luogo pure ad altre 6 coniche; cinque di queste figure determinano una figura del sistema precedente ed una del seguente, ad eccezione del primo sistema [Kp], di cui cinque figure determinano la sesta dello stesso sistema e una del secondo. La figura dei punti di Steiner e delle rette di Cayley-Salmon è comune a tutti questi nuovi sistemi. Essi non sono dati però da 6 punti di una conica come il primo, sono legati bensì fra di loro da certi punti e rette fisse, che hanno curiose ed importanti proprietà, e da

certe involuzioni, generate dalle 60 rette e dai 60 punti dei diversi sistemi intorno ai punti di Steiner e sulle rette di Cayley-Salmon. Siccome io spiego la maggior parte dei teoremi dell'esagrammo per mezzo dei triangoli prospettivi, così faccio precedere al mio lavoro alcuni teoremi sulle figure prospettive che, per quanto io so, non furono ancora considerati ».

Il Socio CREMONA prende allora la parola e, premesse alcune riflessioni per mettere in evidenza i pregi del lavoro testè presentato dal collega Battaglini, aggiunge quanto segue:

« Avendomi il sig. Veronese pregato di leggere la sua Memoria, io feci pensiero di verificare i risultati in essa contenuti per una via diversa da quella che l'A. aveva seguita. Mentr' egli si è attenuto sempre alla geometria piana, io ebbi ricorso allo spazio a tre dimensioni e propriamente ad una superficie di terzo ordine dotata di un punto doppio, ed ottenni così delle figure che projettate dal punto doppio somministrano immediatamente quelle del sig. Veronese.

Per brevità di discorso, applicherò ai punti ed alle rette dello spazio le denominazioni che competono alle loro projezioni. Oltre alle 6 rette situate sul cono tangente che ha il vertice nel punto doppio, la superficie cubica ha 15 rette situate a tre a tre in 15 piani tritangenti. Due piani tritangenti non aventi in comune una retta della superficie si segano lungo una retta di Pascal; le coppie analoghe di piani tritangenti sono 60 (che in projezione dànno i 60 esagoni formabili con 6 punti di una conica), epperò si hanno 60 rette di Pascal. Esse costituiscono a tre a tre gli spigoli di 10 coppie di triedri conjugati [1]; dove i triedri di una coppia si intersecano fra loro lungo 9 rette della superficie. I vertici di questi triedri, conjugati a due a due, sono i 20 punti di Steiner.

C'è un'altra specie di triedri; se prendiamo una retta di Pascal, i due piani tritangenti che passano per essa contengono sei rette della superficie; le altre nove rette formano allora tre triangoli che sono le facce d'un triedro della seconda specie. I triedri analoghi sono 60; i loro vertici sono i punti di Kirkman, coordinati per tal modo alle rette di Pascal. I due piani tritangenti la cui intersezione è una retta di Pascal e i tre piani tritangenti che concorrono nel corrispondente punto di Kirkman formano un pentaedro, i cui dieci vertici sono tutti punti di Kirkman e i cui dieci spigoli sono le corrispondenti rette di Pascal. I pentaedri analoghi sono sei, e dànno in projezione le sei figure π del sig. Veronese.

Due pentaedri hanno sempre nn piano comune, ma i vertici e gli spigoli sono tutti differenti.

Ogni retta di Pascal contiene un punto di Steiner; le otto rette di Pascal che sono in uno stesso piano tritangente concorrono a due a dne in quattro punti di Steiner che sono in una retta (retta di Steiner-Plücker). Il numero delle rette analoghe è 15, una in ciascun piano tritangente. Pei detti quattro punti di Steiner passano altre quattro rette di Pascal e queste giacciono in uno stesso piano, che dirò piano di Plücker. Come le rette di Steiner-Plücker così anche i piani di Plücker sono coordinati ai piani tritangenti, epperò in numero di 15.

[1] Cremona, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3e ordre* (Berlin 1868), n° 148.