

La superficie omaloide normale a due dimensioni
e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni
e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario ⁽¹⁾.

Memoria del prof. G. VERONESE

approvata con relazione al Presidente

nelle ferie accademiche dell'anno 1883-84.

Nella mia Memoria *Behandlung der proj. Verhältnisse der Räume von verschiedenen dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* ⁽²⁾, ho notato che tutte le superficie a due dimensioni rappresentabili punto a punto in un piano (omaloidi, unicursali) mediante curve d'ordine n o minore di n , si deducono per proiezione univoca dalla superficie normale omaloide $F_2^{n^2}$ a due dimensioni d'ordine n^2 dello spazio a $n \frac{(n+3)}{2}$ dimensioni per mezzo di spazî proiettanti

duali a quelli in cui si vuol proiettare; per es. mediante spazî a $n \frac{(n+3)}{2} - 4$ dimensioni se si proietta nel nostro spazio. Di questa superficie ho già date alcune proprietà principali in un'altra Memoria presentata a codesta illustre Accademia non ancora pubblicata; intanto però pubblico qui i risultati da me ottenuti per la più semplice di queste superficie, cioè per la F_2^4 del 4° ordine dello spazio a cinque dimensioni.

Questa superficie viene tagliata in generale da uno spazio qualunque a quattro dimensioni in una curva normale del 4° ordine ⁽³⁾, da uno spazio a tre dimensioni in quattro punti e da un piano in nessun punto. Essa possiede però un sistema doppiamente infinito di *piani secanti di 1ª specie* che la intersecano in una conica, i quali costituiscono una superficie del 3° ordine e a 4 dimensioni M_4^3 . Ha invece un sistema sei volte infinito di *piani secanti di 2ª specie*, che la incontrano soltanto in tre punti. Essa possiede inoltre un sistema doppiamente infinito di piani tangenti, che s'incontrano due a due nei punti della superficie M_4^3 e costituiscono la superficie di 3ª classe reciproca di questa, nei cui spazî a quattro dimensioni sono situati due a due i piani secanti di 1ª specie

⁽¹⁾ Come altrove chiamo spazî i soli spazî lineari, tranne che il punto, la retta e il piano a cui conservo le loro denominazioni comuni. Gli altri spazî non lineari sono per me curve, coni, superficie a due o più dimensioni, oppure sistemi di rette, di piani, di spazî contenuti nello spazio a n dimensioni.

⁽²⁾ Math. Annalen, vol. XIX. Nota alla pag. 221.

⁽³⁾ A. ib. pag. 222.

Gli spazî a quattro dimensioni che toccano la F_2^4 lungo una conica (spazî tangenti doppi) costituiscono la superficie F_2^4 di 4^a classe e a due dimensioni reciproca della F_2^4 . La F_2^4 (come la $F_2^{n^2}$) non ha alcuna singolarità speciale, o in altre parole tutti i suoi punti hanno le stesse proprietà. Essa si lascia generare facilmente mediante tre forme proiettive fondamentali particolari di 2^a specie, i cui assi sono tre dei suoi piani secanti di 1^a specie. Gli spazî corrispondenti a quattro dimensioni di queste tre forme s'incontrano nei piani secanti di 1^a specie della F_2^4 , cioè generano la superficie M_4^3 , mentre gli spazî corrispondenti a tre dimensioni s'incontrano nei punti della F_2^4 .

La rappresentazione piana della F_2^4 si ottiene in due modi diversi, mediante una proiezione univoca fatta da un piano qualunque di 1^a o di 2^a specie. Questo doppio modo di proiezione mi conduce a dedurre dalla F_2^4 per successive proiezioni e sezioni univoche due piani qualunque fra loro in corrispondenza Cremoniana e per conseguenza anche le proprietà principali delle trasformazioni piane Cremoniane. Faccio analoghe considerazioni sulle trasformazioni razionali dello spazio a tre dimensioni, che svolgerò meglio alla prossima pubblicazione dell'anzidetta mia Memoria sulla $F_2^{n^2}$.

Dalla F_2^4 si ottengono per proiezione da una retta S_1 sopra lo spazio ordinario tutte le superficie rappresentabili nel nostro spazio mediante un sistema triplamente infinito di curve del 2^o ordine, e perciò anche la superficie di Steiner, che è stata principalmente studiata da Weierstrass, Kummer, Schröter, Cremona, Cayley, Clebsch, Reye e Sturm (¹).

Segando la F_2^4 con lo spazio ordinario si ottengono le superficie reciproche.

Il metodo qui seguito è principalmente sintetico e *intuitivo*, come nelle altre mie Memorie sulla geometria a n dimensioni. Dico intuitivo perchè per me il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni in quello a n dimensioni sono elementi di *natura nota*, cioè hanno sempre lo stesso significato, quello che posseggono nello spazio ordinario; e quindi i corpi a più di tre dimensioni generati con questi elementi sono essi stessi parzialmente intuitivi, perocchè vengono rappresentati nella nostra mente non già per mezzo di equazioni, ma mediante figure geometriche (²).

(¹) Weierstrass e Kummer, Monatsberich. der Berl. Ak. 1863. — Schröter, ib. e Giorn. di Crelle, vol. 64. — Cremona, ib. e Rendiconti dell'Ist. Lomb. 1867. — Cayley, Giorn. di Crelle, vol. 67. — Clebsch, id. — Reye, *Geometrie der Lage*, II Abth. — Sturm, Math. Annalen, vol. III.

(²) Ritengo opportuno, se non necessario, di chiarire bene in questa occasione il concetto dello spazio a n dimensioni, che sta a fondamento delle mie ricerche, onde non essere frainteso.

In un corso di lezioni elementari sui fondamenti della geometria a n dimensioni tenute in quest'anno nella R. Università di Padova ho stabiliti gli assiomi del segmento rettilineo, e costruita la retta, ho dato l'assioma delle parallele nel senso euclideo. Ammessa come ipotesi fondamentale che fuori del segmento rettilineo e degli enti costruiti per mezzo di esso vi siano sempre dei punti, o in altre parole ammesso che non ci sia alcun limite nel numero delle dimensioni degli enti costruibili col segmento rettilineo, ho fatto vedere come si costruisce con esso il piano, lo spazio a tre e a un numero qualsiasi di dimensioni, dimostrando per tutti e in modo analogo le loro proprietà fondamentali. La geometria descrittiva (A. *Sulla geom. descrittiva a quattro dimensioni*. Atti del r. Istituto veneto, apr. 1882) serve poi per costruire i modelli (proiezioni) delle figure dello spazio a quattro e a n dimensioni nel nostro spazio, e per conseguenza anche le proiezioni in un piano, foglio del disegno. Non si può dunque dubitare che le figure dedotte per proiezione o per sezione da quelle dello

§ 1. *Proprietà dedotte dalla rappresentazione piana.*

1. Ricordo qui i seguenti teoremi: Quando uno spazio S_m ha $p+1$ punti comuni con uno spazio S_p ($m > p$), lo contiene per intero.

Due spazî S_m e $S_{m'}$ nello spazio a n dimensioni s'incontrano in generale in uno spazio S_a , ove $a = m + m' - n$. E se s'incontrano invece in uno spazio S_{a+d} , cioè se hanno $a+d+1$ punti indipendenti comuni, tali cioè da non essere situati in uno spazio a meno di $a+d$ dimensioni, i due spazî S_m , $S_{m'}$ sono contenuti in uno spazio a $n-d$ dimensioni.

spazio a n dimensioni non esistano. Si vede adunque che il mio punto di partenza non è soltanto sintetico ma altresì rappresentativo senza alcun substrato analitico, ove l'elemento generatore non è già un elemento di natura qualsiasi, ma il punto tale quale ce lo immaginiamo nel nostro spazio. Ed è per questo che in tali ricerche possiamo aiutarci di continuo con figure tracciate sulla carta per rappresentarci punti, rette, piani, curve e superficie dello spazio a n dimensioni, le quali sono in qualche modo la prospettiva delle figure corrispondenti in questo spazio. Ecco anche la ragione per cui non posso adottare la parola piano adoperata da altri per designare uno spazio lineare a n dimensioni, perchè per me il piano è sempre lo stesso, sì nello spazio ordinario come in un altro spazio qualunque. Ecco anche perchè non posso adottare la definizione puramente analitica accettata comunemente di un tale spazio, come cioè un continuo dove un elemento (di natura qualsiasi) è determinato da n quantità; imperocchè se è vero che questa definizione abbraccia tutte le interpretazioni geometriche, non è men vero che abbracciandole tutte non ne determina alcuna, e non è quindi rappresentativa. Non sono più dunque i risultati dell'analisi che rivesto del linguaggio sintetico, ma sono le costruzioni geometriche da cui parto, a cui applico poi il metodo analitico, quando lo credo opportuno, precisamente come avviene nella geometria analitica ordinaria.

Il principio poi di proiezione e sezione, che è per sè stesso un principio eminentemente sintetico e intuitivo, applicato in tutta la sua generalità e sistematicamente allo studio della geometria proiettiva a n dimensioni (A. I. c.) non è soltanto interessante per sè stesso, ma specialmente in quanto esso conduce a quest'altro principio fondamentale, che per quanto mi consta non fu mai applicato da alcuno, nemmeno in qualche suo caso particolare, e cioè:

Tutte le configurazioni di $n+1$ punti distinti, tutte le curve o superficie a 2, 3 ecc. $m-1$ dimensioni di uno spazio S_m (e perciò anche del nostro spazio) trasformabili razionalmente le une nelle altre, si deducono per proiezione o sezione univoca da una piramide fondamentale di $n+1$ punti, da una curva o superficie normale a 2, 3 ecc. $m-1$ dimensioni dello spazio a n dimensioni.

L'importanza di questo principio, svolto nei miei lavori pubblicati e da pubblicarsi, risiede nel fatto che un ente normale è del tutto generale senza specialità rispetto ai suoi punti, e costruito e studiato che sia, non si ha che a fare delle semplici sezioni e proiezioni univoche per ottenere tutti gli enti della medesima classe negli spazî inferiori, il cui studio diretto, lo si noti bene, è in generale più complicato di quello dell'ente normale corrispondente. Osservo anche che il principio di proiezione o sezione si applica con molta utilità a quegli enti, che pure non essendo normali si lasciano costruire facilmente, come per es., tutte quelle superficie a due dimensioni o curve, che vengono generate mediante forme fondamentali collineari, molte tra le quali non sono rappresentabili punto a punto in un piano. In questo principio trova pieno svolgimento l'altro principio matematico col quale da semplici proprietà particolari si passa a semplici proprietà generali, per dedurre poi da queste proprietà particolari più complicate.

Possiamo dire che: tutte le proprietà proiettive di uno o più enti di un dato spazio, si ottengono sempre mediante o sole proiezioni, o sole sezioni, o mediante le une e le altre combinate insieme.

Inoltre si ha che la somma delle dimensioni di due spazî duali in S_n è uguale a $n-1$.

2. Come dalla costruzione del piano mediante una retta e un punto fuori di essa, di uno spazio a tre dimensioni S_3 mediante un piano e un punto fuori di esso, si dimostra che il piano contiene ∞^2 punti S_0 e ∞^2 rette S_1 ; che lo spazio S_3 contiene ∞^3 punti S_0 , ∞^4 rette S_1 , ∞^3 piani S_2 , così dalle analoghe costruzioni per gli spazî S_4 e S_5 risulta che:

Lo spazio S_4 contiene $\infty^4 S_0$, $\infty^6 S_1$, $\infty^6 S_2$, $\infty^4 S_3$.

Lo spazio S_5 contiene $\infty^5 S_0$, $\infty^8 S_1$, $\infty^9 S_2$, $\infty^8 S_3$, $\infty^5 S_4$.

E in generale che: lo spazio S_n contiene $\infty^{(n-m)} \infty^{(m+1)}$ spazî S_m ($m < n$).

Il numero degli spazî $m+1$, $m+2$, e a $n-1$ dimensioni che passano per uno spazio S_m si ottengono congiungendo con esso tutti i punti, le rette e gli spazî a $n-m-2$ dimensioni di uno spazio duale S_{n-m-1} .

Dò qui anche i due seguenti teoremi, dei quali ho fatto un uso continuo nelle mie Memorie precedenti sulla geometria a n dimensioni, senza dare però mai di essi un enunciato speciale, e cioè:

Quando uno spazio S_m ha p punti comuni con una configurazione di q punti, con una curva o con una superficie a 2, 3, ecc. m dimensioni dello spazio S_n ($n > m$) e di q^{mo} ordine ($c > p$), e si proietta da S_m questi enti in uno spazio duale S_{n-m-1} , non avente con S_m alcun punto comune (come avviene in generale), le proiezioni sono configurazioni di $q-p$ punti, curve o superficie a 2, 3... m dimensioni dell'ordine $q-p$.

Se lo spazio S_m ha con una superficie F_2^s a due dimensioni e d'ordine s una curva comune C^r ($r < s$), uno spazio S_{n-1} passante per S_m taglia la F_2^s in un'altra curva C^{s-r} . Se p è il numero dei punti d'incontro della C^{s-r} colla C^r , qualunque sia lo spazio S_{n-1} , la proiezione della superficie nello spazio S_{n-m-1} è una superficie a due dimensioni d'ordine $n-r-p$.

Analogamente per le superficie a 3 ecc. a m dimensioni. Il numero p dipende evidentemente dalla natura della F_2^s stessa.

3. Nello spazio a cinque dimensioni S_5 abbiamo come elementi il punto S_0 , la retta S_1 , il piano S_2 , lo spazio S_3 e lo spazio S_4 .

Due, tre, quattro e cinque spazî S_4 s'incontrano rispettivamente in uno spazio S_3 , in un piano S_2 , in una retta S_1 e in un punto S_0 .

Uno spazio S_4 incontra una retta S_1 , un piano S_2 , uno spazio S_3 rispettivamente in un punto, in una retta e in un piano.

Due spazî S_3 s'incontrano in una retta, e se s'incontrano in un piano sono situati in uno spazio S_4 .

Uno spazio S_3 e un piano S_2 s'incontrano in un punto e se s'incontrano in una retta sono situati in uno spazio S_4 .

Uno spazio S_3 e una retta S_1 non s'incontrano, se s'incontrano in un punto sono situati in uno spazio S_4 .

Due piani S_2 non s'incontrano, se s'incontrano in un punto sono situati in uno spazio S_4 , se s'incontrano in una retta giacciono in uno spazio S_3 .

Un piano S_2 e una retta S_1 non s'incontrano, sono sempre situati in uno spazio S_4 , se s'incontrano giacciono in uno spazio S_3 .

Due rette sono situate sempre in uno spazio S_3 , se s'incontrano appartengono ad un piano.

4. Sia dato ora un piano Σ_2 , e alle curve di 2° ordine di esso facciamo corrispondere gli spazi S_4 dello spazio a 5 dimensioni S_5 . È chiaro che agli spazi S_3, S_2, S_1, S_0 corrispondono i sistemi di coniche una, due, tre, quattro volte infiniti. Tutte le coniche passanti per un punto A_0' del piano Σ_2 formano un sistema quattro volte infinito, che vien determinato cioè da cinque coniche indipendenti. A questo sistema corrisponde un sistema quadruplicemente infinito di spazi S_4 , che viene determinato da cinque di essi, i quali s'incontrano in un punto A_0 comune a tutti gli spazi S_4 del sistema. Ai punti del piano Σ_2 corrispondono dunque ∞^2 punti dello spazio S_5 , che costituiscono una superficie del 4° ordine a 2 dimensioni F_2^4 . Infatti uno spazio S_3 incontra la F_2^4 in quattro punti, che corrispondono ai punti fondamentali di un fascio di coniche del piano Σ_2 , i quali possono essere tutti reali o immaginari, due reali e due immaginari, tutti in parte coincidenti. Chiamo la F_2^4 la superficie omaloide normale a 2 dimensioni dello spazio S_5 . Ad una curva di 2° ordine di Σ_2 corrisponde sulla F_2^4 una *curva del 4° ordine* C^4 razionale, che è una *curva normale* contenuta nello spazio S_4 corrispondente a quella conica ⁽¹⁾. Due rette qualunque in Σ_2 costituiscono una curva di 2° ordine con un punto doppio A_0' : a questa conica corrisponde in F_2^4 una C^4 con un punto doppio A_0 , cioè una C^4 che si scompone in due coniche incontrantisi in un punto A_0 . Lo spazio S_4 che le contiene passa evidentemente per le tangenti di esse nel punto A_0 , che sono anche tangenti alla F_2^4 , e sono quindi situate nel piano tangente in A_0 alla F_2^4 , perchè tutte le tangenti in un punto di una superficie di 2 dimensioni in uno spazio qualsivoglia sono in generale situate in un piano. Lo spazio S_4 passa dunque pel piano tangente alla superficie nel punto A_0 ; lo chiamo *spazio tangente* della F_2^4 nel punto A_0 e lo indico col simbolo T_4 ⁽²⁾. Dunque: La F_2^4 possiede un sistema doppiamente infinito di coniche K . Per due punti di essa passa una sola conica, e per un punto ne passano ∞^1 . Le tangenti alle coniche passanti per un punto sono situate nel piano tangente T_2 in questo punto alla F_2^4 .

Due coniche K qualsivogliano s'incontrano in un punto A_0 , e sono situate in uno spazio T_4 tangente in A_0 alla F_2^4 .

Le coniche K sono situate in altrettanti piani, che chiamo piani secanti di 1ª specie S_2 . Due tali piani s'incontrano in un punto della F_2^4 , e sono situati in uno spazio tangente T_4 . Non possono incontrarsi in una retta, o in altre parole, non possono essere situati in uno spazio S_3 , perchè le due coniche K situate in essi dovrebbero aver due punti

⁽¹⁾ A. l. c. p. 207, e 219.

⁽²⁾ In generale chiamo spazio tangente di una superficie a due dimensioni F_2^m in S_n uno spazio S_{n-1} passante per un piano tangente. Questo spazio incontra la F_2^m in una curva C^{m-1} con un punto doppio nel punto di contatto.

comuni, oppure perchè la loro retta d'intersezione dovrebbe avere tre punti comuni con la F_2^4 , ciò che non è possibile. Un piano di S_3 non ha in generale alcun punto comune colla F_2^4 , ma ne può avere uno, due, o al più tre, senza essere però un piano secante di 1^a specie. Nel caso che abbia tre punti comuni lo chiamo piano secante di 2^a specie M_2 .

La F_2^4 contiene ∞^3 curve normali razionali C^4 del 4^o ordine. Una conica K e una curva C^4 qualunque s'incontrano in due punti. Due C^4 s'incontrano in quattro punti. Per cinque punti qualsiano di F_2^4 passa una sola C^4 .

Tutte le C^4 che passano per quattro punti della F_2^4 dirò che formano un *fascio*. Si ha:

Per un punto A_0 di F_2^4 passano due coniche K che toccano una C^4 data.

Le curve C^4 di un fascio incontrano una conica K in due punti mobili, che formano un'involuzione. Ci sono due curve del fascio che la toccano nei due punti doppi dell'involuzione.

Alle coniche di una schiera in Σ_2 corrispondono le C^4 di una schiera sulla F_2^4 , e si ha:

Per un punto A_0 di F_2^4 passano due C^4 che toccano quattro coniche date K . Per il punto A_0 passano due coniche K che toccano una curva C^4 della schiera, le tangenti a queste coniche K in A_0 formano un'involuzione i cui raggi doppi sono le tangenti alle due prime curve C^4 .

Il piano tangente in un punto A_0 e un piano secante di 1^a specie passante per A_0 s'incontrano in una retta tangente in A_0 alla conica K del piano secante, vale a dire sono situati in uno spazio S_3 , quindi:

Per un piano tangente T_2 e per un piano secante S_2 passante pel punto di contatto passano ∞^1 spazi tangenti T_4 .

5. Una retta del piano rappresentativo Σ_2 può essere considerata come una curva del 2^o ordine, e quindi corrisponde ad essa uno spazio speciale che ha in comune con la F_2^4 la sola conica K corrispondente a quella retta, dunque si ha:

Fra gli infiniti spazi T_4 passanti per un piano secante S_2 ce n'è uno solo che taglia la F_2^4 in due coniche coincidenti. Questo spazio lo indico col simbolo U_4 e lo chiamo spazio *tangente doppio* della F_2^4 lungo la conica K in esso contenuta. Essendo U_4 uno spazio T_4 speciale si ha:

Uno spazio U_4 contiene tutti i piani tangenti alla F_2^4 nei punti della sua conica K di contatto. Gli spazi U_4 corrispondono alle rette del piano Σ_2 , e per conseguenza:

Gli ∞^2 spazi U_4 tangenti doppi della F_2^4 costituiscono la superficie reciproca F_2^4 di 4^a classe a due dimensioni, tale cioè che per un punto S_0 dello spazio S_3 passano ∞^1 spazi U_4 che formano un cono — S_0 a 2 dimensioni della 4^a classe, che indico con γ^4 ⁽¹⁾. Così si vede che per una retta qualunque S_1 dello spazio S_3 passano quattro spazi U_4 tangenti doppi della F_2^4 , che possono

(¹) Sui caratteri di una curva e per conseguenza dei coni a 2 dimensioni aventi per vertice un punto, o per asse una retta, un piano ecc. in S_n , vedere la mia citata Memoria p. 167 e pag. 195 e seg.

essere tutti reali o immaginari, due reali e due immaginari, tutti o in parte coincidenti.

Due spazi qualunque tangenti U_4 passano per un piano tangente, perchè le due coniche K di essi s'incontrano in un punto A_0 , e il piano tangente in A_0 è situato evidentemente nei due spazi.

Due piani tangenti individuano un solo spazio U_4 , perchè pei loro due punti di contatto passa una sola conica K , la conica di contatto di U_4 .

Mentre due punti di F_2^4 determinano un piano secante, due spazi U_4 determinano un suo piano tangente.

Vediamo dunque che c'è perfetta reciprocità fra i punti di F_2^4 e i suoi spazi doppi U_4 , fra i suoi piani secanti S_2 e i suoi piani tangenti T_2 .

Siccome due piani secanti S_2 non possono incontrarsi in una retta, e sono situati in uno spazio T_4 passante pel piano tangente T_2 nel punto d'incontro dei due piani S_2 , si ha:

Due piani tangenti s'incontrano in un punto, nel punto d'incontro delle due tangenti alla conica K , che passa pei loro due punti di contatto, in questi punti. Non possono incontrarsi in una retta S_1 , o ciò che è lo stesso, non possono giacere in uno spazio S_3 .

6. Questa reciprocità fra la F_2^4 e la F_2^4 , viene determinata anche dalla dualità tra i punti e le rette, le curve del 2° ordine e le curve di 2ª classe del piano rappresentativo Σ_2 , e quindi si ha:

Tutti gli spazi U_4 passanti per un punto A_0 di F_2^4 (che passano pel piano tangente in A_0 e rispettivamente per tutte le coniche K passanti per A_0) costituiscono un cono X di 2ª classe a 2 dimensioni, avente per asse il piano tangente in A_0 .

Rispetto alla F_2^4 i piani tangenti T_2 di F_2^4 li chiamerò *piani proiettanti di 1ª specie*.

Per un piano qualunque non passa alcun spazio U_4 di F_2^4 , ma ne possono passare uno, due o tre senza che esso sia un piano proiettante di 1ª specie. In questo ultimo caso lo chiamerò *piano proiettante di 2ª specie della F_2^4* .

Tutti i coni γ^4 i cui vertici stanno sopra una retta S_1 hanno quattro spazi U_4 comuni. Dirò che formano una *schiera*.

Uno spazio U_4 è comune a due coni X , aventi rispettivamente un altro spazio U_4 in comune con un dato cono γ^4 .

I coni γ^4 di una schiera hanno rispettivamente due spazi U_4 tangenti comuni con un cono X , i quali formano un'involuzione. Ci sono due coni γ^4 pei quali i due spazi coincidono, negli spazi doppi dell'involuzione.

7. Una conica in Σ_2 può essere considerata come curva di 2° ordine e come curva di 2ª classe; nel primo caso le corrisponde una C^4 normale di F_2^4 situata in uno spazio S_4 , e nel secondo caso le corrisponde un cono di 4ª classe γ^4 di F_2^4 , avente per vertice un punto S_0 dello spazio S_3 . Alle tangenti alla conica in Σ_2 corrispondono le coniche K di F_2^4 , che toccano la C^4 , e alle stesse rette nella rappresentazione duale corrispondono gli spazi U_4 tangenti la F_2^4 lungo quelle coniche, i quali formano il cono γ^4 . Dunque:

Tutti gli spazî U_4 , che toccano la F_2^4 lungo le coniche K tangenti ad una curva normale C^4 di uno spazio S_4 qualunque, passano per un punto S_0 e costituiscono un cono γ^4 . E per dualità:

Tutti i punti, vertici dei coni X di 2^a classe della F_2^4 aventi due a due uno spazio S_3 comune (nel quale s'incontrano due spazî infinitamente vicini del cono) col cono di 4^a classe di un punto S_0 qualunque sono situati in una curva C^4 di uno spazio S_4 . Diremo in tal caso che il cono γ^4 tocca la F_2^4 lungo la curva C^4 corrispondente.

8. Si vede pure che mentre la tangente ad una curva C^4 , che è l'intersezione di un piano tangente e di un piano secante, è situata nello spazio S_4 della curva, lo spazio S_3 ove s'incontrano due spazî U_4 infinitamente vicini di un cono γ^4 , il quale spazio congiunge un piano tangente e un piano secante (cioè il piano secante di uno degli U_4 e il piano tangente comune con lo spazio infinitamente vicino), passa pel vertice del cono S_0 del cono γ^4 , o in altre parole:

Se un piano tangente e un piano secante s'incontrano in una retta S_1 tangente della F_2^4 , questa è situata in tutti gli spazî S_4 delle C^4 a cui quella retta è tangente. Essi sono situati inoltre in uno spazio S_3 che passa per tutti i vertici S_0 dei coni γ^4 pei quali S_3 è lo spazio d'intersezione di due dei loro spazî U_4 infinitamente vicini.

9. Ad un punto A_0' di Σ_2 riguardato come curva di 2^a classe corrispondono tutti gli spazî U_4 tangenti lungo le coniche K passanti pel punto corrispondente A_0 della F_2^4 . Il passaggio però da questa rappresentazione alla duale è in questo caso indeterminato, poichè due rette qualunque passanti per A_0' si possono considerare come la curva del 2^o ordine determinata da quel punto, e quindi abbiamo.

Nella corrispondenza anzidetta tra le curve C^4 e i coni γ^4 ad un punto della superficie F_2^4 corrispondono tutti gli spazî T_4 e gli spazî U_4 del suo cono X .

Ad uno spazio U_4 corrispondono tutte le coppie di punti, e i soli punti della sua conica di contatto.

10. Una retta viene toccata da due coniche di un fascio in Σ_2 , dunque:

Uno spazio U_4 è comune a due coni γ^4 che toccano la F_2^4 lungo le C^4 di un fascio.

Lo spazio U_4 è comune a due coni X variabili che toccano un cono γ^4 qualunque di una C^4 del fascio. Gli spazî S_3 determinati dai piani tangenti, assi dei due coni X contenuti in U_4 e dal piano secante di U_4 formano una involuzione, i cui spazî doppi sono dati dai due piani tangenti determinati in U_4 dai due coni γ^4 . I punti di contatto di questi piani tangenti, che giacciono nella conica di contatto K di U_4 , formano essi pure un'involuzione.

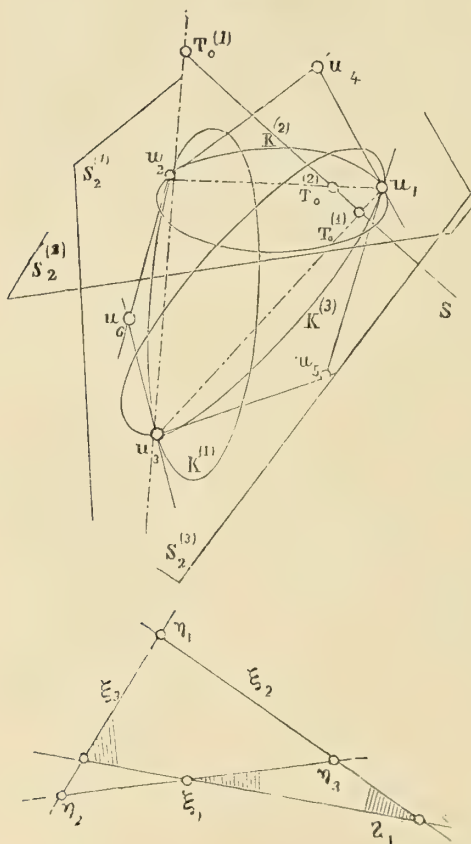
S. 2. Proprietà dedotte dalla costruzione.

11. Siano ora date tre rette nel piano rappresentativo Σ_2 , che per brevità indico con ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , e i punti d'incontro di esse con η_1 , η_2 , η_3 . Ad esse corrispondono tre piani secanti di 1^a specie $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ i quali contengono le

tre coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$. Queste tre coniche s'incontrano in tre punti che indico con u_1 , u_2 , u_3 e che corrispondono ai tre punti η_1 , η_2 , η_3 . Alle rette ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 corrispondono tre spazî U_4 che toccano la F_2^4 lungo le tre coniche K , e che indico con x_1 , x_2 , x_3 . Di più designo con x_4 , x_5 , x_6 gli spazî T_4 , nei quali sono contenuti due a due i tre piani secanti S_2 , e cioè:

$$x_6 \equiv S_2^{(2)} S_2^{(3)}, \quad x_4 \equiv S_2^{(1)} S_2^{(3)}, \quad x_5 \equiv S_2^{(1)} S_2^{(2)}.$$

Fig. 1.



Una retta qualunque S_1 in Σ_2 forma tre coppie di rette con ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 e quindi il piano corrispondente S_2 è situato in tre spazî T_4 coi tre piani $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$. Dato uno di questi spazî, per es. quello passante per $S_2^{(1)}$; il piano S_2 è fissato, e quindi anche gli altri due spazî corrispondenti passanti per $S_2^{(2)}$ e $S_2^{(3)}$. Si ha dunque:

Gli spazî tangenti T_4 che uniscono tre piani $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ secanti di 1^a specie di F_2^4 con gli altri piani della medesima specie costituiscono tre forme fondamentali proiettive di 2^a specie ⁽¹⁾.

Ora tre forme fondamentali proiettive di 2^a specie intorno a tre piani S_2 in S_3 tagliano un piano qualunque in tre forme fondamentali di 2^a specie, nelle quali i punti d'incontro di tre rette corrispondenti costituiscono una curva del 3^o ordine, quindi si ha:

I piani secanti di 1^a specie della F_2^4 costituiscono una superficie M_4^3 del 3^o ordine a quattro dimensioni.

Abbiamo visto al n. 4 che il punto d'incontro di due piani tangenti giace nel piano secante della conica K determinata dai loro punti di contatto, quindi abbiamo:

I punti d'incontro dei piani tangenti sono situati sulla superficie M_4^3 . Per ogni punto di questa passano due piani tangenti della F_2^4 .

Nel caso generale tre spazî S_3 corrispondenti qualunque non s'incontrano in un punto. Infatti se si considerano tre spazî corrispondenti $S_4^{(1)}$, $S_4^{(2)}$, $S_4^{(3)}$ nelle tre forme S_2 , gli spazî S_3 corrispondenti situati in essi tagliano il piano secante comune in tre fasci, aventi per vertici i punti d'incontro coi tre piani S_2 , i quali fasci non generano una conica ma tre punti.

Nel nostro caso invece siccome per un punto A_0' del piano Σ_2 passano le

⁽¹⁾ A. I. c. p. 179, e p. 215 e seg.

infinite rette di un fascio, vuol dire che gli spazî corrispondenti dei tre fasci corrispondenti nelle forme S_2 passano per un punto A_0 , o in altre parole che tre spazî corrispondenti S_3 s'incontrano in un punto della F_2^4 , e quindi gli spazî S_3 generano in un piano secante S_2 qualunque la sua conica K . Dunque:

Gli spazî S_3 corrispondenti delle tre forme collineari $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ si incontrano nei punti della F_2^4 .

12. Bastano tre terne di spazî S_4 qualunque corrispondenti per determinare le tre forme collineari. Per la forma $S_2^{(1)}$ consideriamo gli spazî.

$$x_1, x_4, x_5$$

A questi corrispondono in $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$, gli spazî

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} x_4, & x_2, & x_6 \\ x_5, & x_6, & x_3 \end{array}$$

Possiamo dunque rappresentare la M_4^3 col simbolo

$$(2) \quad \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{array} \right| \equiv M_4^3$$

Dico che queste tre forme costituiscono un complesso simmetrico ⁽¹⁾.

Siccome x_1 è lo spazio tangente doppio lungo la conica $K^{(1)}$ si deduce da ciò che precede il modo di costruirlo, poichè è lo spazio corrispondente ai due spazî x_4, x_5 nelle due forme $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$, i quali passano pel piano $S_2^{(1)}$, dunque:

Agli spazî T_4 , congiungenti due piani secanti di 1^a specie $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ con un altro piano $S_2^{(1)}$ corrisponde nelle tre forme collineari $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$, stabilite mediante altri tre piani S_2 , lo spazio tangente doppio lungo la conica $K^{(1)}$ di $S_2^{(1)}$.

È chiaro anche da ciò che precede che per un punto S_0 qualunque di S_3 non passa alcun piano secante S_2 , o uno solo, oppure infiniti. Nell'ultimo caso il punto S_0 cade sulla F_2^4 stessa, e gli ∞^1 piani secanti S_2 passanti per esso costituiscono il cono proiettante del punto S_0 .

13. Un ente geometrico in S_n che si lascia generare mediante forme proiettive fondamentali ammette in generale due sistemi coniugati generatori e due sistemi di curve e superficie ⁽²⁾. Nel caso della M_4^3 questi sistemi generatori coincidono. Dunque:

I due sistemi generatori della M_4^3 , e perciò anche della F_2^4 , coincidono.

⁽¹⁾ Questa denominazione è adoperata dal Cremona in casi analoghi nel suo trattato: *Teoria delle superficie* nello spazio a tre dimensioni, quando cioè le superficie d'ordine ν che determinano $\mu+1$ sistemi lineari di μ^{ma} specie nello spazio S_3 possono essere indicate col simbolo $P\rho\sigma$, ove ρ indica le superficie di uno stesso sistema e σ invece l'indice di $\mu+1$ superficie corrispondenti, e in modo che $P\rho\sigma \equiv P\sigma\rho$. La differenza tra i sistemi lineari proiettivi considerati dal Cremona in S_3 e quelli da me considerati (l. c. pag. 215 ecc.) consiste in ciò: che in luogo di superficie d'ordine ν abbiamo degli spazî fondamentali; in altre parole nei miei sistemi non è l'ordine ν che determina la molteplicità che può avere il sistema, ma bensì il numero delle dimensioni. Molte proprietà sono comuni, ma nello spazio a n dimensioni acquistano maggiore semplicità.

⁽²⁾ A. l. c. pag. 215 ecc.

Le superficie del 3° ordine a 3 dimensioni, come per es.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_2 \\ x_5 & x_6 \end{vmatrix} \equiv C_3^3$$

sono coni, che hanno per vertici i punti della superficie F_2^4 , i quali vengono generati da tre fasci proiettivi del sistema generatore. Dalle mie citate ricerche e dal simbolo stesso di M_4^3 segue: Due coni C_3^3 qualunque sono situati in un cono di 2° grado a quattro dimensioni, che ha per asse la retta congiungente i vertici dei due coni.

Per es.: i due coni:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_2 \\ x_5 & x_6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{vmatrix}$$

che hanno per vertici i punti u_3, u_2 , (fig. 1) sono situati nel cono di 2° grado

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{vmatrix}$$

che ha per asse, la retta u_3, u_2 , nella quale s'incontrano i quattro spazi x_1, x_4, x_5, x_6 .

14. Indichiamo ora i punti d'incontro delle tangenti alle coniche $K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)}$ (fig. 1) nei tre punti u_1, u_2, u_3 con u_4, u_5, u_6 . Questi formano coi tre primi una *piramide fondamentale* di S_3 ⁽¹⁾. Lo spazio x_1 tocca la F_2^4 lungo la conica $K^{(1)}$, e quindi passa per i piani tangenti in u_2 e u_3 alla F_2^4 , che sono $u_5 u_2 u_6, u_4 u_3 u_6$, cioè passa pei cinque punti $u_2 u_3 u_4 u_5 u_6$. Analogamente x_2 e x_3 passano rispettivamente pei punti $u_1 u_3 u_4 u_5 u_6, u_1 u_2 u_4 u_5 u_6$. Lo spazio x_4 contiene i due piani $S_2^{(1)} S_2^{(3)}$ (nr. 11) e quindi contiene i punti $u_1 u_2 u_3 u_5 u_6$; così x_5 e x_6 passano rispettivamente per i punti $u_1 u_2 u_3 u_4 u_6, u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$. Vale a dire:

I tre punti d'incontro delle tre coniche K di tre piani secanti qualunque $S_2^{(1)}, S_2^{(2)}, S_2^{(3)}$ e i punti d'incontro in questi piani delle tangenti alle coniche K nei primi tre punti, costituiscono una *piramide fondamentale* H . Le facce opposte di essa agli ultimi tre punti sono gli spazi doppi tangenti alla F_2^4 lungo le coniche K , e le facce opposte agli altri tre punti sono gli spazi T_4 che congiungono i piani secanti S_2 due a due.

Una piramide H è duale di sè stessa rispetto alla F_2^4 e T_2^4 .

15. Dalla doppia rappresentazione piana in Σ_2 si ha per dualità:

I piani tangenti costituiscono una superficie M_4^3 di 3ª classe a quattro dimensioni, che viene generata da tre forme fondamentali collineari di un complesso simmetrico, aventi per sostegno i tre piani tangenti. Gli spazi a quattro dimensioni di questa super-

(¹) La configurazione più semplice in S_n è data da $n+1$ dei suoi punti indipendenti, che determinano S_n . Questa configurazione la ho chiamata *piramide fondamentale* di S_n (A. I. c. pag. 171 n. 7).

ficie sono gli spazi T_4 e U_4 , nei primi sono contenuti due piani secanti S_2 distinti, nei secondi due piani secanti S_2 coincidenti.

Dai coni C_3^3 si ha per dualità:

Tutti i piani tangenti di F_2^4 nei punti di una conica K formano una superficie di 3^a classe e di 3° ordine a tre dimensioni situata nello spazio doppio U_4 lungo la K .

16. Prendiamo ora la piramide $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6$ (fig. 1) come piramide di riferimento, e indichiamo con $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, le coordinate che determinano un dato punto in S_3 (').

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0.$$

rappresentano le equazioni delle facce a quattro dimensioni della piramide fondamentale. Prima $x_1, x_2, \dots, x_6$ erano simboli qualunque che designavano sei spazi S_4 , ora rappresentano i primi membri delle equazioni degli stessi spazi.

L'equazione della M_4^3 è dunque:

$$M_4^3 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Essa viene generata dalle tre forme proiettive fondamentali:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 &= 0 \\ \lambda x_4 + \mu x_2 + \nu x_6 &= 0 \\ \lambda x_5 + \mu x_6 + \nu x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

dove λ, μ, ν sono tre parametri. Vediamo che per la F_2^4 passano i coni di 2° grado a 4 dimensioni dei seguenti tre gruppi;

$$\begin{aligned} x_1 x_6 - x_4 x_5 &= 0, & x_4 x_6 - x_2 x_5 &= 0, & x_1 x_2 - x_4^2 &= 0 \\ x_1 x_3 - x_5^2 &= 0, & x_3 x_4 - x_5 x_6 &= 0, & x_1 x_6 - x_4 x_5 &= 0 \\ x_3 x_4 - x_5 x_6 &= 0, & x_2 x_3 - x_6^2 &= 0, & x_4 x_6 - x_2 x_5 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

i quali vengono generati rispettivamente dai tre gruppi seguenti di fasci proiettivi

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{\xi_1}{\xi_3} x_5 &= 0, & x_4 - \frac{\xi_2}{\xi_3} x_5 &= 0, & x_1 - \frac{\xi_1}{\xi_2} x_4 &= 0 \\ x_4 - \frac{\xi_1}{\xi_3} x_6 &= 0, & x_2 - \frac{\xi_2}{\xi_3} x_6 &= 0, & x_4 - \frac{\xi_1}{\xi_2} x_2 &= 0 \\ x_5 - \frac{\xi_1}{\xi_3} x_3 &= 0, & x_6 - \frac{\xi_2}{\xi_3} x_3 &= 0, & x_5 - \frac{\xi_1}{\xi_2} x_6 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Quindi si ottiene:

Le coordinate dei punti della F_2^4 riferita ad una delle sue piramidi H si esprimono nel modo seguente:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \xi_1^2 : \xi_2^2 : \xi_3^2 : \xi_1 \xi_2 : \xi_1 \xi_3 : \xi_2 \xi_3 \quad (5)$$

Se $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ sono le equazioni dei tre lati di un triangolo fondamentale nel piano Σ_2 , le (5) ci danno con le (6) le formole di passaggio tra un punto del piano e un punto della superficie, e viceversa.

(') Da qui si scorge bene il passaggio dai concetti sintetici all'applicazione ad essi dell'analisi.

17. Se noi consideriamo ora una superficie a due dimensioni dello spazio a quattro o a tre dimensioni la quale si lasci rappresentare in un piano mediante un sistema di curve del 2° ordine o quadruplicemente o triplamente infinito, essa puossi ottenere dalla F_2^4 mediante proiezione univoca da un punto se si proietta in S_4 , e da una retta se si proietta nel nostro spazio S_3 .

Infatti le coordinate dei punti di una tale superficie dello spazio S_4 si esprimono nel seguente modo:

$$y_1:y_2:y_3:y_4:y_5 = f_1:f_2:f_3:f_4:f_5 \quad (1)$$

ove le f sono funzioni razionali ed intere di 2° grado nelle ξ_1, ξ_2, ξ_3 , e saranno della forma:

$$f_i = a_{11}^{(i)} \xi_1^2 + a_{22}^{(i)} \xi_2^2 + a_{33}^{(i)} \xi_3^2 + 2a_{12}^{(i)} \xi_1 \xi_2 + 2a_{13}^{(i)} \xi_1 \xi_3 + 2a_{23}^{(i)} \xi_2 \xi_3 \quad i=1, 2, 3, 4, 5 \quad (2)$$

Ora ponendo nello spazio S_5

$$\sigma y_i = a_{11}^{(i)} x_1 + a_{12}^{(i)} x_2 + a_{23}^{(i)} x_3 + 2a_{12}^{(i)} x_4 + 2a_{13}^{(i)} x_6 + 2a_{23}^{(i)} x_6 \quad (3)$$

$$\sigma y_6 = x_6$$

veniamo ad eseguire nello spazio S_5 una trasformazione rispetto ad un'altra piramide fondamentale, le cui facce hanno rispetto alla prima le equazioni $y_i = 0$, $x_6 = 0$, e la superficie (1) è allora la proiezione nella faccia x_6 eseguita dal vertice opposto nella nuova piramide, cioè dal punto d'incontro dei cinque spazi $y_i = 0$.

L'analoga dimostrazione vale evidentemente per le superficie dello spazio ordinario.

Vedremo nel § 5 un'altra semplicissima dimostrazione sintetica di questo teorema.

18. Ritornando alla piramide H osserviamo che al punto e alla retta *unità* del piano Σ_2 corrisponde il punto e lo spazio *unità* in S_5 che sono un punto ed uno spazio U_4 di F_2^4 . Scegliendo opportunamente il punto e lo spazio *unità* e riguardando le $u_i = 0$ come le equazioni dei vertici della piramide si ha:

$$u_1:u_2:u_3:u_4:u_5:u_6 = \eta_1^2:\eta_2^2:\eta_3^2:\eta_1\eta_2:\eta_1\eta_3:\eta_2\eta_3 \quad (1)$$

da cui si ricava pure che l'equazione della superficie M_4^3 è:

$$M_4^3 \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_4 & u_5 \\ u_4 & u_2 & u_6 \\ u_5 & u_6 & u_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Dalle equazioni di M_4^3 e M_4^3 osserviamo che: le due superficie M_4^3 e F_2^4 sono polari reciproche di sè stesse rispetto alla superficie di 2° grado a quattro dimensioni $S_4^2 \equiv \Sigma x_i^2 = \Sigma u_i^2 = 0$, vale a dire un punto di F_2^4 ha per spazio polare rispetto alla S_4^2 uno dei suoi spazi doppi U_4 .

Si ha dunque:

La superficie S_4^2 tocca la F_2^4 lungo una curva normale C_4 .

Una piramide H e un altro punto e un altro spazio U_4 determinano una tale superficie di 2° grado (1).

(1) A l. c. p. 184.

Per ogni curva C^4 passa una superficie S_4^2 dalla quale la F_2^4 viene toccata lungo la C^4 .

19. Le coordinate dello spazio polare di un punto y_i rispetto alla $S_4^2=0$ sono le stesse y_i , e quindi al polo e allo spazio polare corrispondono le due coniche:

$$\begin{aligned} y_1 \xi_1^2 + y_2 \xi_2^2 + y_3 \xi_3^2 + y_4 \xi_1 \xi_2 + y_5 \xi_1 \xi_3 + y_6 \xi_2 \xi_3 &= 0 \\ y_1 y_1^2 + y_2 y_2^2 + y_3 y_3^2 + y_4 y_1 y_2 + y_5 y_1 y_3 + y_6 y_2 y_3 &= 0 \end{aligned}$$

le quali sono evidentemente polari reciproche rispetto alla conica:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 0$$

e viceversa una curva del 2° ordine e una curva di 2ª classe polari reciproche rispetto alla conica (2) ci danno un punto e lo spazio polare rispetto alla $S_4^2=0$.

Ad un punto di Σ_2 e alla sua polare rispetto alla conica (2) corrispondono un punto e uno spazio U_4 di F_2^4 , polo e spazio polare rispetto a S_4^2 .

La conica (2) corrisponde evidentemente alla curva di contatto C^4 di F_2^4 con la S_4^2 .

La conica (2) ha ∞^3 triangoli conjugati, e ad ogni triangolo conjugato, come il fondamentale, corrisponde poi in S_3 una piramide H; quindi si ha:

Ci sono ∞^3 piramidi H della F_2^4 che sono polari reciproche rispetto ad una delle superficie S_4^2 .

Le coppie dei punti d'incontro della C^4 di contatto colle tre coniche K dei tre piani secanti S_2 di una piramide H dividono armonicamente le coppie dei tre punti d'incontro delle tre coniche (¹).

20. Le due coniche (1) possono essere considerate l'una come curva di 2ª classe l'altra come curva del 2° ordine, e ad esse corrispondono quindi un altro punto S_0 e un altro spazio S_4 , o per meglio dire un altro cono γ^4 e un'altra curva C^4 polari reciproci rispetto alla superficie S_4^2 .

Se le due coniche (1) coincidono, se cioè una conica è reciproca di sè stessa rispetto alla conica (2), vuol dire che il cono γ^4 e la C^4 che essa determina sono polari reciproci rispetto alla S_4^2 . In tal caso ci sono adunque infiniti triangoli inscritti nella curva di contatto C_1^4 di S_4^2 con F_2^4 , cioè infinite piramidi H conjugate rispetto alla S_4^2 tangente alla F_2^4 lungo la C^4 , e viceversa.

Ci sono nel piano quattro coniche rispetto alle quali sono polari reciproche due

(¹) A. l. c. Polar figuren im Bezug auf eine $(n-1)$ dim. Fläche F_{n-1}^2 . Noto che la S_4^2 ha due sistemi di ∞^3 piani, di cui se ne è servito recentemente il dott. Segre nella seconda parte della sua bella dissertazione di laurea (Atti della r. Acc. di Torino 1884), per lo studio della retta nella via tracciata dal Klein nella sua Memoria: *Ueber Linien Geometrie und metrische Geometrie*, adoperando anche lui, come me, il metodo sintetico. Osservo però che l'errore della mia Memoria che ha citato spesso volte il dott. Segre nella prima parte della sua dissertazione, relativo al numero degli spazi lineari contenuti in una superficie F_{n-1}^2 , non è che un errore apparente, perchè come si deduce dall'esatto ragionamento in luogo di essere stampato $\infty^3 + 3 + 4 + \dots + m(m-1)$ si trova stampato $\infty^3 \cdot 3 \cdot 4 \dots m(m-1)$.

coniche date, i cui punti d'incontro hanno per rette polari rispetto alle quattro coniche rispettivamente le quattro tangenti comuni, quindi:

Ci sono quattro superficie S_4^2 rispetto alle quali una retta S_1 ha lo stesso spazio polare S_3 . Ai quattro punti d'incontro di S_3 con F_2^4 sono polari i quattro spazi U_4 passanti per la retta S_1 rispetto alle quattro superficie S_4^2 .

21. Dalle equazioni stesse delle M_4^3 e $\mathbf{M}_4^3$ si scorge che la F_2^4 è una superficie doppia della M_4^3 , e così la $\mathbf{F}_2^4$ è una superficie doppia (nel senso reciproco) della $\mathbf{M}_4^3$.

§ 3. *Figura determinata da una retta S_1 e da uno spazio S_3 rispetto alla F_2^4 .*

22. Sappiamo già che uno spazio S_3 incontra la F_2^4 in quattro punti, che possono essere tutti reali o immaginari, tutti o in parte coincidenti, come anche sappiamo che per una retta S_1 possiamo condurre quattro spazi doppi U_4 , tutti reali o immaginari, tutti o in parte coincidenti.

Essendo la superficie a quattro dimensioni M_4^3 costituita dai piani secanti del 3° ordine, vuol dire che una retta S_1 la incontra in tre punti, dunque:

Una retta S_1 incontra tre piani secanti di 1ª specie $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$ della F_2^4 in tre punti $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$, $T_0^{(3)}$, nei quali, per un teorema dato al n. 11, passano due a due sei piani tangenti $T_2^{(1)} T_2'^{(1)}$; $T_2^{(2)} T_2'^{(2)}$; $T_2^{(3)} T_2'^{(3)}$, che contengono le tangenti $t_1^{(1)} t_1'^{(1)}$; $t_1^{(2)} t_1'^{(2)}$; $t_1^{(3)} t_1'^{(3)}$ condotte da $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$, $T_0^{(3)}$ alle coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ dei tre piani secanti, i cui punti di contatto indico colle lettere $w^{(1)} w'^{(1)}$; $w^{(2)} w'^{(2)}$; $w^{(3)} w'^{(3)}$.

Siano inoltre $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$ le quattro coniche K situate negli spazi tangenti doppi U_4 passanti per S_1 .

Abbiamo dimostrato al n. 6 che un cono γ^4 avente per vertice un punto S_0 qualunque dello spazio S_3 tocca la F_2^4 lungo una curva C^4 , o per meglio dire, gli spazi U_4 del cono γ^4 toccano la F_2^4 lungo le coniche K tangenti ad una determinata curva C^4 . Inoltre si è visto che mentre la tangente in un punto della C^4 giace nel suo spazio S_4 nel quale è contenuta, gli spazi S_3 , determinati dai piani tangenti nei punti della C^4 alla F^4 e dai piani secanti individuati dalle tangenti di C^4 , passano pel vertice del cono γ^4 . È chiaro dunque che se la S_1 passa pel punto S_0 , essa incontra tutti gli spazi S_3 così ottenuti, e quindi è situata con ciascuno di essi in uno spazio a quattro dimensioni. E siccome in tal caso il cono γ^4 contiene i quattro spazi U_4 passanti per la S_1 , è evidente che la curva C^4 anzidetta tocca anche le quattro coniche K di questi spazi, perchè tocca tutte le coniche degli spazi U_4 del cono γ^4 . Ciò vale naturalmente per qualunque cono γ^4 della schiera, i cui vertici S_0 sono situati sulla retta S_1 , e le cui curve corrispondenti C^4 toccano le quattro coniche K dei quattro spazi U_4 .

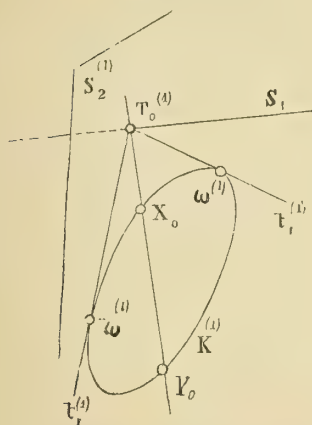
23. I tre piani secanti $S_2^{(1)}$ $S_2^{(2)}$ $S_2^{(3)}$ s'incontrano in tre punti, che ora indico con $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, nei quali s'incontrano rispettivamente due a due le coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$. La figura formata da questi tre piani è identica a quella descritta al n. 11 (fig. 1).

Ora lo spazio S_3 che congiunge $S_2^{(1)}$ con S_1 incontra evidentemente i piani

$S_2^{(2)}, S_2^{(3)}$ secondo le rette $A_0^{(3)} T_0^{(2)}; A_0^{(2)} T_0^{(3)}$, e quindi lo spazio S_3 passa pel piano $A_0^{(1)} A_0^{(2)} A_0^{(3)}$. Analogamente per gli altri due spazi $S_2^{(2)} S_1, S_2^{(3)} S_1$. Vale a dire:

La retta S_1 giace nel piano secante di 2^a specie determinato dai tre punti d'incontro delle coniche $K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)}$. O in altre parole: Per una retta passa un solo piano secante di 2^a specie M_2 (fig. 1).

Fig. 2.



24. Uno spazio qualunque S_4 passante per S_1 incontra la F_2^4 in una curva C^4 , che ha due punti X_0, Y_0 in comune con le coniche $K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)}$, e le cui congiungenti passano evidentemente per $T_0^{(1)}, T_0^{(2)}, T_0^{(3)}$. Col variare di S_4 i punti X_0, Y_0 , formano nelle coniche K tre involuzioni i cui punti doppi sono rispettivamente le tre coppie di punti w .

Se consideriamo uno spazio U_4 per la retta S_1 , in esso la C^4 si riduce ad una sola conica u , e quindi questa incontra le coniche K in tre punti w , per es. $w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}$. Dunque:

Le quattro coniche u incontrano le tre coniche K ciascuna in tre dei sei punti w . Quindi si ha pure:

I sei piani tangenti T_2 , che incontrano due a due la retta nei tre punti T_0 , sono situati tre a tre nei quattro spazi doppi U_4 passanti per la retta S_1 , e i loro punti di contatto w sono situati tre a tre nelle quattro coniche u .

25. Tiriamo ora pel punto, per es. $T_0^{(1)}$ (fig. 2), una retta $X_0 Y_0$ nel piano $S_2^{(1)}$. I piani tangenti $T_2^{(x)}, T_2^{(y)}$ in questi due punti alla F_2^4 sono contenuti, come già si sa nello spazio U_4 tangente lungo la conica $K^{(1)}$, il quale non passa per la S_1 . Il piano $T_2^{(x)}$ determina colla S_1 uno spazio $T_4^{(x)}$, che passa evidentemente per $S_2^{(1)}$, perchè passa per la retta $T_0^{(1)} X_0$, e per la tangente in X_0 alla conica $K^{(1)}$. Lo spazio $T_4^{(x)}$ incontra dunque la F_2^4 in una altra conica $K^{(x)}$ passante pel punto X_0 , avente in X_0 una tangente X_1 situata nel piano $T_2^{(x)}$. Così il piano $T_2^{(y)}$ determina colla S_1 uno spazio $T_4^{(y)}$, che taglia la F_2^4 in un'altra conica $K^{(y)}$ (oltre la $K^{(1)}$), che avrà in Y_0 una tangente Y_1 situata nel piano $T_2^{(y)}$.

I punti X_0 e Y_0 generano nella $K^{(1)}$ un'involuzione i cui punti doppi sono $w^{(1)}$ e $w^{(1')}$. In questa involuzione si corrispondono i due punti $A_0^{(2)}, A_0^{(3)}$ situati in $K^{(1)}$. I piani tangenti in questi punti sono i due piani $T_2^{(1)}, T_2'^{(1)}$ del n. 22, ne consegue dunque:

Gli spazi tangenti T_4 che passano per una retta S_1 e per uno dei piani secanti $S_2^{(i)}$, che incontrano questa retta, sono due a due in involuzione. I punti di contatto di due spazi corrispondenti giacciono sulla conica $K^{(i)}$ del piano $S_2^{(i)}$ e sono per diritto col punto d'incontro di S_1 col piano $S_2^{(i)}$. Gli spazi doppi dell'involuzione sono dati dai due piani tangenti T_2 nei due punti w della conica $K^{(i)}$.

I due spazî che congiungono il piano $S_2^{(i)}$ con gli altri due piani secanti incontrati dalla retta formano una coppia dell'involuzione.

26. Le tangenti X_1 e Y_1 sono situate come si è detto nei piani tangenti $T_2^{(x)}, T_2^{(y)}$. Ora i piani tangenti nei punti di una conica K formano una superficie a 3 dimensioni di 3° ordine e di 3ª classe situata nello spazio U_4 corrispondente alla conica (n. 15), e quindi si ha:

Le tangenti alle coniche K degli spazî T_4 del precedente teorema nei punti d'incontro colla conica $K^{(i)}$ del piano secante $S_2^{(i)}$, formano una superficie rigata normale del 3° ordine ⁽¹⁾ a due dimensioni nello spazio tangente doppio U_4 della conica $K^{(i)}$. A queste tangenti appartengono pure le due tangenti, condotte alle altre due coniche K , i cui piani secanti incontrano la S_1 nei loro punti d'incontro con la prima.

27. Se si congiunge la S_1 colle sei tangenti t_1 si ottengono sei piani situati due a due negli spazî S_3 determinati da S_1 coi tre piani $S_2^{(1)}, S_2^{(2)}, S_2^{(3)}$, e situati tre a tre nei quattro spazî U_4 passanti per la retta, in modo che per due piani situati in uno stesso S_3 per es. $S_1 S_2^{(1)}$ passano rispettivamente due coppie di spazî U_4 . Dunque:

Gli spazî S_3 determinati da una retta S_1 e dai tre piani secanti S_2 , che la incontrano, intersecano in piani gli spazî opposti R_3 della quaterna degli spazî U_4 passanti per la retta.

28. Per dualità si hanno le proprietà analoghe per uno spazio S_3 qualunque, oltre a quelle già enunciate nei numeri precedenti. Vogliamo soltanto enunciare le proprietà seguenti:

Uno spazio S_3 incontra in tre rette $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}$ tre piani tangenti T_2 della $F_2^{(4)}$, perchè per esso passano tre spazî tangenti $T_4^{(1)}, T_4^{(2)}, T_4^{(3)}$ della M_4^3 .

Le rette a_1 sono situate in un piano proiettante di 2ª specie (duale al teor. del num. 23).

Le rette a_1 incontrano rispettivamente gli spigoli opposti del tetraedro formato dai quattro punti d'incontro di S_3 con $F_2^{(4)}$ (duale al teorema n. 27).

§ 4. Proiezioni di un piano. — Trasformazioni piane Cremoniane.

29. Scegliamo dapprima un piano secante di 1ª specie S_2 , il quale incontra la $F_2^{(4)}$ in una conica K , e proiettiamo da esso la $F_2^{(4)}$ in un piano Σ_2 .

Ciò è sempre possibile perchè basta congiungere S_2 coi punti di $F_2^{(4)}$, si ottengono così degli spazî S_3 che incontrano il piano Σ_2 in punti, che sono la proiezione o l'immagine dei punti di $F_2^{(4)}$.

Ma a noi interessa pure che la proiezione sia univoca, o in altre parole che a un punto di Σ_2 corrisponda un solo punto di $F_2^{(4)}$, e viceversa.

⁽¹⁾ A. I. c. pag. 229.

Ora ciò succede appunto proiettando da un piano S_2 , perchè ogni punto A_0 fuori del piano S_2 e situato sulla F_2^4 unito con S_2 determina uno spazio S_3 , che non ha altri punti colla F_2^4 . Se ne avesse un altro, per questo e per A_0 passerebbe una conica K_1 , la quale incontrando la K in un terzo punto, il suo piano sarebbe contenuto in S_3 , vale a dire due piani secanti s'incontrerebbero in una retta, ciò che è impossibile (n. 3). Lo spazio S_3 incontra dunque il piano Σ_2 nel punto corrispondente $A_0^{(1)}$.

Una conica K_1 qualunque di F_2^4 incontra la K del piano proiettante S_2 in un punto, e quindi, pel teorema dato al n. 2, essa viene proiettata nel piano Σ_2 in una retta. Ciò risulta pure dal fatto che la K e la K_1 sono situate in uno spazio T_4 , che incontra Σ_2 nella retta immagine di K_1 .

La conica K di S_2 viene proiettata in Σ_2 nella retta d'intersezione dello spazio U_4 che tocca la F_2^4 lungo la conica K .

Una curva qualsiasi C^4 razionale di F_2^4 incontra la K in due punti, vale a dire essa viene proiettata in Σ_2 in una conica.

E viceversa: le rette e le coniche di Σ_2 vengono proiettate da un piano qualunque di 1^a specie S_2 nelle coniche e nelle curve C^4 di F_2^4 .

30. Consideriamo ora un piano M_2 secante di 2^a specie, avente cioè tre punti comuni, $1A_0, 2A_0, 3A_0$ colla F_2^4 . Dico che proiettando da questo piano la F_2^4 nel piano Σ_2 si ha pure una proiezione o immagine univoca della F_2^4 . Infatti ogni spazio S_3 passante per M_2 incontra la F_2^4 in quattro soli punti, di cui tre sono i tre punti fissi $1A_0, 2A_0, 3A_0$.

Un punto A_0 qualunque della superficie viene proiettato da M_2 in un punto $A_0^{(2)}$ di Σ_2 .

Pei punti $1A_0, 2A_0, 3A_0$ passano tre coniche $K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)}$ determinate rispettivamente dalle coppie di punti $1A_0, 2A_0$; $1A_0, 3A_0$; $3A_0, 2A_0$. Queste tre coniche determinano con M_2 tre spazi S_3 , che incontrano il piano Σ_2 in tre punti $1A_0^{(2)}, 2A_0^{(2)}, 3A_0^{(2)}$. I punti fissi di M_2 colla F_2^4 , le tre coniche K e i tre punti $1A_0^{(2)}, 2A_0^{(2)}, 3A_0^{(2)}$ li chiamo punti e coniche fondamentali di M_2 e della immagine in Σ_2 , che indico col simbolo $\Sigma_2^{(2)}$.

Una conica K di F_2^4 viene proiettata in una conica del piano $\Sigma_2^{(2)}$ passante pei suoi punti fondamentali $1A_0^{(2)}, 2A_0^{(2)}, 3A_0^{(2)}$, perchè la conica K incontra le tre coniche fondamentali $K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)}$ in un punto.

Una conica passante pel punto $1A_0$ di M_2 incontra le coniche fondamentali $K^{(2)}, K^{(3)}$ in questo punto, e la $K^{(1)}$ in un punto fuori di M_2 , quindi viene proiettata in una retta passante pel punto $1A_0^{(2)}$. E siccome ogni punto A_0 di F_2^4 determina una sola conica K col punto $1A_0$, ne consegue che la retta congiungente di ogni punto $A_0^{(2)}$ del piano $\Sigma_2^{(2)}$ con uno dei suoi punti fondamentali, per es. con $1A_0^{(2)}$, è la proiezione di una sola conica K di F_2^4 , che passa pel punto $1A_0$.

Una curva razionale normale C^4 di F_2^4 incontra le tre coniche fondamentali $K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)}$ in coppie di punti, in generale fuori del piano M_2 , e quindi viene proiettata da questo piano in curve razionali del 4^o ordine contrenti nei punti fondamentali di $\Sigma_2^{(2)}$.

Una curva C^4 passante per uno dei punti fondamentali di M_2 , per es.: per $1A_0$, incontra rispettivamente le coniche $K^{(2)}$ e $K^{(3)}$ oltre che nel punto $1A_0$ in un altro punto, e incontra la $K^{(1)}$ in due punti fuori di M_2 , quindi viene proiettata in Σ_2 in una curva del 3° ordine avente un punto doppio in $1A_0^{(2)}$ e due punti semplici negli altri due punti fondamentali.

Una curva C^4 passante per due punti fondamentali di M_2 , per es.: $1A_0, 2A_0$ incontra la conica $K^{(3)}$ in questi due punti, mentre incontra le coniche $K^{(1)}$ e $K^{(2)}$ in due altri punti; vale a dire, viene proiettata in Σ_2 in una conica passante pei due punti fondamentali $1A_0^{(2)}, 2A_0^{(2)}$.

Finalmente una curva C^4 che passa pei tre punti fondamentali di M_2 (altri due punti di F_2^4 bastano a individuarla) viene proiettata in una retta, perchè lo spazio S_4 della C^4 contiene anche il piano M_2 .

Gli spazî T_4 che uniscono le tre coniche fondamentali due a due incontrano il piano Σ_2 nelle rette corrispondenti alle C^4 da esse determinate. Queste tre rette sono i lati del triangolo fondamentale di $\Sigma_2^{(2)}$. Uno di questi spazî T_4 , per es: quello che contiene le coniche $K^{(2)}, K^{(3)}$, passa pel piano tangente $1T_2$ del loro punto d'incontro $1A_0$. Tutte le coniche che passano per $1A_0$ hanno in questo punto una tangente situata nel piano $1T_2$, cioè hanno in questo piano un punto infinitamente vicino a $1A_0$. Queste coniche, per ciò che si è visto, vengono proiettate in Σ_2 in rette passanti pel punto $1A_0^{(2)}$, e quindi i loro punti infinitamente vicini ad $1A_0$ in $1T_2$ vengono proiettati da M_2 nei punti del lato $2A_0^{(2)} 3A_0^{(2)}$ del triangolo fondamentale di $\Sigma_2^{(2)}$, dunque: I punti di un lato del triangolo fondamentale di $\Sigma_2^{(2)}$ sono le proiezioni fatte da M_2 dei punti infinitamente vicini ad uno dei suoi punti fondamentali sulla F_2^4 .

I teoremi inversi agli enunciati si deducono evidentemente mediante una sezione della forma di 2ª specie M_2 colla F_2^4 .

Se il piano M_2 ha colla F_2^4 due o tre punti infinitamente vicini, ciò significa che le curve C^4 in $\Sigma_2^{(2)}$ hanno due o tre punti doppi infinitamente vicini, e che le coniche passanti per questi punti si toccano o si osculano.

31. Si scorge ora facilmente che: la proiezione $\Sigma_2^{(1)}$ fatta da un piano secante di 1ª specie S_2 e la proiezione $\Sigma_2^{(2)}$ fatta da un piano di 2ª specie M_2 sono in una corrispondenza (Verwandschaft) quadratica univoca.

Proiettiamo infatti i punti $1A_0, 2A_0, 3A_0$ dal piano S_2 in Σ_2 , otterremo tre punti $1A_0^{(1)}, 2A_0^{(1)}, 3A_0^{(1)}$, che chiamo i punti fondamentali di $\Sigma_2^{(1)}$ in relazione col piano $\Sigma_2^{(2)}$.

Ad un punto $A_0^{(1)}$ di $\Sigma_2^{(1)}$ corrisponde un punto $A_0^{(2)}$ di $\Sigma_2^{(2)}$, perchè basta congiungere $A_0^{(1)}$ con S_2 per mezzo di uno spazio S_3 , il quale incontra la F_2^4 nel punto X_0 , e quindi basta proiettare questo punto dal piano M_2 in $A_0^{(2)}$.

Alle rette di $\Sigma_2^{(1)}$ non passanti per alcuno dei suoi punti fondamentali, siccome vengono proiettate da S_2 sulla F_2^4 in coniche K , non passanti pei punti $1A_0, 2A_0, 3A_0$, corrispondono le coniche di $\Sigma_2^{(2)}$ passanti pei punti fondamentali di questo piano.

Nella stessa guisa si vede che alle rette passanti per un punto fondamentale per es.: ${}_1A_0^{(1)}$ del piano $\Sigma_2^{(1)}$ corrispondono, per ciò che precede, le rette passanti pel punto fondamentale ${}_1A_0^{(2)}$. Un lato del triangolo fondamentale, per es.: ${}_2A_0^{(1)} {}_3A_0^{(1)}$ viene proiettato da S_2 sulla F_2^4 nella conica fondamentale $K^{(1)}$, quindi ai lati del triangolo fondamentale di $\Sigma_2^{(1)}$ corrispondono i vertici del triangolo fondamentale di $\Sigma_2^{(2)}$.

Alle coniche passanti pei tre punti ${}_1A_0^{(1)}$, ${}_2A_0^{(1)}$, ${}_3A_0^{(1)}$ di $\Sigma_2^{(1)}$, le quali vengono proiettate da S_2 sulla F_2^4 in curve C^4 passanti pei tre punti fondamentali di M_2 , corrispondono le rette di $\Sigma_2^{(2)}$.

Le coniche di $\Sigma_2^{(1)}$ non passanti per alcuno dei suoi punti fondamentali vengono proiettate da S_2 in F_2^4 in curve C^4 non contenenti alcuno dei punti fondamentali di M_2 . Queste vengono poi proiettate da M_2 in curve del 4° ordine con tre punti doppi nei punti fondamentali di $\Sigma_2^{(2)}$.

Ad una conica di $\Sigma_2^{(1)}$ passante per uno dei suoi punti fondamentali, per es.: ${}_1A_0^{(1)}$, corrisponde in $\Sigma_2^{(2)}$ una curva del 3° ordine con un punto doppio nel punto fondamentale ${}_1A_0^{(2)}$ e che passa semplicemente per gli altri due punti fondamentali.

Così si può stabilire anche la corrispondenza inversa fra il piano $\Sigma_2^{(2)}$ e il piano $\Sigma_2^{(1)}$. Osservo soltanto che ai punti fondamentali di $\Sigma_2^{(2)}$ corrispondono in F_2^4 le coniche fondamentali di M_2 , e quindi in $\Sigma_2^{(1)}$ i lati del triangolo fondamentale.

Ai punti dei lati del triangolo fondamentale di $\Sigma_2^{(2)}$ corrispondono in F_2^4 , come si è visto al num. precedente, i punti infinitamente vicini ai punti fondamentali di M_2 , e quindi in $\Sigma_2^{(1)}$ ai lati di $\Sigma_2^{(2)}$ corrispondono i punti fondamentali, e ai punti dei lati, corrispondono in $\Sigma_2^{(1)}$ i punti infinitamente vicini ai punti fondamentali in tutte le rette passanti per essi.

Per ciò che precede si ha dunque.

Le proiezioni piane della F_2^4 fatte da due piani di 2ª specie sono collineari, quelle fatte da due piani, l'uno di 1ª l'altro di 2ª specie sono in una corrispondenza quadratica univoca. Si ha pure quest'altro teorema:

Le proiezioni fatte da due piani di 2ª specie sono in una corrispondenza univoca quartica, cubica o quadratica.

Siano in fatti dati i due piani di 2ª specie M_2 , M'_2 , che hanno con la F_2^4 i punti fondamentali ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$; ${}_1A'_0$, ${}_2A'_0$, ${}_3A'_0$.

Le rette di $\Sigma_2^{(2)}$ sono le proiezioni fatte da M_2 delle curve C^4 passanti pei tre punti fondamentali di M_2 . Queste curve vengono proiettate da M'_2 in curve del 4° ordine avente in comune tre punti doppi nei punti fondamentali del piano $\Sigma_2^{(2)}$, e tre punti semplici, cioè le proiezioni dei tre punti ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ fatte dal piano M'_2 . Alle rette dunque di $\Sigma_2^{(2)}$ corrispondono le curve del 4° ordine di $\Sigma_2^{(2)}$ aventi in comune tre punti doppi e tre punti semplici.

Se M'_2 ha con M_2 un punto fondamentale per es.: il punto ${}_1A_0$ comune, le curve C^4 passanti pei punti ${}_1A_0$, ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ vengono proiettate da M'_2 in $\Sigma_2^{(2)}$ in curve del 3° ordine con un punto doppio nel punto ${}_1A'_0^{(2)}$ e con quattro punti semplici in comune. Due di questi punti cadono nei punti ${}_2A'_0^{(2)}$, ${}_3A'_0^{(2)}$, e gli altri due cadono nelle proiezioni dei punti ${}_2A_0$, ${}_3A_0$ del piano M_2 fatte dal piano M'_2 .

Finalmente se M'_2 ha con M_2 due punti fondamentali comuni per es.: $1A_0, 2A_0$, le C^4 anzidette vengono proiettate da M'_2 in $\Sigma'^{(2)}$ in coniche, che passano per i due punti fondamentali $1A_0^{(2)}, 2A_0^{(3)}$ e per il punto proiezione del punto $3A_0$ del piano M_2 , fatta dal piano M'_2 .

Da ciò che precede si ha pure:

L'ordine di una curva tracciata sulla F_2^4 (che è sempre pari) e quello della curva proiezione fatta da un piano M_2 di 2^a specie, sono eguali se la curva non passa per alcuno dei punti fondamentali di M_2 . Quello invece della curva proiezione fatta da un piano S_2 di 1^a specie è la metà del primo.

32. Vogliamo ora dimostrare il seguente teorema:

Data una rete di coniche con tre punti comuni in un piano Σ_2 , si può sempre ottenerla proiettando le coniche di F_2^4 mediante un numero infinito di piani di 2^a specie. O in altre parole: tre punti qualunque di un piano Σ_2 si possono considerare, e in un numero infinito di modi diversi, come l'intersezione dei tre spazi S_3 che passano per un piano M_2 di 2^a specie e contengono rispettivamente le tre coniche $K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)}$ determinate dai tre punti di M_2 comuni con la F_2^4 .

Infatti siano $1A_0^{(2)}, 2A_0^{(2)}, 3A_0^{(2)}$ i tre punti qualunque del piano Σ_2 . Consideriamo un piano proiettante $S_2^{(1)}$ di F_2^4 e proiettiamo il piano $\Sigma'^{(2)}$ sulla F_2^4 . Il punto $1A_0^{(2)}$ determina con $S_2^{(1)}$ uno spazio S_3 , che incontra la F_2^4 nel punto corrispondente $1A_0$. Alle due rette $1A_0^{(2)} 2A_0^{(2)}; 1A_0^{(2)} 3A_0^{(2)}$ corrispondono in F_2^4 due coniche $K^{(2)}$ e $K^{(3)}$, che tagliano la conica $K^{(1)}$ di $S_2^{(1)}$ rispettivamente in due punti $2A_0, 3A_0$. Il piano M_2 determinato dai tre punti $1A_0, 2A_0, 3A_0$ così ottenuti, sarebbe uno dei piani richiesti se lo spazio T_4 , che contiene le coniche $K^{(2)}, K^{(3)}$, tagliasse il piano Σ_2 nella retta $2A_0 3A_0$, mentre ciò non ha luogo in generale.

Se nella F_2^4 teniamo fisso il punto $2A_0$ e consideriamo tutte le coniche K dei piani S_2 passanti per esso, e facciamo con questi piani la stessa operazione che abbiamo eseguita col piano $S_2^{(1)}$, otterremo evidentemente un numero semplicemente infinito di punti $1A_0$ sulla F_2^4 , che corrisponderanno al punto $1A_0^{(2)}$ di $\Sigma_2^{(2)}$, e quindi avremo un numero semplicemente infinito di spazi T_4 determinati dalle coppie di coniche $K^{(2)}, K^{(3)}$. Questi spazi incontreranno il piano Σ_2 in un numero semplicemente infinito di rette. Non ancora però fra queste rette sarà compresa in generale la retta $2A_0^{(2)} 3A_0^{(2)}$ del piano $\Sigma_2^{(2)}$. Ma se si fa muovere il punto $2A_0$ in una curva di F_2^4 , per es.: in una conica K , e si fa per ogni sua posizione la stessa operazione, otterremo un numero doppiamente infinito di spazi T_4 determinati dalle ∞^2 coppie di coniche $K^{(2)}, K^{(3)}$. Questi spazi intersecheranno il piano Σ_2 nelle sue ∞^2 rette, fra le quali adunque sarà compresa la retta $2A_0^{(2)} 3A_0^{(2)}$ del piano $\Sigma_2^{(2)}$.

33. Siano ora dati due piani qualunque $\Sigma_2^{(2)}, \Sigma_2^{(1)}$ fra loro in corrispondenza univoca quadratica. I tre punti fondamentali di $\Sigma_1^{(2)}$ siano $1A_0^{(2)}, 2A_0^{(2)}, 3A_0^{(3)}$, e quelli di $\Sigma_2^{(1)}$ $1A_0^{(1)}, 2A_0^{(1)}, 3A_0^{(1)}$. Pel teorema precedente la rete di coniche di $\Sigma_2^{(2)}$ può essere considerata come la proiezione di F_2^4 da ∞ piani secanti M_2 di 2^a specie.

Sia M_2 uno di questi piani, e proiettato il piano $\Sigma_2^{(2)}$ sulla F_2^4 , riproiettiamolo da un piano qualunque S_2 di 1^a specie sul piano Σ_2 . Otterremo una nuova forma $\Sigma_2^{(1)}$, che è collineare colla forma $\Sigma_2^{(1)}$. Infatti la corrispondenza fra $\Sigma_2^{(1)}$ e $\Sigma_2^{(1)}$ è univoca e inoltre alle rette dell'uno corrispondono le rette dell'altro, in modo che due coppie di rette corrispondenti in $\Sigma_2^{(1)}$ $\Sigma_2^{(1)}$ s'incontrano in punti corrispondenti. Due tali piani $\Sigma_2^{(1)}$ $\Sigma_2^{(1)}$ si possono ottenere mediante successive proiezioni e sezioni da un terzo piano $\Sigma_2^{(1)}$ (1) e quindi si ha il teorema:

Una corrispondenza razionale quadratica tra due piani $\Sigma_2^{(1)}$, $\Sigma_2^{(2)}$ si ottiene mediante due proiezioni della F_2^4 , l'una da un piano secante di 1^a, l'altra da uno di 2^a specie.

O in altre parole:

La corrispondenza quadratica razionale fra le due proiezioni della F_2^4 fatte da un piano di 1^a e 2^a specie è affatto generale. I diversi casi particolari si ottengono 1° colle posizioni speciali dei punti fondamentali di M_2 , 2° colle posizioni speciali dei due piani secanti M_2 , S_2 .

Il primo caso l'abbiamo già considerato al n. 30: pel secondo osserviamo che un piano M_2 di 2^a specie incontra la superficie M_4^3 dei piani secanti di 1^a specie nelle tre rette che congiungono i suoi punti d'incontro colla F_2^4 . D'altra parte siccome due piani secanti non possono incontrarsi che nei punti di F_2^4 si ha:

Due piani secanti di 1^a e 2^a specie in generale non s'incontrano, e non possono mai incontrarsi fuori della F_2^4 .

Le posizioni speciali di S_2 e M_2 sono dunque due oltre alla generale, cioè quando S_2 passa per uno dei punti fondamentali di M_2 , oppure quando passa per due di essi. In quest'ultimo caso i due piani $\Sigma_2^{(2)}$ e $\Sigma_2^{(1)}$ in Σ_2 hanno gli stessi punti fondamentali.

34. Ritorniamo ai piani $\Sigma_2^{(2)}$ e $\Sigma_2^{(1)}$ che si sono ottenuti in Σ_2 mediante le proiezioni della F_2^4 dai due piani M_2 e S_2 . Proiettiamo ora il piano $\Sigma_2^{(2)}$ da un secondo piano secante di 1^a specie $S_2^{(1)}$ qualunque, e seghiamo la forma così ottenuta colla F_2^4 , e riproiettiamo la sezione da un secondo piano qualunque $M_2^{(1)}$ sul piano Σ_2 . Otteniamo così una terza forma $\Sigma_2^{(3)}$ in corrispondenza quadratica con la forma $S_2^{(1)}$ $\Sigma_2^{(2)}$ e quartica con $\Sigma_2^{(1)}$, e quartica con la forma M_2 $\Sigma_2^{(2)}$.

Le coniche di $\Sigma_2^{(2)}$ passanti per punti $1A_0^{(2)}$, $2A_0^{(2)}$, $3A_0^{(2)}$ vengono proiettate da $S_2^{(1)}$ sulla F_2^4 in C^4 passanti per tre punti, che indicherò con $1\alpha_0^{(1)}$, $2\alpha_0^{(2)}$, $3\alpha_0^{(3)}$. Se $M_2^{(1)}$ passa per uno di questi punti per es. $1\alpha_0^{(1)}$, per ciò che precede, queste C^4 vengono proiettate in cubiche con un punto doppio nel punto fondamentale corrispondente ad $1\alpha_0^{(1)}$, e con quattro punti semplici comuni situati negli altri due punti fondamentali corrispondenti al piano $M_2^{(1)}$ e nelle proiezioni fatte da $M_2^{(1)}$ dei punti $2\alpha_0^{(2)}$, $3\alpha_0^{(3)}$. Se invece $M_2^{(1)}$ passa per due dei punti α , allora le C^4 vengono proiettate in coniche. Nel primo caso i piani $\Sigma_2^{(3)}$ e $\Sigma_2^{(1)}$ stanno in una corrispondenza razionale cubica, nel secondo invece in una corrispondenza quadratica.

Proiettiamo di nuovo $\Sigma_2^{(3)}$ da un altro piano $S_1^{(2)}$ sulla F_2^4 e riproiettiamo

(1) A l. c. pag. 179.

da un terzo piano $M_2^{(2)}$, otterremo una quarta forma $\Sigma_2^{(4)}$ in corrispondenza dell'ottavo ordine o d'ordine inferiore con $\Sigma_2^{(1)}$, secondo le posizioni speciali di $M_2^{(2)}$ rispetto ai punti fondamentali della sezione della forma $S_2^{(2)} \Sigma_2^{(3)}$ colla F_2^4 . Così continuando si ottiene una serie di piani proiettanti di 1^a e 2^a specie, e una serie di forme delle quali due successive stanno in una relazione quadratica. Osserviamo anche che evidentemente i tre punti fondamentali di maggior molteplicità in $\Sigma_2^{(s)}$ si ottengono dai tre punti fondamentali dell'ultimo piano proiettante $M_2^{(s-1)}$ di 2^a specie.

35. Supponiamo ora che siano dati due piani $\Sigma_2^{(3)}$ e $\Sigma_2^{(1)}$ in una corrispondenza cremoniana d'ordine n , e siano $1A_0^{(s)}$, $2A_0^{(s)}$, $3A_0^{(s)}$ i tre punti fondamentali di $\Sigma_2^{(s)}$ di maggior molteplicità.

Come si è fatto per la trasformazione quadratica possiamo riguardare la rete di coniche avente i tre punti fondamentali $1A_0^{(s)}$, $2A_0^{(s)}$, $3A_0^{(s)}$ come la proiezione delle coniche K di F_2^4 da ∞ piani M_2 . Da uno di questi piani $M_2^{(s-1)}$ proiettiamo la forma $\Sigma_2^{(s)}$ sulla F_2^4 e poi riproiettiamola nel piano Σ_2 da un piano qualunque di 1^a specie $S_2^{(s-1)}$, otterremo una nuova forma $\Sigma_2^{(s-1)}$, che per l'ultimo teorema del n. 31 è colla forma $\Sigma^{(1)}$ in una corrispondenza Cremoniana d'ordine $\frac{n}{2}$ oppure $\frac{n+1}{2}$, mentre poi $\Sigma_2^{(s)}$ e $\Sigma_2^{(s-1)}$ sono in una corrispondenza quadratica (teorema n. 31). Così continuando si perviene al seguente teorema:

Una trasformazione Cremoniana tra due piani $\Sigma_2^{(1)}$, $\Sigma_2^{(s)}$ può essere sostituita da una serie finita di successive proiezioni e sezioni della F_2^4 con piani secanti di 1^a e 2^a specie.

Da questo teorema si deduce il teorema già noto che una trasformazione Cremoniana può essere sostituita da una serie di trasformazioni quadratiche, perchè due proiezioni successive fatte da un piano secante di 1^a e da uno di 2^a specie equivalgono a una trasformazione quadratica.

Da qui si deduce pure l'altro teorema che la somma degli ordini dei punti di maggiore molteplicità è maggiore di n .

36. Da ciò che precede si ha pure il seguente teorema:

I diversi sistemi omaloidici di curve d'un ordine qualunque nel piano si ottengono mediante successive proiezioni e sezioni della F_2^4 con piani di 1^a e 2^a specie, partendo dal sistema delle rette del piano.

Con questo teorema si possono trovare speditamente i diversi sistemi omaloidici formati da curve dello stesso ordine.

Infatti dalle rette di $\Sigma_2^{(1)}$ si passa mediante un piano S_2 alle coniche di F_2^4 , che vengono proiettate da un piano M_2 in Σ_2 in una rete $\Sigma_2^{(2)}$ di coniche con tre punti comuni. Questa rete viene proiettata da un altro piano $S_2^{(1)}$ sulla F_2^4 in curve razionali C^4 aventi tre punti comuni. Questo sistema viene proiettato da un altro piano $M_2^{(1)}$ in Σ_2 in un sistema $\Sigma_2^{(3)}$ omaloidico di curve del 4° ordine con tre punti doppi comuni e tre punti semplici, oppure se $M_2^{(1)}$ passa per un punto comune alle C^4 otteniamo in Σ_2 un sistema $\Sigma_2^{(3)}$ omaloidico di curve del 3° ordine con un punto doppio e quattro punti semplici.

Proiettiamo di nuovo da un piano $S_2^{(2)}$ il sistema $\Sigma_2^{(3)}$ e $\Sigma_2^{'(3)}$ sulla F_2^4 , e riproiettiamoli in Σ_2 da un altro piano $M_2^{(2)}$.

Nel 1° caso otteniamo su F_2^4 un sistema di curve dell'8° ordine con 3 punti doppi e 3 punti semplici (le quali incontrano le coniche K di F_2^4 in quattro punti).

Nel 2° caso otteniamo su F_2^4 un sistema di curve del 6° ordine con un punto doppio e quattro punti semplici (che incontrano le coniche K di F_2^4 in tre punti).

PROIETTIAMO NEL 1° CASO le C^8 di F_2^4 ,

a) Da un piano $M_2^{(2)}$ qualunque.

Le C^8 vengono proiettate in curve dell'8° ordine con 3 punti quadrupli, 3 punti doppi e 3 punti semplici.

b) $M_2^{(2)}$ passa per 1 punto semplice comune alle C^8 della F_2^4 . Le C^8 vengono proiettate in curve C^7 del 7° ordine con 1 punto quadruplo, 2 punti tripli, 3 punti doppi e 2 punti semplici comuni.

c) $M_2^{(2)}$ passa per 2 punti semplici comuni alle C^8 . Si ottiene in Σ_2 un sistema di curve del 6° ordine C^6 con 2 punti tripli, 4 punti doppi 1 punto semplice comuni.

d) $M_2^{(2)}$ ha 3 punti semplici comuni colle C^8 . Si ottengono delle C^5 con 6 punti doppi comuni.

e) $M_2^{(2)}$ passa per 1 punto doppio delle C^8 .

Le C^8 vengono proiettate in curve del 6° ordine C^6 con 4 punti doppi, 1 punto quadruplo e 3 punti semplici.

f) $M_2^{(2)}$ passa per 1 punto doppio e per 1 punto semplice delle C^8 .

Le C^8 vengono proiettate in curve C^5 con 3 punti semplici, 3 punti doppi, 1 punto triplo.

g) $M_2^{(2)}$ passa per 1 punto doppio e 2 punti semplici delle C^8 .

Le C^8 vengono proiettate in curve C^4 con 3 punti doppi e 3 punti semplici (già considerato).

h) $M_2^{(2)}$ passa per 2 punti doppi delle C^8 .

Le C^8 vengono proiettate in curve C^4 con 3 punti doppi e 3 punti semplici (già considerato).

i) $M_2^{(2)}$ passa per 2 punti doppie 1 punto semplice delle C^8 .

Queste vengono proiettate in Σ_2 in curve di 3° ordine con 1 punto doppio e 4 punti semplici (già considerato).

l) $M_2^{(2)}$ passa per 3 punti doppi delle C^8 .

Le C^8 vengono proiettate nelle coniche di una rete (già considerato).

II. CASO.

a) Proiettando da un piano $M_2^{(2)}$ qualunque, le C^6 vengono proiettate in Σ_2 in curve del 6° ordine con 3 punti tripli, 1 punto doppio e 4 punti semplici.

b) $M_2^{(2)}$ ha 1 punto semplice comune con le C^6 .

Queste vengono proiettate in curve del 5° ordine C^5 con 3 punti doppi, 1 punto triplo e 3 punti semplici (già considerato).

c) $M_2^{(2)}$ passa per 2 punti semplici delle C^6 .

Le C^8 vengono proiettate in C^4 con 3 punti doppi e 3 punti semplici (già considerato).

d) $M_2^{(2)}$ passa pel punto doppio delle C^6 ; queste vengono proiettate in C^4 con 1 punto triplo e 6 punti semplici.

e) $M_2^{(2)}$ passa pel punto doppio e per 1 punto semplice delle C^6 ; queste vengono proiettate in curve C^3 con 1 punto doppio e 4 punti semplici (già considerato).

f) $M_2^{(2)}$ passa pel punto doppio e 2 punti semplici; le C^6 vengono proiettate in coniche con 3 punti comuni (già considerato).

In questi casi se ne scorge subito uno che si lascia generalizzare, ed è l'ultimo caso d). Le C^3 con 1 punto triplo e 6 punti semplici vengono proiettate da un piano S_2 sulla $F_2^{(4)}$ in curve dell'8° ordine con 1 punto triplo e 6 punti semplici. Queste curve vengono proiettate in Σ_2 da un piano M_2 avente con le C^8 il punto triplo comune, in curve del 5° ordine con 1 punto quadruplo comune e 8 punti semplici.

Così proiettando queste curve da un piano S_2 sulla $F_2^{(4)}$ e riproiettando in Σ_2 da un piano M_2 avente con le C^{10} corrispondenti il punto quadruplo comune, si ottiene un sistema omaloidico di curve del 6° ordine con un punto quintuplo e 10 punti semplici comuni. La legge è manifesta e si ha per le curve d'ordine n un sistema omaloidico con 1 punto $(n-1)^{plo}$ e con $2(n-1)$ punti semplici comuni.

37. Dò qui anche i due seguenti risultati, in relazione alla superficie omaloide normale $F_2^{n^2}$ a due dimensioni, di cui ho parlato nella prefazione, e in relazione alla superficie omaloide normale a tre dimensioni $F_3^{n^3}$ dell'ordine n^3 e dello spazio a $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 1$ dimensioni, la quale ultima viene rappresentata punto per punto nello spazio a tre dimensioni mediante le sue superficie di ordine n . Da questa superficie si deducono per proiezione univoca tutte le superficie omaloidi a tre dimensioni di uno spazio $S_m \left(m < \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 1 \right)$ rappresentabili nello spazio ordinario mediante superficie d'ordine n o minore di n . E cioè:

Una trasformazione piana cremoniana d'ordine n fra 2 piani $\Sigma_2^{(1)} \Sigma_2^{(n)}$ può essere sostituita da due proiezioni univoche della superficie normale $F_2^{n^2}$ sopra un piano.

Il passaggio tra il piano $\Sigma_2^{(n)}$ e il piano $\Sigma^{(1)}$ può farsi mediante dei piani $\Sigma_2^{(n-1)}, \Sigma_2^{(n-2)}$ ecc. in corrispondenza d'ordine $(n-1), (n-2)$ ecc. con $\Sigma^{(1)}$ ottenuti proiettando la $F_2^{n^2}$ con spazi secanti a $\frac{n(n+3)}{2} - 3$ dimensioni di specie differenti.

E così:

Una trasformazione cremoniana tra due spazi $\Sigma_3^{(n)}, \Sigma_3^{(1)}$ a tre dimensioni può essere sostituita da due proiezioni univoche della superficie omaloide normale $F_3^{n^3}$ dello spazio a $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 1$ dimensioni fatte con spazi a $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 5$ dimensioni nello spazio ordinario.

Il passaggio tra lo spazio $\Sigma_3^{(n)}$ e $\Sigma_3^{(1)}$ può farsi mediante degli spazi $\Sigma_3^{(n-1)}$, $\Sigma_3^{(n-2)}$ ecc. in corrispondenza d'ordine $(n-1)$, $(n-2)$ ecc. con $\Sigma^{(1)}$, ottenuto per proiezione univoca dalla $F_3^{n,3}$ con spazi secanti di differente specie.

§ 5. *Proiezioni della F_2^4 nello spazio ordinario
superficie di Steiner.*

38. Si vede anche dalla proiezione piana della F_2^4 fatta da un piano secante di 1ª specie S_2 che tutte le superficie del nostro spazio (le quali come si sa sono sempre a due dimensioni) rappresentabili in un piano mediante un sistema triplamente infinito di curve di 2º ordine, sono una proiezione della F_2^4 fatta da una retta S_1 dello spazio S_3 sul nostro spazio S_3 . Infatti proiettando da S_2 sulla F_2^4 il sistema di curve di 2º ordine, determinato da quattro coniche indipendenti di esso, si ottiene su F_2^4 un sistema triplamente infinito di curve C^4 , e perciò di spazi S_4 che passano per una retta S_1 , che è la retta di proiezione richiesta.

Le varie superficie che nel nostro spazio S_3 sono rappresentabili mediante un sistema triplamente infinito di curve di 2º ordine si ottengono proiettando la F_2^4 dalle varie posizioni di una retta S_1 rispetto alla superficie F_2^4 stessa.

39. Consideriamo la posizione generale di una retta S_1 . La superficie $F_2^{(4)}$ di proiezione è la nota superficie di Steiner, di cui voglio qui dedurre le proprietà principali proiettive dalla F_2^4 stessa.

Lo spazio T_4 che congiunge la retta S_1 con una conica di F_2^4 contiene un'altra conica, la quale incontra la prima nel punto di contatto del piano tangente T_2 contenuto in T_4 (n. 4).

Il piano T_2 d'intersezione di T_4 con lo spazio ordinario S_3 , su cui si proietta può considerarsi come la proiezione del piano T_2 fatta dalla retta S_1 . Si ha dunque:

La F_2^4 contiene ∞^2 coniche K_2 situate due a due nei suoi piani tangenti T_2' . Il punto di contatto di T_2' è la proiezione del punto d'incontro delle due coniche K , e le due rette osculatrici della $F_2^{(4)}$ nel piano T_2' sono le proiezioni delle due tangenti alle due coniche K .

Per la retta S_1 passano quattro spazi U_4 (n. 5) i quali toccano la F_2^4 lungo quattro coniche $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$, dunque la $F_2^{(4)}$ possiede quattro piani tangenti doppi, che toccano cioè la $F_2^{(4)}$ lungo quattro coniche $u'^{(1)}$, $u'^{(2)}$, $u'^{(3)}$, $u'^{(4)}$, le quali possono essere nel caso generale tutte reali o immaginarie, due reali e due immaginarie, pure essendo la $F_2^{(4)}$ reale.

La retta S_1 incontra tre piani secanti $S_4^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$, (n. 11 e 22), e quindi la F_2^4 riceve tre rette doppie. Ma per la S_1 passa un piano secante di 2ª specie M_2 (n. 23) che passa per i tre punti d'incontro delle tre coniche $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ dei tre piani secanti $S_2^{(1)}$, $S_2^{(2)}$, $S_2^{(3)}$; dunque le tre rette doppie s'incontrano in un punto triplo della F_2^4 , cioè nel punto immagine dei tre punti d'incontro delle tre coniche K .

Le tangenti $t_1^{(1)}$ $t_1'^{(1)}$; $t_1^{(2)}$ $t_1'^{(2)}$; $t_1^{(3)}$ $t_1'^{(3)}$, che passano pei punti $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$,

$T_0^{(3)}$ d'incontro di S_1 coi tre piani $S_2^{(i)}$ alle tre coniche $K^{(i)}$ danno per proiezione i punti cuspidali $w_1^{(1)} w_1'^{(1)}$; $w_1^{(2)} w_1'^{(2)}$; $w_1^{(3)} w_1'^{(3)}$ delle rette doppie. Le coniche $u^{(i)}$ passano per tre dei 6 punti w , quindi le coniche $u'^{(i)}$ passano per 3 punti cuspidali di $F_2'^{(4)}$.

Dall'ultimo teorema del n. 27 si deduce:

Gli spigoli opposti del tetraedro formato dai quattro piani delle coniche $u'^{(i)}$ sono incontrati rispettivamente dalle tre rette doppie.

La maggior parte dei teoremi del n. 4 si enunciano nello stesso modo per la superficie di Steiner $F_2'^{(4)}$, per es. si ha: Due coniche K' non situate in un piano tangente si tagliano in un punto. La $F_2'^{(4)}$ ha ∞^5 curve $C'^{(4)}$ razionali del 4° ordine di 1ª specie (¹), le quali s'incontrano due a due in quattro punti, e che incontrano le coniche K' in due punti. Per un punto A'_0 di $F_2'^{(4)}$ passano due coniche che toccano una curva $C'^{(4)}$ data.

Le curve $C'^{(4)}$ di un *fascio*, che passano cioè per quattro punti, incontrano una conica K' in due punti mobili che generano un'involuzione. Per un punto A'_0 di $F_2'^{(4)}$ passano due $C'^{(4)}$ che toccano quattro coniche date K' ; le $C'^{(4)}$ che toccano quattro coniche date formano una *schiera*. Pel punto A'_0 passano due coniche K' che incontrano una $C'^{(4)}$ della schiera; le tangenti a queste coniche generano un'involuzione i cui raggi doppi sono le tangenti condotte in A'_0 alle due curve $C'^{(4)}$ della schiera passanti per esso.

Dal n. 6 sappiamo che tutti gli spazi U_4 tangenti lungo le coniche K , che toccano una C^4 , formano un cono γ^4 . Se il vertice di questo cono è sulla S_1 (sappiamo che tutti questi coni e le curve C^4 corrispondenti formano una schiera) gli spazi R_3 , determinati dal piano di una conica K e dal piano tangente nel punto di contatto A_0 colla C^4 passano pel vertice del cono γ^4 (n. 8), e per conseguenza sono situati in spazi T_4 colla S_1 stessa. Quindi la tangente comune in A_0 alla conica K e alla curva C^4 viene proiettata nella tangente in A'_0 alla K' e alla curva $C'^{(4)}$; vale a dire questa tangente è una retta osculatrice di $F_2'^{(4)}$ passante per il punto A'_0 . La C^4 tocca le quattro coniche $u^{(i)}$ dei quattro spazi U_4 passanti per la retta, quindi abbiamo che tutte le curve $C'^{(4)}$ che toccano le quattro coniche $u'^{(i)}$ sono le curve assintotiche della superficie di Steiner.

Una piramide H (n. 14) viene proiettata in una piramide H' , composta di tre coniche $K'^{(1)}$, $K'^{(2)}$, $K'^{(3)}$ che s'incontrano in tre punti, e dai tre piani tangenti in questi tre punti.

Dal n. 19 si ha: Una curva $C'^{(4)}$ della $F_2'^{(4)}$ incontra le tre coniche K' di ∞^3 piramidi H' in coppie di punti, che dividono armonicamente le coppie dei tre punti d'incontro delle coniche K' .

Dal teorema del n. 25 si ha:

I piani tangenti che passano per una retta doppia formano due a due un'involuzione, i cui piani tangenti doppi hanno i loro punti di contatto nei due punti

(¹) Nella mia citata Memoria ho distinto le curve di un dato genere in specie. Quello della 1ª specie sono le più generali. Nel caso speciale della curva del 4° ordine in R_3 , la curva razionale di 1ª specie è la curva del 4° ordine che si chiama comunemente di 2ª specie. Mi pare che la mia distinzione che fa dipendere le specie non già dal genere, ma dalle singolarità possibili con un dato genere, sia molto opportuna.

cuspidali, e nella quale si corrispondono i piani che uniscono quella retta con le altre due rette doppie.

Così pure dal n. 26 si ha proiettando:

Le tangenti alle coniche situate nei piani passanti per la retta doppia nei punti d'incontro con questa retta costituiscono una superficie rigata del 3° ordine, la cui retta semplice è situata nel piano delle altre due rette doppie.

Uno spazio R_3 qualunque passante per la retta S_1 incontra lo spazio ordinario S_3 in un'altra retta X_1 , che può considerarsi come una retta qualunque di S_3 . Ma R_3 incontra tre piani tangenti della F_2^4 in tre rette $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, $a_1^{(3)}$ (n. 28), che vengono proiettate da S_1 nella X_1 , e quindi per X_1 passano tre piani tangenti T'_2 della $F_2^{(4)}$, vale a dire: la superficie di Steiner è di 3ª classe.

Così pure le configurazioni formate da quattro punti qualunque della F_2^4 rispetto allo spazio S_3 passanti per essi, vengono proiettate in altrettante configurazioni analoghe per la superficie di Steiner.

Queste sono le proprietà principali della superficie di Steiner in gran parte trovate dagli illustri geometri che ho menzionati nella prefazione; si vede però qui come risultino con grande spontaneità dalla F_2^4 stessa, e come si deve operare in casi simili per ottenere proprietà di superficie già note o non ancora studiate.

40. Gli spazi U_4 passanti per una retta S_1 possono essere tutti o in parte coincidenti. I due casi in cui coincidono due, o tre spazi U_4 corrispondono ai due casi speciali della superficie di Steiner considerati l'uno dal Clebsch, l'altro dal Cremona.

Se la retta S_1 giace in un piano tangente T_2 di F_2^4 essa viene incontrata da ∞^1 piani secanti di 1ª specie, cioè da quelli che passano pel punto di contatto del piano T_2 , e quindi proiettando la F_2^4 dalla S_1 si ottiene nello spazio ordinario S_3 un cono di 2° grado, considerato come doppio, il cui vertice è il punto d'intersezione del piano tangente T_2 collo spazio ordinario.

Se la retta S_1 incontra la F_2^4 in un punto si ottiene in S_3 la superficie rigata del 3° ordine, la quale viene meglio studiata mediante la superficie normale rigata dello spazio S_4 (').

Se la retta S_1 incontra la F_2^4 in due punti si ha nello spazio ordinario la superficie di 2° ordine. Da ciò che precede si vede pure perchè la superficie di Steiner ammette una proiezione univoca in un piano Σ_2 , cioè quella fatta dal suo punto triplo. Questa proiezione è precisamente quella della F_2^4 fatta sul piano Σ_2 dal piano secante M_2 , passante per la retta S_1 . Si vede anche perchè non si può ottenere per proiezione la rappresentazione piana della superficie di Steiner d'ordine minimo, cioè mediante le curve di 2° ordine di un sistema triplamente infinito, perchè per la retta S_1 non passa alcun piano secante di 1ª specie.

Tagliando poi la F_2^4 con uno spazio a tre dimensioni si ottengono le differenti specie delle superficie reciproche di quelle dinanzi considerate, e che vengono rappresentate nel piano da un sistema triplamente infinito di curve di 2ª classe.

(') A. I. c. pag. 229.