

Nuovi teoremi sull'Hexagrammum Mysticum.

Memoria di GIUSEPPE VERONESE

presentata dal Socio G. BATTAGLINI

nella seduta dell' 8 aprile 1877.

CENNO STORICO

Come egli è già noto a tutti gli studiosi delle scienze matematiche, Pascal ancor giovanetto nel 1640 trovò il famoso teorema che stabilisce la condizione perchè sei punti siano situati in una curva del 2° ordine, chiamando la figura da essi formata *Hexagrammum mysticum* ⁽¹⁾. Nessun geometra da quel tempo sino al 1806 aveva pensato di estendere questo teorema quando appunto in quell'anno Brianchon ne deduceva quello non meno importante delle sei tangenti ad una curva di 2ª classe, rendendo così più importante ed elegante ad un tempo la figura detta di Pascal ⁽²⁾. D'allora divenne celebre l'*Hexagrammum* per gli studi, specialmente fatti su di esso da alcuni dei più rinomati geometri del secol nostro. Infatti fu Steiner il primo a richiamare l'attenzione dei matematici nell'anno 1828, dimostrando che potendosi formare con 6 punti di una conica 60 esagoni differenti, le 60 rette di Pascal, che a questi corrispondono, s'incontrano tre a tre in 20 punti G, chiamati punti di Steiner. Egli credette che questi 20 punti fossero posti quattro a quattro in 5 rette concorrenti in un punto, mentre Plücker, trovando scorretto quest'ultimo teorema, asserì che i 20 punti G sono invece situati quattro a quattro in quindici rette, che chiamerò per questo rette di Steiner-Plücker ⁽³⁾. Hesse disse che la figura dei punti di Steiner appartiene veramente alle più eleganti scoperte della geometria moderna ⁽⁴⁾. Dopo i risultati di Steiner e Plücker progredirono sempre più gli studi sull'*Hexagrammum*. Molto si occupò Hesse in alcune sue Memorie e ne' suoi trattati, e pervenne a scoprire che i 20 punti di Steiner sono due a due conjugati rispetto alla conica fondamentale dei sei punti e mostrò che la figura di Steiner è identica a quella formata da tre triangoli a due a due prospettivi per un medesimo centro. I 9 lati dei tre triangoli, le tre rette concorrenti nel centro comune e le tre rette di prospettiva rappresentano le 15 rette di Steiner-Plücker ⁽⁵⁾. Cayley considerò la stessa figura e cercò specialmente nei suoi lavori di rappresentare queste rette con delle

⁽¹⁾ *Essai pour les coniques*. 1640.

⁽²⁾ *Mémoire sur les lignes du 2° ordre*.

⁽³⁾ *Annales de Gergonne* T. XVIII. 1828 — *Systematische Entwicklung der Abh. der geom. Gestalten* pag. 311 e Plücker, *Ueber ein neues Princip der Geometrie* pag. 275.

⁽⁴⁾ Hesse, Vol. 75 del *Giornale di Crelle* pag. 1.

⁽⁵⁾ Hesse, Vol. 24 p. 40 *Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid* e Vol. 41 p. 269 di Crelle.

annotazioni abbreviate ⁽¹⁾. Staudt e Grossman s'occuparono pure di questi punti di Steiner, *Steiner'sche Gegenpunkte*, partendo ambidue dalla considerazione di due triangoli 123, 456 inscritti nella conica; il lavoro di Staudt specialmente è pregevole per la sua eleganza ⁽²⁾.

Alle scoperte dei matematici francesi e tedeschi sono reciproche in certa guisa le scoperte dei matematici inglesi. Kirkman dimostrò che le sessanta rette di Pascal dei 60 esagoni non solamente s'incontrano tre a tre nei 20 punti G, ma bensì anche tre a tre in 60 altri punti, che vengono chiamati punti di Kirkman. Egli dimostrò, pure che questi 60 punti sono allineati due a due in 90 rette, ciascuna delle quali passa rispettivamente per il punto d'incontro di due dei quindici lati ottenuti dai 6 punti della conica fondamentale ⁽³⁾. Cayley e Salmon contemporaneamente trovarono che i 60 punti di Kirkman sono collocati tre a tre in 20 rette, che chiamerò rette di Cayley-Salmon ⁽⁴⁾. Salmon poi ebbe a dimostrare che queste rette s'incontrano quattro a quattro in 15 punti, che si chiamano punti di Salmon, e che ciascuna di esse passa per un solo punto di Steiner ⁽⁵⁾.

Quantunque lo studio della figura si facesse sempre più complicato pure chiaramente si vedeva che le proprietà dell'*Hexagrammum* non erano del tutto esaurite. Infatti Hesse nel 1868 rilevò in esso una certa reciprocità tra le rette di Pascal e i punti di Kirkman, tra i punti di Steiner e le rette di Cayley-Salmon, tra le rette di Steiner-Plücker e i punti di Salmon. Se dei quindici lati dei 6 punti fondamentali si tralasciano quelli di un esagono, restano ancora 9 lati che determinano altri 3 esagoni, le cui rette di Pascal s'incontrano in un punto di Kirkman, che corrisponde in certa guisa alla retta di Pascal di quel primo esagono. Mentre tre rette di Pascal s'incontrano in un punto di Kirkman, i tre punti di Kirkman ad esse corrispondenti giacciono nella retta di Pascal corrispondente a quel primo punto, alle tre rette di Pascal che s'incontrano in un punto di Steiner corrispondono tre punti di Kirkman situati nella retta di Cayley-Salmon ad esso corrispondente, così alle rette di Steiner-Plücker corrispondono i punti di Salmon. Ed egli è appunto per questa corrispondenza trovata da Hesse, ch'egli dubitò dell'esistenza di una reciprocità polare rispetto ad una conica che chiamò *ideale*, egli però dice: « Es ist mir nicht gelungen das vermuthete Reciprocitäts Gesetz zu entdecken, im Gegentheil weiss ich dass die Reciprocität der Pascal'schen Linien und der Kirkman'schen Punkten sich *nicht* in dem Sinne von Polaren und Polen auffassen lässt, wenigstens nicht im Rücksicht auf dem Kegelschnitt dem die 60 Pascal'sche Sechsecke einbeschrieben sind ». Egli infine della sua Memoria dice: « Es fehlt zur Zeit jedoch ein Bild für die Pascal'sche Linien und die Kirkman'sche Punkte. Ein zu erfindender Satz, der die End Eigenschaften der Figur im Auge hat wird dieses Bild deutlich machen können ⁽⁶⁾ ».

⁽¹⁾ Cayley, Vol. 31 pag. 216, Vol. 34 pag. 272 di Crelle.

⁽²⁾ Grossman, Vol. 58 pag. 174 Crelle — Staudt, *Ueber die Steiner'sche Gegenpunkte* Vol. 62 pag. 142 Crelle.

⁽³⁾ e ⁽⁴⁾ Cayley, Vol. 41 di Crelle. *Notes sur quelques théorèmes de la Géom. de position* pag. 66 e 84

⁽⁵⁾ Salomon-Fiedler, *Analytische Geom. der Ebene* III Aufl. n. 284. 1873.

⁽⁶⁾ Hesse, Vol. 63 di Crelle pag. 193 anno 1868, *Analytische Geom. der Ebene-Bemerkung*.

Bauer nel 1874 si occupò pure della figura partendo dalla considerazione di due triangoli 123, 456 inscritti nella conica fondamentale e considerandoli come triangoli coniugati rispetto ad una conica Σ . Egli trovò che la coppia di punti di Steiner che corrisponde al simbolo 123 (essendo 123 le cifre in posto dispari che rimangono fisse nei sei esagoni delle rette di Pascal di quei due punti) hanno per rette polari, rispetto alla conica Σ le due rette di Cayley-Salmon che rispettivamente passano per essi ⁽¹⁾.

Schröter nella sua nuova edizione delle *Steiner'sche Vorlesungen* pubblicata nel maggio 1876 presentò la quistione di Hesse in brevi parole, aggiungendo che invece di una reciprocità polare potrebbe esistere una correlazione generale ⁽²⁾.

Siccome io dovevo preparare un lavoretto per tenere una conferenza tra i miei amici studenti di matematica del Politecnico di Zurigo nel *Mathematisches Seminar* diretto dagli illustri sigg. prof. Fiedler e Frobenius, nel giugno dell'anno testè passato, così mi proposi allora di risolvere la questione di Hesse e di Schröter, e poichè io credo di averla non solo completamente risolta, ma ben anco avervi aggiunti altri teoremi importanti, così mi faccio animo di presentare ora questo mio piccolo lavoro ai miei sigg. professori dell'Università Romana, con la speranza ch'egli sia ben accettato. È certo che ad un giovane studente riesce malagevole di riordinare in un bel tutto le proprie idee, egli prosiegue anzi dubbioso ed incerto; ma è solamente mediante questi dubbj che gli sorgono da ogni parte alla mente che egli si fa padrone poco a poco di sè e della scienza.

Io dimostro che le 60 rette di Pascal si scindono in sei gruppi di dieci rette che contengono i loro dieci punti di Kirkman corrispondenti e che sono polari di essi rispetto ad una conica, che chiamo π , onde in tutto l'*Hexagrammum* abbiamo sei di tali coniche. Cinque di questi gruppi determinano il sesto. Oltre di ciò dimostro che non solamente c'è il sistema $[Kp]$ delle 60 rette di Pascal e dei 60 punti di Kirkman ma bensì infiniti di cotesti sistemi, ciascun dei quali si compone di sei gruppi analoghi a quelli del sistema $[Kp]$, che danno luogo ad altre sei coniche; cinque di essi determinano un gruppo del sistema precedente e uno del seguente. La figura dei punti di Steiner e delle rette di Cayley è comune a tutti questi sistemi vale a dire i 60 punti di un sistema sono posti tre a tre nelle venti rette di Cayley-Salmon e le 60 rette dello stesso sistema s'incontrano tre a tre nei 20 punti di Steiner.

Essi sono inoltre legati da certi punti e rette fisse e da certe involuzioni, che sono generate dalle 60 rette e dai 60 punti degli infiniti sistemi intorno ai punti di Steiner e sovra le rette di Cayley-Salmon, che hanno importanti proprietà. Siccome l'*Hexagrammum* è, si può dire, la figura dei triangoli prospettivi, così è appunto per mezzo di essi che io spiego quasi tutti i teoremi, ed è per questo che faccio precedere al mio studio sull'*Hexagrammum* alcuni teoremi sulle figure prospettive, i quali, per quanto io so, non furono ancora considerati.

⁽¹⁾ G. Bauer, *Ueber das Pascal'sche Theorem*. Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II CL CL Bd. III. Abth. 1874

⁽²⁾ Schröter, *Steiner'sche Vorlesungen*. Neue Aufl. 1876 pag. 217-218.

SOPRA I TRIANGOLI PROSPETTIVI

1. *Teorema I.* Con nove punti situati tre a tre in tre rette che passano per un punto si formano trentasei terne di triangoli due a due prospettivi. Per ogni terna le tre rette di prospettiva s'incontrano in un punto, i trentasei punti che corrispondono così alle trentasei terne giacciono quattro a quattro in ventisette rette.

Infatti con nove punti $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3$ situati tre a tre in tre rette diverse concorrenti in un punto si formano ventisette triangoli, i cui vertici sono posti rispettivamente in quelle tre rette. Con questi 27 triangoli possiamo formare trentasei terne di triangoli; i triangoli di una terna non hanno alcun vertice comune e un triangolo formato con tre dei nove punti dati si ripete in quattro terne. Le tre rette di prospettiva date dai tre triangoli di una terna s'incontrano in un punto, i quattro punti che corrispondono in tal modo a quattro terne, che hanno un triangolo comune, sono situati in una retta. Consideriamo infatti le quattro terne che hanno il triangolo $A_1 B_1 C_1$ comune ossia:

$A_1 B_1 C_1$	$A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3$
»	$A_2 B_2 C_3, A_3 B_3 C_2$
»	$A_2 B_3 C_2, A_3 B_2 C_3$
»	$A_2 B_3 C_3, A_3 B_2 C_2$

Per la prima terna le tre rette di prospettiva, date dai seguenti punti in linea orizzontale:

$A_1 B_1. A_2 B_2, A_1 C_1. A_2 C_2, B_1 C_1. B_2 C_2$
 $A_1 B_1. A_3 B_3, A_1 C_1. A_3 C_3, B_1 C_1. B_3 C_3$ s'incontrano in un punto S_1
 $A_2 B_2. A_3 B_3, A_2 C_2. A_3 C_3, B_2 C_2. B_3 C_3$

Per la seconda terna le tre rette di prospettiva

$A_1 B_1. A_2 B_2, A_1 C_1. A_2 C_3, B_1 C_1. B_2 C_3$
 $A_1 B_1. A_3 B_3, A_1 C_1. A_3 C_2, B_1 C_1. B_3 C_2$ » » S_2
 $A_2 B_2. A_3 B_3, A_2 C_3. A_3 C_2, B_2 C_3. B_3 C_2$

Quelle della terza

$A_1 B_1. A_2 B_3, A_1 C_1. A_2 C_2, B_1 C_1. B_3 C_2$
 $A_1 B_1. A_3 B_2, A_1 C_1. A_3 C_3, A_1 C_1. B_2 C_3$ » » S_3
 $A_2 B_3. A_3 B_2, A_2 C_2. A_3 C_3, B_3 C_2. B_2 C_3$

E quelle della quarta

$A_1 B_1. A_2 B_3, A_1 C_1. A_2 C_3, B_1 C_1. B_3 C_3$
 $A_1 B_1. A_3 B_2, A_1 C_1. A_3 C_2, B_1 C_1. B_2 C_2$ » » S_4
 $A_2 B_3. A_3 B_2, A_2 C_3. A_3 C_2, B_2 C_2. B_3 C_3$

Si scorge facilmente che un triangolo formato con tre punti, che sono rispettivamente situati nelle tre rette di prospettiva di una terna e che stanno in linea verticale

come, p. es. il triangolo $A_1 B_1. A_2 B_2, A_1 B_1. A_3 B_3, A_2 B_2. A_3 B_3$, è dato anche dai tre punti situati rispettivamente nelle tre rette di prospettiva di un'altra terna e che stanno pure in linea verticale. Siccome i triangoli

$$\begin{array}{lll} A_1 B_1. A_2 B_2, & B_1 C_1. B_3 C_2, & A_1 C_1. A_2 C_2 \\ A_1 B_1. A_3 B_3, & B_1 C_1. B_2 C_3, & A_1 C_1. A_3 C_3 \\ A_2 B_2. A_3 B_3, & B_3 C_2. B_2 C_3, & A_2 C_2. A_3 C_3 \end{array}$$

che son dati rispettivamente nel modo suddetto dalle terne prima e seconda, prima e terza, seconda e terza, sono prospettivi due a due per le tre rette date, come rette di prospettiva, così i tre centri S_1, S_2, S_3 giacciono in una retta. Egualmente si dimostrerebbe che il punto S_4 esiste nella stessa retta. Le ventisette rette che così si ottengono sono diverse fra di loro nel caso generale.

Teorema II. Se di quattro triangoli $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3, A_4 B_4 C_4$, il primo è prospettivo col secondo, il secondo col terzo, il terzo col quarto ed il quarto col primo, in modo però che i vertici delle stesse lettere siano corrispondenti, e se i quattro centri di prospettiva giacciono in una retta; le quattro rette di prospettiva s'incontrano in un punto F .

Siano $S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}$ i quattro centri di prospettiva che giacciono nella retta f ; $s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{41}$ siano le quattro rette di prospettiva determinate dai seguenti punti:

$$\begin{array}{lll} s_{12} & \text{dai punti} & B_1 C_1. B_2 C_2 = a_{12}, \quad A_1 C_1. A_2 C_2 = b_{12}, \quad A_1 B_1. A_2 B_2 = c_{12} \\ s_{23} & \text{»} & B_2 C_2. B_3 C_3 = a_{23}, \quad A_2 C_2. A_3 C_3 = b_{23}, \quad A_2 B_2. A_3 B_3 = c_{23} \\ s_{34} & \text{»} & B_3 C_3. B_4 C_4 = a_{34}, \quad A_3 C_3. A_4 C_4 = b_{34}, \quad A_3 B_3. A_4 B_4 = c_{34} \\ s_{41} & \text{»} & B_4 C_4. B_1 C_1 = a_{41}, \quad A_4 C_4. A_1 C_1 = b_{41}, \quad A_4 B_4. A_1 B_1 = c_{41} \end{array}$$

Come ben si vede i vertici del triangolo $A_4 B_4 C_4$ sono dati dai punti d'incontro delle tre rette $S_{41} A_1, S_{41} B_1, S_{41} C_1$ rispettivamente con le tre rette $S_{34} A_3, S_{34} B_3, S_{34} C_3$. Se noi proiettiamo dal punto S_{12} i vertici del triangolo $A_1 B_1 C_1$ rispettivamente sulle rette $S_{34} A_3, S_{34} B_3, S_{34} C_3$ otteniamo un nuovo triangolo che chiamo $A_5 B_5 C_5$. Questo triangolo è evidentemente prospettivo col triangolo $A_1 B_1 C_1$ pel centro S_{12} , e prospettivo col triangolo $A_4 B_4 C_4$ pel centro S_{34} , poichè come sappiamo le rette $S_{34} A_3, S_{34} B_3, S_{34} C_3$ su cui si trovano rispettivamente i punti A_5, B_5, C_5 passano anche rispettivamente per i punti A_4, B_4, C_4 . Ora i triangoli $A_1 B_1 C_1, A_4 B_4 C_4, A_5 B_5 C_5$ sono prospettivi due a due per i tre centri S_{41}, S_{12}, S_{34} , che stanno in linea retta, cioè nella retta f ; ma siccome i vertici delle stesse lettere sono corrispondenti, così ne viene di conseguenza che i tre triangoli suddetti hanno due a due la stessa retta di prospettiva, vale a dire che pei punti d'incontro dei lati $B_4 C_4$ e $B_1 C_1$ ossia $a_{41}, A_4 C_4$ e $A_1 C_1$ ossia $b_{41}, A_4 B_4$ e $A_1 B_1$ ossia c_{41} passano rispettivamente le rette $B_5 C_5, A_5 C_5, A_5 B_5$. Ma il punto A_5 è dato dall'intersezione della retta $S_{12} A_1$ ossia $A_1 A_2$ con la retta $S_{34} A_3$ ossia $A_3 A_4$, come pure i punti B_5 e C_5 sono dati rispettivamente dai punti d'intersezione delle rette $B_1 B_2, B_3 B_4$ e $C_1 C_2, C_3 C_4$ e poichè la retta $B_5 C_5$ passa pel punto a_{41} , così vuol dire che la retta che congiunge i punti $B_1 B_2. B_3 B_4$ e $C_1 C_2. C_3 C_4$ (retta che io indico col simbolo $C_1 C_2. C_3 C_4 - B_1 B_2. B_3 B_4$)

passa pel punto a_{41} ; analogamente si vede che la retta $C_1 C_2 \cdot C_3 C_4 - A_1 A_2 \cdot A_3 A_4$ passa pel punto b_{41} . Ora il triangolo $A_3 B_3 C_3$ è anche prospettivo col triangolo $A_2 B_2 C_2$ pel centro S_{12} , poichè le rette $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ s'incontrano in S_{12} , ed è prospettivo col triangolo $A_3 B_3 C_3$ pel centro S_{34} , perchè le rette $A_3 A_4 A_5$, $B_3 B_4 B_5$, $C_3 C_4 C_5$ s'incontrano nel punto S_{34} , mentre il triangolo $A_2 B_2 C_2$ è prospettivo col triangolo $A_3 B_3 C_3$ pel centro S_{23} . Ma siccome i vertici delle stesse lettere nei tre triangoli $A_3 B_3 C_3$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ sono corrispondenti e i tre centri S_{12} , S_{34} , S_{23} stanno in una retta, cioè nella retta f , così se ne deduce che essi hanno due a due la stessa retta di prospettiva, cioè che per i punti d'incontro delle rette $B_2 C_2$ e $B_3 C_3$ ossia a_{23} , $A_2 C_2$ e $A_3 C_3$ ossia b_{23} e $A_2 B_2$ e $A_3 B_3$ ossia c_{23} passano rispettivamente le rette $B_3 C_3$, $A_3 C_3$, $A_3 B_3$, ossia per quello che abbiamo visto sopra la retta $C_1 C_2 \cdot C_3 C_4 - B_1 B_2 \cdot B_3 B_4$ e la retta $C_1 C_2 \cdot C_3 C_4 - A_1 A_2 \cdot A_3 A_4$ passano rispettivamente per i punti a_{23} e b_{23} , onde le rette $C_1 C_2 \cdot C_3 C_4 - B_1 B_2 \cdot B_3 B_4$ e $C_1 C_2 \cdot C_3 C_4 - A_1 A_2 \cdot A_3 A_4$ che hanno in comune il punto $C_1 C_2 \cdot C_3 C_4$ sono rispettivamente le congiungenti dei punti $a_{41} a_{23}$, $b_{41} b_{23}$. Con questa osservazione siamo ora in caso di dimostrare il teorema. Scelgo le tre rette s_{12} , s_{23} , s_{41} e voglio dimostrare ch'esse s'incontrano in un punto F. Perciò considero i due triangoli $a_{12} a_{23} a_{41}$ e $b_{12} b_{23} b_{41}$ che hanno i vertici rispettivamente su quelle tre rette, come si scorge facilmente dal quadro delle rette s . Questi due triangoli sono infatti prospettivi perchè i punti d'incontro dei lati corrispondenti, cioè:

$$a_{12} \cdot a_{23} - b_{12} \cdot b_{23} = C_2; \quad a_{12} \cdot a_{41} - b_{12} \cdot b_{41} = C_1; \quad a_{23} \cdot a_{41} - b_{23} \cdot b_{41}$$

sono situati nella retta $C_1 C_2$ (vedasi tabella precedente dei punti a e b). È evidente che anche il punto $a_{23} \cdot a_{41} - b_{23} \cdot b_{41}$ è situato nella retta $C_1 C_2$, poichè abbiamo visto sopra, che le rette $a_{23} \cdot a_{41}$ e $b_{23} \cdot b_{41}$ non sono altro che le rette $C_1 C_2 \cdot C_3 C_4 - B_1 B_2 \cdot B_3 B_4$, $C_1 C_2 \cdot C_3 C_4 - A_1 A_2 \cdot A_3 A_4$ che s'incontrano nel punto $C_1 C_2 \cdot C_3 C_4$ situato nella retta $C_1 C_2$.

Nella stessa maniera si dimostrerebbe che le tre rette s_{12} , s_{23} , s_{34} s'incontrano in un punto, ossia nel punto F; onde è dimostrato il teorema.

Teorema III. Se i vertici di due quadrangoli $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$ sono allineati due a due in quattro rette con un centro S_{12} , quelli del secondo e quelli di un terzo $A_3 B_3 C_3 D_3$ con un centro S_{23} , questi e quelli di un quarto $A_4 B_4 C_4 D_4$ con un centro S_{34} mentre questi ultimi sono allineati con quelli del primo due a due con un centro S_{41} , in maniera che i vertici delle stesse lettere siano rispettivamente allineati con i quattro centri, e se i quattro centri giacciono in una retta, i quattro punti F, che secondo il teorema II corrispondono rispettivamente ai quattro gruppi di triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$, $A_4 B_4 C_4$ e $A_1 B_1 D_1$, $A_2 B_2 D_2$ ecc. $A_1 C_1 D_1$, $A_2 C_2 D_2$ ecc., $B_1 C_1 D_1$, $B_2 C_2 D_2$ ecc., che risultano dai quadrangoli suddetti, sono situati in una retta.

Corollario. Se i vertici di tre quadrangoli $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$, $A_3 B_3 C_3 D_3$ sono allineati tre a tre in quattro rette concorrenti in un punto S, con essi si formano quattro terne di triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$; $A_1 C_1 D_1$, $A_2 C_2 D_2$, $A_3 C_3 D_3$ ecc. Le tre rette di prospettiva di una

terna s'incontrano in un punto, i quattro punti così ottenuti dalle quattro terne sono situati in una retta.

Teorema IV. Se due triangoli $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ sono prospettivi, i tre punti d'incontro della retta $B_1 A_2$ con $A_1 B_2 = C_3$, della retta $C_2 A_1$ con $C_1 A_2 = B_3$ e della retta $B_1 C_2$ con $C_1 B_2 = A_3$ formano un triangolo prospettivo ai due primi e i tre centri di prospettiva sono situati in una retta.

Per dimostrare questo teorema basta dimostrare che le tre rette p. es. $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ s'incontrano in un punto, e questo si fa considerando i due triangoli $A_1 A_2 B_3$, $B_1 B_2 A_3$ i cui vertici sono rispettivamente situati in quelle tre rette e che sono prospettivi.

Ci serviremo del I, II e IV di questi teoremi per dimostrare in seguito alcune proprietà dell'*esagrammo*. Chiamo *esagrammo* tutto l'insieme di punti e rette e sistemi polari, che si deducono dalla combinazione che sei punti siano situati in una curva del 2° ordine.

Hexagrammum Mysticum

2. Siano dati 5 punti di una conica $T T_1 A B C$, chiamando a, b, c ed a_1, b_1, c_1 i raggi che proiettano da T e T_1 i punti A, B, C si ha:

$$(T. A B C...) \wedge (T_1. A B C...) \wedge (a b c...) \wedge (a_1 b_1 c_1...)$$

Seghiamo il fascio $a_1 b_1 c_1$ con una retta o qualunque del piano e siano a', b', c' i raggi che ne uniscono i punti d'incontro col punto T , onde si avrà:

$$(a b c...) \wedge (a' b' c'...)$$

Siano A_1, B_1, C_1 gli altri punti d'incontro di a', b', c' con la conica, onde si avrà:

$$(T A B C...) \wedge (T_1 A_1 B_1 C_1...)$$

onde i punti d'incontro delle rette $T A_1, T_1 A$; $T B_1, T_1 B$ ecc. sono situati nella retta o . Le rette a ed a' incontrano la retta o in due punti corrispondenti α, α' delle due punteggiate sovrapposte in o date su di essa dai fasci $a b c$, $a_1 b_1 c_1$ intorno ai punti T e T_1 . Questi punti α, α' sono anche punti corrispondenti nelle due punteggiate proiettive date in o dai fasci $(A. T B C...)$ e $(A_1. T B C...)$, dunque tutte le coppie di punteggiate proiettive sovrapposte nella retta o , che sono date in essa dalle coppie di fasci proiettivi intorno alle coppie di punti corrispondenti $T T_1, A A_1, B B_1$ ecc. che formano una proiettività di punti della conica, fasci che si ottengono proiettando da $T T_1, A A_1, B B_1$ ecc. i punti della conica, sono identiche vale a dire che si riducono ad una sola coppia; essendone identici i punti uniti (reali o immaginari) che sono i punti d'incontro (reali od immaginari) della retta o con la conica data. Prendiamo ora a considerare i fasci $(A. T B C...)$ e $(A_1. T B C...)$ e siano a^* ed a'' le rette che uniscono i punti A ed A_1 col punto B . Queste rette danno sopra di o una coppia di punti corrispondenti nella coppia suddetta di punteggiate proiettive sovrapposte in o , e siccome a^* ed a_1^* (a_1^* essendo il raggio che unisce il punto A con B_1) danno pure due punti corrispondenti in o di queste due punteggiate, così i raggi a_1^*, a'' devono incontrarsi nella retta o . Dunque anche il punto d'incontro delle

due rette AB_1 , A_1B è situato nella retta o , cioè la retta qualunque o diventa la retta di Pascal. Così resta dimostrato il teorema di Pascal, e quello di Brianchon per la legge di dualità, ove invece della trasversale o entra un punto O qualunque di proiezione.

Teorema V. Un esagono è inscritto in una conica quando i tre punti d'incontro delle tre coppie di lati opposti sono situati in linea retta⁽¹⁾.

Teorema VI. Un esagono è circoscritto ad una conica quando le tre rette di congiunzione delle tre coppie di vertici opposti s'incontrano in un punto⁽²⁾.

3. Con sei punti di una conica si ottengono 1.2.3.4.5.6 esagoni, ciascuno dei quali si ripete dodici volte, perchè se noi consideriamo ad esempio l'esagono 123456, vediamo ch'esso ha per lati le rette 12, 23, 34, 45, 56, 61, e che gli esagoni 234561, 345612, 456123, 561234, 612345, 654321, 543216, 432165, 321654, 216543, 165432 hanno precisamente gli stessi lati; per la qual cosa con 6 punti di una conica si ottengono sessanta esagoni differenti e perciò sessanta rette di Pascal dotate di molte interessanti proprietà. Le rette che congiungono i sei punti della conica due a due, che noi chiameremo *lati fondamentali*, sono quindici, ciascuno di questi lati viene incontrato dagli altri in quattordici punti, otto dei quali cadono quattro a quattro nei due *punti fondamentali* (così si chiamano i sei punti della conica) situati in esso; gli altri sei rimanenti siano chiamati punti P . In tutto l'esagrammo adunque questi punti P sono quarantacinque.

Consideriamo ora i tre triangoli seguenti:

12, 34, 56; 45, 61, 23; 36, 25, 14

i cui lati sono lati fondamentali dell'esagrammo. Questi tre triangoli sono due a due prospettivi p. es. il primo e il secondo hanno per retta di prospettiva la retta di Pascal dell'esagono 123456; infatti questa viene determinata dai punti 12.45, 23.56, 34.61 che sono precisamente i tre punti d'incontro dei lati corrispondenti dei due triangoli. Dunque le rette che ne congiungono i vertici corrispondenti, cioè le rette di Pascal dei tre esagoni 163452, 123654, 143256 s'incontrano in un punto G chiamato punto di Steiner⁽³⁾. È facile di vedere che queste tre rette di Pascal passano anche rispettivamente per i tre vertici del terzo triangolo, infatti trovando i punti P di queste rette nella stessa maniera con la quale abbiamo trovato i punti P della retta di Pascal dell'esagono 123456, si vede che i punti 36.25, 36.14, 25.14 sono rispettivamente punti P delle rette di Pascal suddette. Le tre rette di prospettiva dei tre triangoli sopra indicati, presi due a due s'incontrano in un altro punto G , e sono le rette di Pascal dei tre esagoni 123456, 143652, 163254. Se noi consideriamo la terna dei primi tre esagoni cioè 163452, 123654, 143256 noi vediamo che il secondo ed il terzo si ottengono dal primo scambiando in modo ciclico le cifre in posto pari mentre rimangono fisse in tutti e tre le cifre in posto dispari, che sono 135. Ora uno dei tre ultimi esagoni cioè

⁽¹⁾ Pascal, *Essai pour les coniques*. 1640.

⁽²⁾ Brianchon, *Mémoire sur les lignes du 2^e ordre*. 1808.

⁽³⁾ Steiner, *System. Entw. der Abh. geom. Gestalten*. pag. 311.

12 34 56, 14 36 52, 16 32 54 vien dato da uno dei tre primi con lo scambio di due cifre in posto pari, mentre la terza cifra in posto pari rimane fissa con quelle in posto dispari, p. es. l'esagono 123456 si ottiene dall'esagono 123456 con lo scambio di 6 con 4. I tre ultimi poi si deducono fra di loro nella stessa maniera dei tre primi. Noi diremo che i due punti di Steiner che corrispondono a queste due terne di esagoni appartengono al simbolo 135, essendo 135 le cifre in posto dispari nei 6 esagoni di quelle due terne. In tutto l'esagrammo adunque abbiamo dieci coppie di punti di Steiner che hanno rispettivamente i dieci simboli seguenti:

123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156.

Si badi bene che il simbolo 456 appartiene agli stessi due punti di Steiner del simbolo 123, onde gli altri 10 simboli

456, 356, 346, 345, 256, 246, 245, 236, 235, 234.

sono in certo modo complementari ai primi ed appartengono rispettivamente alle stesse coppie di punti di Steiner. Dunque:

Teorema VII. I quindici lati formati con i 6 punti fondamentali della conica s'incontrano due a due, oltre a questi 6 punti, in 45 punti P.

Le rette di Pascal dei due esagoni che si ottengono permutando in modo ciclico da un esagono qualunque i vertici in posto pari, mentre restano fissi quelli in posto dispari, s'incontrano con la retta di Pascal rappresentata da quest'ultimo in un punto G di Steiner.

Teorema VIII. I 20 punti di Steiner si separano in 10 coppie di punti coniugati rispetto alla conica fondamentale data (*).

Per dimostrare questo teorema mi servo della seguente dimostrazione di Staudt (*). Se si ha un triangolo 123 inscritto in una conica, Staudt chiama polo di esso il punto d'incontro delle tre rette che ne congiungono i vertici coi poli dei lati opposti rispetto alla conica, e polare di esso la polare del suo polo rispetto alla medesima. Siano ora due triangoli 123, 456 inscritti in una conica ed ai vertici dell'uno corrispondano rispettivamente i vertici dell'altro, è facile di vedere che i poli dei due triangoli, le polari e i punti d'incontro (immaginari) XX_1, YY_1 di queste con la conica sono punti e rette corrispondenti nei due sistemi proiettivi 123, 456, in modo che ai punti XX_1 corrispondono i punti YY_1 . Siccome i fasci che proiettano da 4 e 1 rispettivamente le punteggiate 123 XX_1 e 456 YY_1 sono proiettivi così la retta di Pascal data dall'esagono 162435 passa pel punto d'incontro G delle rette XY_1, X_1Y . Egualmente si dimostra che le rette di Pascal date dagli esagoni 142536, 152634 passano per quel punto G che è perciò un punto di Steiner. Le altre tre rette di Pascal 142635, 162534, 152436 passano pel punto d'incontro delle rette XY, X_1Y_1 che è pure un punto G di Steiner. Questi due punti di Steiner appartengono al simbolo 123 e sono, come si vede, punti diagonali del quadrangolo XYX_1Y_1 , onde essi sono divisi armonicamente dai punti d'incontro della retta che li congiunge con la conica e dai due poli dei due triangoli. Per capir bene questa dimostrazione

(*) Hesse, *Ueber das gerad. Sechseck auf dem Hyperboloid*. Vol. 24 Crelle pag. 40. Schröter, *Steiner'sche Vorlesungen*. Neue Aufl. pag. 159. 1876.

(**) Staudt, *Ueber die Steiner'sche Gegenpunkte*. Vol. 62 Crelle pag. 142.

basta rammentarsi che la coppia dei punti immaginari XX_1 , ovvero YY_1 , può essere determinata dai punti doppi di un'involuzione ellittica e che in essa i due punti doppi vengono distinti fra di loro mediante il doppio senso dell'involuzione (1).

Da questa dimostrazione segue anche un teorema di Staudt cioè:

Teorema IX. Due punti conjugati di Steiner sono divisi armonicamente dai punti P e Q , ove P e Q sono rispettivamente i punti d'incontro delle rette che congiungono i vertici dei due triangoli 123, 456 coi poli dei lati opposti rispetto alla conica fondamentale, essendo 123 le cifre in posto dispari dei 6 esagoni dei due punti conjugati di Steiner.

4. Consideriamo ora la retta di Pascal dell'esagono 123456 che rappresento col simbolo $p^{123} = 123456$; presto ne vedremo la ragione. I lati dell'esagono che la determinano sono 12, 16, 23, 34, 45, 56, onde restano ancora i nove altri lati fondamentali 13, 14, 15, 24, 25, 26, 35, 36, 46; con questi si possono formare tre esagoni le cui rette di Pascal s'incontrano in un punto chiamato punto di Kirkman, che rappresento col simbolo K^{12} nominando le tre rette di Pascal che s'incontrano in esso:

$$p^{123} = 135264; \quad p^{124} = 136425 \quad p^{125} = 153624$$

Infatti i due triangoli 13, 26, la retta di Pascal 136245, e 52, 14, 36, i cui vertici giacciono due a due su quelle tre rette, sono prospettivi ed hanno per retta di omologia la retta di Pascal dell'esagono 145263. Si dice che il punto K^{12} corrisponde alla retta di Pascal p^{123} , dunque:

Teorema X. Se dei quindici lati fondamentali dell'esagrammo si tralasciano quelli di un esagono, ne restano ancora nove, con i quali si formano tre esagoni le cui rette di Pascal s'incontrano in un punto di Kirkman, che corrisponde in certa guisa alla retta di Pascal di quel primo esagono. Questi punti di Kirkman sono 60 (2).

Questo teorema può esser dimostrato anche nel modo seguente. I due triangoli 135 e 246 sono circoscritti ad una conica, per la qual cosa le tre rette di congiunzione dei vertici opposti di uno degli esagoni da essi formati circoscritti a questa nuova conica s'incontrano secondo il teorema VI, in un punto; ora per un di questi esagoni, cioè per l'esagono che ha per coppie di vertici opposti le coppie di punti 13. 26, 35. 46; 13. 42, 64. 51 e 15. 62, 35. 24, le tre rette di congiunzione dei vertici opposti sono le rette p^{123} , p^{124} , p^{125} , dunque è dimostrato il teorema. Si osservi che con le nove rette che congiungono i vertici di uno dei triangoli 135 e 246 a quelli dell'altro, si ottengono sei esagoni, le cui rette di Pascal s'incontrano rispettivamente tre a tre nei due punti conjugati di Steiner del simbolo 135.

(1) Vedasi Staudt, *Beiträge zur Geom. der Lage* 1. Heft. § 7. *Imaginäre Elemente* pag. 76-86: oppure Fiedler, *Darstell. Geom. in Verbindung mit der Geom. der Lage*, sopra la determinazione degli elementi immaginari in geometria.

(2) Vedasi Cayley, Vol. 41 di Crelle pag. 66. e Salmon-Fiedler, *Analy. Geom. der Ebene*, III Anfl. pag. 317.

Noi poniamo

$$K'_{12} = p'_{123} p'_{124} p'_{125}$$

Troviamo ora i punti di Kirkman corrispondenti alle tre rette di Pascal che s'incontrano nel punto K'_{12} e chiamiamoli rispettivamente K'_{45} , K'_{35} , K'_{34} . Nel punto K'_{45} s'incontrano le rette di Pascal seguenti:

$$p'_{345} = 123456, \quad p'_{245} = 154236, \quad p'_{145} = 124365$$

onde si ha

$$K'_{45} = p'_{145} p'_{145} p'_{345}$$

Ora le rette di Pascal

$$p'_{345} = 123456, \quad p'_{235} = 145326, \quad p'_{135} = 126534$$

s'incontrano nel punto K'_{35} che corrisponde alla retta p'_{124} dunque:

$$K'_{35} = p'_{135} p'_{235} p'_{345}$$

finalmente nel punto K'_{34} che corrisponde alla retta p'_{125} s'incontrano le rette di Pascal

$$p'_{345} = 123456, \quad p'_{234} = 132546, \quad p'_{134} = 125643$$

ossia si ha

$$K'_{34} = p'_{134} p'_{234} p'_{345}$$

da qui si ricava subito che i tre punti di Kirkman K'_{45} , K'_{35} , K'_{34} che corrispondono alle tre rette p'_{123} , p'_{124} , p'_{125} che s'incontrano nel punto K'_{12} , sono situati nella retta p'_{345} , che corrisponde al punto K'_{12} . Ora troviamo i punti di Kirkman che corrispondono alle rette di Pascal p'_{245} , p'_{145} , p'_{235} , p'_{135} , p'_{234} , p'_{134} e chiamiamoli, come già può essere manifesto, K'_{13} , K'_{23} , K'_{14} , K'_{24} , K'_{15} , K'_{25} , abbiamo

$$p'_{123} p'_{134} p'_{135} = K'_{13}$$

$$p'_{123} p'_{234} p'_{235} = K'_{23}$$

$$p'_{124} p'_{134} p'_{145} = K'_{14}$$

$$p'_{124} p'_{234} p'_{245} = K'_{24}$$

$$p'_{125} p'_{135} p'_{145} = K'_{15}$$

$$p'_{125} p'_{235} p'_{245} = K'_{25}$$

Se si vuol trovare il punto di Kirkman corrispondente ad una delle rette di Pascal che s'incontrano in uno dei punti K'_{13} , K'_{23} , K'_{14} , K'_{24} , K'_{15} , K'_{25} si vede che si ritorna ad uno dei punti già trovati p. es. pigliando la retta p'_{123} , essa ha per corrispondente il punto K'_{45} dato dalle rette p'_{145} , p'_{245} , p'_{345} . Queste rette di Pascal e questi punti di Kirkman testè considerati formano adunque una figura che è chiusa in se stessa, vale a dire che da una qualunque di queste rette di Pascal non si può passare nel modo indicato ad un punto di Kirkman, che non sia uno dei punti della figura (*).

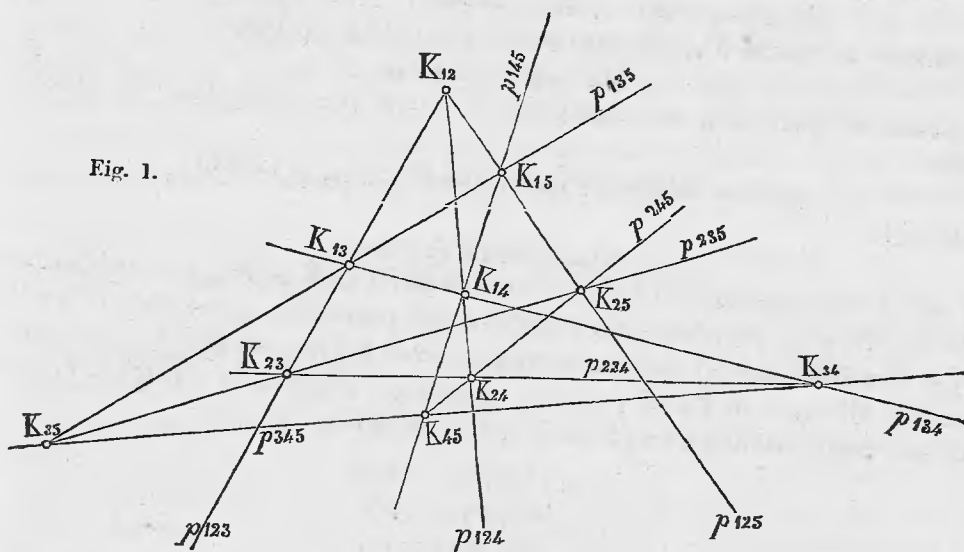
(*) Cioè è in contraddizione con una considerazione di Hesse nel Vol. 68 di Crelle p. 193. Egli dice: Nach dem Vorhergehenden entsprechen einer gegebenen Pascal'schen Linie drei andere Pascal'sche Linien welche sich in dem idealen Pole (Punto corrispondente di Kirkman ovvero polo della retta di Pascal data rispetto alla conica ideale di Hesse) schneiden. Jeder der letzteren entsprechen Wieder drei, also in gewisser Weise entsprechen der gegebenen Pascal'schen Linie neun Pascal'sche Linien sodann 27 und so weiter ». Noi invece abbiamo visto che ad una retta di Pascal non ne corrispondono in questo modo che nove.

Le rette di Pascal di questa figura sono dieci cioè $p^{1345}, p^{123}, p^{124}, p^{125}, p^{134}, p^{135}, p^{145}, p^{234}, p^{235}, p^{245}$ e i dieci punti di Kirkman corrispondenti sono $K^{12}, K^{13}, K^{14}, K^{15}, K^{23}, K^{24}, K^{25}, K^{34}, K^{35}, K^{45}$, queste rette di Pascal s'incontrano tre a tre nei dieci punti di Kirkman, per esempio le rette $p^{123}, p^{124}, p^{125}$ s'incontrano nel punto K^{12} , gli indici ₁₂ del quale sono quelli comuni alle tre rette che s'incontrano in esso.

Teorema XI. Le sessanta rette di Pascal p ed i sessanta punti di Kirkman K formano sei figure π , di dieci punti K posti tre a tre sopra le dieci rette corrispondenti p .

Le rette di Pascal e i punti di Kirkman della figura I avranno l'indice romano I, le altre invece gli indici II, III, IV, V, VI secondo la figura a cui apparterranno. In

Fig. 1.



tutte queste sei figure ad un punto di Kirkman K_{12} corrisponde la retta p_{345} , cioè quella retta che porta i tre indici ₃₄₅ complementari degli indici ₁₂ di esso sino al numero 5. Onde data una retta di Pascal (punto di Kirkman) di una delle sei figure π noi sapremo trovare tosto i punti di Kirkman che sono situati in essa (rette di Pascal che passano per quel punto) e quale sia il suo punto di Kirkman (retta di Pascal) corrispondente (¹). — Se si considera il sistema dei due triangoli $K_{13} K_{14} K_{15}, K_{23} K_{24} K_{25}$ di una figura π vediamo che essi sono prospettivi pel centro K_{12} e per la retta p_{345} , essi possono considerarsi come triangoli polari rispetto ad una conica, ed allora si vede che i punti $K_{12}, K_{13} K_{14} K_{15}, K_{23} K_{24} K_{25}$ hanno per polari le loro rette di Pascal corrispondenti, cioè $p_{345}, p_{245} p_{235} p_{234}, p_{145} p_{135} p_{134}$. Le rette che congiungono i vertici corrispondenti di quei due triangoli sono le rette di Pascal $p_{123}, p_{124}, p_{125}$, esse hanno per poli rispettivamente i punti d'incontro dei lati corrispondenti cioè i punti di Kirkman K_{45}, K_{35}, K_{34} (Fig. I). Dunque:

(¹) Io prego l'egregio mio lettore di aver un po' di pazienza nell'impraticarsi in questa notazione, che io credo necessaria pel mio lavoro. Al num. 5. ho data una tabella delle sei figure ove al simbolo di una retta di Pascal sta accanto l'esagono, dal quale essa vien data.

Teorema XII. Le sei figure π formano sei sistemi polari differenti ⁽¹⁾ rispetto ai quali le dieci rette di Pascal e i dieci punti di Kirkman corrispondenti, che rispettivamente ad esse appartengono, sono poli e polari.

Con i dieci punti di Kirkman di una figura si possono formare adunque cinque quadrangoli cioè

$K_{12} K_{13} K_{14} K_{15}$, $K_{21} K_{23} K_{24} K_{25}$, $K_{31} K_{32} K_{34} K_{35}$, $K_{41} K_{42} K_{43} K_{45}$, $K_{51} K_{52} K_{53} K_{54}$,

i cui lati sono rette di Pascal, onde in tutto l'esagrammo si ottengono trenta quadrangoli i lati dei quali sono rette di Pascal. Reciprocamente le rette di Pascal si lasciano aggruppare in trenta quadrilateri i vertici dei quali sono punti di Kirkman.

5. Qui sotto segue il quadro delle sei figure π . Il punto G che sta a sinistra di ogni retta di Pascal è il punto di Steiner situato sopra di essa, gli indici di esso non indicano punto il simbolo a cui appartiene secondo il num. 3, ma bensì dipendono dalla combinazione di tre figure π come vedremo subito. Dopo di questo quadro seguono le rette di Pascal ordinate nei venti gruppi che danno i punti di Steiner.

Chiamo sistema $[Kp]$ la figura formata dalle sessanta rette di Pascal e dai punti di Kirkman.

Tabella delle sei figure π .

I ^a		II ^a		III	
G_{123}	$123456 = p_{345}$	G_{123}	$125634 = p_{345}$	G_{123}	$163254 = p_{345}$
G_{145}	$135264 = p_{123}$	G_{245}	$153246 = p_{123}$	G_{356}	$153462 = p_{123}$
G_{156}	$136425 = p_{124}$	G_{246}	$154623 = p_{124}$	G_{345}	$156243 = p_{124}$
G_{146}	$153624 = p_{125}$	G_{256}	$135426 = p_{125}$	G_{346}	$135642 = p_{125}$
G_{126}	$124365 = p_{145}$	G_{126}	$126543 = p_{145}$	G_{234}	$142563 = p_{145}$
G_{136}	$154236 = p_{245}$	G_{236}	$136254 = p_{245}$	G_{134}	$132456 = p_{245}$
G_{124}	$126534 = p_{135}$	G_{125}	$124356 = p_{135}$	G_{236}	$146352 = p_{135}$
G_{134}	$145326 = p_{235}$	G_{235}	$163524 = p_{235}$	G_{136}	$123546 = p_{235}$
G_{125}	$125643 = p_{134}$	G_{124}	$123465 = p_{134}$	G_{235}	$143625 = p_{134}$
G_{135}	$132546 = p_{234}$	G_{234}	$152364 = p_{234}$	G_{135}	$154326 = p_{234}$
IV ^a		V ^a		IV ^a	
G_{456}	$125436 = p_{345}$	G_{456}	$145632 = p_{345}$	G_{456}	$165234 = p_{345}$
G_{124}	$153264 = p_{123}$	G_{125}	$135246 = p_{123}$	G_{236}	$135462 = p_{123}$
G_{234}	$156423 = p_{124}$	G_{135}	$134625 = p_{124}$	G_{126}	$136245 = p_{124}$
G_{134}	$135624 = p_{125}$	G_{235}	$153426 = p_{125}$	G_{136}	$153642 = p_{125}$
G_{345}	$124563 = p_{145}$	G_{345}	$126345 = p_{145}$	G_{156}	$142365 = p_{145}$
G_{346}	$134256 = p_{245}$	G_{356}	$156234 = p_{245}$	G_{146}	$152436 = p_{245}$
G_{145}	$126354 = p_{135}$	G_{245}	$163542 = p_{135}$	G_{356}	$146532 = p_{135}$
G_{146}	$143526 = p_{235}$	G_{256}	$165324 = p_{235}$	G_{346}	$125346 = p_{235}$
G_{245}	$123645 = p_{134}$	G_{145}	$125463 = p_{134}$	G_{236}	$145623 = p_{134}$
G_{246}	$152346 = p_{234}$	G_{156}	$132564 = p_{234}$	G_{246}	$134526 = p_{234}$

(¹) Vedremo più tardi al num. 10 come i sistemi polari siano differenti.

Tabella dei punti G di Steiner.

$\left. \begin{array}{l} 123456 = p^I_{345} \\ 125634 = p^{II}_{345} \\ 163254 = p^{VI}_{345} \end{array} \right\} G_{123} = 135$					
$\left. \begin{array}{l} 123465 = p^{II}_{134} \\ 143562 = p^I_{135} \\ 153264 = p^{IV}_{123} \end{array} \right\} G_{124} = 136$			$\left. \begin{array}{l} 146325 = p^{II}_{234} \\ 136524 = p^{III}_{145} \\ 156423 = p^{IV}_{124} \end{array} \right\} G_{234} = 126$		
$\left. \begin{array}{l} 124356 = p^{II}_{135} \\ 134652 = p^I_{134} \\ 164253 = p^V_{123} \end{array} \right\} G_{125} = 145$			$\left. \begin{array}{l} 142536 = p^I_{235} \\ 152634 = p^{III}_{134} \\ 162435 = p^V_{125} \end{array} \right\} G_{235} = 123$		
$\left. \begin{array}{l} 124365 = p^I_{145} \\ 134562 = p^{II}_{145} \\ 154263 = p^{VI}_{124} \end{array} \right\} G_{126} = 146$			$\left. \begin{array}{l} 146352 = p^{III}_{135} \\ 136254 = p^{II}_{245} \\ 126453 = p^{VI}_{123} \end{array} \right\} G_{236} = 156$		
			$\left. \begin{array}{l} 125436 = p^{IV}_{345} \\ 145632 = p^V_{345} \\ 165234 = p^{VI}_{345} \end{array} \right\} G_{456} = 135$		
$\left. \begin{array}{l} 146532 = p^{VI}_{135} \\ 156234 = p^V_{245} \\ 126435 = p^{III}_{123} \end{array} \right\} G_{356} = 136$			$\left. \begin{array}{l} 164352 = p^{VI}_{235} \\ 134256 = p^{IV}_{245} \\ 124653 = p^{III}_{125} \end{array} \right\} G_{346} = 145$		
$\left. \begin{array}{l} 142365 = p^{IV}_{145} \\ 132564 = p^V_{234} \\ 152463 = p^I_{124} \end{array} \right\} G_{156} = 126$			$\left. \begin{array}{l} 163425 = p^{VI}_{245} \\ 143526 = p^{IV}_{235} \\ 153624 = p^I_{125} \end{array} \right\} G_{146} = 123$		
$\left. \begin{array}{l} 142356 = p^{IV}_{235} \\ 132654 = p^{VI}_{134} \\ 162453 = p^{II}_{125} \end{array} \right\} G_{256} = 125$			$\left. \begin{array}{l} 164325 = p^{IV}_{234} \\ 134526 = p^{VI}_{234} \\ 154623 = p^{II}_{124} \end{array} \right\} G_{246} = 124$		
			$\left. \begin{array}{l} 165423 = p^{III}_{245} \\ 145326 = p^I_{235} \\ 135624 = p^{IV}_{125} \end{array} \right\} G_{134} = 125$		
			$\left. \begin{array}{l} 162345 = p^{III}_{234} \\ 132546 = p^I_{234} \\ 152643 = p^V_{124} \end{array} \right\} G_{135} = 124$		
			$\left. \begin{array}{l} 163245 = p^I_{245} \\ 123546 = p^I_{235} \\ 153642 = p^{VI}_{125} \end{array} \right\} G_{136} = 134$		
			$\left. \begin{array}{l} 126345 = p^V_{145} \\ 136542 = p^{IV}_{145} \\ 156243 = p^{III}_{124} \end{array} \right\} G_{345} = 146$		
			$\left. \begin{array}{l} 126354 = p^{IV}_{135} \\ 136452 = p^V_{134} \\ 146253 = p^I_{123} \end{array} \right\} G_{145} = 156$		
			$\left. \begin{array}{l} 123645 = p^{IV}_{134} \\ 163542 = p^V_{135} \\ 153246 = p^{II}_{123} \end{array} \right\} G_{245} = 134$		

Come ben si vede dalla prima tabella le dieci rette di Pascal di una figura non hanno nessun punto P comune, esse passano per dieci punti di Steiner differenti. Due figure qualunque hanno quattro punti di Steiner comuni come p. es., la I^a e la II^a hanno in comune i punti di Steiner G_{123} G_{124} G_{125} G_{126} . Esse hanno anche i seguenti punti P comuni

13.24	dato dalle rette	p^I_{124}, p^{II}_{125}
14.23	»	p^I_{235}, p^{II}_{234}
15.26	»	p^I_{125}, p^{II}_{124}
35.46	»	p^I_{123}, p^{II}_{123}
36.54	»	p^I_{245}, p^{II}_{245}
16.52	»	p^I_{234}, p^{II}_{235}

Questi punti sono situati tre a tre sulle quattro rette di Pascal $p^{III}_{345}, p^{IV}_{123}, p^V_{123}, p^{VI}_{124}$, che appartengono rispettivamente alle altre quattro figure, dunque due figure combinate insieme determinano una retta di Pascal di ciascuna delle altre quattro. Queste quattro rette passano per i punti di Steiner comuni alle due figure. Tre figure π hanno invece un solo punto di Steiner comune, onde il punto G che risulta dalla combinazione delle tre figure I II III lo chiameremo G_{123} e quello invece che risulta dalla combinazione delle altre tre figure IV V VI lo chiameremo G_{456} . Ecco adunque il significato degl'indici dei punti G.

I punti di Steiner che contengono indici complementari sino al 6, come p. e. G_{123} e G_{456} sono punti coniugati, cioè mentre tre figure π qualunque prese insieme danno un punto di Steiner, la combinazione delle tre rimanenti ci dà il punto a questo coniugato. Da una figura si passa ad un'altra con lo scambio di una o due cifre, p. es. si passa dalle rette di Pascal della I figura rispettivamente a quelle della II e III mediante lo scambio di due cifre, p. es. dalla retta p^I_{345} si passa alla retta p^{II}_{345} mediante lo scambio di 3 con 5 e di 6 con 4, e così da tutte le rette della I a quelle della II figura, mentre si passa dalle rette di Pascal della I o II o III a quelle di una delle altre tre figure IV V VI mediante lo scambio di una sola cifra, come ben si può veder dalla tabella delle sei figure π .

Dalla seconda tabella vediamo che le tre cifre che stanno a destra di ciascun punto di Steiner indicano a qual simbolo esso appartiene secondo il num. 3, p. es. le tre cifre 135 che stanno a destra del punto G_{123} indicano ch'esso appartiene al simbolo 135, ossia che le tre cifre in posto dispari degli esagoni che lo determinano sono 135.

Per avere le 4 rette di Pascal determinate dalla combinazione di due figure π p. es. della I e II, e che appartengono rispettivamente alle altre quattro figure, basta prendere i quattro punti di Steiner G , gli indici dei quali contengono le cifre 12; le quattro rette di Pascal che passano rispettivamente per essi e che appartengono alle altre quattro figure III IV V VI, ossia le rette p^{III}_{345} , p^{IV}_{123} , p^V_{123} , p^{VI}_{124} , sono le rette richieste. Infatti, come prima abbi- am visto, sono precisamente queste le rette

che passano due a due per i punti P 13.24, 14.23, 15.26, 35.46, 36.54, 16.52 che sono comuni alle due figure I e II.

6. Siano ora date le rette

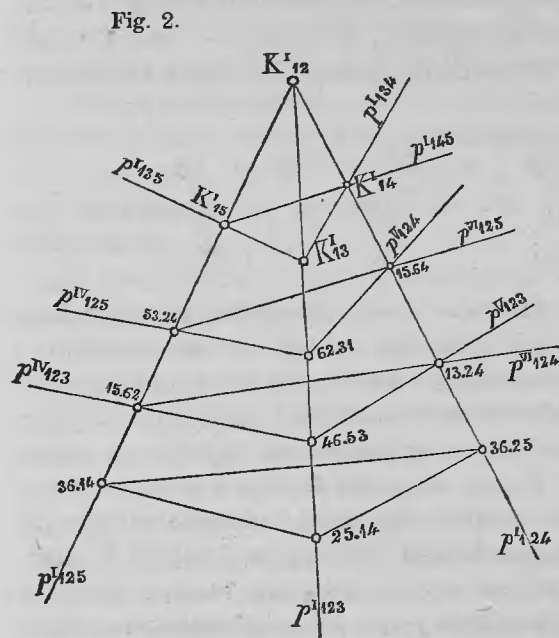
$$p^I_{123} = 135264 = \begin{vmatrix} 13.26 \\ 35.64 \\ 52.41 \end{vmatrix}$$

$$p^I_{124} = 136425 = \begin{vmatrix} 13.42 \\ 36.25 \\ 64.51 \end{vmatrix}$$

$$p^I_{125} = 153624 = \begin{vmatrix} 15.62 \\ 53.24 \\ 36.41 \end{vmatrix}$$

(vedasi la tabella delle sei figure π) che s'incontrano nel punto K^I_{12} , (Fig. 2). Nella retta p^I_{123} sono situati i punti K^I_{23} , K^I_{13} oltre al punto K^I_{12} ,

come si è visto al num. 4, così nelle rette p^I_{124} e p^I_{125} sono situati rispettivamente i punti K^I_{24} , K^I_{14} e K^I_{25} , K^I_{15} oltre al punto K^I_{12} . In queste tre rette sono situati anche i nove punti P che sono sopra indicati e che si possono veder segnati anche nella fig. 2. C'è il triangolo 14.25, 14.36, 25.36, che ha i suoi vertici rispettivamente



situati nelle tre rette di Pascal suddette; ebbene separiamo i vertici di questo triangolo dagli altri sei punti P di queste rette, cioè supponiamo che questo triangolo sia tenuto in disparte, allora con gli altri sei punti P ossia con i punti 35.46, 62.31; 15.64, 13.24; 53.24, 15.62 otterremo quattro coppie di triangoli non aventi alcun vertice comune, una di queste sarà la coppia dei triangoli 35.46, 15.62, 13.24, e 13.62, 35.24, 15.64; ciascuna di queste quattro coppie determina col triangolo 14.25, 14.36, 25.36 una terna di triangoli prospettivi due a due pel centro K_{12} , le tre rette di prospettiva adunque di ciascuna terna s'incontrano in un punto, i quattro punti così ottenuti per le quattro terne, formate dalle quattro coppie suddette col triangolo 14, 25, 36, sono situati secondo il teorema I in una retta. Si considerino adunque le quattro terne suddette e disponendole a guisa delle quattro terne di triangoli che nel num. 1 avevano il triangolo $A_1 B_1 C_1$ comune avremo:

(*)	14.25, 14.36, 25.36	35.46, 15.62, 13.24; 13.62, 35.24, 15.64
	»	35.46, 15.62, 15.64; 13.62, 35.24, 13.24
	»	35.46, 35.24, 13.24; 13.62, 15.62, 15.64
	»	35.46, 35.24, 15.64; 13.62, 15.62, 13.24

Siccome le rette che congiungono le coppie di vertici 35.46, 15.62; 35.46, 13.24; 15.62, 13.24 del 2° triangolo della prima terna sono ordinatamente le rette $p^{IV}_{123}=153264$, $p^{V}_{123}=135246$ e $p^{VI}_{124}=136245$ e quelle che uniscono le coppie di vertici del 3° triangolo della stessa terna sono le rette $p^{IV}_{125}=135624$, $p^{V}_{121}=134625$ e $p^{VI}_{123}=153642$, come si può vedere dalla tabella delle sei figure π , così potremo scrivere queste quattro terne nel seguente modo, ove introduciamo in luogo dei vertici de' triangoli i loro lati, cioè:

(**)	14, 25, 36	p^{IV}_{123}	p^{V}_{123}	p^{VI}_{124}	p^{IV}_{125}	p^{V}_{124}	p^{VI}_{125}
		p^{IV}_{123}	46	15	p^{IV}_{123}	13	24
		35	p^{V}_{123}	24	26	p^{V}_{124}	15
		35	46	p^{VI}_{124}	26	13	p^{VI}_{125}

Ora il secondo e terzo triangolo della prima terna essendo prospettivi pel centro K_{12} , come già l'abbiamo detto di sopra, i punti d'incontro dei lati corrispondenti ossia i punti K^{IV}_{12} , K^{V}_{12} , K^{VI}_{12} , che corrispondono alle tre rette di Pascal p^{IV}_{345} , p^{V}_{345} , p^{VI}_{345} concorrenti nel punto G_{456} (vedasi tabella dei punti di Steiner) giacciono in una retta, che io chiamerò retta di Cayley-Salmon e che rappresenterò col simbolo c_{456} ; questa corrisponde in certa guisa al punto di Steiner G_{456} . Ora le altre due rette di prospettiva della prima terna cioè le rette di prospettiva del 1° triangolo col 2° e 3° sono le due rette $p^{III}_{345}=163254$ e $p^{II}_{345}=125634$, poichè p. es. i lati del 1° triangolo incontrano i lati corrispondenti del secondo nei tre punti 14.32, 25.16, 36.54 situati nella retta p^{III}_{345} (*), e poichè le due rette p^{III}_{345} , p^{II}_{345} s'incontrano nel punto G_{123} , così vuol dire che la retta di Cayley-Salmon c_{456} deve passare pel punto G_{123} , che è conjugato al punto G_{456} , del quale essa è corrispondente.

(*) Siccome noi ci serviremo sempre tanto della tabella delle 6 figure π e dei punti G, così farà bene il lettore di tenersele sempre sott'occhio.

Si potrebbe anche dimostrare che la retta c_{436} passa per G_{123} considerando nella prima terna il triangolo $p^{I}_{133} p^{I}_{134} p^{I}_{145}$ invece del triangolo 14,25,36, però bisognerebbe supporre noto il teorema XV, dunque abbiamo:

Teorema XIII. I tre punti di Kirkman che corrispondono secondo il teorema X alle tre rette di Pascal, che s'incontrano in un punto di Steiner, sono situati in una retta di Cayley-Salmon, che corrisponde a questo punto di Steiner. Le rette di Cayley-Salmon sono 20 in tutto l'esagrammo, ciascuna di esse passa per il punto di Steiner, conjugato a quello a cui essa è corrispondente (*).

Ciò che abbiamo detto dei punti di Steiner al num. 5 relativamente alle combinazioni delle 6 figure π due a due, o tre a tre, possiamo ripetere per le rette di Cayley-Salmon, cioè due figure prese insieme p. es. la I e II hanno in comune quattro rette di Cayley-Salmon cioè le rette $c_{123}, c_{124}, c_{125}, c_{126}$, che sono corrispondenti ai quattro punti $G_{123}, G_{124}, G_{125}, G_{126}$, che come sappiamo sono comuni alle due figure I e II. Tre figure π invece hanno in comune una sola retta di Cayley-Salmon p. es. le figure I, II, III hanno in comune la retta c_{123} . Tutto questo si vede assai facilmente quando si scrivino o si pensino scritte le sei figure π ordinate secondo i punti di Kirkman corrispondenti alle rette di Pascal, che le compongono. Per es. invece della retta p^{I}_{345} nella figura I, ove è posto il punto G_{123} , considereremo il punto K_{12} ad essa corrispondente pel quale passa la retta c_{123} e così per le altre rette di Pascal.

Finora però noi abbiamo considerato solamente la prima delle quattro terne (**) di triangoli, ed abbiamo con essa dimostrato il teorema XIII. Ora osserviamo che le tre rette di prospettiva della seconda terna sono le rette

$p^{II}_{234} = 152364, p^{III}_{145} = 142563, p^{IV}_{124} = 156423$ che s'incontrano in G_{234} perchè i punti d'incontro dei lati corrispondenti dei triangoli di quella terna presi due a due, sono ordinatamente i punti P di queste tre rette.

Eguualmente si vede che le tre rette di prospettiva dei triangoli della terza terna sono:

$p^{II}_{235} = 163524, p^{III}_{134} = 143625, p^{V}_{125} = 153426$ che s'incontrano in G_{235} e quelle della quarta:

$p^{III}_{135} = 146352, p^{II}_{245} = 136254, p^{VI}_{123} = 135462$ » G_{236}
mentre quelle della prima terna s'incontrano nel punto G_{123} , come già abbi-
am visto, dunque pel teorema I si ha che i punti $G_{123}, G_{234}, G_{235}, G_{236}$, che sono comuni alle figure II e III, giacciono in una retta, perchè le quattro terne (*) sono formate da 9 punti, che sono i punti P delle tre rette $p^{I}_{123}, p^{I}_{124}, p^{I}_{125}$ ed inoltre esse hanno un triangolo comune, cioè il triangolo 14.25, 14.36, 25.36. Questa retta sia chiamata retta di Steiner-Plücker, e sia rappresentata col simbolo g_{23} , essa appartiene in un certo modo alla combinazione delle due figure II e III, onde quando diremo la retta di Steiner-Plücker appartenente o corrispondente o comune a due figure π , intenderemo la retta g che unisce i punti di Steiner a loro comuni. Siccome le combinazioni delle due figure π sono 15, così sono 15 anche le rette di Steiner-Plücker. Mentre p. es. nella retta g_{23} giacciono i punti di Steiner $G_{123}, G_{234}, G_{235}, G_{236}$, gli

(*) Vedi Cayley, Vol. 41 di Crelle pag. 66.

indici dei quali contengono le cifre dell'indice della retta g_{23} , per un punto G_{123} invece passano le tre rette g_{12} , g_{13} , g_{23} date dalle combinazioni delle tre figure π I, II e III che lo hanno comune. Si ha dunque riassumendo quel che si è detto:

Teorema XIV. Due figure π hanno in comune quattro punti di Steiner e le quattro rette di Cayley-Salmon corrispondenti. Tre figure π hanno in comune un punto di Steiner e la retta di Cayley-Salmon ad esso corrispondente. Due figure π hanno 6 punti P comuni, situati tre a tre in quattro rette di Pascal che appartengono rispettivamente alle altre quattro figure e passano rispettivamente per i quattro punti di Steiner comuni alle due prime figure π .

Teorema XV. I quattro punti di Steiner G comuni a due figure π sono situati in una retta di Steiner-Plücker g , che è così comune alle due figure. Queste rette sono 15 in tutto l'esagrammo, tre a tre passano per un punto di Steiner⁽¹⁾.

Altra dimostrazione di questo teorema. — Se noi consideriamo (Fig. 2) il triangolo $p^{I}_{135} = 126534$, $p^{I}_{143} = 124365$, $p^{I}_{134} = 125643$ i cui lati congiungono rispettivamente i punti K^{I}_{13} , K^{I}_{13} , K^{I}_{14} e il triangolo $p^{V}_{123} = 153264$, $p^{V}_{124} = 136245$, $p^{V}_{123} = 135246$ vediamo ch'essi sono prospettivi pel centro K^{I}_{12} : ora i punti d'incontro dei lati corrispondenti sono:

$$p^{I}_{135} p^{V}_{123} = G_{124}$$

$$p^{I}_{143} p^{V}_{124} = G_{126}$$

$$p^{I}_{134} p^{V}_{123} = G_{125}$$

dunque i punti G_{124} , G_{126} , G_{125} giacciono in una retta, cioè nella retta g_{12} . Ora per dimostrare ch'essa passa anche pel punto G_{123} , si consideri anche il triangolo $p^{I}_{235} = 145326$, $p^{I}_{243} = 154236$, $p^{I}_{234} = 132546$, i cui lati congiungono rispettivamente i punti K^{I}_{23} , K^{I}_{23} , K^{I}_{24} , che sono situati rispettivamente nelle tre rette p^{I}_{123} , p^{I}_{123} , p^{I}_{124} che s'incontrano in K^{I}_{12} , onde questo triangolo è prospettivo ai due testè considerati pel centro K^{I}_{12} . La retta di prospettiva di questo col primo dei due triangoli considerati ossia col triangolo p^{I}_{135} p^{I}_{143} p^{I}_{134} è la retta p^{I}_{345} , perchè i punti d'incontro dei lati corrispondenti ossia $p^{I}_{235} p^{I}_{135} = K^{I}_{35}$, $p^{I}_{243} p^{I}_{143} = K^{I}_{43}$, $p^{I}_{234} p^{I}_{134} = K^{I}_{34}$ sono situati precisamente nella retta p^{I}_{345} , e la retta di prospettiva del triangolo p^{I}_{235} p^{I}_{243} p^{I}_{234} col secondo dei triangoli considerati ossia $p^{V}_{123} = 153264$, $p^{V}_{124} = 136245$, $p^{V}_{123} = 135246$ è la retta $p^{II}_{345} = 163254$; infatti i punti d'incontro dei lati corrispondenti $p^{I}_{235} p^{V}_{123} = 14.32$, $p^{I}_{243} p^{V}_{124} = 45.63$, $p^{I}_{234} p^{V}_{123} = 52.61$ sono i punti P della retta p^{II}_{345} . Ma le rette p^{I}_{345} e p^{II}_{345} s'incontrano nel punto G_{123} , per questo dunque deve passare anche la retta di prospettiva dei due primi triangoli ossia la retta g_{12} .

Abbiamo visto ora che nei punti P della retta p^{III}_{345} (che è una delle rette determinate dalla I e II figura π come si è visto al num. 5) s'incontrano rispettivamente le rette $p^{I}_{235} p^{V}_{123}$, $p^{I}_{243} p^{V}_{124}$, $p^{I}_{234} p^{V}_{123}$, ma per essi passano anche le tre

⁽¹⁾ Vedi Steiner, *System. Entw. der Abh. geom. Gestalten*, pag. 311 e Plücker, Vol. 5 di Crelle pag. 275. *Ueber ein neues Princip der Geometrie*.

rette $p_{234}^{II} = 152364$, $p_{245}^{II} = 136254$, $p_{235}^{II} = 163524$ della seconda figura (vedasi num. 5); dunque noi possiamo formare i due triangoli prospettivi seguenti:

$$p_{235}^I p_{245}^I p_{234}^I \quad ; \quad p_{234}^{II} p_{245}^{II} p_{235}^{II}$$

ossia

$$K_{25}^I K_{23}^I K_{24}^I \quad ; \quad K_{24}^{II} K_{23}^{II} K_{25}^{II}$$

Infatti i lati p_{235}^I , p_{234}^{II} ecc. s'incontrano nella retta p_{345}^{III} , dunque le rette che congiungono i vertici corrispondenti cioè le rette $K_{25}^I K_{24}^{II} = c_{125}$, $K_{23}^I K_{23}^{II} = c_{126}$, $K_{24}^I K_{25}^{II} = c_{124}$ che sono tre rette di Cayley-Salmon s'incontrano in un punto, che si chiama punto di Salmon; io lo rappresenterò col simbolo S_{12} . Considerando invece i due triangoli formati dalle rette della I e II figura π , che s'incontrano nei punti P di una delle altre tre rette p_{123}^V , p_{124}^V , p_{125}^V che con la p_{345}^{III} sono determinate dalle due figure, si dimostra che anche la retta c_{123} passa pel punto S_{12} . Dunque le quattro rette c_{123} , c_{124} , c_{125} , c_{126} che sono comuni a due figure s'incontrano in un punto S_{12} . Diremo che questo punto S_{12} appartiene od è comune alle due figure I e II. Esso corrisponde in certo modo alla retta g_{12} , che le due figure I e II hanno in comune, perchè le quattro rette di Cayley-Salmon c_{123} , c_{124} , c_{125} , c_{126} corrispondono ai punti di Steiner G_{123} , G_{124} , G_{125} , G_{126} .

Teorema XVI. Le quattro rette di Cayley-Salmon che corrispondono ai quattro punti di Steiner comuni a due figure π passano per un punto di Salmon, che corrisponde alla retta di Steiner-Plücker sulla quale giacciono quei quattro punti G. Le venti rette di Cayley-Salmon s'incontrano così in 15 punti di Salmon, che giacciono tre a tre in ciascuna di esse.

*Tabella delle rette di Steiner-Plücker
e dei punti di Salmon.*

$g_{12} = G_{123} G_{124} G_{125} G_{126}$	$S_{12} = c_{123} c_{134} c_{125} c_{126}$
$g_{13} = G_{123} G_{134} G_{135} G_{136}$	$S_{13} = c_{123} c_{134} c_{135} c_{136}$
$g_{14} = G_{124} G_{134} G_{145} G_{146}$	$S_{14} = c_{124} c_{134} c_{145} c_{146}$
$g_{15} = G_{125} G_{135} G_{145} G_{156}$	$S_{15} = c_{125} c_{135} c_{145} c_{156}$
$g_{16} = G_{126} G_{136} G_{146} G_{156}$	$S_{16} = c_{126} c_{136} c_{146} c_{156}$
$g_{23} = G_{123} G_{234} G_{235} G_{236}$	$S_{23} = c_{123} c_{234} c_{235} c_{236}$
$g_{24} = G_{124} G_{234} G_{245} G_{246}$	$S_{24} = c_{124} c_{234} c_{245} c_{246}$
$g_{25} = G_{125} G_{235} G_{245} G_{256}$	$S_{25} = c_{125} c_{235} c_{245} c_{256}$
$g_{26} = G_{126} G_{236} G_{246} G_{256}$	$S_{26} = c_{126} c_{236} c_{246} c_{256}$
$g_{34} = G_{134} G_{234} G_{345} G_{346}$	$S_{34} = c_{134} c_{234} c_{345} c_{346}$
$g_{35} = G_{135} G_{235} G_{345} G_{356}$	$S_{35} = c_{135} c_{235} c_{345} c_{356}$
$g_{36} = G_{136} G_{236} G_{346} G_{356}$	$S_{36} = c_{136} c_{236} c_{346} c_{356}$
$g_{45} = G_{145} G_{245} G_{345} G_{456}$	$S_{45} = c_{145} c_{245} c_{345} c_{456}$
$g_{46} = G_{146} G_{246} G_{346} G_{456}$	$S_{46} = c_{146} c_{246} c_{346} c_{456}$
$g_{56} = G_{156} G_{256} G_{356} G_{456}$	$S_{56} = c_{156} c_{256} c_{356} c_{456}$

Da questo quadro è facile di vedere che le due figure delle rette di Steiner-Plücker e quella dei punti di Salmon sono due figure duali e che la figura delle rette di Steiner-Plücker è eguale a quella di tre triangoli prospettivi come p. es. $G_{124} G_{134} G_{234}$, $G_{125} G_{135} G_{235}$, $G_{126} G_{136} G_{236}$, i cui vertici sono situati in tre rette concorrenti in un punto, cioè nelle tre rette g_{12} , g_{13} , g_{23} che s'incontrano nel punto G_{123} . I nove lati di questi tre triangoli sono rette di Steiner-Plücker, le tre rette di prospettiva sono le tre rette g_{45} , g_{46} , g_{56} che s'incontrano nel punto G_{456} conjugato di G_{123} , mentre i punti d'incontro dei lati con esse sono altrettanti punti di Steiner. Si vede pure che la figura è simmetrica rispetto a questi punti (*).

Osservazione — Abbiamo visto al num. 3 che i punti di Steiner si separano in dieci coppie di punti conjugati rispetto alla conica fondamentale. Ora per due punti di Steiner di una di queste coppie p. es. $G_{123} G_{456}$ passano rispettivamente le rette di Cayley-Salmon ad essi corrispondenti, ossia pel punto G_{123} passa la retta c_{456} e pel punto G_{456} passa la retta c_{123} . Io dico che queste due rette, ossia le due rette di Cayley-Salmon corrispondenti a due punti conjugati di Steiner, *non sono* due rette conjugate rispetto alla conica fondamentale. Nel punto G_{123} s'incontrano le tre rette di Pascal $p^I_{345} = 123456$, $p^{II}_{345} = 125634$, $p^{III}_{345} = 163254$ mentre nel punto G_{456} s'incontrano le rette $p^{IV}_{345} = 125436$, $p^V_{345} = 145632$, $p^VI_{345} = 165234$.

Supponiamo che le rette c_{123} e c_{456} siano rette conjugate rispetto alla conica fondamentale, allora una di esse almeno deve esser la polare del suo punto corrispondente di Steiner; infatti è evidente che se la retta c_{456} non è la polare del punto G_{456} , la polare di quest'ultimo dovrà incontrare la retta c_{456} nel punto G_{123} , che sarà il polo della retta c_{123} , secondo l'ipotesi fatta, poichè tutti i punti di una retta p. es. della c_{123} hanno per conjugati il polo della retta, onde il punto G_{456} non può avere altro punto conjugato nella retta c_{456} all'infuori del punto G_{123} ; dunque se la retta c_{456} non è la polare del punto G_{456} sarà la retta c_{123} la polare del punto G_{123} . Quest'ultima retta è data dai punti di Kirkman, che corrispondono rispettivamente alle rette di Pascal che s'incontrano nel punto G_{123} ossia:

$$K^I_{12} = p^I_{123} p^I_{124} p^I_{125} = \begin{vmatrix} 135264 \\ 136425 \\ 153624 \end{vmatrix}$$

$$K^{II}_{12} = p^{II}_{123} p^{II}_{124} p^{II}_{125} = \begin{vmatrix} 153246 \\ 154623 \\ 135426 \end{vmatrix}$$

$$K^{III}_{12} = p^{III}_{123} p^{III}_{124} p^{III}_{125} = \begin{vmatrix} 153462 \\ 156243 \\ 135642 \end{vmatrix}$$

Per trovare il polo della retta p^I_{345} basta trovare il punto d'incontro delle polari di due dei suoi punti p. es. dei punti 12. 45, 23. 56. Le polari di questi punti sono

(*) Vedi Cayley, Vol. 31 di Crelle pag. 216 e Vol. 34 pag. 272. — Hesse, Vol. 41 di Crelle pag. 269 e Vol. 75 pag. 1.

rispettivamente le rette che congiungono i punti 15.24, 14.25 e 25.36, 35.26, queste due rette devono incontrarsi secondo l'ipotesi fatta in un punto della retta c_{123} , cioè nel polo della retta di Pascal p^I_{345} .

Noi abbiamo le tre rette c_{123} , 15.24 — 14.25, e 25.36 — 35.26. Noi possiamo formare i seguenti triangoli:

$$K_1 \quad 14.25 \quad 25.36 \quad ; \quad K_2 \quad 15.24 \quad 35.26$$

i cui vertici sono situati due a due in quelle tre rette. Questi triangoli essendo prospettivi, i punti d'incontro dei lati corrispondenti devono esser situati in una linea retta.

Ora i punti d'incontro dei lati corrispondenti sono

$$135264 - 153246 = 35.46$$

$$136425 - 135426 = 13.42$$

$$25 - 153462 = 25 - 153462$$

dunque questi tre punti devono esser situati in linea retta, ma la retta che congiunge i due primi punti è la retta di Pascal 135246, essa incontra il lato 25 nel punto 25.16 ma non nel punto 25 — 153462, dunque vuol dire che la retta c_{123} e le rette 15.24 — 14.25, 25.36 — 35.26 non s'incontrano in un punto, ossia che la retta c_{123} non passa pel polo della retta di Pascal $p^I_{345} = 123456$, ossia che la retta c_{123} non è la polare del punto G_{123} , ossia che le rette di Cayley-Salmon c_{123} e c_{456} che corrispondono ai due punti di Steiner G_{123} e G_{456} coniugati non sono rette coniugate rispetto alla conica fondamentale.

7. Consideriamo ora una retta di Pascal p. es. la retta: $p^I_{345} = 123456$ e consideriamo il triangolo 14, 25, 36, ove i due punti fondamentali di un lato sono dati da due vertici dell'esagono 123456 fra i quali ne esistono altri due. Il triangolo 14, 25, 36 suddetto sia chiamato triangolo Δ della retta di Pascal p^I_{345} ; onde ogni retta di Pascal ha il suo triangolo Δ formato nel modo testè indicato. Ora dalla tabella dei punti di Steiner si vede che i vertici del triangolo 14, 25, 36 della retta p^I_{345} sono situati rispettivamente nelle tre rette di Pascal, che s'incontrano nel punto G_{456} , coniugato del punto G_{123} situato nella retta p^I_{345} ; onde i tre triangoli Δ , che appartengono rispettivamente alle tre rette di Pascal p. es. $p^I_{345} = 123456$, $p^{II}_{345} = 125634$, $p^{III}_{345} = 163254$ che s'incontrano nel punto G_{123} , hanno i loro vertici rispettivamente situati nelle tre rette $p^{IV}_{345} = 125436$, $p^V_{345} = 145632$, $p^{VI}_{345} = 165234$ che s'incontrano nel punto G_{456} coniugato del punto G_{123} . Questi tre triangoli Δ li chiameremo pure triangoli Δ del punto di Steiner G_{456} . Osserviamo inoltre che le due terne di triangoli Δ di due punti di Steiner coniugati come p. es. G_{123} , G_{456} , sono formate dagli stessi nove lati fondamentali; infatti i triangoli Δ del punto G_{123} sono 14, 23, 56; 16, 43, 52; 12, 63, 54 e quelli del punto G_{456} sono 14, 25, 36; 16, 23, 54; 12, 65, 34.

Dalla tabella dei punti di Steiner si rileva pure che il triangolo Δ 12, 65, 34 è comune alle rette $p^{III}_{345} = 163254$, $p^{IV}_{123} = 153264$, $p^V_{123} = 164253$, $p^{VI}_{123} = 154263$, che come sappiamo sono determinate dalla combinazione della I e II figura π , onde il triangolo Δ suddetto corrisponde alla combinazione della I e II figura e siccome sono quindici le combinazioni delle sei figure π due a due, così si hanno 15 triangoli Δ , che corrispondono ordinatamente alle 15 combinazioni. Apporremo al segno Δ gli indici ik al piede, essendo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$,

indicando con essi la combinazione delle due figure π a cui appartiene il triangolo Δ , combinazione che è data dagli indici romani di esse; facendo p. es. $i = 1$ e $k = 2$ si ottiene il triangolo Δ_{12} , che appartiene alla combinazione della I e II figura π , s'intende bene che $\Delta_{21} = \Delta_{12}$ e che i e k devono esser sempre differenti fra di loro. Ora il triangolo Δ_{12} per la ragione esposta di sopra ha i suoi vertici situati nelle rette di Pascal che a tre a tre s'incontrano nei punti di Steiner, conjugati di quelli situati rispettivamente nelle rette p^{III}_{345} , p^{IV}_{123} , p^{V}_{123} , p^{VI}_{124} , ossia dei quattro punti G della retta g_{12} , comune alle due figure I e II. Questi punti di Steiner sono G_{456} , G_{356} , G_{346} , G_{345} le cui rette di congiunzione sono rette di Steiner-Plücker, cioè le rette g_{56} , g_{46} , g_{36} , g_{45} , g_{35} , g_{34} . Dalla tabella dei punti di Steiner osserviamo che le dodici rette di Pascal, che passano a quattro a quattro pei vertici 12.56, 12.34, 56.34 del triangolo Δ_{12} , cioè le rette p^{V}_{345} , p^{VI}_{135} , p^{III}_{125} , p^{IV}_{145} , p^{IV}_{345} , p^{III}_{123} , p^{VI}_{235} , p^{V}_{145} , p^{VI}_{345} , p^{V}_{245} , p^{IV}_{245} , p^{III}_{124} , appartengono tre a tre rispettivamente alle altre quattro figure III, IV, V, VI e s'incontrano tre a tre nei quattro punti di Kirkman corrispondenti alle quattro rette p^{III}_{345} , p^{IV}_{123} , p^{V}_{123} , p^{VI}_{124} , cioè nei punti K^{III}_{12} , K^{IV}_{45} , K^V_{45} , K^{VI}_{35} , che sono situati nelle rette di Cayley-Salmon comuni alle due figure I e II, cioè nelle rette c_{123} , c_{124} , c_{125} , c_{126} , le quali passano rispettivamente pei punti G_{456} , G_{356} , G_{346} , G_{345} , nei quali s'incontrano quelle stesse dodici rette tre a tre.

Da quanto si è detto si ricava che per nessun vertice del triangolo Δ_{12} passa una retta della I o una retta della II figura, onde i 30 punti P di una figura π (vedasi tabella delle sei figure π) sono dati dai vertici dei triangoli Δ , che appartengono a quelle combinazioni di due delle sei figure π , che non contengono la figura π data. Dunque:

Teorema XVII. I punti P del teorema VII formano 15 triangoli Δ_{ik} , che corrispondono rispettivamente alle 15 combinazioni delle 6 figure π I, II, III, IV, V, VI due a due, ove gli indici iek sono eguali agli indici romani delle due figure π della combinazione a cui corrisponde il triangolo Δ_{ik} . Pei vertici di un triangolo Δ_{ik} non passa alcuna retta di Pascal delle due figure π , a cui appartiene il triangolo Δ_{ik} ; i 30 punti P di una figura π sono dati dunque dai vertici dei triangoli Δ_{ik} di quelle combinazioni delle 6 figure due a due, nelle quali non c'entra la figura π data. Le dodici rette di Pascal che passano per i tre vertici di un triangolo Δ_{ik} s'incontrano tre a tre in quattro punti di Steiner e in quattro punti di Kirkman; questi ultimi corrispondono alle quattro rette di Pascal determinate dalle due figure, i cui indici romani sono rispettivamente indicati dagli indici iek del triangolo Δ_{ik} , secondo il teorema XIV e i quattro punti di Steiner sono situati nelle quattro rette di Cayley-Salmon delle stesse due figure iek .

Tabella dei triangoli Δ .

12.34.56 I II	14.25.36 II III	15.26.34 III V
16.23.54 I III	15.23.46 II IV	12.35.46 III VI
14.26.35 I IV	16.24.35 II V	12.36.45 IV V
13.25.46 I V	13.26.45 II VI	16.25.34 IV VI
15.24.36 I VI	13.24.56 III IV	14.23.56 V VI.

8. Se ora consideriamo il lato fondamentale 12, per i punti 12 passano i lati 13, 14; 26, 25; con essi si formano le seguenti rette di Pascal:

$$\left| \begin{array}{c} 13.26 \\ 14.25 \end{array} \right| = p'_{123} \quad \text{e} \quad \left| \begin{array}{c} 13.25 \\ 14.26 \end{array} \right| = p''_{243}$$

Queste due rette sono due diagonali del quadrilatero formato dai lati 13, 14, 26, 25, di cui la terza diagonale è il lato 12, onde le rette p'_{123} e p''_{243} tagliano il lato 12 in due punti $X_{23.1}$, $X'_{23.1}$ che sono conjugati armonici rispetto ai punti 12, ossia rispetto alla conica fondamentale. Le rette p'_{123} e p''_{243} passano rispettivamente per i punti G_{143} , G_{236} (vedasi tabella dei punti G). Il lato 12 che abbiamo considerato è uno dei nove lati comuni agli esagoni di questi due punti G ovvero è uno dei lati comuni ai triangoli Δ di essi. I tre triangoli Δ del punto G_{236} sono, come abbiamo visto al num. 7, quelli delle tre rette di Pascal del punto G_{143} ossia 12.45.36; 14.35.62; 25.46.13; questi triangoli sono due a due prospettivi, i due ultimi hanno per retta di prospettiva la retta $p'_{123} = 146253$, onde da ciò che precede si ha che il lato 12 del primo triangolo viene incontrato dalla retta di prospettiva degli altri due in un punto conjugato a quello ove il lato 12 incontra la retta di Pascal p''_{243} , che passa pel vertice opposto ad esso nel primo triangolo, cioè pel punto 45.36 e pel punto di Steiner G_{236} . Ciò vale per qualunque lato dei tre triangoli Δ di un punto G. Se noi consideriamo invece il punto G_{143} , i triangoli Δ di esso sono dati dai triangoli Δ delle rette di Pascal che s'incontrano nel punto G_{236} , ossia sono i triangoli 12, 46, 35; 45, 13, 62; 36, 52, 14, la retta di prospettiva del 2° e del 3° di questi triangoli è la retta $p''_{243} = 136254$, onde il lato 12 del primo triangolo viene incontrato da questa retta e dalla retta p'_{123} , che congiunge il vertice opposto ad esso cioè il punto 46.35 col punto G_{143} , in due punti conjugati; ora questi non sono altro che i punti considerati X_{23} , X'_{23} . Un lato fondamentale qualunque p. es. 12 si ripete in tre triangoli Δ , giacchè il numero dei triangoli Δ è eguale a quello dei lati fondamentali, e poichè un triangolo Δ appartiene secondo il teorema precedente a quattro punti di Steiner, parrebbe che in un lato 12 ci dovessero essere dodici coppie di punti conjugati, ma non sono che sei, perchè i dodici punti di Steiner, gli esagoni dei quali contengono il lato 12, cioè i punti G_{436} , G_{356} , G_{346} , G_{345} , G_{245} , G_{145} , G_{124} , G_{125} , G_{123} , G_{126} , G_{236} , G_{136} sono conjugati due a due, e per due punti conjugati G si ottiene nel lato 12 una sola coppia di punti conjugati comè già si è visto. Dunque:

Teorema XVIII. I quindici triangoli Δ_{ik} tre a tre hanno i loro vertici situati rispettivamente nelle terne di rette di Pascal che s'incontrano nei 20 punti di Steiner. I tre triangoli Δ_{ik} che hanno i loro vertici situati ordinatamente sulle tre rette p di un punto di Steiner siano chiamati triangoli Δ di esso. Il lato di un triangolo Δ di un punto di Steiner G è incontrato dalla retta di prospettiva dei suoi due altri triangoli Δ e dalla retta, che congiunge quel punto G col vertice opposto al lato nel primo triangolo, in due punti conjugati rispetto alla conica fondamentale. In ogni lato si ottengono sei coppie di tali punti conjugati.

I tre triangoli Δ del punto di Steiner G_{236} sono, come abbi-
am visto, i tre trian-
goli seguenti in linea orizzontale:

12.45.36

46.13.52

(*)

35.62.14

i triangoli delle tre linee verticali sono quelli del punto conjugato G_{145} . Le rette di Pascal di quest'ultimo punto sono le rette $p^{V_{131}} = 136452$, $p^{V_{133}} = 126354$, $p^{I_{123}} = 146253$, le quali sono rispettivamente le rette di prospettiva del primo col secondo, del primo col terzo e del terzo col primo dei tre triangoli in linea orizzontale. La retta di prospettiva $p^{V_{131}}$ del 1° e 2° triangolo per il teorema precedente incontra i lati del terzo in punti, che chiamo $X_{12.1}$, $X_{12.2}$, $X_{12.3}$ ai quali sono conjugati i punti d'incontro delle rette $p^{II_{215}}$, $p^{III_{135}}$, $p^{VI_{123}}$, concorrenti nel punto G_{236} , rispettivamente con gli stessi lati. Infatti queste tre rette passano per G_{236} e passano ordinatamente per i tre vertici del terzo triangolo opposti ai lati 35, 62, 14.

Questi tre punti conjugati rispettivamente ad $X_{12.1}$, $X_{12.2}$, $X_{12.3}$ li chiamo $X'_{12.1}$, $X'_{12.2}$, $X'_{12.3}$, in modo che $X_{12.1}$, $X'_{12.1}$ sono due punti conjugati nel lato 35. Analogamente la retta $p^{V_{133}}$ incontra i lati del secondo triangolo 46.13.52 nei punti $X_{13.1}$, $X_{13.2}$, $X_{13.3}$ che hanno per punti conjugati i punti d'incontro $X'_{13.1}$, $X'_{13.2}$, $X'_{13.3}$ delle rette $p^{II_{215}}$, $p^{III_{135}}$, $p^{VI_{123}}$ con gli stessi lati. Finalmente la retta $p^{I_{123}}$ interseca i lati del primo triangolo cioè 12.45.36 nei punti $X_{23.1}$, $X_{23.2}$, $X_{23.3}$ che hanno per punti conjugati i punti $X'_{23.1}$, $X'_{23.2}$, $X'_{23.3}$ dati rispettivamente dalle rette $p^{II_{215}}$, $p^{III_{135}}$, $p^{VI_{123}}$ cogli stessi lati. Abbiamo adunque i due gruppi seguenti di punti conjugati:

$X_{12.1}$	$X_{12.2}$	$X_{12.3}$	$X'_{12.1}$	$X'_{12.2}$	$X'_{12.3}$
$X_{13.1}$	$X_{13.2}$	$X_{13.3}$	$X'_{13.1}$	$X'_{13.2}$	$X'_{13.3}$
$X_{23.1}$	$X_{23.2}$	$X_{23.3}$	$X'_{23.1}$	$X'_{23.2}$	$X'_{23.3}$

I punti X e X' situati in linea orizzontale giacciono rispettivamente nei tre lati di uno dei tre triangoli orizzontali della tabella (*) precedente, mentre i punti X e X' in linea verticale sono collocati nei tre lati di un triangolo verticale della stessa tabella p. es. i punti $X_{12.1}$, $X_{12.2}$, $X_{12.3}$, $X'_{12.1}$, $X'_{12.2}$, $X'_{12.3}$ sono situati nei tre lati del triangolo 35.62.14 e i punti $X_{13.1}$, $X_{13.2}$, $X_{13.3}$, $X'_{13.1}$, $X'_{13.2}$, $X'_{13.3}$ sono situati rispettivamente nei tre lati del triangolo 35.46.12. I punti di una linea orizzontale del primo gruppo sono situati in una retta di Pascal, come anche i punti di una linea verticale del secondo p. es. $X_{12.1}$, $X_{12.2}$, $X_{12.3}$ sono posti nella retta $p^{V_{131}}$, i punti $X'_{12.1}$, $X'_{13.1}$, $X'_{23.1}$ sono posti nella retta $p^{II_{215}}$, onde a tre punti in linea retta del primo gruppo come p. es. $X_{12.1}$, $X_{12.2}$, $X_{12.3}$ sono conjugati i vertici di un triangolo del secondo cioè $X'_{12.1}$, $X'_{12.2}$, $X'_{12.3}$, che sono situati rispettivamente nelle tre rette di Pascal, che passano per il punto di Steiner conjugato a quello collocato nella retta $X_{12.1}$, $X_{12.2}$, $X_{12.3}$, che è la retta $p^{V_{131}}$.

Consideriamo ora i triangoli : 12.63, 3, 14.35 ; 12.45, 46.13, 4
i cui vertici sono situati nelle rette 12,13,14 la retta di prospettiva è data dai punti d'incontro dei lati corrispondenti, cioè

$$\begin{array}{ll} 12.63 - 3 & , 12.45 - 46.13 = p^{V_{123}} = X'_{23.3} \\ 12.63 - 14.35 = p^{I_{135}} & , 12.45 - 4 & = X'_{23.2} \\ 3 - 14.35 & , 46.13 - 4 & = 46.35 \end{array}$$

Dunque i diciotto lati dei sei triangoli passano rispettivamente ciascuno per uno dei punti P, vertici dei sei triangoli Δ della tabella precedente (*). Il lato $X'_{23.3} X'_{23.2}$ contiene il punto 46.35, questi punti X' sono posti nei lati 45 e 36 del primo triangolo della tabella (*), onde passa il lato $X'_{23.3} X'_{23.2}$ per il punto d'incontro dei due lati degli altri due triangoli della medesima, che giacciono nella linea verticale a cui non appartengono i lati 45 e 36, dunque, come si vede dalla tabella (*), per il punto 46.35.

Siano date le tre rette:

$X'_{23.1}$	$X'_{23.2}$	nella quale si trova il punto	14.52
$X'_{13.1}$	$X'_{13.2}$	»	14.36

$p^V_{134} =$	12.46
	13.45
	25.63

Consideriamo i due triangoli: $X'_{23,1}$ $X'_{13,1}$ 12.46; $X'_{23,2}$ $X'_{13,2}$ 13.45
i cui vertici si trovano rispettivamente in quelle tre rette. Essi sono prospettivi perchè
i punti d'incontro dei lati corrispondenti cioè

$$X'_{23.1}, X'_{13.1} = p^{II}_{245}; \quad X'_{23.2}, X'_{13.2} = p^{III}_{135}, = G_{236}$$

$$X'_{23,1}, 12.46 = 12 \quad ; \quad X'_{23,2}, 13.45 = 45, = 12.45$$

$$X'_{13.1}, 12.46 = 46 \quad ; \quad X'_{13.2}, 13.45 = 13, = 13.46$$

sono punti della retta $X'_{23.3} X'_{13.3} = p^V_{123}$, dunque le rette $X'_{13.1} X'_{13.2}$, $X'_{23.2} X'_{23.1}$ e p^V_{134} s'incontrano in un punto. Si dimostra analogamente che sulla retta p^V_{134} s'incontrano le rette delle coppie $X'_{13.1} X'_{13.3}$, $X'_{23.1} X'_{23.3}$ e $X'_{13.2} X'_{13.3}$, $X'_{23.2} X'_{23.3}$. Onde si conclude che i triangoli $X'_{13.1} X'_{13.2} X'_{13.3}$, $X'_{23.1} X'_{23.2} X'_{23.3}$ sono prospettivi per la retta p^V_{134} , che è retta di prospettiva del 1° e 2° triangolo della tabella (*) in linea orizzontale, la cui combinazione 1° e 2° risulta dagli indici comuni 12 dei tre punti $X'_{12.1}$, $X'_{12.2}$, $X'_{12.3}$ della prima linea orizzontale dei punti X' del secondo gruppo. Questa retta p^V_{134} passa pel punto G conjugato di quello posto nelle rette p in cui si trovano i vertici dei due triangoli X' , dei quali essa è retta di prospettiva. Ciò vale anche per i triangoli dei punti X in linea verticale del primo gruppo, dunque:

Teorema XIX. Sopra i nove lati di sei triangoli Δ di due punti di Steiner conjugati sono situati rispettivamente dieciotto punti, due a due conjugati rispetto alla conica fondamentale secondo il teorema XVIII; essi formano due gruppi di tre triangoli; i vertici di quelli di un gruppo sono collocati tre a tre nelle tre rette di Pascal che s'incontrano in uno dei punti di Steiner. Ai tre vertici di un triangolo del primo gruppo sono conjugati i tre punti situati in una retta di Pascal del secondo, nella quale cioè sono situati tre vertici dei tre triangoli del secondo gruppo, questa retta corrisponde in tal modo a quel triangolo. Ciascuno dei dieciotto lati dei sei triangoli dei due gruppi passa per uno dei dieciotto vertici dei sei triangoli Δ . Due triangoli qualunque di un gruppo sono prospettivi per la retta di Pascal del secondo, che corrisponde nel modo suddetto al terzo dei triangoli dello stesso gruppo.

9. Sia ora la retta

$$p^V_{345} = \begin{vmatrix} 12.45 \\ 23.56 \\ 34.61 \end{vmatrix}$$

e consideriamo le due prime linee orizzontali cioè $\begin{vmatrix} 12.45 \\ 23.56 \end{vmatrix}$, formiamo la retta 56.13—4 prendendo il lato 56 e tagliandolo con l'altro lato 13, formato dalle due cifre che non si ripetono nella prima linea verticale e congiungendo il punto d'incontro di 56 con 13 col punto 4 della seconda linea verticale, che non entra nella seconda linea orizzontale. Questa retta sia chiamata retta a della retta di Pascal p^I_{345} . Si vede facilmente che la retta di Pascal p^I_{345} possiede dodici di queste rette, perchè invece di prendere il lato 56 possiamo prendere i lati 23, 45 e 12; onde per le tre combinazioni delle tre linee orizzontali 12.45, 23.56, 34.61 della medesima due a due si ottengono dodici rette a . — Ora consideriamo le rette p^I_{345} , (56.13—4), (23.46—1), possiamo formare i seguenti triangoli 1,4,12.45; 23.46, 56.13, 23.56 che hanno i vertici rispettivamente su quelle tre rette, i punti d'incontro dei lati seguenti due a due

$$\begin{array}{ll} 14, 23.46 - 56.13 = 132564 = p^V_{234} & \text{cioè } 14.52 \\ 1 - 12.45, 23.46 - 23.56 & \gg 2 \\ 4 - 12.45, 56.13 - 23.56 & \gg 5 \end{array}$$

sono situati nel lato fondamentale 25, dunque i due triangoli sono prospettivi, onde la retta p^I_{345} e le sue due rette a , (56.13—4), (23.46—1) s'incontrano in un punto che chiamo O.

Teorema XX. Una retta di Pascal p. es. la retta $\begin{vmatrix} 12.45 \\ 23.56 \\ 34.61 \end{vmatrix}$ data dal-

l'esagono 123456 e le sue due rette a , (1—23.46), (4—56.13) s'incontrano in un punto O. In ogni retta di Pascal esistono sei di questi punti O. In tutto l'esagrammo essi sono 360.

Che relazioni hanno questi punti fra di loro?

Talvolta al disegnatore può servire uno di questi punti O per costruire la retta di Pascal quando son dati 5 punti di una conica p. es. 12346 ed è data la retta 56, ove si deve trovare il punto 5 da determinare, perchè allora essendo la retta di Pascal determinata da due punti P, può avvenir benissimo che uno di essi cada fuori del foglio del disegno.

$$\begin{array}{l} \text{Abbiamo inoltre le rette } 12.45 - 56.13 = p^{II}_{145} \\ 12.45 - 23.46 = p^{III}_{235} \\ 56.13 - 23.46 = p^V_{234} \end{array}$$

il lato 14 adunque viene intersecato dalle coppie di rette p^I_{345} , p^V_{234} ; p^{II}_{145} , (1—23.46); p^{III}_{235} , (4—56.13) in tre coppie di punti in involuzione. Osserviamo di più che il lato 14 è un lato del triangolo Δ della retta di Pascal p^I_{345} . Ora il lato 14 è uno dei tre lati del triangolo Δ delle dodici rette di Pascal, che contengono rispettivamente i dodici punti di Steiner, nei simboli dei quali, secondo il num. 3, non entrano i numeri 14 uniti. I punti 1 e 4 si ripetono però in due rette a di ognuna delle dodici rette di Pascal considerate, come è facile di scorgere dalla formazione delle rette a di una retta di Pascal, dunque:

Teorema XXI. Le sessanta rette di Pascal si lasciano aggruppare per un lato fondamentale in ventiquattro quadrilateri, i lati di ciascuno di essi incontrano il lato in quattro punti che con i due punti fondamentali di esso formano un'involuzione.

10. Ritorniamo ora alle figure π e studiamo meglio i rapporti che hanno fra di loro. Abbiamo visto che il triangolo Δ_{12} della combinazione di due figure π è dato dal triangolo Δ delle quattro rette di Pascal, che appartengono rispettivamente alle altre quattro figure, e che le due prime determinano. Prendiamo il triangolo Δ_{12} delle figure I e II cioè 12.34.56. I vertici di esso, come sappiamo, sono punti P che non appartengono nè alla prima nè alla seconda figura, come si è visto al num. 7. Pei punti P rimanenti del lato 12 cioè

12.36

12.46

passano le coppie di rette

$$p^I_{145} = 124365, p^{II}_{345} = 125634$$

$$p^I_{134} = 134652, p^{II}_{134} = 123465$$

12.35

12.45

passano le coppie di rette

$$p^I_{135} = 143562, p^{II}_{135} = 124356$$

$$p^I_{345} = 123456, p^{II}_{145} = 134562$$

pei punti P del lato 34 cioè

34.15 ; 36.52 ; 34.62 ; 34.61

passano le coppie di rette

$$p^I_{145} p^{II}_{134} ; p^I_{134} p^{II}_{345} ; p^I_{135} p^{II}_{145} ; p^I_{345} p^{II}_{135}$$

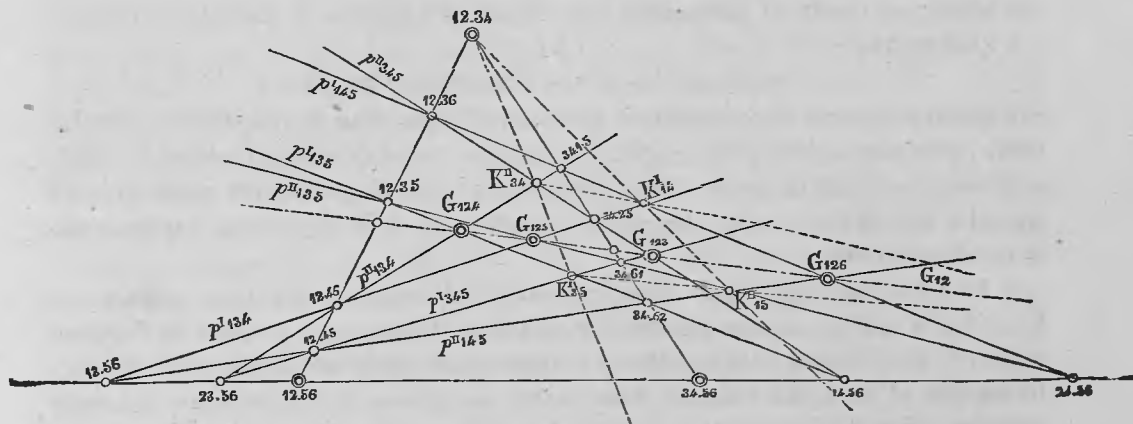
e finalmente pei punti P del lato 56 cioè

56.24 ; 56.13 ; 56.14 ; 56.23

passano le coppie di rette

$$p^I_{145} p^{II}_{135} ; p^I_{134} p^{II}_{145} ; p^I_{135} p^{II}_{345} ; p^I_{345} p^{II}_{134}$$

Fig. 3.



Da questo si vede che ci sono quattro rette di Pascal della figura I che incontrano rispettivamente quattro rette di Pascal della II nei dodici punti P, situati quattro a quattro nei lati del triangolo 12 (vedasi fig. 3). Le rette di Pascal:

$p^I_{145} p^I_{134} p^{II}_{345} p^{II}_{134}$ e $p^{II}_{135} p^{II}_{145} p^I_{135} p^I_{345}$ sono lati dei due seguenti quadrangoli:
12.36, 12.46, 34.15, 34.52 e 12.35, 12.45, 34.62, 34.61

Questi due quadrangoli hanno un punto diagonale comune cioè il punto 12.34 come è facile di vedere, perchè gli altri due lati dei due quadrangoli sono 12, 34; gli altri due punti diagonali del primo quadrangolo sono:

e quelli del secondo $p^{I_{145}} p^{I_{134}} = K^{I_{14}}$ e $p^{II_{345}} p^{II_{134}} = K^{II_{34}}$

$p^{I_{135}} p^{I_{345}} = K^{I_{35}}$ e $p^{I_{145}} p^{II_{135}} = K^{II_{15}}$

Questi due quadrangoli sono prospettivi come si vede, pel centro 12.34 e per la retta 56, perchè i lati corrispondenti di quei due quadrangoli cioè $p^{I_{145}} p^{II_{135}}$, $p^{I_{134}} p^{II_{145}}$ ecc. s'incontrano nei punti P del lato 56, e i vertici corrispondenti come 12.36 12.35, 12.46 12.45, etc. sono allineati col centro di prospettiva 12.34. Se sono prospettivi i due quadrangoli citati sono prospettivi anche i quadrangoli

$p^{I_{145}} p^{I_{134}} p^{II_{345}} p^{II_{134}}$, $p^{II_{145}} p^{II_{135}} p^{I_{345}} p^{I_{135}}$

come si può vedere anche dalla fig. 3, e perciò i punti d' incontro dei lati corrispondenti cioè

$p^{II_{134}} p^{I_{135}} = G_{124}$, $p^{I_{145}} p^{II_{145}} = G_{126}$, $p^{I_{134}} p^{II_{135}} = G_{125}$, $p^{I_{345}} p^{II_{345}} = G_{123}$

sono situati in una retta di Steiner-Plücker g_{12} , ciò che già noi sapevamo. Egli è pure evidente che gli altri quattro punti diagonali dei due primi quadrangoli sopra scritti, sono allineati due a due col centro di prospettiva 12.34, ossia le rette che congiungono i punti $K^{II_{34}} K^{I_{35}}$ e $K^{I_{14}} K^{II_{15}}$ passano pel punto 12.34, perchè le rette p. es. $p^{II_{345}} p^{II_{134}}$ del primo quadrangolo che s'incontrano nel punto $K^{II_{34}}$ corrispondono rispettivamente alle rette di Pascal $p^{I_{135}} p^{I_{345}}$ del secondo, che s'incontrano nel punto $K^{I_{35}}$. Le due rette $K^{II_{34}} K^{I_{35}}$, $K^{II_{15}} K^{I_{14}}$ formano un gruppo armonico colla coppia dei lati 12, 34 perchè le rette 12, 34 sono due lati opposti dei due quadrangoli suddetti. Per il punto 12.56 passano invece le rette che congiungono i punti $K^{I_{34}} K^{II_{35}}$, $K^{II_{14}} K^{I_{15}}$ e pel punto 34.56 le rette $K^{I_{13}} K^{II_{13}}$, $K^{I_{45}} K^{II_{45}}$; per dimostrar ciò basta considerar i quadrangoli

$p^{I_{134}} p^{I_{345}} p^{II_{134}} p^{II_{145}}$, $p^{II_{345}} p^{II_{135}} p^{I_{145}} p^{I_{135}}$

che hanno per centro di prospettiva il punto 12.56 e per retta di prospettiva il lato 34 e i quadrangoli

$p^{I_{134}} p^{I_{135}} p^{II_{145}} p^{II_{345}}$, $p^{II_{134}} p^{II_{135}} p^{I_{345}} p^{I_{145}}$

che hanno per centro di prospettiva il punto 34.56 e per retta di prospettiva il lato 12. Come i quadrangoli della prima coppia, che hanno per centro di prospettiva il punto 12.34, si possono ordinare in modo ch'essi abbiano per retta di prospettiva anche la retta g_{12} delle due figure I e II, così anche i quadrangoli delle due ultime coppie hanno la stessa proprietà.

Le rette che congiungono rispettivamente due punti di Kirkman come p. es. $K^{I_{14}} K^{II_{15}}$, $K^{I_{35}} K^{II_{34}}$ ecc. che passano per un punto P furono già scoperte da Kirkman stesso (*). Io le chiamo rette v_{12} . Presto vedremo quale significato abbiano gli indici $1, 2$. In seguito al num. 15 vedremo anche come si trovano queste rette in un modo semplice. Si vede che le rette v_{12} sono 6 per la combinazione di due figure, e che perciò sono 90 in tutto l'esagrammo, così si vede anche che per un punto di Kirkman passano tre di queste rette v_{12} . Per ciò che si è detto abbiamo:

Teorema XXII. Prese due figure π ci sono due quadrilateri di rette

(*) Cayley, Vol. 41 di Crelle pag. 66.

di Pascal i quali appartengono rispettivamente ad esse, i cui vertici sono punti di Kirkman e i cui lati s'incontrano due a due ordinatamente nei punti P di ciascun lato del triangolo Δ_{ik} delle due figure e nei punti G di Steiner della retta g_{ik} delle medesime. I dodici vertici di questi quadrilateri sono allineati due a due in sei rette v_{12} , che passano rispettivamente due a due per i vertici del triangolo Δ_{ik} . In tutto l'esagrammo sono queste rette novanta. Per un punto di Kirkman ne passano tre.

Teorema XXIII. Le due rette v_{12} che passano per il vertice di un triangolo Δ_{ik} formano con i due lati di esso un gruppo armonico.

Se consideriamo i due triangoli

$$p^{II}_{213} p^{II}_{234} p^{II}_{235} ; p^{I}_{213} p^{I}_{235} p^{I}_{234} \text{ ossia} \\ K^{II}_{21} K^{II}_{25} K^{II}_{23} ; K^{I}_{25} K^{I}_{21} K^{I}_{23}$$

vediamo ch'essi sono prospettivi pel centro S_{12} , perchè le rette che congiungono i punti $K^{II}_{21} K^{I}_{25}$, $K^{II}_{25} K^{I}_{21}$, $K^{II}_{23} K^{I}_{23}$ sono le tre rette di Cayley-Salmon c_{123} , c_{124} , c_{125} . (S'intende che bisogna assicurarsi di questo osservando la tabella dei punti di Steiner, perchè sappiamo che quando tre rette di Pascal s'incontrano in un punto G i tre punti di Kirkman corrispondenti sono situati nella retta di Cayley-Salmon corrispondente al punto G di Steiner e viceversa). I punti d'incontro adunque dei lati corrispondenti di quei due triangoli cioè

$$p^{II}_{213} = 136254, p^{I}_{213} = 154236, = 36.54, p^{II}_{234} = 152364, p^{I}_{233} = 145326, = 14.32 \\ p^{II}_{235} = 163524, p^{I}_{234} = 132546, = 16.25$$

sono situati in una retta, e questa retta non è altro che la retta p^{III}_{345} , che è una delle rette p determinate dalle due figure I e II. Ora consideriamo invece i due triangoli i cui vertici sono i punti di Kirkman corrispondenti alle rette di Pascal dei due triangoli testè considerate, essi sono

$$K^{II}_{13} K^{II}_{15} K^{II}_{14}, K^{I}_{13} K^{I}_{14} K^{I}_{15} \text{ ossia} \\ p^{II}_{133} p^{II}_{134} p^{II}_{143}, p^{I}_{134} p^{I}_{133} p^{I}_{143}$$

queste rette sono lati dei due quadrilateri di rette di Pascal delle due figure I e II, i cui lati due a due s'incontrano nei lati del loro triangolo Δ_{12} ovvero nella retta di Steiner-Plücker di esse, ossia nella retta g_{12} . I triangoli sono prospettivi, infatti i punti d'incontro dei lati delle tre coppie $p^{II}_{133} p^{I}_{134}$, $p^{II}_{134} p^{I}_{133}$, $p^{II}_{143} p^{I}_{143}$ sono i tre punti G_{123} , G_{124} , G_{126} ; come del resto era facile a prevedere dalla corrispondenza che passa tra i punti di Kirkman e le rette di Pascal. Dunque le rette che uniscono i vertici corrispondenti $K^{I}_{13} K^{II}_{13}$, $K^{II}_{15} K^{I}_{14}$, $K^{II}_{14} K^{I}_{15}$, che come abbiamo visto sono tre rette v_{12} che passano rispettivamente per i tre vertici del triangolo Δ_{12} , s'incontrano in un punto, che non è il punto K^{III}_{12} che corrisponde alla retta p^{III}_{345} , come dovrebbe essere se ci fosse una dualità completa fra i punti K e le rette p , ma bensì s'incontrano le tre rette v_{12} in un punto che chiamo $Z^{III}_{12,2}$ e che corrisponde in certa guisa alla retta p^{III}_{345} , che è retta di prospettiva dei due primi triangoli considerati. Se il punto $Z^{III}_{12,2}$ cadesse nel punto K^{III}_{12} allora la retta $v_{12} = K^{I}_{13}$, K^{II}_{13} , 34.56 dovrebbe cadere con la retta che unisce il punto K^{III}_{12} col punto 34.56 cioè con la retta p^{III}_{124} , ciò che è impossibile. Onde è dimostrato così che, non essendo completa la dualità fra i punti di Kirkman e le rette di Pascal, non esiste

nè la conica ideale di Hesse, rispetto alla quale i punti di Kirkman siano poli delle rette di Pascal, nè la correlazione di Schröter fra questi punti e queste rette (*). Con ciò è dimostrato pure che le sei figure π formano 6 sistemi polari differenti.

Abbiamo detto che i lati dei due triangoli $p^{II}_{135} p^{II}_{134} p^{II}_{145}$, $p^{I}_{134} p^{I}_{135} p^{I}_{145}$ appartengono ai lati dei due quadrilateri delle due figure π del teorema XXII ossia

$$p^{I}_{134} p^{I}_{135} p^{I}_{145} p^{I}_{345}, p^{II}_{135} p^{II}_{134} p^{II}_{145} p^{II}_{345}$$

i cui lati passano due a due per i quattro punti G della retta g_{12} ; con questi quadrilateri adunque possiamo formare quattro coppie di triangoli, una delle quali è p. es. la coppia di triangoli sopra considerata cioè

$$p^{I}_{134} p^{I}_{135} p^{I}_{145}, p^{II}_{135} p^{II}_{134} p^{II}_{145}$$

e siccome abbiamo osservato che il centro di prospettiva di questi triangoli è il punto $Z^{III}_{12,2}$ corrispondente alla retta p^{III}_{345} che è una delle quattro rette determinate dalla I e II figura, così vuol dire che i quattro centri di prospettiva delle quattro coppie corrispondono alle rette p^{III}_{345} , p^{IV}_{123} , p^{V}_{123} , p^{VI}_{124} ; ossia sono i punti $Z^{III}_{12,2}$, $Z^{IV}_{13,2}$, $Z^{V}_{13,2}$, $Z^{VI}_{35,2}$. Al punto Z_2 e K che corrispondono nel modo indicato alla stessa retta di Pascal diamo gli stessi indici. Il $_2$ che è la terza cifra dell'indice di ogni punto Z indica che i punti Z appartengono ad un secondo sistema di cui ora studieremo le proprietà. Di più abbiamo sopra osservato che le rette che congiungono i vertici corrispondenti dei due triangoli $p^{I}_{134} p^{I}_{135} p^{I}_{145}$, $p^{II}_{135} p^{II}_{134} p^{II}_{145}$ sono tre delle sei rette v_{12} delle due figure I e II, dunque vuol dire che ciò varrà anche per le altre tre coppie di triangoli. Se per la combinazione delle due figure I e II si hanno quattro punti Z_2 , in tutto l'esagrammo saranno questi punti 60 e saranno situati due a due nelle rette v_{12} . Dunque:

Teorema XXIV. Le sei rette v_{12} che passano per i vertici del triangolo Δ_{ik} di due figure π s'incontrano tre a tre in quattro punti " Z_2 " di un quadrangolo. I punti " Z_2 " sono sessanta in tutto l'esagrammo. Due a due sono situati nelle rette v_{12} .

Osserviamo che i quattro punti P d'incontro di un lato p. es. 12 del triangolo Δ_{12} con le quattro rette del quadrilatero $p^{I}_{134} p^{I}_{135} p^{II}_{145} p^{II}_{345}$ ovvero del quadrilatero $p^{II}_{134} p^{II}_{135} p^{I}_{345} p^{I}_{145}$ e i due vertici P del triangolo Δ_{12} formano un'involuzione ove al punto 12.34 corrisponde il punto 12.56, al punto 12.36 il punto 12.45 ecc. (vedi fig. 3) onde i quattro punti P situati in un lato del triangolo Δ_{ik} di due figure, esclusi però da questi i vertici di esso, e i due punti d'incontro con gli altri due lati o con uno dei due lati e con la retta di Steiner-Plücker g_{ik} formano tre coppie di punti in involuzione. Così pure i quattro punti di Steiner della retta g_{ik} con i tre punti d'incontro di essa con i tre lati del triangolo Δ_{ik} presi due a due, formano un'involuzione; per dimostrar questo basta considerare p. es. il quadrangolo 12.36, 12.46, 34.15, 34.25 le cui coppie di lati opposti sono 12, 34; $p^{II}_{345} p^{II}_{134}$, $p^{I}_{145} p^{I}_{134}$, la prima coppia ci dà sulla retta g_{12} i punti d'incontro dei lati 12 e 34 del triangolo Δ_{12} e le altre due coppie ci danno i punti G_{126} G_{125} , G_{124} G_{123} . Analogamente si dimostra che i punti G della retta g_{12} accoppiati negli altri due modi possibili ci danno altre due involuzioni a cui appartengono

(*) Hesse, Vol. 68 di Crelle pag. 193 e Schröter, *Steiner'sche Vorlesungen*, Neue Aufl. pag. 217-218.

rispettivamente le coppie dei punti d'incontro della g_{12} con i lati 12,56 e 34,56, dunque:

Teorema XXV. I quattro punti di Steiner di una retta di Steiner Plücker e i punti d'incontro Y di essa con due dei lati del triangolo Δ_{ik} della combinazione di quelle due figure a cui appartiene quella retta g , formano tre coppie di punti di un'involuzione.

11. Noi abbiamo i triangoli:

$$K^I_{25} K^I_{23} K^I_{24}, K^{II}_{24} K^{II}_{23} K^{II}_{25}, K^{II}_{14} K^{II}_{13} K^{II}_{15}, K^I_{15} K^I_{13} K^I_{14}$$

il primo è prospettivo col secondo pel centro S_{12} , infatti le rette che ne congiungono i vertici a due a due sono le tre rette c_{125} , c_{126} , c_{124} , come l'abbiam visto al num. 10, e per la retta p^{III}_{345} ; il secondo è prospettivo col terzo pel centro K^{II}_{12} e la retta p^{II}_{345} , il terzo col quarto pel centro $Z^{III}_{12,2}$ e per la retta g_{12} (anche questo l'abbiam visto al num. 10) e finalmente il quarto col primo pel centro K^I_{12} e per la retta p^I_{345} e come le quattro rette di prospettiva s'incontrano in un punto, cioè nel punto G_{123} ; così i quattro centri di prospettiva sono situati pel teorema II in una retta, e siccome la retta $S_{12} K^I_{12} K^{II}_{12}$ è la retta c_{123} così vuol dire che il punto $Z^{III}_{12,2}$ è situato nella retta di Cayley-Salmon c_{123} . Epperchè anche i punti $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^V_{45,2}$, $Z^{VI}_{35,2}$, che come abbiám visto corrispondono alle rette p^{IV}_{123} , p^V_{123} , p^{IV}_{124} determinate dalle due prime figure I e II, sono situati nelle rette di Cayley-Salmon comuni ad esse. Dunque si conclude:

Teorema XXVI. I tre punti Z_2 che corrispondono alle tre rette di Pascal che s'incontrano in un punto di Steiner, nel modo indicato dal teorema XXVIII, sono situati in una retta di Cayley-Salmon.

Osserviamo che i quattro punti $Z^{III}_{12,2}$, $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^V_{45,2}$, $Z^{VI}_{35,2}$ formano un quadrangolo i cui sei lati sono precisamente le 6 rette $v_{1,2}$, che sono determinate dalla I e II figura (vedi num. 10), dunque il triangolo diagonale è il triangolo Δ_{12} delle due figure I e II, poichè sappiamo che queste sei rette $v_{1,2}$ passano due a due per i vertici di esso. Ora se si congiunge il punto di Salmon S_{12} con i quattro punti Z_2 suddetti si ottengono le quattro rette di Cayley c_{123} , c_{124} , c_{125} , c_{126} e queste accoppiate nei tre modi diversi mi danno tre involuzioni rispetto alle quali sono ordinatamente coppie di raggi corrispondenti le coppie di rette che uniscono il punto S_{12} con i vertici del triangolo diagonale Δ_{12} , dunque:

Teorema XXVII. Le quattro rette di Cayley-Salmon di due figure π e due delle rette che congiungono il punto di Salmon di esse con i tre vertici del loro triangolo Δ_{ik} formano tre coppie di raggi in involuzione.

Come ben si vede questo teorema è analogo al teorema XXV. Riepilogando quel che si è detto ai num.ⁱ 6 e 10 abbiamo:

Teorema XXVIII. Due figure π qualunque hanno i vertici di due quadrangoli di punti K , che rispettivamente appartengono ad esse, allineati due a due per mezzo di quattro rette di Cayley-Salmon col punto di Salmon delle due figure, e i triangoli da essi formati sono prospettivi per le quattro rette di Pascal che appartengono ordinatamente alle altre quattro figure π , determinate dalle

di dueime. I lati dei quadrilateri polari dei due quadrangoli, rispettivamente nelle due figure π , s'incontrano due a due nei punti di Steiner della retta di Steiner-Plücker di esse e i quattro centri Z_2 di prospettiva sono situati nelle rette di Cayley-Salmon di esse.

I punti Z_2 corrispondono così alle rette di Pascal. Il punto K e il punto Z_2 che corrispondono alla stessa retta di Pascal siano chiamati punti degli stessi indici.

Ora siccome due figure π prese insieme determinano una retta di Pascal di ciascuna delle rimanenti, così date 5 figure π esse determinano combinate due a due le 10 rette di Pascal della VI; è facile di vedere che quattro figure non determinano alcuna delle altre due, onde:

Teorema XXIX. Cinque figure π determinano la sesta.

12. Considerando la fig. 3 vediamo che la retta che unisce i due punti diagonali K'_{14} , K''_{34} del quadrangolo 12.36, 34.15, 12.46, 34.52 e la retta che unisce i due punti diagonali K''_{15} , K'_{35} del secondo quadrangolo 12.35, 12.45, 34.61, 34.62, prospettivo col primo pel centro 12.34 e per la retta 56, come anche per la retta g_{12} (vedi num. 10) passano pel punto d'incontro delle due rette g_{12} e 56. Si ottengono per le due figure I e II sei di queste rette, che chiamo m . La retta m che unisce i due punti diagonali K'_{14} , K''_{34} del quadrangolo 12.36, 34.15, 12.46, 34.52 che ha per terzo punto diagonale il punto 12.34 e la retta m che unisce i punti diagonali K''_{35} , K'_{15} del quadrangolo 12.35, 12.36, 14.56, 24.56 che ha per terzo punto diagonale il punto 12.56, incontrano la retta $v_{12} = K''_{13} K'_{13}$ che passa pel terzo vertice 34.56 del triangolo Δ_{12} in un punto T (¹).

Se si considerano invece le due rette m degli altri due quadrangoli prospettivi ordinatamente con i due primi per i centri 12.34 e 12.56 cioè le due rette K''_{13} , K'_{35} , K'_{34} , K''_{14} (vedi fig. 3) si vede che esse s'incontrano in un altro punto T della retta $v_{12} = K''_{13} K'_{13}$. Onde si ottengono in ogni retta v_{12} due punti T e perciò in tutto l'esagrammo si hanno 90 rette m e 180 punti T , dunque:

Teorema XXX. I dodici vertici dei due quadrilateri di rette di Pascal di due figure π secondo il teorema XXII, che sono punti di Kirkman, sono situati due a due in sei rette m che s'incontrano due a due in 12 punti T , situati due a due nelle sei rette v_{12} delle due figure. In tutto l'esagrammo ci sono 90 rette m e 180 punti T . Te sei rette m passano due a due per i punti d'incontro della retta g_{ik} delle due figure π con i lati del loro triangolo Δ_{ik} .

Le tre coppie di rette $p^{IV}_{135} = 126354$, $p^{VI}_{145} = 142365$; $p^{IV}_{235} = 143526$, $p^{V}_{234} = 132564$; $p^{V}_{134} = 125463$, $p^{VI}_{345} = 152436$ passano rispettivamente per i tre vertici P del triangolo Δ_{23} cioè 36.14, 14.25, 25.36, le sei rette p di queste tre coppie s'incontrano nei punti K^{IV}_{35} , K^{V}_{34} , K^{VI}_{45} , ora le tre rette che congiungono le coppie di punti 36.14 K^{V}_{34} ; 14.25 K^{VI}_{45} ; 52.63 K^{IV}_{35} sono le rette p^{IV}_{345} , p^{V}_{345} , p^{VI}_{345} , che passano pel punto G_{436} , onde le sei rette p suddette sono tangenti ad una conica. Queste coniche sono 60 in tutto l'esagrammo.

(¹) Basta considerare per la dimostrazione i due triangoli prospettivi K'_{13} , K'_{14} , K'_{45} , K''_{13} , K''_{34} , K''_{35} che hanno i loro vertici situati due a due nelle due rette m e nella retta v_{12} considerate,

13. Le tre rette v_{12} che passano per un punto Z_2 si possono trovare col metodo dato al num. 10, cioè se noi vogliamo avere le tre rette v_{12} che a mo' d'esempio contengono il punto $Z^{III}_{12,2}$, noi consideriamo la retta p^{III}_{345} a questo corrispondente, e dagli indici romani delle altre due rette di Pascal che passano con essa per lo stesso punto di Steiner G_{123} , vediamo da quale combinazione delle 6 figure π venga la retta p^{III}_{345} determinata, e siccome gli indici romani di queste due altre rette di Pascal sono I e II così cerchiamo nelle figure I e II le tre coppie di rette $p^{II}_{245} = 136254$, $p^{I}_{245} = 154236$; $p^{II}_{234} = 152364$, $p^{I}_{235} = 145326$; $p^{II}_{235} = 163524$, $p^{I}_{234} = 132546$, ove le rette di una coppia s'incontrano in uno dei punti P della retta $p^{III}_{345} = 163254$, allora si ha che le coppie di punti K corrispondenti a queste rette sono situati nelle tre rette v_{12} che passano pel punto $Z^{III}_{12,2}$. Alle rette di Pascal p. es. p^{IV}_{123} , p^{IV}_{124} , p^{IV}_{125} che s'incontrano nel punto K^{IV}_{12} , corrispondono i punti $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{IV}_{35,2}$, $Z^{IV}_{34,2}$, per questi punti passano rispettivamente le rette v_{12} seguenti

$$\begin{array}{lll} K^{II}_{45} K^{II}_{43}, K^{I}_{34} K^{II}_{35} & \text{per} & Z^{IV}_{45,2} \\ K^{II}_{45} K^{III}_{35}, K^{II}_{35} K^{III}_{34} & \ll & Z^{IV}_{35,2} \\ K^{III}_{35} K^{I}_{45}, K^{III}_{34} K^{I}_{34} & \ll & Z^{IV}_{34,2} \end{array}$$

Queste rette trovansi col modo indicato di sopra e al num. 14 c'è una tabella per la formazione di queste rette v_{12} dove presa p. es. la retta p^{III}_{345} data mediante i suoi punti P 16.25, 63.54, 32.41, accanto di questi stanno le tre coppie di rette di Pascal $p^{I}_{234} p^{II}_{235}$, $p^{I}_{245} p^{II}_{243}$, $p^{I}_{235} p^{II}_{234}$, le coppie di punti di Kirkman corrispondenti sono situati nelle rette v_{12} che s'incontrano nel punto $Z^{III}_{12,2}$ corrispondente alla retta p^{III}_{345} . Ora i due triangoli $K^{I}_{45} K^{II}_{45} K^{III}_{35}$ e $K^{I}_{34} K^{II}_{35} K^{III}_{34}$ i cui vertici sono ordinatamente situati sulle sei rette v_{12} suddette sono prospettivi per il centro G_{123} perchè le tre rette $K^{I}_{45} K^{I}_{34} = p^{I}_{345}$, $K^{II}_{45} K^{II}_{35} = p^{II}_{345}$, $K^{III}_{35} K^{III}_{34} = p^{III}_{345}$ s'incontrano precisamente nel punto G_{123} onde:

Teorema XXXI. I tre punti Z_2 che corrispondono alle tre rette di Pascal che s'incontrano in un punto di Kirkman sono situati in una retta z_2 , che corrisponde al punto di Kirkman.

Le rette z_2 sono 60 in tutto l'esagrammo e per ogni punto Z_2 ne passano tre. La retta z_2 e la retta p che corrispondono allo stesso punto di Kirkman siano chiamate rette degli stessi indici.

La legge con cui si trovano le rette v_{12} che s'incontrano in un punto Z_2 è identica a quella con cui si trovano anche le rette v_{12} che s'incontrano in un punto K. Infatti, se noi prendiamo la retta p^{III}_{345} allora si ottengono le tre rette v_{12} che s'incontrano nel punto $Z^{III}_{12,2}$, date dai punti $K^{I}_{13} K^{II}_{14}$, $K^{I}_{13} K^{II}_{15}$, $K^{I}_{14} K^{II}_{15}$, che corrispondono alle coppie di rette $p^{I}_{234} p^{II}_{235}$, $p^{I}_{245} p^{II}_{243}$, $p^{I}_{235} p^{II}_{234}$; ma se noi vogliamo trovare le tre rette v_{12} che s'incontrano p. es. nel punto $Z^{I}_{15,2}$ che corrisponde alla retta p^{I}_{234} , dobbiamo vedere nella tabella al num. 14 quali sono le coppie di rette di Pascal che s'incontrano nei punti P della retta p^{I}_{234} , e troviamo che la retta p^{III}_{345} entra in una di queste coppie, cioè nella coppia $p^{III}_{345} p^{V}_{123}$, naturalmente, onde in una delle tre rette v_{12} che passano pel punto $Z^{I}_{15,2}$ si trovano i punti K^{III}_{12} , K^{V}_{45} . Dunque mentre in una retta v_{12} passante per il punto $Z^{III}_{12,2}$ si trova il punto K^{I}_{13} , in una retta v_{12} che passa invece pel punto K^{III}_{12} si trova il punto $Z^{I}_{15,2}$; analogamente si dimostrerebbe che nella stessa retta c'è anche il punto $Z^{II}_{14,2}$. Dunque per

trovare le tre rette v_{12} che s'incontrano in un punto di Kirkman p. es. K^{III}_{12} , si adopera lo stesso metodo che abbiamo usato pel punto $Z^{III}_{12,2}$ degli stessi indici, cioè si prende la retta corrispondente di Pascal p^{III}_{345} e i punti Z_2 che corrispondono alle coppie di rette di Pascal che s'incontrano nei punti P della retta p^{III}_{345} e che sono scritte nella tabella num. 14 sono i punti situati due a due nelle tre rette v_{12} che s'incontrano nel punto K^{III}_{12} .

Consideriamo ora i triangoli $Z^{VI}_{33,2}$, $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{V}_{45,2}$; $Z^{VI}_{34,2}$, $Z^{IV}_{34,2}$, $Z^{V}_{35,2}$ che corrispondono ai triangoli p^{VI}_{124} , p^{IV}_{123} , p^{V}_{123} ; p^{VI}_{125} , p^{IV}_{125} , p^{V}_{124} i cui lati sono determinati rispettivamente dalla I e II, dalla II e III figura π , essi sono prospettivi per la retta p^{I}_{345} ; infatti le rette v_{12} , $Z^{VI}_{33,2}$, $Z^{IV}_{45,2}$ e $Z^{VI}_{34,2}$, $Z^{IV}_{34,2}$ s'incontrano nel punto K^{I}_{34} , così i lati delle altre due coppie $Z^{VI}_{35,2}$, $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{VI}_{34,2}$, $Z^{IV}_{35,2}$ e $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{V}_{45,2}$, $Z^{IV}_{34,2}$, $Z^{V}_{35,2}$ s'incontrano negli altri due punti K della stessa retta p^{I}_{345} (vedasi tabella n. 14). Ora i triangoli diagonali dei due quadrangoli $Z^{III}_{12,2}$, $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{V}_{45,2}$, $Z^{VI}_{33,2}$; $Z^{II}_{12,2}$, $Z^{IV}_{34,2}$, $Z^{V}_{35,2}$, $Z^{VI}_{34,2}$ sono ordinatamente i triangoli 12.34.56; 45.16.23, poichè abbiamo visto che il quadrangolo di punti Z_2 determinato dalla combinazione di due figure ha per triangolo diagonale il loro triangolo Δ_{12} . Ora questi due triangoli Δ_{12} , Δ_{13} sono pure prospettivi per la retta $p^{I}_{345} = 123456$ e per il centro G_{456} , vuol dire adunque che i due quadrangoli suddetti sono prospettivi e che perciò le rette che congiungono le tre coppie di vertici corrispondenti $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{IV}_{34,2}$, $Z^{V}_{45,2}$, $Z^{V}_{35,2}$, $Z^{VI}_{33,2}$, $Z^{VI}_{34,2}$, ossia le tre rette $z^{IV}_{345,2}$, $z^{V}_{345,2}$, $z^{VI}_{345,2}$ s'incontrano nel punto di Steiner G_{456} , dunque si ha:

Teorema XXXVII. Le sessanta rette z_2 s'incontrano tre a tre nei venti punti di Steiner.

Ora siccome quei due quadrangoli sono prospettivi così le rette v_{12} seguenti $Z^{III}_{12,2}$, $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{II}_{12,2}$, $Z^{IV}_{34,2}$; $Z^{III}_{12,2}$, $Z^{V}_{45,2}$, $Z^{II}_{12,2}$, $Z^{V}_{35,2}$; $Z^{III}_{12,2}$, $Z^{VI}_{33,2}$, $Z^{II}_{12,2}$, $Z^{VI}_{34,2}$ s'incontrano in tre punti E della retta di Pascal p^{I}_{345} . Essi sono in tutto l'esagrammo 180, ora questi tre punti E e i tre punti K sopra la retta p^{I}_{345} formano tre coppie di punti in involuzione, essendo essi l'intersezione dei 6 lati di uno dei quadrangoli considerati dunque:

Teorema XXXVIII. Le novanta rette v_{12} s'incontrano due a due in 180 punti E posti tre a tre nelle 60 rette di Pascal. I tre punti E e i tre punti K di una retta di Pascal formano tre coppie di punti in involuzione.

Per ciò che si è detto per la formazione delle rette v_{12} che s'incontrano in un punto K od in un punto Z_2 si vede che mentre tre punti di Kirkman sono situati in una retta di Pascal, i punti Z_2 degli stessi indici sono situati in una retta z_2 , mentre tre punti K giacciono in una retta di Cayley, i punti Z_2 degli stessi indici sono collocati nella stessa retta di Cayley, mentre tre rette di Pascal s'incontrano in un punto K, le tre rette z_2 degli stessi indici s'incontrano in un punto Z_2 , e finalmente quando tre rette di Pascal s'incontrano in un punto di Steiner, le rette z_2 degli stessi indici s'incontrano nel medesimo punto, dunque:

Teorema XXXIV. I sessanta punti Z_2 e le sessanta rette z_2 formano a guisa dei punti K e rette p sei figure π' di dieci punti Z_2 posti tre a tre sopra le dieci rette z_2 corrispondenti. Ciascuna di esse dà luogo ad una conica rispetto alla quale i dieci punti Z_2 sono poli delle dieci rette z_2 .

I punti di Steiner e di Salmon, le rette di Cayley-Salmon, di Steiner-Plücker e v_{12} sono comuni ai due sistemi $[Kp]$, $[Zz]_2$. Gli indici $_{12}$ delle rette v_{12} indicano che esse appartengono al 1° e 2° sistema $[Kp]$, $[Zz]_2$.

Per i tre punti $Z^I_{12,2}$, $Z^{II}_{12,2}$, $Z^{III}_{12,2}$ che giacciono nella retta di Cayley-Salmon c_{123} , passano rispettivamente le tre rette v_{12} $Z^I_{12,2}$ $Z^{IV}_{34,2}$, $Z^{II}_{12,2}$ $Z^{V}_{35,2}$, $Z^{III}_{12,2}$ $Z^{VI}_{45,2}$, esse formano un triangolo i cui vertici sono tre punti E situati ordinatamente nelle tre rette $p^{III}_{34,2}$, p^{II}_{345} , p^I_{345} . Infatti sopra abbiamo visto che le rette $Z^{II}_{12,2}$, $Z^{V}_{35,2}$ e $Z^{III}_{12,2}$ $Z^{VI}_{45,2}$ s'incontrano in un punto E della retta p^I_{345} , considerando i due quadrangoli di punti Z_2 determinati dalla combinazione delle due figure I II e I III; dunque considerando invece quelli determinati dalla combinazione delle figure I II, II III, ovvero I III, II III si dimostra che le tre rette v_{12} suddette formano un triangolo i cui vertici sono punti E, che appartengono rispettivamente alle tre rette p^{III}_{345} , p^{II}_{345} , p^I_{345} che s'incontrano nel punto G_{123} . Onde queste tre rette formano con le tre rette v_{12} un quadrangolo, ove al lato p^I_{345} corrisponde come lato opposto la retta v_{12} che passa pel punto $Z^I_{12,2}$ della retta c_{456} , dunque:

Teorema XXXV. Le tre rette di Pascal, che s'incontrano in un punto di Steiner incontrano la retta di Cayley-Salmon a questo corrispondente, in tre punti che con i tre punti Z_2 di essa e che corrispondono a quelle tre rette, formano tre coppie di punti in involuzione.

Se consideriamo il quadrangolo $Z^{III}_{12,2}$ $Z^{IV}_{45,2}$ $Z^{V}_{45,2}$ $Z^{VI}_{35,2}$ determinato dalle due figure I e II, che ha per triangolo diagonale il triangolo Δ_{12} di esse ossia 12.34, 12.56, 34.56, e noi congiungiamo un punto di Steiner conjugato ad uno di quelli comuni alle due figure I e II p.es. G_{456} con le coppie di vertici $Z^{IV}_{45,2}$, $Z^{III}_{12,2}$, $Z^{VI}_{35,2}$, $Z^{V}_{45,2}$ e con due punti diagonali p. es. con i punti 34.12 e 34.56 si ottengono tre coppie di rette in involuzione, queste tre coppie di rette sono p^{IV}_{345} p^{VI}_{345} , $z^{IV}_{345,2}$ $z^{VI}_{345,2}$, c_{123} z^{V}_{345} , dunque:

Teorema XXXVI. Le due rette di Pascal e le due rette z_2 degli stessi indici, l'altra retta z_2 e la retta di Cayley-Salmon che s'incontrano in un punto di Steiner formano tre coppie di raggi in involuzione.

14. Tabella per la formazione delle rette v e dei punti V (')

Figure π					
I	II	III	IV	V	VI
p_{345}^{I} 12.45 $p_{145}^{II} p_{235}^{III}$ 23.56 $p_{134} p_{245}$ 34.61 $p_{135} p_{234}$	p_{345}^{II} 12.36 $p_{145}^{I} p_{135}^{III}$ 43.52 $p_{134} p_{131}$ 56.14 $p_{135} p_{145}$	p_{345}^{III} 16.25 $p_{234}^{I} p_{235}^{II}$ 63.54 $p_{245} p_{243}$ 32.41 $p_{235} p_{234}$	p_{345}^{IV} 12.43 $p_{145}^{V} p_{235}^{VI}$ 25.36 $p_{134} p_{245}$ 54.61 $p_{135} p_{234}$	p_{345}^{V} 14.63 $p_{135}^{IV} p_{145}^{VI}$ 45.32 $p_{134} p_{124}$ 56.21 $p_{145} p_{133}$	p_{345}^{VI} 16.23 p_{235}^{V} 65.34 p_{245} 52.41 p_{234}
p_{245}^{I} 16.24 $p_{245}^{III} p_{245}^{VI}$ 63.45 $p_{345} p_{124}$ 32.51 $p_{234} p_{145}$	p_{245}^{II} 13.25 $p_{145}^{III} p_{234}^{VI}$ 36.54 $p_{345} p_{124}$ 62.41 $p_{134} p_{134}$	p_{245}^{III} 16.42 $p_{245}^{IV} p_{245}^{VI}$ 65.23 $p_{345} p_{124}^{IV}$ 54.31 $p_{234} p_{145}$	p_{245}^{IV} 13.25 $p_{145}^{III} p_{234}^{VI}$ 34.56 $p_{124} p_{345}$ 42.61 $p_{245} p_{245}$	p_{245}^{V} 15.23 $p_{145}^{III} p_{234}^{VI}$ 56.34 $p_{124} p_{345}$ 62.41 $p_{134} p_{134}$	p_{245}^{VI} 16.42 p_{245}^{V} 63.25 p_{124} 34.51 p_{145}
p_{235}^{I} 14.32 $p_{345}^{III} p_{123}^{IV}$ 45.26 $p_{234} p_{135}$ 53.61 $p_{235} p_{235}$	p_{235}^{II} 14.53 $p_{135}^{III} p_{235}^{V}$ 42.36 $p_{145} p_{135}$ 25.61 $p_{345} p_{123}$	p_{235}^{III} 12.54 $p_{134}^{I} p_{123}^{VI}$ 23.46 $p_{234} p_{135}$ 35.61 $p_{235} p_{235}$	p_{235}^{IV} 14.52 $p_{123}^{I} p_{345}^{VI}$ 43.26 $p_{135} p_{234}$ 35.61 $p_{235} p_{235}$	p_{235}^{V} 14.35 $p_{135}^{II} p_{135}^{VI}$ 42.56 $p_{135} p_{145}$ 23.61 $p_{123} p_{345}$	p_{235}^{VI} 16.35 $p_{135}^{III} p_{235}^{V}$ 64.52 p_{135} 43.12 p_{123}
p_{234}^{I} 13.54 $p_{145}^{III} p_{134}^{V}$ 32.46 $p_{235} p_{234}$ 25.61 $p_{345} p_{123}$	p_{234}^{II} 14.32 $p_{345}^{III} p_{123}^{IV}$ 46.25 $p_{135} p_{234}$ 63.51 $p_{134} p_{134}$	p_{234}^{III} 16.34 $p_{134}^{I} p_{125}^{V}$ 62.45 $p_{235} p_{145}$ 23.51 $p_{245} p_{245}$	p_{234}^{IV} 16.32 $p_{123}^{II} p_{345}^{VI}$ 64.25 $p_{234} p_{234}$ 43.51 $p_{134} p_{245}$	p_{234}^{V} 13.56 $p_{134}^{I} p_{134}^{VI}$ 23.64 $p_{234} p_{135}$ 25.41 $p_{123} p_{345}$	p_{234}^{VI} 13.52 $p_{123}^{II} p_{234}^{V}$ 34.62 p_{145} 45.61 p_{125}
p_{145}^{I} 12.36 $p_{145}^{II} p_{145}^{VI}$ 24.65 $p_{135} p_{145}$ 43.51 $p_{134} p_{245}$	p_{145}^{II} 13.56 $p_{134}^{I} p_{134}^{VI}$ 34.62 $p_{135} p_{234}$ 45.21 $p_{345} p_{123}$	p_{145}^{III} 13.52 $p_{145}^{II} p_{145}^{VI}$ 36.24 $p_{235} p_{145}$ 65.41 $p_{345} p_{125}$	p_{145}^{IV} 13.54 $p_{145}^{III} p_{134}^{V}$ 36.42 $p_{145} p_{135}$ 65.21 $p_{125} p_{345}$	p_{145}^{V} 12.34 $p_{145}^{III} p_{145}^{VI}$ 26.45 $p_{234} p_{135}$ 63.51 $p_{134} p_{134}$	p_{145}^{VI} 14.36 $p_{145}^{I} p_{145}^{V}$ 42.65 p_{145} 23.51 p_{245}
p_{135}^{I} 14.56 $p_{145}^{II} p_{125}^{IV}$ 43.62 $p_{145} p_{235}$ 35.21 $p_{135} p_{135}$	p_{135}^{II} 12.35 $p_{135}^{I} p_{135}^{V}$ 24.56 $p_{145} p_{235}$ 43.61 $p_{345} p_{125}$	p_{135}^{III} 14.53 $p_{125}^{II} p_{135}^{VI}$ 46.52 $p_{234} p_{235}$ 63.21 $p_{345} p_{125}$	p_{135}^{IV} 12.35 $p_{135}^{I} p_{135}^{V}$ 26.54 $p_{235} p_{135}$ 63.41 $p_{125} p_{345}$	p_{135}^{V} 16.54 $p_{125}^{II} p_{345}^{VI}$ 63.42 $p_{235} p_{145}$ 35.21 $p_{135} p_{135}$	p_{135}^{VI} 14.53 $p_{125}^{III} p_{135}^{V}$ 46.32 p_{235} 12.56 p_{125}
p_{134}^{I} 13.65 $p_{145}^{II} p_{234}^{V}$ 34.52 $p_{345} p_{124}$ 46.21 $p_{134} p_{134}$	p_{134}^{II} 12.46 $p_{134}^{I} p_{134}^{VI}$ 23.56 $p_{345} p_{124}$ 34.51 $p_{145} p_{234}$	p_{134}^{III} 15.63 $p_{124}^{II} p_{145}^{V}$ 52.34 $p_{345} p_{124}$ 26.41 $p_{245} p_{245}$	p_{134}^{IV} 12.64 $p_{134}^{I} p_{134}^{V}$ 23.45 $p_{124} p_{345}$ 36.51 $p_{234} p_{145}$	p_{134}^{V} 13.45 $p_{124}^{I} p_{145}^{VI}$ 36.52 $p_{124} p_{345}$ 64.21 $p_{134} p_{134}$	p_{134}^{VI} 13.65 $p_{124}^{II} p_{134}^{V}$ 32.54 p_{124} 26.41 p_{245}
p_{125}^{I} 15.62 $p_{123}^{IV} p_{125}^{VI}$ 53.24 $p_{125} p_{125}$ 36.41 $p_{135} p_{145}$	p_{125}^{II} 16.45 $p_{125}^{I} p_{234}^{V}$ 62.53 $p_{125} p_{123}$ 24.31 $p_{123} p_{124}$	p_{125}^{III} 12.65 $p_{145}^{IV} p_{135}^{VI}$ 24.53 $p_{125} p_{125}$ 46.31 $p_{124} p_{123}$	p_{125}^{IV} 13.62 $p_{123}^{I} p_{125}^{VI}$ 35.24 $p_{125} p_{125}$ 56.41 $p_{135} p_{245}$	p_{125}^{V} 15.42 $p_{123}^{II} p_{125}^{VI}$ 53.26 $p_{125} p_{123}$ 34.61 $p_{135} p_{234}$	p_{125}^{VI} 15.64 $p_{124}^{I} p_{125}^{V}$ 53.42 p_{125} 36.21 p_{145}
p_{124}^{I} 15.46 $p_{124}^{I} p_{125}^{VI}$ 52.63 $p_{134} p_{245}$ 24.31 $p_{123} p_{124}$	p_{124}^{II} 15.62 $p_{123}^{IV} p_{124}^{VI}$ 54.23 $p_{134} p_{134}$ 46.31 $p_{124} p_{123}$	p_{124}^{III} 15.24 $p_{124}^{I} p_{125}^{V}$ 56.53 $p_{245} p_{245}$ 62.31 $p_{125} p_{124}$	p_{124}^{IV} 15.42 $p_{123}^{II} p_{124}^{VI}$ 56.23 $p_{134} p_{145}$ 64.31 $p_{124} p_{125}$	p_{124}^{V} 15.64 $p_{124}^{I} p_{123}^{VI}$ 52.43 $p_{134} p_{134}$ 26.31 $p_{123} p_{124}$	p_{124}^{VI} 15.26 $p_{123}^{I} p_{124}^{V}$ 54.63 p_{245} 42.31 p_{124}
p_{123}^{I} 14.25 $p_{123}^{IV} p_{234}^{V}$ 46.53 $p_{123} p_{123}$ 62.31 $p_{125} p_{124}$	p_{123}^{II} 15.24 $p_{123}^{I} p_{125}^{V}$ 53.46 $p_{123} p_{123}$ 32.61 $p_{234} p_{235}$	p_{123}^{III} 12.43 $p_{145}^{IV} p_{235}^{VI}$ 26.35 $p_{123} p_{123}$ 64.51 $p_{124} p_{125}$	p_{123}^{IV} 15.36 $p_{123}^{I} p_{124}^{VI}$ 14.32 $p_{235} p_{234}$ 53.46 $p_{123} p_{123}$	p_{123}^{V} 16.25 $p_{123}^{I} p_{235}^{VI}$ 64.53 $p_{123} p_{123}$ 42.31 $p_{124} p_{125}$	p_{123}^{VI} 12.45 $p_{123}^{I} p_{123}^{V}$ 26.53 p_{125} 64.31 p_{124}

(') Vedremo tosto che cosa sono i punti V .

Vediamo da questa tabella, come già abbiamo osservato al num. 13 che nello stesso modo che si trovano le tre rette v_{12} che s'incontrano in un punto Z_2 , si trovano anche le tre rette v_{12} che s'incontrano in un punto K . Mentre p. es. pel punto $Z^{III}_{12,2}$ passano le rette v_{12} cioè $K^{I}_{15} K^{II}_{14}$, $K^{I}_{14} K^{II}_{15}$, $K^{I}_{13} K^{II}_{13}$, pel punto K^{III}_{12} invece passano le tre rette $Z^{I}_{15,2} Z^{II}_{14,2}$, $Z^{I}_{14} Z^{II}_{15}$, $Z^{I}_{13} Z^{II}_{13}$, che sono rette v_{12} . Dunque mentre i triangoli $K^{II}_{13} K^{II}_{15} K^{II}_{14}$, $K^{I}_{13} K^{I}_{14} K^{I}_{15}$ sono prospettivi pel centro $Z^{III}_{12,2}$, e per la retta g_{12} (vedi num. 10), i triangoli $Z^{III}_{13,2} Z^{III}_{15,2} Z^{III}_{14,2}$, $Z^{I}_{13,2} Z^{I}_{15,2} Z^{I}_{14,2}$ sono invece prospettivi per la retta g_{12} e per il centro K^{III}_{12} , come è facile di vedere, dunque mentre due figure π del sistema $[Kp]$ determinano quattro punti Z appartenenti rispettivamente a quattro delle figure π' così due figure π' prese insieme determinano quattro punti K , che appartengono rispettivamente a quattro delle figure π perchè due figure π' determinano 6 rette v_{12} che s'incontrano tre a tre nei quattro punti K suddetti, dunque prese cinque figure π esse determinano completamente una figura π' e viceversa:

Teorema XXXVII. Cinque figure π (π') determinano la sesta π' (π).

Se noi consideriamo la retta $v_{12} = K^{I}_{15} K^{II}_{14} Z^{III}_{12,2} Z^{V}_{15,2}$, vediamo che essa corrisponde in certa guisa (come già il lettore se ne sarà accorto) al punto d'intersezione $P_{16,25}$ delle due rette p^{V}_{123} , p^{III}_{345} , che corrispondono ai punti $Z^{V}_{45,2}$, $Z^{III}_{12,2}$ di essa, ovvero al punto d'incontro delle due rette $z^{I}_{234,2}$, $z^{II}_{235,2}$ che chiamo $V_{16,25,23}$ (¹), onde noi rappresenteremo quella retta v_{12} con gli indici dello stesso punto P o V cioè col simbolo $v_{16,25,12}$. Ora invece la retta $v_{12} = K^{III}_{12} K^{V}_{45} Z^{I}_{15,2} Z^{II}_{14,2}$ corrisponde al punto d'incontro delle due rette $z^{III}_{345,2}$, $z^{V}_{123,2}$ che chiamo $V'_{16,25,23}$ per la qual cosa rappresento la retta $v_{12} = K^{III}_{12} K^{V}_{45} Z^{I}_{15,2} Z^{II}_{14,2}$ con lo stesso simbolo cioè con $v'_{16,25,12}$. Due tali rette v_{12} , come p. es. le due rette v_{12} considerate siano chiamate rette degli stessi indici nelle quali adunque gli indici dei punti K e Z_2 dell'una sono eguali agli indici dei punti Z_2 e K dell'altra. Nel caso che le adoperiamo tutte e due le distingueremo con un apice. Finora noi abbiamo usati i punti P d'incontro dei 15 lati fondamentali senza metterci accanto la lettera P , ora lo facciamo per distinguerli dai punti V .

Se consideriamo le due rette $K^{I}_{15} K^{II}_{14} Z^{III}_{12,2} Z^{V}_{45,2} = v_{16,25,12}$ e $K^{I}_{34} K^{II}_{35} Z^{VI}_{35,2} Z^{IV}_{15,2} = v'_{15,62,12}$ si vede ch'esse s'incontrano nel punto $P_{12,56}$ come l'abbiamo dimostrato (num. 10 fig. 3). Se noi rappresentiamo adunque con i numeri 1 2 5 6 i vertici di un quadrangolo, mentre il punto $P_{12,56}$ è un punto diagonale di esso, gli altri due cioè 15.62, 16.25 ci danno gli indici delle due rette v_{12} che passano per il punto $P_{12,56}$.

Potremo anche conoscere, data una retta v_{12} p. es. la $K^{I}_{34} K^{II}_{35} = v_{15,62,12}$, il punto P che è collocato in essa. Infatti, per ciò che si disse poco fa, essa potrà passare o pel punto $P_{12,56}$ ovvero pel punto $P_{16,25}$, ma siccome gli indici romani dei suoi due punti di Kirkman sono I e II, così vuol dire che il punto P in essa contenuto è un vertice del triangolo Δ_{12} delle due figure I e II cioè dev'essere il punto $P_{12,56}$. L'altra retta di eguali indici passerà pel punto $P_{16,25}$.

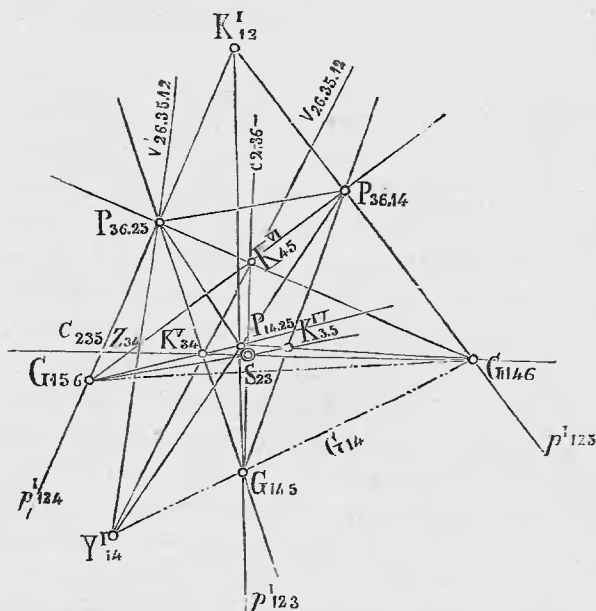
(¹) Vedremo meglio in seguito che cosa siano i punti V_{23} e perciò comprenderemo meglio questa corrispondenza.

15. Ritorniamo alla fig. 2 che trasporto nella fig. 2^a. Nelle tre rette $p^{I_{12,1}}$, $p^{I_{12,2}}$, $p^{I_{12,3}}$ che s'incontrano nel punto $K^{I_{12}}$ sono situati i vertici dei triangoli $P_{36,23}$ $P_{14,23}$ $P_{36,14}$ (vedi num. 6) e G_{156} G_{143} G_{146} due a due, ora questi due triangoli sono prospettivi pel centro $K^{I_{12}}$, e noi adunque congiungiamo i vertici di essi a guisa del teorema IV abbiamo:

$$\begin{aligned} G_{146} - P_{36,23} &= p^{VI_{245}} ; G_{146} - P_{14,23} = p^{IV_{235}} \\ G_{145} - P_{36,23} &= p^{V_{134}} ; G_{145} - P_{36,14} = p^{IV_{135}} \\ G_{136} - P_{14,23} &= p^{V_{234}} ; G_{136} - P_{36,14} = p^{VI_{145}} \end{aligned}$$

Il terzo triangolo prospettivo ai due dati secondo il teorema IV è dunque il triangolo $K^{IV_{35}}$ $K^{VI_{45}}$ $K^{V_{34}}$, onde la retta $v_{26,35,12} = K^{VI_{45}}$ $K^{V_{34}}$ $Z^{III_{45,2}}$ $Z^{II_{34,2}}$, il lato

Fig. 2 a



fondamentale 14 che unisce i due punti $P_{36,14}$, $P_{34,23}$ e la retta di Steiner-Plücker g_{14} s'incontrano in un punto che chiamo Y'_{14} . A questo punto degli indici 14 del lato fondamentale, che è il terzo lato del triangolo Δ_{14} di cui due lati sono 26, 35, che formano gli indici della retta $v_{1,2}$ sopra considerata. Il triangolo $Z^{VI_{45,2}}$ $Z^{V_{34,2}}$ $Z^{IV_{35,2}}$ è prospettivo col triangolo G_{145} G_{146} G_{136} pel centro S_{23} , perchè le rette che congiungono rispettivamente le coppie di punti $Z^{VI_{45,2}}$ G_{145} , $Z^{V_{34,2}}$ G_{146} , $Z^{IV_{35,2}}$ G_{136} sono le rette di Cayley-Salmon c_{236} , c_{235} , c_{234} : infatti noi sappiamo che mentre la retta

di Cayley-Salmon p.es. c_{236} passa pel punto $K^{VI_{45}}$ essa passa anche per il punto Z_2 degli stessi indici secondo il teorema XXVI. Il triangolo $Z^{VI_{45,2}}$ $Z^{V_{34,2}}$ $Z^{IV_{35,2}}$ è anche prospettivo col triangolo $P_{14,23}$ $P_{36,14}$ $P_{36,23}$ pel centro $Z^{I_{12,2}}$, perchè le rette che congiungono i punti $Z^{VI_{45,2}}$ $P_{14,23}$, $Z^{V_{34,2}}$ $P_{36,14}$, $Z^{IV_{35,2}}$ $P_{36,23}$ sono le tre rette $v_{1,2}$ che s'incontrano nel punto $Z^{I_{12,2}}$ (vedasi tabella num. 14), e siccome infine il triangolo $P_{14,23}$ $P_{36,14}$ $P_{36,23}$ è prospettivo col triangolo dei punti G_{145} , G_{146} , G_{136} , pel centro $K^{I_{12}}$ (vedi fig. 2^a) e i tre centri di prospettiva S_{23} , $Z^{I_{12,2}}$, $K^{I_{12}}$ sono situati nella retta c_{123} , così quei tre triangoli hanno due a due la stessa retta di prospettiva, perchè i vertici di essi si corrispondono in modo ciclico, perciò la retta $Z^{VI_{45,2}}$ $Z^{V_{34,2}}$ $K^{III_{45}}$ $K^{II_{34}} = v'_{26,35,12}$ passa pure pel punto Y'_{14} . Data una retta $v_{1,2}$ p. es. la retta $v_{26,35,12} = K^{VI_{45}}$ $K^{V_{34}}$, per trovare in quale retta di Steiner-Plücker essa s'incontra con la retta di eguali indici $v'_{1,2}$, basta considerare i punti di Steiner delle rette di Pascal, che passano rispettivamente per ciascun dei punti $K^{VI_{45}}$, $K^{V_{34}}$ della retta $v_{1,2}$ allora vediamo che due rette di Pascal dell'uno, cioè $p^{VI_{345}}$, $p^{VI_{145}}$, incontrano

ordinatamente due rette di Pascal dell'altro cioè p^{V}_{345}, p^{V}_{234} nei punti G_{156}, G_{156} , mentre nelle altre due rette $p^{VI}_{245}, p^{VI}_{134}$ che passano rispettivamente per quei punti K sono situati i punti G_{146}, G_{145} , onde la retta che congiunge questi due punti ossia la retta g_{14} è la retta di Steiner-Plücker richiesta (vedi fig. 2^a). Ovvero più semplicemente, essendo data la retta $v_{26.35.14}$ suddetta si sceglie il lato 14, che con i lati fondamentali indicati dagli indici 26.35 forma il triangolo $\Delta_{14} = 14.26.35$, ora questo triangolo è il triangolo Δ delle due figure I IV, dunque la retta di Steiner-Plücker che è a queste comune, cioè la retta g_{14} è la retta richiesta. Da qui si vede anche che una retta g incontra i lati del triangolo Δ_{ik} della combinazione delle due figure π , a cui essa è comune, in tre punti Y . Così data una retta di Steiner-Plücker p. es. la retta g_{14} potremo trovare quali siano i tre punti Y situati in essa e da quali rette v_{12} sono dati. Infatti si può considerare il triangolo $\Delta_{14} = 14.26.35$ e i punti Y della retta g_{14} sono precisamente i punti d'incontro di essa con i lati di questo triangolo. Si possono trovare anche le rette v_{12} che s'incontrano in essi. Infatti, consideriamo il punto Y'_{14} d'incontro della retta g_{14} col lato 14, le rette v_{12} che passano per esso sono le due rette $v_{26.35.14}$ e $v'_{26.35.14}$; dati gli indici di esse, che come si vede sono dati dai due lati 26, 35 del triangolo Δ_{14} , è facile di trovarne i punti K situati su di esse per le cose dette al num. 14 e per la tabella di detto numero. Ovvero possiamo trovare i punti Y della retta g_{14} nel seguente modo, che useremo anche in seguito. Prendiamo i punti G_{146}, G_{145} di essa, guardiamo nella tabella dei punti di Steiner e vediamo che le rette della stessa figura π che passano per essi sono le rette p^{I}_{123}, p^{I}_{123} ovvero $p^{IV}_{135}, p^{IV}_{235}$; se scegliamo la prima coppia, siccome essa ci dà il punto K'_{12} pel quale passa anche la retta p^{I}_{124} , il triangolo Δ_{ik} che ha i suoi vertici nelle tre rette $p^{I}_{123}, p^{I}_{123}, p^{I}_{124}$ è il triangolo $P_{14.25} P_{36.14} P_{36.25}$, dunque il lato 14 risguardato come retta di congiunzione dei punti $P_{14.25}$ e $P_{36.14}$ incontra la retta g_{14} nel punto Y'_{14} pel quale passa la retta $v_{26.35.14} = K^{VI}_{45} K^{V}_{34}$, che contiene il punto $P_{32.56}$ e che si trova nel modo indicato già al principio di questo numero. Se si considera invece la seconda coppia di rette, cioè $p^{IV}_{135}, p^{IV}_{235}$, è facile assicurarsi che si ottiene lo stesso lato 14 risguardato pure come retta di congiunzione degli stessi due punti $P_{14.25}, P_{36.14}$. Se si prendono invece i punti G_{134}, G_{124} della retta g_{14} si ottiene nel modo suddetto lo stesso lato 14, risguardato però come retta di congiunzione dei due punti $P_{14.56}$ e $P_{14.32}$ e la retta di eguali indici $v'_{26.35.14} = Z^{VI}_{45} Z^{V}_{34}$, che contiene il punti $P_{36.25}$. Come si è visto, si sono separati i quattro punti di Steiner della retta g_{14} in due coppie cioè $G_{145}, G_{146}, G_{134}, G_{124}$ ed abbiamo ottenuto il punto Y'_{14} . Ora siccome i quattro punti G della retta g_{14} possono esser aggruppati in due coppie in tre maniere diverse, così otterremo per questi tre aggruppamenti i tre punti Y della retta g_{14} . Abbiamo visto anche che il lato 14 risguardato come retta di congiunzione dei punti $P_{14.25}, P_{36.14}$ e $P_{14.56}, P_{14.32}$ passa pel punto Y'_{14} , questi punti P sono però dati facilmente anche dal triangolo Δ_{14} cioè 14.26.35 come è facile di scorgere. Ci rimane però da considerare il lato 14 come retta di congiunzione dei punti $P_{14.35}, P_{14.26}$. Anche qui facilmente si potrebbe trovare il triangolo Δ_{ik} , tale che questi punti si deducessero da esso nello stesso modo che i punti $P_{14.25}, P_{36.14}$ si deducono dal triangolo $\Delta_{14} = 14.26.35$; e la retta di Steiner-Plücker, appartenente alla combinazione delle due figure π , che hanno per triangolo Δ il triangolo Δ_{ik} trovato, taglierebbe il lato 14 considerato

come retta che unisce il punto $P_{14.35}$ $P_{14.26}$, in un punto Y . Ora il triangolo Δ_{23} cercato può essere o il triangolo $\Delta_{23} = 14.25.36$, ovvero il triangolo $\Delta_{36} = 14.23.56$. Dunque gli altri due punti del lato 14 sono dati su di esso dalle rette g_{23} e g_{36} . Ovvero per trovare i punti Y del lato 14, quando esso si risguarda come retta che unisce i punti $P_{14.35}$, $P_{14.26}$, basta trovare due rette della stessa figura π , che passino per essi.

Nel punto $P_{14.35}$ s'incontrano le rette p^{II}_{235} , p^{III}_{135} , p^V_{235} , p^{VI}_{135}
 » $P_{14.26}$ » p^{II}_{245} , p^{III}_{134} , p^{VI}_{134} , p^V_{245}
 (vedi tabella delle 6 figure π).

Dunque abbiamo le rette p^{II}_{235} , p^{II}_{245} ovvero p^{III}_{134} , p^{III}_{135} che passano rispettivamente per essi e che appartengono alle figure π II e III. Nelle due prime rette giacciono i punti G_{235} , G_{236} , come anche nelle seconde (vedi sempre tabella dei punti di Steiner). Le prime s'incontrano nel punto K^{II}_{25} , pel quale passa anche la retta p^{II}_{125} che contiene il punto G_{256} , onde la retta g_{23} taglierà il lato 14 in un altro punto Y_{14} , che indico con Y''_{14} . Il triangolo Δ_{ik} che ha i suoi vertici nelle tre rette p^{II}_{235} , p^{II}_{245} , p^{II}_{125} è il triangolo $\Delta_{23} 14.25.36$. Si vede pure coi metodi già indicati che la retta $v_{25.36.12} = K^V_{25} K^{VI}_{13}$, che contiene il punto $P_{23.56}$ passa per questo punto Y''_{14} , quando si consideri la retta g_{23} data dai punti G_{235} , G_{236} . Se noi consideriamo invece gli altri due punti G_{234} , G_{123} di essa, si ottengono e la retta v_{12} di eguali indici cioè $v'_{25.36.12} = Z^{VI}_{25.2} Z^{IV}_{13.2}$, che passa pel punto $P_{35.16}$, ed il lato 14 dato però dai punti $P_{14.23}$, $P_{14.56}$, che s'incontrano nello stesso punto Y''_{14} . Finalmente le rette $v_{23.56.12} = K^{I}_{12} K^{IV}_{35}$, sulla quale è situato $P_{26.35}$ e $v'_{23.56.12} = Z^{I}_{12} Z^{IV}_{35}$ nella quale è collocato il punto $P_{26.35}$ s'incontrano col lato 14, dato rispettivamente dalle coppie di punti $P_{14.25}$, $P_{14.36}$ e $P_{14.26}$, $P_{14.35}$ nel punto Y'''_{14} della retta g_{56} . Da ciò che precede si conclude che le sei rette v_{12} che passano due a due per i vertici del triangolo diagonale del quadrangolo fondamentale 2356 cioè le rette

$$v_{36.25.12} = K^V_{25} K^{VI}_{13} ; v_{35.26.12} = K^{VI}_{45} K^V_{34} \text{ che s'incontrano in } P_{23.56}$$

$$v_{23.56.12} = K^{I}_{12} K^{IV}_{35} ; v'_{36.25.12} = Z^V_{25.2} Z^{VI}_{13.2} \quad \text{»} \quad P_{26.35}$$

$$v'_{23.56.12} = Z^{I}_{12.2} Z^{IV}_{35.2} ; v'_{26.35.12} = Z^{VI}_{45.2} Z^V_{34.2} \quad \text{»} \quad P_{36.25}$$

s'incontrano due a due nel lato rimanente 14 fondamentale. Abbiamo detto che i punti d'incontro di una retta g coi lati del triangolo Δ_{ik} delle due figure, alle quali essa appartiene, sono punti Y , come abbiamo visto (fig. 3); per questi punti passano due a due le sei rette m determinate dalle due figure (vedi num. 12 teorema XXX). Osserviamo nella fig. 3 che i punti d'incontro delle due rette v_{12} cioè $K^{I}_{14} K^{II}_{15}$, $K^{II}_{34} K^{I}_{35}$ tagliano per la ragione suesposta il lato 56 in due punti Y_{56} che formano un gruppo armonico con la coppia di punti $P_{12.35}$, $P_{34.56}$ (vedi teorema XXIII), dunque in un lato p. es. 56 le coppie di punti $P_{12.56}$, $P_{34.56}$; $P_{13.56}$, $P_{24.56}$; $P_{14.56}$, $P_{32.56}$ formano rispettivamente tre gruppi armonici con le coppie formate dai tre punti Y_{56} del lato 56, ossia dei punti d'incontro di esso con le tre rette g di quelle combinazioni di due figure il cui triangolo Δ_{ik} ha per lato il lato fondamentale 56.

Teorema XXXVIII. Le sei rette v_{12} che passano per i tre vertici del triangolo diagonale di un quadrangolo, formato da quattro punti fondamentali p. es. 1236, s'incontrano due a due in tre punti « Y_{45} » del lato fondamentale rimanente 45. Questi punti Y

sono situati rispettivamente nelle tre rette di Steiner-Plücker che sono date da quelle combinazioni di due figure π , il cui triangolo Δ_{ik} contiene il lato 45. I punti Y sono quarantacinque in tutto l'esagrammo, essi sono situati tre a tre nelle 15 rette di Steiner-Plücker e nei 15 lati fondamentali. Per essi passano due a due le novanta rette m . I sei punti P di un lato fondamentale formano tre coppie di punti coniugati armonici rispetto alle tre coppie di punti Y del lato (Vedi teorema XXV).

Osserviamo che la retta $v'_{26.35.12} = Z^{VI}_{45.2} Z^{V}_{34.2}$ contiene il punto $P_{36.25}$ della retta p_{124} (fig. 2^a) quindi le due coppie di rette $v'_{26.35.12}$, Y'_{14} S_{23} e $v_{26.35.12}$ g_{14} formano due coppie di raggi di un gruppo armonico intorno al punto Y'_{14} . Infatti, i punti $P_{36.25}$, S_{23} , Y'_{14} sono i vertici del triangolo diagonale del quadrangolo K^{VI}_{45} K^V_{34} G_{145} G_{146} . Ora il lato G_{145} S_{23} è la retta di Cayley-Salmon c_{235} ; questa taglia il fascio armonico considerato nelle due coppie di punti coniugati $Z^{V}_{34.2}$ S_{23} ; K^V_{34} G_{146} , dunque:

Teorema XXXIX. In una retta di Cayley-Salmon un punto di Salmon e il punto Z_2 , che è vertice del quadrangolo di punti Z_2 determinato dalla combinazione delle due figure π a cui appartiene il punto di Salmon secondo il teorema XXVIII, il punto di Kirkman degli stessi indici ed il punto di Steiner della retta di Cayley-Salmon, formano due coppie di punti coniugati armonici.

Se si unisce (fig. 2^a) il punto Y'_{14} con i punti K^I_{12} , K^{IV}_{35} , che formano con i due punti K^{VI}_{45} , K^V_{34} il quadrangolo, i cui vertici sono situati rispettivamente sulle rette di Cayley-Salmon che passano pel punto S_{23} comune alle due figure II e III, si ottengono due rette m che formano con la retta (') g_{14} e il lato 14 un gruppo armonico, dunque:

Teorema XL. Le due rette m intorno ad un punto Y il lato fondamentale e la retta g formano un gruppo armonico.

16. Supponiamo che le rette z_2 in guisa delle due rette di Pascal s'incontrino quattro a quattro in quarantacinque punti V, i cui indici siano rispettivamente identici a quelli dei punti P, cioè siccome per il punto $P_{36.14}$ passano le rette p_{125} , p^V_{245} , p^{VI}_{145} , p^{IV}_{135} , così pel punto $V_{36.14}$ s'incontreranno secondo la nostra ipotesi le rette $z^{I}_{125.2}$, $z^{V}_{245.2}$, $z^{VI}_{145.2}$, $z^{IV}_{135.2}$. Consideriamo la figura 2^a rispetto al punto $Z^I_{12.2}$, invece del punto K^I_{12} , vale a dire consideriamo la fig. 2^a formata dalle tre rette $z^{I}_{125.2}$, $z^{I}_{124.2}$, $z^{I}_{123.2}$, allora si dimostra che le rette che congiungono le coppie di punti $V_{36.14}$ $V_{25.14}$ $V_{14.56}$, $V_{14.32}$ s'incontrano con la retta $v_{12} = Z^{VI}_{45.2}$ $Z^{V}_{34.2}$ e quella di eguali indici nel punto Y'_{14} della retta g_{14} . Infatti la dimostrazione è analoga a quella data al num. 16, fig. 2^a. Ora per la stessa ragione si dimostra che le

(') Per vedere meglio come queste siano due rette m consideriamo la fig. 3 e consideriamo la retta g_{12} data dai punti G_{123} , G_{124} . Le due rette p della II figura π che passano per essi sono p^{II}_{134} , p^{II}_{345} che s'incontrano nel punto K^{II}_{34} . In queste sono collocati i punti $P_{23.56}$, $P_{14.56}$ dunque otteniamo il punto Y_{56} sopra g_{12} . È facile ora di vedere che i vertici del triangolo diagonale del quadrangolo $P_{23.56}$ $P_{14.56}$ G_{123} G_{124} sono i punti Y_{56} , K^{II}_{34} , K^{II}_{35} , ove i due lati Y_{56} K^{II}_{34} , Y_{56} K^{II}_{35} sono precisamente due rette m .

rette $V_{14.35} - V_{14.26}$, $V_{14.32} - V_{14.56}$ s'incontrano con la retta $v_{12} = ZV_{25.2} ZV_{13.1}$ nel punto Y''_4 , come l'abbiamo dimostrato per il lato fondamentale 14, considerato come retta di congiunzione dei punti $P_{14.35}$, $P_{14.26}$, e $P_{14.32}$, $P_{14.56}$, dunque ciò vuol dire che la retta $V_{14.32} - V_{14.56}$ dovendo passare per Y'_{14} e Y''_{14} , per i quali passa anche il lato fondamentale 14, cade nel lato fondamentale 14, cioè i sei punti V, i cui indici hanno in comune le cifre unite 14 devono cadere per la nostra ipotesi nel lato 14, questo deve allora avvenire per tutti gli altri punti V, cioè essi cadranno sei a sei nei quindici lati fondamentali, cioè il secondo sistema $[Zz]_2$ coinciderà col primo, ciò che è impossibile, dunque vediamo che le rette z_2 non si possono incontrare quattro a quattro in 45 punti come le rette di Pascal degli stessi indici. Abbiamo dimostrato che a quattro rette di Pascal che s'incontrano in un punto P non corrispondono quattro punti Kirkman situati in linea retta, abbiamo dimostrato ciò considerando i due triangoli:

$$K^{II}_{13} K^{II}_{15} K^{II}_{14}, K^I_{13} K^I_{14} K^I_{15}$$

prospettivi pel centro $Z^{III}_{12.2}$ (vedi num. 10). Se fossero stati prospettivi pel punto $K^{III}_{12.2}$, allora i punti Z_2 sarebbero caduti rispettivamente nei punti K e le rette v_{12} si sarebbero ridotte a quarantacinque in tutto l'esagrammo, corrispondendo così ai punti P. Ora adunque consideriamo i due triangoli formati dalle rette z_2 corrispondenti a quei punti di Kirkman cioè

$$z^{II}_{245.2} z^{II}_{234.2} z^{II}_{235.2}; z^I_{245.2} z^I_{235.2} z^I_{234.2}$$

questi due triangoli sono prospettivi per il centro S_{12} , perchè le rette che congiungono i punti $Z^{II}_{24.2}$, $Z^I_{25.2}$, $Z^{II}_{25.2}$, $Z^I_{24.2}$, $Z^{II}_{23.2}$, $Z^I_{23.2}$ sono le rette c_{125} , c_{124} , c_{126} , onde essi sono prospettivi per una retta che corrisponde al punto $Z^{III}_{12.2}$, ma che non è però la retta $z^{III}_{345.2}$, perchè allora le rette z_2 dovrebbero incontrarsi nel modo suddetto in quarantacinque punti V quattro a quattro, ciò che si è dimostrato impossibile. Questa retta di prospettiva sia chiamata $z^{III}_{345.3}$, che corrisponde in certo modo al punto $Z^{III}_{12.2}$ ('). È evidente adunque che queste rette z_2 sono 60 e che s'incontrano due a due in 90 punti che chiamo V_{23} pei quali passano due a due le rette z_1 . Questi 90 punti V_{23} corrispondono alle 90 rette v_{12} , mentre p. es. in una retta v_{12} sono situati due punti K e due punti Z_2 , nel punto V_{23} corrispondente s'incontrano le due rette z_2 che corrispondono ai due punti di Kirkman e le due rette z_3 che corrispondono nel modo suddetto ai due punti Z_2 di essa retta v_{12} . È evidente che come si ottengono i punti Z_2 dai punti K e viceversa dalla tabella per la formazione delle rette v_{12} , così si ottengono dalla stessa tabella le rette z_3 dalle rette z_2 e viceversa. Data p. es. la retta $z^{III}_{345.3}$ e si vuol vedere da quali rette z_2 siano dati i tre punti V_{23} che sono situati in essa, basta considerar la tabella num. 14 e considerare la retta p^{III}_{345} come retta $z^{III}_{345.3}$, le rette z_2 che s'incontrano due a due nei 3 punti V_{23} richiesti sono $z^I_{234.2}$, $z^{II}_{235.2}$, $z^I_{245.2}$, $z^{II}_{245.2}$, $z^I_{235.2}$, $z^{II}_{234.2}$. Le stesse osservazioni che abbiamo fatto per passare dai punti K ai punti Z_2 e viceversa (vedi num. 13) si possono fare ancora per passare dalle rette z_2 alle rette z_3 e viceversa. È evidente

(') Bisogna cercare di distinguer bene le corrispondenze che passano fra questi punti K e Z_2 con le rette p , z_2 e z_3 , perchè io me ne servo solamente per mostrare come si formino gli altri sistemi $[Zz]_3$, $[Zz]_4$ ecc.

poi che queste rette z_3 non possono cadere con le rette p , perchè le rette z_2 dovrebbero cadere pure con le rette p ; dunque:

Teorema XLI. Le due rette z_2 che corrispondono a due punti K situati in una retta v_{12} , s'incontrano in un punto « V_{23} » pel quale passano due rette z_3 d'un terzo sistema $[Zz]_3$, che corrispondono ai punti Z_2 situati nella retta v_{12} . I punti V_{23} sono 90 in tutto l'esagrammo. Le rette p, z_2, z_3 che corrispondono ad uno stesso punto Z_2 nel modo indicato dai teoremi XXVIII e XXXIV si chiamino rette degli stessi indici. I 90 punti V_{23} si separano in quarantacinque coppie corrispondenti in certo modo ai quarantacinque punti P . Mentre cioè un punto V_{23} è l'intersezione di due rette z_2 o z_3 , il punto corrispondente P è dato dalle rette p degli stessi indici. I punti V_{23} di una coppia e il punto P corrispondente siano chiamati punti di eguali indici. Le 90 rette v_{12} corrispondono nel modo suddetto ai punti V_{23} , si separano adunque in quarantacinque coppie di rette v_{12} . Le due rette v_{12} di una coppia siano chiamate rette di eguali indici.

17. Consideriamo i punti $Z^{IV}_{43,1}, Z^{IV}_{35,2}, Z^{IV}_{34,3}$, faccio corrispondere ad essi le rette

$$z^{IV}_{123,3}, z^{IV}_{124,3}, z^{IV}_{125,3},$$

la prima vien data dai seguenti punti V_{23} (vedi tabella num. 14)

$$z^I_{123,2}, z^{II}_{123,2}, z^I_{125,2}, z^{II}_{121,3}, z^I_{234,1}, z^{II}_{235,1}$$

la seconda dai punti $z^{II}_{123,2}, z^{III}_{124,3}, z^{II}_{124,2}, z^{III}_{125,3}, z^I_{131,2}, z^{III}_{134,1}$

la terza » $z^{III}_{124,2}, z^I_{123,2}, z^{III}_{125,2}, z^I_{125,2}, z^{II}_{135,1}, z^{III}_{234,1}$

Ora possiamo formare i due triangoli $z^I_{123,2}, z^{II}_{123,2}, z^{III}_{121,2}$ e $z^I_{125,2}, z^{II}_{121,2}, z^{III}_{125,2}$ che sono prospettivi per la retta c_{123} perchè i punti $z^I_{123,2}, z^I_{125,2} = Z^I_{12,3}, z^{II}_{123,2}, z^{II}_{121,2} = Z^{II}_{12,3}, z^{III}_{121,2}, z^{III}_{125,2} = Z^{III}_{12,3}$ sono situati nella retta di Cayley-Salmon c_{123} ; e siccome quei due triangoli hanno i loro vertici due a due situati nelle tre rette $z^{IV}_{123,3}, z^{IV}_{124,3}, z^{IV}_{125,3}$ così vuol dire che queste tre rette s'incontrano in un punto che io chiamerò $Z^{IV}_{12,3}$ (').

Teorema XLII. Le tre rette z_3 che corrispondono a tre punti Z_2 situati in una retta z_2 , nel modo indicato dal teorema XLI, s'incontrano in un punto Z_3 che corrisponde così a quella retta z_2 . I punti K, Z_2, Z_3 che corrispondono ad una retta z_2 nel modo indicato dai teoremi XXXI, XXXIV si chiamino punti degli stessi indici.

Abbiamo dimostrato a num. 11 che essendo i triangoli

$$K^I_{25}, K^I_{23}, K^I_{21}, K^{II}_{21}, K^{II}_{23}, K^{II}_{25}, K^{II}_{11}, K^{II}_{13}, K^{II}_{15}, K^I_{15}, K^I_{13}, K^I_{11}$$

nella condizione del teorema II, il punto $Z^{III}_{12,2}$ esiste nella retta di Cayley-Salmon c_{123} ; qui invece considerando i triangoli

$$z^I_{134,2}, z^I_{145,2}, z^I_{135,2}; z^{II}_{135,2}, z^{II}_{145,2}, z^{II}_{134,2}; z^{III}_{235,1}, z^{III}_{245,1}, z^{III}_{234,1}; z^I_{234,1}, z^I_{245,1}, z^I_{235,1}$$

(') Questa dimostrazione è duale a quella data per dimostrare che i punti Z_2 sono situati tre a tre in 60 rette z_2 (vedi num. 13).

vediamo ch'essi soddisfano alla condizione del teorema II, perchè il primo è prospettivo col secondo pel centro K^{III}_{12} e per la retta g_{12} , infatti le tre rette $Z^{I}_{14,2}$, $Z^{II}_{13,2}$, $Z^{I}_{13,2}$, $Z^{II}_{13,2}$, $Z^{I}_{15,2}$, $Z^{II}_{14,2}$ sono le tre rette v_{12} che s'incontrano nel punto K^{III}_{12} (vedi tabella num. 14), e i punti d'incontro dei lati corrispondenti sono i punti G_{125} , G_{126} , G_{124} ; il secondo è prospettivo col terzo pel centro $Z^{II}_{12,2}$ e per la retta $z^{II}_{345,2}$, il terzo è prospettivo col quarto pel centro S_{12} e per la retta $z^{III}_{345,3}$ (vedi num. 16) e il quarto col primo pel centro $Z^{I}_{12,2}$ e per la retta $z^{I}_{345,2}$, e siccome i quattro centri di prospettiva cioè K^{III}_{12} , $Z^{II}_{12,2}$, S_{12} , $Z^{I}_{12,2}$ sono situati nella retta di Cayley-Salmon c_{123} , così pel teorema II le rette di prospettiva g_{12} , $z^{II}_{345,2}$, $z^{III}_{345,3}$, $z^{I}_{345,2}$ s'incontrano in un punto, cioè nel punto G_{123} , dunque la retta $z^{III}_{345,3}$ passa pel punto G_{123} . Si vede che questa dimostrazione passo per passo è duale a quella data al num. 11 per mostrare che i punti Z_2 sono situati nelle rette di Cayley-Salmon, dunque si conclude:

Teorema XLIII. Le tre rette z_3 che corrispondono a tre punti Z_2 situati in una retta di Cayley-Salmon s'incontrano nel punto di Steiner ad essa corrispondente.

Si può anche dimostrare questo teorema considerando le tre rette $z^{III}_{345,3}$, $z^{I}_{345,2}$, $z^{II}_{345,2}$ che s'incontrano nel punto G_{123} .

18. Consideriamo ora la fig. 2^a rispetto al punto $Z^{I}_{12,2}$ invece del punto K^{I}_{12} . ossia consideriamo le tre rette $z^{I}_{123,3}$, $z^{I}_{124,3}$, $z^{I}_{125,3}$ che s'incontrano nel punto $Z^{I}_{12,2}$. Nei punti $V_{25.14.23}$, $V_{36.25.23}$, $V_{36.14.23}$ situati rispettivamente in quelle tre rette s'incontrano ordinatamente le terne di rette $z^{VI}_{345,3}$, $z^{V}_{234,2}$, $z^{IV}_{235,2}$; $z^{IV}_{345,3}$, $z^{VI}_{245,2}$, $z^{V}_{134,2}$; $z^{V}_{345,3}$, $z^{VI}_{145,2}$, $z^{IV}_{135,2}$ come si può vedere dalla tabella num. 14 per la formazione dei punti V, queste nove ultime rette con le tre prime hanno la proprietà analoga a quella espressa nel teorema XVII per le rette p , cioè esse s'incontrano rispettivamente nei punti $Z^{I}_{12,2}$, $Z^{VI}_{45,2}$, $Z^{V}_{34,2}$, $Z^{IV}_{35,2}$ e nei punti G_{146} , G_{145} , G_{156} , G_{456} ; la proprietà duale vale anche per le rette v_{12} , vale a dire preso il triangolo $v_{25.14.12}$, $v_{36.25.12}$, $v_{36.14.12}$ i 6 punti K e i 6 punti Z_2 che sono situati rispettivamente in queste tre rette hanno la proprietà duale delle 6 rette z_2 e 6 rette z_3 suddette.

Nella stessa maniera che noi abbiamo dimostrato che la retta $v_{26.35.12} = K^{V}_{34} K^{VI}_{45}$ passa pel punto d'incontro Y'_{14} della retta g_{14} con la retta che congiunge i punti $P_{25.14}$ e $P_{36.14}$ ossia col lato fondamentale 14 (vedi num. 15 fig. 2^a) così qui, considerando i triangoli $Z^{V}_{34,2}$, $V_{25.14.23}$, G_{145} , $Z^{VI}_{45,2}$, $V_{36.14.23}$, G_{146} prospettivi per la retta $z^{I}_{124,3}$, si dimostra che le rette

$Z^{VI}_{45,2}$, $Z^{V}_{34,2} = v'_{26.35.12}$, $V_{36.14.23} - V_{25.14.23} = n_{14.23}$ (1) e g_{14} s'incontrano in un punto, cioè nel punto Y'_{14} .

Siano dati i due triangoli

$z^{IV}_{135,2}$, $z^{V}_{345,3}$, $z^{V}_{134,2}$; $z^{IV}_{235,2}$, $z^{VI}_{345,3}$, $z^{VI}_{245,2}$
i punti d'incontro dei lati

$z^{IV}_{135,2}$, $z^{IV}_{235,2} = Z^{IV}_{35,2}$, $z^{V}_{345,3}$, $z^{VI}_{345,3} = G_{456}$, $z^{V}_{134,2}$, $z^{VI}_{245,2} = V_{36.25.23}$ sono situati nella retta $z^{IV}_{345,2}$, onde le congiungenti dei vertici corrispondenti dei due triangoli ossia le rette

$V_{36.14.23} - V_{14.25.23} = n_{14.23}$, $Z^{V}_{34,2}$, $Z^{VI}_{45,2} = v_{26.35.12}$, g_{14}

(1) Nominiamo la retta che congiunge i due punti $V_{36.14.23}$ e $V_{25.14.23}$ col simbolo $n_{14.23}$, gli indici 23 indicano che i punti V appartengono al 2° e 3° sistema [Z₃].

s'incontrano in un punto cioè nel punto Y'_{14} (vedi tabella num. 14). Qui entrano delle rette $v_{3,1}$, queste rette hanno la stessa proprietà delle rette $v_{1,2}$, vedremo ch'esse congiungono due a due i punti Z_3 e i punti Z_1 d'un altro sistema $[Z_3]$, l'indice 26.35 della retta $v_{3,1}$ sopra considerata è lo stesso della retta $v_{1,2}$, che congiunge i due punti KV_{34} , KV_{45} degli stessi indici dei punti Z_3 collocati su di essa. Se invece di considerare la fig. 2^a rispetto al punto K'_{12} , la consideriamo rispetto al punto $Z'_{12,2}$, cioè consideriamo le tre rette $z'_{123,2}$, $z'_{124,2}$, $z'_{125,2}$ che s'incontrano in esso, si dimostra analogamente che la retta $V'_{36.14.23} - V'_{25.14.23} = n'_{14.23}$ passa pel punto Y'_{14} , ovvero basterà anche prendere i triangoli:

$$z^{IV}_{135,2} z^{V}_{345,2} z^{V}_{134,2}; \quad z^{IV}_{235,3} z^{VI}_{345,2} z^{VI}_{245,2}$$

che sono prospettivi perchè i punti d'incontro dei lati

$$z^{IV}_{135,2} z^{IV}_{235,3} = Z^{IV}_{35,3}, \quad z^{V}_{345,2} z^{VI}_{345,2} = G_{456}, \quad z^{V}_{134,2} z^{VI}_{245,2} = V_{36.25.23}$$

sono situati nella retta $z^{IV}_{345,3}$, da cui deduciamo che le rette

$$V'_{36.14.23} - V'_{14.25.23} = n'_{14.23}, \quad Z^{V}_{34,2} Z^{VI}_{45,2} = v'_{26.35,12} g_{14}$$

s'incontrano nel punto Y'_{14} . Abbiamo dimostrato al num. 15 che la retta $v'_{26.35,12} = K^{III}_{45} K^{II}_{34}$ passa pel punto d'incontro Y'_{14} della retta g_{14} con la retta che unisce i due punti $P_{14.56}$, $P_{14.32}$ cioè col lato fondamentale 14, ora qui analogamente si dimostra che le rette $Z^{III}_{45,2} Z^{II}_{34,3} = v'_{26.35,23}$, $V_{14.56.23} - V_{14.32.23} = n^*_{14,23}$ e $V'_{14.56.23} - V'_{14.32.23} = n^*_{14,23}$ s'incontrano nel punto Y'_{14} . Infatti si considerino i punti G_{134} , G_{124} della retta g_{14} , per essi passano rispettivamente le due rette $z'_{235,3}$, $z'_{135,3}$, se si considerano queste due rette allora si dimostra che le rette $V_{14.56.23} - V_{14.32.23}$, $Z^{III}_{45,2} Z^{II}_{34,3} = v'_{26.35,12}$ passano per lo stesso punto Y'_{14} , ed allora seguendo le dimostrazioni date di sopra si dimostra che le rette $Z^{III}_{45,3} Z^{II}_{34,3} = v'_{26.35,23}$ e $V'_{14.56.23} - V'_{14.32.23}$ s'incontrano nel punto Y'_{14} . Nello stesso modo si dimostra che le rette

$$Z^{V}_{25,3} Z^{VI}_{13,3} = v_{36.52,34}, \quad V_{14.35.23} - V_{14.26.23}, \quad V'_{14.35.23} - V'_{14.26.23}$$

passano pel punto Y'_{14} cioè pel punto d'incontro della retta $KV_{25} KV_{13} = v_{36.52,12}$ con la retta g_{23} e con la retta che unisce i punti $P_{14.35}$, $P_{14.26}$ ossia col lato fondamentale 14. Le rette $V'_{14.23.23} - V_{14.56.23}$, $V'_{14.56.23} - V_{14.23.23}$ passano pure per Y'_{14} : onde si vede che in questo caso i punti $V_{14.23.23} - V_{14.56.23}$ non cadono nel lato fondamentale 14, mentre ciò avverrebbe quando il punto $V'_{14.23.23}$ cadesse col punto $V_{14.23.23}$ ciò che abbiamo dimostrato al num. 16 esser impossibile. Ora deduciamo le proprietà analoghe per la figura corrispondente alla fig. 2^a presa rispetto al punto $Z'_{12,3}$ ove al punto $Z'_{12,3}$ corrisponda la retta p'_{345} , invece delle rette $v_{1,2}$ entrino i punti $V_{2,3}$ corrispondenti invece dei punti Z_2 entrino le rette z_2 corrispondenti. Dunque ora metto in corrispondenza i punti Z_3 e le rette p , i punti K e le rette z_3 , le rette $v_{1,2}$ e i punti $V_{2,3}$, i punti Z_2 e le rette z_2 . Sia adunque data la retta p'_{345} mediante i suoi punti K'_{34} , K'_{35} , K'_{45} . Abbiamo sopra dimostrato che le rette

$$Z^{V}_{34,2} Z^{VI}_{45,2} = v'_{26.35,12}, \quad V_{36.14.23} - V_{25.14.23} = n_{14.23}, \quad g_{14}$$

s'incontrano in un punto Y'_{14} considerando i triangoli prospettivi

$$Z^{V}_{34,2} V_{25.14.23} G_{145} : Z_{45,2} V_{36.14.23} G_{146}$$

per la retta $z'_{124,3}$, così qui nella figura corrispondente ora stabilita si hanno i triangoli

$$z^{V}_{125,2}, v_{25.14.23} = K'_{45} K^{VI}_{12} Z^{IV}_{14,2} Z^{V}_{15,2}, c_{145};$$

$$z^{VI}_{123,2}, v_{36.14.12} = K'_{34} K^{VI}_{12} Z^{VI}_{23,2} z^{IV}_{24,2}, c_{146}$$

che sono prospettivi pel centro K'_{35} , che corrisponde alla retta $z'_{12,3}$ onde i punti d'incontro dei lati corrispondenti cioè

$V'_{35.62.23} = z^V_{125,2} z^{VI}_{123,2}, v_{25.14,11} - v_{36.14,12} = N_{14,12}^{(1)}, S_{14}$ sono situati in una retta che chiamo y'_{14} , che corrisponde al punto Y'_{14} , i cui indici 14 formano con quelli del punto $V'_{35.62.23}$ cioè 35, 62, che giace in essa, i tre lati del triangolo Δ_{14} .

Sopra abbiamo dimostrato che pel punto Y'_{14} passa anche la retta $Z^{VI}_{45,3}$ $Z^{V}_{34,3} = v_{33.62,34}$ considerando i due triangoli

$$z^{IV}_{135,2} z^V_{345,3} z^V_{134,3}; z^{IV}_{235,2} z^{VI}_{345,3} z^{VI}_{245,3}$$

qui invece considerando i triangoli

$$Z^{IV}_{24,2} K^V_{12} K^V_{25}; Z^{IV}_{14,2} K^{VI}_{12} K^{VI}_{13}$$

si vede ch'essi sono prospettivi pel centro $Z^{IV}_{12,2}$ perchè le rette $Z^{IV}_{24,2} Z^{IV}_{14,2} = z^{IV}_{124,1}$, $K^V_{12} K^{VI}_{12} = c_{436}$, $v_{36.25,12} = K^V_{25} K^{VI}_{13} Z^{IV}_{12,2}$ s'incontrano nel punto $Z^{IV}_{12,2}$ perciò i punti d'incontro dei lati corrispondenti ossia i punti

$$v_{36.14,12} - v_{14.25,12} = N_{14,12}, c_{145} c_{146} = S_{14}, p^V_{125} p^{VI}_{123} = P_{35.62}$$

sono situati in una retta cioè nella retta y'_{14} .

Se invece consideriamo i triangoli

$$K^{IV}_{24} Z^V_{12,2} Z^V_{25,2}; K^{IV}_{14} Z^{VI}_{12,2} Z^{VI}_{13,2}$$

si vede che sono pure prospettivi pel centro K^{IV}_{12} perchè le rette $K^{IV}_{24} K^{IV}_{14} = p^{IV}_{124}$ $Z^V_{12,2} Z^{VI}_{12,2} = c_{436}$, $v'_{36.25,12} = Z^V_{25,2} Z^{VI}_{13,2} K^{IV}_{35}$, K^{IV}_{12} s'incontrano nel punto K^{IV}_{12} , dunque i punti d'incontro dei lati corrispondenti ossia i punti:

$v'_{36.14,12} - v'_{14.25,12} = N'_{14,12}$, $c_{145} c_{146} = S_{14}$ e $z^V_{125,2} z^{VI}_{123,2} = V'_{35.62.23}$ sono situati nella retta y'_{14} . Come su si è dimostrato che le rette $V_{14.56,23} - V_{14.32,23}$, $Z^{III}_{45,2} Z^{II}_{34,2} = v_{35.26,12}$ s'incontrano nel punto Y'_{14} così qui si dimostra con le considerazioni duali che il punto $V_{35.26,12} = z^{III}_{123,2} z^{II}_{125,2}$ è situato nella retta y'_{14} . Dunque una retta y contiene un punto P e i punti V_{23} di eguali indici ed un punto di Salmon. Esse sono quarantacinque dunque:

Teorema XLIV. I punti P e V_{23} di eguali indici sono situati in una retta y che passa per un punto di Salmon. Le rette y sono quarantacinque in tutto l'esagrammo. Ai due punti V_{23} situati in una retta y corrispondono le due rette v_{12} che s'incontrano in un punto Y , onde corrispondono le 45 rette y ai quarantacinque punti Y .

Nelle tre z_2 che passano pel punto $Z'_{12,2}$ sono situati i tre punti $V'_{33.24,23} = z^{I}_{125,2}$ $z^{III}_{125,2}$, $V'_{62.31,23} = z^{I}_{123,2}$ $z^{III}_{124,2}$, $V'_{15.64,23} = z^{I}_{124,2}$ $z^{III}_{123,2}$, essi formano un triangolo i cui tre lati sono $z^{IV}_{125,3}$, $z^V_{124,3}$, $z^{VI}_{123,3}$ (vedi tabella num. 14), consideriamo anche il triangolo $P_{33.24} P_{62.31} P_{15.64}$ i cui vertici sono congiunti dalle rette p^{IV}_{125} , p^V_{124} , p^{VI}_{123} , questi due triangoli sono prospettivi per la retta g_{13} perchè i lati $z^{IV}_{125,3}$ p^{IV}_{125} , $z^V_{124,3}$ p^V_{124} , $z^{VI}_{123,3}$ p^{VI}_{123} s'incontrano rispettivamente nei punti G_{134} , G_{135} ,

(¹) Nomino il punto d'incontro delle rette $v_{36.14,12}$ e $v_{14.25,12}$ col simbolo $N_{14,12}$ le cifre 12 indicano che questi punti appartengono al 1° e 2° sistema.

G_{136} , le rette che congiungono i vertici corrispondenti sono le tre rette y'_{16} , y'_{43} , y'_{23} (*) che s'incontrano in un punto che chiamo ξ'_{123} . Il primo e il secondo triangolo sono prospettivi col triangolo G_{134} G_{135} G_{136} per la stessa retta g_{13} e i due centri di prospettiva sono evidentemente i punti $Z^I_{12,2}$, K^I_{12} , ma siccome i tre triangoli a due a due hanno la stessa retta di prospettiva, così i tre centri ξ'_{123} , $Z^I_{12,2}$, K^I_{12} sono situati in una retta cioè nella retta di Cayley-Salmon c_{123} . Ecco perchè abbiamo dati gli indici 123 al punto ξ' . Ora nelle tre rette z_1 che s'incontrano nel punto $Z^I_{12,2}$ havvi un altro triangolo di punti V_{23} , cioè $V'_{15.62.23} = z^I_{123,2}$ $z^{II}_{124,2}$, $V'_{46.53.23} = z^I_{123}$ z^{II}_{123} e $V'_{13.24.23} = z^I_{124,2}$ $z^{II}_{125,2}$, che è prospettivo col triangolo $P_{15.62}$ $P_{46.53}$ $P_{13.24}$ per un altro centro ξ''_{123} situato pure nella retta g_{23} . Parrebbe che essendo tre i punti Z_2 nella retta c_{123} dovessero esser 6 i punti ξ situati in essa, ma invece non sono che tre, perchè come si vede per i vertici dei due triangoli di punti V_{23} considerati passano rispettivamente le rette z_2 che s'incontrano nei punti $Z^{III}_{12,2}$ e $Z^{II}_{12,2}$. Ora se noi consideriamo invece le tre rette z_3 che s'incontrano nel punto $Z^I_{12,3}$ vediamo che in queste tre rette sono situati ordinatamente i punti $V_{53.24.23}$, $V_{62.31.23}$, $V_{15.64.23}$, che formano un triangolo prospettivo col triangolo $P_{53.24}$ $P_{62.31}$ $P_{15.64}$ e col triangolo G_{134} G_{135} G_{136} per la medesima ragione sopra esposta pel triangolo $V'_{53.24.23}$ $V'_{62.31.23}$ $V'_{15.64.23}$ e siccome i punti $P_{53.24}$, $V'_{53.24.23}$, $V_{24.53.23}$ ecc. sono situati nella retta y'_{16} ecc. così ne viene di conseguenza che il punto $Z^I_{12,3}$ è situato nella retta ξ'_{123} K^I_{12} cioè nella retta di Cayley-Salmon c_{123} , dunque:

Teorema XLV. I sessanta punti Z_3 sono situati tre a tre nelle venti rette di Cayley-Salmon.

Teorema XLVI. Le 45 rette y s'incontrano tre a tre in sessanta punti ξ che giacciono tre a tre nelle venti rette di Cayley-Salmon.

Abbiamo dimostrato che i triangoli

$$V'_{53.24.23} \quad V'_{62.31.23} \quad V'_{15.64.23} ; \quad V_{53.24.23} \quad V_{62.31.23} \quad V_{15.64.23}$$

sono prospettivi per il punto ξ'_{123} situato nella retta c_{123} , ora si dimostra che i triangoli

$$v_{53.24.12} \quad v_{62.31.12} \quad v_{15.64.12} ; \quad v'_{53.24.12} \quad v'_{62.31.12} \quad v'_{15.64.12}$$

sono prospettivi per una retta σ'_{123} che passa pel punto di Steiner G_{123} . Infatti si ha:

$$v'_{53.24.12} = Z^I_{34,2} \quad Z^{III}_{34,2}, \quad v'_{62.31} = Z^I_{45,2} \quad Z^{III}_{35,2}, \quad v'_{15.64.23} = Z^I_{35,2} \quad Z^{III}_{45,2}$$

e $v_{53.24.12} = K^I_{34} \quad K^{III}_{34}$, $v_{62.31} = K^I_{45} \quad K^{III}_{35}$, $v_{15.64.23} = K^{II}_{35} \quad K^{III}_{45}$ il primo triangolo ha i vertici K^{IV}_{34} , K^{V}_{35} , K^{VI}_{34} , ed il secondo i vertici $Z^{IV}_{34,2}$, $Z^{V}_{35,2}$, $Z^{VI}_{34,2}$ (vedi tabella num. 14), essi sono adunque prospettivi perchè le rette K^{IV}_{34} $Z^{IV}_{34,2} = c_{134}$, K^{V}_{35} $Z^{V}_{35,2} = c_{135}$, K^{VI}_{34} $Z^{VI}_{34,2} = c_{136}$ s'incontrano nel punto S_{13} , dunque i punti d'incontro dei lati corrispondenti cioè i punti Y'_{16} , Y'_{45} , Y'_{23} sono situati in una retta σ'_{123} . Il I e II triangolo sono prospettivi col triangolo c_{134} c_{135} c_{136} per il medesimo centro S_{13} , onde si conclude che le tre rette di prospettiva cioè $z^I_{345,2}$, p^I_{345} e σ'_{123} si devono incontrare in un punto cioè nel punto G_{123} dunque:

Teorema XLVII. I 45 punti Y sono posti tre a tre in sessanta rette σ che passano tre a tre per i venti punti di Steiner mentre tre rette y

(*) Gli accenti delle rette y sono affatto arbitrari, perchè i punti Y situati in un lato fondamentale per es. 14 li abbiamo denominati Y'_{14} , Y^{II}_{14} , Y^{III}_{14} , e le rette y corrispondenti si denominano con gli stessi indici.

s'incontrano in un punto ξ , i tre punti corrispondenti Y sono situati in una retta σ .

Ne possiamo anche concludere:

Teorema XLVIII. I sessanta punti Z_3 e le sessanta rette z_3 formano in guisa dei punti K e rette p , dei punti Z_2 e rette z_2 , sei figure π'' , che appartengono a sei sistemi polari.

I punti di Steiner e di Salmon, le rette di Cayley-Salmon, di Steiner-Plücker sono comuni ai tre sistemi $[Kp]$ $[Zz]_2$ $[Zz]_3$.

19. Andando innanzi bisogna vedere se abbiamo altri sistemi $[Zz]$ vale a dire se il sistema $[Zz]$ si chiude in se stesso, o se dà luogo ad un quarto sistema, come il primo ha dato luogo al secondo, e il secondo al terzo.

Per passare dal primo al secondo abbiamo considerato i triangoli

$$K^{II}_{13} K^{II}_{13} K^{II}_{14} ; K^{I}_{13} K^{I}_{14} K^{I}_{15}$$

ed abbiamo visto ch'essi non sono prospettivi pel punto K^{III}_{12} , ma bensì pel centro $Z^{III}_{12,2}$, che abbiamo fatto corrispondere alla retta p^{III}_{345} (vedi num. 10). Per passare invece dal secondo al terzo abbiamo considerato i triangoli

$$z^{II}_{245,2} z^{II}_{234,2} z^{II}_{235,2} ; z^{I}_{245,2} z^{I}_{235,2} z^{I}_{234,2} \quad (\text{vedi num. 16})$$

prospettivi, non per la retta $z^{III}_{345,2}$, ma bensì per la retta $z^{III}_{345,3}$, che abbiamo fatta corrispondere al punto $Z^{III}_{12,3}$; però la vera corrispondenza polare ha luogo solamente fra i punti Z e rette z delle 6 figure π di un medesimo sistema, noi abbiamo stabilito delle corrispondenze momentanee fra i punti e rette dei tre sistemi fin qui trovati appunto per ricavare la legge di formazione dei diversi sistemi. Ora adunque per vedere se il sistema $[Zz]_3$ dà luogo ad un quarto sistema bisogna considerare i triangoli

$$Z^{II}_{13,3} Z^{II}_{15,3} Z^{II}_{14,3} ; Z^{I}_{13,3} Z^{I}_{14,3} Z^{I}_{15,3}$$

e vedere se sono prospettivi o per il punto $Z^{III}_{12,3}$ ovvero per un altro punto. Qui la dimostrazione non è così facile come per i due primi casi ed ecco perchè abbiamo stabilita una certa corrispondenza tra i punti K e le rette z_3 , tra le rette p e i punti Z_3 , tra le rette z_2 e i punti Z_2 , tra le rette v_{12} e i punti V_{23} , tra i punti Y e le rette γ (vedi alla metà del num. 18.) Nella retta γ_{14} giace il punto $P_{33,62}$ ed i punti $V_{33,62,23}$ e $V'_{33,62,23}$ dunque si crederebbe che i punti Z_3 corrispondendo alle rette p dovessero esser situati quattro a quattro in quarantacinque rette corrispondenti ai punti P , ossia che i triangoli suddetti fossero prospettivi pel centro $Z^{III}_{12,3}$. Le figure corrispondenti così stabilite non differiscono che in questo, che nella retta γ_{14} esiste veramente il punto $P_{33,62}$, mentre noi non siamo certi che le rette $Z^{V}_{34,3} Z^{VI}_{45,3} = v_{26,33,34}$ e $Z^{III}_{45,3} Z^{II}_{34,3} = v'_{26,33,34}$ cadano insieme ed è mediante il punto $P_{33,62}$ che noi dimostreremo che ciò non può aver luogo.

Se ciò avesse luogo allora i 60 punti Z_3 sarebbero posti quattro a quattro in quarantacinque rette, e perciò i due triangoli suddetti di punti Z_3 sarebbero prospettivi per il punto $Z^{III}_{12,3}$. Mi pare anche che senza la considerazione dei punti P , o ciò che è lo stesso dei 6 punti fondamentali della conica, non si possa fare questa dimostrazione, almeno con gli elementi che abbiamo sin qui trovato. Perchè se si potesse fare la dimostrazione che le rette v_{34} suddette non cadono insieme senza i punti P , allora per la corrispondenza stabilita si potrebbe dimostrare che le rette di Pascal p^{V}_{125}

p^{VI}_{123} e p^{III}_{123} p^{II}_{125} non s'incontrano in un punto, o se si dimostrasse che le rette suddette v_{11} cadono insieme allora si potrebbe dimostrare anche che i punti $V_{26.35.11}$, $V'_{26.35.11}$ cadono insieme, ciò che in tutti e due i casi è impossibile.

Per adoperare la fig. 2^a invece di considerare il punto $P_{33.62}$ situato nella retta y'_{14} (vedi n. 18), considero il punto $P_{36.14}$. È facile di vedere che questo punto è situato nella retta y'_{25} che passa pel punto di Salmon S_{23} . Infatti consideriamo i due triangoli

$$G_{156} Z^{VI}_{45.2} K^{VI}_{45} ; G_{145} Z^{IV}_{35.2} K^{IV}_{23}$$

i cui lati sono rispettivamente

$$z^{VI}_{145.2}, p_{145}, c_{236}, z^{IV}_{135.2}, p_{135}, c_{234}$$

che s'incontrano nei tre punti $V_{36.14.23}$, $P_{36.14}$ ed S_{23} ; ma questi due triangoli sono prospettivi perchè le rette

$G_{156} G_{145} = g_{15}$, $v_{46.31.11} = Z^{VI}_{45.2} Z^{IV}_{35.2}$, $v'_{46.31.11} = K^{VI}_{45} K^{IV}_{35.2}$, s'incontrano in un punto Y della retta g_{15} , come è facile di vedere dagli indici delle rette v_{11} , per le regole date al num. 10; dunque i punti $V_{36.14.23}$, $P_{36.14}$, S_{23} sono situati nella retta y'_{25} .

Ora abbiamo:

$$V_{26.14.23} = z^{V}_{345.2} z^{I}_{125.2} z^{IV}_{135.2} z^{VI}_{145.2}, V'_{36.14.23} = z^{V}_{345.2} z^{I}_{125.2} z^{IV}_{135.2} z^{VI}_{145.2}$$

$$P_{36.14} = p^{V}_{345} p^{I}_{125} p^{IV}_{135} p^{VI}_{145}, S_{23} = c_{123} c_{234} c_{235} c_{236}$$

Prendiamo le coppie di rette $z^{V}_{345.2} z^{VI}_{145.2} = V_{36.14.23}$

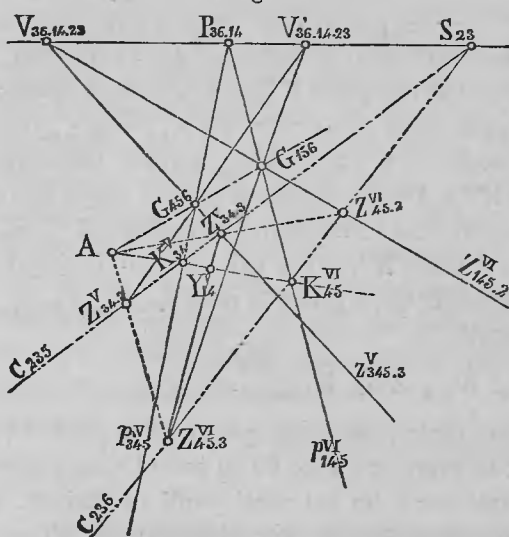
$$p^{V}_{345} p^{VI}_{145} = P_{36.14}$$

$$c_{235} c_{236} = S_{23}$$

Otteniamo così i due triangoli prospettivi cioè

$$G_{456} K^{V}_{34} Z^{V}_{34.2} ; G_{156} K^{VI}_{45} Z^{VI}_{45.2}$$

Fig. 4.



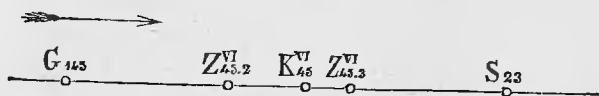
dati da quelle tre coppie di rette (fig. 4) quindi le rette g_{56} , $Z^{V}_{34.2} Z^{VI}_{45.2}$, $K^{V}_{34} K^{VI}_{45} = v_{26.35.11}$, s'incontrano in un punto A. Osserviamo che la retta g_{56} congiunge nella fig. 2^a i due punti di Steiner G_{156} , G_{456} , che non sono contenuti nella retta g_{14} ove è situato il punto Y'_{14} della retta $v_{26.35.11}$. Nella retta y'_{25} deve trovarsi anche il punto $V'_{36.14.23}$ e si deve avere la condizione che le rette $Z^{V}_{34.2} Z^{VI}_{45.2} = v_{26.35.11}$ debbono incontrarsi in un punto della retta $K^{V}_{34} K^{VI}_{45} = v_{26.35.11}$ ossia nel punto Y_{14} (1). Per la qual cosa i punti $Z^{V}_{34.2}$, $Z^{VI}_{45.2}$, $Z^{V}_{34.2}$, $Z^{VI}_{45.2}$ devono formare un quadrangolo di cui due diagonali sono

(1) Anche qui si vede che se la retta $z^{V}_{345.2}$ passasse pel punto $V_{36.14.23}$ invece di passare pel punto $V'_{36.14.23}$ ciò che vorrebbe dire che i punti $V_{36.14.23}$, $V'_{36.14.23}$ cadono insieme, allora il punto Y'_{14} cadrebbe nel punto A, ossia nel punto d'incontro delle tre rette g_{14} , g_{56} , g_{22} pel quale dovrebbe passare anche il lato 14, ciò che è impossibile.

la retta $v_{26.35.12}$ e la retta che congiunge il punto Y'_{14} col punto S_{23} vuol dire cioè che le coppie di punti $K^{VI}_{45} S_{23}$ e $Z^{VI}_{45.2}$, $Z^{VI}_{45.3}$ devono formare un gruppo armonico (vedi fig. 4), perchè $Z^{VI}_{45.2}$, $Z^{VI}_{45.3}$ sono due vertici di un lato del quadrangolo, e K^{VI}_{45} ed S_{23} sono i punti d'incontro di esso con le rette diagonali suddette.

Dunque proiettando i punti $Z^{VI}_{45.2}$, $Z^{VI}_{45.3}$, K^{VI}_{45} S_{23} p. es. dal punto G_{126} , nella retta y'_{25} si ha che le coppie di punti $P_{36.14}$ S_{23} , $V_{36.14.23}$ $V'_{36.14.23}$ formano un gruppo armonico. Ora se la retta $v_{26.35.34} = Z^{VI}_{34.3}$ $Z^{VI}_{45.3}$ cadesse nella retta di eguali indici $v'_{26.35.34}$, allora le coppie di rette $v_{26.35.34}$ g_{14} e $v_{26.35.12}$ $v'_{26.35.12}$, che s'incontrano nel punto Y'_{14} , dovrebbero formare un gruppo armonico. E questo si vede chiaramente perchè con analoga dimostrazione a quella data per dimostrare che i punti $P_{36.14}$ S_{23} , $V_{36.14.23}$ $V'_{36.14.23}$ formano due coppie conjugate di un gruppo armonico si dimostra che le coppie di punti $P_{26.35}$ S_{14} , $V_{26.35.23}$ $V'_{26.35.23}$ formano pure un gruppo armonico, e perciò si dimostrerebbe che se le rette $v_{26.35.34}$, $v'_{26.35.34}$ cadessero insieme, per la corrispondenza stabilita fra i punti K e le rette z , fra le rette p e i punti Z , ecc., che anche le coppie di rette $v_{26.35.34}$ g_{14} e $v_{26.35.12}$ $v'_{26.35.12}$ formerebbero un gruppo armonico, vale a dire (tagliando queste rette con la retta c_{236}) che le coppie di punti $Z^{VI}_{45.3}$ G_{145} , $Z^{VI}_{45.2}$ K^{VI}_{45} dovrebbero formare un gruppo armonico, perchè essi sono rispettivamente i punti d'incontro della retta c_{236} con le rette suddette. Ora secondo il teorema XXXIX il punto $Z^{VI}_{45.12}$ è il conjugato armonico del punto S_{23} rispetto ai punti K^{VI}_{45} , G_{145} . Stabiliamo un certo senso nella retta y'_{25} p. es. quello indicato dalla freccia (fig. 5). Se il punto K^{VI}_{45}

Fig. 5.



è dentro del segmento $Z^{VI}_{45.2}$ $Z^{VI}_{45.3}$ (ciò che si può sempre immaginare) nel senso preso allora il punto G_{145} dovrà cader fuori di

questo segmento. Ora per la proprietà riscentrata poco fa nella fig. 4 il punto $Z^{VI}_{45.3}$ è conjugato armonico del punto $Z^{VI}_{45.2}$ rispetto ai due punti K^{VI}_{45} , S_{23} , dunque questo punto $Z^{VI}_{45.3}$ è collocato fra i punti K^{VI}_{45} , S_{23} , ma se le rette $v_{26.35.34}$, $v'_{26.35.34}$ cadessero insieme allora, come abbiamo dimostrato, il punto $Z^{VI}_{45.3}$ sarebbe conjugato armonico del punto G_{145} rispetto ai punti K^{VI}_{45} , $Z^{VI}_{45.2}$, dunque dovrebbe cadere entro il segmento $Z^{VI}_{45.2}$ K^{VI}_{45} , mentre noi sappiamo che esiste entro il segmento K^{VI}_{45} S_{23} cioè fuori di quello $Z^{VI}_{45.2}$ K^{VI}_{45} ; dunque il punto $Z^{VI}_{45.3}$ non può essere il conjugato armonico del punto G_{145} rispetto ai punti K^{VI}_{45} , $Z^{VI}_{45.2}$ e perciò le rette $v_{26.35.34}$, $v'_{26.35.34}$ non possono cadere insieme, onde i triangoli

$$Z^{II}_{13.3} \ Z^{II}_{15.3} \ Z^{II}_{14.3}; \ Z^I_{13.3} \ Z^I_{14.3} \ Z^I_{15.3}$$

non sono prospettivi pel punto $Z^{III}_{12.3}$ come centro, ma bensì per un altro punto che chiamo $Z^{III}_{12.4}$. I punti Z , come ben si può prevedere sono 60 in tutto l'esagrammo sono posti tre a tre in 60 rette z , passanti tre a tre pei venti punti di Steiner, e che giacciono tre a tre nelle venti rette di Cayley-Salmon. Per dimostrare 1° ch'essi sono situati tre a tre in 60 rette basta adoperare una dimostrazione analoga a quella che abbiamo data per i punti Z al num. 13, solamente che invece delle rette v , considereremo le rette v , che sono formate con la medesima legge data dalla tabella num. 14; 2° che i punti Z , sono situati tre a tre nelle 20 rette di Cayley basta

adoperare la dimostrazione analoga data pei punti Z_2 al num. 11 dove invece dei punti K entrano i punti Z_3 ; 3° che le rette z_4 s'incontrano tre a tre nei venti punti di Steiner basta adoperare la dimostrazione duale a quella data alla fine del num. 18 per dimostrare che i punti Z_3 sono situati nelle venti rette di Cayley-Salmon, dove invece dei punti $V_{2,3}$ entrano le rette $v_{3,4}$ e invece dei punti P le rette $v_{1,2}$, ed invece dei punti G le rette c , e finalmente invece dei punti ξ le rette σ .

20. Ottenuto così il quarto sistema $[Zz]_4$, dobbiamo esaminare se i triangoli

$$z^{II}_{245,4} \quad z^{II}_{234,4} \quad z^{II}_{235,4}; \quad z^{I}_{245,4} \quad z^{I}_{235,4} \quad z^{I}_{234,4}$$

sono prospettivi per la retta $z^{III}_{345,4}$ ovvero per un'altra retta, e qui possiamo ripetere le stesse osservazioni fatte al num. 19. La dimostrazione è analoga a quella data per le rette z_2 , num. 16, dove in luogo dei punti $V_{2,3}$ entrano ora i punti $V_{4,5}$; onde i due triangoli suddetti sono prospettivi per un'altra retta $z^{III}_{345,5}$. Chiameremo $V_{4,5}$ i 90 punti nei quali s'incontrano due a due le sessanta rette z_4 con le sessanta rette z_5 , a guisa delle rette z_2 e z_3 , e chiameremo $v_{3,4}$ le 90 rette nelle quali sono situati due a due i punti Z_3 e i punti Z_4 , nello stesso modo che i punti K e Z_2 sono situati nelle rette $v_{1,2}$. Le rette $v_{3,4}$ passano rispettivamente due a due per i quarantacinque punti Y e i punti $V_{4,5}$ sono situati due a due nelle 45 rette y . I punti $V_{4,5}$ godono delle stesse proprietà enunciate pei punti $V_{2,3}$, cioè le coppie di punti $P_{36,14}$ S_{23} , $V_{36,14,45}$ $V'_{36,14,45}$ formano un gruppo armonico ossia le coppie di punti $V_{36,14,23}$ $V'_{36,14,23}$, $V_{36,14,45}$ $V'_{36,14,45}$, formano un'involuzione i cui punti doppi sono i punti $P_{36,14}$ ed S_{23} , ossia le coppie di punti $Z^{VI}_{45,2}$ $Z^{VI}_{45,3}$, $Z^{VI}_{45,4}$ $Z^{VI}_{45,5}$ nella retta di Cayley-Salmon c_{236} (vedi fig. 4) formano un'involuzione i cui punti doppi sono K^{VI}_{45} , S_{23} ; dunque se il punto $Z^{VI}_{45,5}$ è situato fra i punti K^{VI}_{45} , $Z^{VI}_{45,2}$ (vedi fig. 5), allora il punto $Z^{VI}_{45,4}$ sarà compreso entro il segmento K^{VI}_{45} $Z^{VI}_{45,3}$ e perciò fuori del segmento G_{145} $Z^{VI}_{45,3}$, poichè le coppie $Z^{VI}_{45,2}$ $Z^{VI}_{45,3}$, $Z^{VI}_{45,4}$ $Z^{VI}_{45,5}$ non possono separarsi. Se le rette $Z^{VI}_{45,5}$ $Z^{VI}_{34,5}$, $Z^{III}_{13,5}$ $Z^{II}_{34,5}$ cadessero in una sola retta $v_{26,35,56}$ allora questa retta a guisa del punto $P_{26,35}$ dovrebbe essere il quarto raggio armonico della retta g_{14} rispetto alle rette $v_{26,35,12}$, $v'_{26,35,12}$ ed alle rette $v_{26,35,34}$, $v'_{26,35,34}$ intorno al punto Y'_{14} (*). Tagliando questo fascio con la retta c_{236} si avrebbero le coppie di punti $Z^{VI}_{45,2}$ K^{VI}_{45} , $Z^{VI}_{45,3}$ $Z^{VI}_{45,4}$ in un'involuzione avente per punti doppi i punti $Z^{VI}_{45,5}$, G_{145} , i quali dovrebbero separare necessariamente le coppie suddette; ma mentre i punti $Z^{VI}_{45,5}$, G_{145} possono separare la coppia $Z^{VI}_{45,2}$ K^{VI}_{45} , come abbiamo già supposto, non separano però la coppia $Z^{VI}_{45,4}$ $Z^{VI}_{45,3}$ come abbi-
amo visto di sopra, onde non può essere che la retta $v_{26,35,56}$ cada con la retta $v'_{26,35,56}$; vuol dire adunque che i triangoli

$$Z^{II}_{12,5} \quad Z^{II}_{15,5} \quad Z^{II}_{14,5}; \quad Z^{I}_{13,5} \quad Z^{I}_{14,5} \quad Z^{I}_{15,5}$$

(*) Per dimostrare che le rette $Z^{VI}_{45,5}$ $Z^{VI}_{34,5}$, $Z^{III}_{13,5}$ $Z^{II}_{34,5}$ passano pel punto Y'_{14} basta fare le stesse considerazioni che abbiamo fatte al num. 18 per dimostrare che le rette $Z^{VI}_{45,3}$ $Z^{VI}_{34,3}$, $Z^{III}_{13,3}$ $Z^{II}_{34,3}$ passano per lo stesso punto Y'_{14} . Per dimostrare che se le due rette suddette cadessero insieme esse formerebbero con la retta g_{14} una coppia di raggi coniugati armonici rispetto alle rette $v_{26,35,12}$ $v'_{26,35,12}$ basta far corrispondere i punti Z_5 ai punti K e i punti Z_4 alle rette z_2 e i punti Z_3 alle rette z_3 (vedi fig. 4).

non sono prospettivi pel centro $Z^{III}_{12,3}$ ma bensì per un altro punto $Z^{III}_{12,6}$; onde si ottiene un altro sistema $[Zz]_6$, da questo mediante i punti $V_{6,7}$ si passa ad un altro sistema $[Zz]_7$, e da questo mediante le rette $v_{7,8}$ ad un ottavo, e così via (*). Abbiamo visto al num. 14 che due figure del sistema $[Kp]$ determinano mediante l'operazione delle rette $v_{1,2}$ 4 punti Z_2 che appartengono rispettivamente a quattro figure π' del sistema $[Zz]_2$ e viceversa due figure π' del sistema $[Zz]_2$ determinano 4 punti K che appartengono rispettivamente a quattro figure π del sistema $[Kp]$, onde cinque figure π (π') determinano secondo il teorema XXXVII una figura π' (π). Analogamente si dimostra che due figure del sistema $[Zz]_3$ determinano mediante l'operazione dei punti $V_{3,3}$ quattro rette $z_{3,3}$, che appartengono rispettivamente a quattro figure π'' del sistema $[Zz]_3$ e viceversa, e così due figure del sistema $[Zz]_3$ mediante l'operazione delle rette $v_{3,4}$ determinano quattro punti Z_4 , che appartengono rispettivamente a quattro figure del sistema $[Zz]_4$, e viceversa, e così via. Dunque:

Teorema XLIX. L'esagrammo si compone di un numero infinito di sistemi $[Zz]$. Le figure dei punti di Steiner e di Salmon sono comuni a tutti i sistemi $[Kp]$ $[Zr]_2$ $[Zr]_3$ ecc. Ciascun sistema è composto di sei figure π , I II III IV V VI che appartengono a sei sistemi polari, cinque di esse determinano una figura π del precedente e una del seguente sistema, ad eccezione del primo sistema cioè $[Kp]$, di cui cinque figure π determinano la sesta dello stesso sistema secondo il teorema XXIX, e una del sistema $[Zz]_2$ secondo il teorema XXXVII.

Osserviamo che il teorema XXVII vale per qualunque sistema, onde avremo:

Teorema L. Due figure π p. es. I e II di un sistema qualunque $[Zz]_{2m}$ ovvero $[Zz]_{2m+1}$ hanno i vertici di due quadrangoli di punti Z_{2m} , oppure Z_{2m+1} che rispettivamente ad esse appartengono, allineati due a due mediante le quattro rette di Cayley-Salmon di quelle due figure, che s'incontrano in un punto di Salmon e i triangoli formati da quei vertici sono prospettivi per le quattro rette z_{2m+1} ovvero z_{2m-1} che appartengono ordinatamente alle altre quattro figure π III IV, V VI del sistema $[Zz]_{2m+1}$ ovvero $[Zz]_{2m-1}$ determinate dalle due prime. I lati dei quadrilateri polari dei due quadrangoli suddetti rispetto alle due figure I e II, che sono rette z_{2m} , ovvero Z_{2m+1} s'incontrano due a due nella retta di Steiner-Plücker di esse, e i quattro centri Z_{2m-1} ovvero Z_{2m+1} di prospettiva sono situati nelle rette di Cayley-Salmon suddette.

Teorema LI. Le coppie de' punti $Z_2 Z_3, Z_4 Z_5, Z_6 Z_7$ ecc. degli stessi indici in una retta di Cayley-Salmon formano un'involuzione i cui punti doppi sono il punto K degli stessi indici dei punti Z e il punto di Salmon, ove il punto Z_2 è vertice del quadrangolo dei punti Z_2 determinato dalle due figure π del sistema $[Kp]$ a cui appartiene il punto di Salmon, nel modo indicato dal teorema XXVIII (Vedi NB).

(*) È evidente che niuno dei sistemi seguenti cade con uno dei precedenti, per dimostrarlo basta considerare la legge di formazione di essi (vedi tabella num. 14).

NB. Il punto Z_2 si può far corrispondere ad una retta p secondo il modo indicato dal teorema XXVIII, ad esso corrisponde nel sistema $[Zz]_2$ una retta z_2 , a questa retta si può far corrispondere un punto Z_3 secondo il teorema XLII, a questo corrisponde una retta z_3 nel sistema $[Zz]_3$, a questa si può far corrispondere un punto Z_4 nella stessa maniera che a z_2 si fa corrispondere un punto Z_3 e così via. Il punto K e il punto Z_2 che corrispondono alla retta p , i punti Z_3, Z_4 ecc. in tal modo considerati siano chiamati punti degli stessi indici, come anche le rette p, z_2, z_3, z_4 ecc. sopra considerate siano chiamate rette degli stessi indici.

Se si proiettano dal punto G_{125} le coppie di punti $KV_{34} S_{23}, ZV_{34,2}, ZV_{34,3}, ZV_{34,4}, ZV_{34,5}$ ecc. della retta di Cayley-Salmon c_{235} , ovvero le coppie di punti $K'_{12} S_{23}, Z'_{12,2}, Z'_{12,3}, Z'_{12,4}, Z'_{12,5}$ ecc. della retta c_{123} finalmente le coppie di punti $K'V_{35} S_{23}, Z'V_{35,2}, Z'V_{35,3}$ ecc. della retta c_{234} si ottiene il teorema seguente:

Teorema LII. Le coppie di rette $z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ ecc. degli stessi indici intorno ad un punto di Steiner formano un'involuzione i cui raggi doppi sono la retta di Pascal degli stessi indici e la retta di Cayley-Salmon.

Ovvero se si proiettano dal punto G_{125} le coppie di punti $KV_{34} G_{146}, ZV_{34,2} S_{23}$ della retta c_{235} che come sappiamo formano un gruppo armonico secondo il teorema XXXIX, si ha:

Teorema LIII. Una retta di Pascale e una retta determinata di Steiner-Plücker che s'incontrano in un punto G formano un gruppo armonico con la retta z_2 degli stessi indici della retta di Pascale e la retta di Cayley-Salmon intorno al punto G . Abbiamo pure:

Teorema LIV. Tutte le rette v_{12}, v_{34}, v_{56} ecc. degli stessi indici dei sistemi dell'esagrammo s'incontrano in un punto Y pel quale passa una retta di Steiner-Plücker (Vedi NB).

Teorema LV. Tutti i punti V_{23}, V_{45}, V_{67} ecc. dei sistemi $[Zz]$ e il punto P degli stessi indici sono situati in una retta y che contiene un punto di Salmon (Vedi NB).

NB dei teoremi LIV, LV. Siano date quattro rette di Pascal che s'incontrano in un punto P , a queste quattro rette corrispondono quattro punti di Kirkman situati due a due in due rette v_{12} , che corrispondono al punto P e che si chiamano rette di eguali indici. Esse contengono due a due i punti Z_2 secondo il teorema XXIV. Alle coppie di punti Z_2 situate in due rette v_{12} di eguali indici corrispondono due coppie di rette z_2 , che danno luogo a due punti V_{23} , che corrispondono alla lor volta alle rette v_{12} suddette e che si chiamano punti di eguali indici. Per essi passano due a due quattro rette z_3 , a queste quattro rette z_3 , corrispondono quattro punti Z_4 situati due a due in due rette v_{34} che corrispondono così ai punti V_{23} e che si chiamano di eguali indici, e così via. I punti P, V_{23} , ecc. così ottenuti si chiamano punti degli stessi indici, come anche le rette v_{12}, v_{34} ecc. testè considerate si chiamano rette degli stessi indici.

Se si considera la fig. 4 si nota, che intorno al punto Y'_{14} situato nella retta $KV_{34} K'V_{45} = v_{26.35.12}$ la coppia di rette $ZV_{45,2}, ZV_{34,3}, ZV_{45,3}, ZV_{34,2}$ cioè la coppia di rette $v_{26.35.12}$ e $v_{26.35.34}$ è divisa armonicamente dalla retta $KV_{34} K'V_{45}$ e dalla retta che unisce il punto Y'_{14} con S_{23} . Dunque:

Teorema LVI. Una retta v_{11} , con la retta che unisce il suo punto Y_{14} col punto di Salmon, situato nella retta y corrispondente al punto Y secondo il teorema XLIV, forma una coppia che separa armonicamente tutte le coppie di rette $v'_{12} v_{34}, v'_{34} v_{56}, v'_{56} v_{78}$ ecc. tali che rispettivamente nella prima e seconda, terza e quarta, quinta e sesta ecc. delle rette v siano contenuti rispettivamente i punti Z del II° e III°, IV° e V, VI° e VII° sistema $[Zz]$ degli stessi indici dei due punti K della retta v_{11} .

Dalla fig. 4 risulta pure:

Teorema LVII. Le coppie di punti $V_{23} V'_{23}, V_{45} V'_{45}$ ecc. di una retta y formano un'involuzione che ha per punti doppi il punto P e il punto di Salmon.

Abbiamo visto al num. 18 che le rette $V_{25.14.23} - V_{36.14.23} = n_{14.23}, V'_{25.14.23} - V'_{36.14.23} = n'_{14.23}, V_{14.56.23} - V_{14.32.23} = n^*_{14.23}, V'_{14.56.23} - V'_{14.32.23} = n'^*_{14.23}$ s'incontrano nel punto Y'_{14} e che i punti $v_{25.14.12} - v_{36.14.12} = N_{14.12}, v'_{25.14.12} - v'_{36.14.12} = N'_{14.12}$ e $v'_{56.14.12} - v'_{14.32.12} = N^*_{14.12}, v_{14.56.12} - v_{14.32.12} = N^*_{14.12}$ sono situati nella retta y'_{14} . Dunque abbiamo quattro sole rette n_{23} che s'incontrano nel punto y'_{14} , egli risulta dal num. 15 che non passano per alcun altro punto Y , analogamente dicasi per i punti N_{11} , dunque si ha:

Teorema LVIII. I 90 punti V_{23}, V_{45} ecc. sono situati due a due rispettivamente in 180 rette n_{23}, n_{45} ecc. passanti quattro a quattro per i 45 punti Y . Per un punto V_{23}, V_{45} ecc. passano quattro rette n_{11}, n_{45} ecc.

Teorema LIX. Le 90 rette v_{12}, v_{34} ecc. s'incontrano due a due rispettivamente in 180 punti N_{12}, N_{34} ecc. che quattro a quattro sono situati nelle 45 rette y . In una retta v_{12}, v_{34} ecc. sono situati quattro punti N_{12}, N_{34} ecc.

È facile il dimostrare i seguenti teoremi:

Teorema LX. Una coppia di rette di Pascal intorno ad un punto G forma con una delle tre rette di Steiner-Plücker e una retta σ intorno ad esso un gruppo armonico.

Teorema LXI. Una coppia di punti di Kirkman in una retta di Cayley-Salmon forma con un punto di Salmon e un punto ξ di essa un gruppo armonico.

Per i vertici di un triangolo di punti V_{23} ovvero V_{45} ecc. che hanno gli stessi indici dei vertici P di un triangolo Δ_{ik} , passano 12 rette z , sei di queste sono rette z_2 , le sei altre sono rette z_3 , ovvero sei sono rette z_4 e le altre sei sono rette z_5 , secondo che si considerano i punti V_{23} , o V_{45} ecc. Queste 6 rette z_2 e 6 rette z_3 s'incontrano in un punto Z_2 e in tre punti Z_3 o viceversa in un punto Z_3 e in tre punti Z_2 , secondo i punti V_{23} che si prendono per comporre il triangolo suddetto, perchè ad ogni punto P corrispondono due punti V_{23} secondo il teorema XII. Ciò risulta dall'osservazione fatta al principio del numero 18. Questo vale anche per le rette z_3 e z_4 ecc. che s'incontrano quattro a quattro nei vertici del triangolo di punti V_{45} ecc. poichè l'osservazione fatta al num. 18 si può ripetere anche per le

rette z_3 e z_4 ecc. Quelle dodici rette z s'incontrano anche in quattro punti di Steiner coniugati di quelli che appartengono alle due figure π , che hanno per triangolo Δ_{ik} , il triangolo Δ_{ik} suddetto, perchè gli indici delle dodici rette z che passano per i vertici del triangolo V_{13} o V_{45} , ecc. sono gli stessi di quelli delle rette di Pascal che passano per i vertici del triangolo Δ_{ik} . Questo si può ripetere correlativamente per le rette v_{12} o v_{34} ecc. dunque:

Teorema LXII. Le sei rette z_2 e le sei rette z_3 che passano due a due per i vertici di un triangolo di punti V_{23} , ovvero le sei rette z_4 e le sei rette z_5 che passano due a due per i tre vertici di un triangolo di punti V_{45} , e così via, che hanno gli stessi indici dei tre vertici P di un triangolo Δ_{ik} , s'incontrano rispettivamente in un punto Z_2 e in tre punti Z_3 o viceversa in un punto Z_3 e in tre punti Z_2 , ovvero le sei rette z_4 e le sei rette z_5 s'incontrano in un punto Z_4 e in tre punti Z_5 o viceversa in un punto Z_5 e in tre punti Z_4 e così via. Le dodici rette nel primo caso come nei seguenti s'incontrano tre a tre nei quattro punti di Steiner coniugati di quelli delle due figure π del sistema $[Kp]$ che hanno in comune il triangolo Δ_{ik} di punti P suddetto.

Teorema LXIII. I sei punti K e i sei punti Z_2 situati in tre rette v_{12} , ovvero i sei punti Z_3 e i sei punti Z_4 situati in tre rette v_{34} , e così via, le quali hanno gli stessi indici dei tre punti P di un triangolo Δ_{ik} , sono collocati rispettivamente in una retta p e in tre rette z_2 , oppure in una retta z_2 e in tre rette p ; ovvero i sei punti Z_3 e i sei punti Z_4 sono situati in una retta z_3 e in tre rette z_4 oppure in una retta z_4 e in tre rette z_3 ecc. I dodici punti tanto nel primo caso come nei seguenti, sono situati tre a tre in quattro rette di Cayley-Salmon, che contengono rispettivamente i quattro punti di Steiner comuni alle due figure π del sistema $[Kp]$ che hanno per triangolo Δ il triangolo Δ_{ik} suddetto.

Teorema LXIV. Ogni sistema $[Zz]_m$ dà luogo a sei coniche π differenti da quelle di qualunque altro sistema.