Univerzitet u Prištini
Fakultet tehničkih nauka
Kosovska Mitrovica

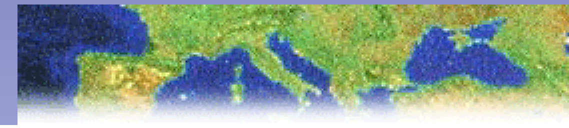
Mr Srđan V. Jović

ENERGIJSKA ANALIZA DINAMIKE VIBROUDARNIH SISTEMA SA KRIVOLINIJSKIM PUTANJAMA I NEIDELANIM VEZAMA

Prezentacija doktorske disertacije

Mentor
Prof.dr Vladimir M. Raičević

***Kosovska Mitrovica*, 2010.**



Ministarstvo za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije

Republika Srbija

Rezultati istraživanja teme doktorske disertacije urađeni su u okviru projekta ON144002 "Problemi teorijske i tehničke mehanike krutih i čvrstih tela. Mehanika materijala", (2006-2010), koji finansira Ministarstvo za nauku i tehnologiju Republike Srbije.

Rukovodilac projekta

prof. dr Katica (Stevanović) Hedrih.

Članovi Komisije za pregled, ocenu i odbranu doktorske disertacije su:

Prof.dr Katica (Stevanović) Hedrih

Naučni savetnik u Matematičkom institutut SANU, Beograd
i u zvanju redovni profesor Mašinskog fakulteta u Nišu
Član Akademije nauka visokih škola Ukrajine
Oblast kompetencije: *Teorijska i primenjena mehanika*, *Nelinearna dinamika*

Prof.dr Vladimir Raičević

redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Kosovskoj Mitrovici
Univerzitet u Prištini
Oblast kompetencije: *Teorijska i primenjena mehanika*

Prof.dr Zlatibor Vasić

redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Kosovskoj Mitrovici
Univerzitet u Prištini
Oblast kompetencije: *Teorijska i primenjena mehanika*

Sadržaj

- ***Uvod***
  - ***Osnovi teorije dinamike sudara dva materijalna sistema i metode za izučavanje dinamike vibroudarnih sistema***
  - ***Slobodne oscilacije materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama***
- ***Energijska analiza dinamike vibroudarnih sistema sa krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama***
- ***Zaključna razmatranja***

Uvod

Problemi dinamike vibroudarnih sistema predstavljaju posebnu oblast primenjene teorije oscilacija.

Vibroudarni sistemi ili ***oscilatori sa udarima (sudarima)*** su dinamički sistemi, kod kojih su moguća oscilatorna kretanja praćena sudarima pokretnih masa ili njihovim udarima o nepokretne ograničivače, odnosno dinamički sistemi koji vrše oscilatorna kretanja za čije periode se dešavaju udari. To su ***diskretni sistemi*** koji spadaju u grupu ***nelinearnih sistema*** zbog nelinearne prirode udara.

Vibroudarni sistem se može smatrati ***sistemom apsolutno krutih tela*** ili materijalnih tačaka povezanih elastičnim vezama ako se ***uvodi aproksimacija*** da se ***(s)udar smatra trenutnim*** i da pri udaru materijalne tačke o ograničivač elongacije nastaje ***trenutna promena normalne komponente brzine***.

Teorijska saznanja o vibroudarnim sistemima su od posebne važnosti za inženjersku praksu zbog široke primene vibroudarnih dejstava koja se koriste za ostvarivanje samog tehnološkog procesa.

Uvod

Na bazi vibroudarnih sistema konstruišu se razne vibracione mašine kod kojih radni deo mora da vrši periodične udare zbog ostvarivanja samog tehnološkog procesa. Uopšteno ***primere korišćenja vibroudarnih sistema*** možemo da vidimo kod:

- transportnih sistema;
- građevinskih mašina;
- livačkih mašina;
- vibroinstrumenata i dr.

U ovom radu je korišćen termin ***nelinearni vibroudarni sistem*** što podrazumeva da je ***bezudarno kretanje***, kretanje u intervalima između udara, ***opisano nelinearnom diferencijalnom jednačinom***. (Jaku nelinearnost karakteriše oscilatorno kretanje prekidano udarima, zbog same prirode udara).

Uvod

Ako je kretanje u intervalima između (s)udara ***slobodno***, onda su diferencijalne jednačine kretanja sistema ***obične homogene nelinearne drugog reda***, koje se mogu rešiti u analitičkom obliku.

Analiza ovakvih vibroudarnih sistema je vršena uz pomoć ***"tačnih" metoda*** za izučavanje vibroudarne dinamike.

Od "*tačnih*" metoda koristili smo:

- analitičku metodu "*podešavanja*" i
- metodu *fazne ravni*.

Oslanjanjući se na metodu Runge-Kutta četvrtog reda sa promenljivim korakom

Ako je kretanje u intervalima između (s)udara ***prinudno*** onda su diferencijalne jednačine kretanja sistema ***obične nehomogene nelinearne drugog reda***, koje se ne mogu rešiti u analitičkom obliku.

Analiza ovakvih vibroudarnih sistema je vršena uz pomoć ***numeričkih metoda*** za izučavanje vibroudarne dinamike, korišćenjem softverskog alata u vidu paketa:

MathCad; MATLAB; Wolfram mathematica.

Uvod

Na osnovu dosadašnjih saznanja o teoriji vibroudarnih sistema i oslanjajući se na originalne radove na tu temu autora: František Peterke, Katice (Stevanović) Hedrih, Alz Nayfeh sa saradnicima, Dimentberg M.F i Menyailov A.I., Foole S. i Bishop S., Lieber P. i Jensen, D., Luo G.W. i Xie J.H., Nordmark A.B., Pavlovskaia E., Wiercigroch M., i drugih, možemo da kažemo da se danas sve više ***uvećava interes za izučavanje prenosa energije unutar složenih sistema i nelinearnih modova***. Zato je od važnosti izučiti energijsku analizu dinamike vibroudarnih procesa u vibroudarnim sistemima i sa jednim i sa više stepeni slobode kretanje, kao i neidealnim vezama.

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Na osnovu ***naučnih rezultata prof.dr Katice (Stevanović) Hedrih***, prikazanih u konsultacijama, kao i u publikovanim referencama, prikazane su diferencijalne (dvojne) jednačine kretanja, kao i (dvojne) jednačine faznih trajektorija

slobodnih oscilacija teške materijalne tačke po krivolinijskim hrapavim linijama u vertikalnim ravnima i sa neidealnim vezama,

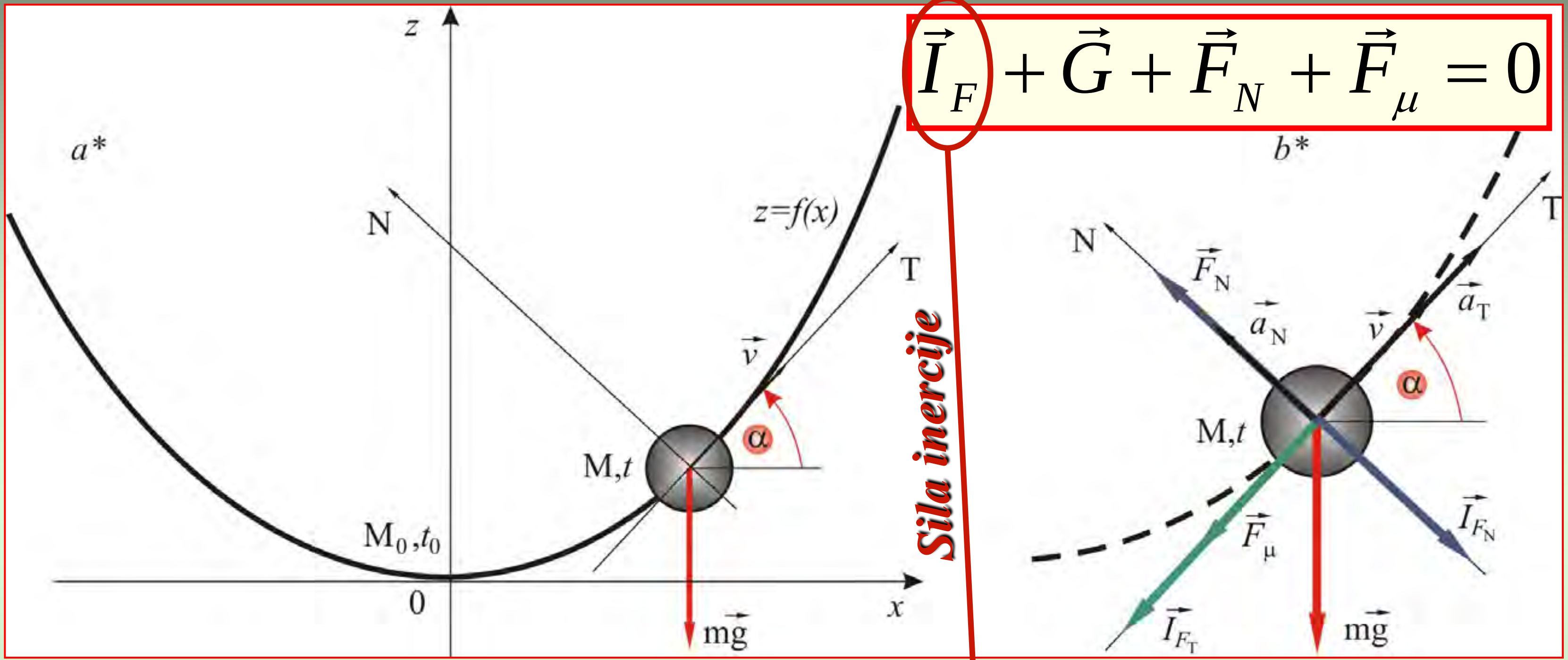
kao i posebni primeri kretanja po

hrapavoj paraboličoj liniji, hrapavoj cikloidnoj liniji i hrapavoj kružnoj liniji.

Hrapava kriva linija z=f(x)

Teška materijalna tačka M, mase *m*, kreće se duž hrapave krive linije sa trenjem klizanja *Coulomb*-ovog tipa koeficijenta μ .
Za formiranje diferencijalne (dvojne) jednačine kretanja koristimo ***princip dinamičke ravnoteže***.

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama



Slobodno kretanje teške materijalne tačke duž hrapave krive linije: a izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

$$\vec{I}_F = -m\vec{a}_N - m\vec{a}_T = -m\frac{v^2}{R_k}\vec{N} - m\dot{v}\vec{T}$$

gde je R_k poluprečnik (radijus) putanje krive linije u tački trenutnog položaja teške materijalne tačke. $\vec{N}$ i $\vec{T}$ su jedinični vektori (ortovi) glavne normale i tangente na putanju krive linije u trenutnom položaju.

Slobodne oscilacije materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

$$\left(-m\ddot{s}\vec{T}\right)+\left(-m\frac{v^2}{R_k}\vec{N}\right)+mg\left(-\sin\alpha\vec{T}-\cos\alpha\vec{N}\right)+F_N\vec{N}-\mu\left|\vec{F}_N\right|\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}=0$$

Skalarnim množenjem jednačine sa jediničnim vektorima $\vec{N}$ i $\vec{T}$, i sređivanjem jednačina, dobijamo traženu ***diferencijalnu (dvojnu) jednačinu kretanja***.

$$\boxed{\ddot{s}+g\sin\alpha\pm\mu\left(\frac{v^2}{R_k}+g\cos\alpha\right)=0}$$

s -krivolinijska (lučna) koordinata $\longrightarrow$ $\left(ds=dx\sqrt{1+z'^2}\right)$

Rešenje diferencijalne (dvojne) jednačine kretanja predstavlja ***(dvojnu) jednačinu faznih trajektorija*** i ima oblik

$$\dot{x}^2(x)=e^{-\int\frac{2}{\sqrt{1+z'^2}}\left[\frac{d}{dx}\sqrt{1+z'^2}\pm\mu\frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}}\right]dx}\left[-2g\int\frac{1}{\left(1+z'^2\right)}\left(z'\pm\mu\right)e^{\int\frac{2}{\sqrt{1+z'^2}}\left[\frac{d}{dx}\sqrt{1+z'^2}\pm\mu\frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}}\right]dx}dx+C\right]$$

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja odgovarajućeg *fiktivnog konzervativnog sistema* (izostavljajući deo koji ukazuje na nelinearnost sistema) ima oblik

$$\ddot{x}+\frac{g}{\left(1+z'^2\right)}\left(z'\pm\mu\right)=0$$

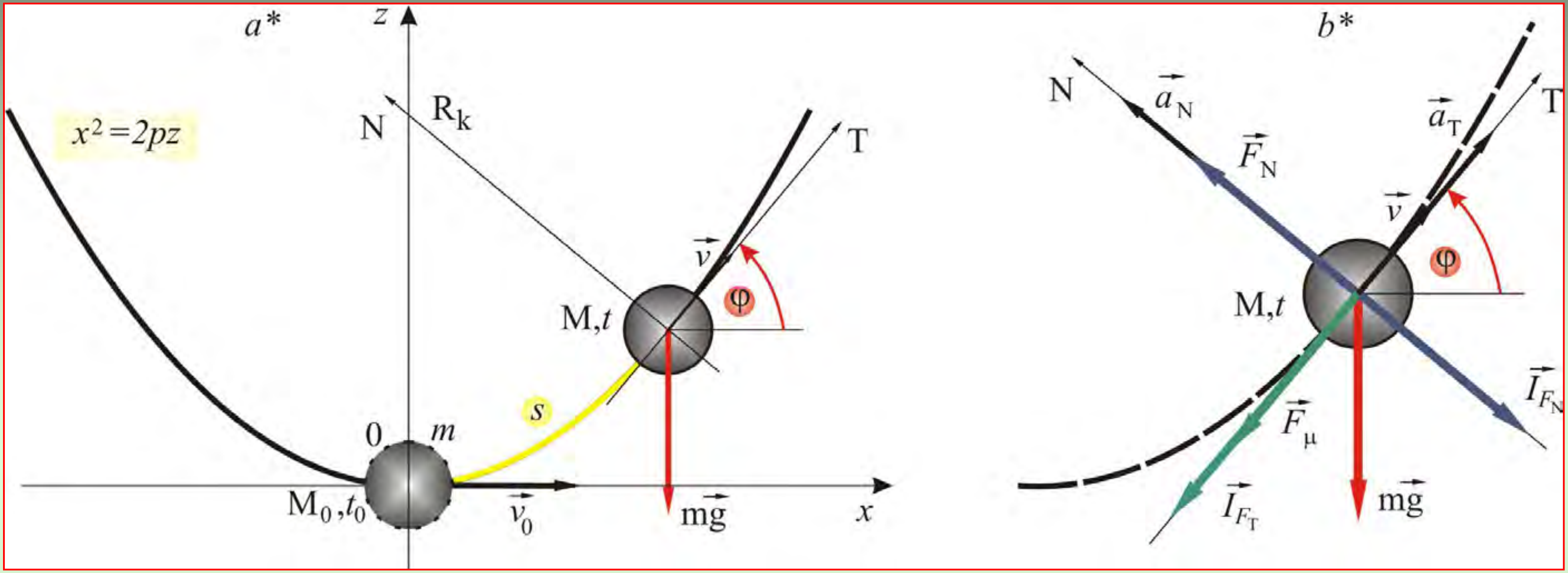
A odgovarajuća ***(dvojna) jednačina faznih trajektorija*** ima oblik

$$\dot{x}^2(x)-\dot{x}^2(x_0)+2g\int_{x_0}^{x}\frac{\left(z'\pm\mu\right)}{\left(1+z'^2\right)}dx=0$$

Parabolična hrapava linija

Teška materijalna tačka M, mase *m*, kreće se duž parabolične hrapave linije sa trenjem klizanja *Coulomb*-ovog tipa koeficijenta μ .
Opšta jednačina parabole ima oblik $x^2=2pz$ gde je $2p\,[m]$ -parametar parabole koji je jednak četvorostrukoj udaljenosti fokusa od vrha parabole.

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama



Slobodne oscilacije teške materijalne tačke duž parabolične hrapave linije: a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

Za generalisanu koordinatu (sistem ima jedan stepen slobode kretanja) usvajamo parametar $\boxed{\varphi}$ (ugao koji gradi pravac tangente sa pravcem paralelnim sa osom Ox)

Brzina teške materijalne tačke se računa po formuli

$$\dot{s} = \frac{p}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 + tg^2\varphi}\,\dot{\varphi} = \frac{p}{\cos^3\varphi}\dot{\varphi}$$

Slobodne oscilacije materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja teške materijalne tačke po paraboličnoj hrapavoj liniji je

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{1}{p}\sqrt{p^2+x^2}\right)+\frac{gx}{\sqrt{p^2+x^2}}\pm\frac{\mu}{\sqrt{p^2+x^2}}\left(\dot{x}^2+gp\right)=0}$$

ili u funkciji generalisane koordinate $\boxed{\varphi}$

$$\boxed{\ddot{\varphi}+\left(3tg\varphi\pm\mu\right)\dot{\varphi}^2+\frac{g\cos^3\varphi}{p}\left(\sin\varphi\pm\mu\cos\varphi\right)=0,\quad\begin{cases}za\ v>0\\ za\ v<0\end{cases}}$$

U diferencijalnoj jednačini možemo identifikovati član koji uvodi u posmatrani sistem nelinearnost i proporcionalan je kvadratu ugaone brzine $\boxed{\left(\dot{\varphi}^2\right)}$. Ovo kretanje odgovara slučaju poznatom u literaturi kao ***"turbolentno prigušenje"*.**

Rešavanjem diferencijalne (dvojne) jednačine dobijamo ***(dvojnu) jednačinu fazne trajektorije*** u faznoj ravni $\left(x,\dot{x}\right)$

Slobodne oscilacije materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

$$\boxed{\dot{x}^2 = \frac{1}{\left(p^2+x^2\right)} e^{\pm 2\mu\, arctg\left(\frac{p}{x}\right)} \left[gp\left(p^2+x^2\right)\left(-e^{\mp 2\mu\, arctg\left(\frac{p}{x}\right)}\right) + C \right]}$$

ili u funkciji generalisane koordinate $\boxed{\varphi}$

$$\dot{\varphi}^2 = \cos^6\varphi\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi} + Ce^{\mp 2\mu\varphi}\right) \quad \begin{cases} za\ \ v>0 \\ za\ \ v<0 \end{cases}$$

C **-integraciona konstanta koja zavisi od početnih uslova kretanja**

Usled uticaja sile trenja u toku kretanja teške materijalne tačke po neidealnoj paraboličnoj hrapavoj liniji sa koeficijentom trenja klizanja *Coulomb*-ovog tipa $\mu = tg\alpha_0$ ***dolazi do bifurkacije ravnotežnog položaja*** $(s=0)$ Jedan položaj stabilnog ravnotežnog stanja se gubi i kao rezultat bifurkacije javljaju se dva nova, jednostrano stabilna i jednostrana položaja ravnoteže u alternaciji zavisno ... nja materijalne tačke

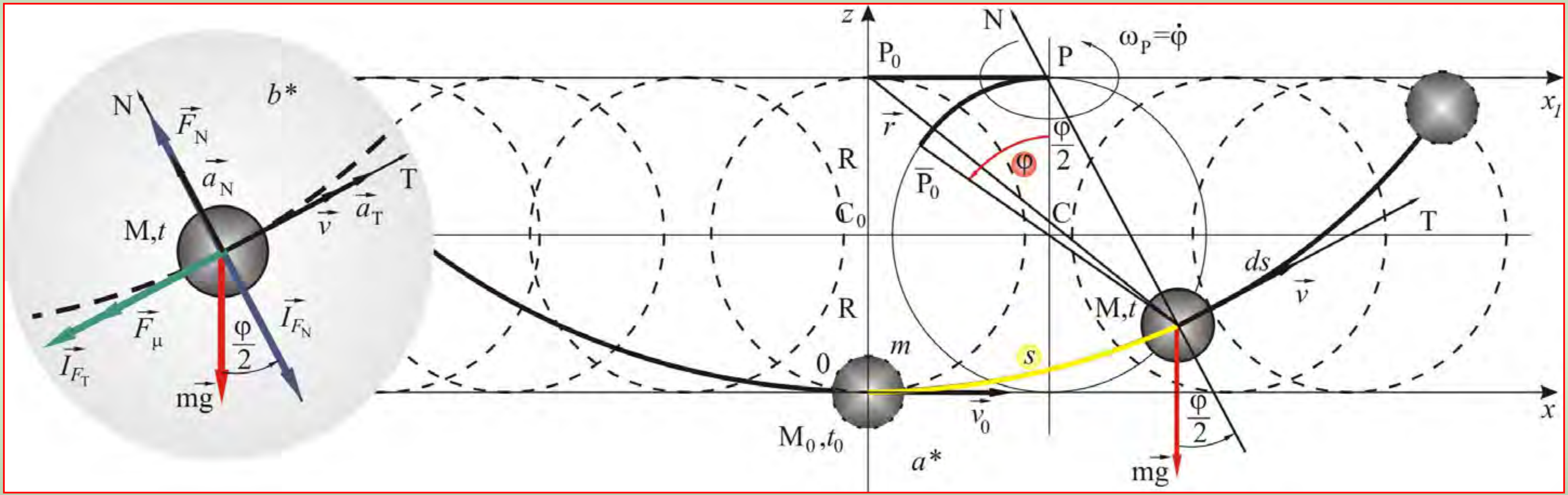
$$\boxed{x_s = \mp p\, tg\alpha_0} \qquad \boxed{z_s = \frac{1}{2} p\, tg^2\alpha_0}$$

zaključiti da se radi o položaju ravnoteže sa diskontinuite...

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Cikloidna hrapava linija

Teška materijalna tačka M, mase *m*, kreće se duž cikloidne hrapave linije sa trenjem klizanja *Coulomb*-ovog tipa koeficijenta μ .



Slobodne oscilacije teške materijalne tačke duž cikloidne hrapave linije:
a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

Posmatrani **sistem ima jedan stepen slobode kretanja**. Parametarske jednačine cikloide su

$$\boxed{x = R(\varphi + \sin\varphi)} \qquad \boxed{z = R(1 - \cos\varphi)}$$

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Za generalisanu koordinatu usvajamo parametar $\boxed{\varphi}$ (ugao koji gradi pravac $\overline{MP_0}$ sa vertikalom), a koji definiše položaj teške materijalne tačke koja se nalazi na krugu poluprečnika R, koji vrši ravno kretanje po osi O_{x_1}.

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja teške materijalne tačke po cikloidnoj hrapavoj liniji je

$$\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{2}tg\frac{\varphi}{2} \mp \mu\right) + \left(tg\frac{\varphi}{2} \pm \mu\right)\frac{g}{2R} = 0, \quad \begin{cases} za\ v = 2R\cos\dfrac{\varphi}{2}\dot{\varphi} > 0 \\ za\ v = 2R\cos\dfrac{\varphi}{2}\dot{\varphi} < 0 \end{cases}$$

Rešavanjem diferencijalne (dvojne) jednačine dobijamo ***(dvojnu) jednačinu fazne trajektorije***

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{\left(\dfrac{g}{2R}\right)}{1+4\mu^2}\frac{1}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}\left[(\pm 3\mu)\sin\varphi - \left(1-2\mu^2\right)\cos\varphi + \frac{1+4\mu^2}{2} + Ce^{\mp 2\mu\varphi}\right] \quad \begin{cases} za\ v = 2R\cos\dfrac{\varphi}{2}\dot{\varphi} > 0 \\ za\ v = 2R\cos\dfrac{\varphi}{2}\dot{\varphi} < 0 \end{cases}$$

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Jedan položaj stabilnog ravnotežnog stanja se gubi, i kao rezultat **bifurkacije** uzrokovane hrapavošću cikloide ***javljaju se dva nova*** jednostrano stabilna i jednostrana položaja ravnoteže u alternaciji zavisno od smera kretanja materijalne tačke

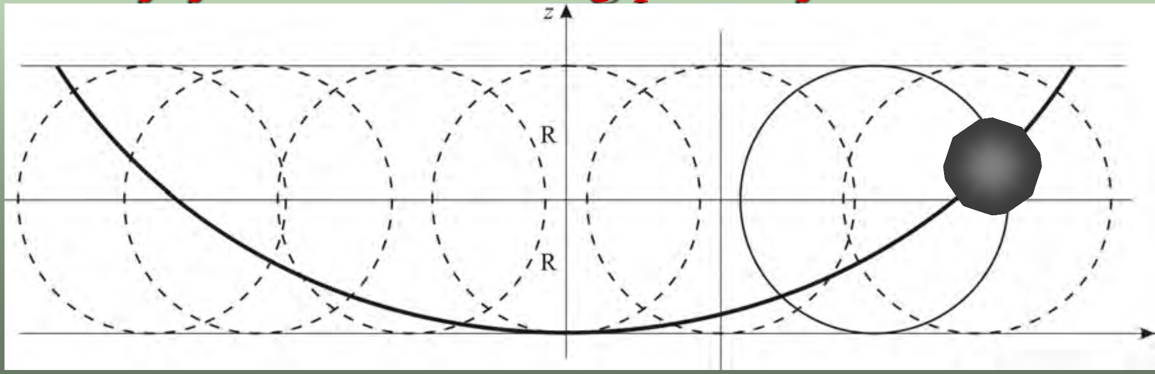
$$\boxed{s(\varphi_s) = s_s = 4R\sin\frac{\varphi_s}{2} = \mp 4R\sin\alpha_0}$$

Analiza vremena „spuštanja“ – dva slučaja

Analiziramo ***za koje će vreme*** $\boxed{t_{cikl} = f(\varphi)}$ ***teška materijalna tačka*** u vertikalnoj ravni, mase *m*, krećući se po cikloidnoj liniji ***da pređe rastojanje iz bilo kog položaja na njoj do ravnotežnog položaja***.

1* ***Slučaj idealne veze;***

2* ***Slučaj neidealne- -hrapave veze*** $\boxed{\mu = tg\alpha_0}$



Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Prvi slučaj (idealna veza) ***Drugi slučaj (neidealna-hrapava veza)***

Jednačina fazne trajektorije

$$\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\left[\frac{g}{2R}\cos\varphi + C\right]$$

$$C(\varphi_0, 0)$$

Uslov za dobijanje integracione konstante

$$\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{\left(\frac{g}{2R}\right)}{1+4\mu^2}\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\left[(+3\mu)\sin\varphi - (1-2\mu^2)\cos\varphi + \frac{1+4\mu^2}{2} + Ce^{-2\mu\varphi}\right]$$

$$t_{cikl_1} = \int_{\varphi}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\frac{g}{2R}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}$$

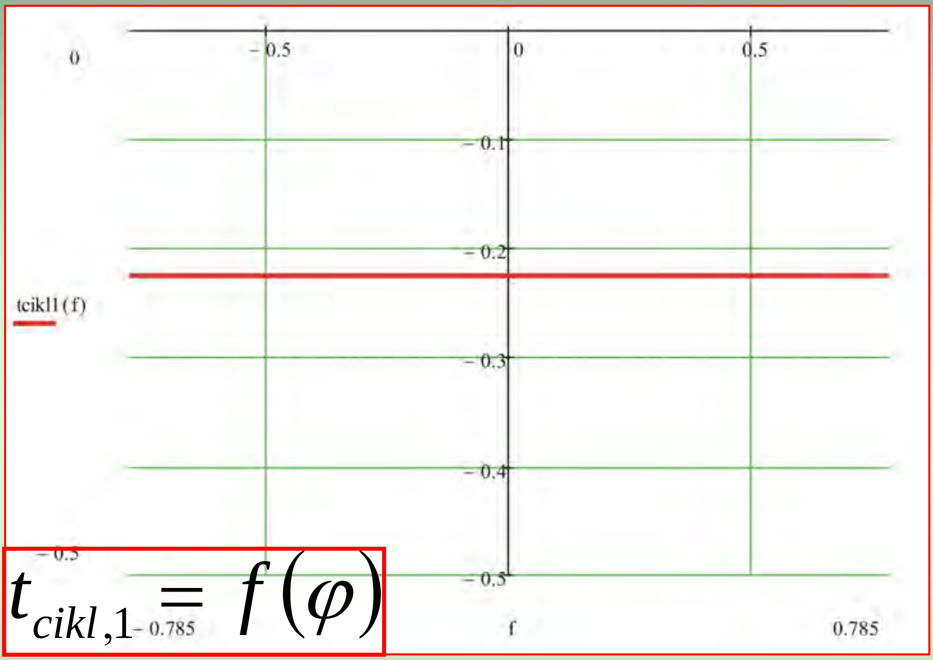
Funkcionalna zavisnost

$$t_{cikl} = f(\varphi)$$

$$t_{cikl_2} = \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{-\frac{\left(\frac{g}{2R}\right)}{1+4\mu^2}\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\left[(3\mu)\sin\varphi - (1-2\mu^2)\cos\varphi + \frac{1+4\mu^2}{2} + Ce^{-2\mu\varphi}\right]}}$$

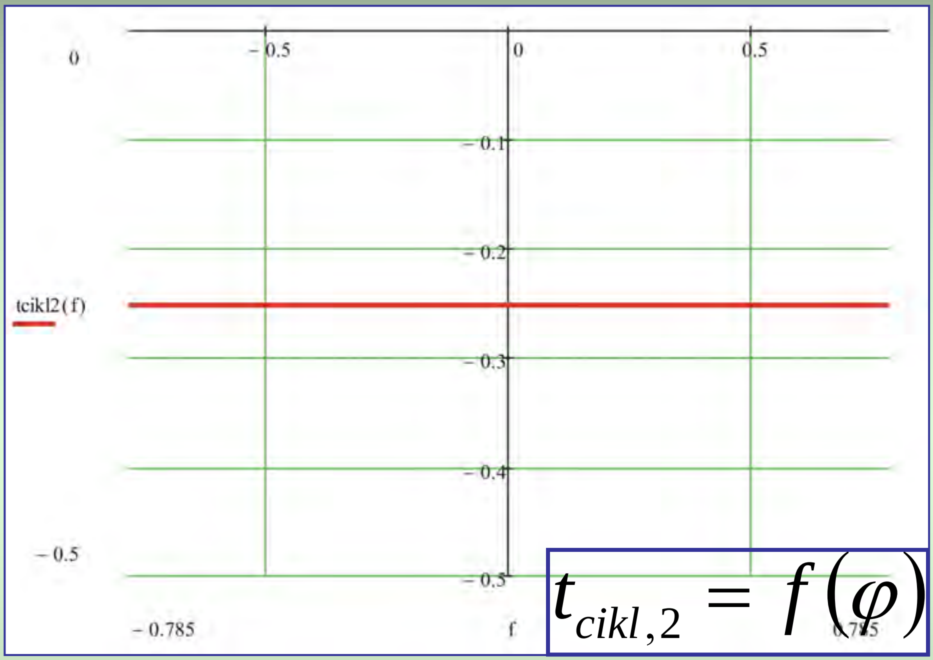
Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Prvi slučaj (idealna veza)



$$t_{cikl,1} = f(\varphi)$$

Drugi slučaj (neidealna-hrapava veza)



$$t_{cikl,2} = f(\varphi)$$

Kriva promene (Koristimo program is softvera MathCad)

Vrednosti parametara koji su korišćeni za crtanje ovih krivih su:

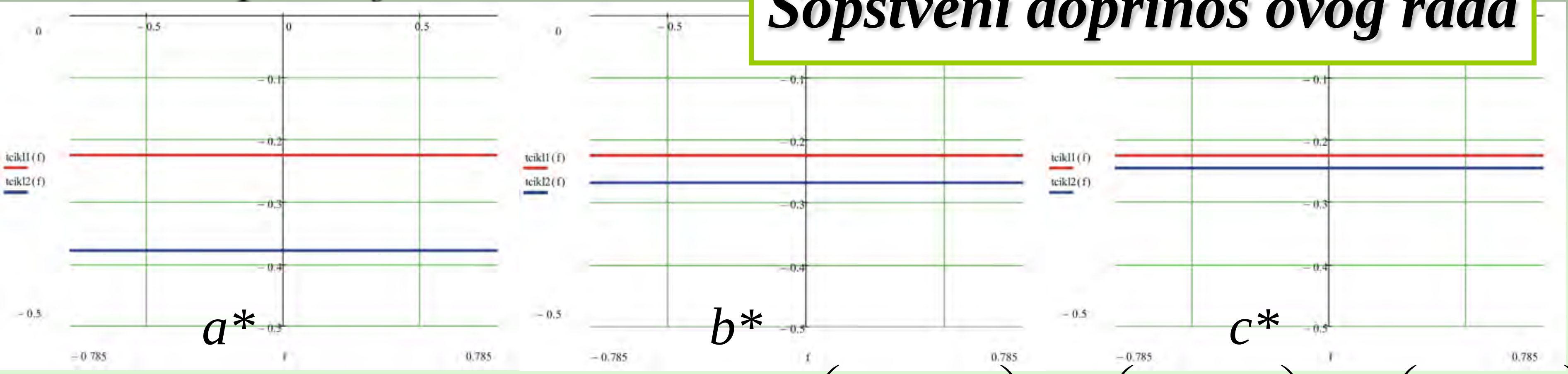
$$m = 0{,}2\,[kg]$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}[rad], \dot{\varphi}_0 = 0\left[\frac{rad}{s}\right], R = 0{,}05[m], \quad \alpha_0 = 3, g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Uticaj ***ugla (nivoa) spuštanja*** teške materijalne tačke ***na vreme povratka u ravnotežni položaj***

Sopstveni doprinos ovog rada



Uporedne krive promena $t_{cikl,12}$ *za* $a^*\left(\varphi_0=\frac{\pi}{12}\right), b^*\left(\varphi_0=\frac{\pi}{6}\right)$ *i* $c^*\left(\varphi_0=\frac{\pi}{3}\right)$

Prvi slučaj -vreme vraćanja teške materijalne tačke u ravnotežni položaj ***ne zavisi*** od nivoa sa kojeg spuštamo tešku materijalnu tačku.

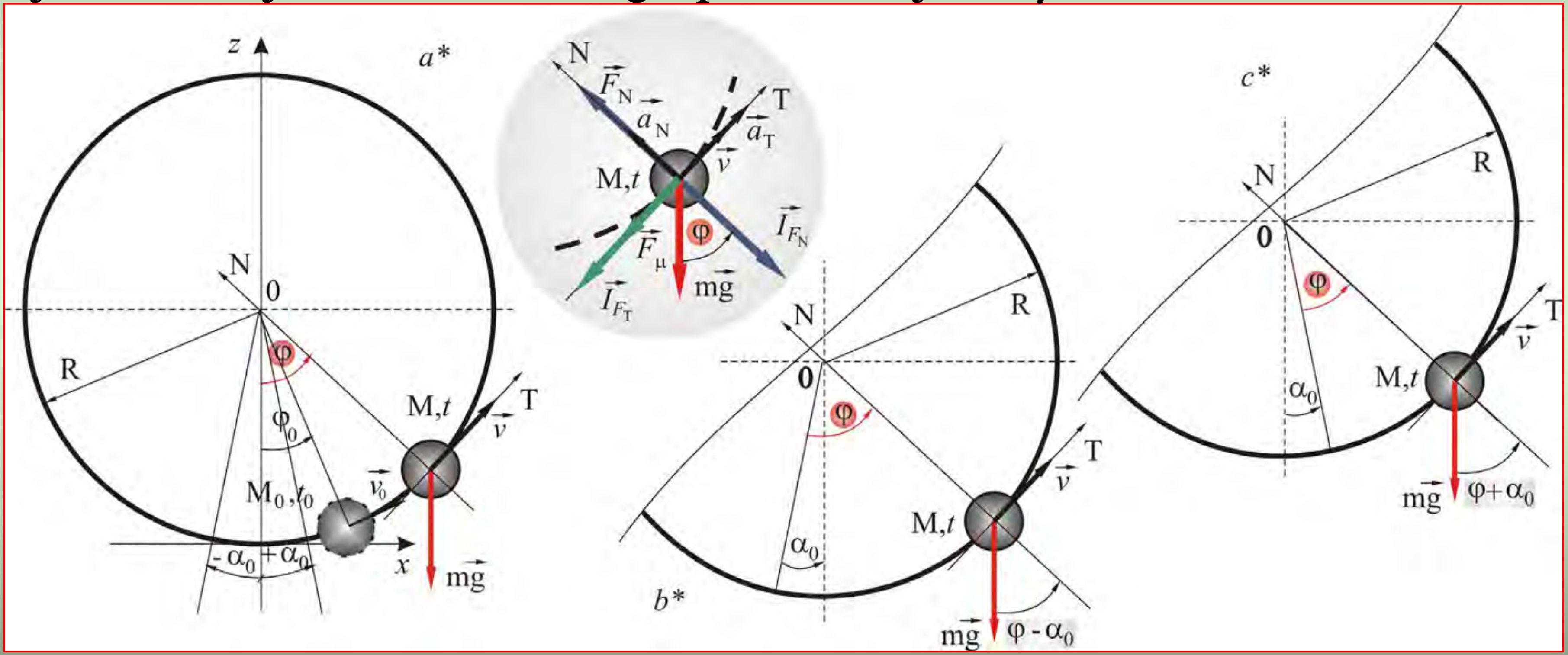
Svojstvo tautohronosti

Drugi slučaj -vreme vraćanja teške materijalne tačke ***zavisi*** od nivoa sa koga spuštamo tešku materijalnu tačku. ***Što je viši nivo sa koga spuštamo tešku materijalnu tačku to je manja razlika u vremenu za koje ona stigne u položaj ravnoteže***.

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Kružna hrapava linija

Teška materijalna tačka M, mase *m*, kreće se duž kružne hrapave linije sa trenjem klizanja *Coulomb*-ovog tipa koeficijenta μ .



Slobodne oscilacije teške materijalne tačke duž kružne hrapave linije: a početni i izvedeni položaj kuglice, plan sila; b* i c* prezentacija „relativnih" ravnotežnih položaja sa svojstvima alternacije* $\pm\alpha_0$

Slobodne oscilacije materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja teške materijalne tačke po kružnoj hrapavoj liniji je

$$\ddot{\varphi} \pm \dot{\varphi}^2 tg\,\alpha_0 + \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi \pm \alpha_0) = 0 \quad \begin{cases} za\ \dot{\varphi} > 0 \\ za\ \dot{\varphi} < 0 \end{cases}$$

ili

$$\frac{d\varphi}{dt} = v; \qquad \frac{dv}{dt} = \mp v^2 tg\,\alpha_0 - \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi \pm \alpha_0) \quad za\,\dot{\varphi} \gtrless 0$$

$2v_s v$ $\qquad \varphi_s$

$$v = 0, \quad \varphi_k = k\pi \mp \alpha_0, \quad k = 0,1,2,3,\ldots,\infty$$

Ravnotežni položaj definisan je uslovima

Sistem u okolini ravnotežnog položaja

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja odgovarajućeg ***fiktivnog konzervativnog sistema*** (izostavljajući deo koji ukazuje na nelinearnost sistema) ima oblik

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi \pm \alpha_0) = 0$$

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Karakteristična jednačina sistema linearnih diferencijalnih jednačina je →

$$\boxed{\lambda^2+\frac{(-1)^k g}{R\cos\alpha_0}=0}$$

Odgovarajući koreni karakteristične jednačine su →

$$\boxed{\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{(-1)^{k+1} g}{R\cos\alpha_0}}}$$

Za položaj ravnoteže

1* $v=0,\ \underline{\varphi_{2p-1}=(2p+1)\pi\mp\alpha_0},\quad p=0,1,2,3,\dots,\infty,\ za\ \dot{\varphi}\gtrless 0$

$$\boxed{\lambda_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha_0}}}$$

- realni i različiti (jedan pozitivan i jedan negativan). U faznoj ravni ove tačke predstavljaju ***singularne tačke tipa sedla***.

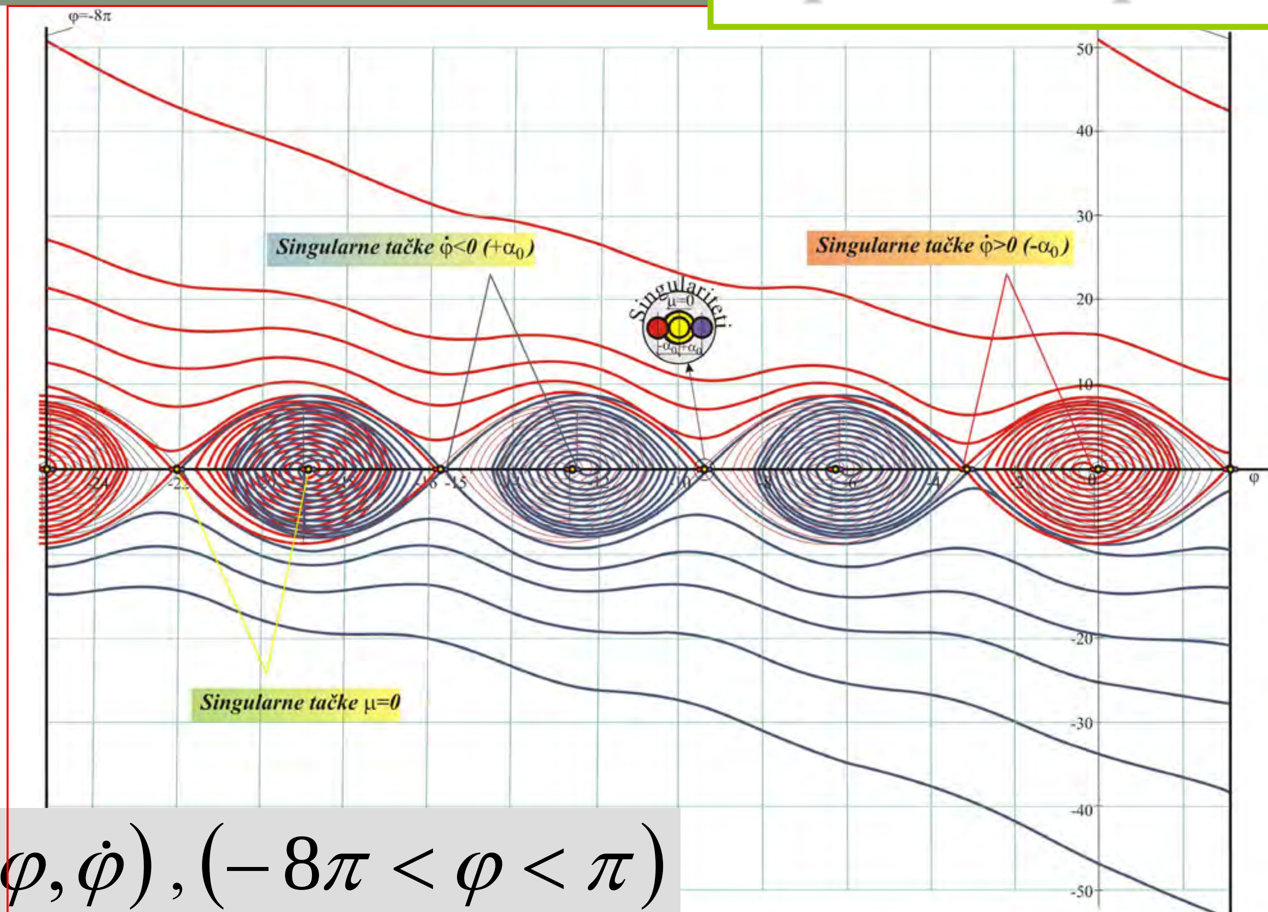
2* $v=0,\ \underline{\varphi_{2p}=2p\pi\mp\alpha_0},\quad p=0,1,2,3,\dots,\infty,\ za\ \dot{\varphi}\gtrless 0$

$$\boxed{\lambda_{1,2}=\mp i\sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha_0}}}$$

- konjugovano kompleksni i različiti (jedan pozitivni i jedan negativni). U faznoj ravni ove tačke predstavljaju ***singularne tačke tipa centar***.

Slobodne o s c i l a c i j e materijalne tačke po krivolinijskim putanjama i neidelanim vezama

Sopstveni doprinos ovog rada



Ravan $\left(\varphi,\dot{\varphi}\right),\left(-8\pi<\varphi<\pi\right)$

Fazni portret slobodnih oscilacija teške materijalne tačke po kružnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja μ

Rešavanjem diferencijalne (dvojne) jednačine dobijamo ***(dvojnu) jednačinu fazne trajektorije***

$$\dot{\varphi}(\varphi)^2=\frac{2g}{\left(1+4tg^2\alpha_0\right)R\cos\alpha_0}\left[\cos\left(\varphi\pm\alpha_0\right)-2tg\alpha_0\sin\left(\varphi\pm\alpha_0\right)\right]+Ce^{\mp2\varphi tg\alpha_0}\begin{cases}za\ \dot{\varphi}>0\\ za\ \dot{\varphi}<0\end{cases}$$

Energijska analiza dinamike vibroudarnih sistema sa krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

- *Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama;*
- *Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama.*

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Proučena je ***dinamika vibroudarnih sistema*** na bazi oscilatora koji se **slobodno** kreće po ***neidealnim vezama-hrapavim krivim putanjama*** sa silom trenja otpora klizanja *Coulomb*-ovog tipa, oblika:

parabole, cikloide i kruga.

Pri tome, za delove oscilatora se uzimaju po

jedna, dve i tri teške materijalne tačke-kuglice.

Da bi sistem postao vibroudarni, postavlja se ***po jedan i dva ograničivača elongacije*** i isti posmatraju kao ***nepokretni*** i ***pokretni***.

Kod ***vibroudarnog sistema*** na bazi oscilatora, ***sa jednom kuglicom***, ***javljaju se udari kuglice o ograničivač elongacija***, dok kod vibroudarnog sistema na bazi oscilatora, ***sa više kuglica***, nastaju udari kuglica o ograničivač elongacija ***i međusobni sudari kuglica***. ***Na kraju svakog konkretnog primera sprovodi se energijska analiza dinamike vibroudarnih sistema sa krivolinijskim putanjama i neidealnim***

analitičkom metodom „*podešavanja*” i metodom fazne ravni

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Parabolična hrapava linija

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja teške materijalne tačke po paraboličnoj hrapavoj liniji u funkciji generalisane koordinate $\boxed{\varphi}$ je

$$\ddot{\varphi}+\left(3tg\,\varphi\pm\mu\right)\dot{\varphi}^{2}+\frac{g\cos^{3}\varphi}{p}\left(\sin\varphi\pm\mu\cos\varphi\right)=0,\quad\begin{cases}za\ v>0\\ za\ v<0\end{cases}$$

Za *potpuno opisivanje* dinamike teške materijalne tačke diferencijalnoj (dvojnoj) jednačini kretanja potrebno je pridružiti:

a* početne uslove

$$s_{(0)}\left(\varphi_{(0)}\right)=s_{0}\left(\varphi_{0}\right)\ \text{i}\ v_{(0)}\left(\varphi_{(0)},\dot{\varphi}_{(0)}\right)=\dot{s}_{(0)}\left(\varphi_{(0)},\dot{\varphi}_{(0)}\right)=v_{0}\left(\varphi_{0},\dot{\varphi}_{0}\right);$$

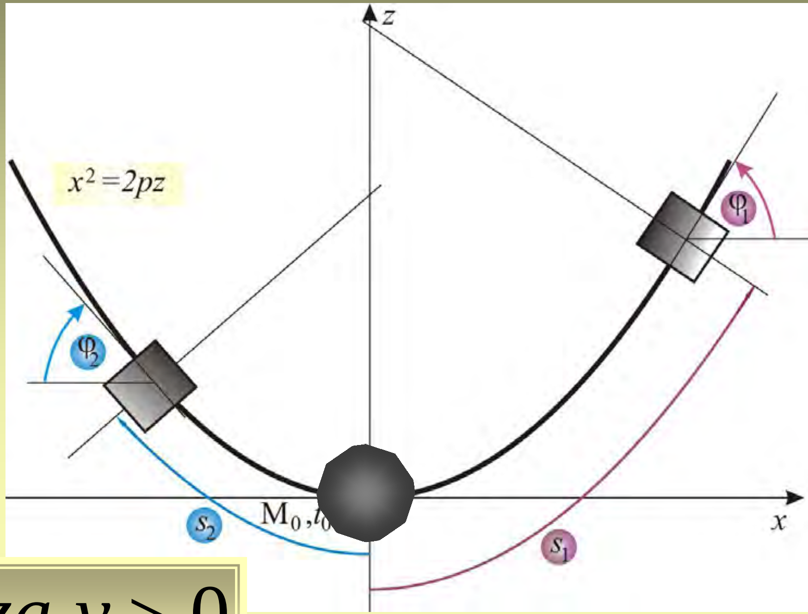
b* uslove ograničenja ugaone elongacije, kao i ***uslove sudara***

$$s_{ul,i}=s_{i}\left(\varphi_{i}\right),\ s_{ul,(i+1)}=s_{(i+1)}\left(\varphi_{(i+1)}\right),\quad \dot{s}_{odl,i}\left(\dot{\varphi}_{odl,i}\right)=-k\dot{s}_{ul,i}\left(\dot{\varphi}_{ul,i}\right)$$

gde je: k- koeficijent sudara; $\qquad i=1,2,3,\ldots,n$

n- broj sudara do zaustavljanja teške materijalne tačke na paraboličnoj hrapavoj liniji. ***USVAJAMO*** $\boxed{k=1}$ ***- idealno elastični sudar***;

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



Slobodno kretanje teške materijalne tačke delimo na odgovarajuće:

intervale i podintervale kretanja

kojima odgovara

(dvojna) jednačina fazne trajektorije

$$\dot{\varphi}^2 = \cos^6\varphi\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi} + Ce^{\mp 2\mu\varphi}\right)\begin{cases} za\ v > 0 \\ za\ v < 0 \end{cases}$$

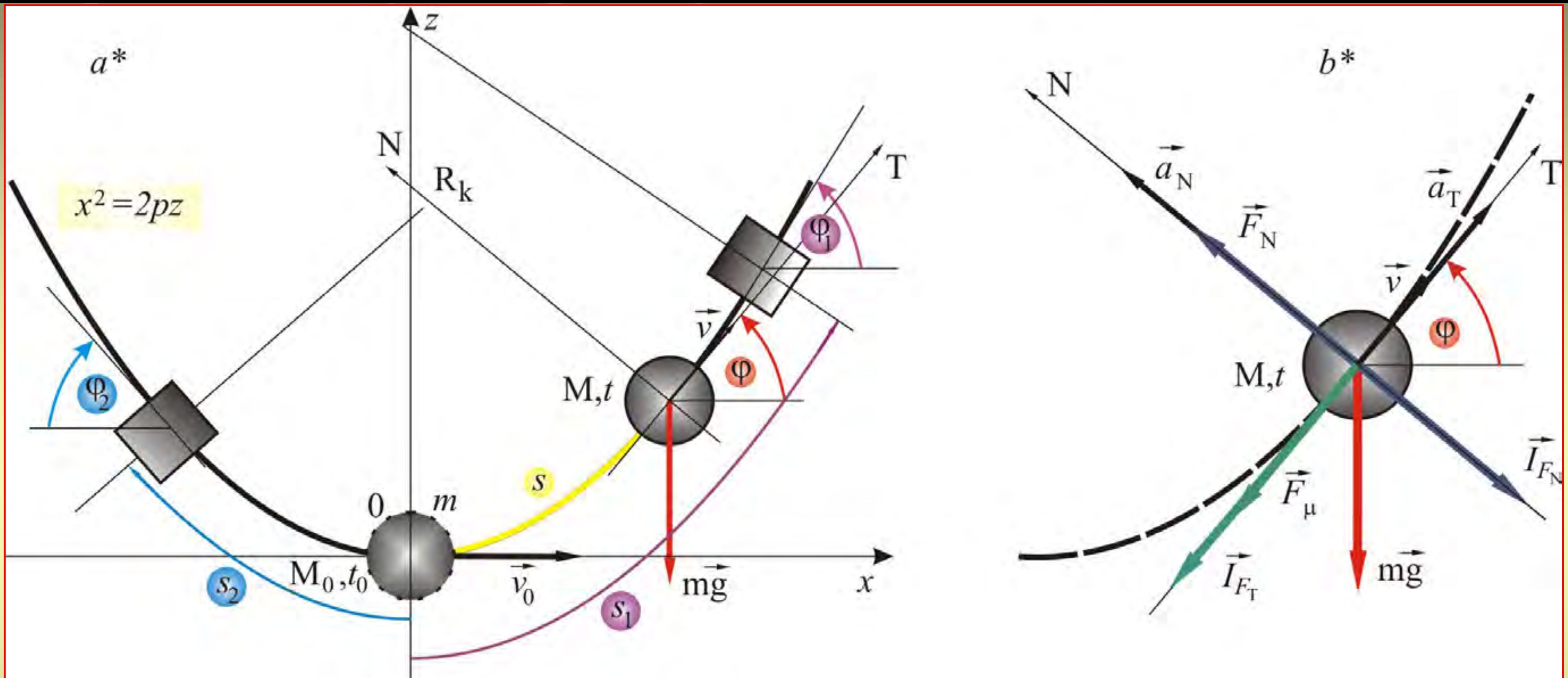
Primer 1

Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom

Položaji graničnika određeni lučnim koordintama

$$s_{ul,1} = s_1(\varphi_1) \quad s_{ul,2} = s_2(\varphi_2)$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom: a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

Prvi interval kretanja (do prvog udara u ograničivač elongacija)

$za\ v>0$

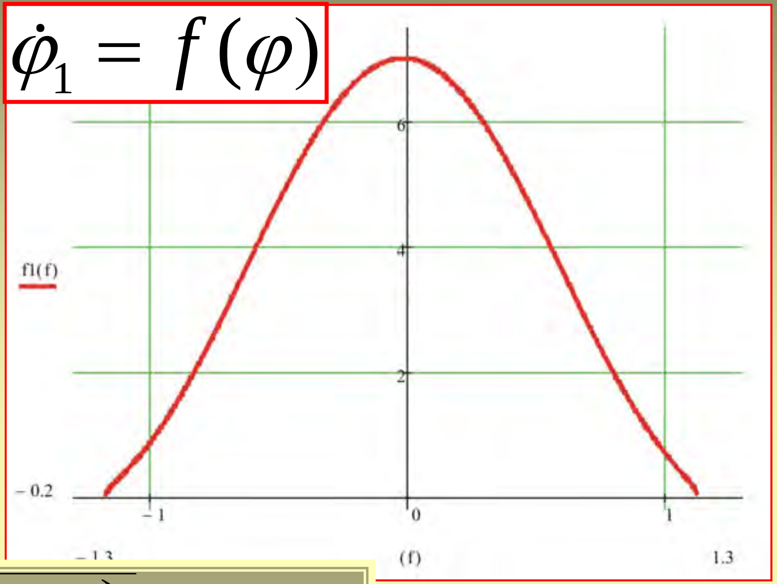
$$\dot{\varphi}_1^2 = \cos^6\varphi\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi}+C_1e^{-2\mu\varphi}\right)$$

Zakon kretanja

$$C_1(\varphi_0,\dot{\varphi}_0)=\frac{e^{2\mu\varphi_0}}{\cos^2\varphi_0}\left(\frac{\dot{\varphi}_0^2}{\cos^4\varphi_0}+\frac{g}{p}\right)$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Nakon određivanja konstante C_1, stvoreni su uslovi da se nacrta ***kriva fazne trajektorije u prvom intervalu kretanja, do prvog udara***.



Korišćenjem uslove udara

$$t = t_{ul_1+},\ \varphi(t_{ul_1+}) = \varphi_1,\ \dot{\varphi}(t_{ul_1+}) = \dot{\varphi}_{ul_1+}$$

Određujemo

$$\dot{\varphi}_{ul_1} = \sqrt{\cos^6\varphi_1\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi_1} + C_1 e^{-2\mu\varphi_1}\right)}$$

Ugaona brzina prvog udara u ograničivač

$$t_{ul_1} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^6\varphi\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi} + C_1 e^{-2\mu\varphi}\right)}}$$

Vreme prvog udara

Softverski paket MathCad

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Vrednosti parametara su : $\alpha_0 = 0{,}05,\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right],\ m = 0{,}2[kg]$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}[rad], \varphi_2 = -\frac{\pi}{6}[rad], \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 7\left[\frac{rad}{s}\right], p = 1[m].$$

Na osnovu funkcionalne zavisnosti (u prvom intervalu kretanja)

$$F_N = mg\cos\varphi + mp\cos^3\varphi\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi} + C_1 e^{-2\mu\varphi}\right)$$

Sila pritiska teške materijalne tačke na paraboličnu hrapavu liniju

$$\boxed{P_\mu = -\mu F_N \dot{s}}$$

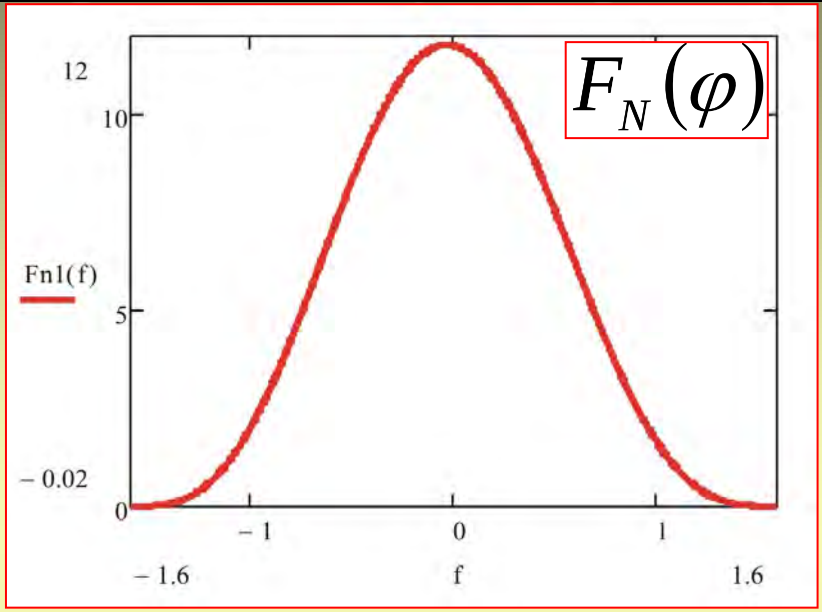
$$P_\mu = -\mu mp\left(g\cos\varphi + p\cos^3\varphi\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi} + C_1 e^{-2\mu\varphi}\right)\right)\sqrt{-\frac{g}{p\cos^2\varphi} + C_1 e^{-2\mu\varphi}}.$$

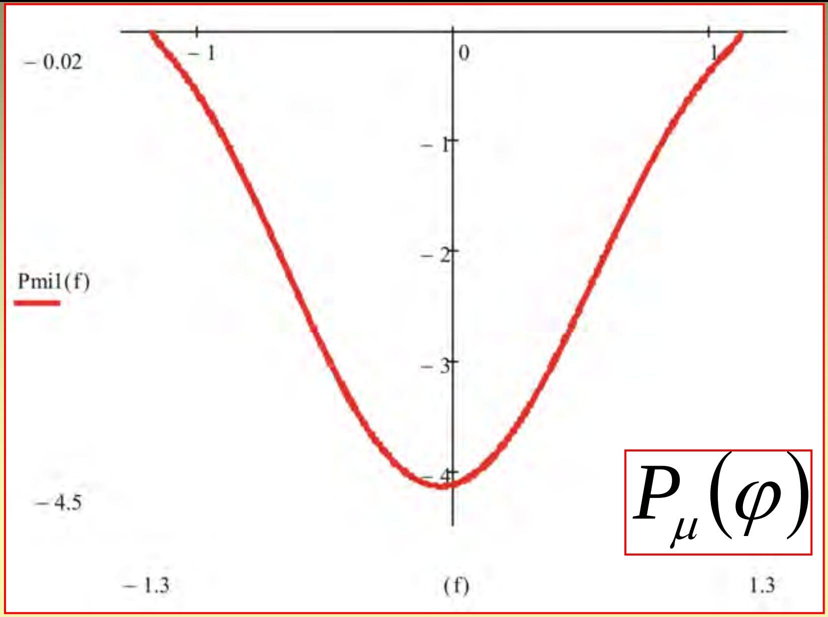
Snaga koja potiče od sile trenja teške materijalne tačke po paraboličnoj hrapavoj liniji

Data je grafička vizuelizacija promene sile pritiska i snage koja potiče od sile trenja

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Krive promene

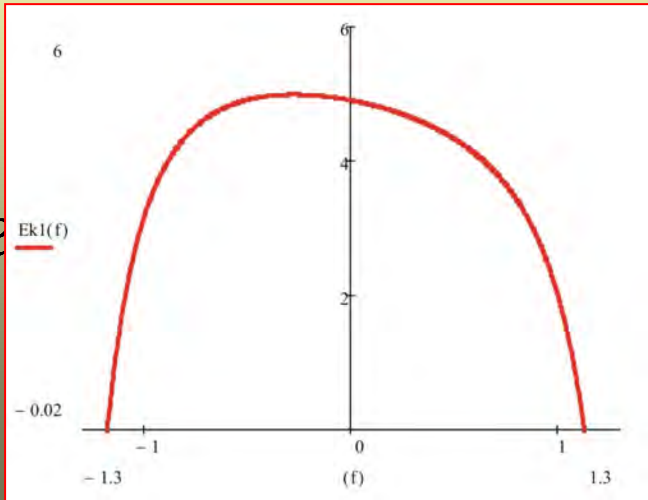




Energijska analiza ***u prvom intervalu kretanja***

Kinetička energija

$$Ek_1(\varphi)=\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mp^2\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi}+C_1e\right.$$



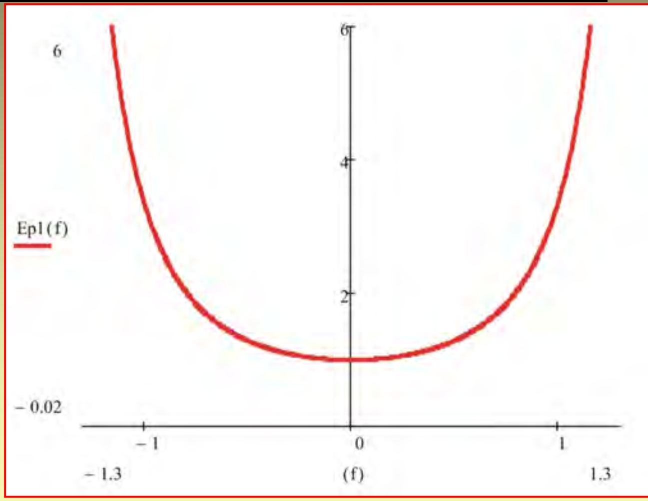
Kriva promene $\boxed{Ek_1(\varphi)=f(\varphi)}$ →

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Potencijalna energija

$$Ep_1(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{mgp}{2\cos^2\varphi}$$

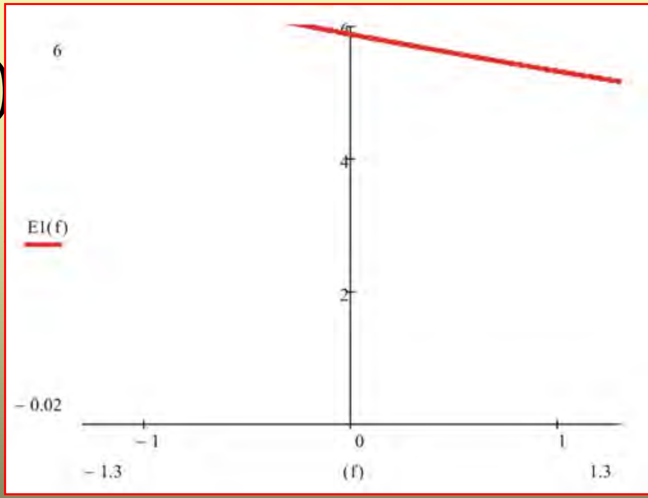
Kriva promene $\boxed{Ep_1(\varphi) = f(\varphi)}$ →



Ukupna mehanička energija $E_1(\varphi) = Ek_1(\varphi)$

$$E_1(\varphi) = \frac{1}{2}mp^2\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi} + C_1 e^{-2\mu\varphi}\right) + \frac{1}{2}$$

Kriva promene $\boxed{E_1(\varphi) = f(\varphi)}$ →



Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Drugi interval kretanja (Od prvog udara, u ograničivač elongacije, postavljen sa desne strane, do drugog udara u ograničivač elongacije postavljen sa leve strane).

$za\ v < 0$

$$\dot{\varphi}_2^2 = \cos^6\varphi\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi} + C_2 e^{+2\mu\varphi}\right)$$

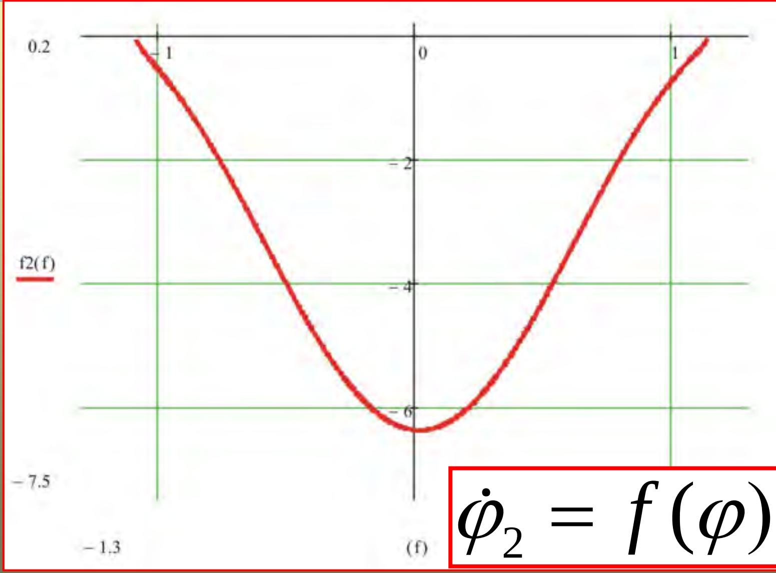
Zakon kretanja

$$C_2 = \frac{e^{-2\mu\varphi_1}}{\cos^2\varphi_1}\left(\frac{\left(\dot{\varphi}_{ul_1}\right)^2}{\cos^4\varphi_1} + \frac{g}{p}\right)$$

Za početne uslove kretanja

$$t = t_{ul_1+},\ \varphi(t_{ul_1+}) = \varphi_1,\ \dot{\varphi}(t_{ul_1+}) = \dot{\varphi}_{odl_1} = -\dot{\varphi}_{ul_1-}.$$

Nakon određivanja konstante C_2, stvoreni su uslovi da se nacrta ***kriva fazne trajektorije u drugom intervalu kretanja, od prvog do drugog udara***.



$$\dot{\varphi}_2 = f(\varphi)$$

Korišćenjem uslove udara

$$t = t_{ul_2+},\ \varphi(t_{ul_2+}) = \varphi_2,\ \dot{\varphi}(t_{ul_2+}) = \dot{\varphi}_{ul_2+}$$

Određujemo

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

$$\dot{\varphi}_{ul_2} = \sqrt{\cos^6\varphi_2\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi_2}+C_2e^{+2\mu\varphi_2}\right)}$$

Ugaona brzina drugog udara u ograničivač

Na osnovu funkcionalne zavisnosti (u drugom intervalu kretanja)

$$F_N = mg\cos\varphi + mp\cos^3\varphi\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi}+C_2e^{+2\mu\varphi}\right)$$

Sila pritiska teške materijalne tačke na paraboličnu hrapavu liniju

$$\boxed{P_\mu = -\mu F_N\dot{s}}$$

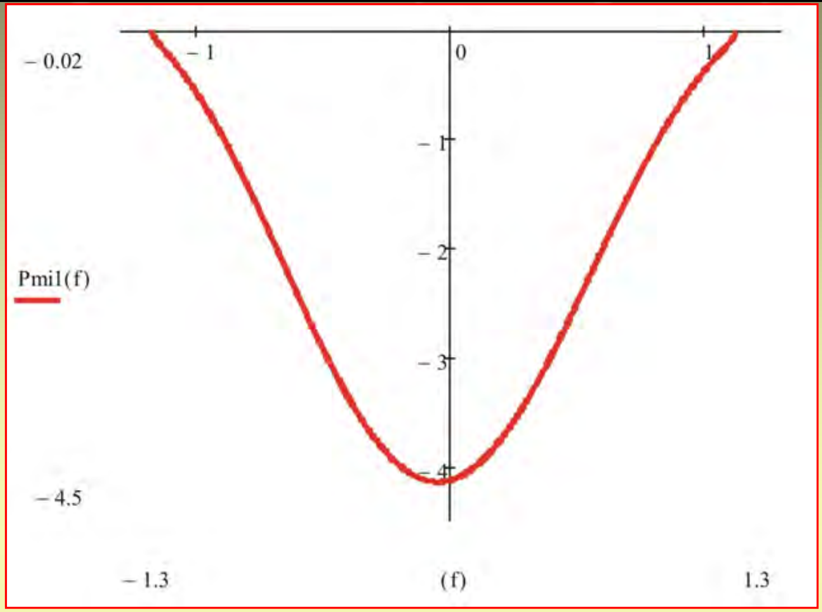
$$P_\mu = -\mu mp\left(g\cos\varphi + p\cos^3\varphi\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi}+C_2e^{+2\mu\varphi}\right)\right)\sqrt{-\frac{g}{p\cos^2\varphi}+C_2e^{+2\mu\varphi}}.$$

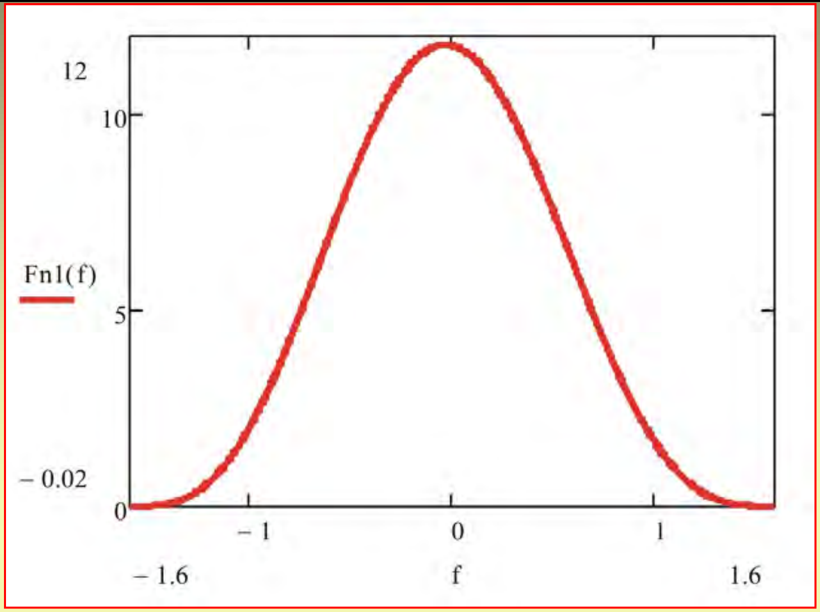
Snaga koja potiče od sile trenja teške materijalne tačke po paraboličnoj hrapavoj liniji

Data je grafička vizuelizacija *promene* sile pritiska i snage koja potiče od sile trenja

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Krive promene



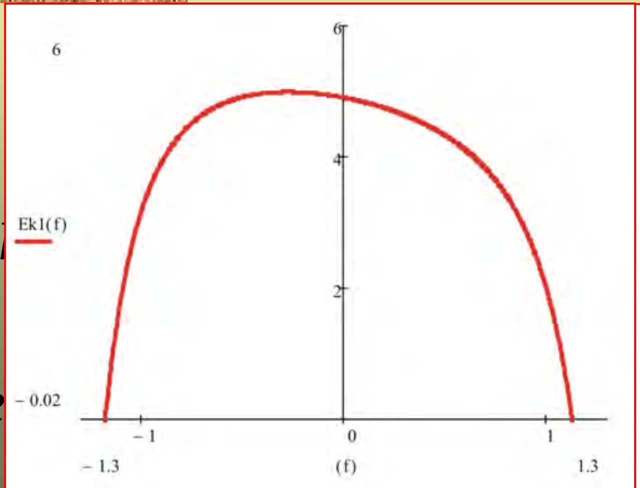


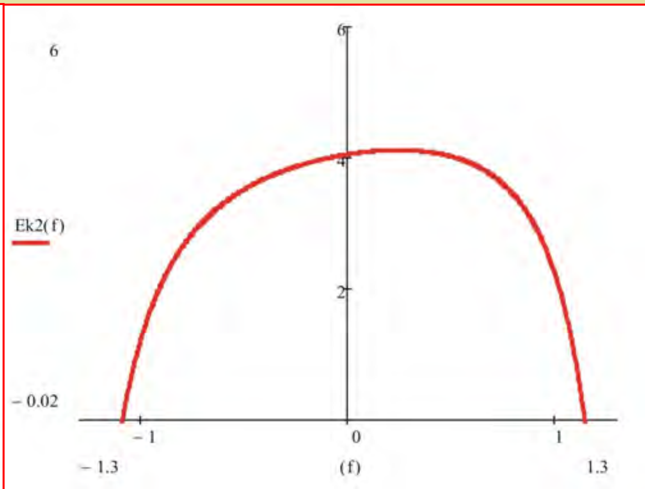
Energijska analiza ***u drugom intervalu kretanja***

Kinetička energija

$$Ek_2(\varphi) = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2}$$

Kriva prome

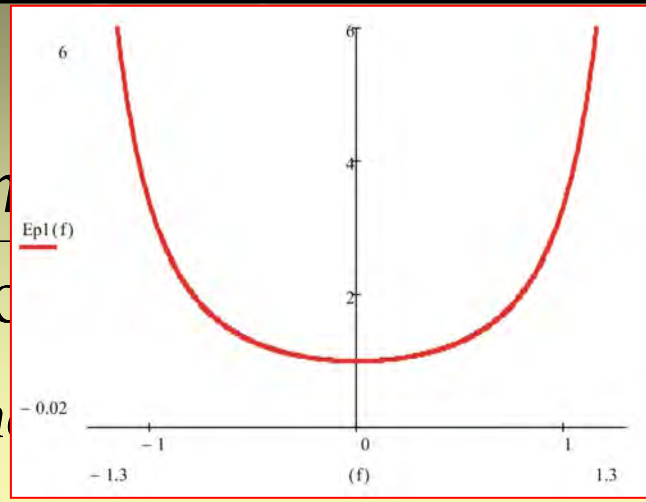


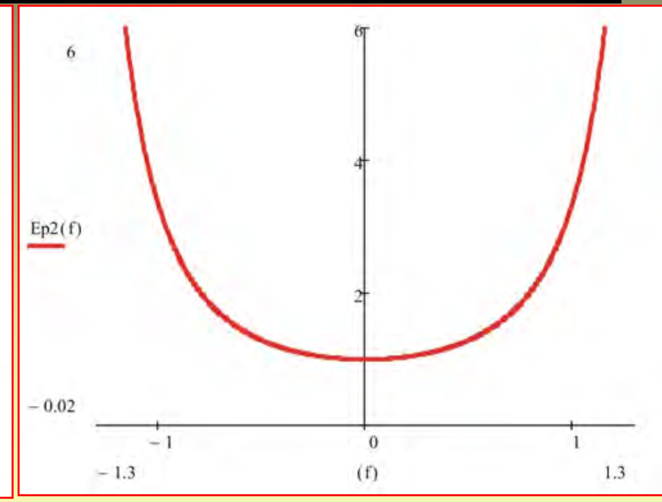


Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Potencijalna energija

$$Ep_2(\varphi)=\frac{1}{2}\frac{m}{2\,\mathrm{co}}$$

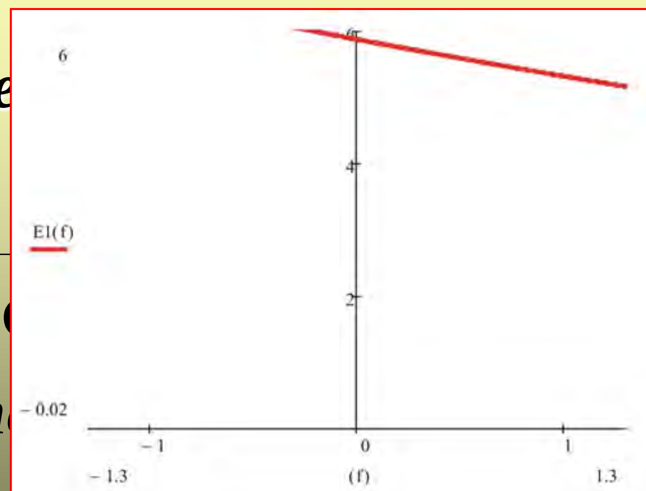


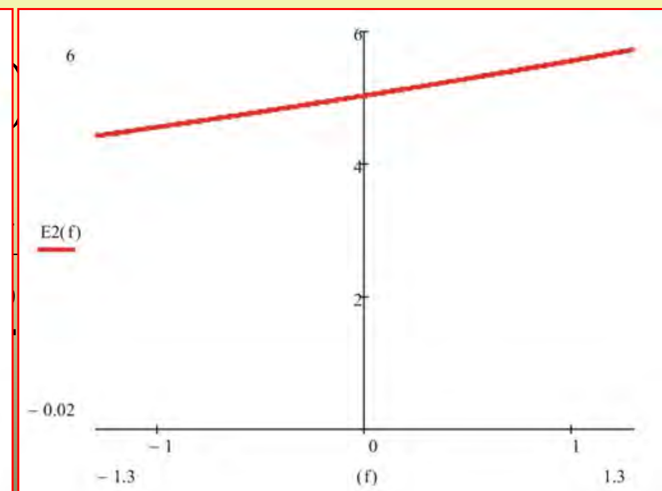


Kriva prom

Ukupna mehanička ene

$$E_2(\varphi)=\frac{1}{2}mp^2\Bigg(-\frac{}{p}$$





Kriva prom

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Postupak grafičke vizuelizacije energijske analize u narednim intervalima kretanja ***izvodi se po analogiji*** sa prethodno definisanim intervalima kretanja sve do ***osmog udara teške materijalne tačke***, krećući se po paraboličnoj hrapavoj liniji, ***u ograničivače elongacija*** (po četiri u ograničivače elongacija postavljeni sa desne i leve strane). ***Nakon osmog intervala kretanja pojavljuje se*** reprezentativna tačka na faznom portretu, koja predstavlja ***tačku alternacije smera kretanja teške materijalne tačke*** po paraboličnoj hrapavoj liniji, što uslovljava i promenu smera ugaone brzine, odnosno smera sile *Coulomb*-ovog trenja klizanja.

Uslovljava da → ***Deveti interval kretanja*** delimo na dva podintervala

Prvi podinterval devetog intervala kretanja uzimamo od osmog udara u ograničivače elongacija do tačke alterancije, i

Drugi podinterval devetog intervala kretanja uzimamo od tačke alterancije do devetog udara (odnosno od petog udara u ograničivač elongacija, postavljen sa leve strane).

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Položaj tačke alternacije $\boxed{\varphi_{alt_1}}$ se određuje iz uslova → $\boxed{\dot{\varphi}(\varphi_{alt_1}) = 0}$

Kao prva nula funkcije $0 = \cos^6 \varphi \left(-\frac{g}{p \cos^2 \varphi} + C_9 e^{-2\mu\varphi} \right)$

Korišćenjem programa iz softvera MathCad za crtanje funkcije

Analizom narednih intervala kretanja dolazimo do zaključka:

- Nakon drugog podintervala devetog intervala kretanja posmatrani sistem nije više vibroudarni, već predstavlja osnovni bezudarni dinamički sistem;

- Od desetog intervala pa do šesnestog intervala kretanja (imamo šest tačaka alternacije) ***sistem je osnovni (bezudarni) dinamički sistem***;

- Posle šesnaest intervala kretanja teška materijalna tačka vraća se u položaj ravnoteže.

NAPOMENA

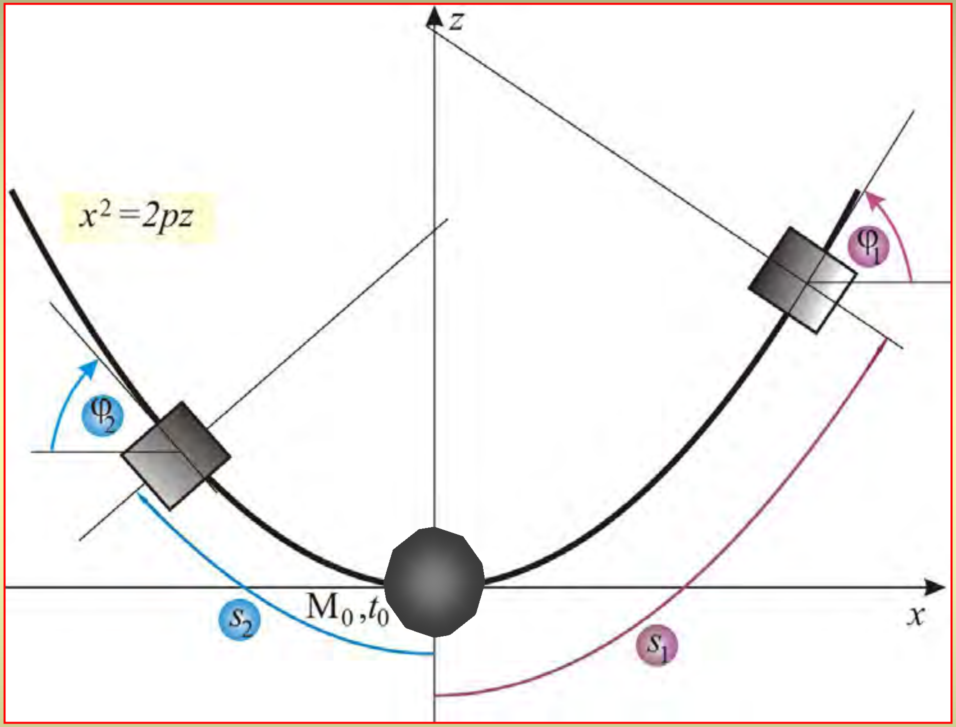
U svim narednim primerima analizu kretanja sprovodimo do

- vraćanja posmatranog vibroudarnog sistema u položaj ravnoteže ili

- do momenta kada posmatrani sistem nije više vibroudarni.

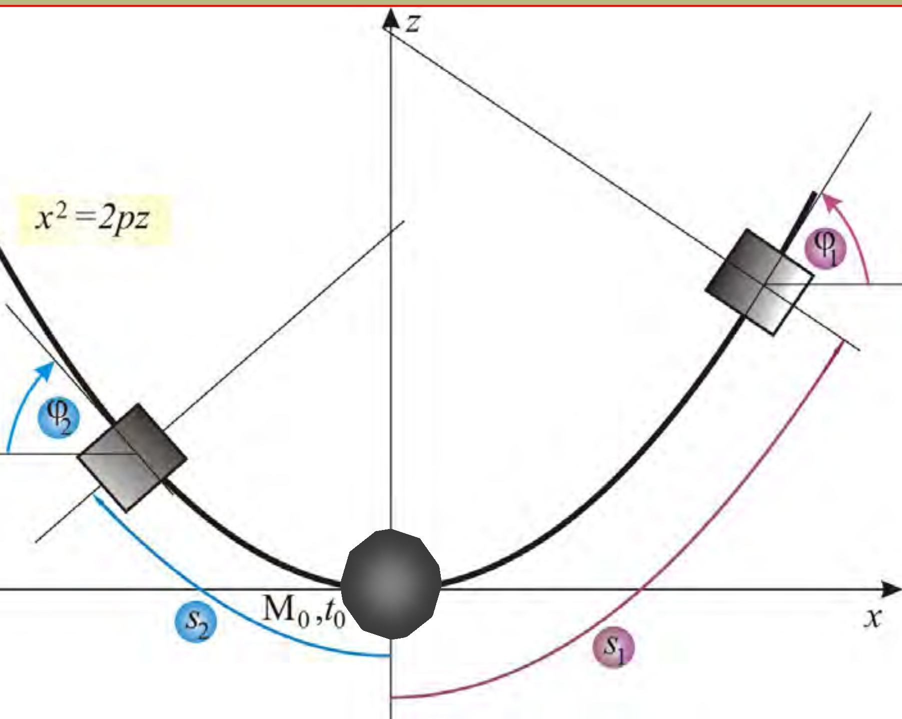
Animacija kretanja i grafička vizuelizacija faznog prikazana je

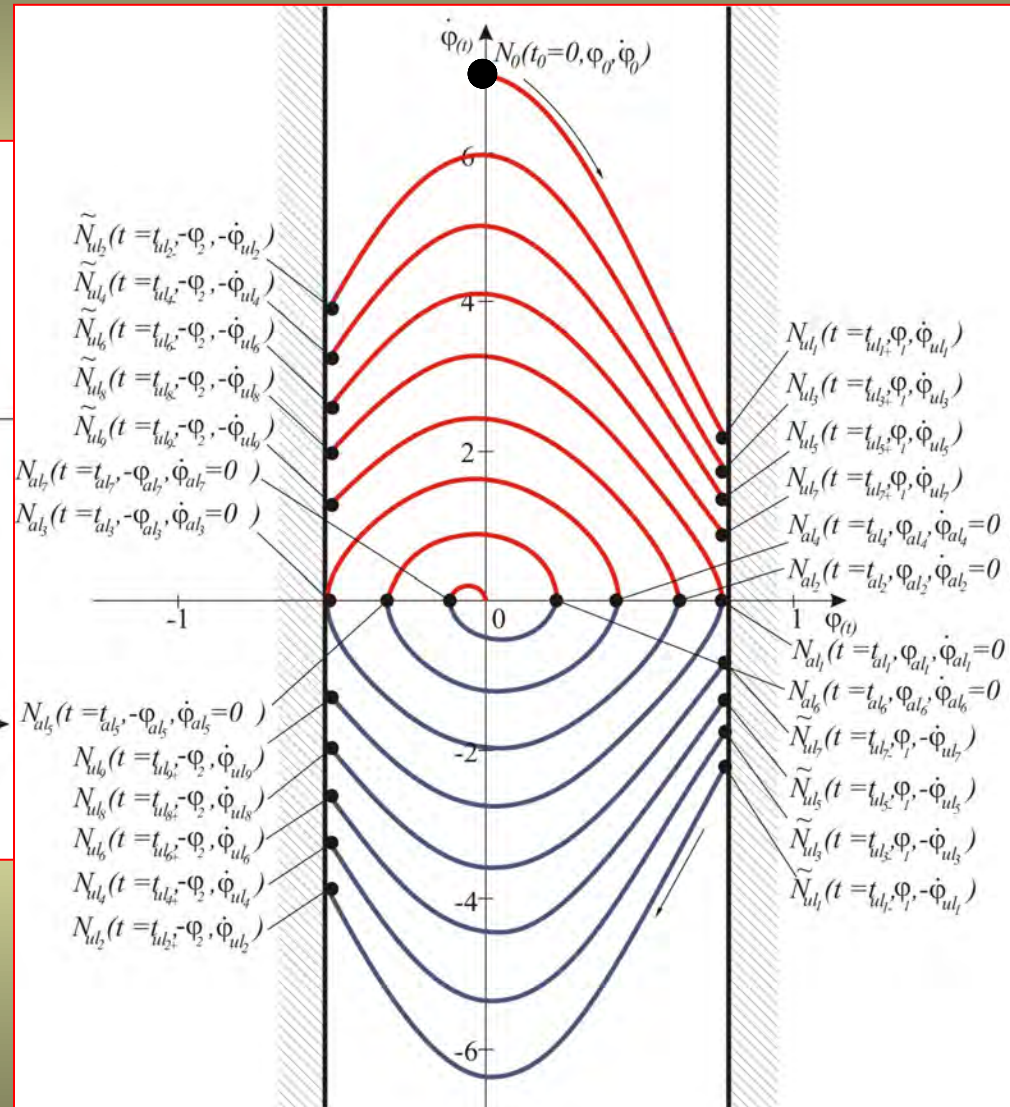
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



Animacija kretanja vibroudarnog sistema

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



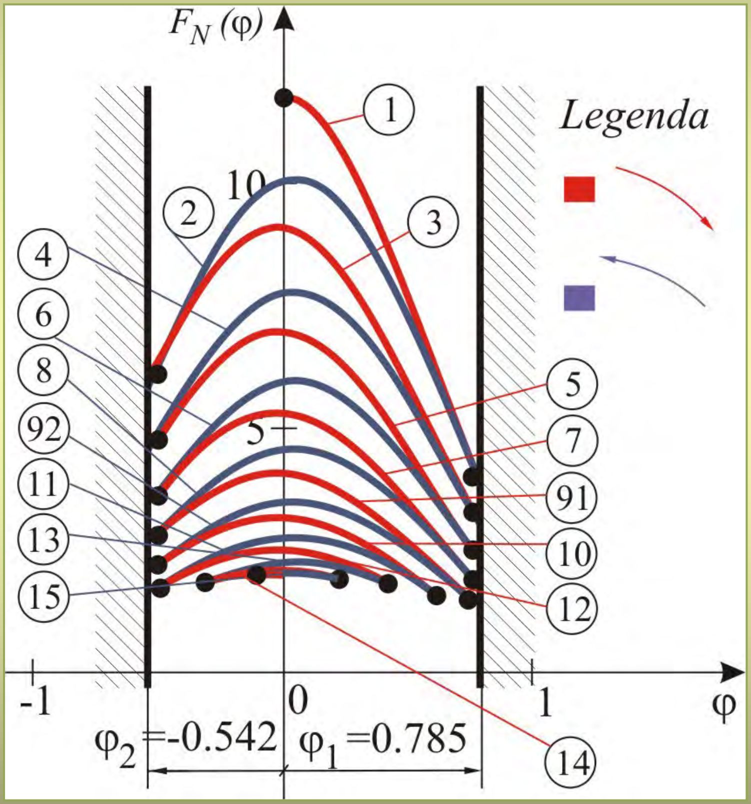


Animacija kretanja vibroudarnog sistema

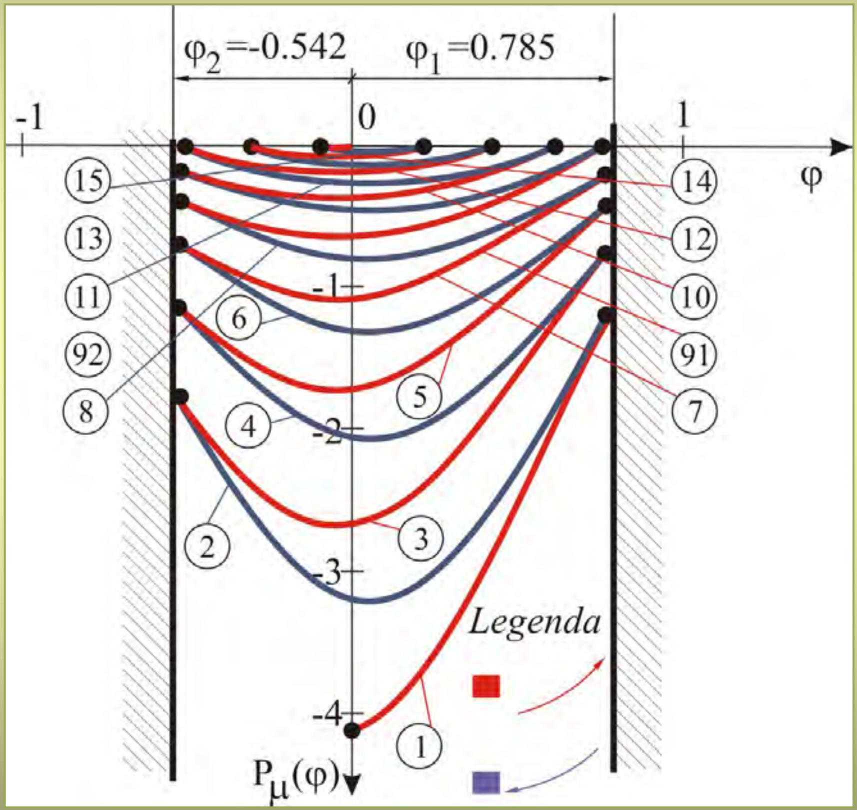
Fazni portret teške materijalne tačke koja se kreće po paraboličnoj hrapavoj liniji

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

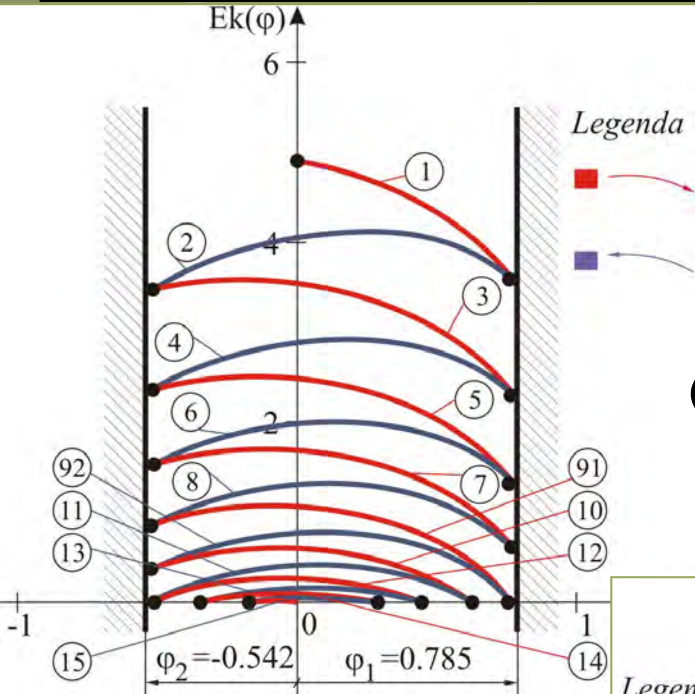


Kriva promene sile pritiska za sve intervale kretanja



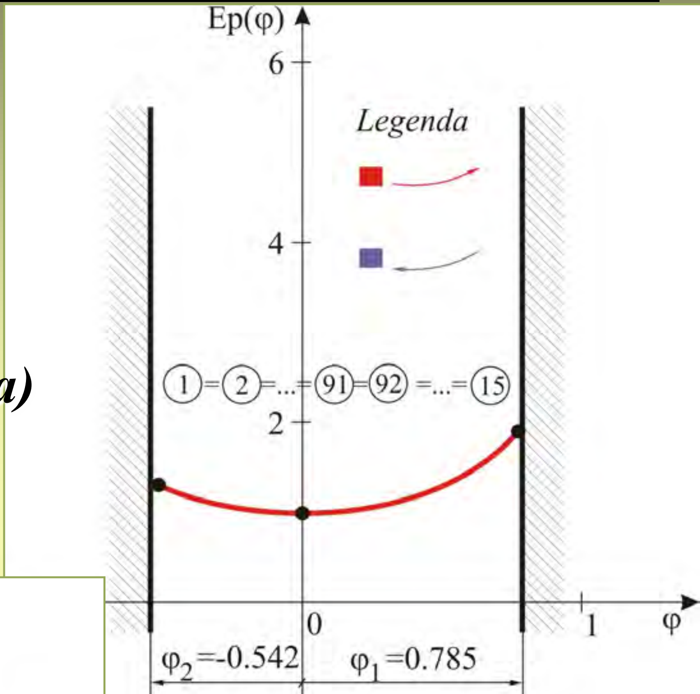
Promene snage za sve intervale kretanja

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



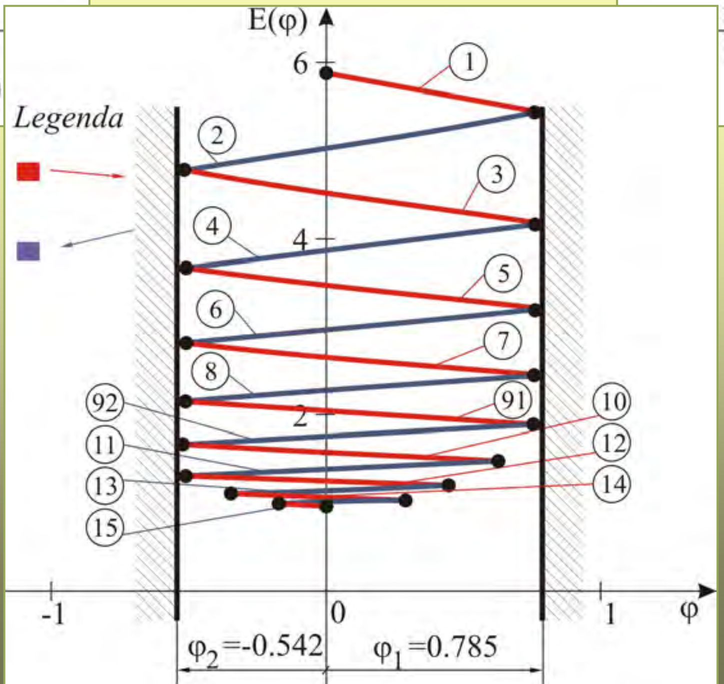
Grafici promene

(za sve intervale kretanja)



Kinetičke energije u ravni $\left(Ek,\varphi\right)$

Potencijalne energije u ravni $\left(Ep,\varphi\right)$

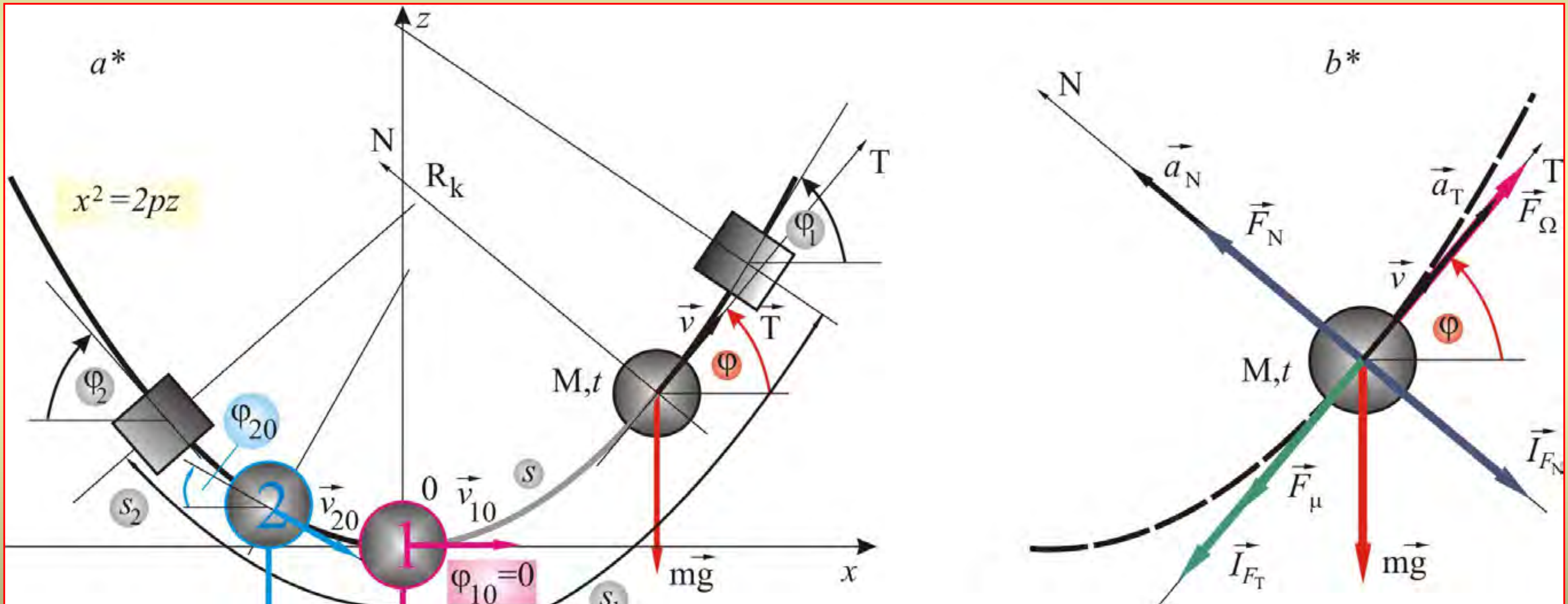


Ukupne mehaničke energije u ravni $\left(E,\varphi\right)$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Primer 2

Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa dve kuglice



$$\varphi_{10} > \varphi_{20}\,;\ \dot{\varphi}_{10} > \dot{\varphi}_{20}$$

Uslov funkcionisanja ovakvog vibroudarnog sistema

Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa dve kuglice: a* početni i izvedeni položaj kuglica; b* plan sila

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Položaji graničnika određeni lučnim koordintama

$$s_{ul,1} = s_1(\delta_1) \quad s_{ul,2} = s_2(\delta_2)$$

Teška materijalna tačka – kuglica ***nema konačnu dimenziju***

Posmatrani sistem ima dva stepena slobode $\boxed{\varphi_1}$ i $\boxed{\varphi_2}$

Usvojene generalisane koordinate

Analiza kretanja vibroudarnog sistema

Diferencijalne (dvojne) jednačine kretanja teških materijalnih tačaka po paraboličnoj hrapavoj liniji u funkciji generalisanih koordinata su

$$\ddot{\varphi}_1 + (3tg\varphi_1 \pm \mu)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{g\cos^3\varphi_1}{p}(\sin\varphi_1 \pm \mu\cos\varphi_1) = 0, \begin{cases} za\, v_1 > 0 \\ za\, v_1 < 0 \end{cases}$$

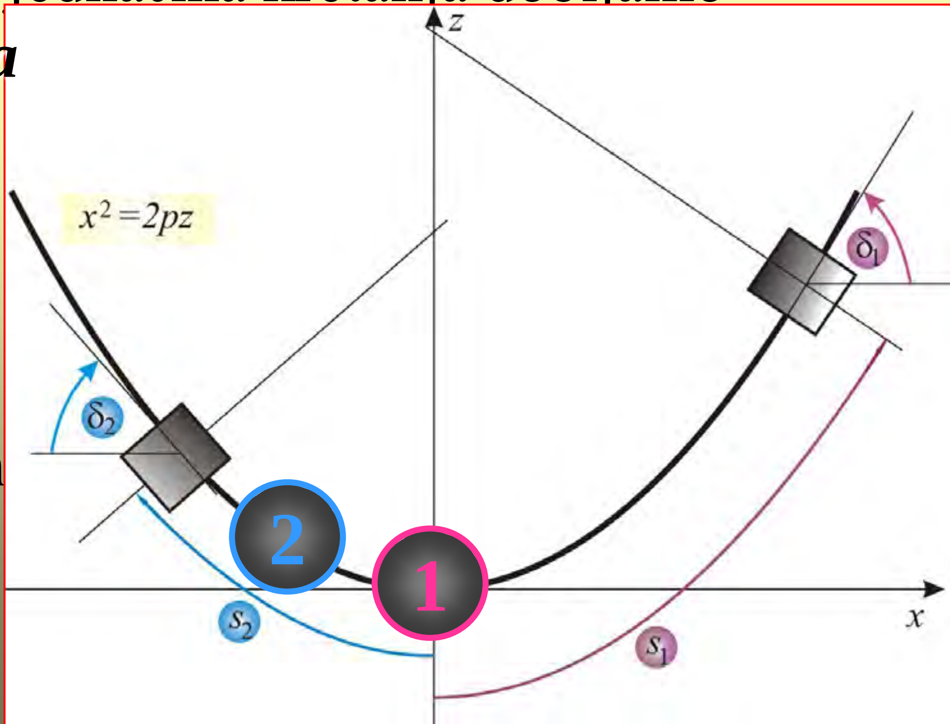
$$\ddot{\varphi}_2 + (3tg\varphi_2 \pm \mu)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{g\cos^3\varphi_2}{p}(\sin\varphi_2 \pm \mu\cos\varphi_2) = 0, \begin{cases} za\, v_2 > 0 \\ za\, v_2 < 0 \end{cases}$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

$$\dot{\varphi}_1^2 = \cos^6\varphi_1\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi_1} + C_1 e^{\mp 2\mu\varphi_1}\right)\begin{cases} za\ v_1 > 0 \\ za\ v_1 < 0 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_2^2 = \cos^6\varphi_2\left(-\frac{g}{p\cos^2\varphi_2} + C_2 e^{\mp 2\mu\varphi_2}\right)\begin{cases} za\ v_2 > 0 \\ za\ v_2 < 0 \end{cases}$$

Rešavanjem diferencijalnih (dvojnih) jednačina kretanja dobijamo ***(dvojne) jednačine faznih trajektorija*** teških materijalnih tačaka po paraboličnoj hrapavoj liniji u funkciji generalisanih koordinata



Slobodno kretanje teških materijalnih tačaka delimo na odgovaruće:

intervale kretanja

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Vrednosti parametara su : $\alpha_0 = 0{,}15,\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right],\ \ p = 1[m]$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{4}[rad],\ \varphi_{10} = 0,\ \dot{\varphi}_{10} = 7\left[\frac{rad}{s}\right], m_1 = 0{,}2[kg],$$

$$\delta_2 = -\frac{\pi}{6}[rad],\ \varphi_{20} = -\frac{\pi}{12}[rad],\ \dot{\varphi}_{20} = 5\left[\frac{rad}{s}\right], m_2 = 0{,}2[kg].$$

Do ***prvog sudara kuglica*** dolazi u ***drugom intervalu kretanja prve kuglice*** i ***prvom intervalu kretanja druge kuglice***.

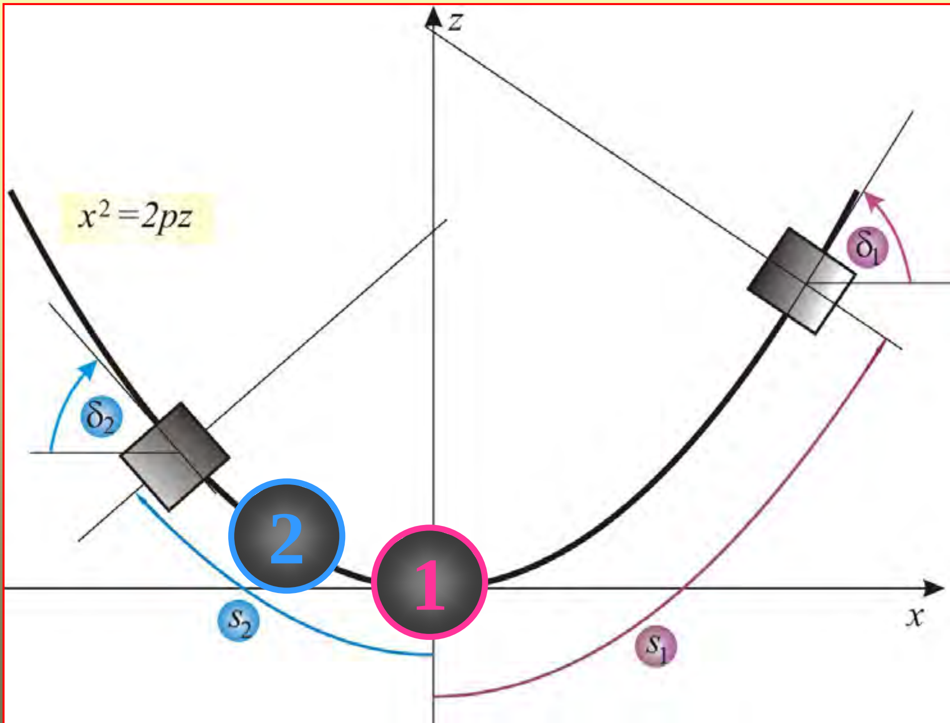
Potrebno je odrediti !!!

Vreme prvog sudara → t_{sud_1}

Analitičkim putem

Položaj (ugaonu koordinatu) dolaska do sudara → φ_{sud_1}

Grafičkim putem sa upotrebom MathCad-a



Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Polazni podaci neophodni za određivanje t_{sud_1} su: **Broj kuglice**

- Za prvu kuglicu $\varphi_1(t_{1ul_1}) = \delta_1$; $\dot{\varphi}_1(t_{1ul_1}) = \dot{\varphi}_{1odl_1} = -\dot{\varphi}_{1ul_1}$; $a_{T,12} = \ddot{s}_1$,
- Za drugu kuglicu $\varphi_2(t_{1ul_1})$; $\dot{\varphi}_2(\varphi_2(t_{1ul_1}))$; $a_{T,21} = \ddot{s}_2$.

Vreme prvog sudara određujemo jednačinom **Broj intervala kretanja**

$$t_{sud_1}^2 + \frac{2\left(\dot{\varphi}_{1ul_1} + \dfrac{\cos^3\delta_1}{\cos^3\varphi_2(t_{1ul_1})}\dot{\varphi}_2\left(\varphi_2\left(t_{1ul_1}\right)\right)\right)}{\left(3tg(\delta_1)(\dot{\varphi}_{1ul_1})^2 + \ddot{\varphi}_{12}\right) + \dfrac{\cos^3\delta_1}{\cos^3\varphi_2(t_{1ul_1})}\left(3tg\left(\varphi_2\left(t_{1ul_1}\right)\right)\left(\dot{\varphi}_2\left(\varphi_2\left(t_{1ul_1}\right)\right)\right)^2 + \ddot{\varphi}_{21}\right)} t_{sud_1} -$$

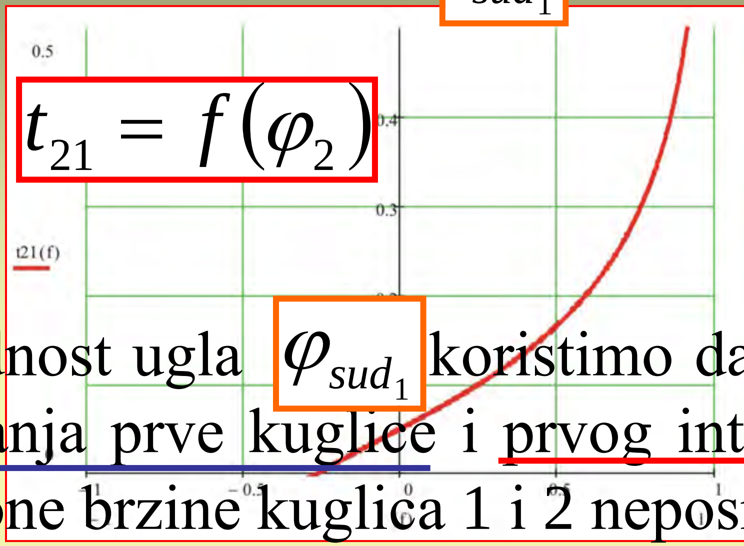
$$- \frac{2\left(\delta_1 - \dfrac{\cos^3\delta_1}{\cos^3\varphi_2(t_{1ul_1})}\varphi_2\left(t_{1ul_1}\right)\right)}{\left(3tg(\delta_1)(\dot{\varphi}_{1ul_1})^2 + \ddot{\varphi}_{12}\right) + \dfrac{\cos^3\delta_1}{\cos^3\varphi_2(t_{1ul_1})}\left(3tg\left(\varphi_2\left(t_{1ul_1}\right)\right)\left(\dot{\varphi}_2\left(\varphi_2\left(t_{1ul_1}\right)\right)\right)^2 + \ddot{\varphi}_{21}\right)} = 0$$

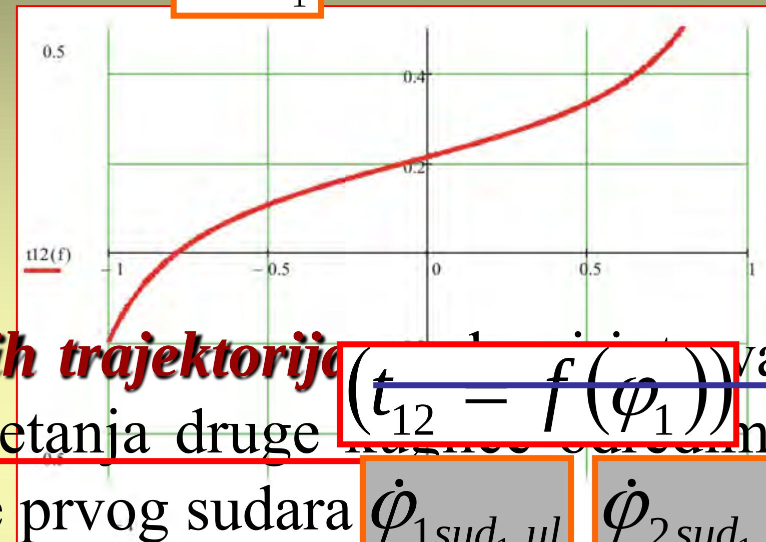
Ubrzanja $\ddot{\varphi}_{12}$ i $\ddot{\varphi}_{21}$ ***određujemo približno***, sa dovoljnom tačnošću, ***kao aritmetička sredina srednjih ubrzanja na podintervalima datog intervala***

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

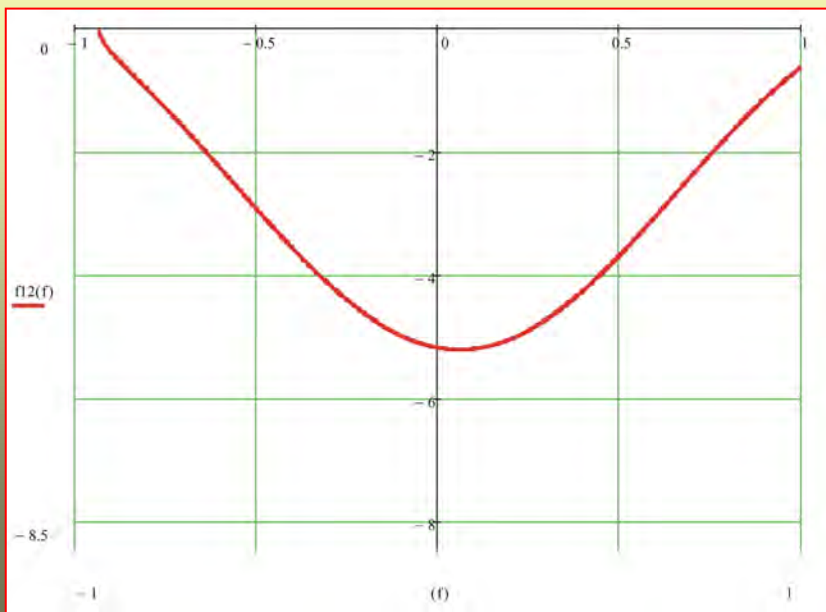
Za dobijenu vrednost $\boxed{t_{sud_1}}$ sa grafika nalazimo $\boxed{\varphi_{sud_1}}$ ***(vrednosti su iste)***

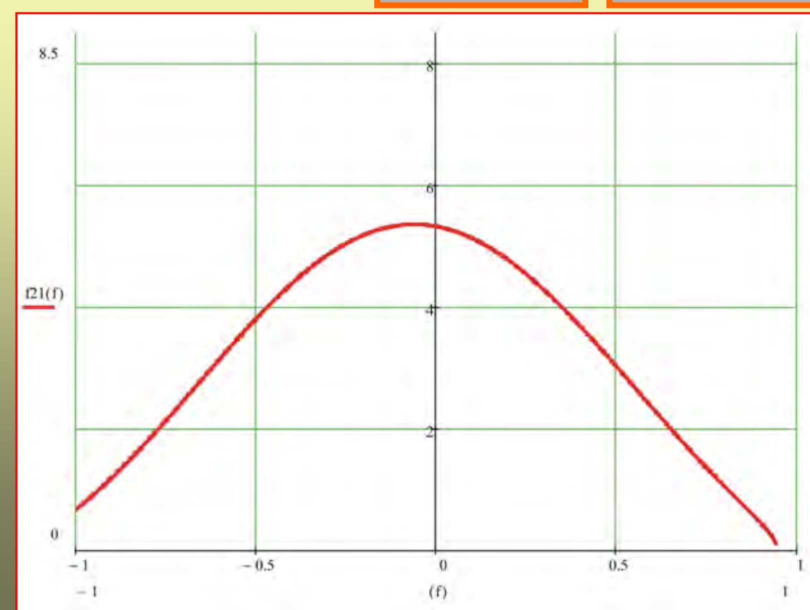
$$\boxed{t_{21} = f(\varphi_2)}$$





Vrednost ugla $\boxed{\varphi_{sud_1}}$ koristimo da sa ***faznih trajektorija*** $\boxed{(t_{12} = f(\varphi_1))}$ za prvi interval kretanja prve kuglice i prvog intervala kretanja druge kuglice određujemo ugaone brzine kuglica 1 i 2 neposredno pre prvog sudara $\boxed{\dot{\varphi}_{1sud_1,ul}}$ $\boxed{\dot{\varphi}_{2sud_1,ul}}$





Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Nakon određivanja $\boxed{\dot{\varphi}_{1sud_1,ul}}$ $\boxed{\dot{\varphi}_{2sud_1,ul}}$ korišćenjem:

Zakona o promeni količine kretanja u primeni na dinamiku (s)udara

$$\boxed{m_1\left(\dot{\varphi}_{1sud_1,odl}+\dot{\varphi}_{1sud_1,ul}\right)=m_2\left(\dot{\varphi}_{2sud_1,odl}+\dot{\varphi}_{2sud_1,ul}\right);}$$

Njutnove hipoteze
o odnosu relativnih ugaonih brzina kuglica

$$\boxed{\frac{\dot{\varphi}_{1sud_1,odl}+\dot{\varphi}_{2sud_1,odl}}{\dot{\varphi}_{1sud_1,ul}+\dot{\varphi}_{2sud_1,ul}}=k}$$

Dobijamo izraze na osnovu kojih eksplicitno određujemo ugaone brzine kuglica neposredno posle sudara

$$\dot{\varphi}_{2sud_1,odl}=\frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}\dot{\varphi}_{1sud_1,ul}-\frac{m_2-km_1}{m_1+m_2}\dot{\varphi}_{2sud_1,ul}$$

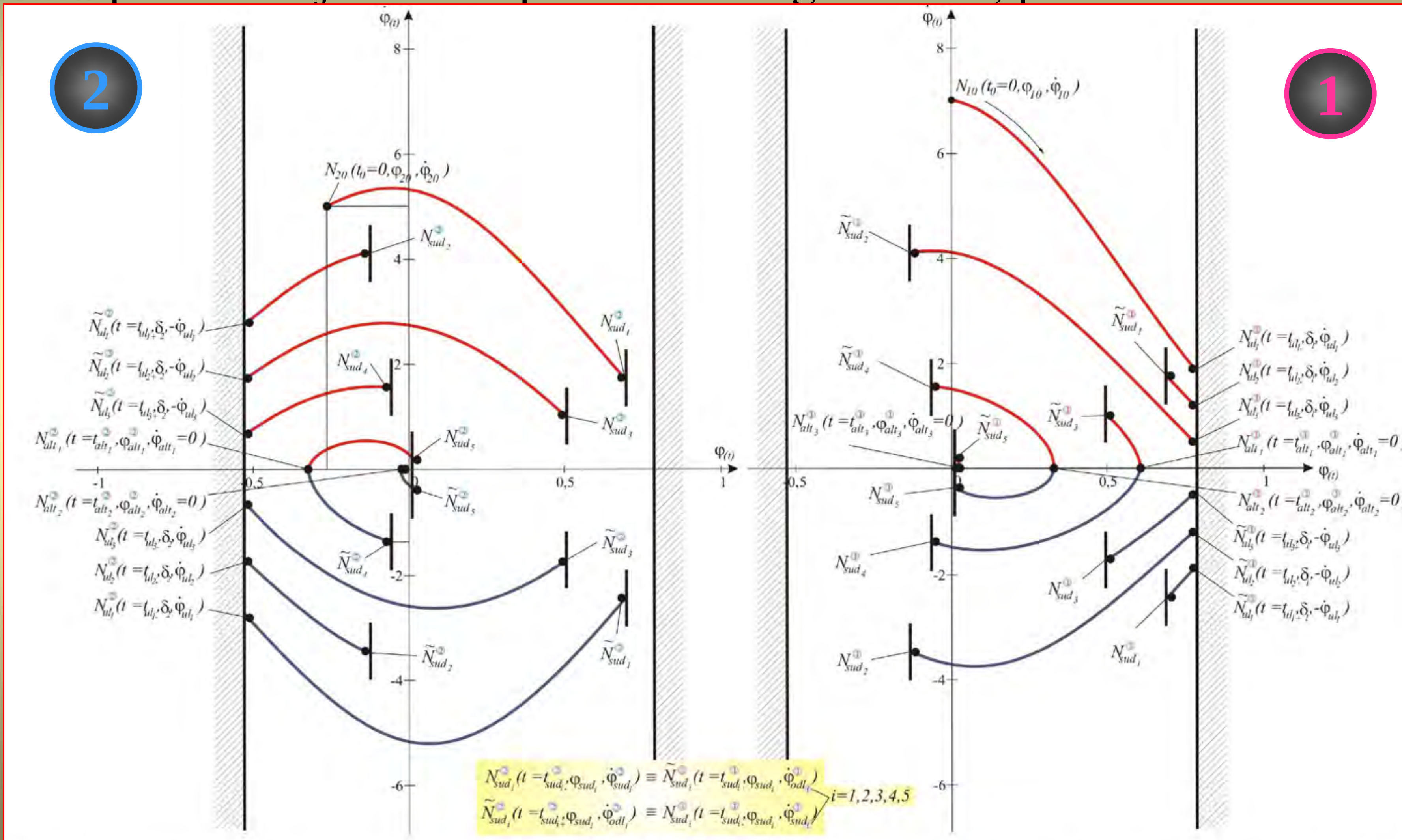
$$\dot{\varphi}_{1sud_1,odl}=\frac{km_2-m_1}{m_1+m_2}\dot{\varphi}_{1sud_1,ul}+\frac{m_2(k+1)}{m_1+m_2}\dot{\varphi}_{2sud_1,ul}$$

KONAČNO

$\boxed{\varphi_{sud_1}}$ $\boxed{\dot{\varphi}_{1sud_1,odl},\quad \dot{\varphi}_{2sud_1,odl}}$ ***Predstavljaju početne uslove kretanja kuglica u narednim intervalima kretanja***

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafička vizuelizacija analize kretanja ***posmatranog vibroudarnog sistema*** prikazana je faznim portretima kuglice 2 i 1, posebno.



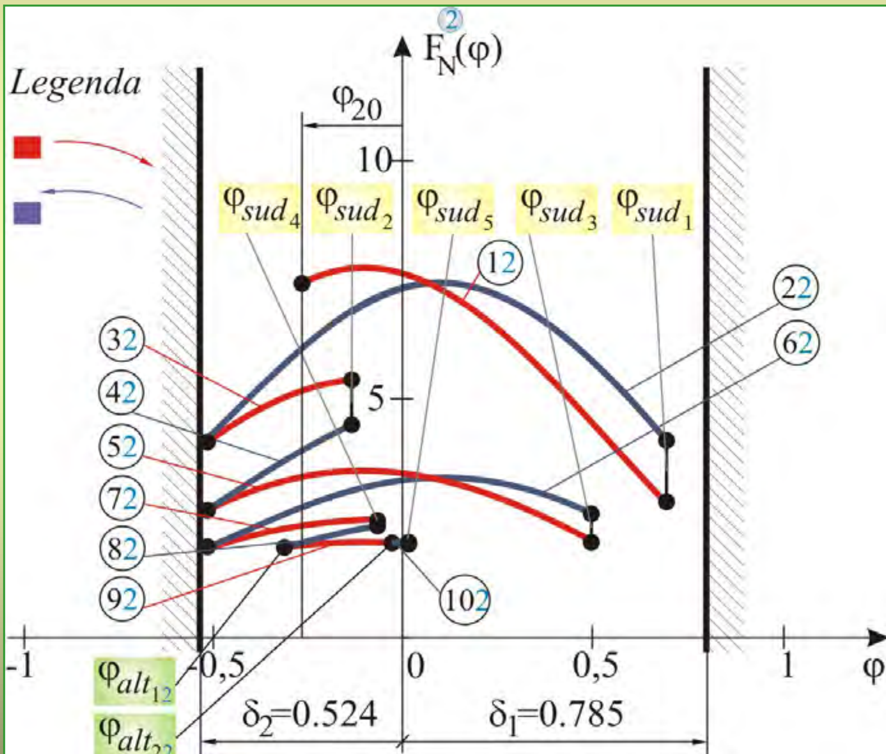
Slika 3.66. Fazni portret kuglice ② (kao deo oscilatora) koja se kreće po paraboličnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja $\mu_0=tg\alpha$ sa ograničenim elongacijama u ravni $(\varphi,\dot{\varphi})$

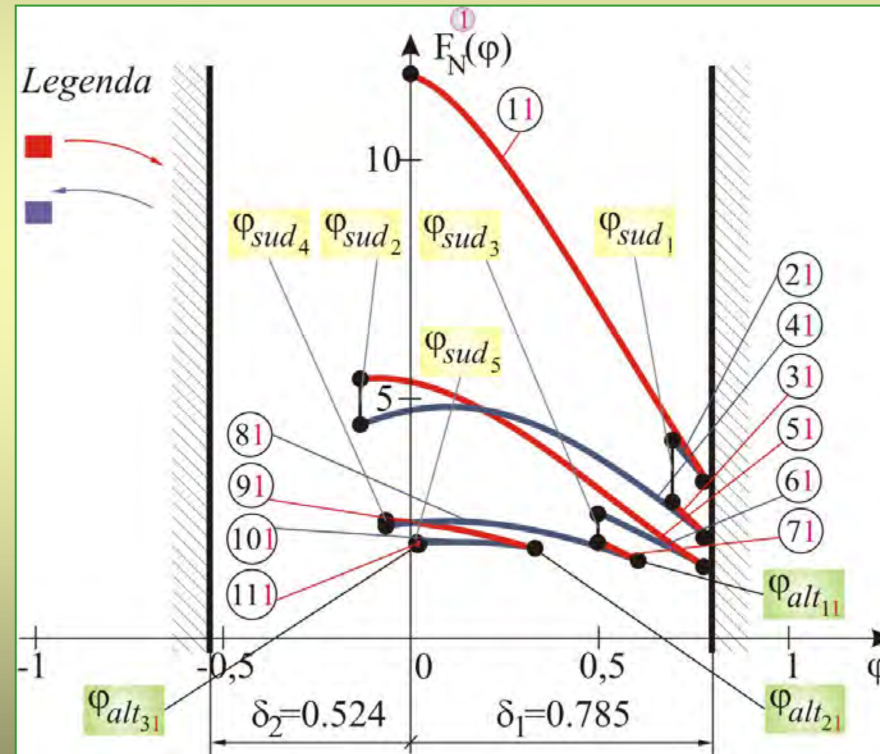
Slika 3.67. Fazni portret kuglice ① (kao deo oscilatora) koja se kreće po paraboličnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja $\mu_0=tg\alpha$ sa ograničenim elongacijama u ravni $(\varphi,\dot{\varphi})$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

Grafik promene sile pritiska



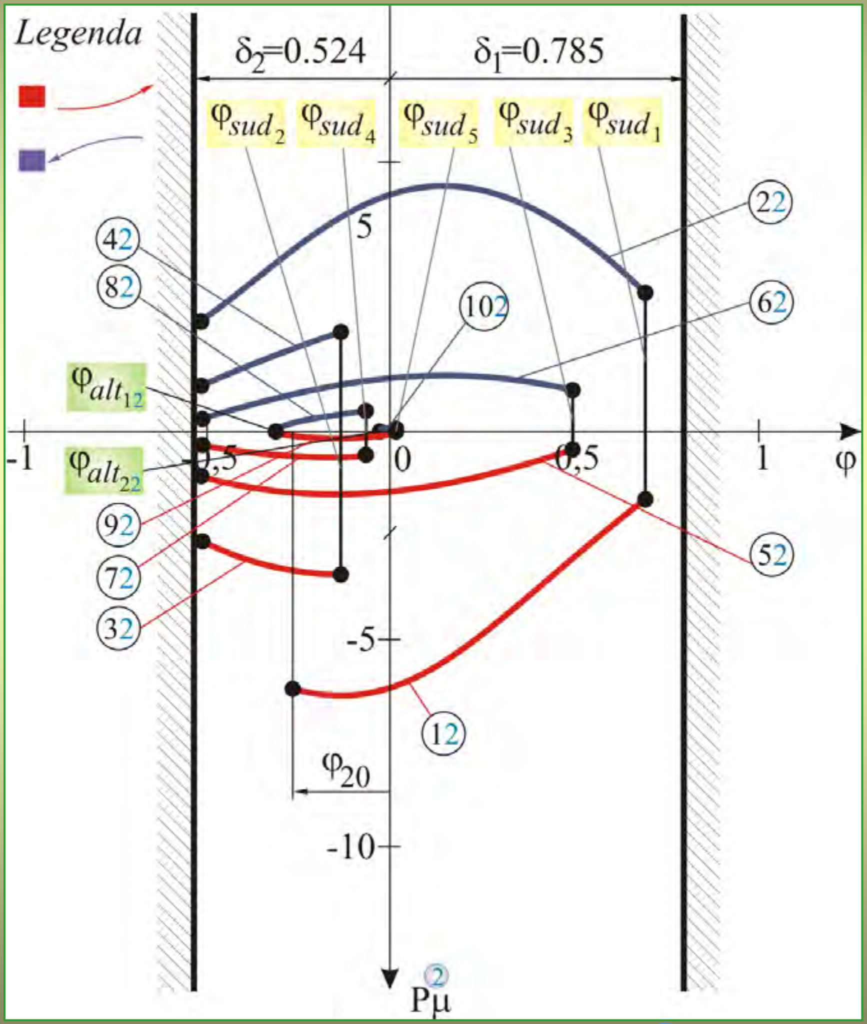


Druge kuglice 2

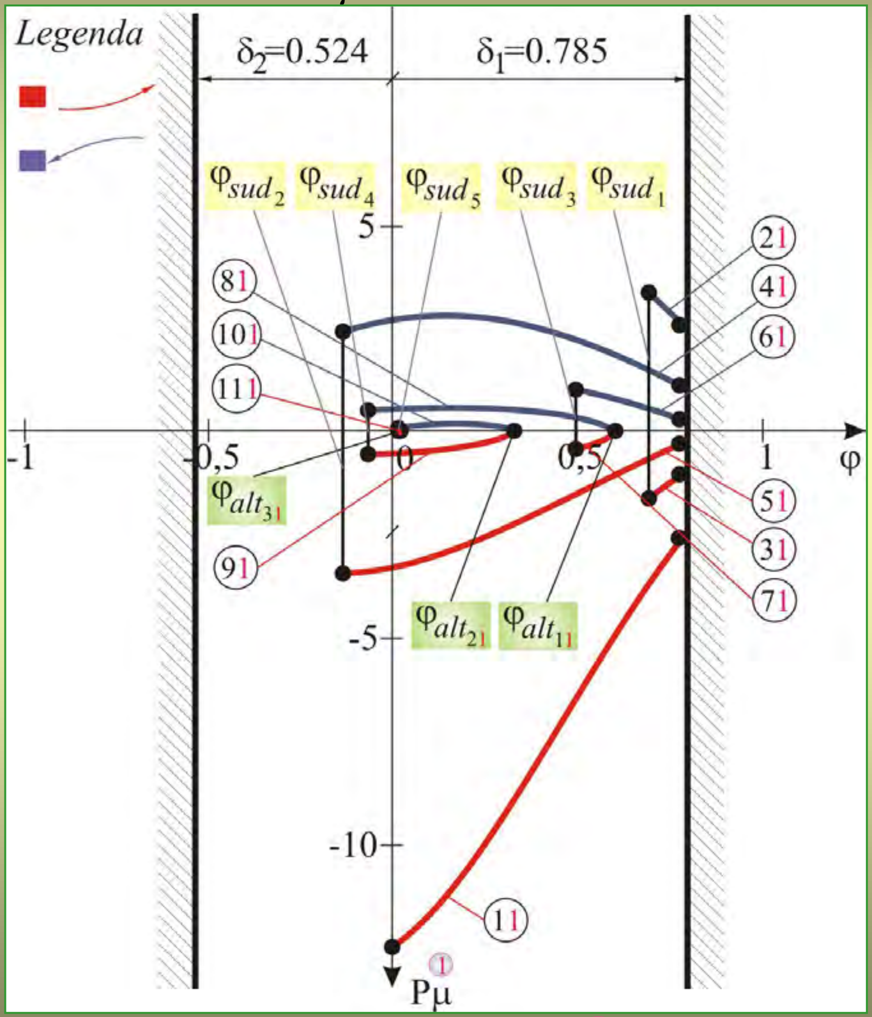
Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene snage P_μ



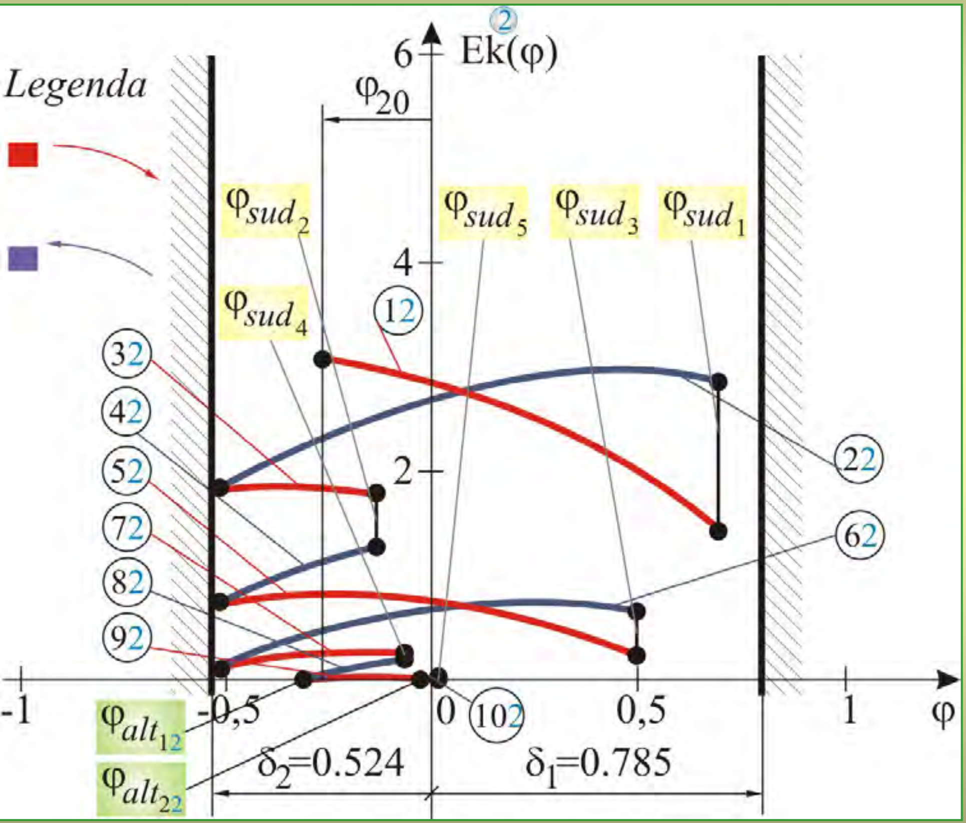
Druge kuglice 2



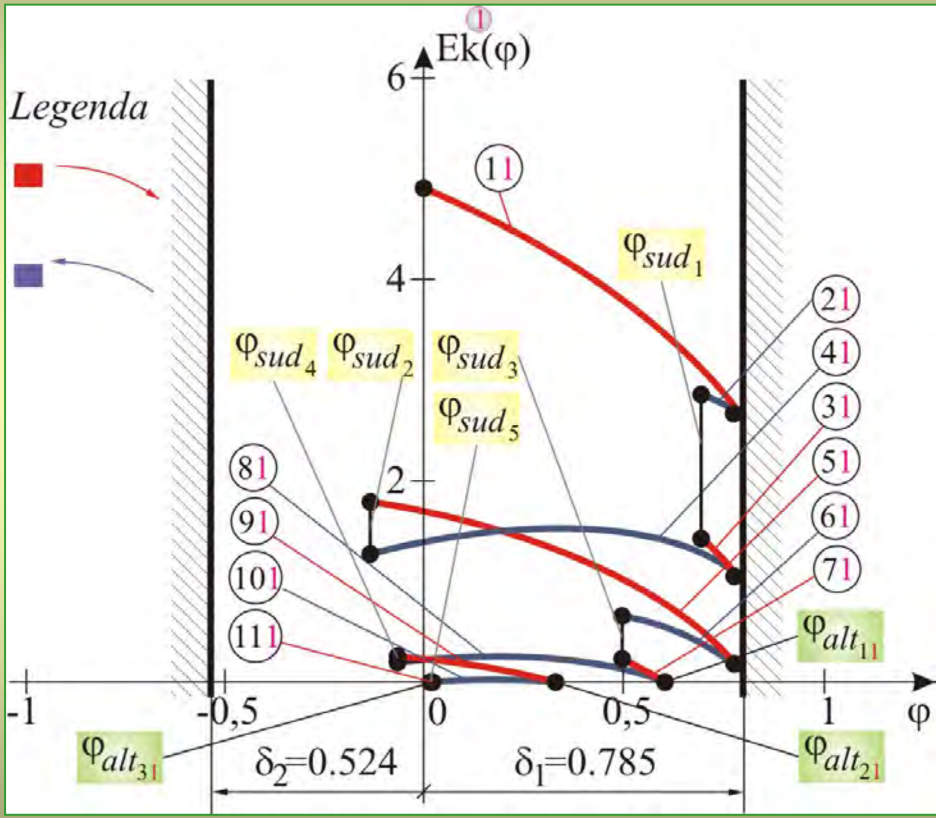
Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene kinetičke energije



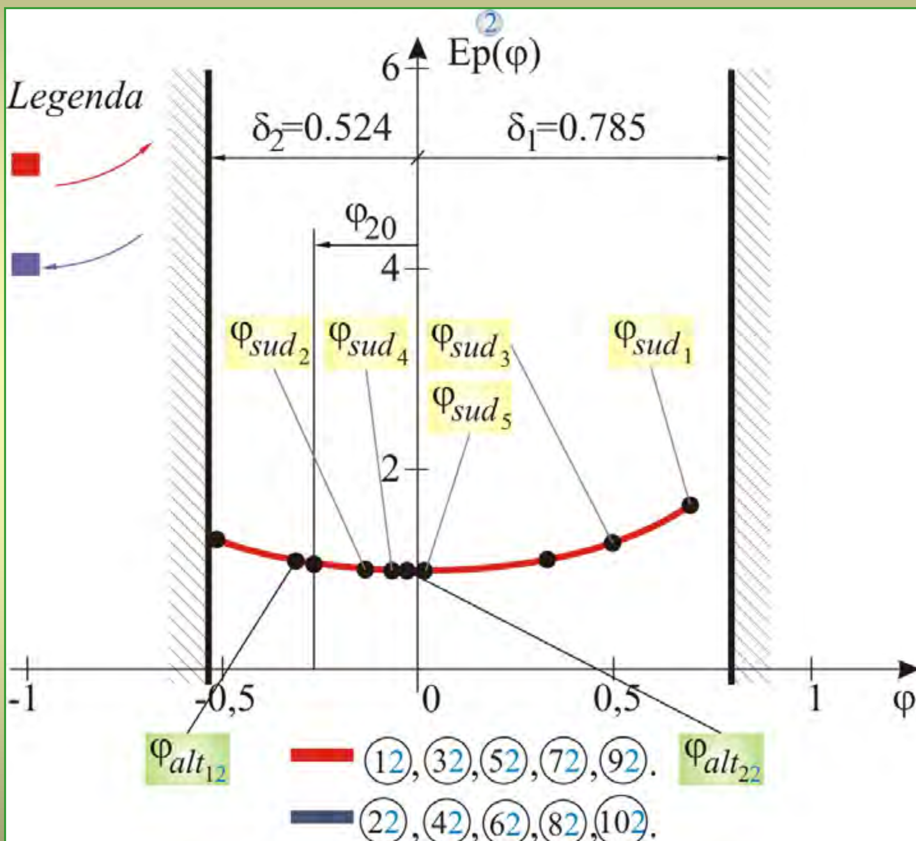
Druge kuglice 2

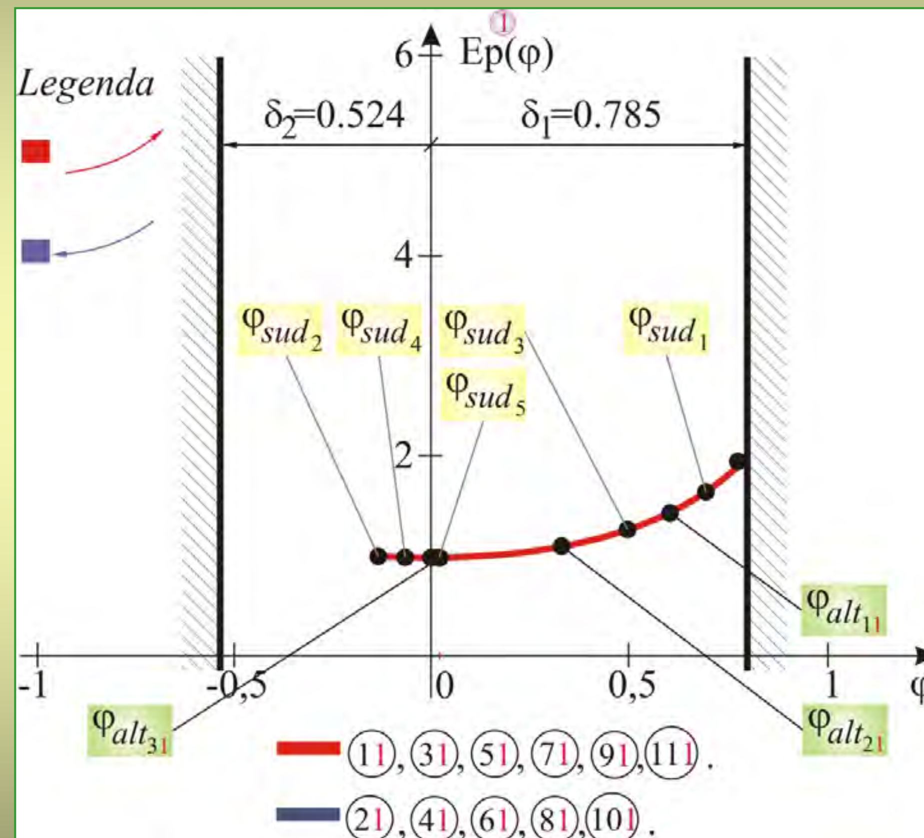


Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene potencijalne energije



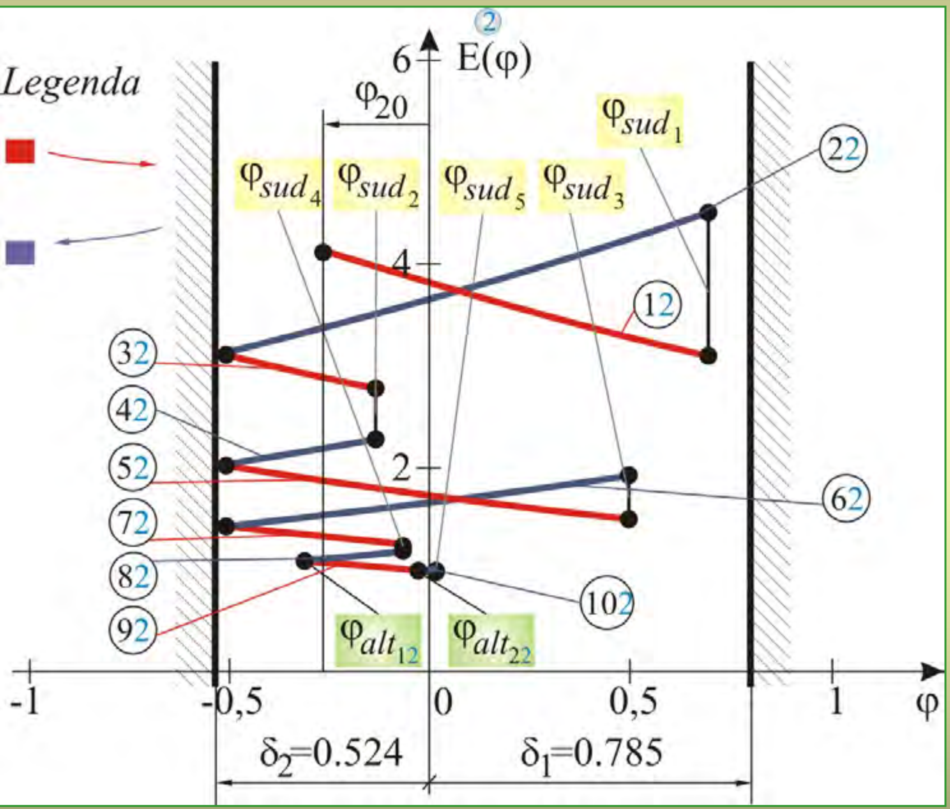


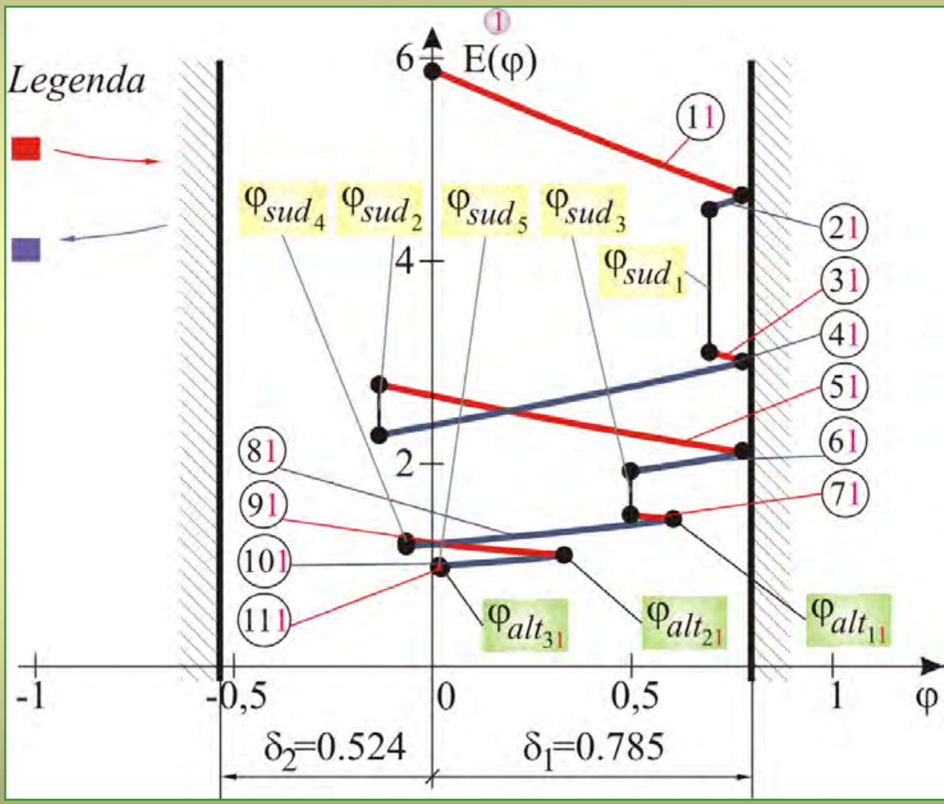
Druge kuglice 2

Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene ukupne mehaničke energije





Druge kuglice 2

Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Cikloidna hrapava linija

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja teške materijalne tačke po cikloidnoj hrapavoj liniji u funkciji generalisane koordinate $\boxed{\varphi}$ je

$$\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{2}tg\frac{\varphi}{2}\mp\mu\right)+\left(tg\frac{\varphi}{2}\pm\mu\right)\frac{g}{2R}=0,\quad \begin{cases} za\ v=2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}>0 \\ za\ v=2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}<0 \end{cases}$$

Za ***potpuno opisivanje*** dinamike teške materijalne tačke diferencijalnoj (dvojnoj) jednačini kretanja potrebno je pridružiti:

a* početne uslove

$$s_{(0)}\left(\varphi_{(0)}\right)=s_0\left(\varphi_0\right)\ \text{ i } v_{(0)}\left(\varphi_{(0)},\dot{\varphi}_{(0)}\right)=\dot{s}_{(0)}\left(\varphi_{(0)},\dot{\varphi}_{(0)}\right)=v_0\left(\varphi_0,\dot{\varphi}_0\right);$$

b* uslove ograničenja ugaone elongacije, kao i ***uslove sudara***

$$s_{ul,i}=s_i\left(\varphi_i\right),\ s_{ul,(i+1)}=s_{(i+1)}\left(\varphi_{(i+1)}\right),\quad \dot{s}_{odl,i}\left(\dot{\varphi}_{odl,i}\right)=-k\dot{s}_{ul,i}\left(\dot{\varphi}_{ul,i}\right)$$

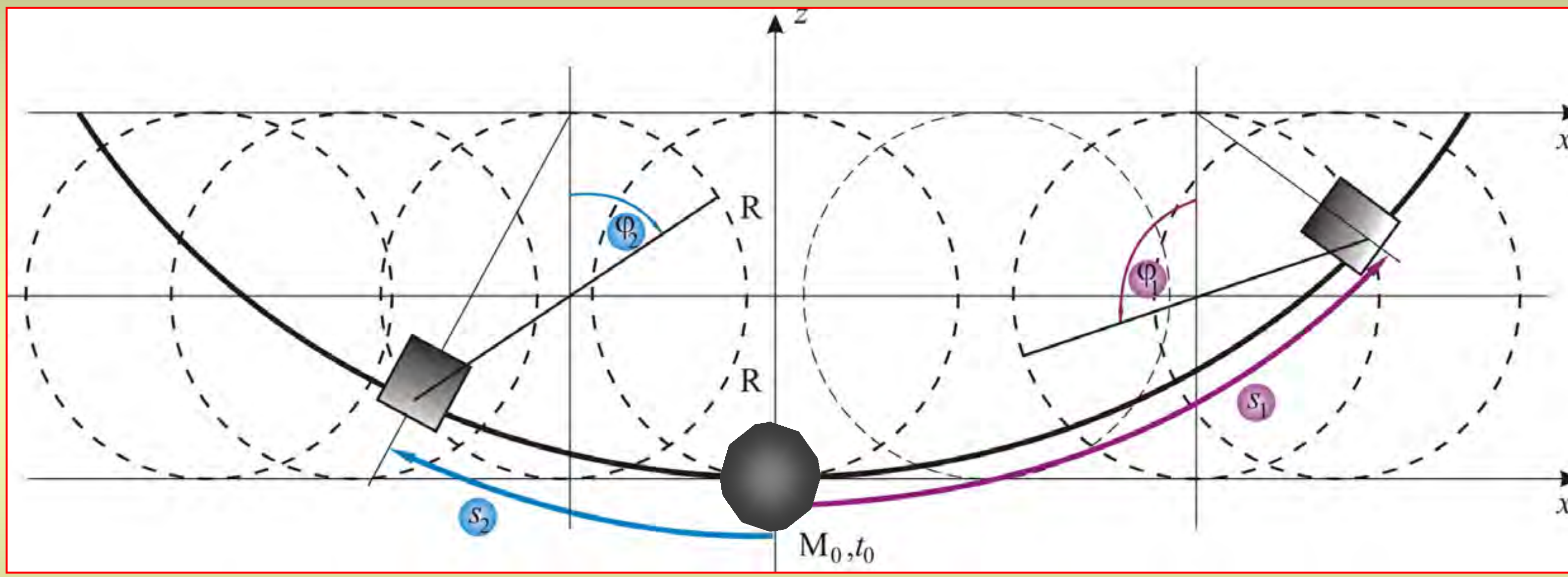
$$i=1,2,3,\ldots,n$$

USVAJAMO $\boxed{k=1}$ - ***idealno elastični sudar***;

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Slobodno kretanje teške materijalne tačke delimo na odgovarajuće:

intervale i podintervale kretanja



kojima odgovara

(dvojna) jednačina fazne trajektorije

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{\left(\dfrac{g}{2R}\right)}{1+4\mu^2}\frac{1}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}\left[(\pm 3\mu)\sin\varphi - (1-2\mu^2)\cos\varphi + \frac{1+4\mu^2}{2} + Ce^{\mp 2\mu\varphi}\right] \quad \begin{cases} za\ v = 2R\cos\dfrac{\varphi}{2}\dot{\varphi} > 0 \\ za\ v = 2R\cos\dfrac{\varphi}{2}\dot{\varphi} < 0 \end{cases}$$

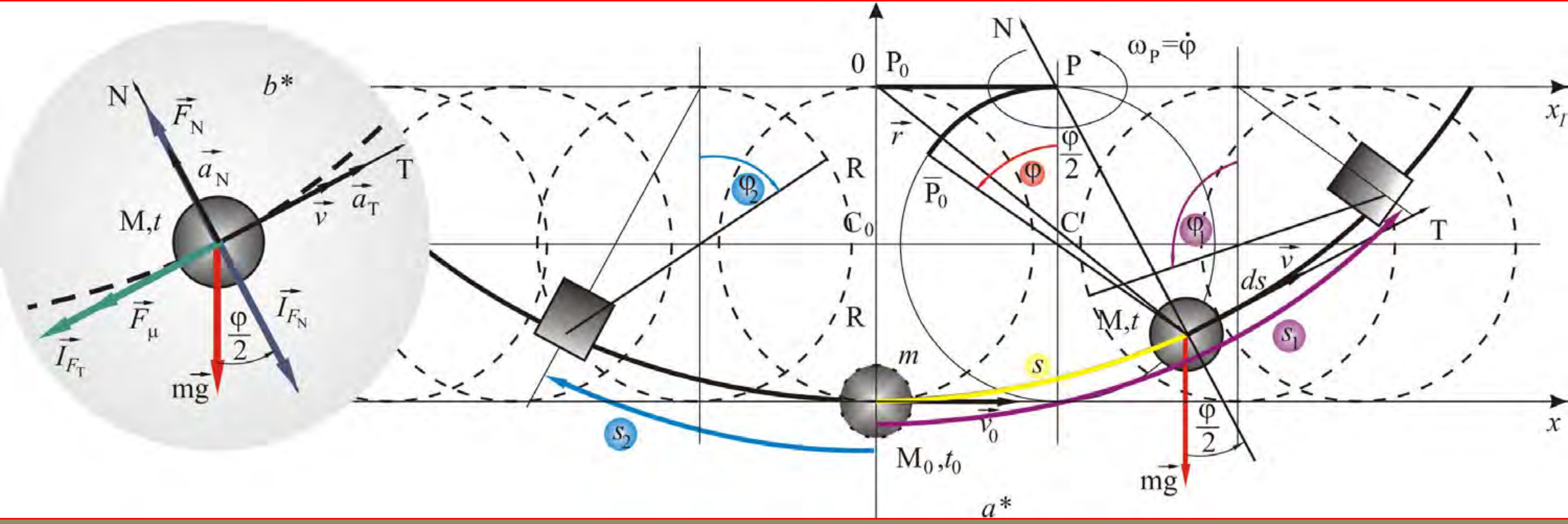
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Primer 3

Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom

Položaji graničnika određeni lučnim koordintama

$$s_{ul,1} = s_1(\varphi_1) \quad s_{ul,2} = s_2(\varphi_2)$$



Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom: a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Analizom intervala kret

- Nakon četvrtog intervala kre ***vibroudarni***, već predstavlja osnovn

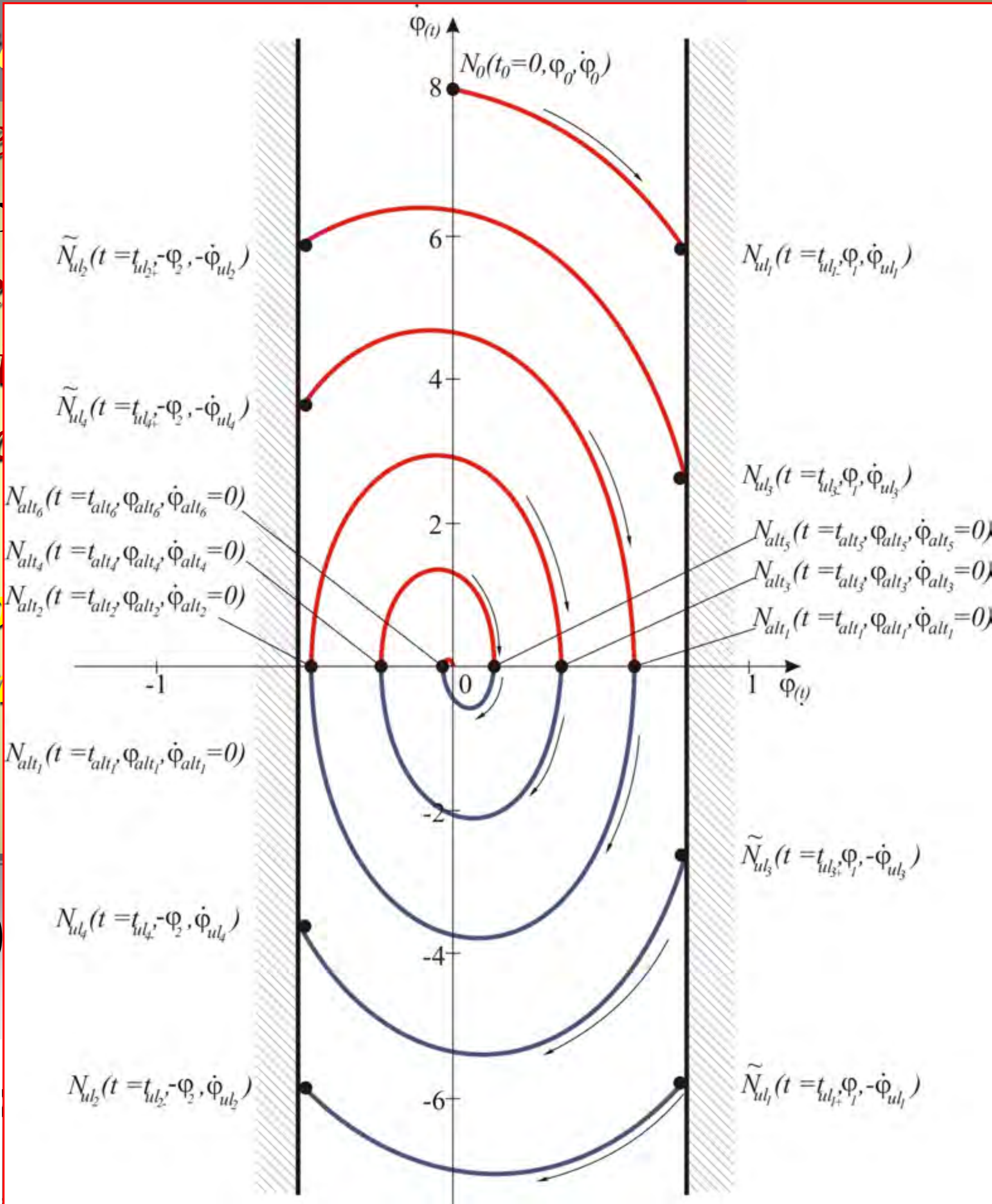
- Od četvrtog intervala pa do de tačaka alternacije) ***sistem je osnovn***

- Posle desetog intervala kretanj ***položaj ravnoteže***.

Grafička vizuelizacija faznog p ***posmatranom vibroudarnom sisten***

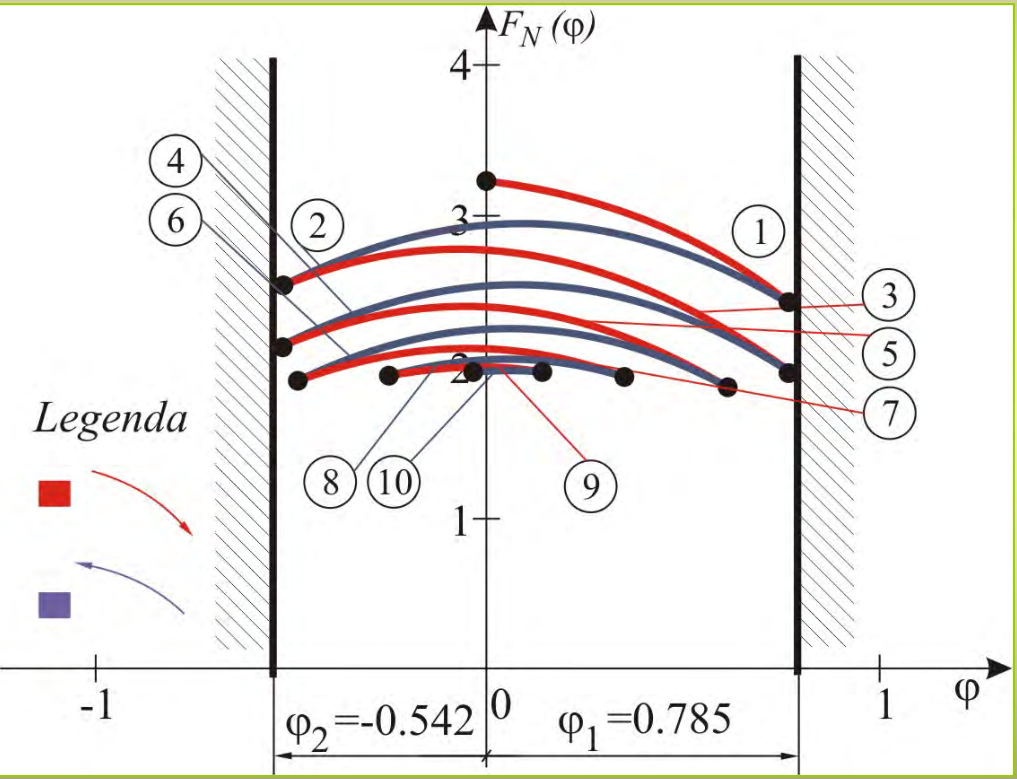
Vredosti parametara su : $\alpha_0 = 0$

Fazni portret teške materijalne tačke koja se kreće po cikloidnoj hrapavoj liniji

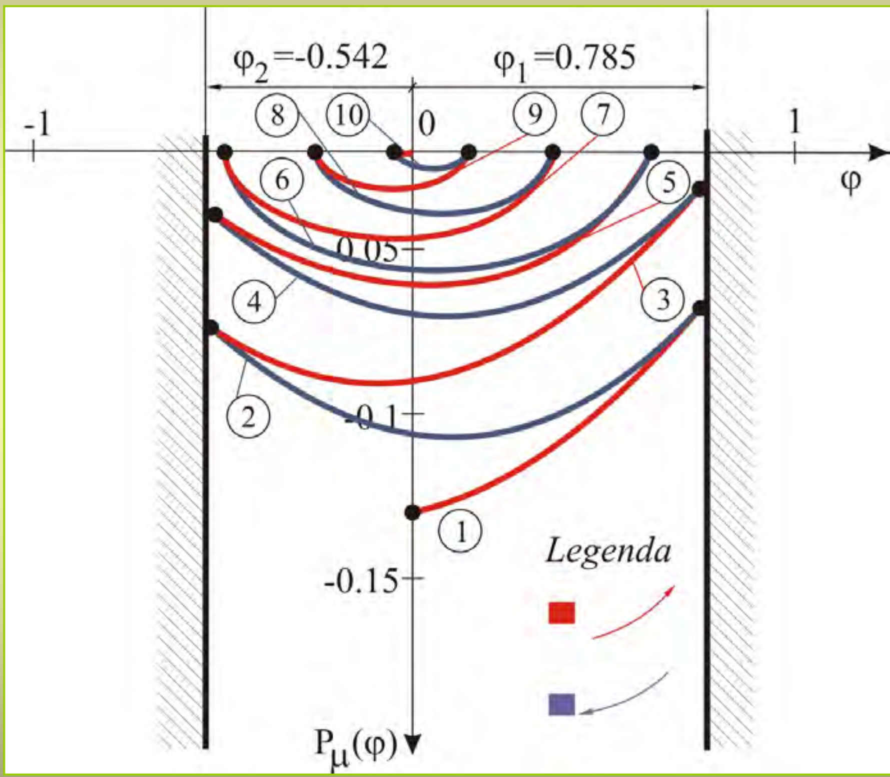


Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

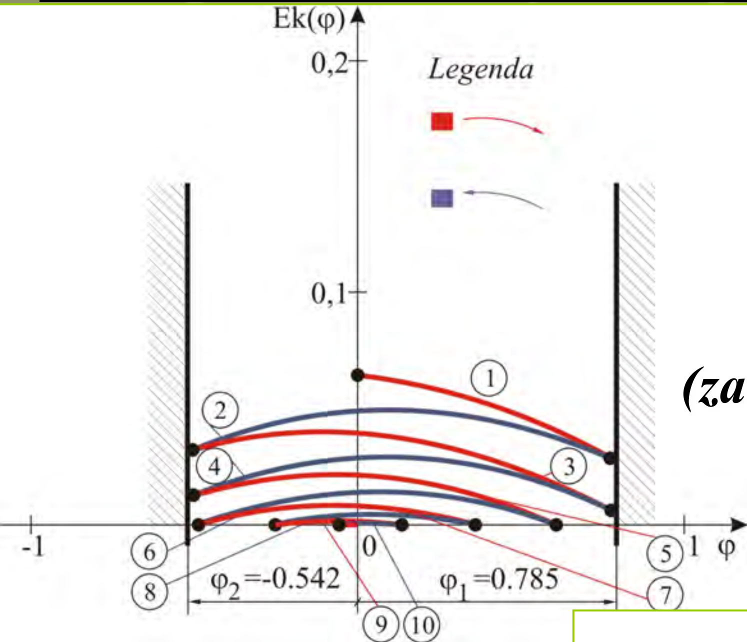


Kriva promene sile pritiska za sve intervale kretanja



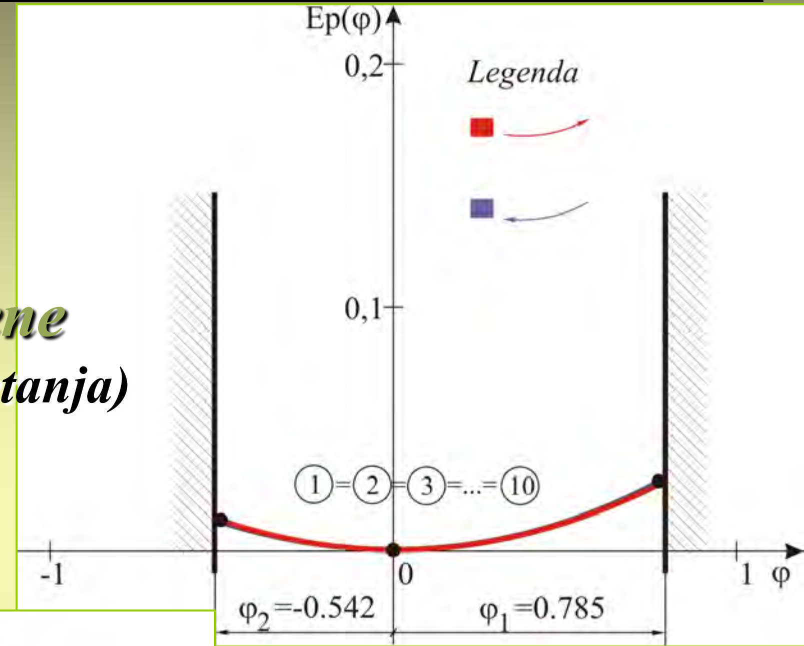
Promene snage za sve intervale kretanja

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



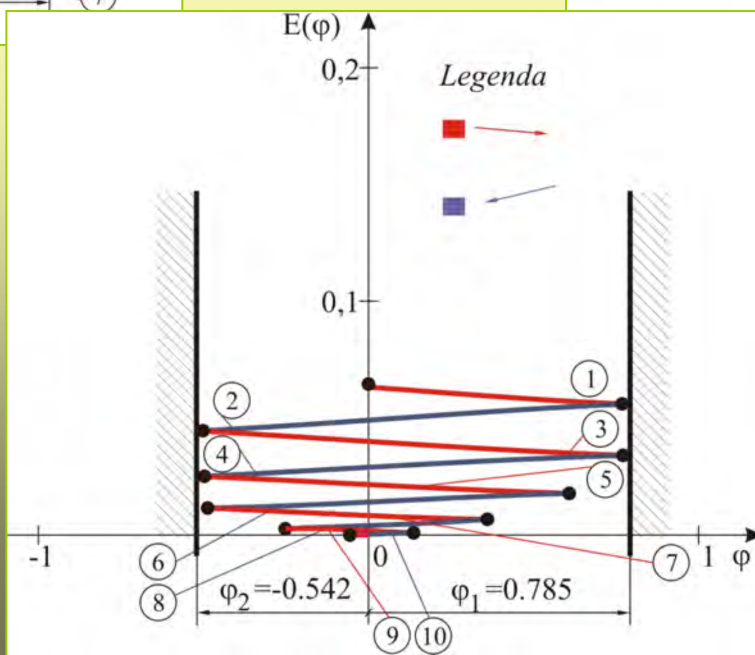
Grafici promene

(za sve intervale kretanja)



Kinetičke energije u ravni $\left(Ek,\varphi\right)$

Potencijalne energije u ravni $\left(Ep,\varphi\right)$



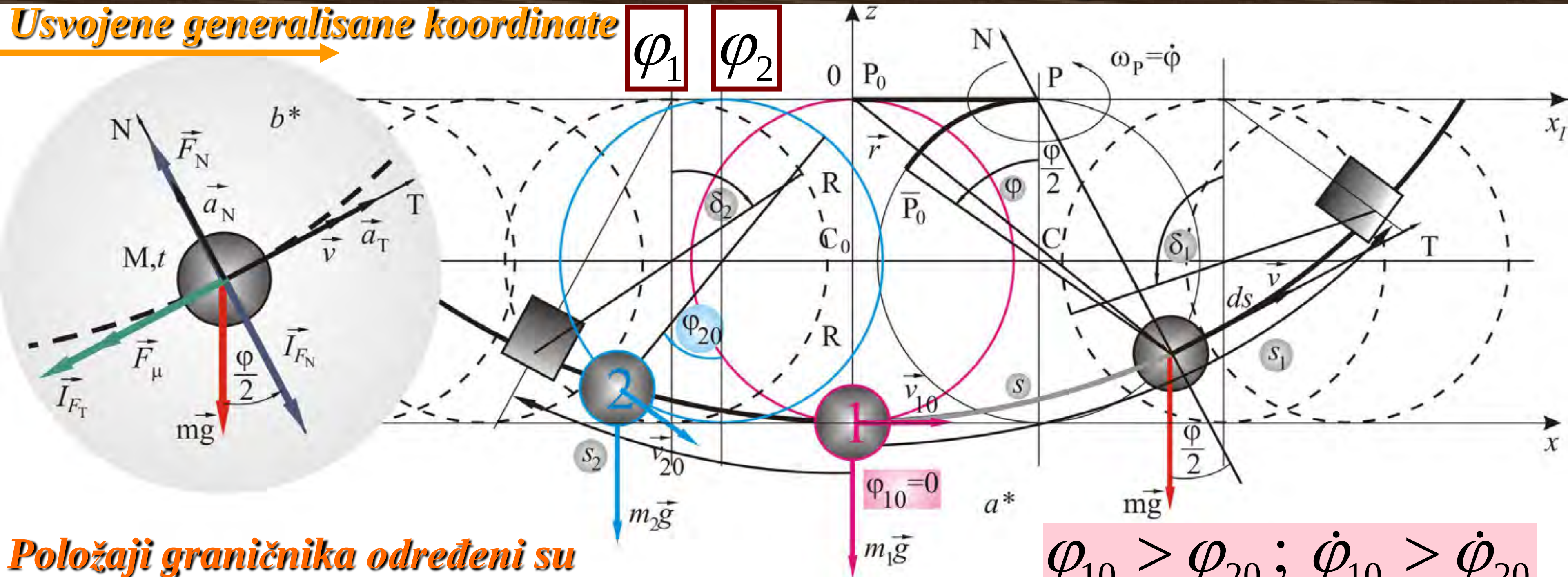
Ukupne mehaničke energije u ravni $\left(E,\varphi\right)$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Primer 4

Sistem sa dva nepokretna graničivača elongacija, na bazi oscilatora sa dve kuglice

Usvojene generalisane koordinate $\boxed{\varphi_1}$ $\boxed{\varphi_2}$



Položaji graničnika određeni su

$$s_{ul,1} = s_1(\delta_1), s_{ul,2} = s_2(\delta_2)$$

Uslov funkcionisanja ovakvog vibroudarnog sistema

$$\varphi_{10} > \varphi_{20}\,;\ \dot{\varphi}_{10} > \dot{\varphi}_{20}$$

Sistem sa dva nepokretna graničivača elongacija, na bazi oscilatora sa dve kuglice: a početni i izvedeni položaj kuglica; b* plan sila*

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Analiza kretanja vibroudarnog sistema

Diferencijalne (dvojne) jednačine kretanja su

$$\ddot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_1^2\left(\frac{1}{2}tg\frac{\varphi_1}{2}\mp\mu\right)+\left(tg\frac{\varphi_1}{2}\pm\mu\right)\frac{g}{2R}=0,\quad\begin{cases} za\ v_1=2R\cos\dfrac{\varphi_1}{2}\dot{\varphi}_1>0\\ za\ v_1=2R\cos\dfrac{\varphi_1}{2}\dot{\varphi}_1<0\end{cases}$$

$$\ddot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_2^2\left(\frac{1}{2}tg\frac{\varphi_2}{2}\mp\mu\right)+\left(tg\frac{\varphi_2}{2}\pm\mu\right)\frac{g}{2R}=0,\quad\begin{cases} za\ v_2=2R\cos\dfrac{\varphi_2}{2}\dot{\varphi}_2>0\\ za\ v=2R\cos\dfrac{\varphi_2}{2}\dot{\varphi}_2<0\end{cases}$$

(dvojne) jednačine faznih trajektorija

$$\dot{\varphi}_1^2=-\frac{\left(\dfrac{g}{2R}\right)}{1+4\mu^2}\frac{1}{\cos^2\dfrac{\varphi_1}{2}}\left[(\pm3\mu)\sin\varphi_1-(1-2\mu^2)\cos\varphi_1+\frac{1+4\mu^2}{2}+C_1e^{\mp2\mu\varphi_1}\right]\begin{cases} za\ v_1=2R\cos\dfrac{\varphi_1}{2}\dot{\varphi}_1>0\\ za\ v_1=2R\cos\dfrac{\varphi_1}{2}\dot{\varphi}_1<0\end{cases};$$

$$\dot{\varphi}_2^2=-\frac{\left(\dfrac{g}{2R}\right)}{1+4\mu^2}\frac{1}{\cos^2\dfrac{\varphi_2}{2}}\left[(\pm3\mu)\sin\varphi_2-(1-2\mu^2)\cos\varphi_2+\frac{1+4\mu^2}{2}+C_2e^{\mp2\mu\varphi_2}\right]\begin{cases} za\ v_2=2R\cos\dfrac{\varphi_2}{2}\dot{\varphi}_2>0\\ za\ v_2=2R\cos\dfrac{\varphi_2}{2}\dot{\varphi}_2<0\end{cases}.$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

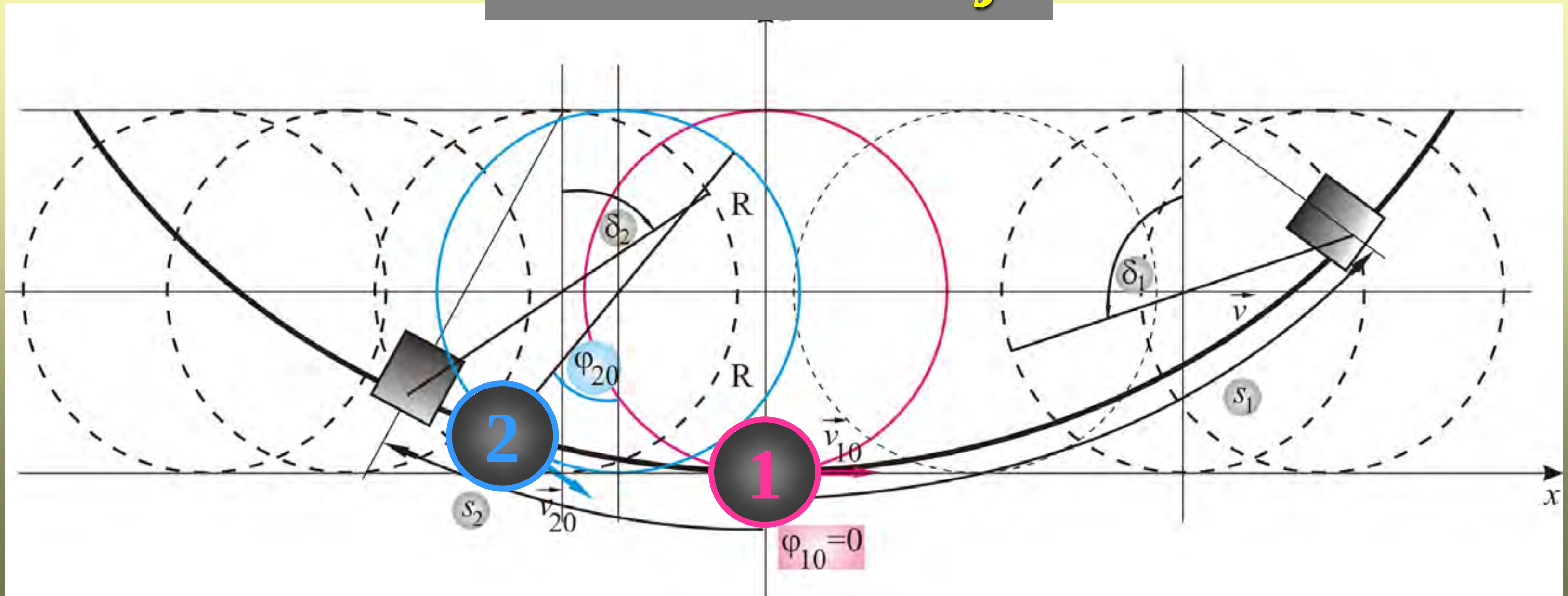
Vrednosti parametara su : $\alpha_0 = 0{,}05,\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right], R = 0{,}05[m]$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{4}[rad],\ \varphi_{10} = 0,\ \dot{\varphi}_{10} = 7\left[\frac{rad}{s}\right], m_1 = 0{,}2[kg],$$

$$\delta_2 = -\frac{\pi}{6}[rad],\ \varphi_{20} = -\frac{\pi}{12}[rad],\ \dot{\varphi}_{20} = 5\left[\frac{rad}{s}\right], m_2 = 0{,}2[kg].$$

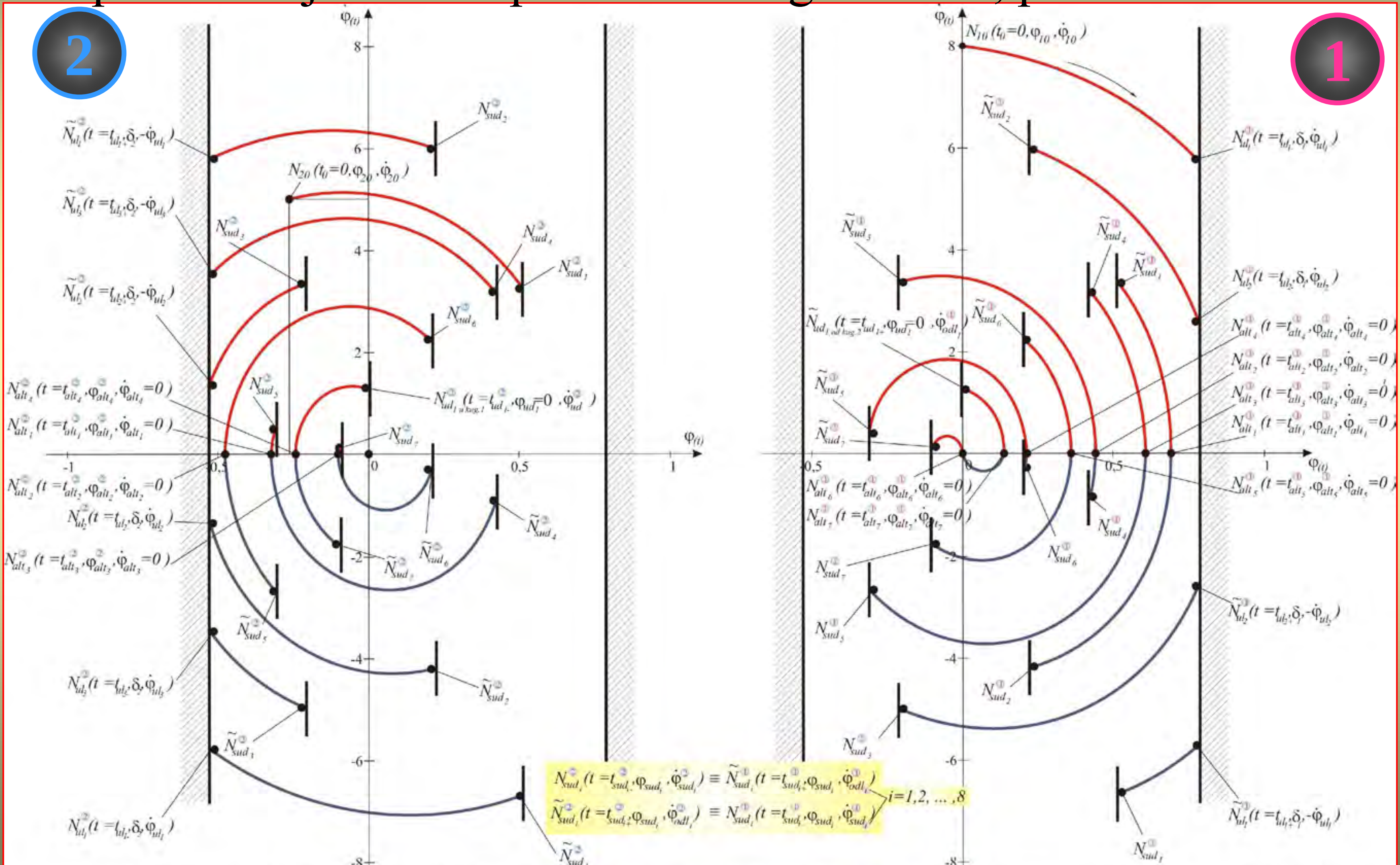
Slobodno kretanje teških materijalnih tačaka delimo na odgovarajuće:

intervale kretanja



Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafička vizuelizacija analize kretanja ***posmatranog vibroudarnog sistema*** prikazana je faznim portretima kuglice 2 i 1, posebno.



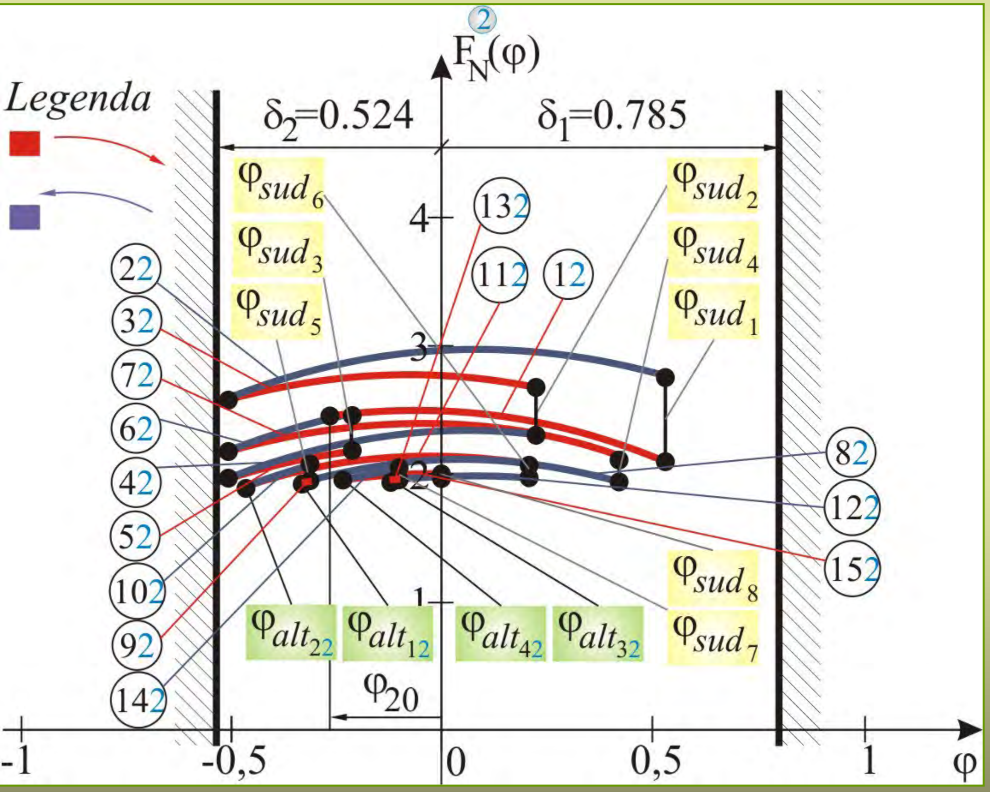
Slika 3.136. Fazni portret kuglice 2 (kao deo oscilatora) koja se kreće po cikloidnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja $\mu_0 = tg\alpha$ sa ograničenim elongacijama u ravni $(\varphi, \dot{\varphi})$

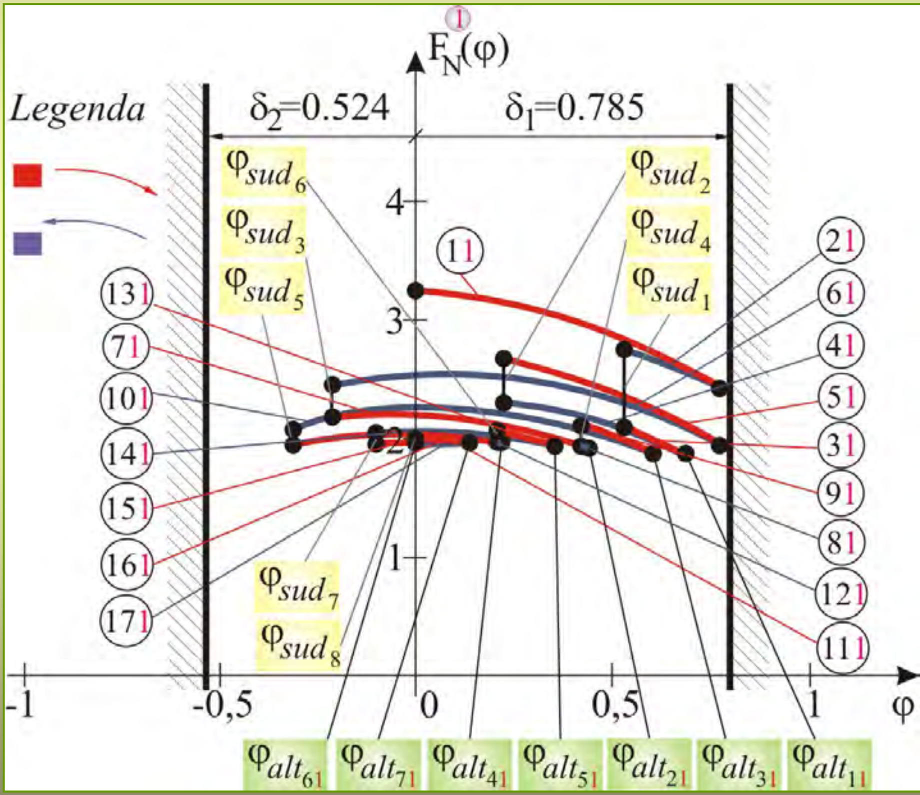
Slika 3.137. Fazni portret kuglice 1 (kao deo oscilatora) koja se kreće po cikloidnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja $\mu_0 = tg\alpha$ sa ograničenim elongacijama u ravni $(\varphi, \dot{\varphi})$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

Grafik promene sile pritiska



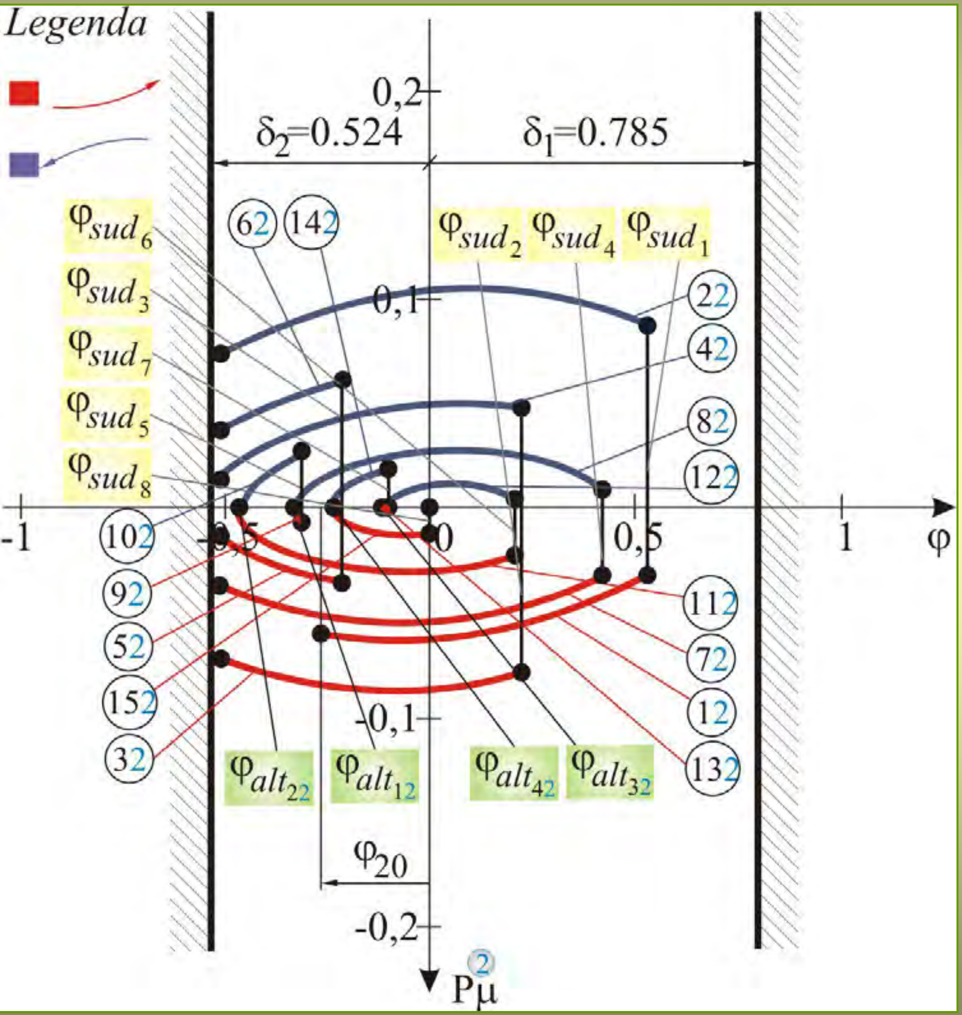


Druge kuglice 2

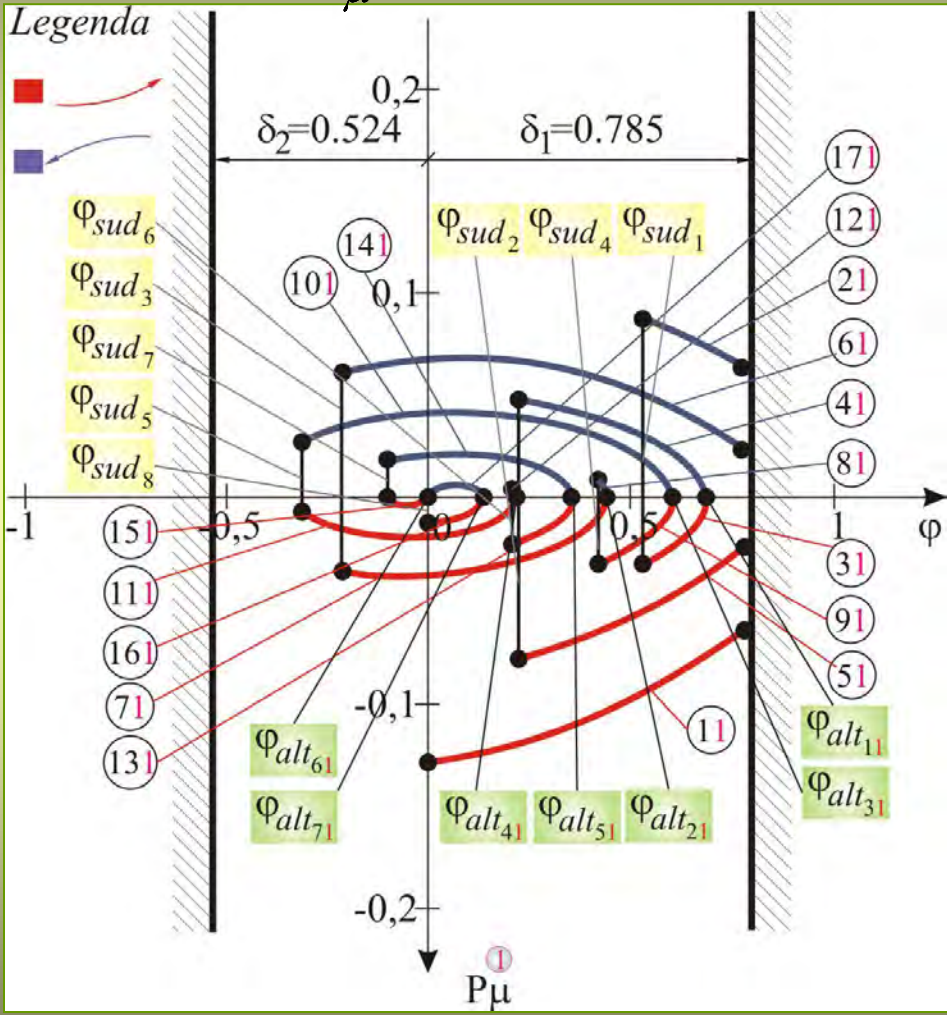
Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene snage P_μ



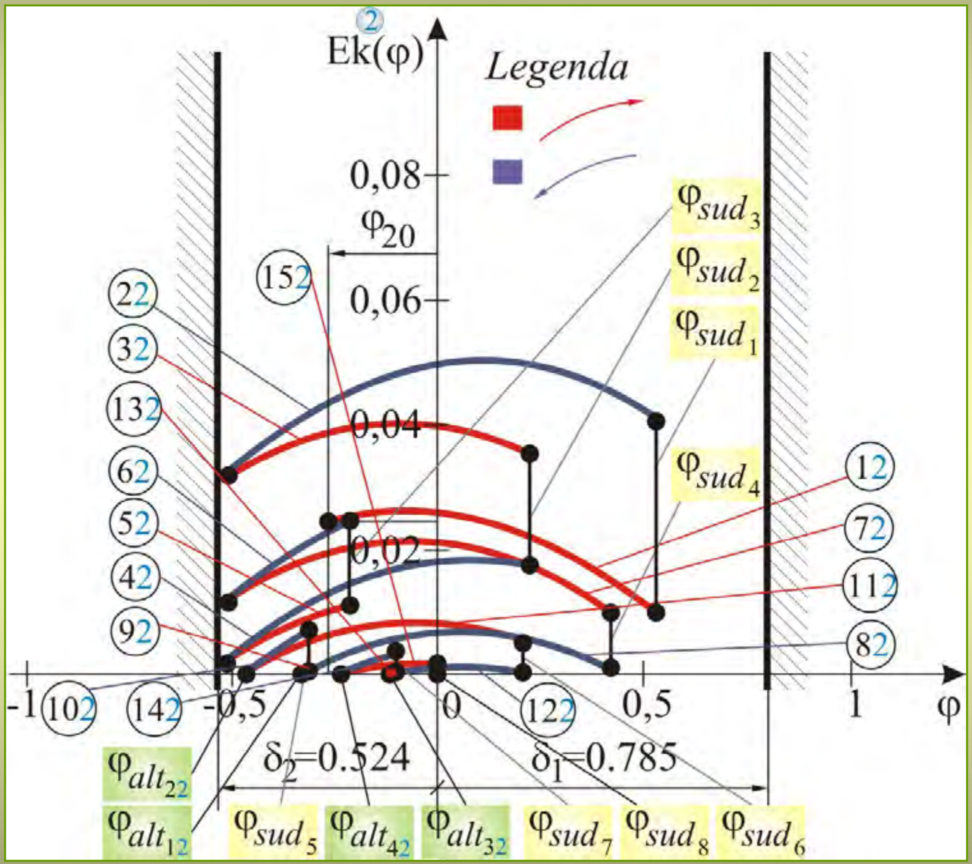
Druge kuglice 2



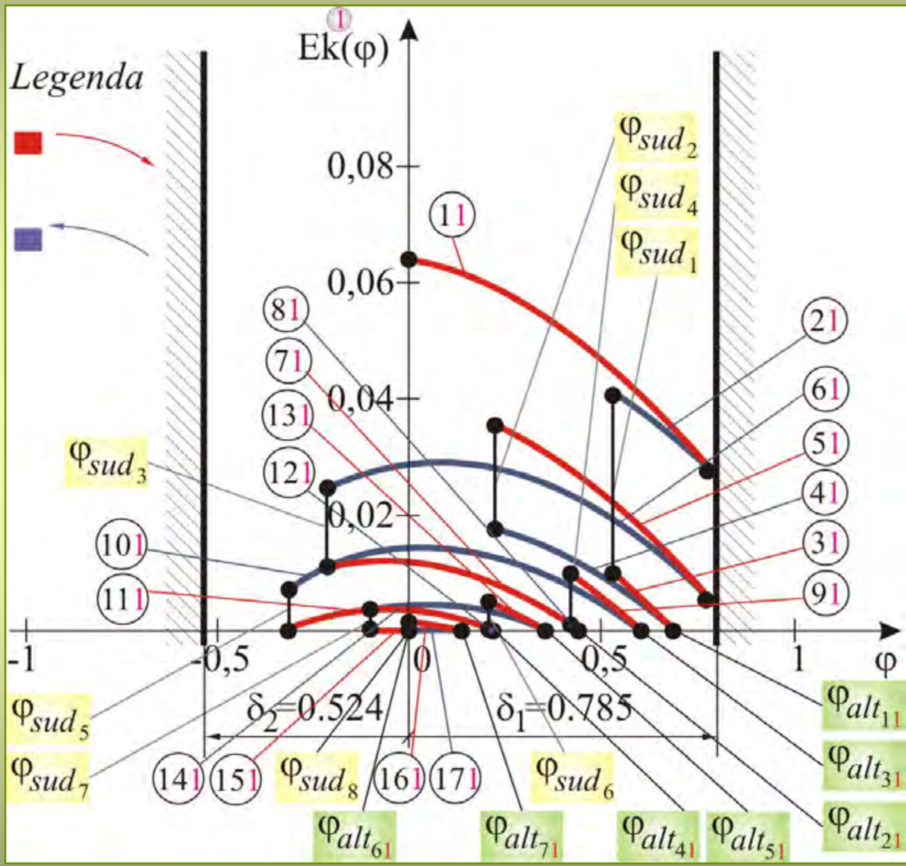
Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene kinetičke energije



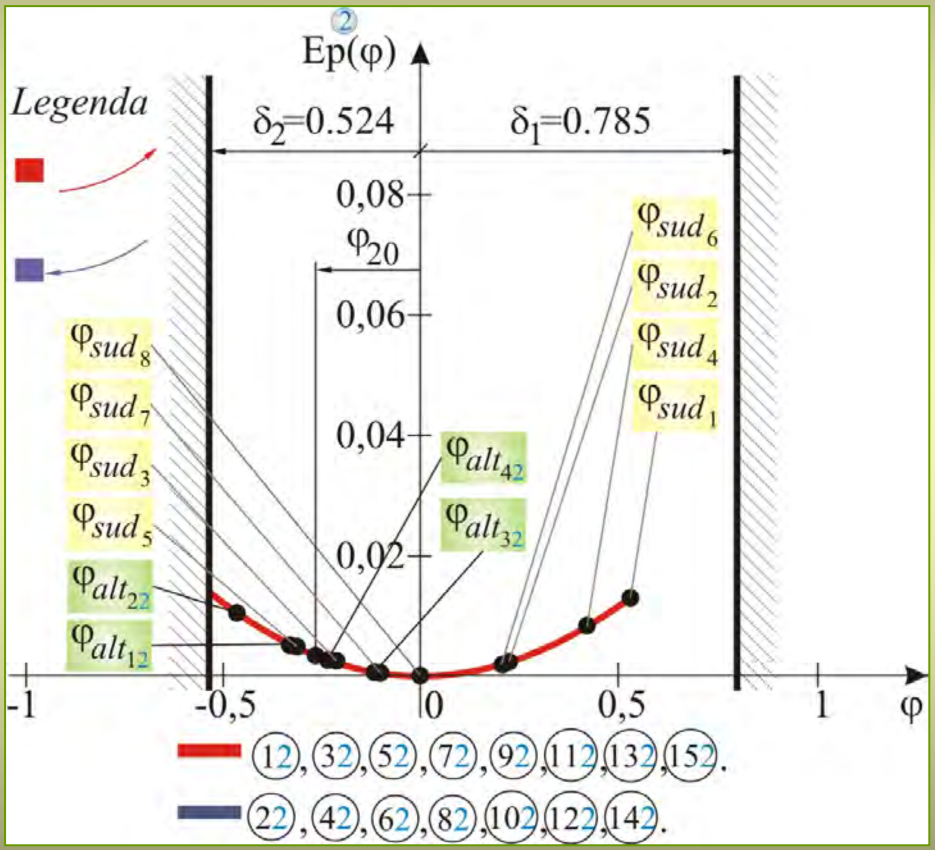
Druge kuglice 2



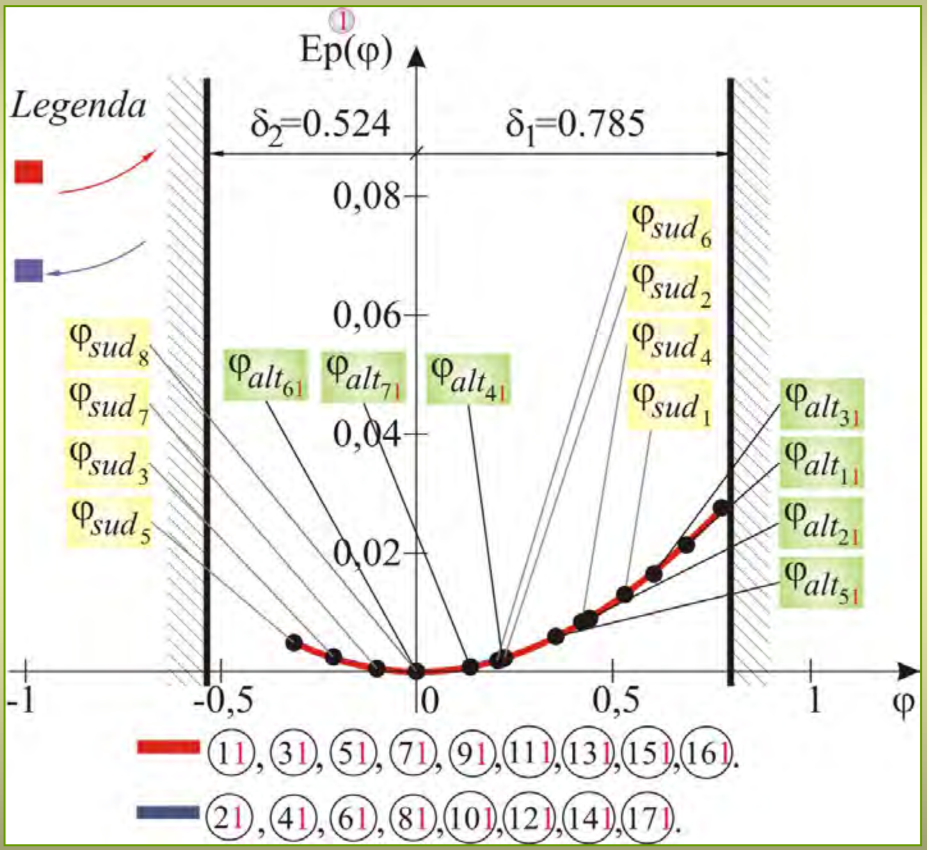
Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene potencijalne energije



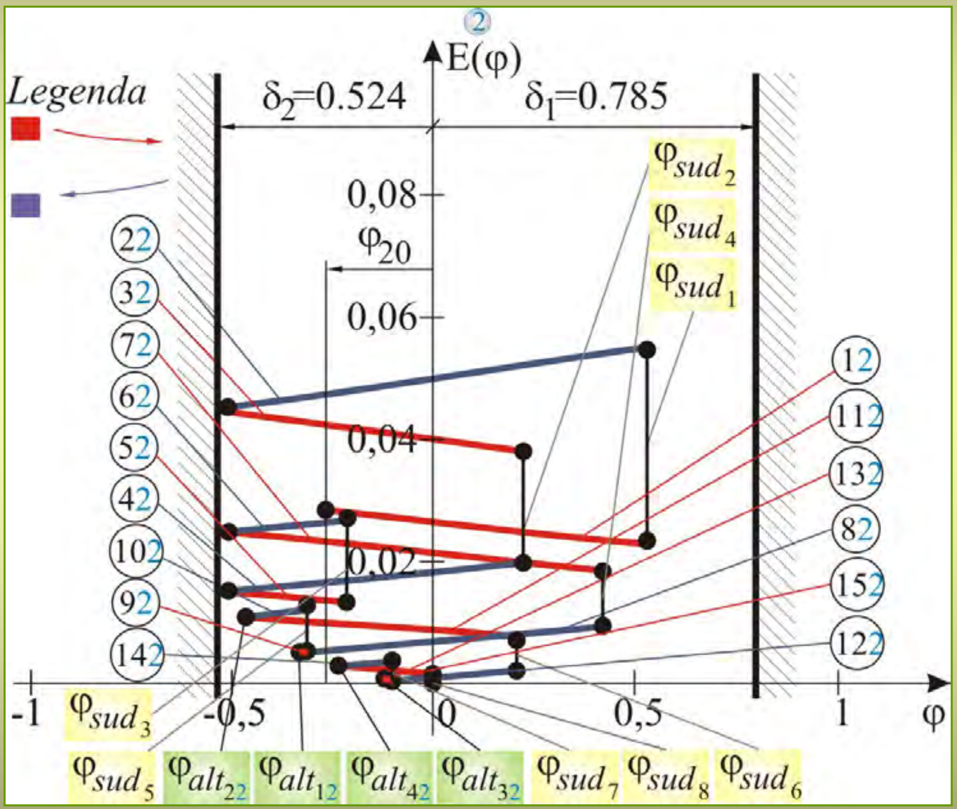
Druge kuglice 2

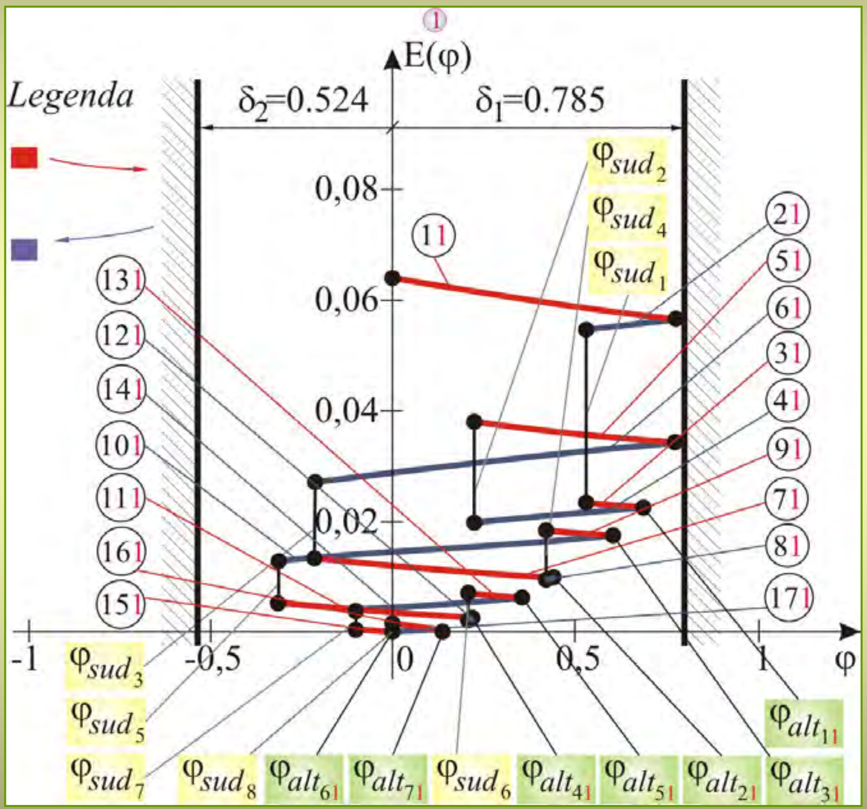


Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene ukupne mehaničke energije





Druge kuglice 2

Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Kružna hrapava linija

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja teške materijalne tačke po kružnoj hrapavoj liniji u funkciji generalisane koordinate $\boxed{\varphi}$ je

$$\boxed{\ddot{\varphi} \pm \dot{\varphi}^2 tg\alpha_0 + \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi \pm \alpha_0) = 0}$$

Za ***potpuno opisivanje*** dinamike teške materijalne tačke diferencijalnoj (dvojnoj) jednačini kretanja potrebno je pridružiti:

a* početne uslove $\varphi_{(0)} = \varphi_0 \quad \text{i} \quad \dot{\varphi}_{(0)} = \dot{\varphi}_0$; $\boxed{i = 1,2,3,\ldots,n}$

b* uslove ograničenja ugaone elongacije , kao i ***uslove sudara***

$\varphi_{ul_i} = \delta_i$ $\qquad$ $\dot{\varphi}_{odl_i} = -k\dot{\varphi}_{ul_i}$

USVAJAMO $\boxed{k = 1}$ - ***idealno elastični sudar***;

Slobodno kretanje teške materijalne tačke delimo na odgovarajuće:

intervale i podintervale kretanja

kojima odgovara

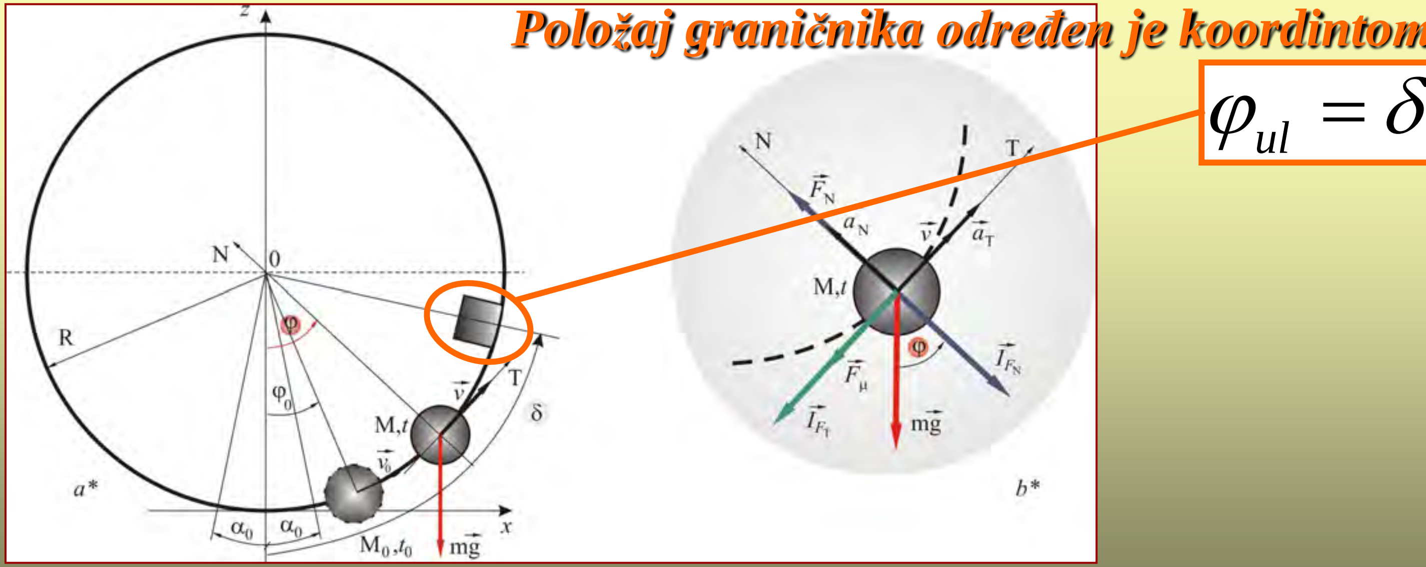
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

(dvojna) jednačina fazne trajektorije

$$\dot{\varphi}(\varphi)^2 = \frac{2g}{\left(1+4tg^2\alpha_0\right)R\cos\alpha_0}\left[\cos(\varphi\pm\alpha_0)-2tg\alpha_0\sin(\varphi\pm\alpha_0)\right]+Ce^{\mp 2\varphi tg\alpha_0}$$

Primer 5

Sistem sa jednim nepokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom



Sistem sa jednim nepokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom: a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Jedan nepokretan ograničivač elongacije dovodi da

Intervale kretanja, nakon, prvog, delimo na dva podintervala kretanja, prvi od udara teške materijalne tačke u ograničivač elongacije postavljen sa desne strane do tačke alternacije i drugi od tačke alternacije do udara. ***U drugom intervalu kretanja pojavljuje se*** reprezentativna tačka na faznom portretu, koja predstavlja ***tačku alternacije smera kretanja teške materijalne tačke*** po kružnoj hrapavoj liniji, što uslovljava i promenu smera ugaone brzine, odnosno smera sile *Coulomb*-ovog trenja klizanja.

Položaj tačke alternacije $\boxed{\varphi_{alt_1}}$ se određuje iz uslova $\longrightarrow$ $\boxed{\dot{\varphi}(\varphi_{alt_1}) = 0}$

Kao prva nula funkcije

$$0 = \frac{2g}{\left(1 + 4tg^2\alpha_0\right)R\cos\alpha_0}\left[\cos(\varphi_{alt_1} - \alpha_0) - 2tg\alpha_0 \sin\left(\varphi_{alt_1} - \alpha_0\right)\right] + C_2 e^{2\varphi_{alt_1} tg\alpha_0}$$

Korišćenjem programa iz softvera MathCad za crtanje funkcije

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Vrednosti parametara su : $\alpha_0 = 3,\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right],\ m = 0{,}2[kg]$

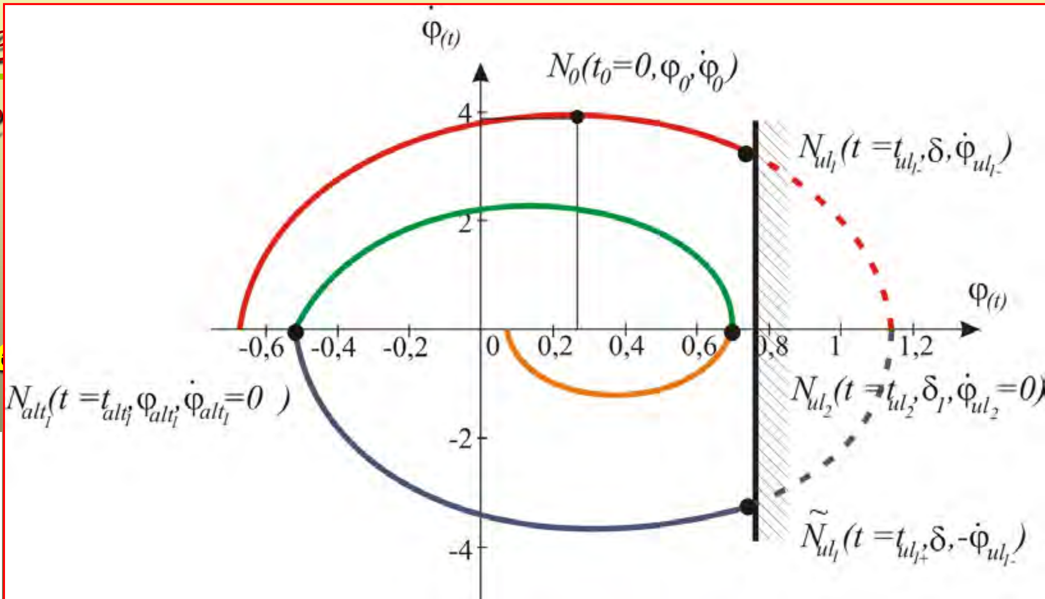
$$\delta = \frac{\pi}{4}[rad], \varphi_0 = \frac{\pi}{12},\ \dot{\varphi}_0 = 3{,}8\left[\frac{rad}{s}\right], R = 0{,}5[m].$$

Analizom intervala kretanja dolazimo do zaključka:

- Nakon drugog intervala kretanja posmatrani sistem nije više vibroudarni, već predstavlja osnovni bezudarni dinamički sistem;

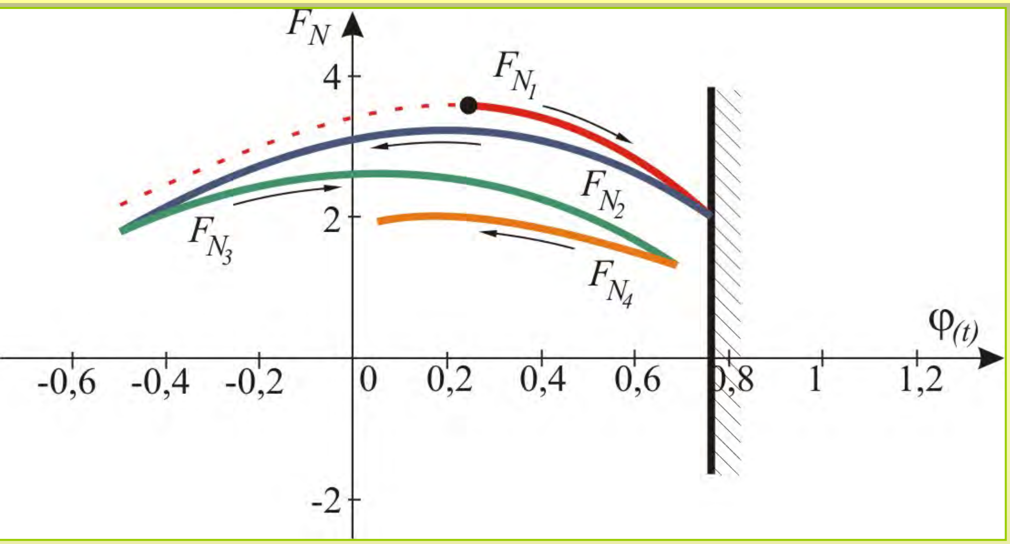
- Posle prvog podintervala treće... tačka vraća se u položaj ravnoteže...

Grafička vizuelizacija faznog ... posmatranom vibroudarnom siste...

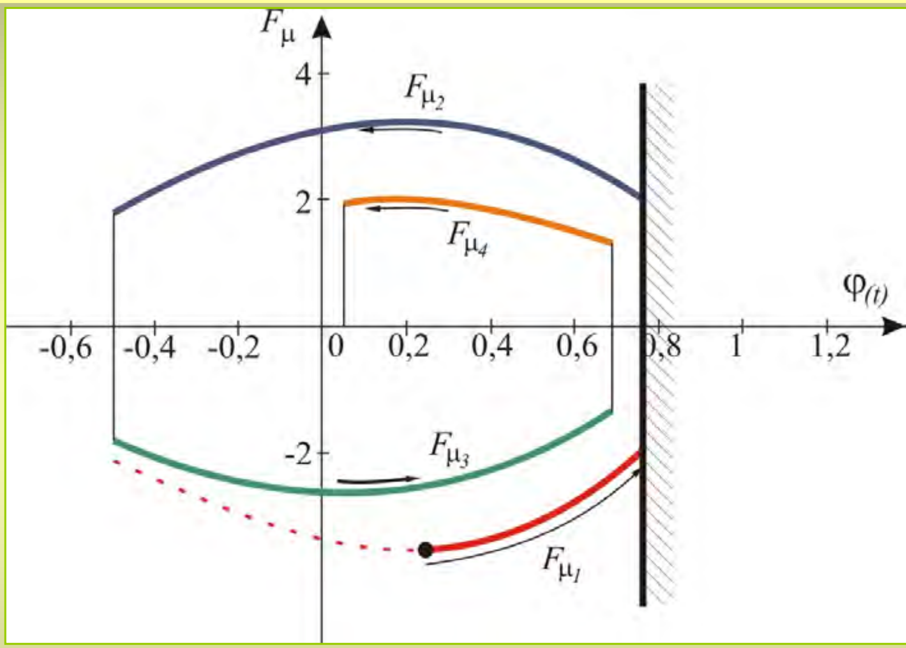


Fazni portret teške materijalne tačke koja se kreće po kružnoj hrapavoj liniji

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema



Kriva promene sile pritiska za sve intervale kretanja



Kriva promene sile trenja za sve intervale kretanja

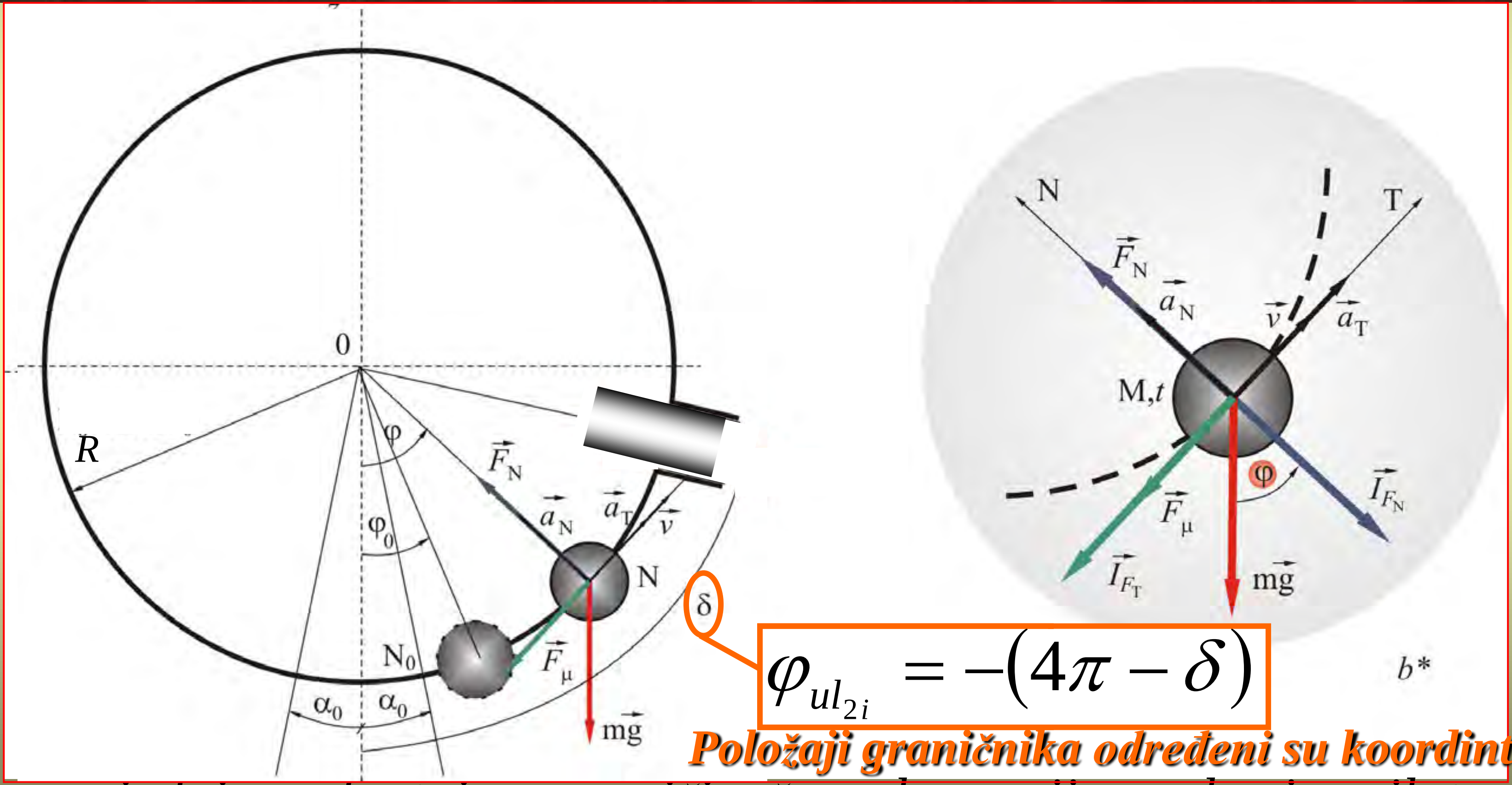
Uslovi da bi teška materijalna tačka u posmatranom vibroudarnom sistemu ***imala više udara*** u ograničivač ugaone elongacije su

$$\boxed{\varphi_0 < \delta} \quad \text{i} \quad \boxed{\sqrt{2\frac{g}{R}(1-\cos\delta)} < \dot{\varphi}_0 < \sqrt{4\frac{g}{R} - 2\frac{g}{R}(1-\cos\delta)}}$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Primer 6

Sistem sa jednim pokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom



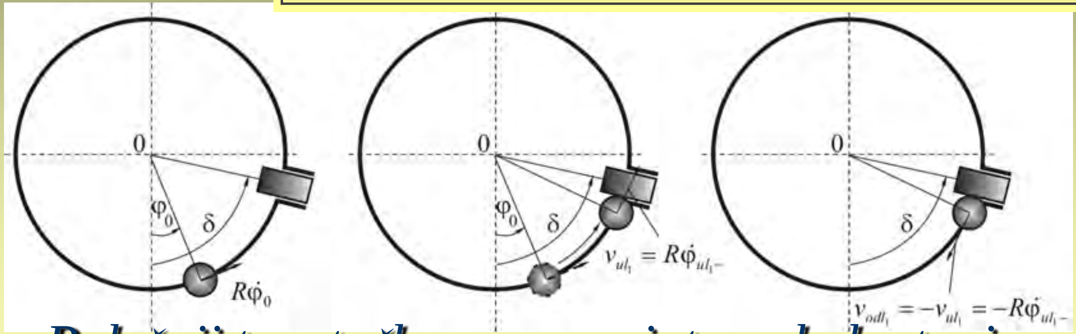
$$\varphi_{ul_{2i}} = -(4\pi - \delta)$$

Položaji graničnika određeni su koordintama

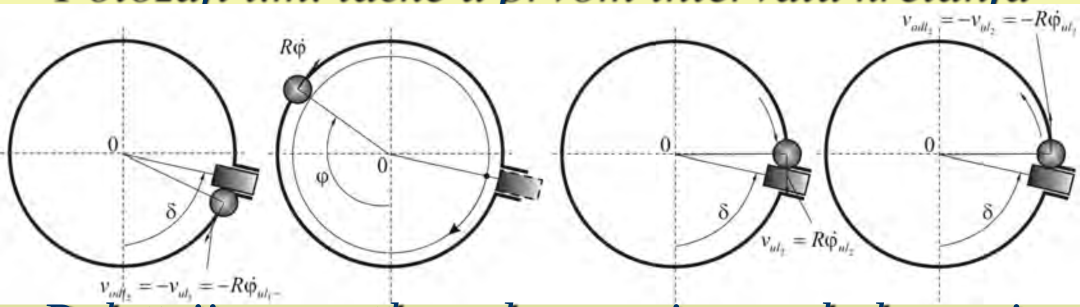
Sistem sa jednim pokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom: a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

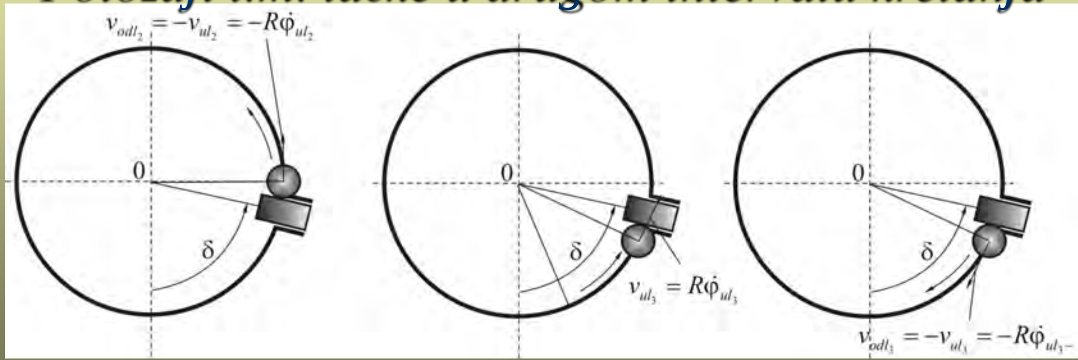
Analiza kretanja vibroudarnog sistema



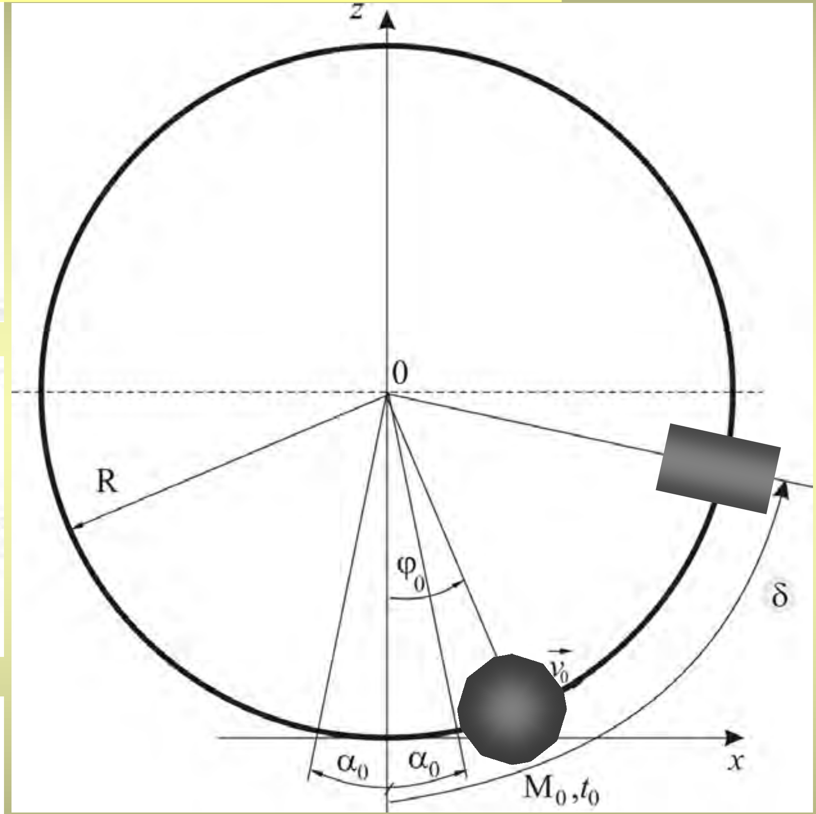
Položaji t.m. tačke u prvom intervalu kretanja



Položaji t.m. tačke u drugom intervalu kretanja



Položaji t.m. tačke u trećem intervalu kretanja



Animacija

Princip kretanja vibroudarnog sistema

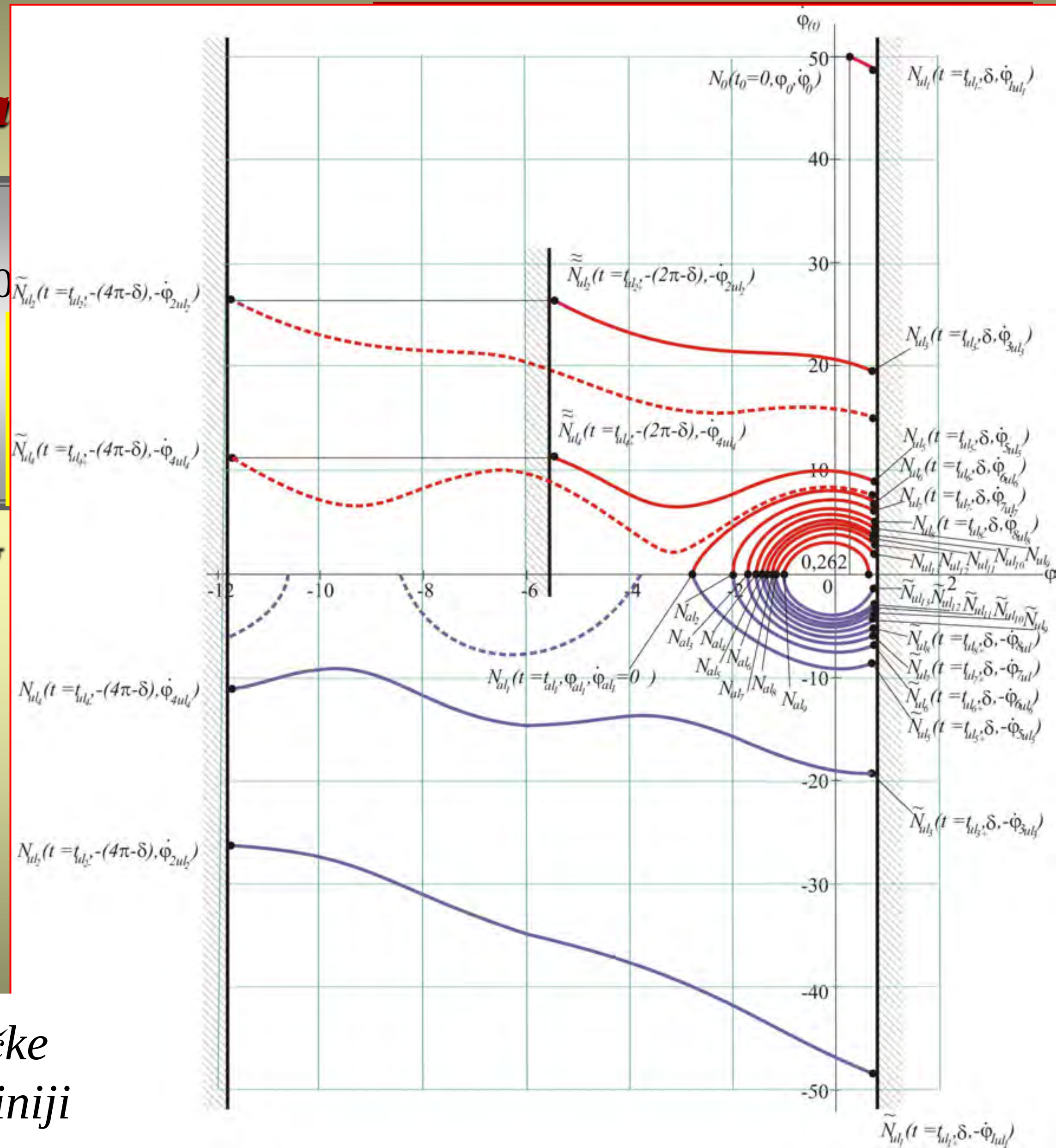
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Neophodni uslovi za moguću grafičku vuzueliza

Vrednosti parametara su : α_0

$$\delta = \frac{\pi}{4}\left[rad\right], \varphi_0 = \frac{\pi}{12},$$

Grafička vizuelizacija faznog portreta teške materijalne tačke u posmatranom vibroudarnom sistemu prikazana je



Fazni portret teške materijalne tačke koja se kreće po kružnoj hrapavoj liniji

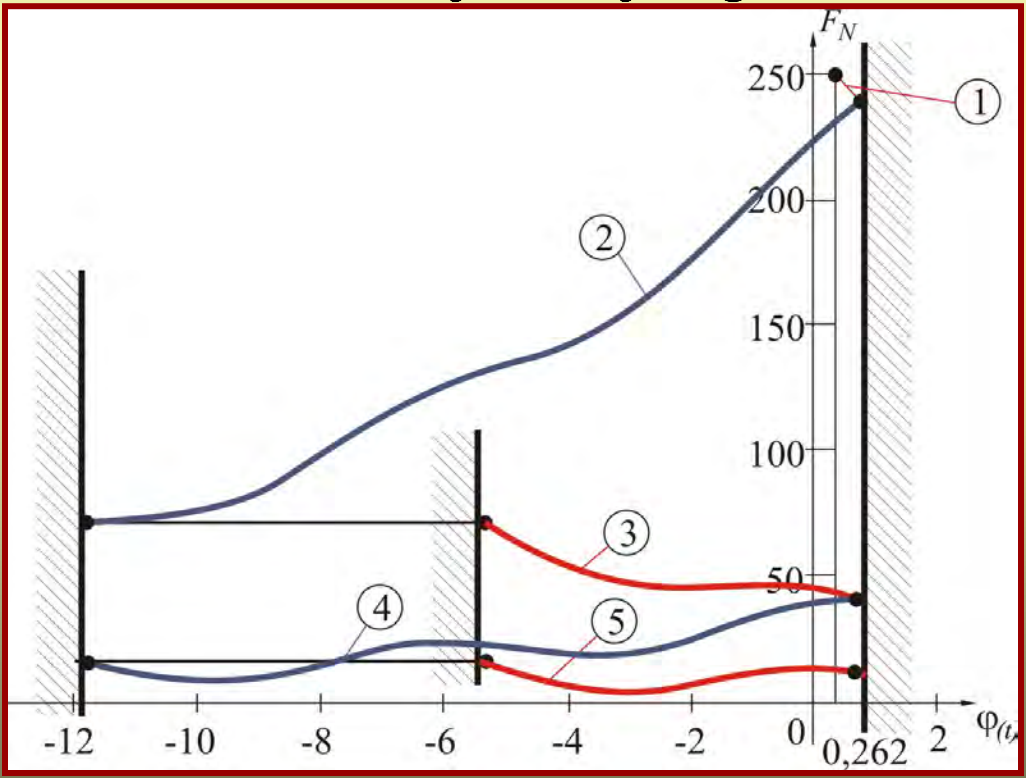
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

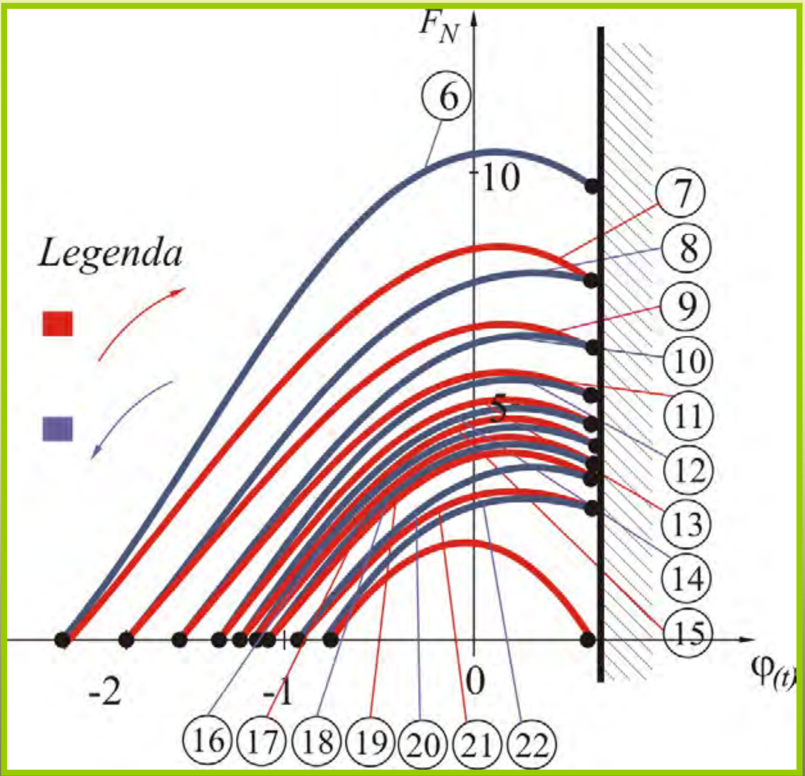
Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

NAPOMENA: Grafici promena podeljeni su na dva dela

Za intervale kretanja dok je ograničivač elongacije pokretan; i

Za intervale kretanja kad je ograničivač ugaone elongacije nepokretan

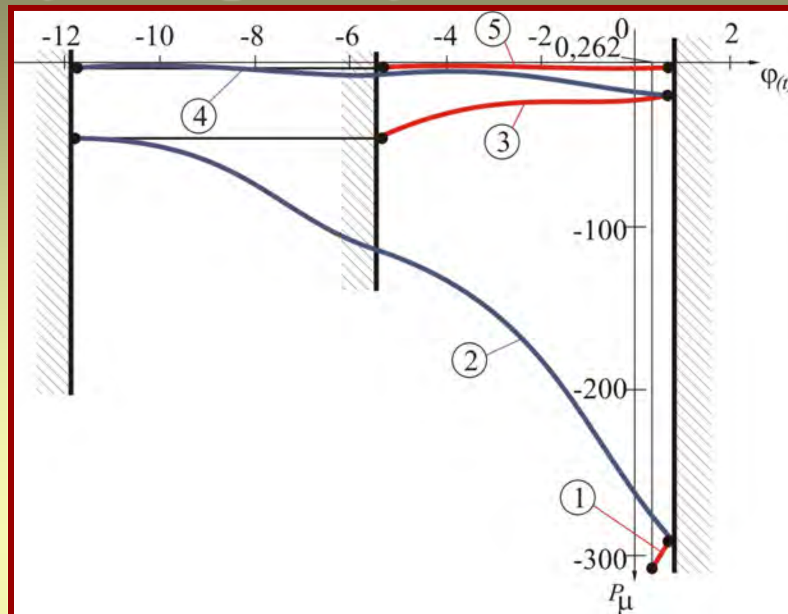


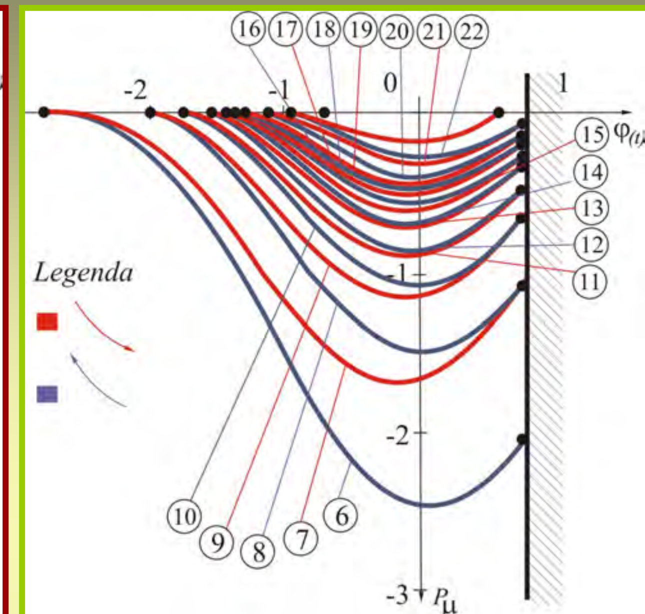


Kriva promene sile pritiska

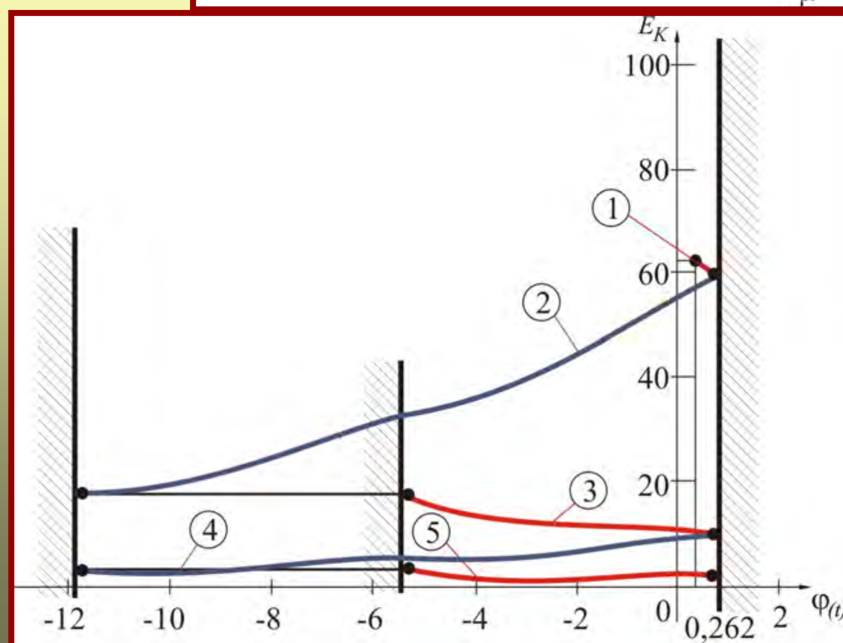
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

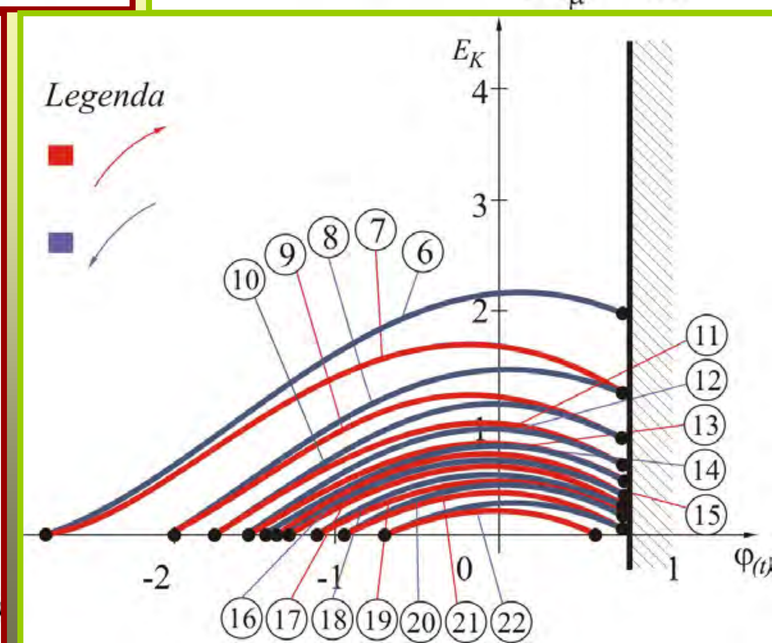
Promene snage



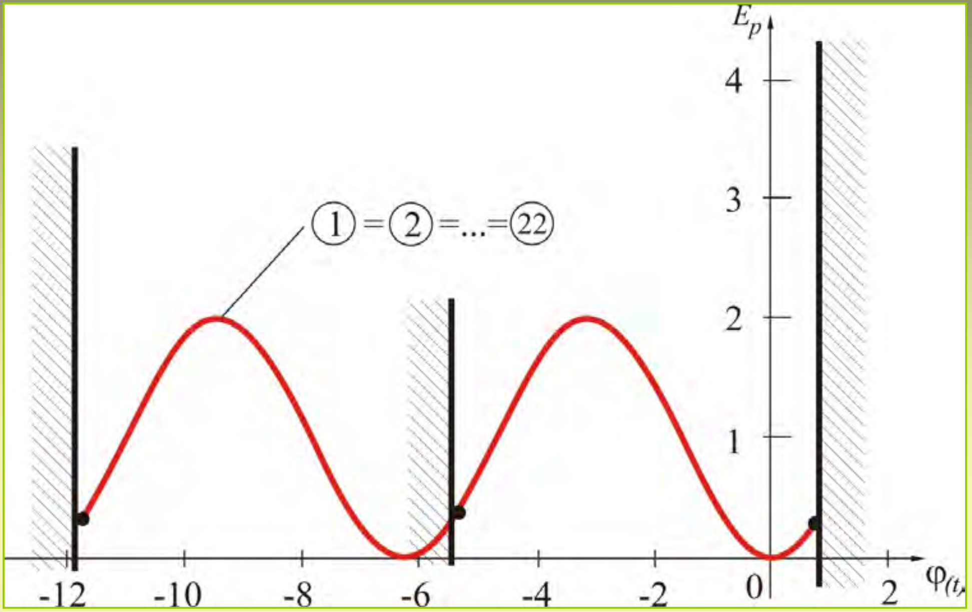


Kinetičke energije



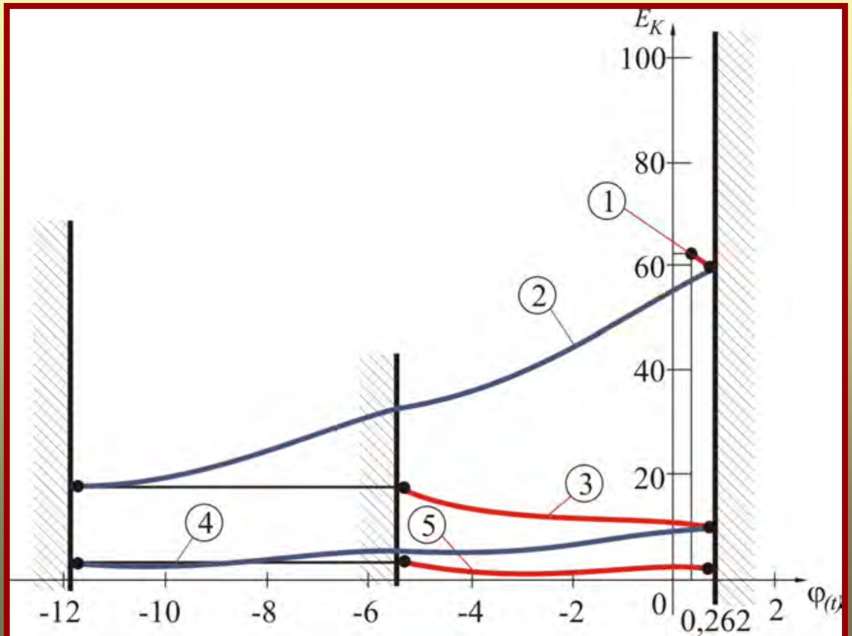


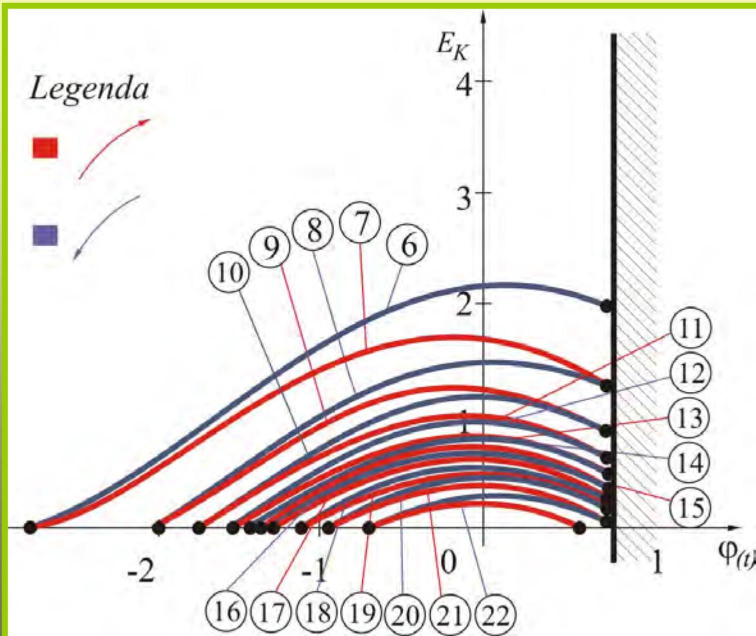
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



Potencijalne energije

Ukupne mehaničke energije

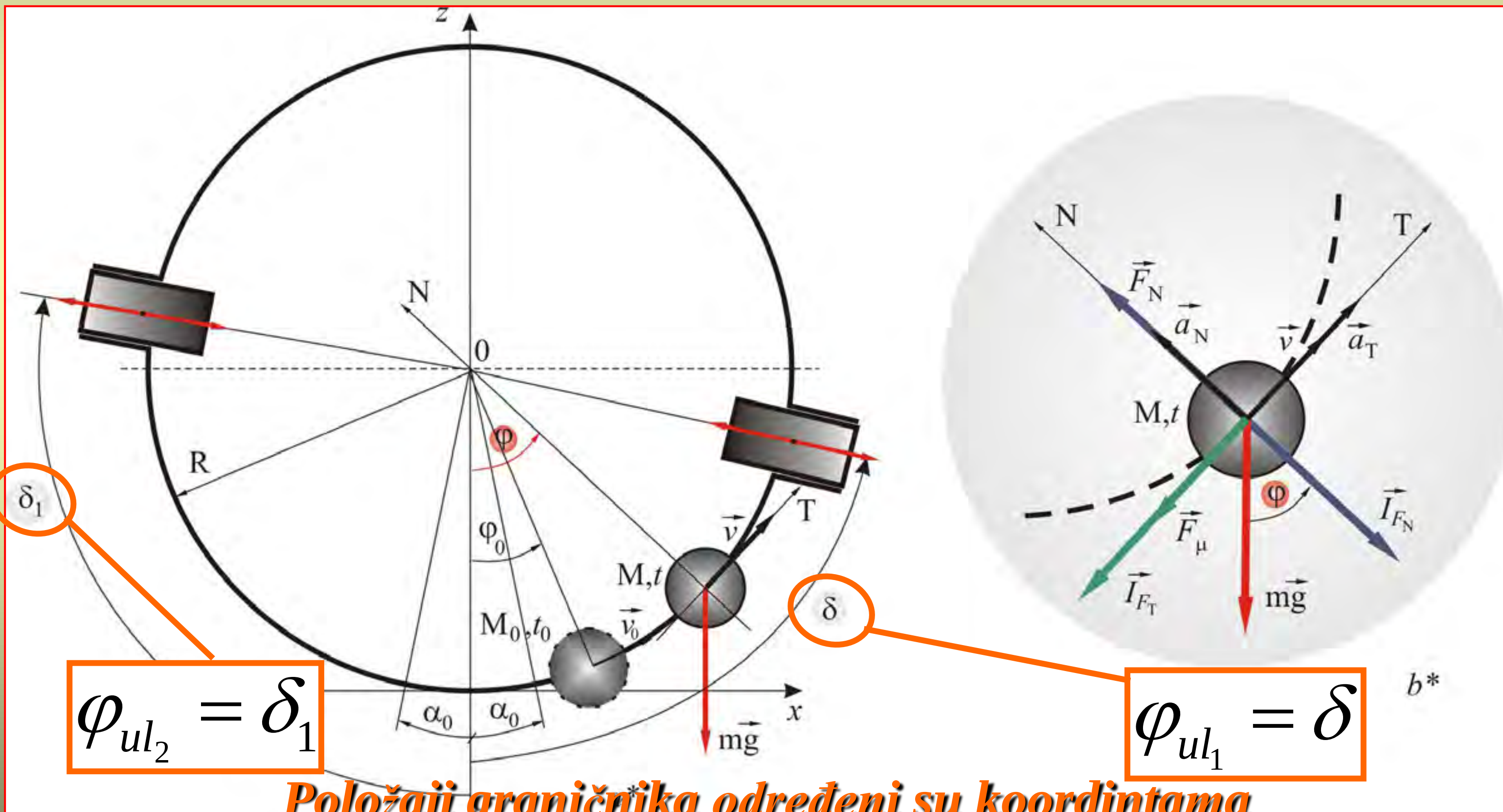




Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Primer 7

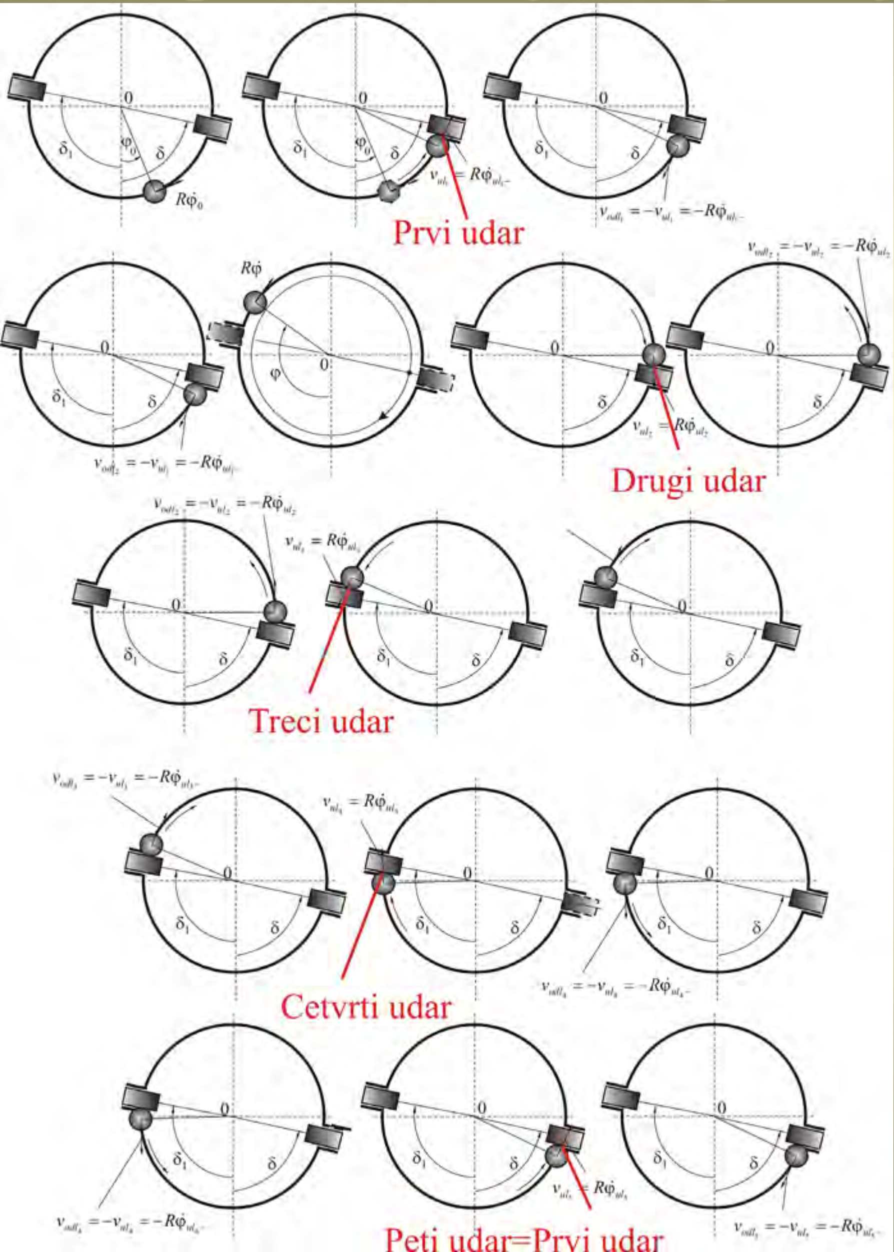
Sistem sa dva pokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom



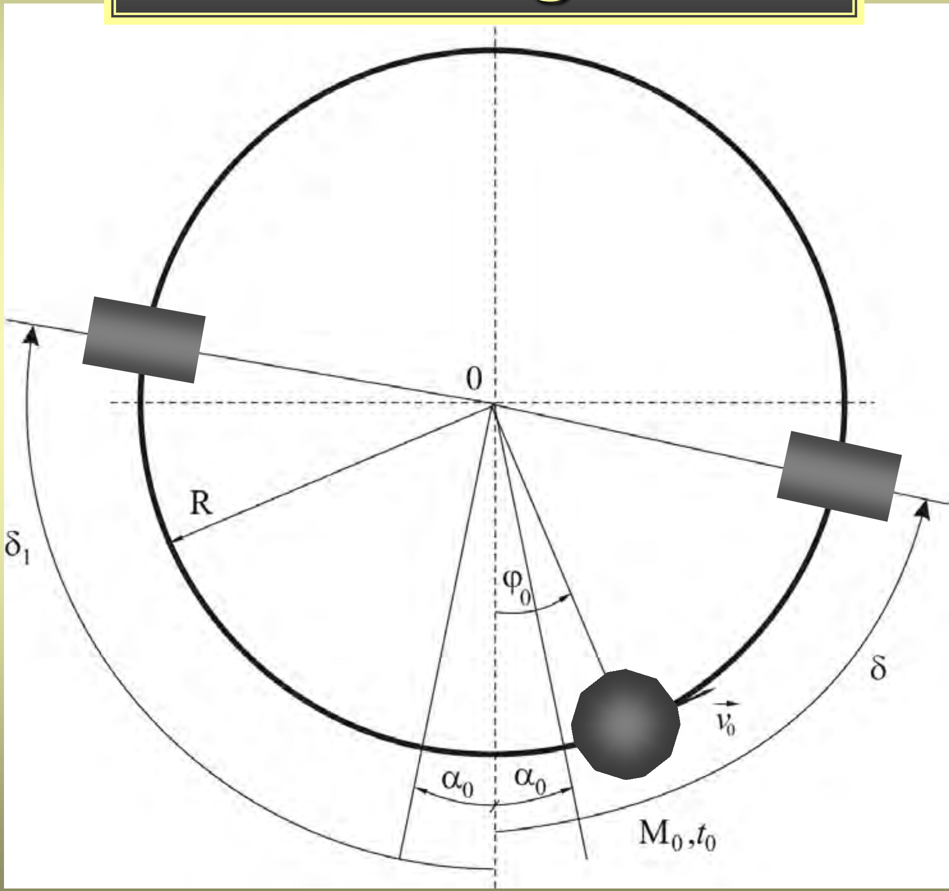
Položaji graničnika određeni su koordintama

Sistem sa dva pokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom: a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



Analiza kretanja vibroudarnog sistema



Princip kretanja vibroudarnog sistema

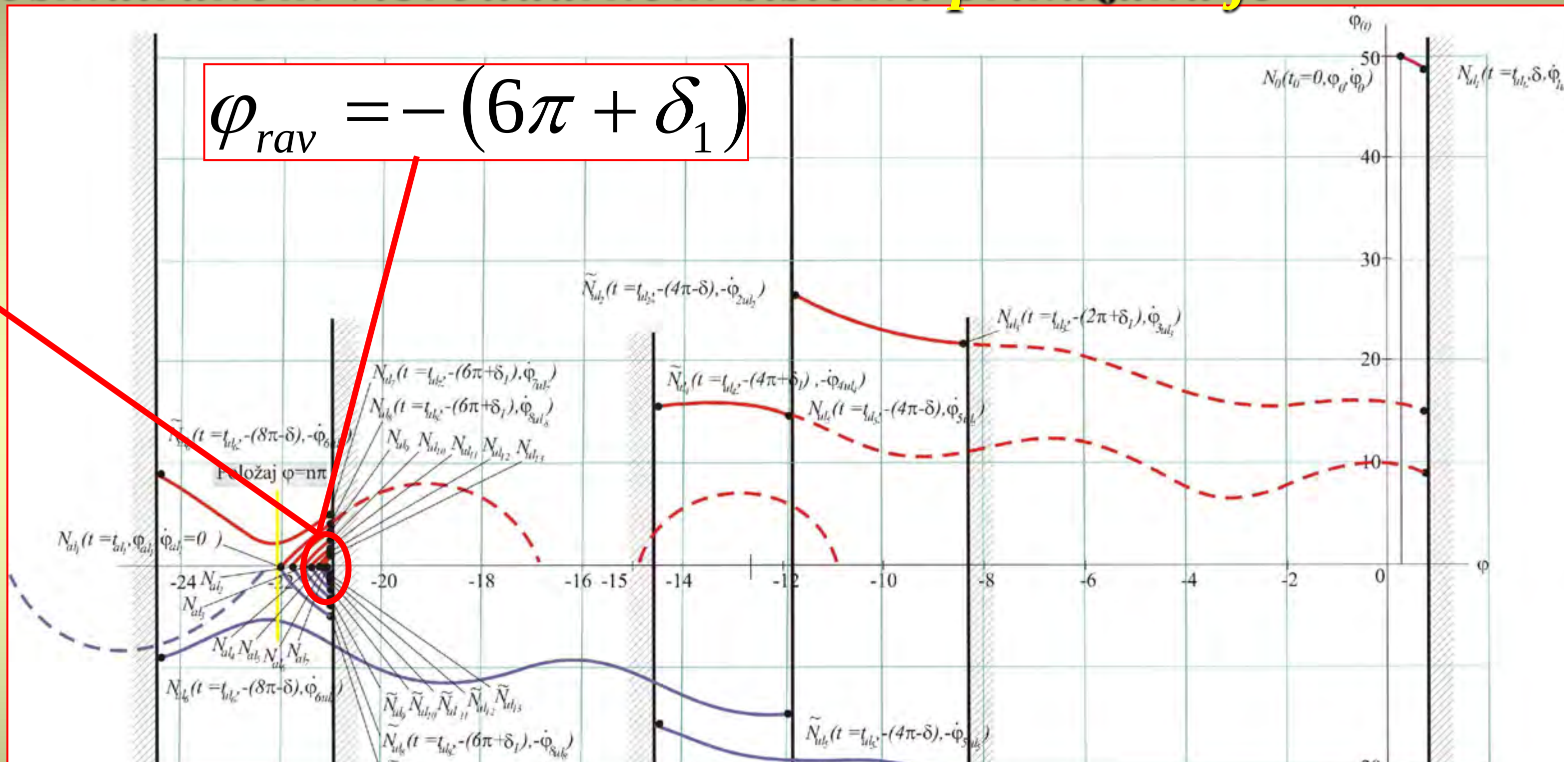
Animacija

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafička vizuelizacija faznog portreta teške materijalne tačke u posmatranom vibroudarnom sistemu prikazana je

ka materijalna tačka
umiruje u položaju

$$\varphi_{rav} = -\left(6\pi + \delta_1\right)$$



Vrednosti parametara su : $\alpha_0 = 0{,}05,\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right],\quad m = 0{,}2\left[kg\right]$

$$\delta = \frac{\pi}{4}[rad], \delta_1 = -\frac{2\pi}{3}[rad], \varphi_0 = \frac{\pi}{12}, \dot{\varphi}_0 = 50\left[\frac{rad}{s}\right], R = 0{,}5[m].$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

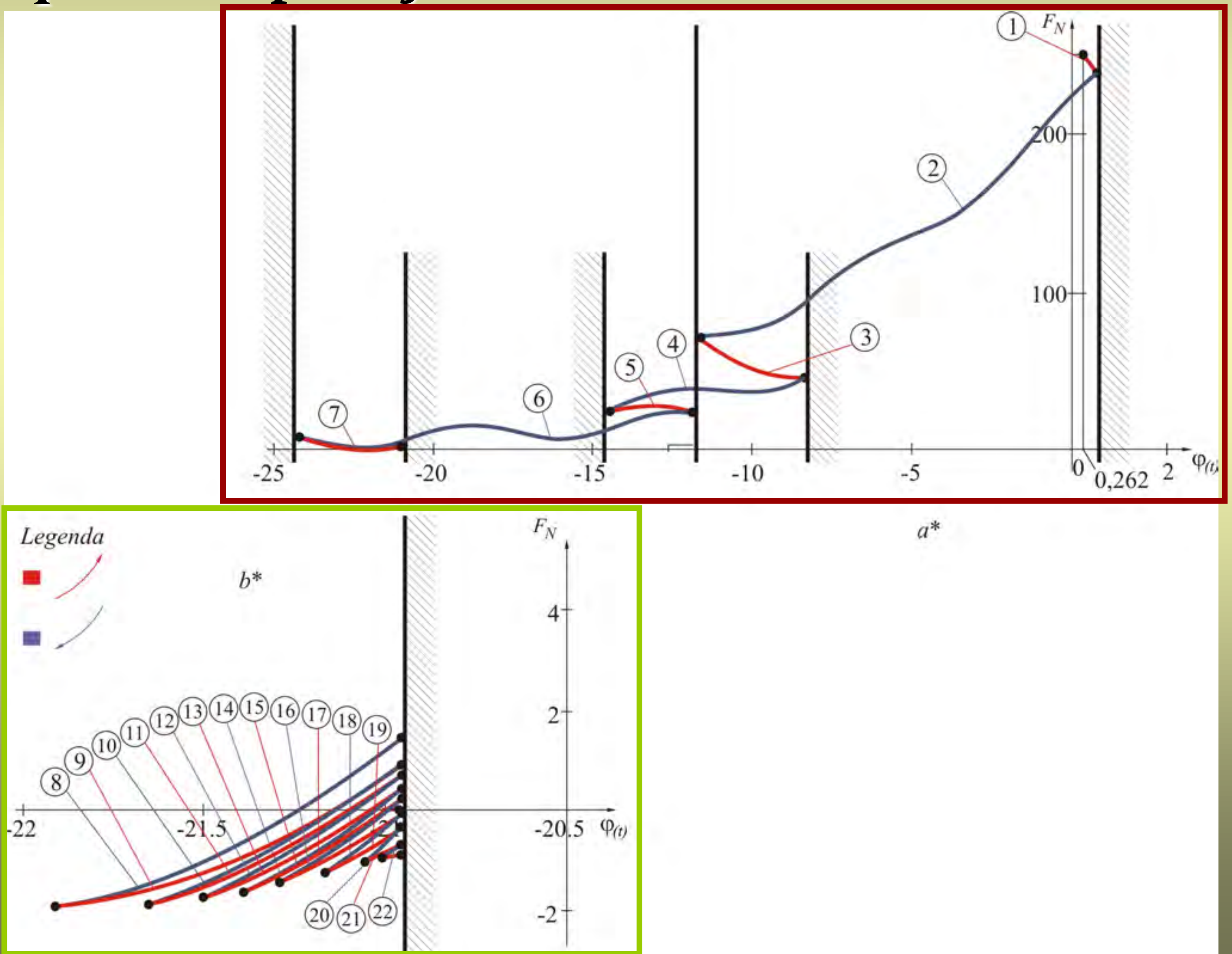
***NAPOMENA:* Grafici promena podeljeni su na dva dela**

Za intervale kretanja dok su ograničivači elongacije

Pokretni

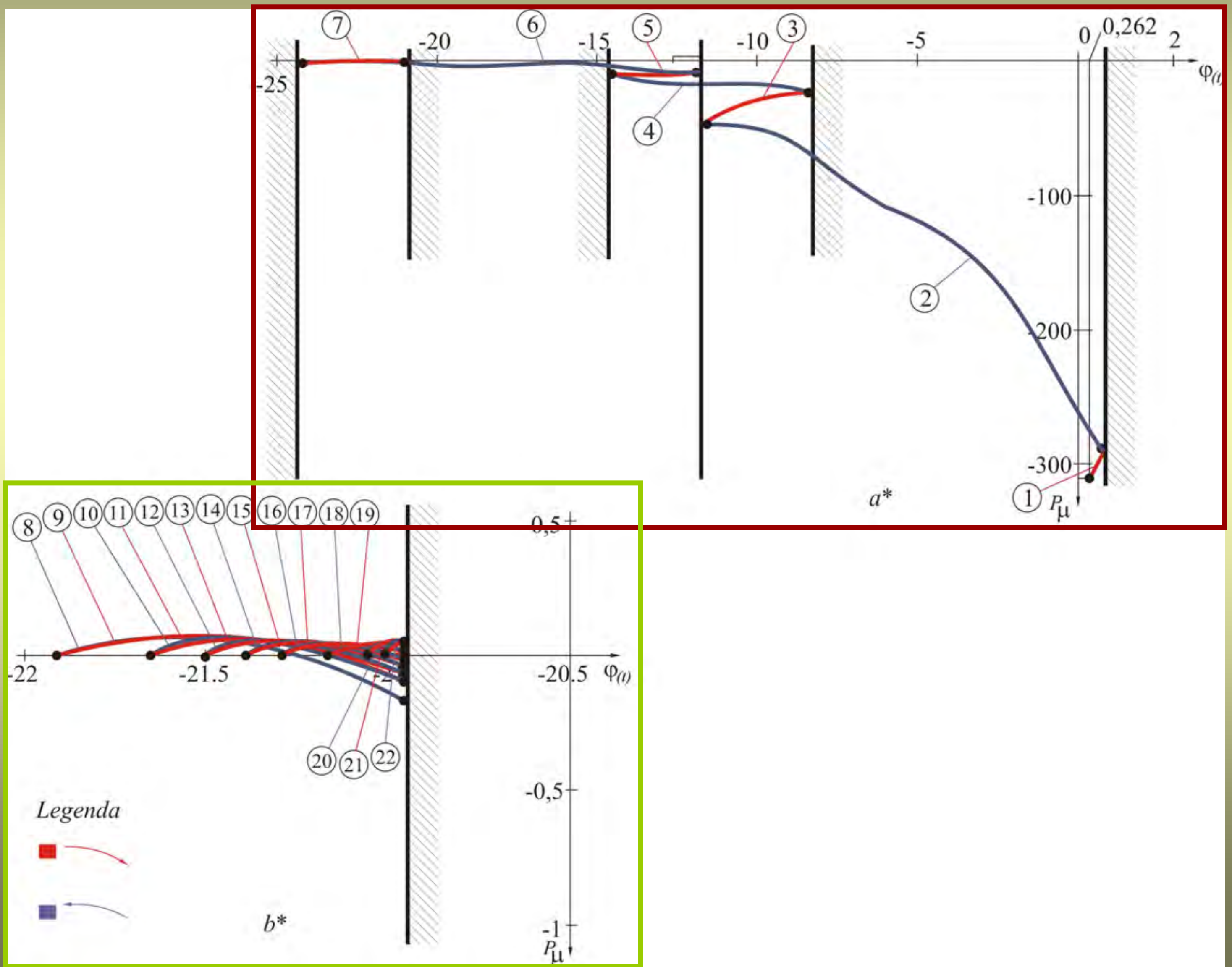
Nepokretni

Kriva promene sile pritiska



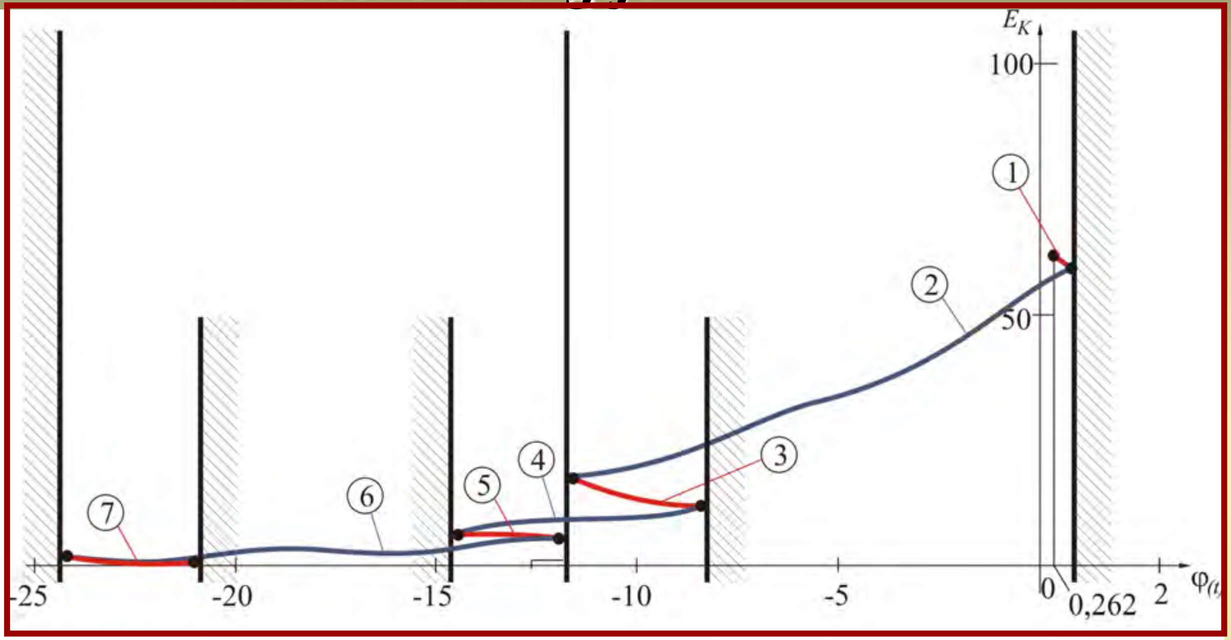
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Promene snage

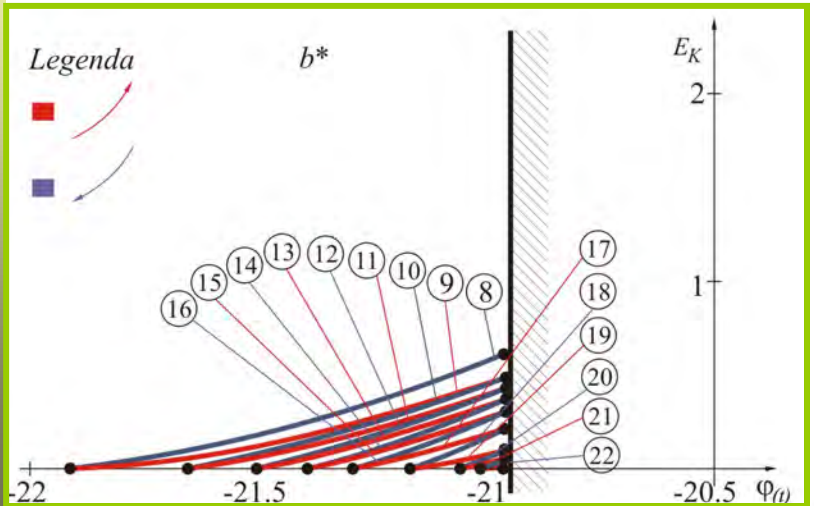


Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Kinetičke energije

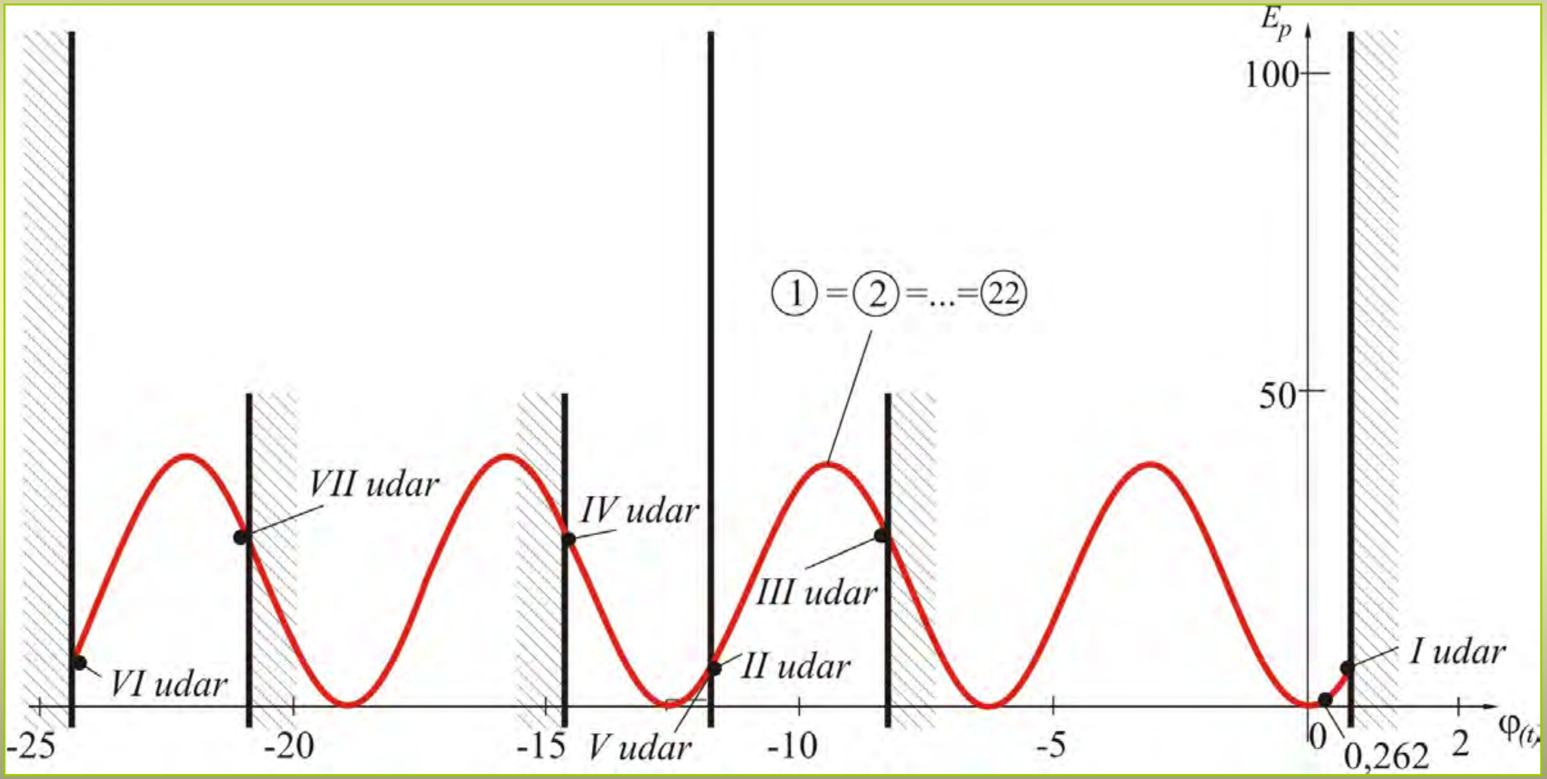


*a**



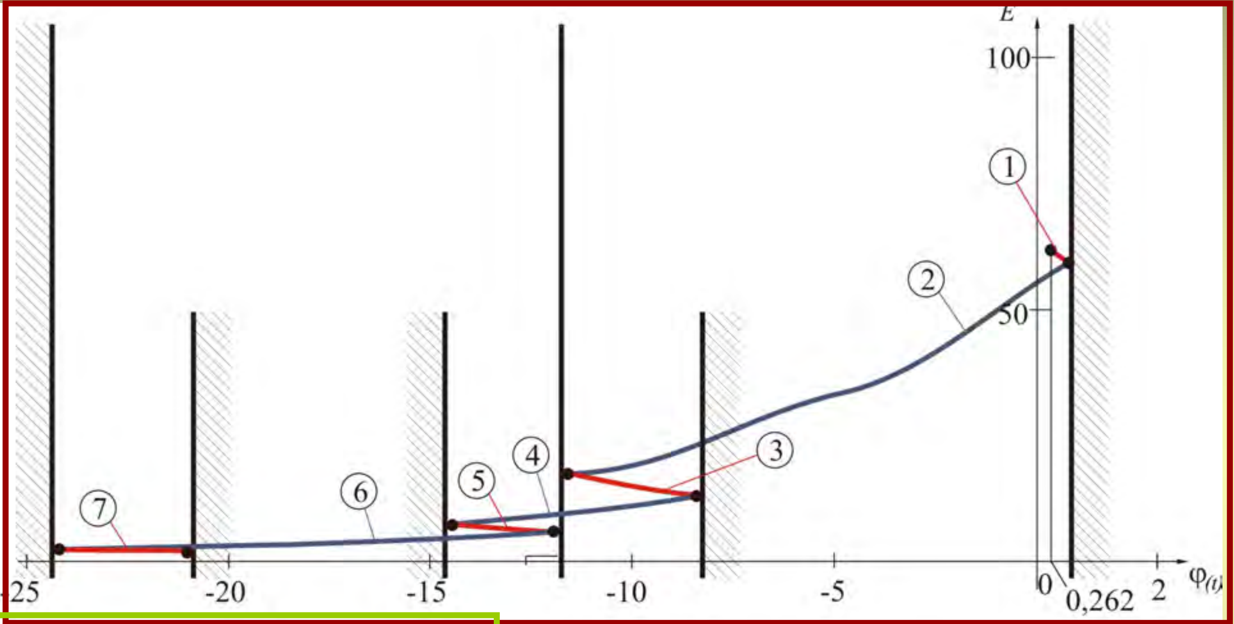
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Potencijalne energije

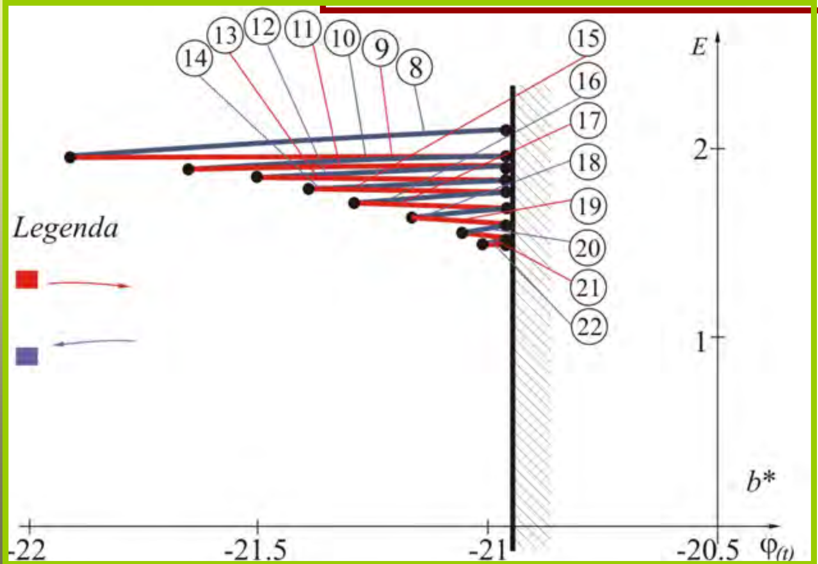


Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Ukupne mehaničke energije



a*



b*

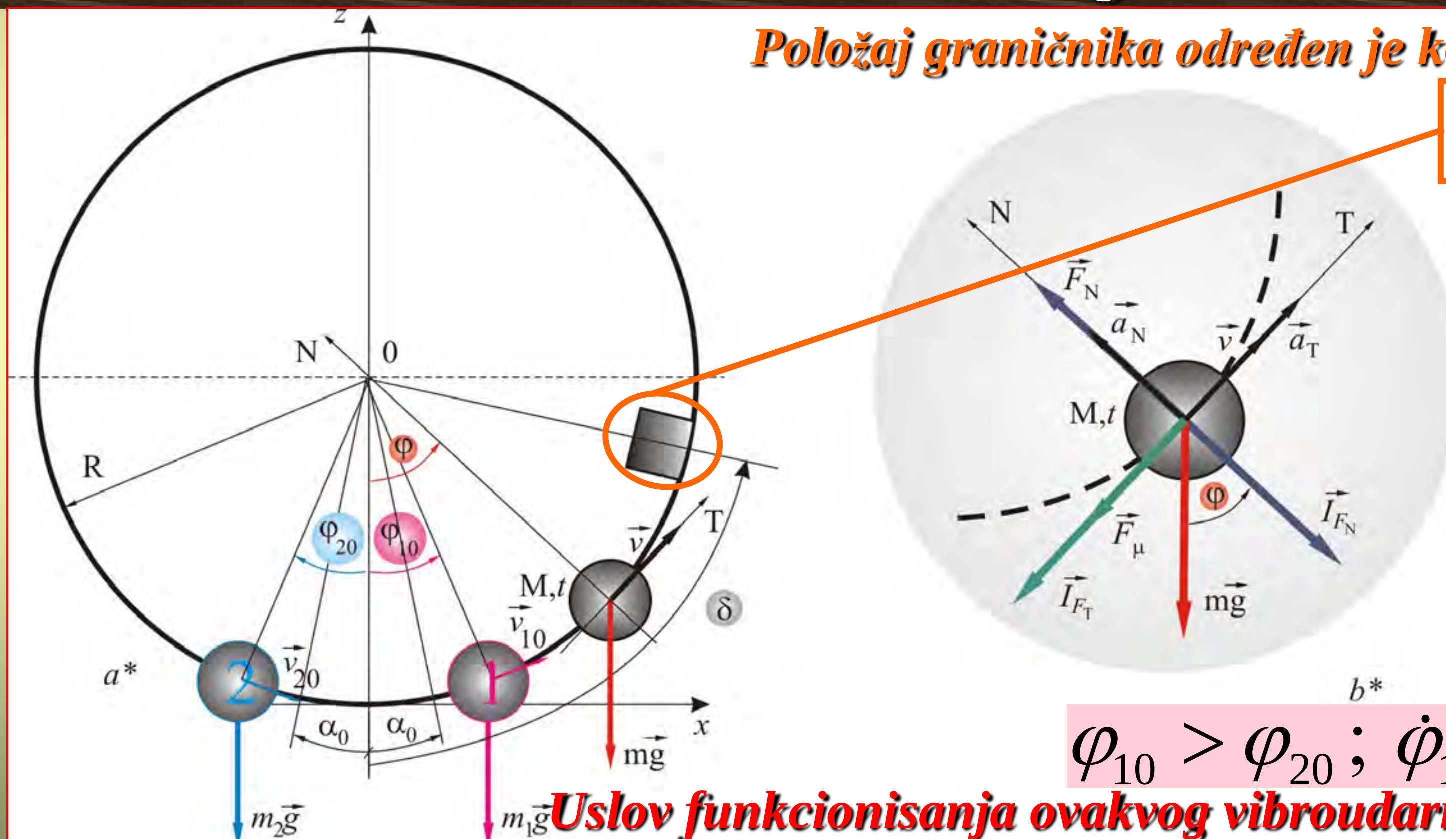
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Primer 8

Sistem sa jednim nepokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa dve kuglice

Položaj graničnika određen je koordintom

$$\boxed{\varphi_{ul} = \delta}$$



$$\varphi_{10} > \varphi_{20}\,;\ \dot{\varphi}_{10} > \dot{\varphi}_{20}$$

Uslov funkcionisanja ovakvog vibroudarnog sistema

Sistem sa jednim nepokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa dve kuglice: a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Posmatrani sistem ima dva stepena slobode → $\boxed{\varphi_1}$ i $\boxed{\varphi_2}$

Usvojene generalisane koordinate

Analiza kretanja vibroudarnog sistema

Diferencijalne (dvojne) jednačine kretanja teških materijalnih tačaka po kružnoj hrapavoj liniji u funkciji generalisanih koordinata su

$$\ddot{\varphi}_1 \pm \dot{\varphi}_1^2 tg\alpha_0 + \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi_1 \pm \alpha_0) = 0 \quad \begin{cases} za \quad \dot{\varphi}_1 > 0 \\ za \quad \dot{\varphi}_1 < 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi}_2 \pm \dot{\varphi}_2^2 tg\alpha_0 + \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi_2 \pm \alpha_0) = 0 \quad \begin{cases} za \quad \dot{\varphi}_2 > 0 \\ za \quad \dot{\varphi}_2 < 0 \end{cases}$$

(dvojne) jednačine faznih trajektorija

$$\dot{\varphi}_1(\varphi_1)^2 = \frac{2g}{(1+4tg^2\alpha_0)R\cos\alpha_0}\left[\cos(\varphi_1 \pm \alpha_0) - 2tg\alpha_0\sin(\varphi_1 \pm \alpha_0)\right] + C_1 e^{\mp 2\varphi_1 tg\alpha_0} \quad \begin{cases} za \quad \dot{\varphi}_1 > 0 \\ za \quad \dot{\varphi}_1 < 0 \end{cases}$$

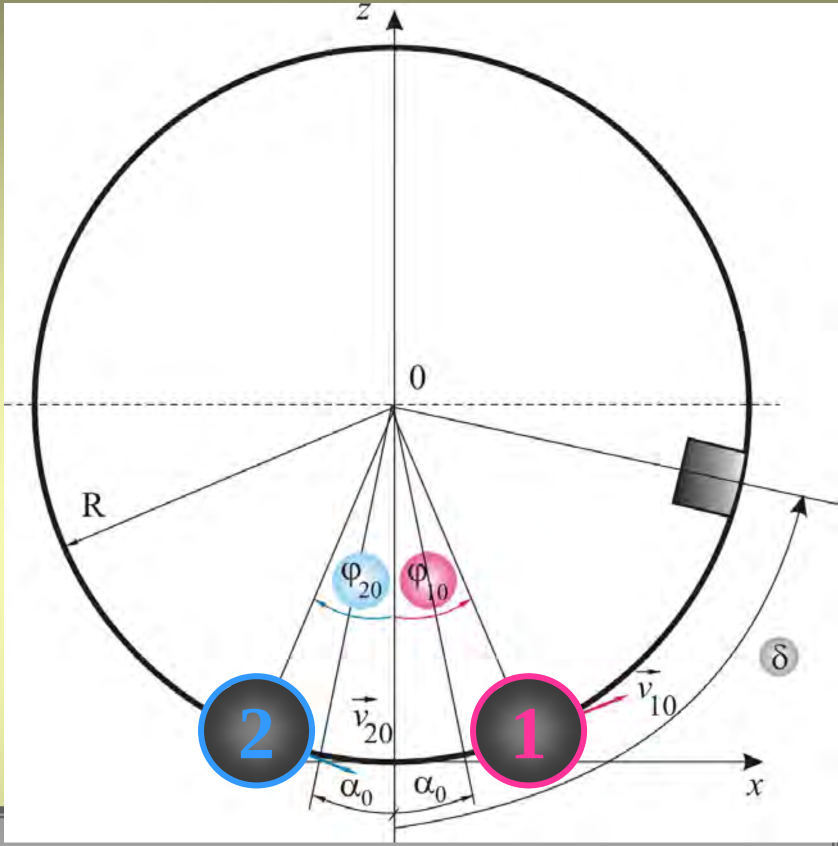
$$\dot{\varphi}_2(\varphi_2)^2 = \frac{2g}{(1+4tg^2\alpha_0)R\cos\alpha_0}\left[\cos(\varphi_2 \pm \alpha_0) - 2tg\alpha_0\sin(\varphi_2 \pm \alpha_0)\right] + C_2 e^{\mp 2\varphi_2 tg\alpha_0} \quad \begin{cases} za \quad \dot{\varphi}_2 > 0 \\ za \quad \dot{\varphi}_2 < 0 \end{cases}$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se slobodno kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Slobodno kretanje teških materijalnih tačaka delimo na odgovarajuće:

intervale kretanja

Analiza kretanja posmatranog vibroudarnog sistema sproveli smo do ***deset sudara*** između kuglice 1 i kuglice 2, ***jedanaest udara*** kuglice 1 u ograničivač ugaone elongacije postavljen sa desne strane i ***devet položaja tački alternacije*** kuglice 2.



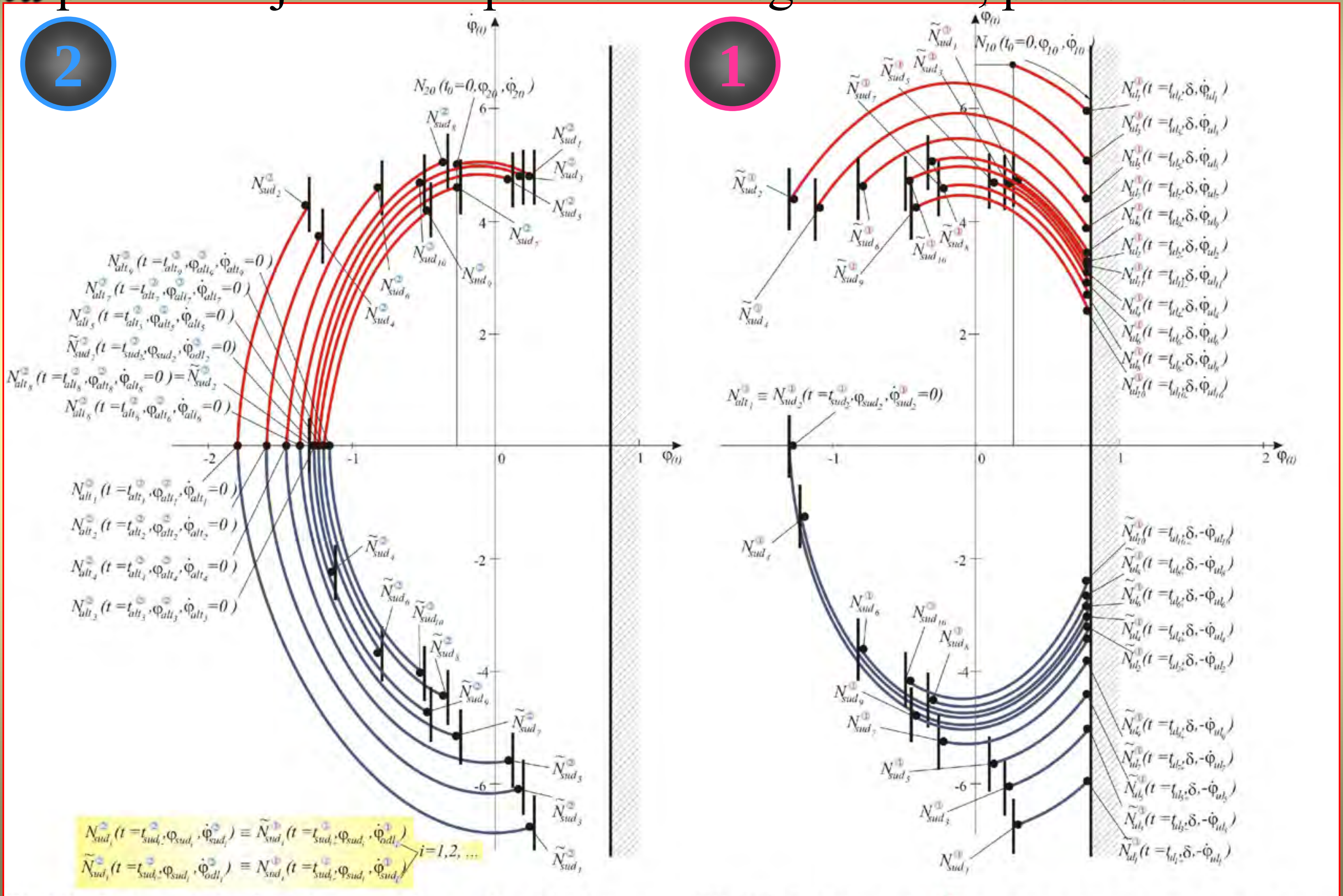
Vrednosti parametara su : $\alpha_0 = 0{,}05$

$$\delta = \frac{\pi}{4}[rad],\ \varphi_{10} = \frac{\pi}{12},\ \dot{\varphi}_{10} = 7\left[\frac{rad}{s}\right], m_1 = 0{,}2[kg],\ R = 0{,}5[m]$$

$$\varphi_{20} = -\frac{\pi}{12}[rad],\ \dot{\varphi}_{20} = 5\left[\frac{rad}{s}\right], m_2 = 0{,}2[kg],\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafička vizuelizacija analize kretanja ***posmatranog vibroudarnog sistema*** prikazana je faznim portretima kuglice 2 i 1, posebno.



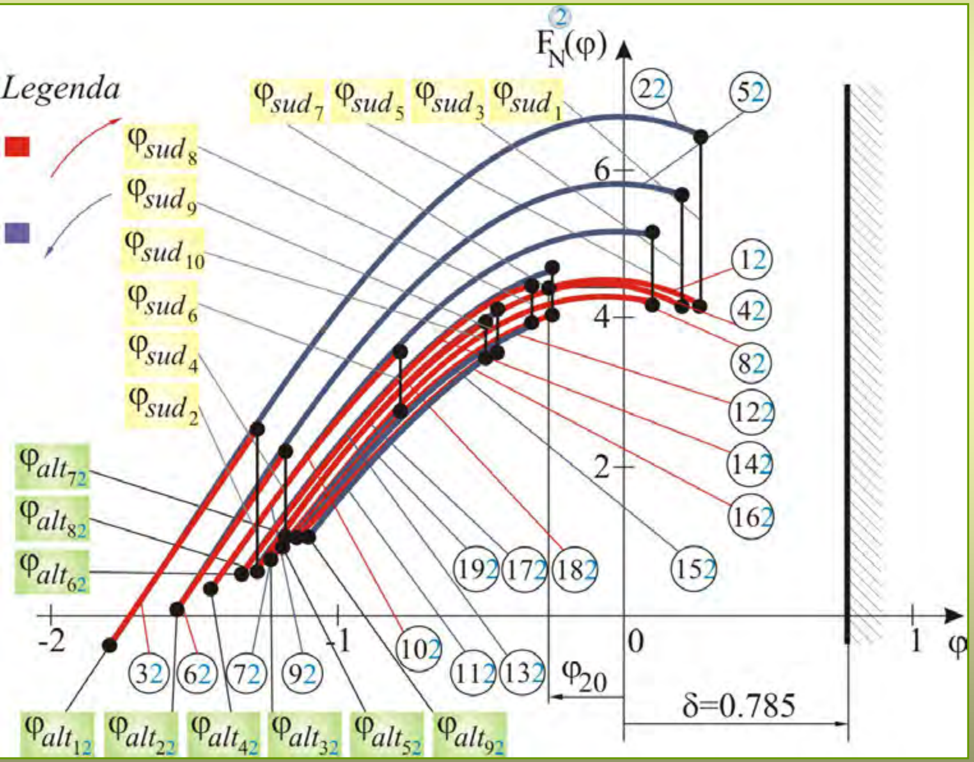
Slika 3.228. Fazni portret kuglice (2) (kao deo oscilatora) koja se kreće po kružnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja $\mu_0 = tg\alpha$ sa ograničenim elongacijama u ravni $(\varphi, \dot{\varphi})$

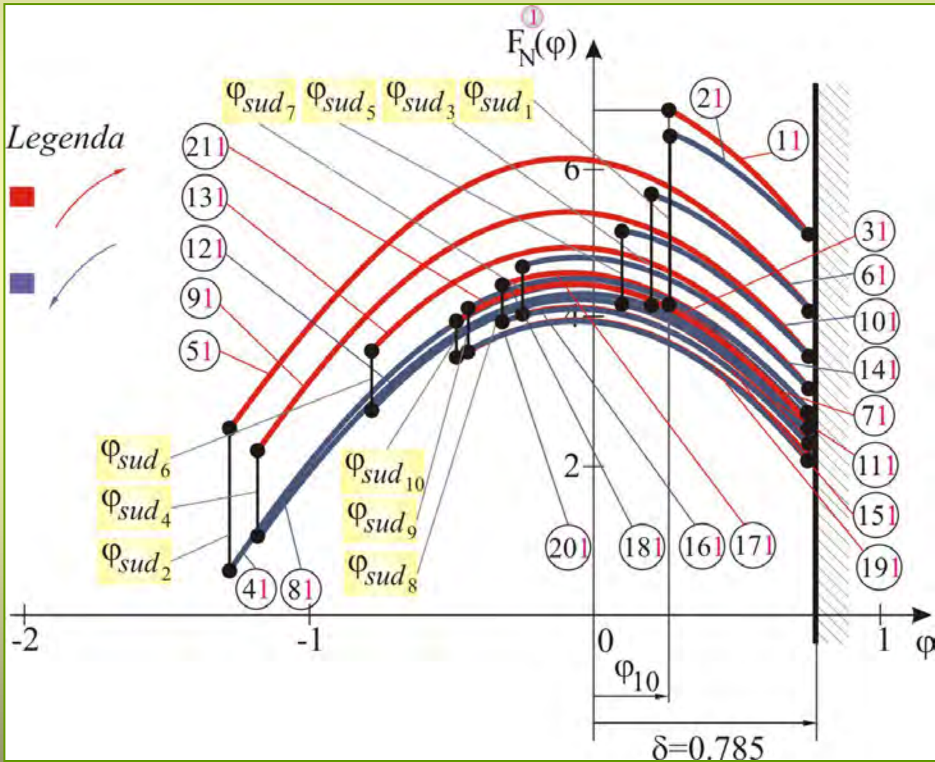
Slika 3.229. Fazni portret kuglice (1) (kao deo oscilatora) koja se kreće po kružnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja $\mu_0 = tg\alpha$ sa ograničenim elongacijama u ravni $(\varphi, \dot{\varphi})$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

Grafik promene sile pritiska



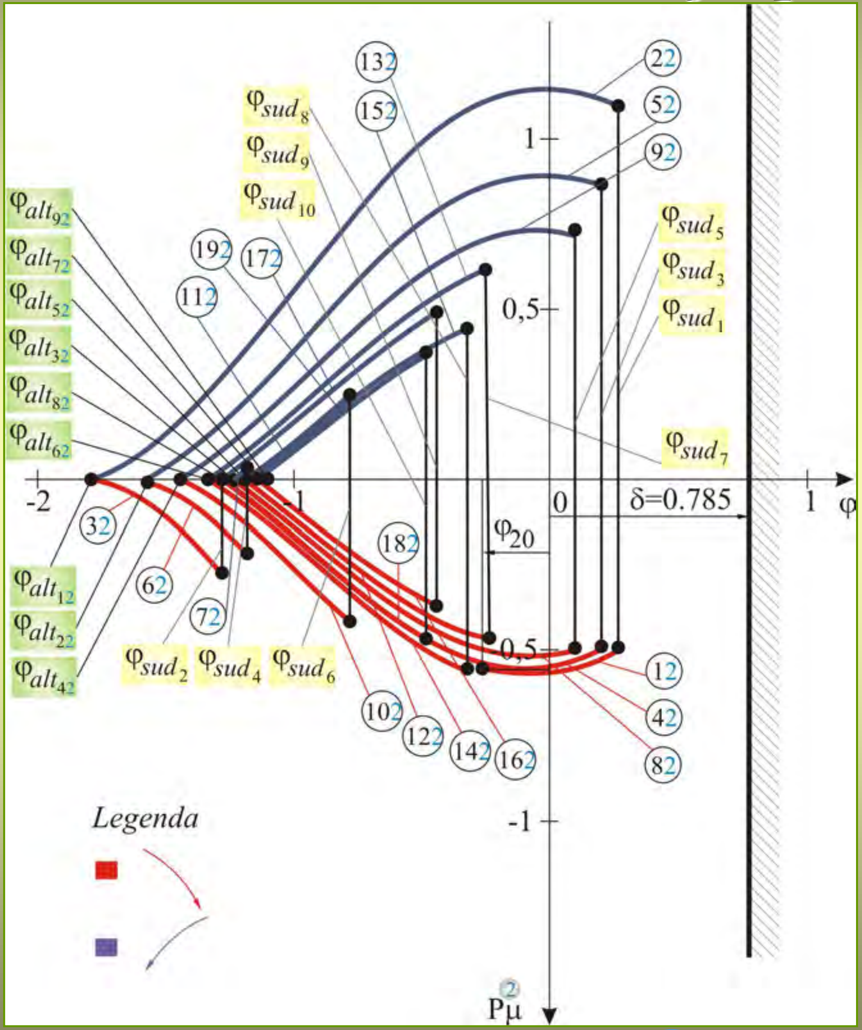


Druge kuglice 2

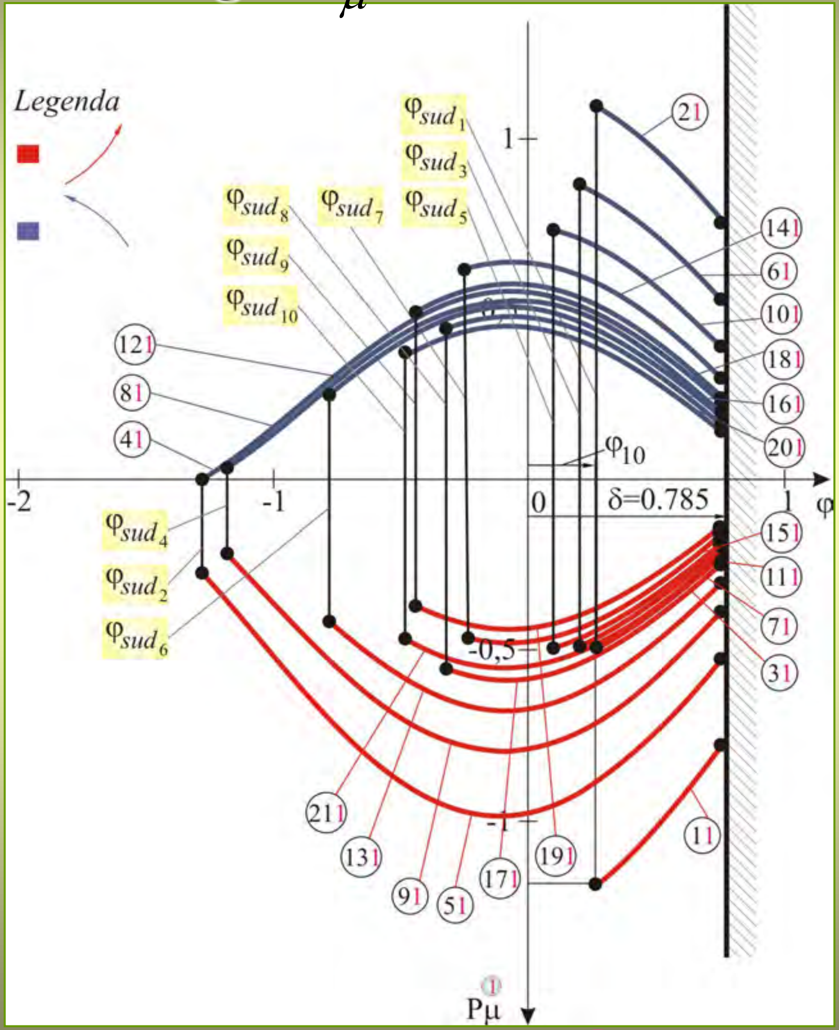
Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene snage P_μ



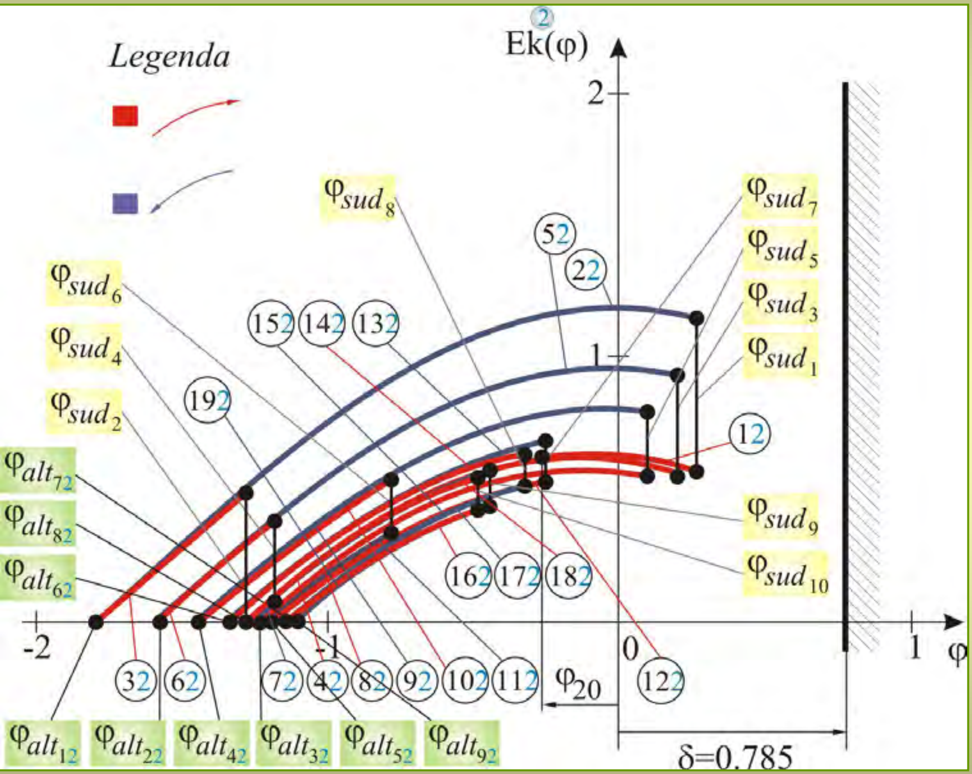
Druge kuglice 2

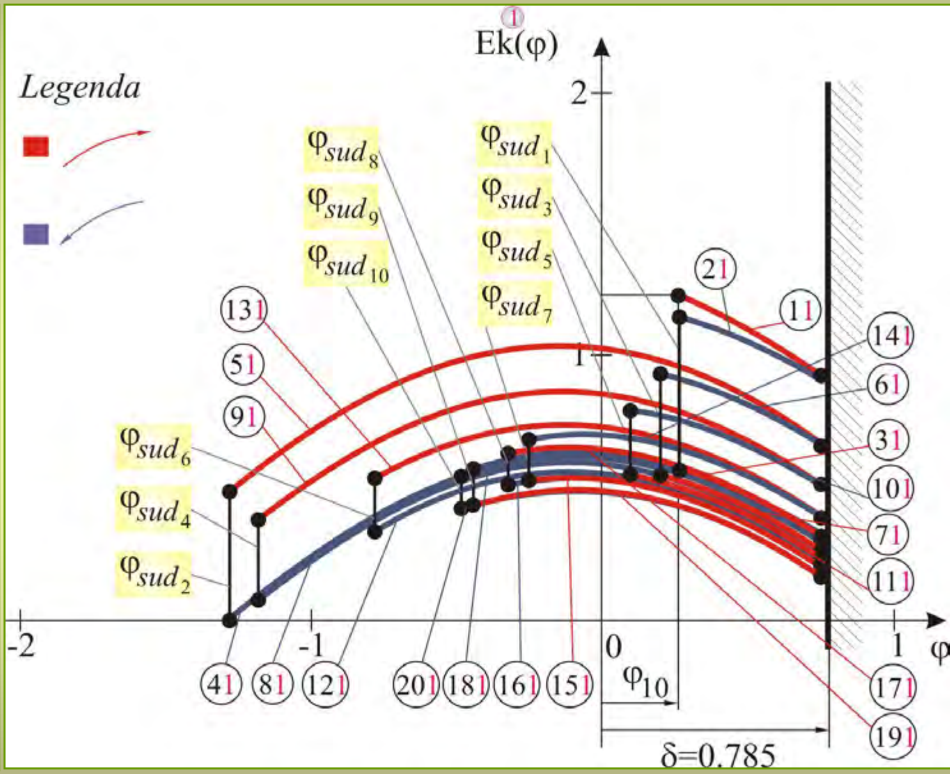


Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene kinetičke energije



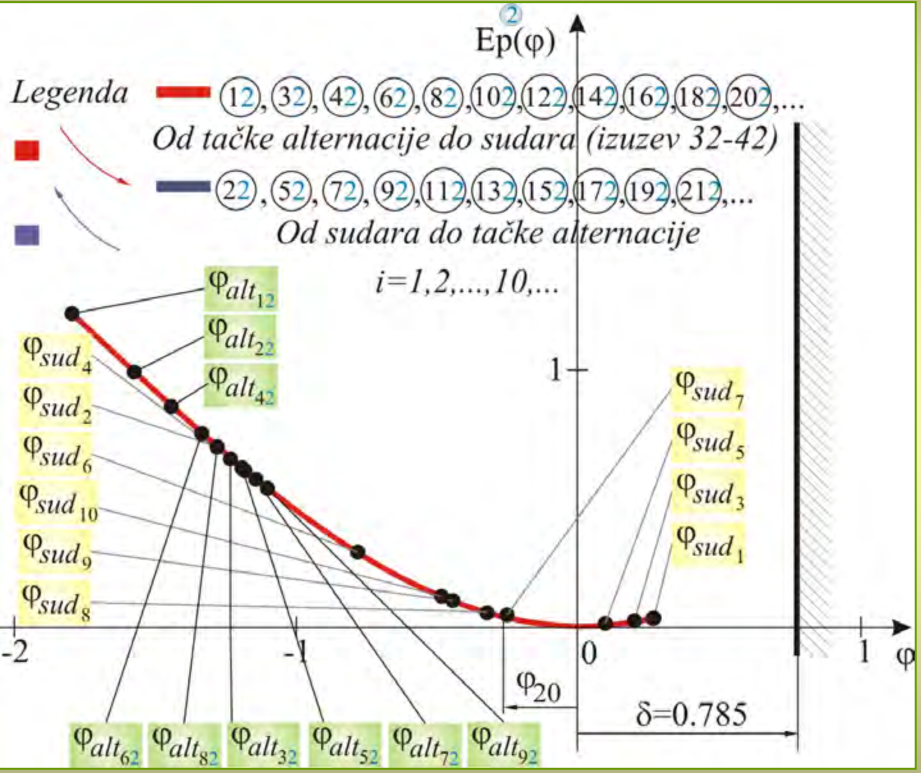


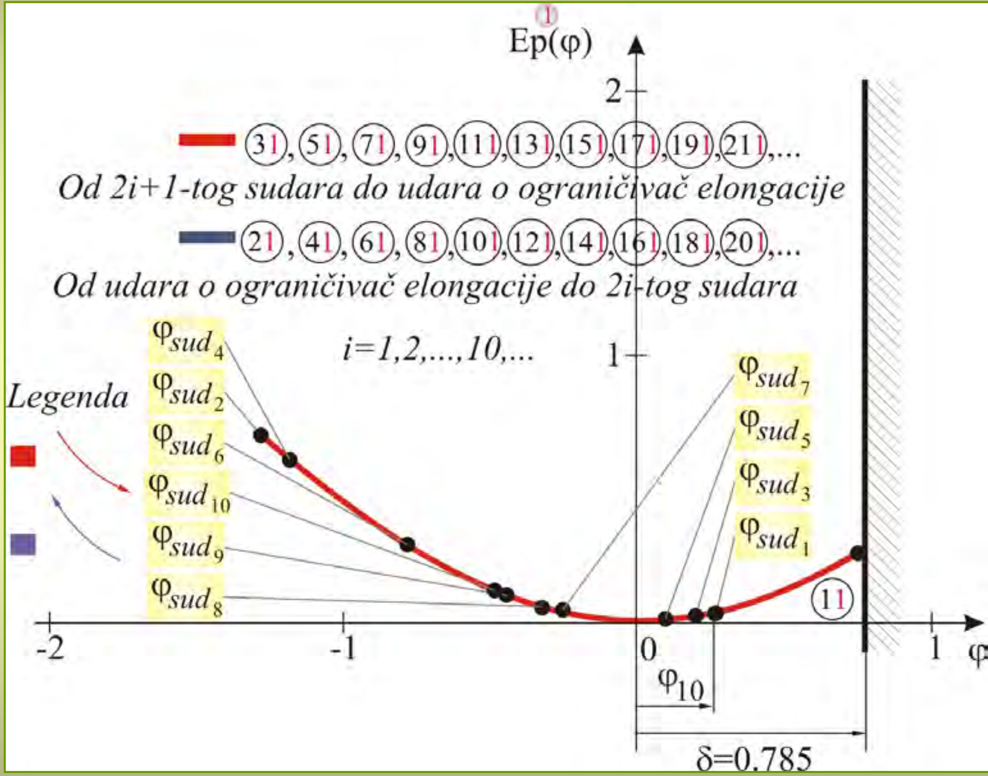
Druge kuglice 2

Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene potencijalne energije



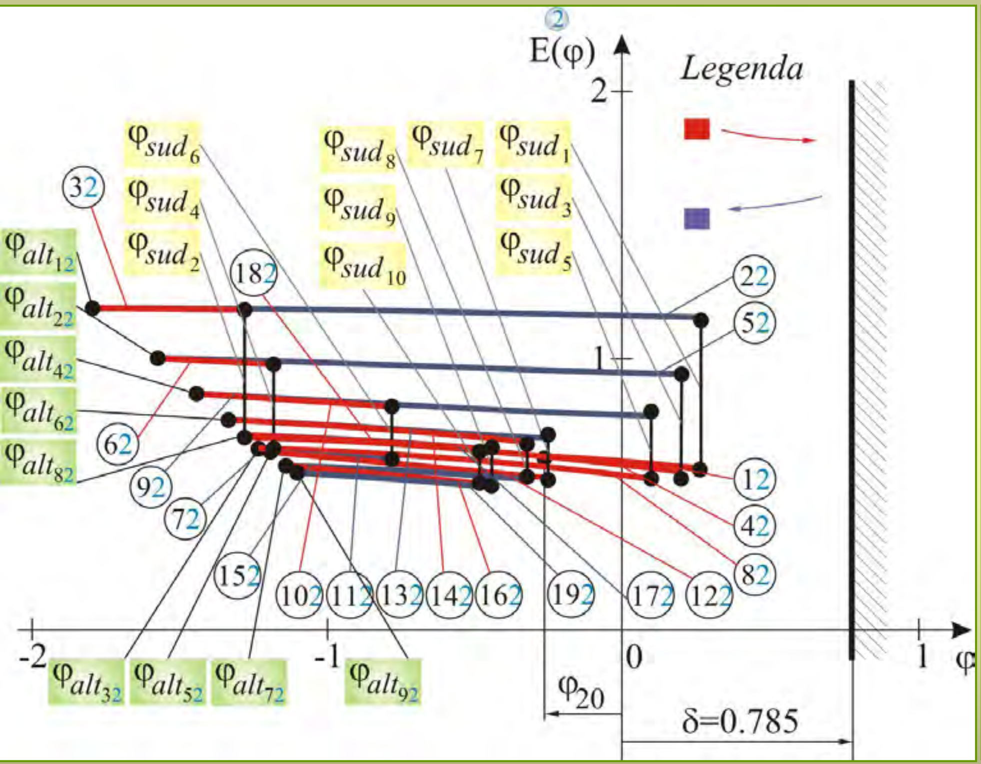


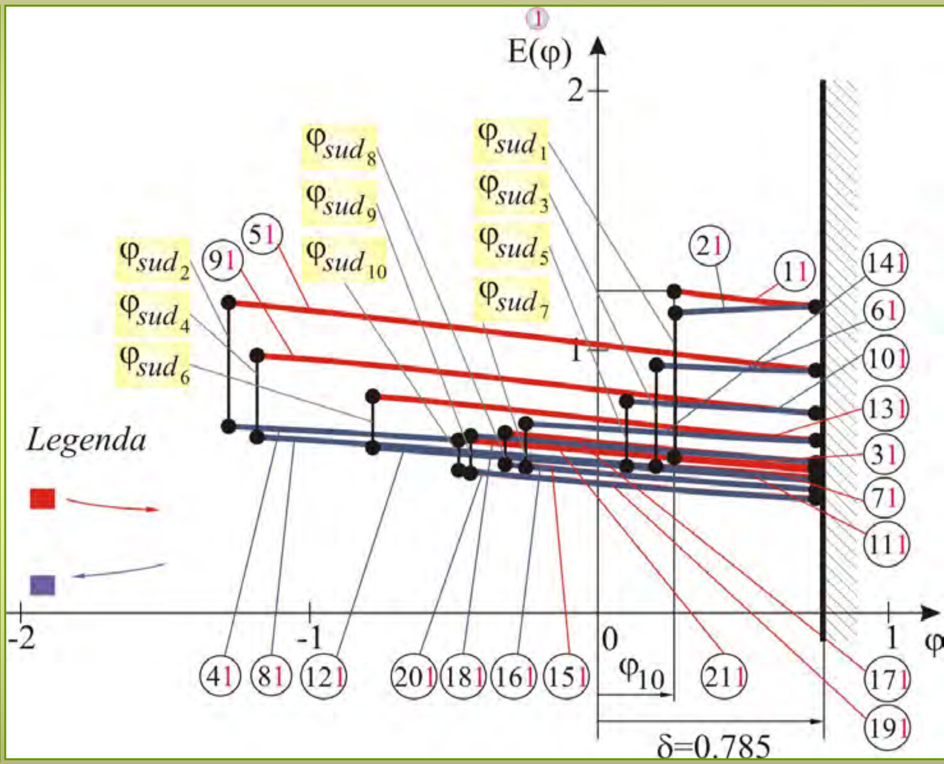
Druge kuglice 2

Prve kuglice 1

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene ukupne mehaničke energije





Druge kuglice 2

Prve kuglice 1

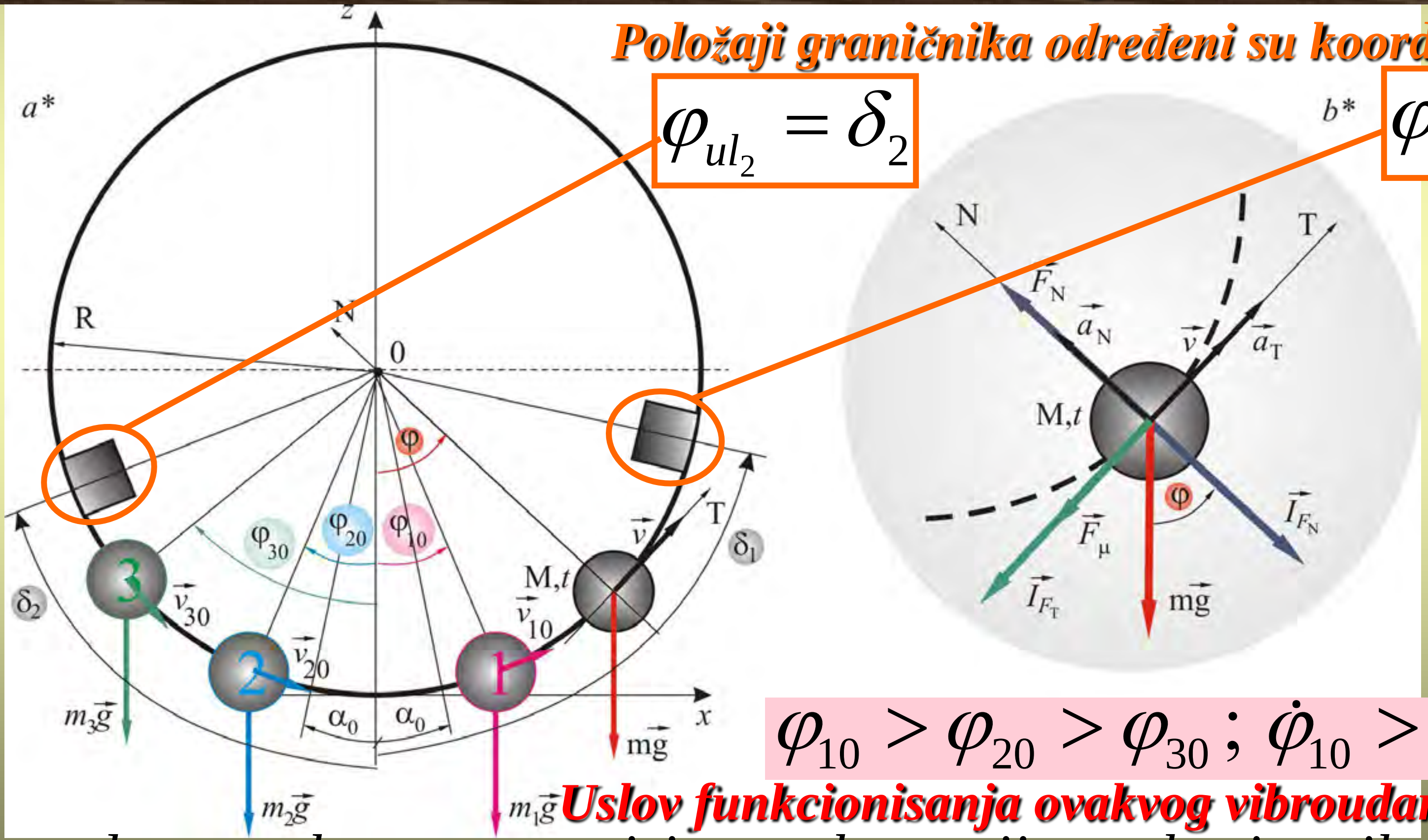
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Primer 9

Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacije, na bazi oscilatora sa tri kuglice

Položaji graničnika određeni su koordintama

$$\varphi_{ul_2} = \delta_2 \qquad \varphi_{ul_1} = \delta_1$$



$$\varphi_{10} > \varphi_{20} > \varphi_{30} \, ; \, \dot{\varphi}_{10} > \dot{\varphi}_{20} > \dot{\varphi}_{30}$$

Uslov funkcionisanja ovakvog vibroudarnog sistema

Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacije, na bazi oscilatora sa tri kuglice: a* početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Posmatrani sistem ima tri stepena slobode → Usvojene generalisane koordinate $\boxed{\varphi_1}$, $\boxed{\varphi_2}$ i $\boxed{\varphi_3}$

Analiza kretanja vibroudarnog sistema

Diferencijalne (dvojne) jednačine kretanja

$$\ddot{\varphi}_1 \pm \dot{\varphi}_1^2 tg\alpha_0 + \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi_1 \pm \alpha_0) = 0 \quad \begin{cases} za \ \ \dot{\varphi}_1 > 0 \\ za \ \ \dot{\varphi}_1 < 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi}_2 \pm \dot{\varphi}_2^2 tg\alpha_0 + \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi_2 \pm \alpha_0) = 0 \quad \begin{cases} za \ \ \dot{\varphi}_2 > 0 \\ za \ \ \dot{\varphi}_2 < 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\varphi}_3 \pm \dot{\varphi}_3^2 tg\alpha_0 + \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi_3 \pm \alpha_0) = 0 \quad \begin{cases} za \ \ \dot{\varphi}_3 > 0 \\ za \ \ \dot{\varphi}_3 < 0 \end{cases}$$

(dvojne) jednačine faznih trajektorija

$$\dot{\varphi}_1(\varphi_1)^2 = \frac{2g}{(1+4tg^2\alpha_0)R\cos\alpha_0}\left[\cos(\varphi_1 \pm \alpha_0) - 2tg\alpha_0\sin(\varphi_1 \pm \alpha_0)\right] + C_1 e^{\mp 2\varphi_1 tg\alpha_0} \quad \begin{cases} za \ \ \dot{\varphi}_1 > 0 \\ za \ \ \dot{\varphi}_1 < 0 \end{cases}$$

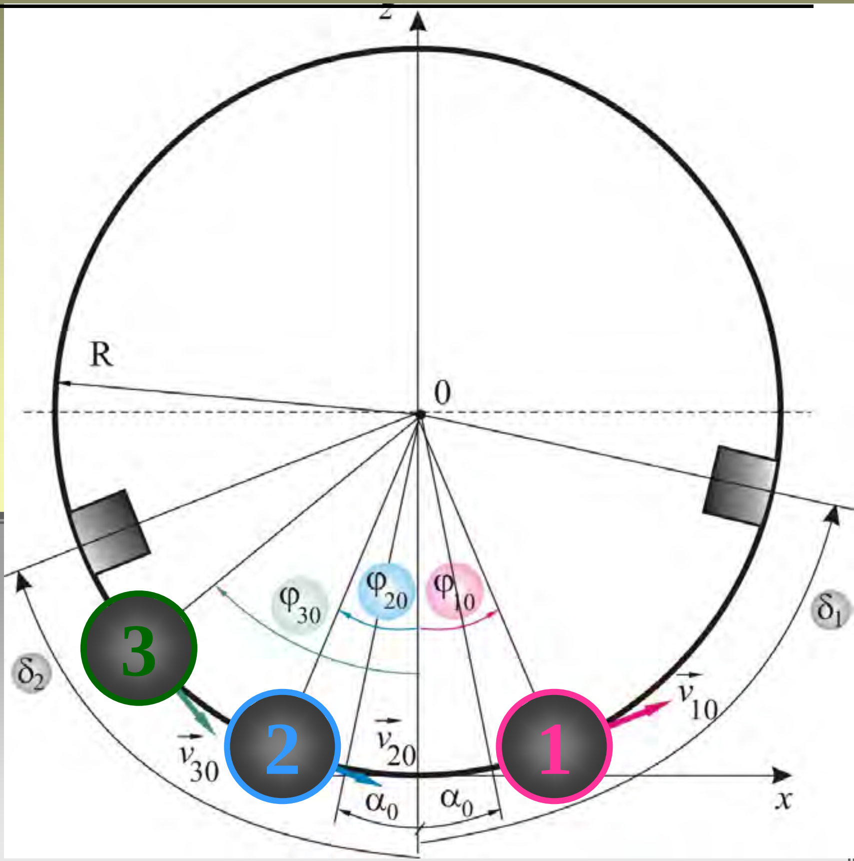
$$\dot{\varphi}_2(\varphi_2)^2 = \frac{2g}{(1+4tg^2\alpha_0)R\cos\alpha_0}\left[\cos(\varphi_2 \pm \alpha_0) - 2tg\alpha_0\sin(\varphi_2 \pm \alpha_0)\right] + C_2 e^{\mp 2\varphi_2 tg\alpha_0} \quad \begin{cases} za \ \ \dot{\varphi}_2 > 0 \\ za \ \ \dot{\varphi}_2 < 0 \end{cases}$$

$$\dot{\varphi}_3(\varphi_3)^2 = \frac{2g}{(1+4tg^2\alpha_0)R\cos\alpha_0}\left[\cos(\varphi_3 \pm \alpha_0) - 2tg\alpha_0\sin(\varphi_3 \pm \alpha_0)\right] + C_3 e^{\mp 2\varphi_3 tg\alpha_0} \quad \begin{cases} za \ \ \dot{\varphi}_3 > 0 \\ za \ \ \dot{\varphi}_3 < 0 \end{cases}$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Slobodno kretanje teških materijalnih tačaka delimo na odgovarajuće:

intervale kretanja



Vrednosti parametara su :

$$\alpha_0 = 0{,}05, g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right], R = 0{,}5[m]$$

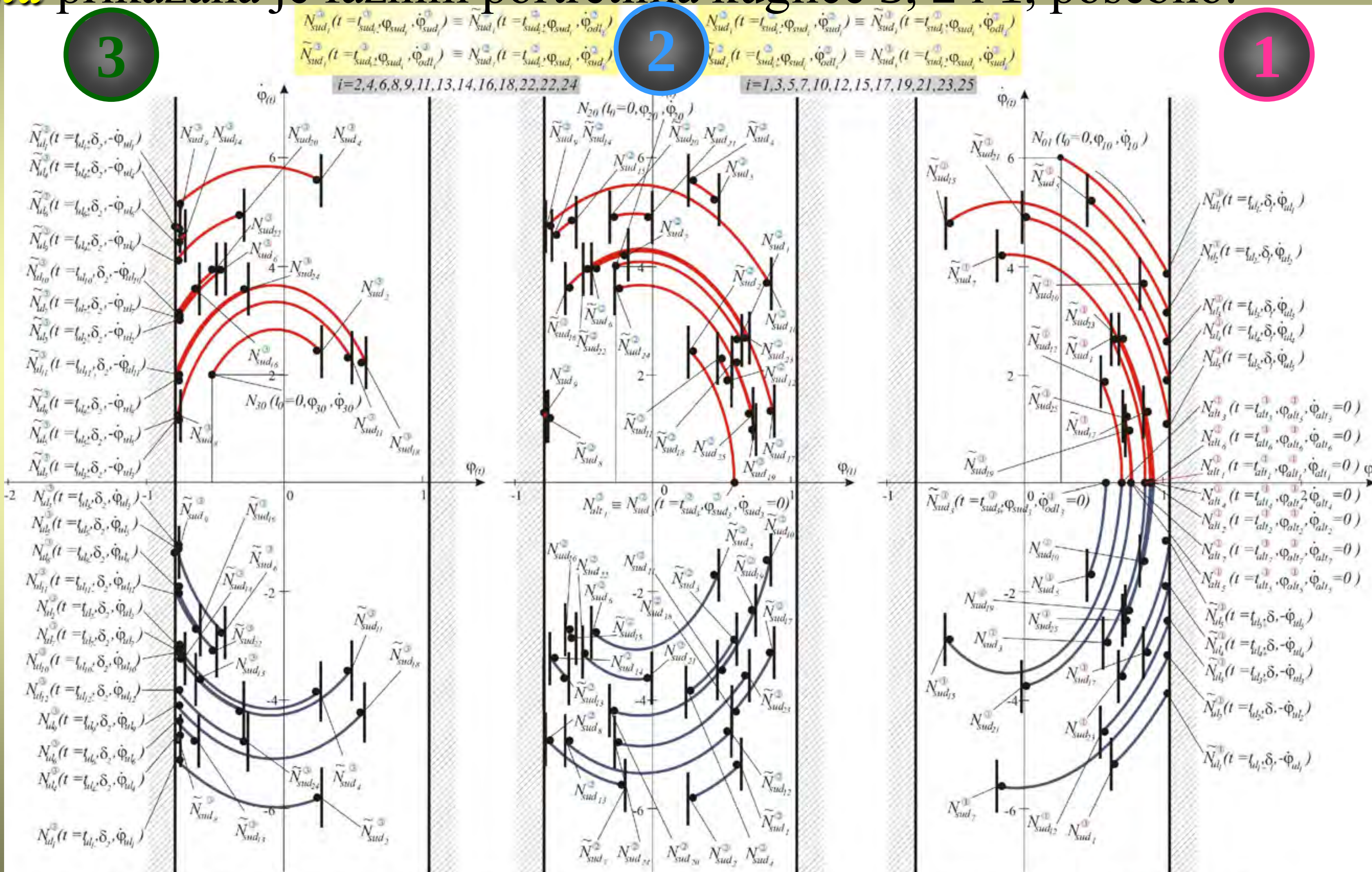
$$m_1 = m_2 = m_3 = 0{,}2[kg]$$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{3}[rad], \delta_2 = -\frac{\pi}{4}[rad], \varphi_{10} = \frac{\pi}{12}, \dot{\varphi}_{10} = 6\left[\frac{rad}{s}\right],$$

$$\varphi_{20} = -\frac{\pi}{12}[rad], \dot{\varphi}_{20} = 4\left[\frac{rad}{s}\right], \varphi_{30} = -\frac{\pi}{6}[rad], \dot{\varphi}_{30} = 2\left[\frac{rad}{s}\right].$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafička vizuelizacija analize kretanja ***posmatranog vibroudarnog sistema*** prikazana je faznim portretima kuglice 3, 2 i 1, posebno.



Slika 3.259. Fazni portret kuglice ③ (kao deo oscilatora) koja se kreće po kružnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja $\mu = tg\alpha_0$ sa ograničenim elongacijama u ravni $(\varphi, \dot{\varphi})$

Slika 3.260. Fazni portret kuglice ② (kao deo oscilatora) koja se kreće po kružnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja $\mu = tg\alpha_0$ sa ograničenim elongacijama u ravni $(\varphi, \dot{\varphi})$

Slika 3.261. Fazni portret kuglice ① (kao deo oscilatora) koja se kreće po kružnoj hrapavoj liniji koeficijenta trenja klizanja $\mu = tg\alpha_0$ sa ograničenim elongacijama u ravni $(\varphi, \dot{\varphi})$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Analizu kretanja posmatranog vibroudarnog sistema, korišćenjem prethodne metodologije rada, ***smo sproveli do momenta kada nemamo udare kuglice 1 u ograničivač elongacija, postavljen sa desne strane***, odnosno kada vibroudarni sistem opstaje kao vibroudarni sa jednim ograničivačem.

Do ovog momenta desilo se:

-***dvadeset pet sudara kuglica***, od toga dvanaest sudara kuglica 1 i 2 i trinaest sudara kuglica 2 i 3.

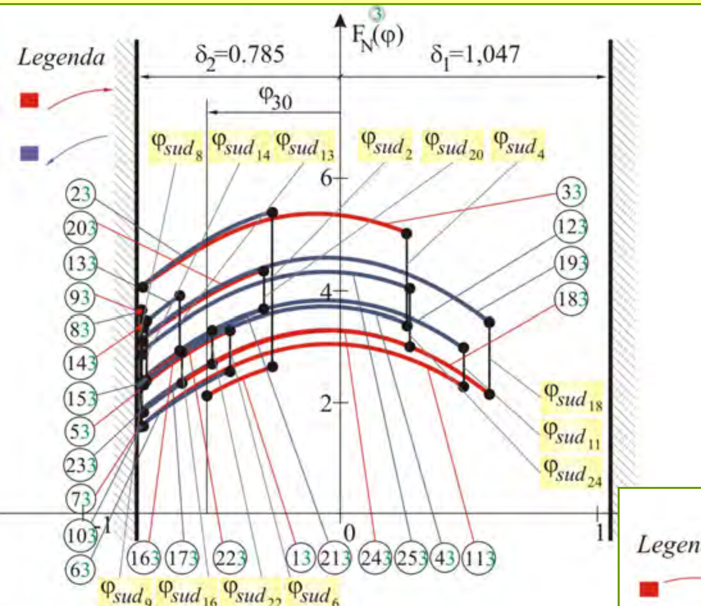
-***Kuglica 1*** ima ***pet udara u ograničivač elongacija***, postavljenog sa desne strane i ***sedam tačaka alternacija***. Posle sedme tačke alternacije nemamo više udara u ograničivač elongacija.

Za ovako izabrane konkretne vrednosti parametara ***postavljen je uslov do kada kuglica 1 udara u ograničivač elongacija***, postavljeni sa desne strane. Uslov je: ***odlazna brzina kuglice 1 pri prolasku kroz ravnotežni položaj treba da iznosi***

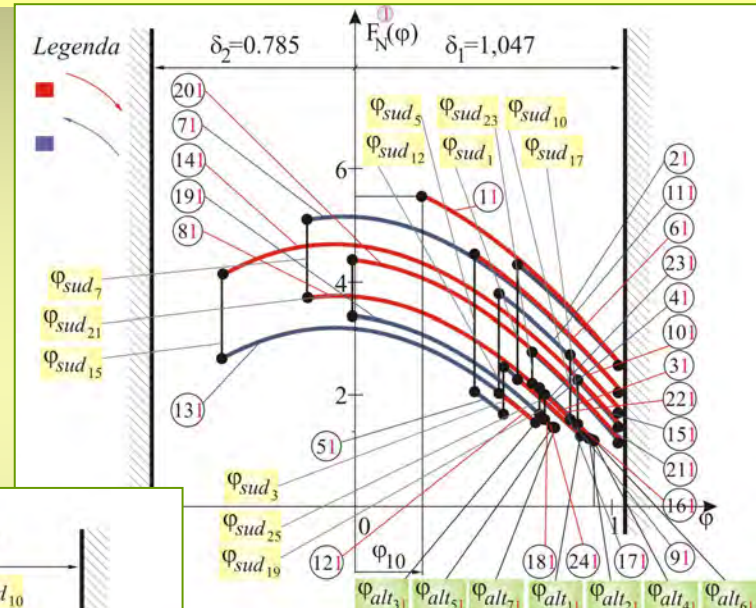
$$\boxed{\dot{\varphi}_{1sud_i,odl} < 4{,}78 \left[\frac{rad}{s}\right]}$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

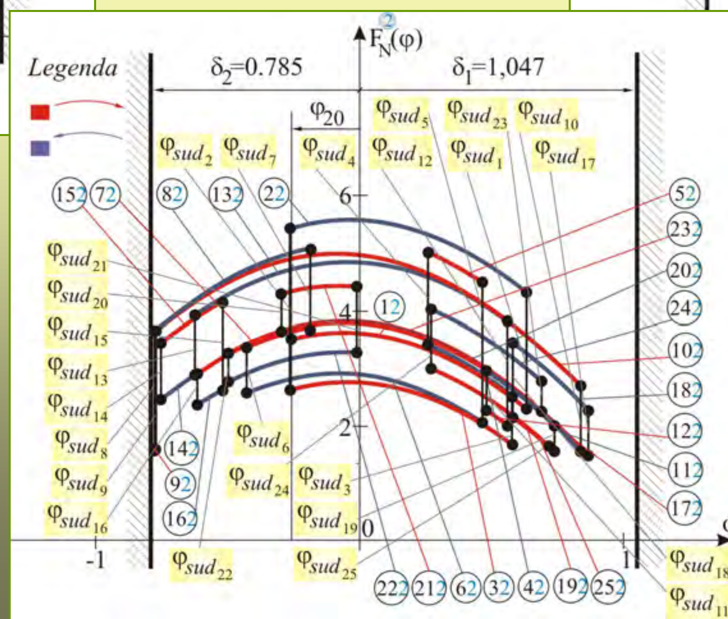
Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema



Grafik promene sile pritiska



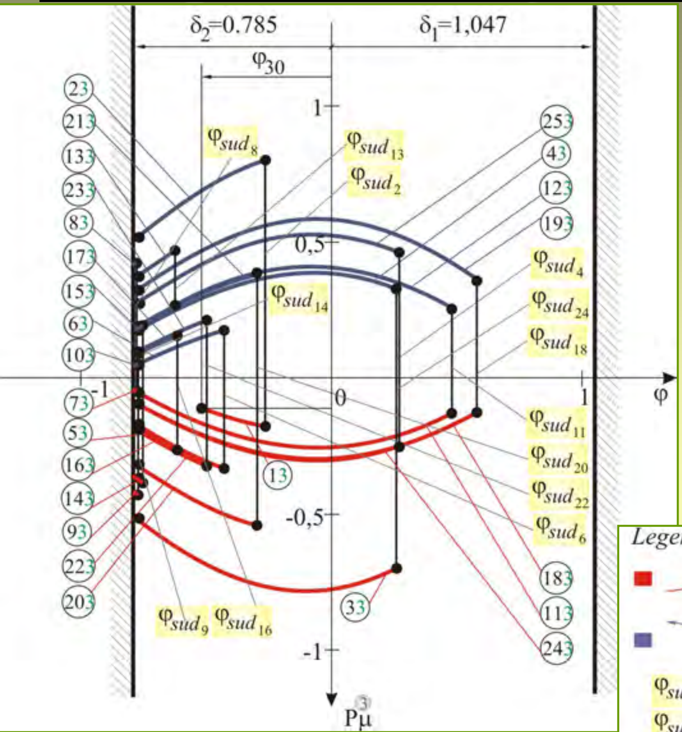
Treće kuglice 3



Prve kuglice 1

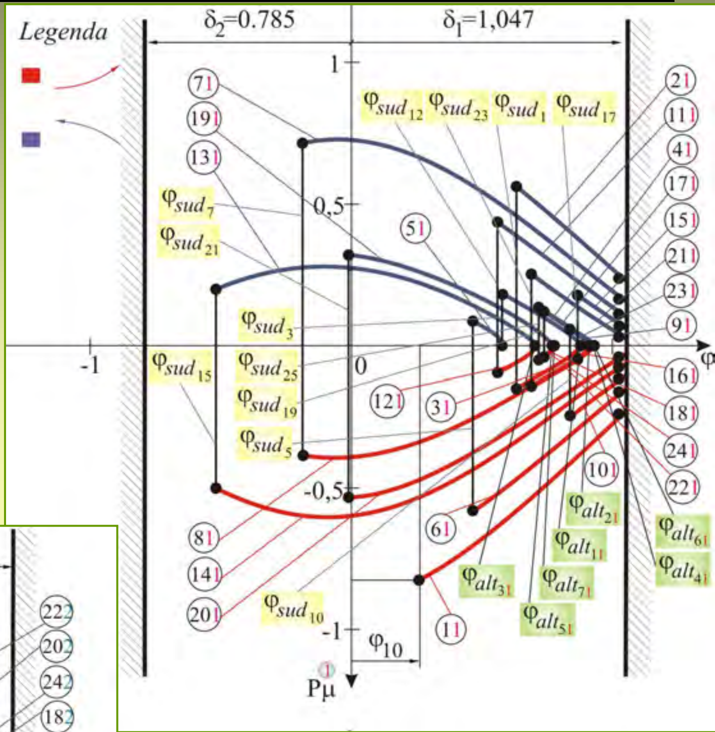
Druge kuglice 2

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

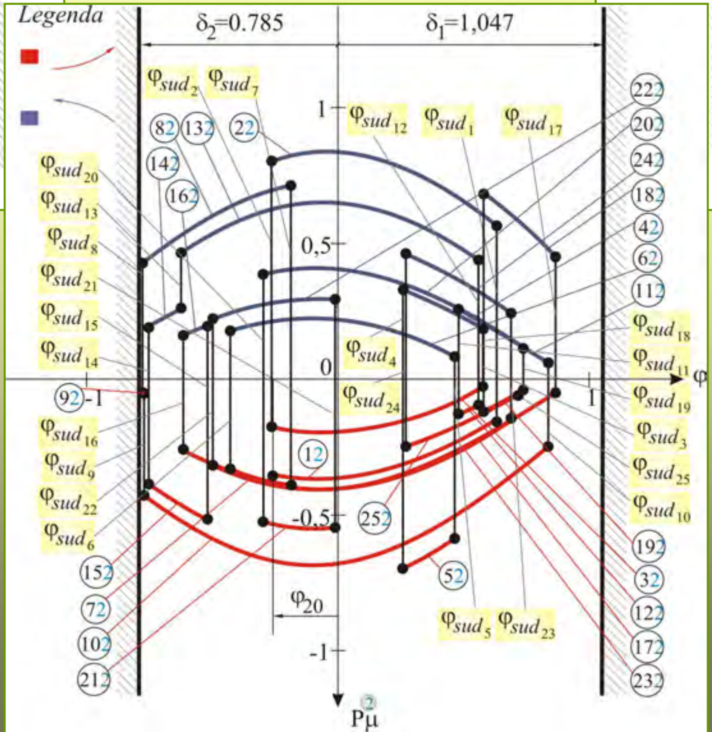


Treće kuglice 3

Grafik promene snage P_μ



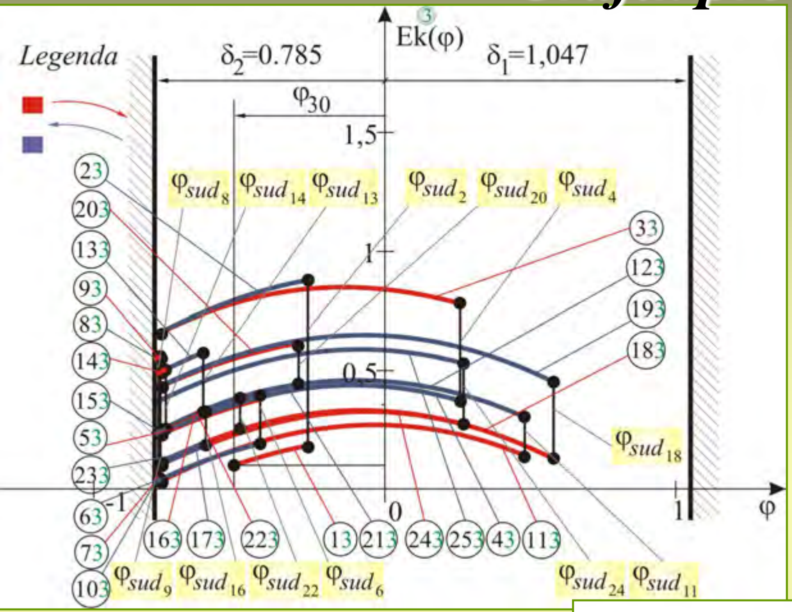
Prve kuglice 1



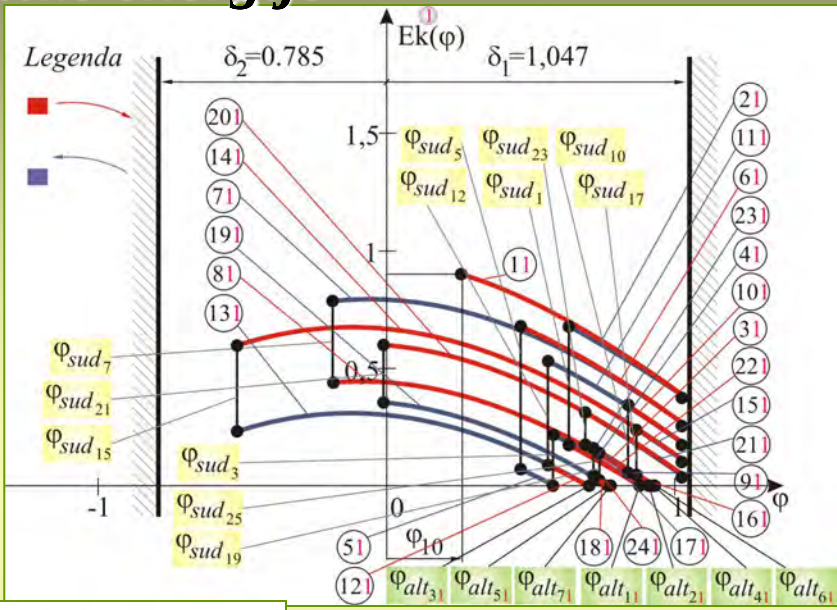
Druge kuglice 2

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

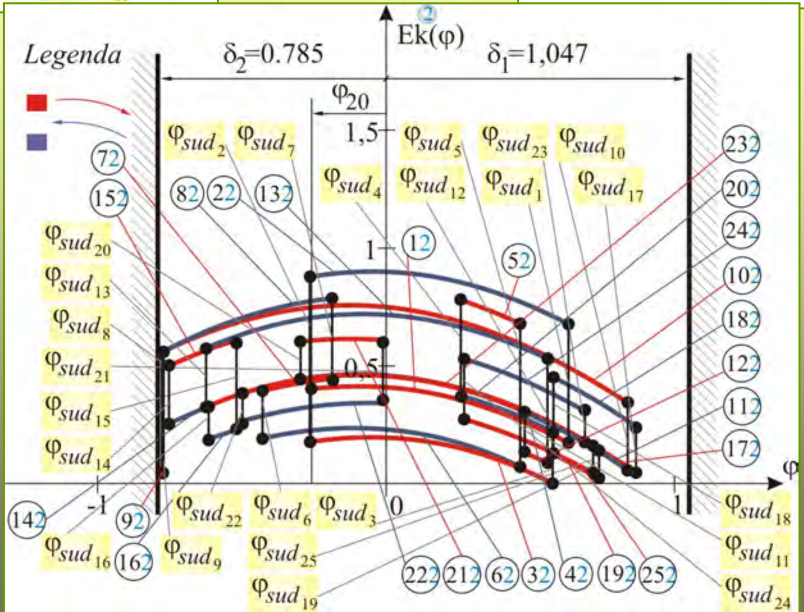
Grafik promene kinetičke energije



Treće kuglice 3



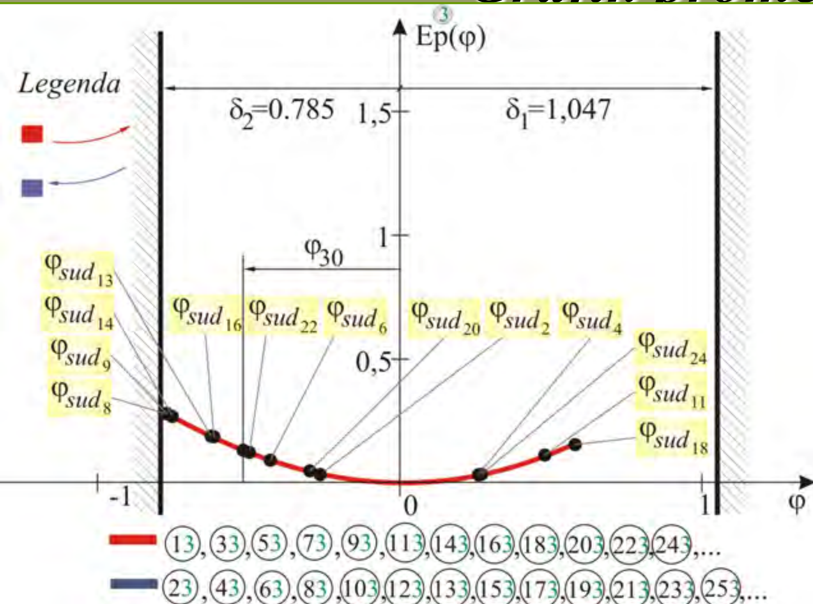
Prve kuglice 1

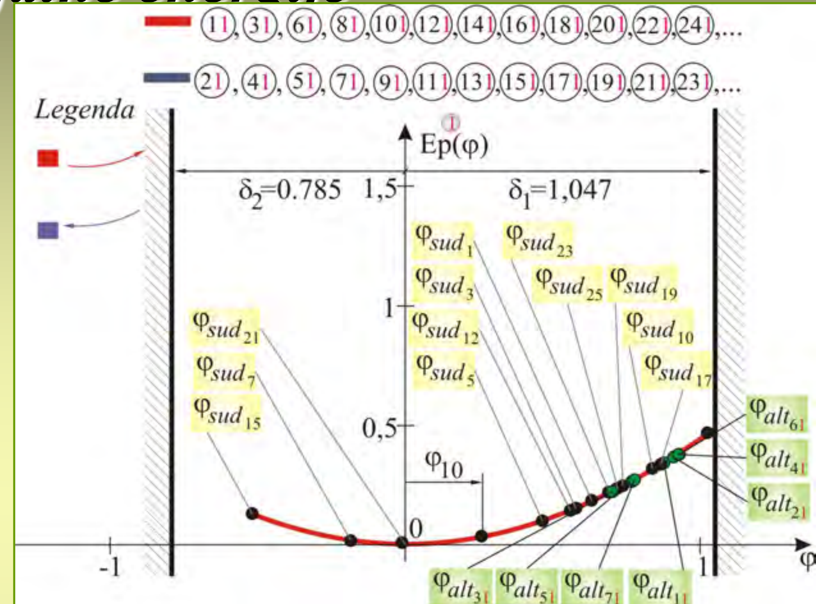


Druge kuglice 2

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

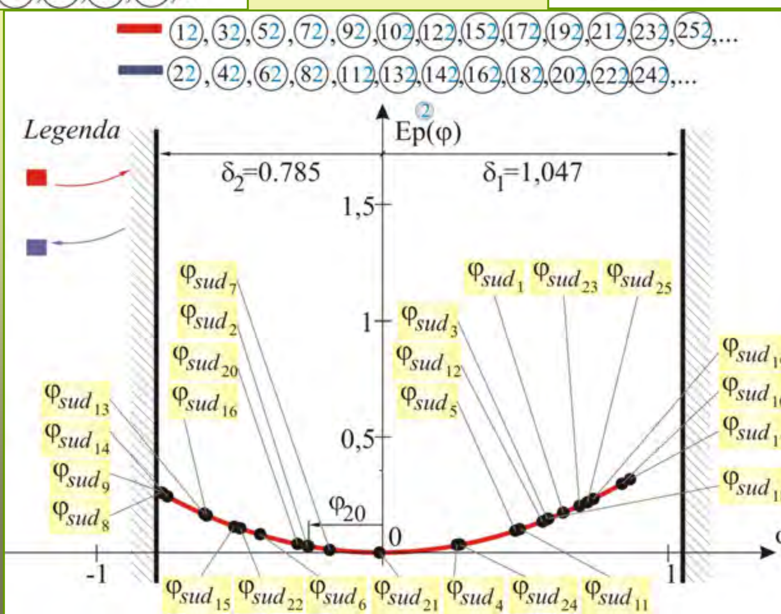
Grafik promene potencijalne energije





Treće kuglice **3**

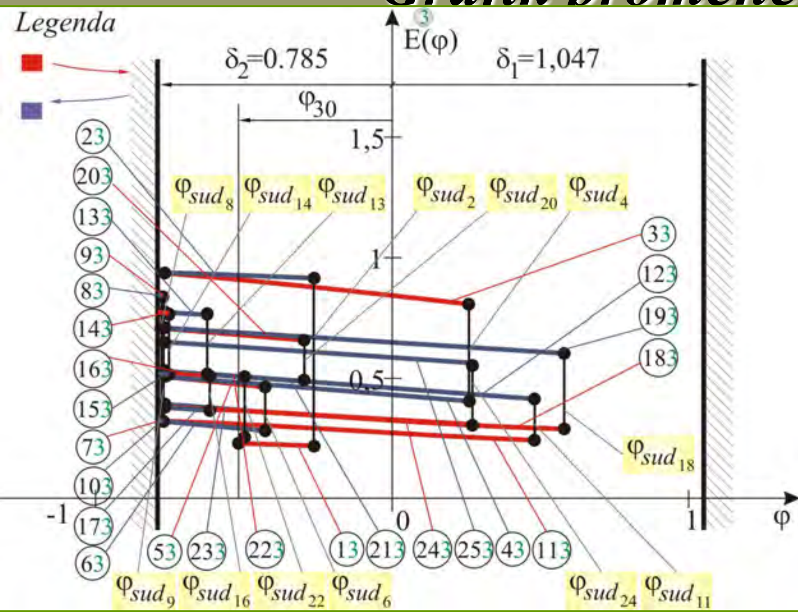
Prve kuglice **1**

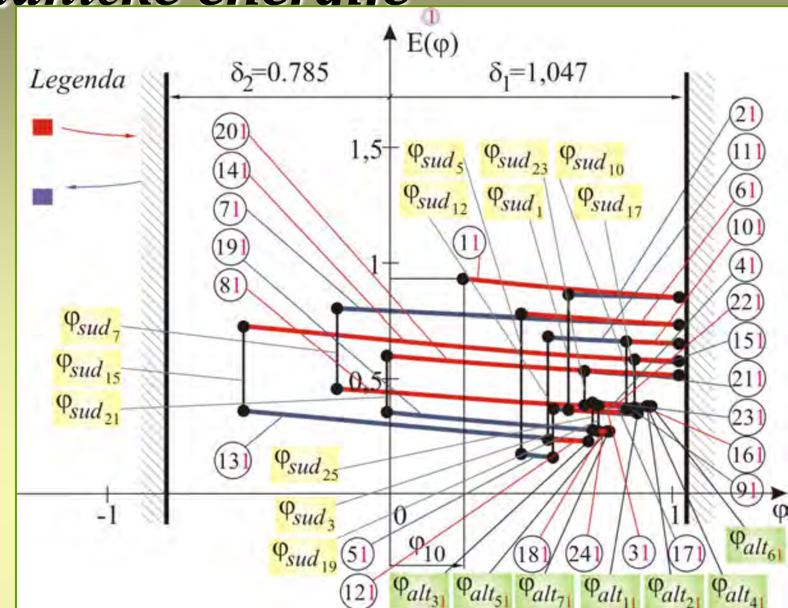


Druge kuglice **2**

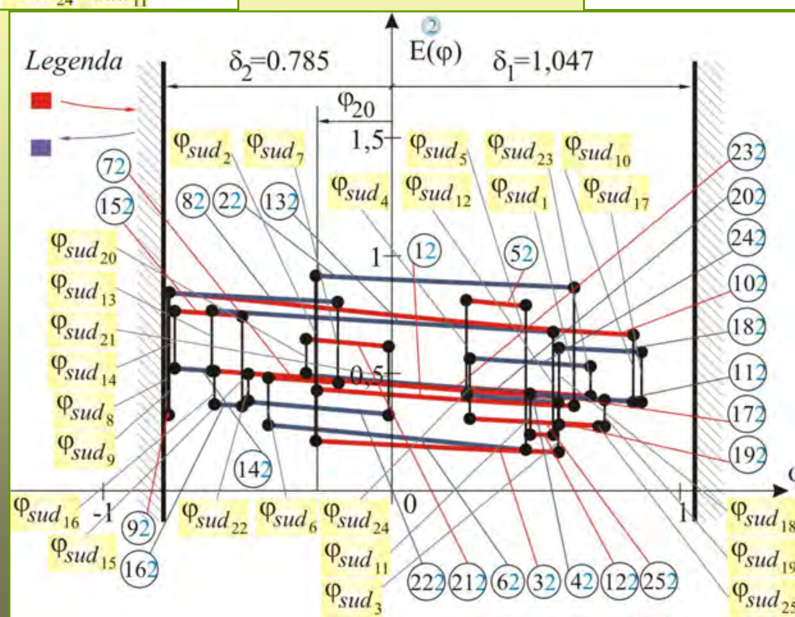
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se s l o b o d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafik promene ukupne mehaničke energije





Treće kuglice 3



Prve kuglice 1

Druge kuglice 2

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Proučena je ***dinamika vibroudarnih sistema*** na bazi oscilatora koji se ***prinudno*** kreće po ***neidealnim vezama-hrapavim krivim putanjama*** sa silom trenja otpora klizanja *Coulomb*-ovog tipa, oblika:

parabole, cikloide i kruga.

Pri tome, za ... ove oscilatora se uzimaju po

je... i dve teške materijalne tačke-kuglice.

Da bi sistem ... stao vibroudarni, postavlja se ***po jedan i dva ograničivača e... acije*** i isti posmatraju kao ***nepokretni*** i ***pokretni***.

Prinudno kretanje ... la oscilatora-kuglice obezbeđuju

...oljašnje jednofrekventne i dvofrekventne (dve jednofrekventne) sile.

Na kraju svakog konkretnog primera sprovodi se energijska analiza dinamike vibrouda... krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama.

Uz korišćenje metode

Numeričke metode

zasnovane na metodi Runge-Kutta četvrtog reda sa promen... ćene iz softverskih paketa MATLAB i

„Tačne" metode

Wolfram Mathematica ...

analitička metoda „podešavanja" i metoda fazne ravni

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Parabolična hrapava linija

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja teške materijalne tačke po paraboličnoj hrapavoj liniji u funkciji generalisane koordinate $\boxed{\varphi}$ je

$$\ddot{\varphi}+\left(3tg\varphi\pm\mu\right)\dot{\varphi}^2+\frac{g\cos^3\varphi}{p}\left(\sin\varphi\pm\mu\cos\varphi\right)=\frac{F_0\cos^3\varphi}{p}\cos\Omega t,\ \begin{cases} za\ v>0 \\ za\ v<0 \end{cases}$$

Za ***potpuno opisivanje*** dinamike teške materijalne tačke diferencijalnoj (dvojnoj) jednačini kretanja potrebno je pridružiti:

a* početne uslove

$$s_{(0)}\left(\varphi_{(0)}\right)=s_0\left(\varphi_0\right)\ \text{ i } v_{(0)}\left(\varphi_{(0)},\dot{\varphi}_{(0)}\right)=\dot{s}_{(0)}\left(\varphi_{(0)},\dot{\varphi}_{(0)}\right)=v_0\left(\varphi_0,\dot{\varphi}_0\right);$$

b* uslove ograničenja ugaone elongacije, kao i ***uslove sudara***

$$s_{ul,i}=s_i\left(\varphi_i\right),\ s_{ul,(i+1)}=s_{(i+1)}\left(\varphi_{(i+1)}\right),\ \dot{s}_{odl,i}\left(\dot{\varphi}_{odl,i}\right)=-k\dot{s}_{ul,i}\left(\dot{\varphi}_{ul,i}\right)$$

gde je: k- koeficijent sudara; $i=1,2,3,\ldots,n$

n- broj sudara do zaustavljanja teške materijalne tačke na paraboličnoj hrapavoj liniji. ***USVAJAMO*** $\boxed{k=1}$ ***- idealno elastični sudar***;

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Diferencijalnu jednačinu kretanja sistema ne možemo rešiti eksplicitno (u zatvorenom obliku). ***Za njeno približno rešavanje koristimo*** softverski paket ***WOLFRAM Mathematica 7***. Rezultate smo proverili korišćenjem softverskog paketa ***MATLAB R2008a***.

Prinudno kretanje teške materijalne tačke ***(po analogiji sa kretanjem bez prinudne sile)*** delimo na odgovarajuće:

intervale i podintervale kretanja

Primer 10

Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom

Položaji graničnika određeni lučnim koordintama

$$s_{ul,1} = s_1(\varphi_1) \quad s_{ul,2} = s_2(\varphi_2)$$

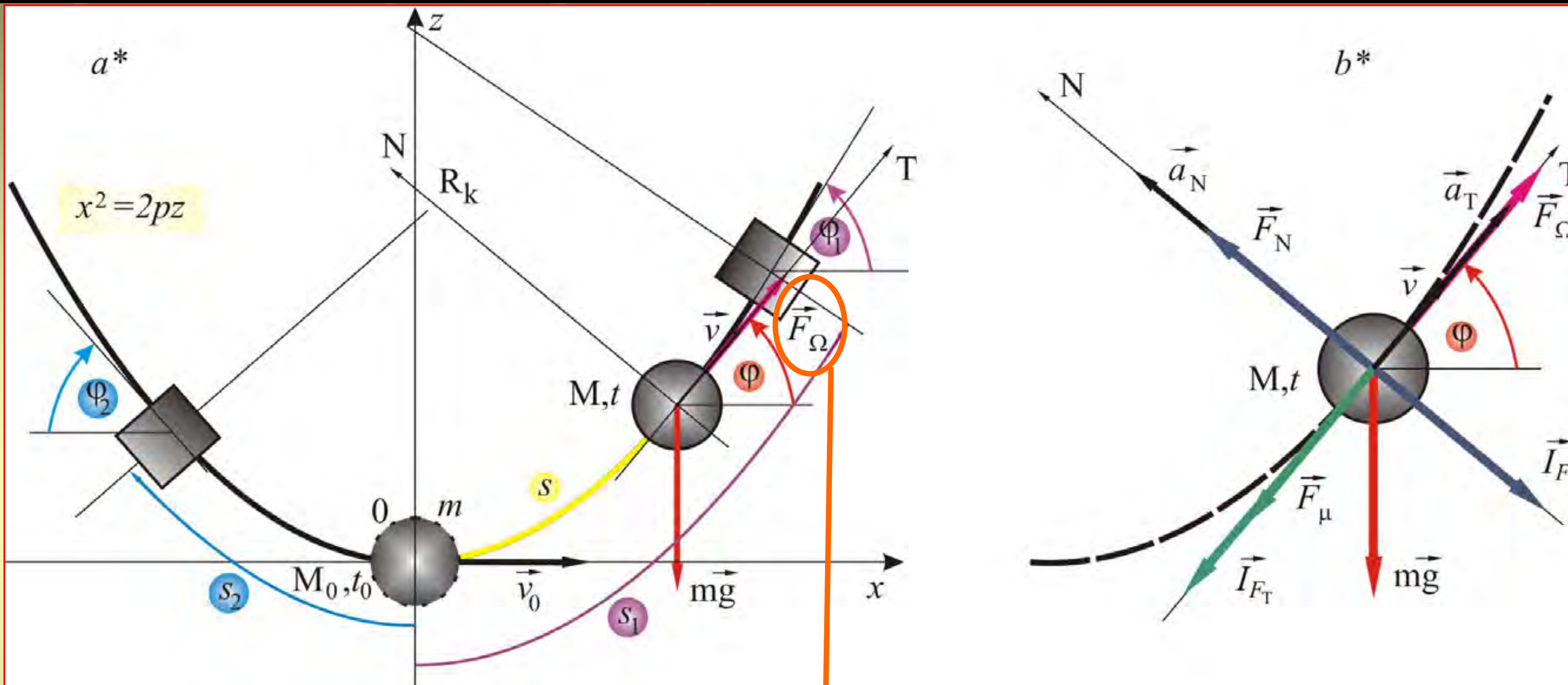
Na materijalnu tačku dejstvuje spoljašnja jednofrekventna (periodična) sila

Amplituda

$$\boxed{F(t) = F_0 \cos \Omega t}$$

Frekfencija

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom pod dejstvom spoljašnje jednofrekventne sile :
a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

Prvi interval kretanja (do prvog udara u ograničivač elongacija) *za* $v > 0$

$$\ddot{\varphi} + (3tg\varphi + \mu)\dot{\varphi}^2 + \frac{g\cos^3\varphi}{p}(\sin\varphi + \mu\cos\varphi) = \frac{F_0\cos^3\varphi}{p}\cos\Omega t$$

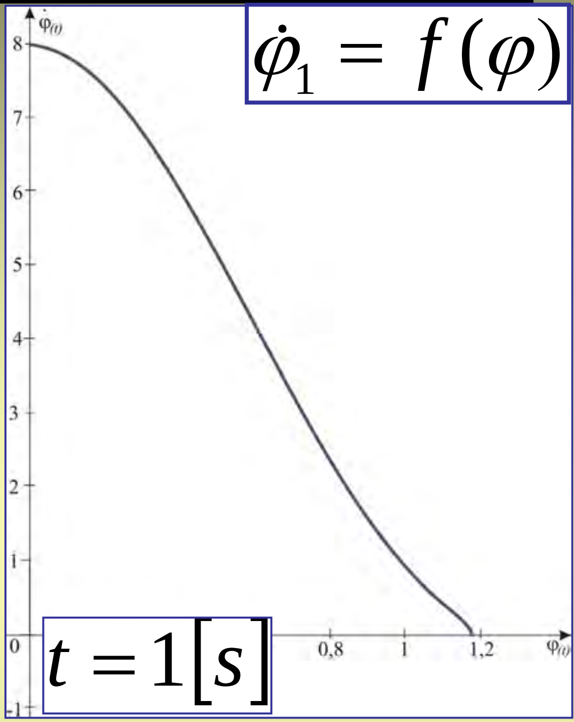
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

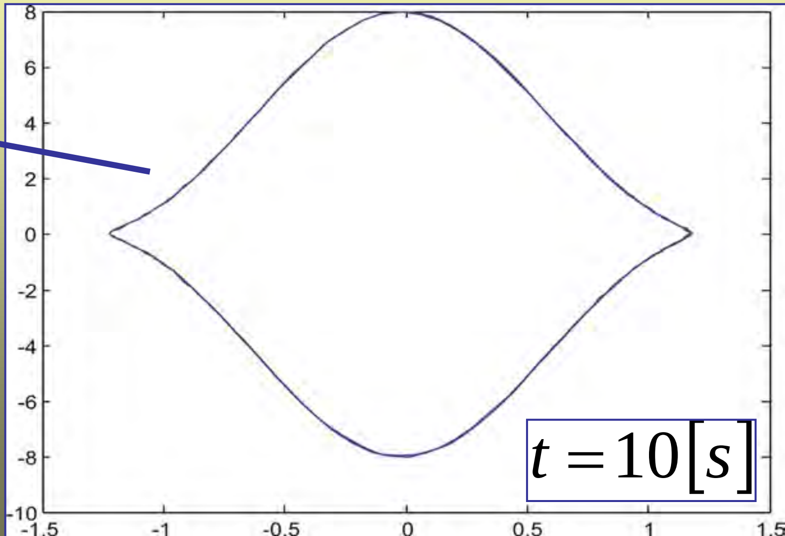
Pored početnih uslova korišćenjem uslova udara

$$t = t_{ul_1+},\ \varphi(t_{ul_1+}) = \varphi_1,\ \dot{\varphi}(t_{ul_1+}) = \dot{\varphi}_{ul_1+}$$

određujemo faznu trajektoriju (koju ćemo iskoristiti za određivanje ***ugaone brzine prvog udara*** teške materijalne tačke u ograničivač ugaone elongacije, postavljen sa desne strane)

Wolfram Mathematica 7





Izgled krive fazne trajektorije nam govori da iako na tešku materijalnu tačku dejstvuje spoljašnja jednofrekventna sila ona se ponaša kao da su u pitanju ***slobodne oscilacije***. ***Uticaj parametara spoljašnje jednofrekventne sile je neznatan***.

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Vrednosti parametara su :

$$F_0 = 0{,}2[N], \quad \Omega = 0{,}3\left[\frac{rad}{s}\right],$$

$$m = 0{,}2[kg], \alpha_0 = 0{,}05, \; g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}[rad], \varphi_2 = -\frac{\pi}{6}[rad], \; \varphi_0 = 0, \; \dot{\varphi}_0 = 8\left[\frac{rad}{s}\right], p = 1[m].$$

Drugi interval kretanja (Od prvog udara, u ograničivač elongacije, postavljen sa desne strane, do drugog udara u ograničivač elongacije postavljen sa leve strane).

$za \; v < 0$

$$\ddot{\varphi} + (3tg\varphi - \mu)\dot{\varphi}^2 + \frac{g\cos^3\varphi}{p}(\sin\varphi - \mu\cos\varphi) = \frac{F_0\cos^3\varphi}{p}\cos\Omega t$$

uz početne uslove kretanja

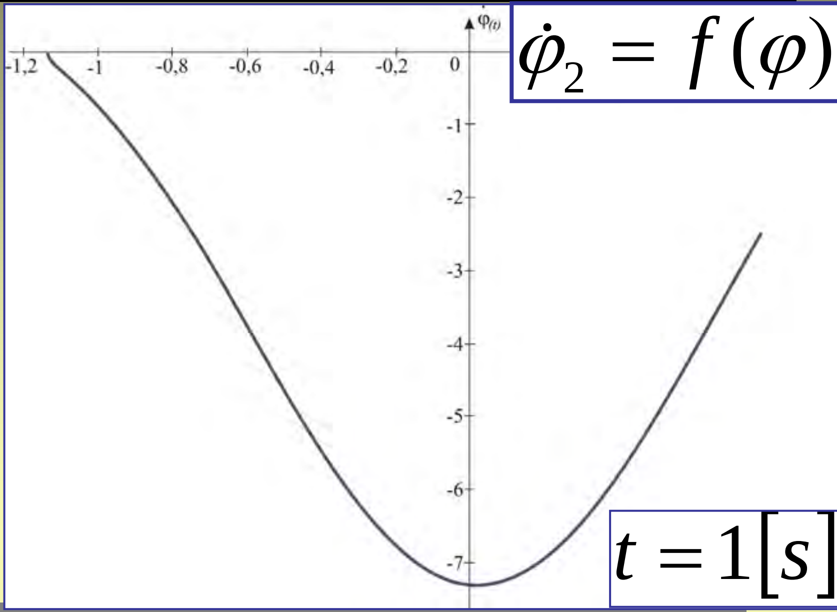
$$t = t_{ul_1+}, \varphi(t_{ul_1+}) = \varphi_1, \dot{\varphi}(t_{ul_1+}) = \dot{\varphi}_{odl_1} = -\dot{\varphi}_{ul_1-}.$$

i uslove udara

$$t = t_{ul_2+}, \; \varphi(t_{ul_2+}) = \varphi_2, \dot{\varphi}(t_{ul_2+}) = \dot{\varphi}_{ul_2+}$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

određujemo faznu trajektoriju (koju ćemo iskoristiti za određivanje ***ugaone brzine drugog udara*** teške materijalne tačke u ograničivač ugaone elongacije, postavljen sa leve strane)



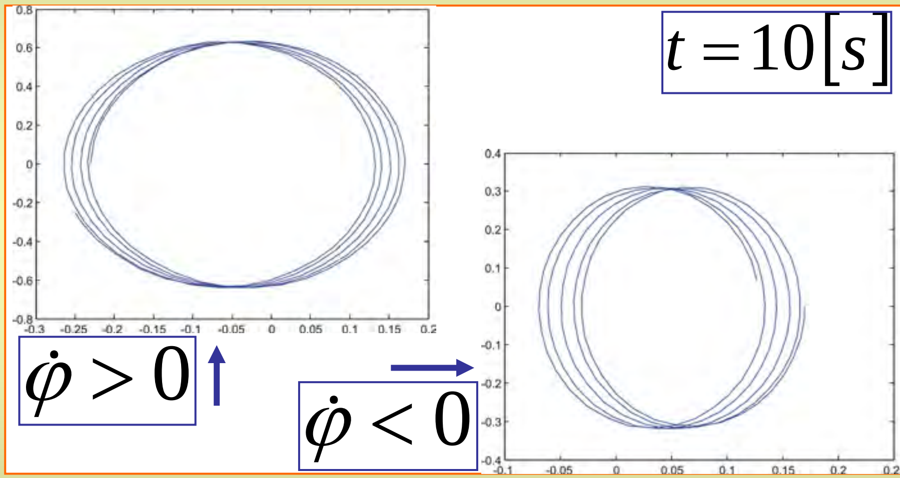
Analizom narednih intervala kretanja *(sprovedenu sve do sedme tačke alternacija, odnosno do momenta višestruke alternacije smera kretanja oko ravnotežnog položaja)* ***dolazimo do zaključka:***

-***Vibroudarni sistem opstaje sve do jedanaestog udara*** u ograničivače elongacija, od toga pet udara u ograniičivač elongacija postavljen sa desne strane i šest udara u ograničivač elongacija postavljen sa leve strane.

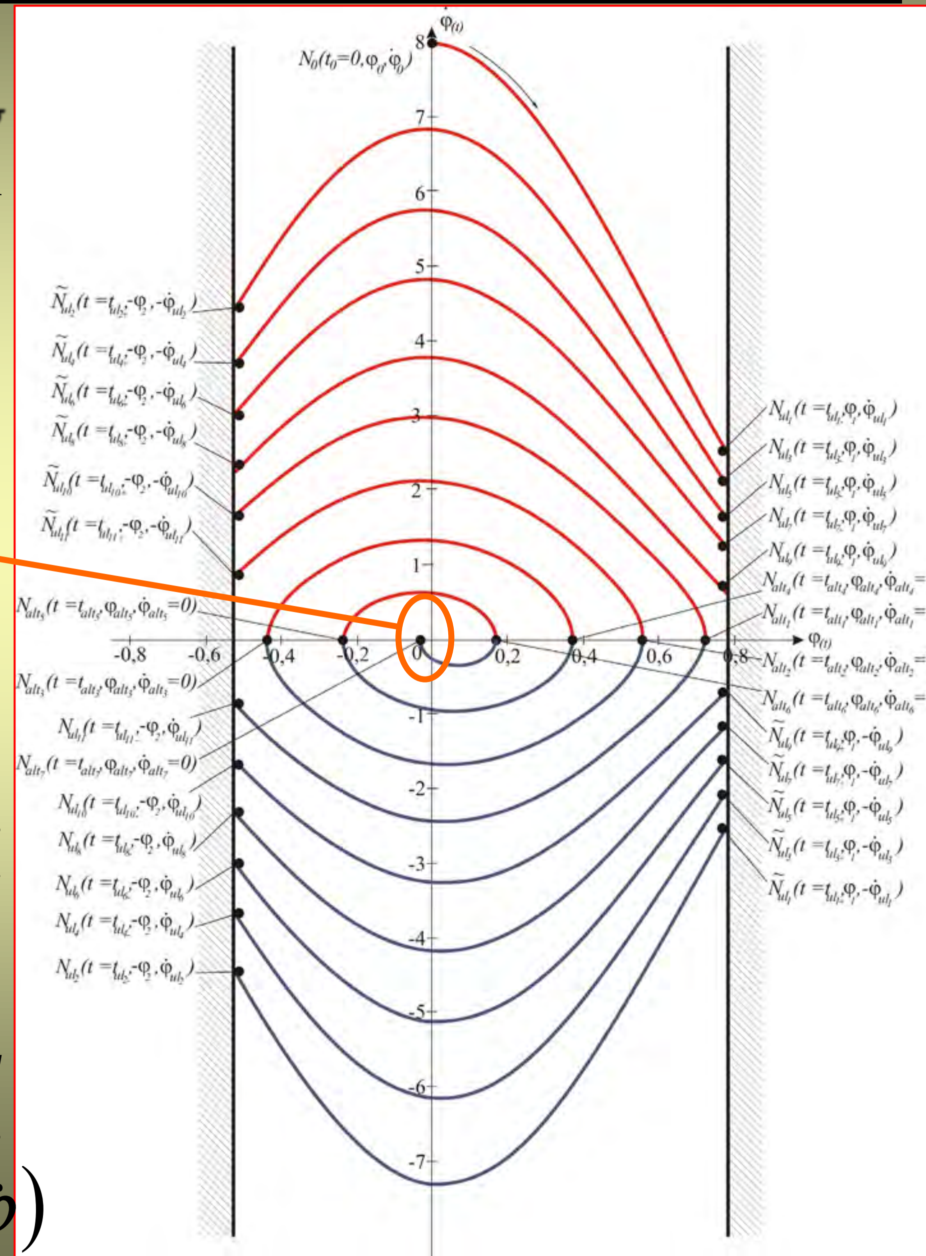
-***Posle jedanaestog udara*** u ograničivač elongacija postavljen sa desne strane pojavljuju se ***tačke alternacija u oba smera***.

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafička vizuelizacija analize kretanja ***posmatranog vibroudarnog sistema*** prikazana je faznim portretom.



Fazni portret teške materijalne tačke koja se kreće po paraboličnoj hrapavoj liniji, koeficijenta trenja klizanja $\mu = tg\,\alpha_0$, *sa obostranim ograničenim elongacijama i pod dejstvom spoljašnje jednofrekventne sile* $F(t) = F_0 \cos \Omega t$, *u ravni* $(\varphi, \dot{\varphi})$



Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

Energijsku analizu za sve intervale kretanja vršimo na osnovu formula za

- silu pritiska teške materijalne tačke na paraboličnu hrapavu liniju,

$$F_{N,i} = mg\cos\varphi + \frac{mp}{\cos^3\varphi}\dot{\varphi}_i^2$$

-snagu koja potiče od sile Coulomb-ovog trenja klizanja,

$$P_{\mu,i} = -\mu\left(mg\cos\varphi + \frac{mp}{\cos^3\varphi}\dot{\varphi}_i^2\right)\frac{p}{\cos^3\varphi}\dot{\varphi}_i$$

- kinetičku energiju *Ek*,

$$Ek_i(\varphi) = \frac{1}{2}m\frac{p^2}{\cos^6\varphi}\dot{\varphi}_i^2$$

- potencijalnu energiju *Ep*

$$Ep_i(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{mgp}{\cos^2\varphi}$$

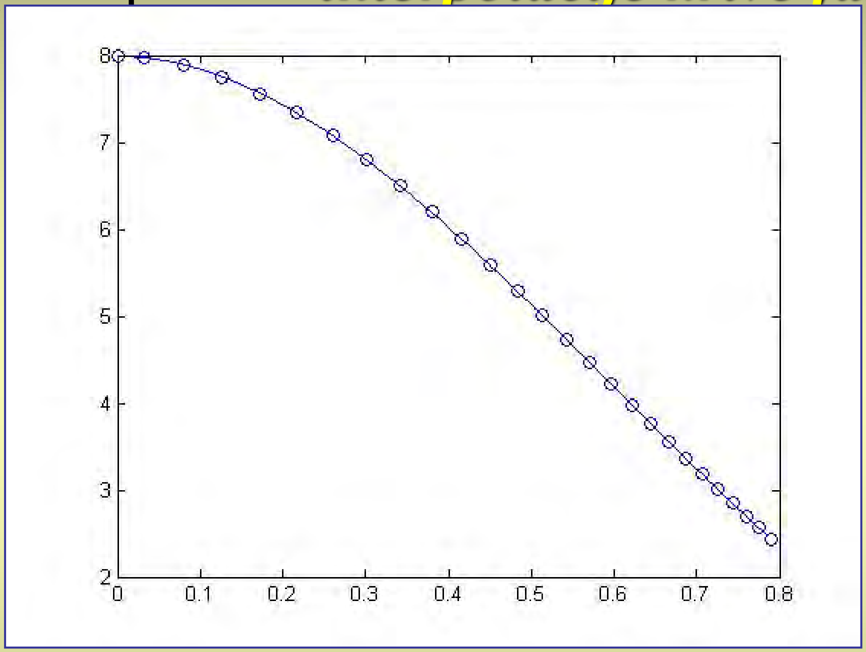
$$\boxed{i = 1,2,\ldots,18}$$

- i ukupnu mehaničku energiju *E*.

$$E_i(\varphi) = Ek_i(\varphi) + Ep_i(\varphi) = \frac{1}{2}m\frac{p^2}{\cos^6\varphi}\dot{\varphi}_i^2 + \frac{1}{2}\frac{mgp}{\cos^2\varphi}$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Analitički izrazi jednačina faznih trajektorija $\boxed{\dot{\varphi}_i = f(\varphi)}$ dobijeni su postupakom ***interpolacije krive fazne trajektorije*** .



MATLAB R2008a

Postupak interpolacije krive fazne trajektorije u prvom intervalu kretanja

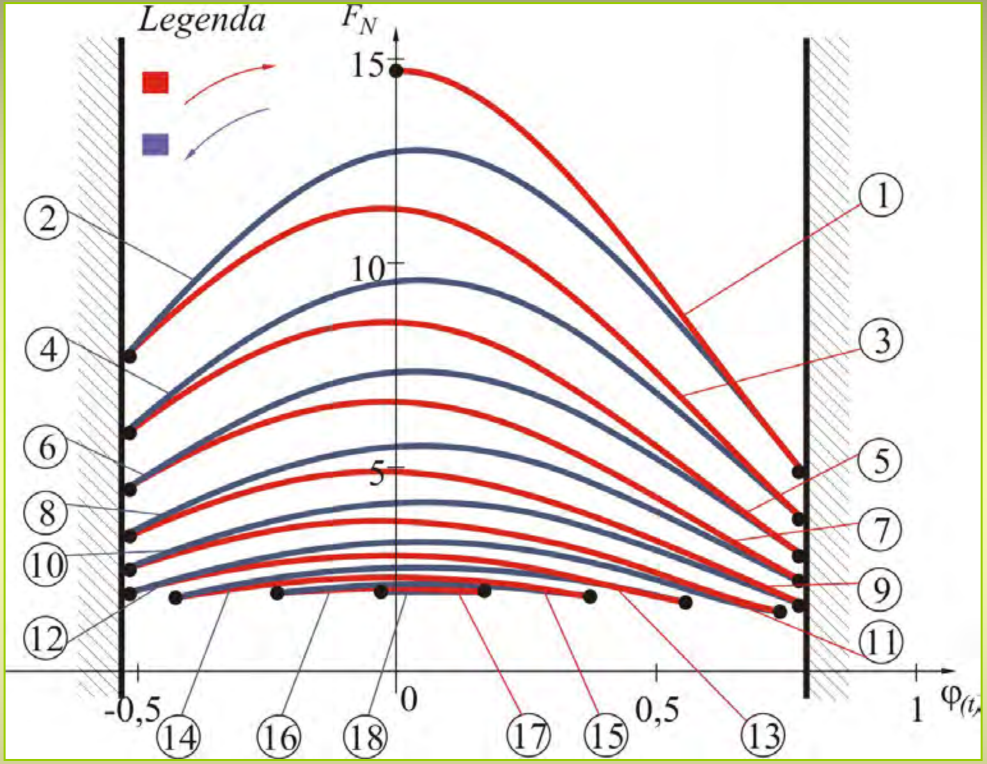
analitički izraza za faznu trajektoriju

$$\boxed{8{,}7714\varphi^3 - 15{,}8705\varphi^2 + 0{,}0307\varphi + 7{,}9882}$$

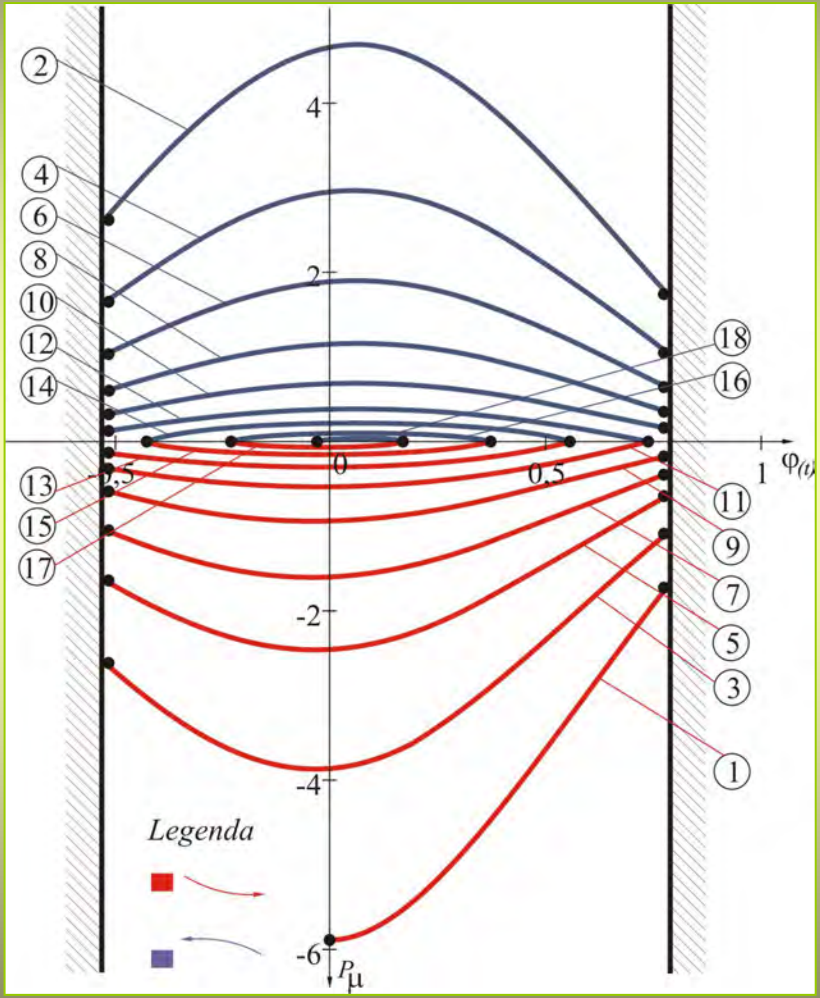
- Tačke prikazuju oblik krive fazne trajektorije

— Punom linijom predstavljen je oblik krive fazne trajektorije posle izvršene interpolacije korišćenjem

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



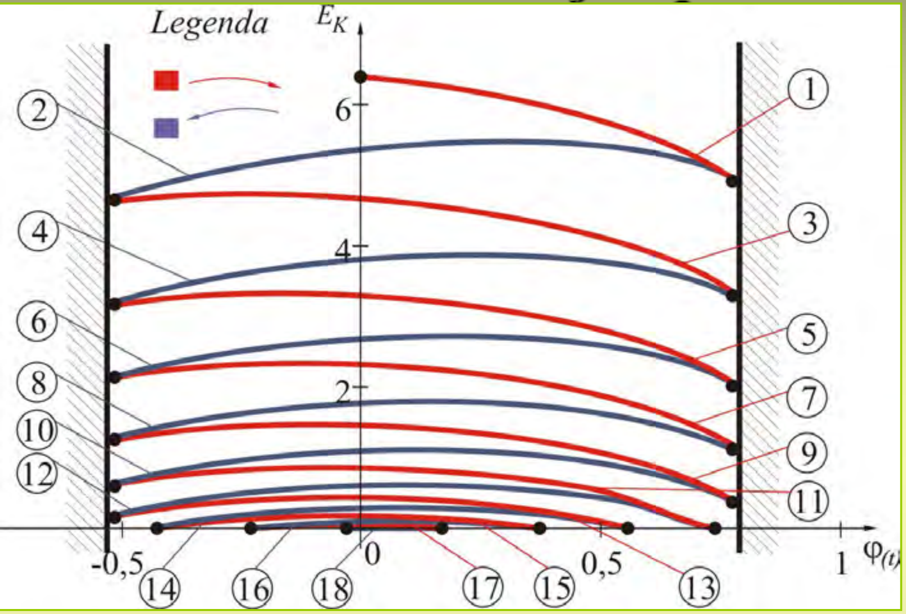
Kriva promene sile pritiska za sve intervale kretanja

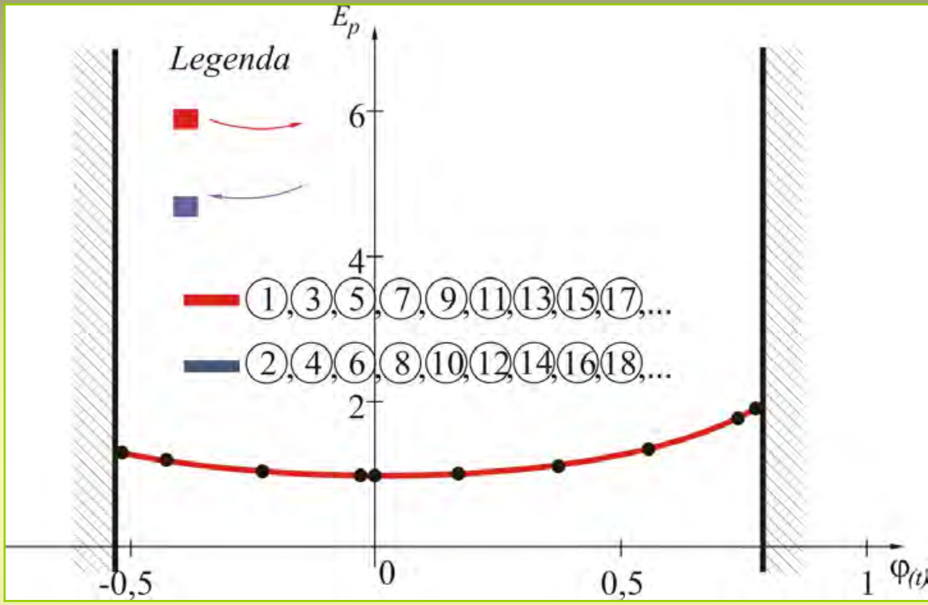


Promene snage za sve intervale kretanja

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

***Grafici promene* (za sve intervale kretanja)**

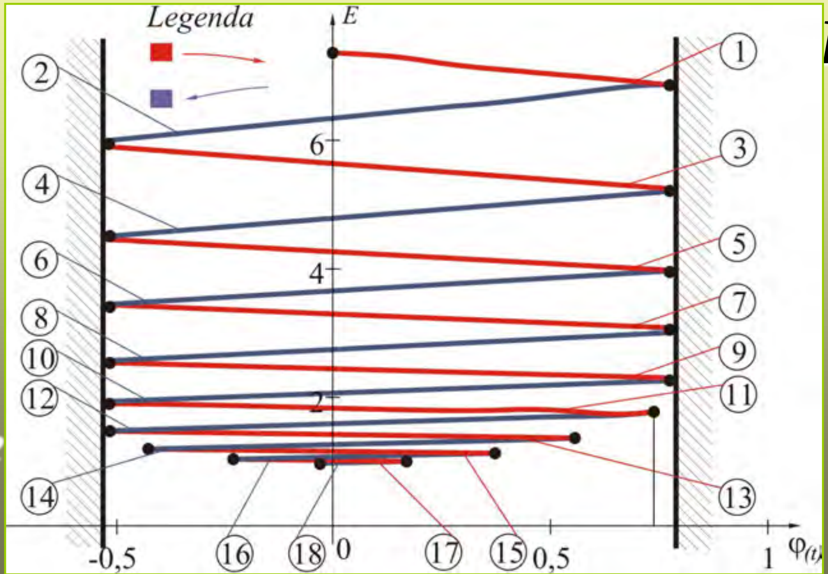




Kinetičke energije u ravni $\left(Ek,\varphi\right)$

Potencijalne energije u ravni $\left(Ep,\varphi\right)$

Ukupne mehaničke energije u ravni $\left(E,\varphi\right)$



Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Cikloidna hrapava linija

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja teške materijalne tačke po cikloidnoj hrapavoj liniji u funkciji generalisane koordinate $\boxed{\varphi}$ je

$$\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{2}tg\frac{\varphi}{2}\mp\mu\right)+\left(tg\frac{\varphi}{2}\pm\mu\right)\frac{g}{2R}=\frac{F_0}{2mR\cos\frac{\varphi}{2}}\cos\Omega t,\quad \begin{cases} za\ v=2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}>0 \\ za\ v=2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}<0 \end{cases}$$

Za ***potpuno opisivanje*** dinamike teške materijalne tačke diferencijalnoj (dvojnoj) jednačini kretanja potrebno je pridružiti:

a* početne uslove

$$s_{(0)}\left(\varphi_{(0)}\right)=s_0\left(\varphi_0\right)\ \text{ i } v_{(0)}\left(\varphi_{(0)},\dot{\varphi}_{(0)}\right)=\dot{s}_{(0)}\left(\varphi_{(0)},\dot{\varphi}_{(0)}\right)=v_0\left(\varphi_0,\dot{\varphi}_0\right);$$

b* uslove ograničenja ugaone elongacije, kao i ***uslove sudara***

$$s_{ul,i}=s_i\left(\varphi_i\right),\quad s_{ul,(i+1)}=s_{(i+1)}\left(\varphi_{(i+1)}\right),\quad \dot{s}_{odl,i}\left(\dot{\varphi}_{odl,i}\right)=-k\dot{s}_{ul,i}\left(\dot{\varphi}_{ul,i}\right)$$

gde je: *k*- koeficijent sudara; $i=1,2,3,\dots,n$

n- broj sudara do zaustavljanja teške materijalne tačke na paraboličnoj hrapavoj liniji. ***USVAJAMO*** $\boxed{k=1}$ ***- idealno elastični sudar***;

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Diferencijalnu jednačinu kretanja sistema ne možemo rešiti eksplicitno (u zatvorenom obliku). ***Za njeno približno rešavanje koristimo*** softverski paket ***WOLFRAM Mathematica 7***. Rezultate smo proverili korišćenjem softverskog paketa ***MATLAB R2008a***.

Prinudno kretanje teške materijalne tačke ***(po analogiji sa kretanjem bez prinudne sile)*** delimo na odgovarajuće:

intervale i podintervale kretanja

Primer 11

Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom

Položaji graničnika određeni lučnim koordintama

$$s_{ul,1} = s_1(\varphi_1) \quad s_{ul,2} = s_2(\varphi_2)$$

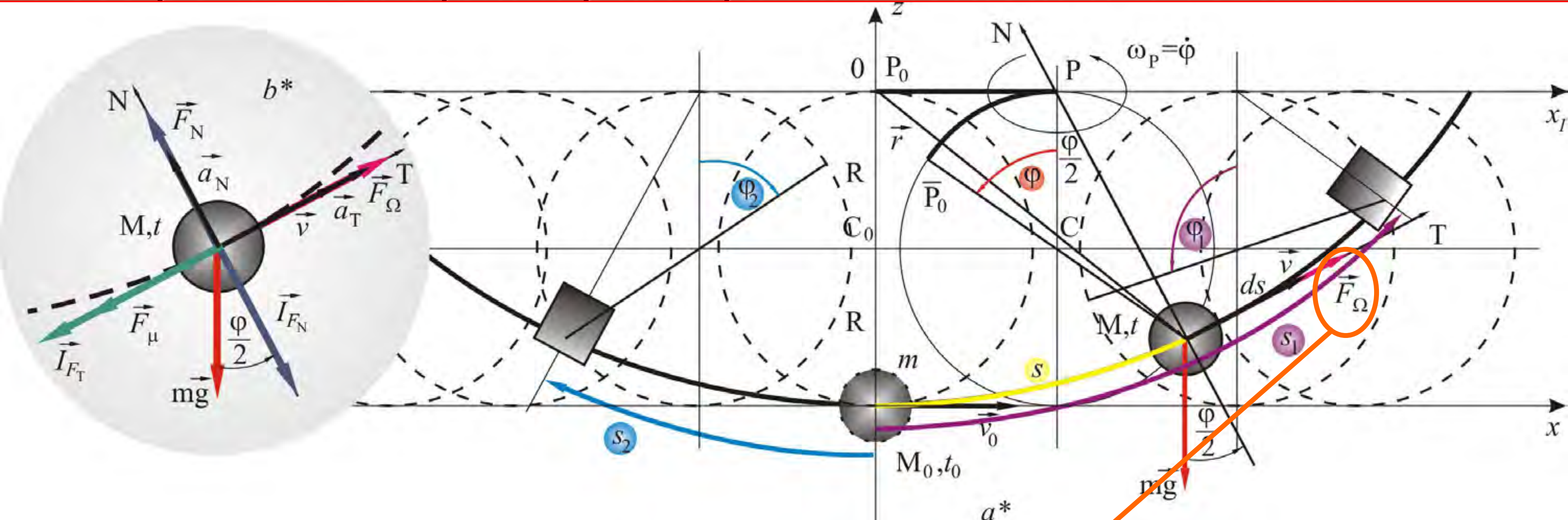
Na materijalnu tačku dejstvuje spoljašnja jednofrekventna (periodična) sila

$$\boxed{F(t) = F_0 \cos \Omega t}$$

Amplituda

Frekfencija

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



Sistem sa dva nepokretna ograničivača elongacija, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom pod dejstvom spoljašnje jednofrekventne sile :
a početni i izvedeni položaj kuglice; b* plan sila*

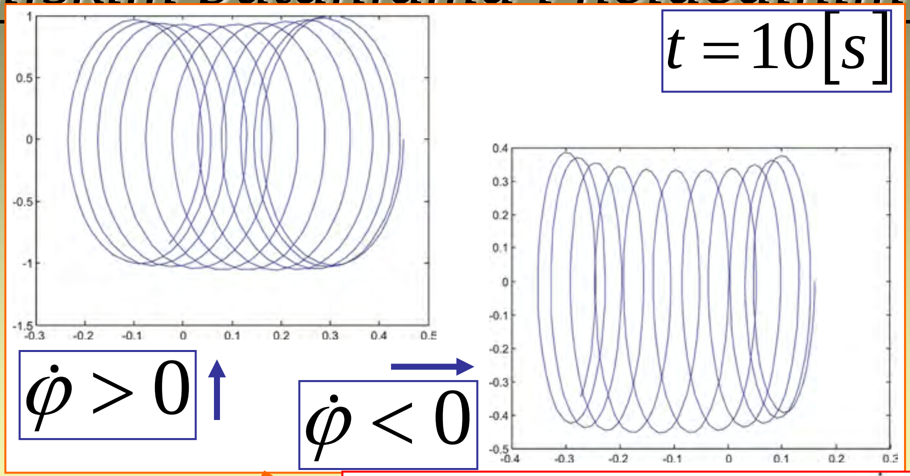
Vredosti parametara su :

$$m = 0{,}2\left[kg\right],$$

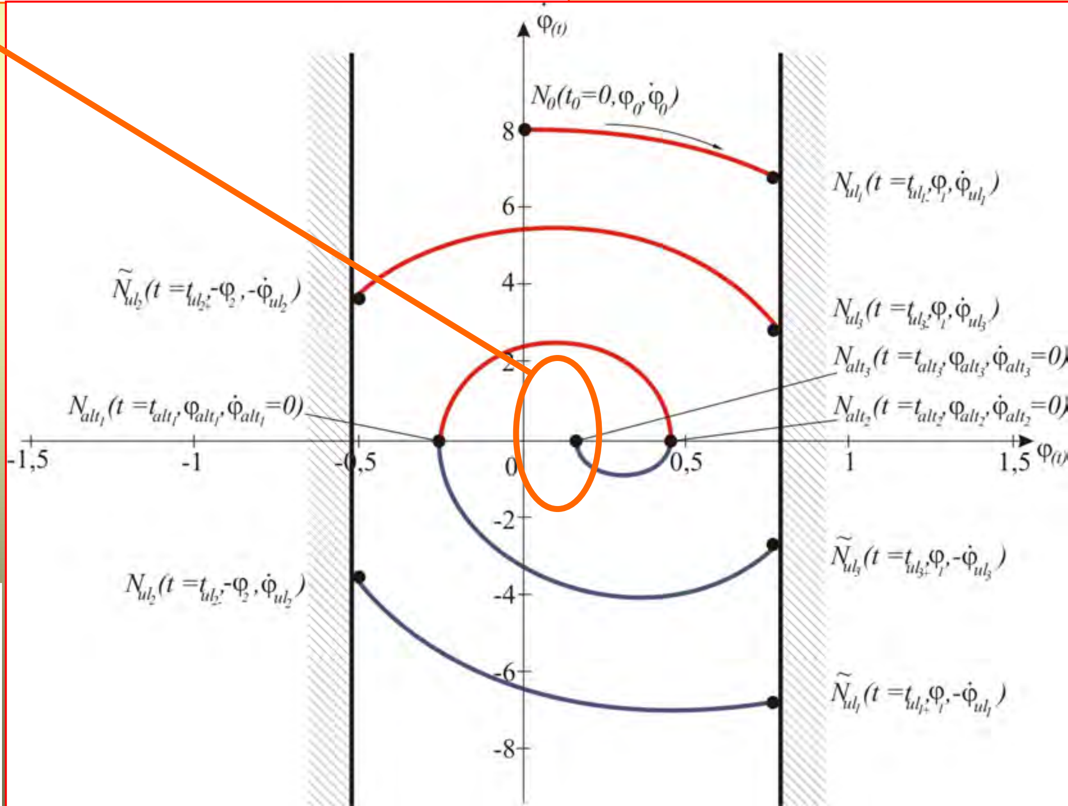
$$\alpha_0 = 0{,}05,\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right],\ F_0 = 0{,}2\left[N\right],\ \Omega = 0{,}3\left[\frac{rad}{s}\right],$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}\left[rad\right], \varphi_2 = -\frac{\pi}{6}\left[rad\right],\ \varphi_0 = 0,\ \dot{\varphi}_0 = 8\left[\frac{rad}{s}\right], R = 0{,}05\left[m\right].$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



Grafička vizuelizacija analize kretanja ***posmatranog vibroudarnog sistema*** prikazana je faznim portretom.



Fazni portret teške materijalne tačke koja se kreće po cikloidnoj hrapavoj liniji

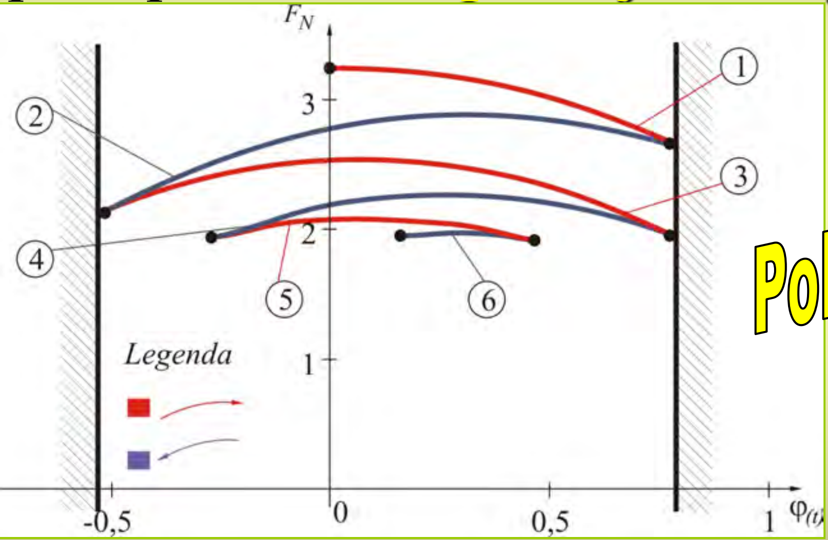
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

Analitički izrazi jednačina faznih trajektorija $\boxed{\dot{\varphi}_i = f(\varphi)}$ dobijeni su postupakom **interpolacije krive fazne trajektorije**.

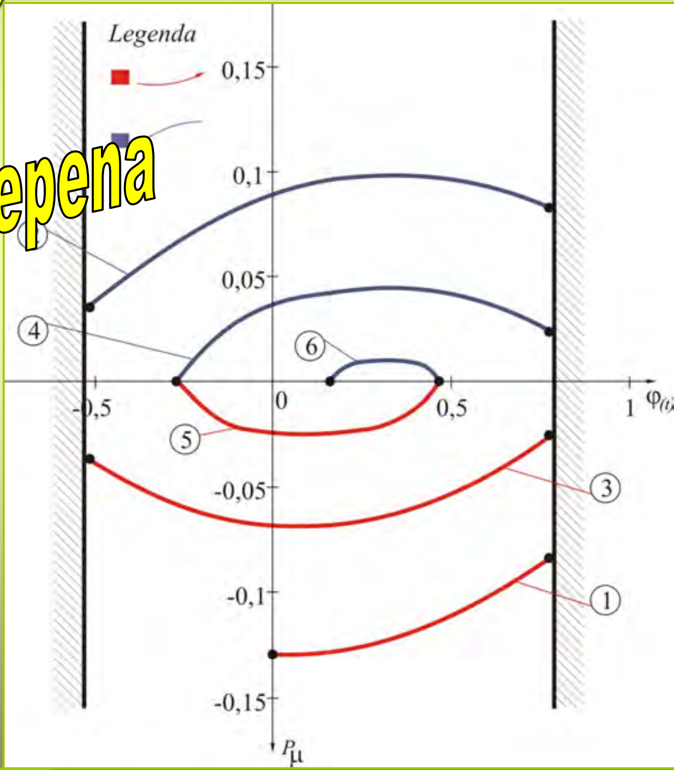
$\boxed{i = 1,2,\ldots,6}$

Polinom trećeg stepena



Grafik promene sile pritiska

$$F_{N,i} = mg\cos\frac{\varphi}{2} + m2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}_i^2(\varphi)$$

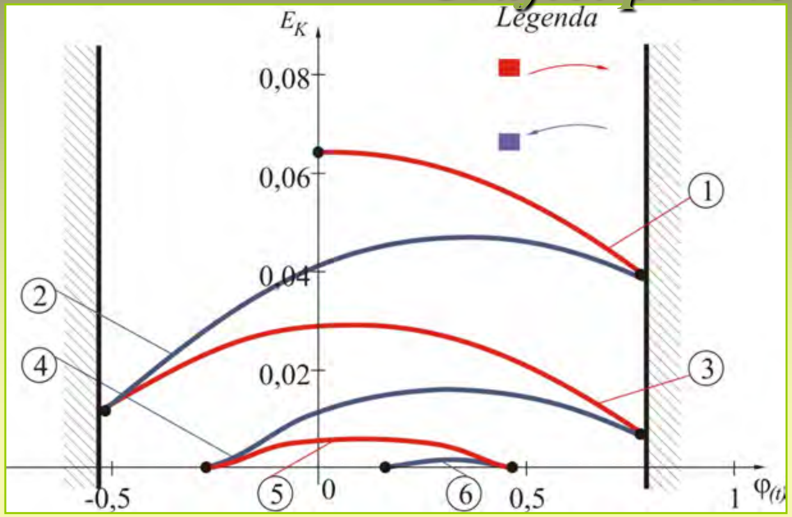


$$P_{\mu,i} = -\mu\left(mg\cos\frac{\varphi}{2} + m2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}_i^2(\varphi)\right)2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}_i$$

Grafik promene snage

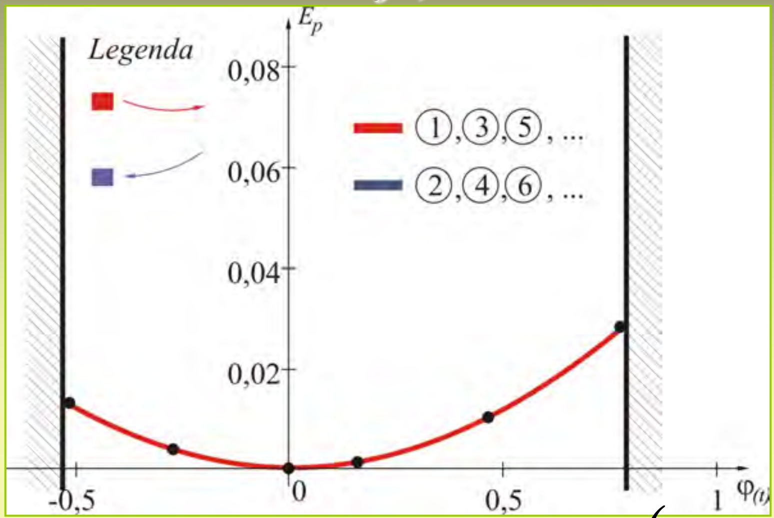
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Grafici promene (za sve intervale kretanja)



Kinetičke energije u ravni (Ek, φ)

$$Ek_i(\varphi) = 2mR^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi}_i^2(\varphi)$$

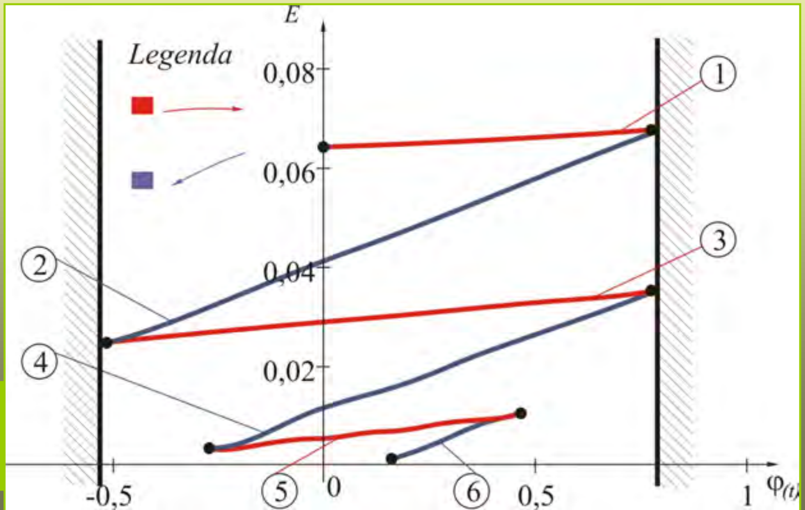


Potencijalne energije u ravni (Ep, φ)

$$Ep_i(\varphi) = mgR(1 - \cos\varphi)$$

Ukupne mehaničke energije u ravni (E, φ)

$$E_i(\varphi) = Ek_i(\varphi) + Ep_i(\varphi) = 2mR^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi}_i^2(\varphi) + mgR(1 - \cos\varphi)$$



Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Kružna hrapava linija

Diferencijalna (dvojna) jednačina kretanja teške materijalne tačke po kružnoj hrapavoj liniji u funkciji generalisane koordinate φ je

$$\ddot{\varphi} \pm \dot{\varphi}^2 tg\alpha_0 + \frac{g}{R\cos\alpha_0}\sin(\varphi \pm \alpha_0) = \frac{F_0}{mR}\cos\Omega t$$

Za *potpuno opisivanje* dinamike teške materijalne tačke diferencijalnoj (dvojnoj) jednačini kretanja potrebno je pridružiti:

a* početne uslove $\varphi_{(0)} = \varphi_0 \quad \mathrm{i} \quad \dot{\varphi}_{(0)} = \dot{\varphi}_0 \;;$ $\quad i = 1,2,3,\ldots,n$

b* uslove ograničenja ugaone elongacije , kao i ***uslove sudara***

$$\varphi_{ul_i} = \delta_i \qquad\qquad \dot{\varphi}_{odl_i} = -k\dot{\varphi}_{ul_i}$$

USVAJAMO $k = 1$ ***- idealno elastični sudar***;

Diferencijalnu jednačinu kretanja sistema ne možemo rešiti eksplicitno (u zatvorenom obliku). ***Za njeno približno rešavanje koristimo*** softverski paket ***WOLFRAM Mathematica 7***. Rezultate smo proverili korišćenjem softverskog paketa ***MATLAB R2008a***.

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Prinudno kretanje teške materijalne tačke

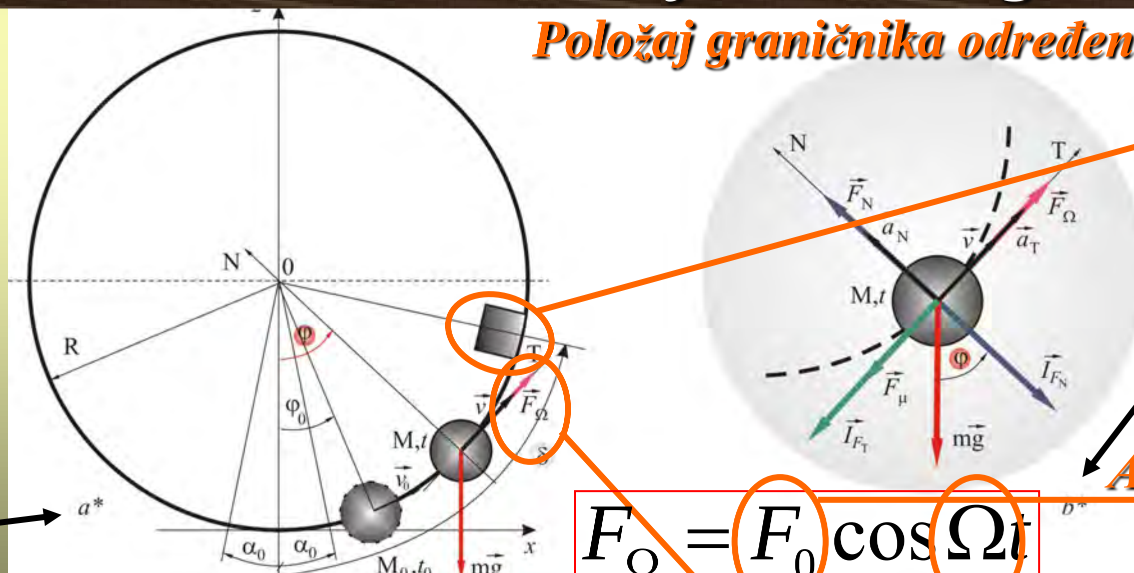
(po analogiji sa kretanjem bez prinudne sile) delimo na odgovarajuće:

intervale i podintervale kretanja

Primer 12

Sistem sa jednim nepokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom

a početni i izvedeni položaj kuglice;*



Položaj graničnika određen je koordintom

$$\varphi_{ul} = \delta$$

b plan sila*

Amplituda

$$F_{\Omega} = F_0 \cos \Omega t$$

Frekfencija

Sistem sa jednim nepokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom pod dejstvom spoljašnje jednofrekventne sile:

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Vrednosti parametara su :

$$\alpha_0 = 0{,}05,\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right],\quad m = 0{,}2[kg],\quad \Omega = 0{,}3\left[\frac{rad}{s}\right],$$

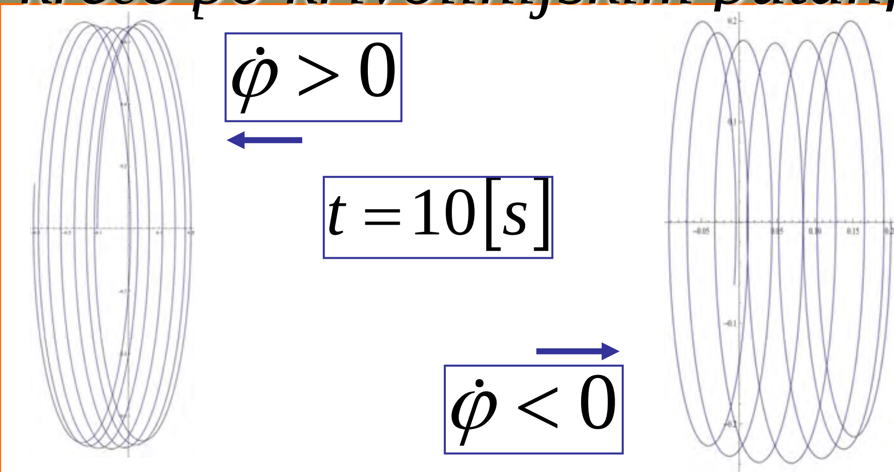
$$F_0 = 0{,}2[N],\ \delta = \frac{\pi}{4}[rad],\ \varphi_0 = 0,\ \dot{\varphi}_0 = 6\left[\frac{rad}{s}\right], R = 0{,}5[m].$$

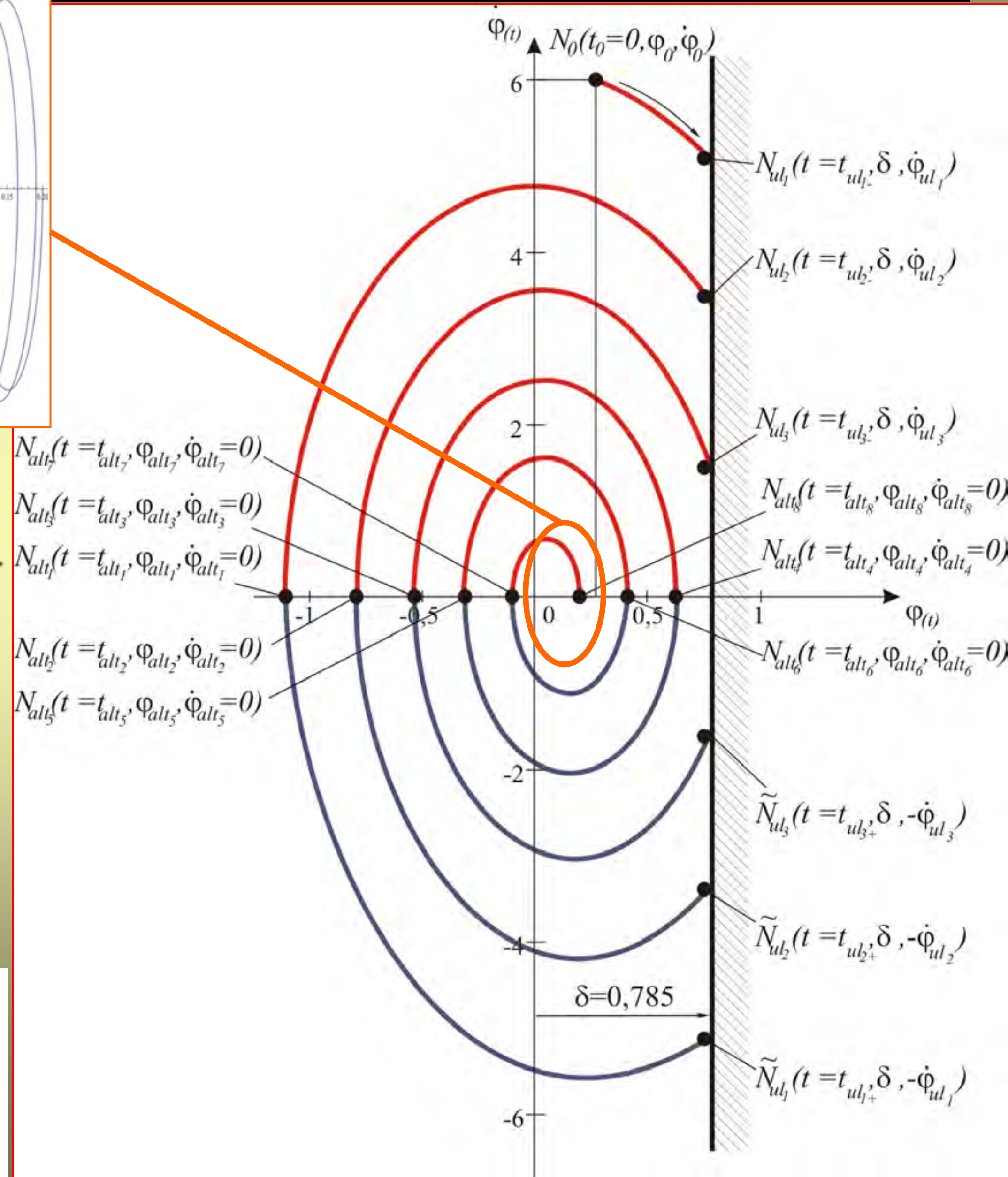
Analizom intervala kretanja** (sprovedenu sve do osme tačke alternacija, odnosno do momenta višestruke alternacije smera kretanja oko ravnotežnog položaja) **dolazimo do zaključka:

-***Vibroudarni sistem opstaje sve do trećeg udara*** u ograničivač elongacija.

-***Posle trećeg udara*** u ograničivač elongacija postavljen sa desne strane pojavljuju se ***pet tački alternacije***.

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama





Grafička vizuelizacija analize kretanja ***posmatranog vibroudarnog sistema*** prikazana je faznim portretom.

Fazni portret teške materijalne tačke koja se kreće po kružnoj hrapavoj liniji

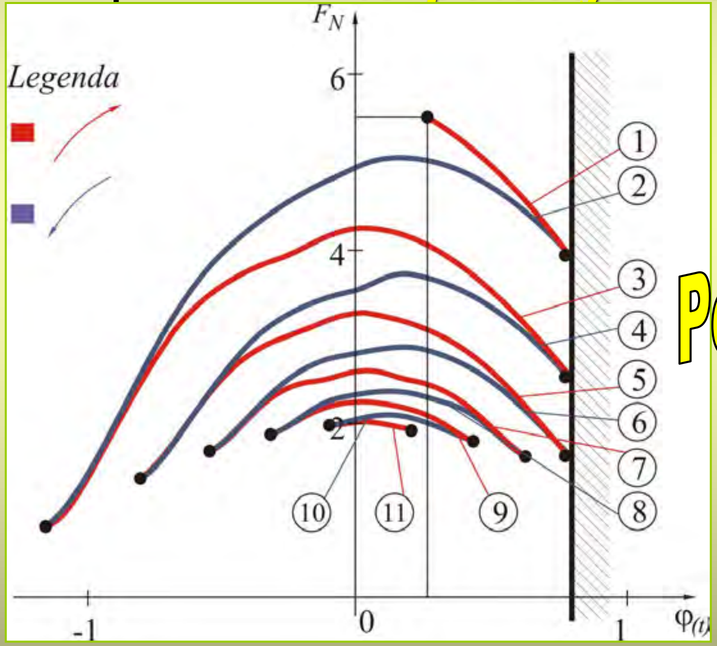
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Energijska analiza posmatranog vibroudarnog sistema

Analitički izrazi jednačina faznih trajektorija $\boxed{\dot{\varphi}_i = f(\varphi)}$ dobijeni su postupakom ***interpolacije krive fazne trajektorije***.

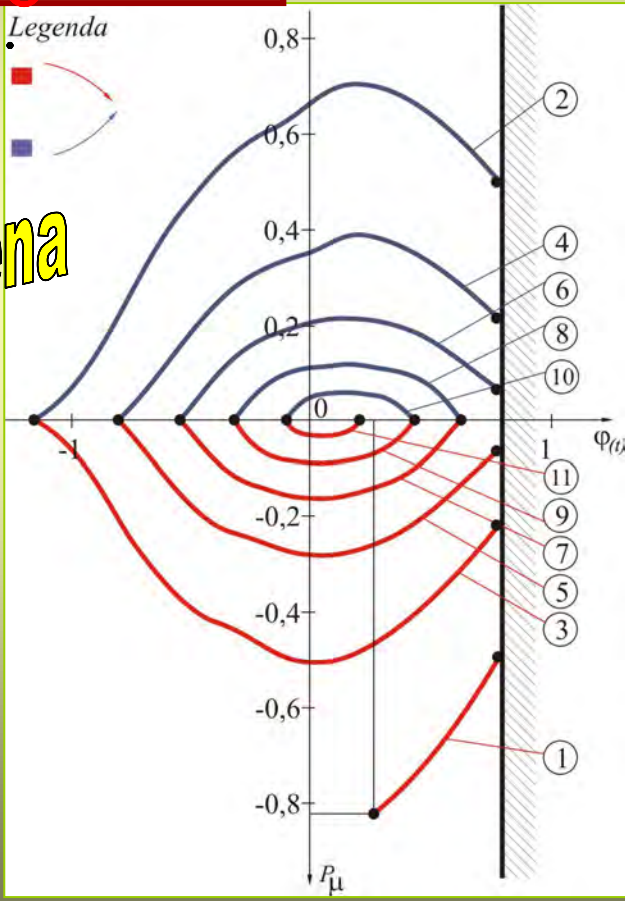
$$\boxed{i = 1,2,\ldots,11}$$

Polinom trećeg stepena



Grafik promene sile pritiska

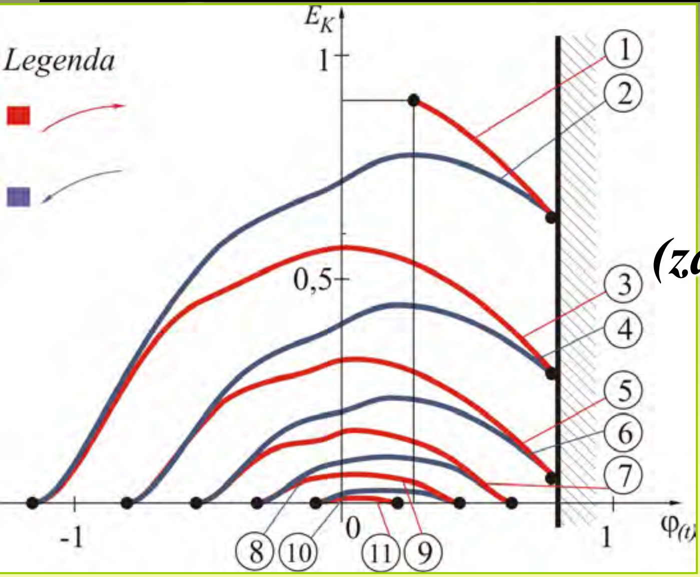
$$F_{N,i} = mg\cos\varphi + mR\dot{\varphi}_i^2(\varphi)$$



$$P_{\mu,i} = -\mu\left(mg\cos\varphi + mR\dot{\varphi}_i^2(\varphi)\right)R\dot{\varphi}_i(\varphi)$$

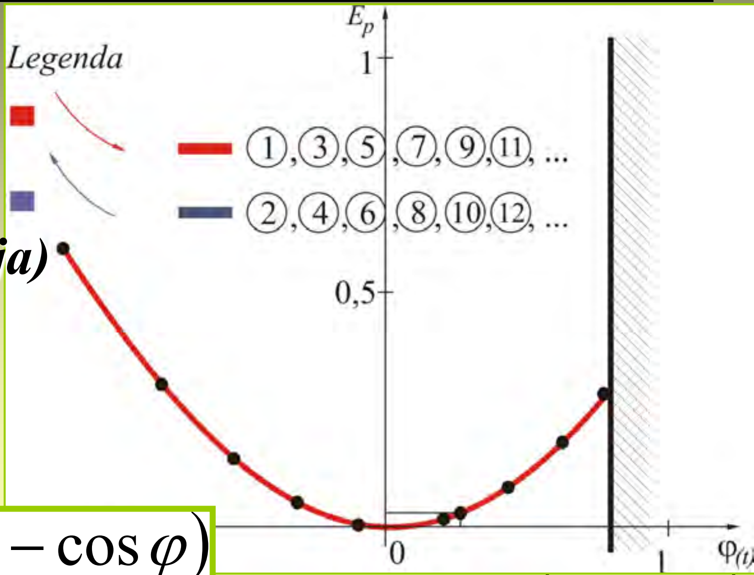
Grafik promene snage

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama



Grafici promene

(za sve intervale kretanja)

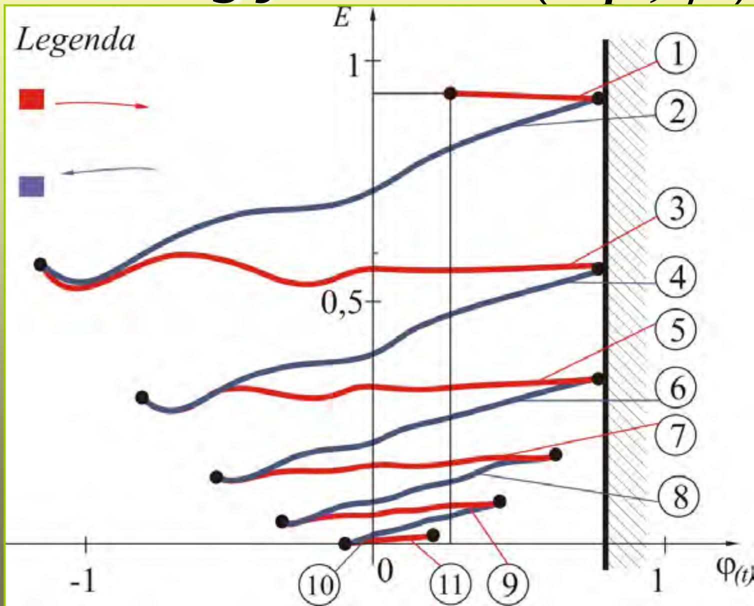


$$Ep_i(\varphi) = mgR(1 - \cos\varphi)$$

Kinetičke energije u ravni (Ek, φ)

$$Ek_i(\varphi) = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}_i^2(\varphi)$$

Potencijalne energije u ravni (Ep, φ)



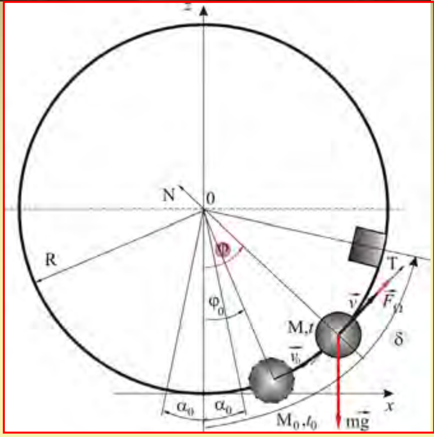
Ukupne mehaničke energije u ravni (E, φ)

$$E_i(\varphi) = Ek_i(\varphi) + Ep_i(\varphi) = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}_i^2(\varphi) + mgR(1 - \cos\varphi)$$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Analiza uticaja parametara spoljašnje jednofrekventne sile na kretanje sistema

Posmatramo isti vibroudarni sistem



Vrednosti parametara (osim parametara spoljašnje jednofrekfentne sile) ***ostaju nepromenjeni.***

Analizu sprovodimo u dva koraka

Prvi korak - Amplituda spoljašnje jednofrekventne sile je konstantna

$$\boxed{F_0 = 0{,}2\left[N\right] = const.}$$

a menjamo vrednost frekvencije i to

$$\Omega = \boxed{\Omega = 0{,}3\left[\frac{rad}{s}\right]} = 2{,}3\left[\frac{rad}{s}\right],\ \Omega = 3{,}3\left[\frac{rad}{s}\right] i\ \Omega = 4{,}3\left[\frac{rad}{s}\right].$$

Uzimamo Umesto

U sva četiri slučajeva prikazujemo samo prva dva intervala kretanja.

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

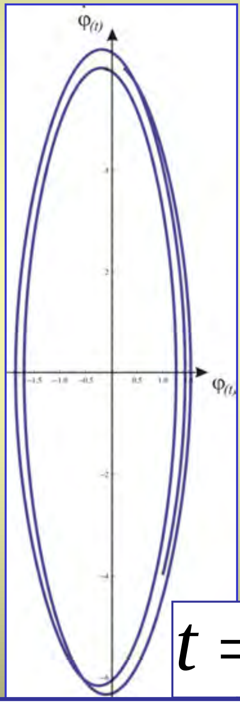
Fazne trajektorije u prvom i drugom intervalu kretanja

$$\Omega = 1{,}3\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Prvi slučaj

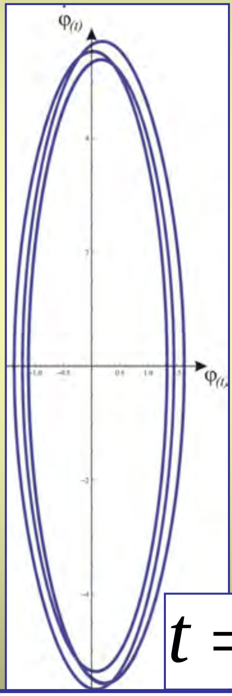
$$\Omega = 2{,}3\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Drugi slučaj



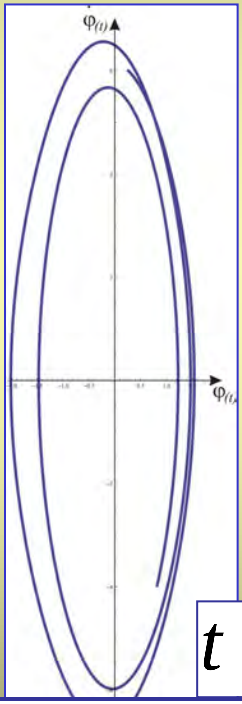
$t = 4[s]$

$\dot{\varphi}_1 = f(\varphi)$



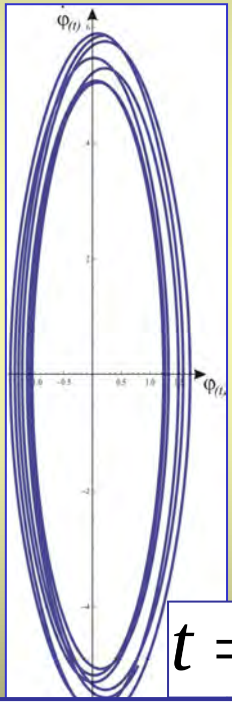
$t = 10{,}5[s]$

$\dot{\varphi}_2 = f(\varphi)$



$t = 4[s]$

$\dot{\varphi}_1 = f(\varphi)$



$t = 10{,}5[s]$

$\dot{\varphi}_2 = f(\varphi)$

***NAPOMENA:* Grafici faznih trajektorija (i svi naredni) se odnose na bezudarno kretanje teške materijalne tačke**

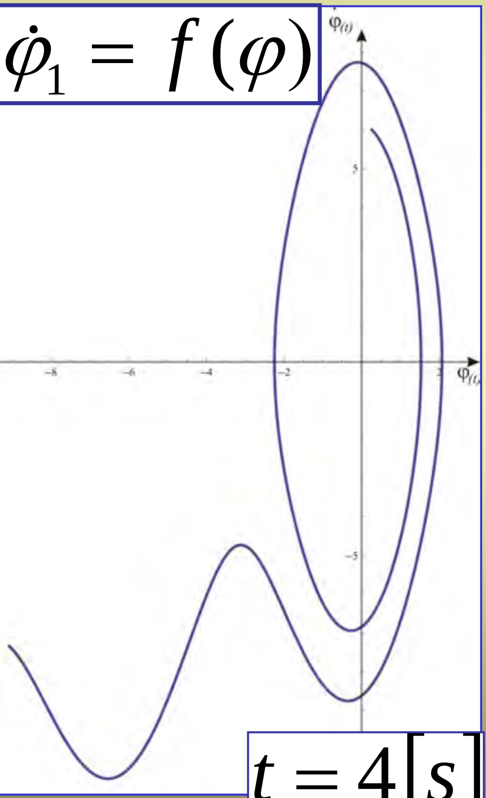
Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Fazne trajektorije u prvom i drugom intervalu kretanja

$$\Omega = 3{,}3 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

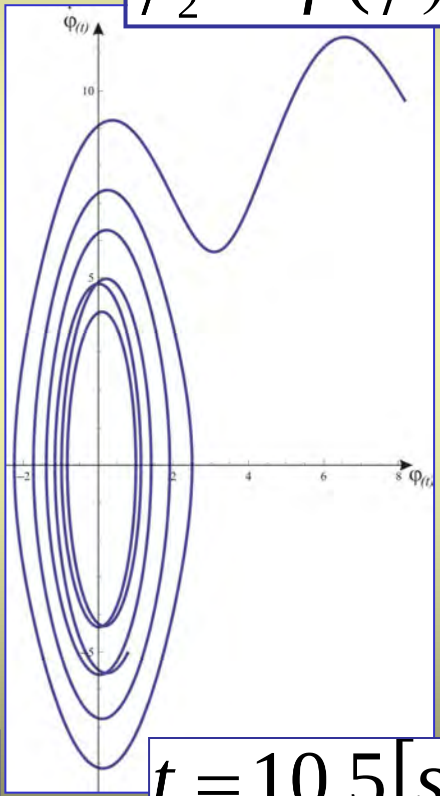
Treći slučaj

$\dot{\varphi}_1 = f(\varphi)$



$t = 4[s]$

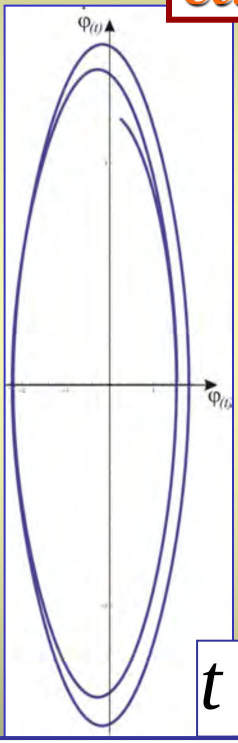
$\dot{\varphi}_2 = f(\varphi)$



$t = 10{,}5[s]$

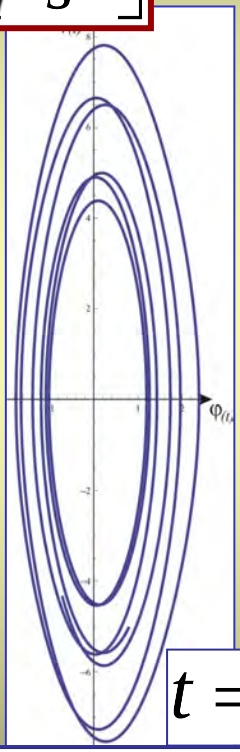
$$\Omega = 4{,}3 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

Četvrti slučaj



$t = 4[s]$

$\dot{\varphi}_1 = f(\varphi)$



$t = 10{,}5[s]$

$\dot{\varphi}_2 = f(\varphi)$

NAPOMENA: vremenske intervale smo uzeli iz razloga što u rezonantnom području posle ovih intervala vremena dolazi do ekstremnog povećanja brzina

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Upoređivanjem grafika faznih trajektorija bezudarnog kretanja teške materijalne tačke po kružnoj hrapavoj liniji i pod dejstvom spoljašnje jednofrekventne sile sa konstantom vrednošću amplitude a promenljivom frekvencijom zaključujemo

Rezonantno područje se uočava pri frekvenciji od

$$\Omega = 3{,}3 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Drugi korak - Frekfencija spoljašnje jednofrekventne sile je konstantna

a menjamo vrednost amplitude i to

Umesto ***Uzimamo***

$$F_0 = 0{,}6\,[N], F_0 = 0{,}8\,[N], F_0 = 1{,}2\,[N]$$

U sva tri slučajeva prikazujemo samo prva dva intervala kretanja.

NAPOMENA: Grafici faznih trajektorija (i svi naredni) se odnose na bezudarno kretanje teške materijalne tačke.

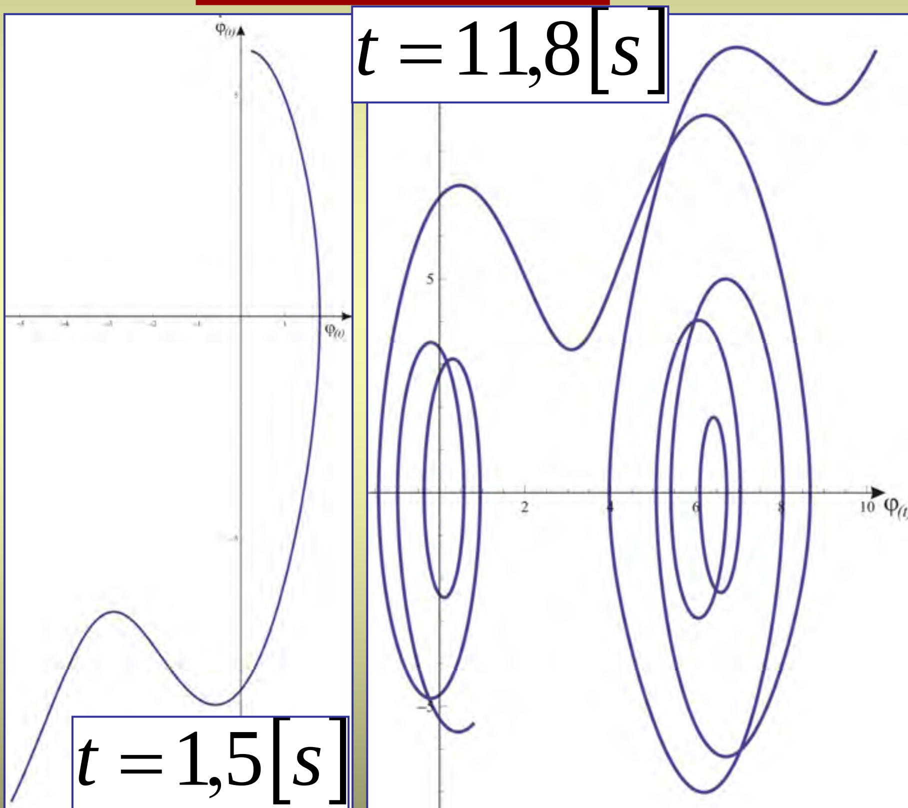
Vremenske intervale smo uzeli iz razloga što u rezonantnom području posle ovih intervala vremena dolazi do ekstremnog povećanja brzina

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Fazne trajektorije u prvom i drugom intervalu kretanja

Prvi slučaj

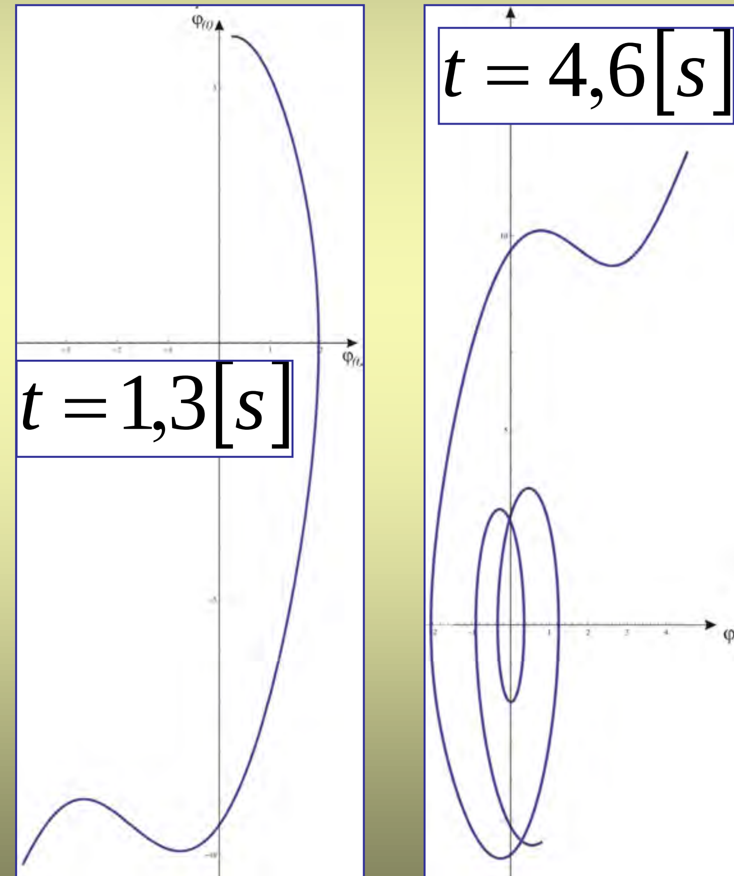
$F_0 = 0{,}6\,[N]$



$\dot{\varphi}_1 = f(\varphi)$ $\dot{\varphi}_2 = f(\varphi)$

Drugi slučaj

$F_0 = 0{,}8\,[N]$



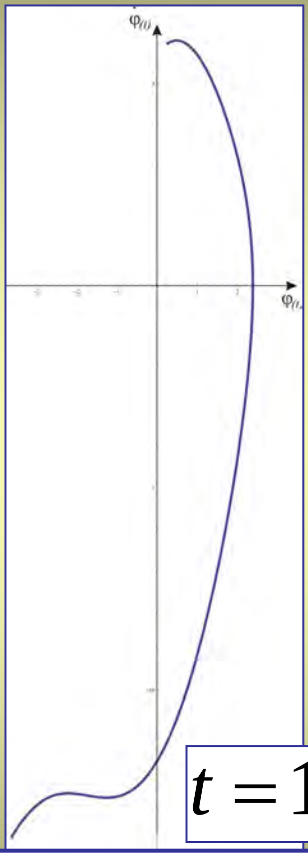
$\dot{\varphi}_1 = f(\varphi)$ $\dot{\varphi}_2 = f(\varphi)$

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Fazne trajektorije u prvom i drugom intervalu kretanja

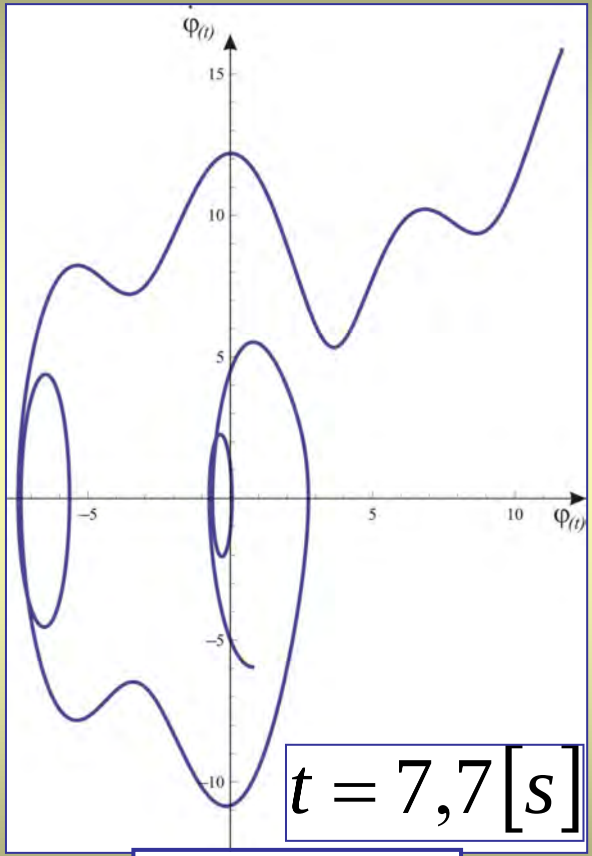
Treći slučaj

$$F_0 = 1{,}2\,[N]$$



$$t = 1{,}3\,[s]$$

$$\dot{\varphi}_1 = f(\varphi)$$



$$t = 7{,}7\,[s]$$

$$\dot{\varphi}_2 = f(\varphi)$$

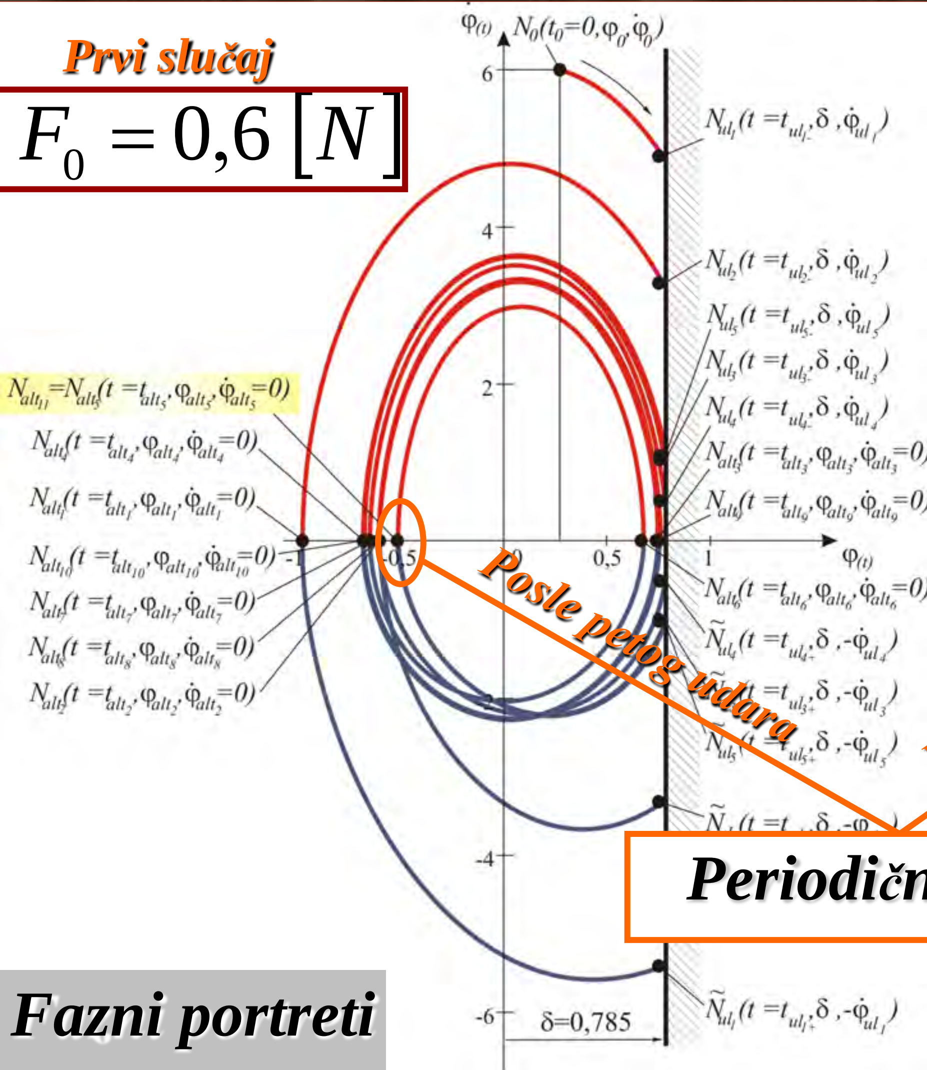
Analiza ova tri slučaja daje nam mogućnost kvalitetne analize prinudnih oscilacija teške materijalne tačke.

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Analiza uticaja amplitude spoljašnje jednofrekventne sile na kretanje sistema u rezonantnom području

Prvi slučaj

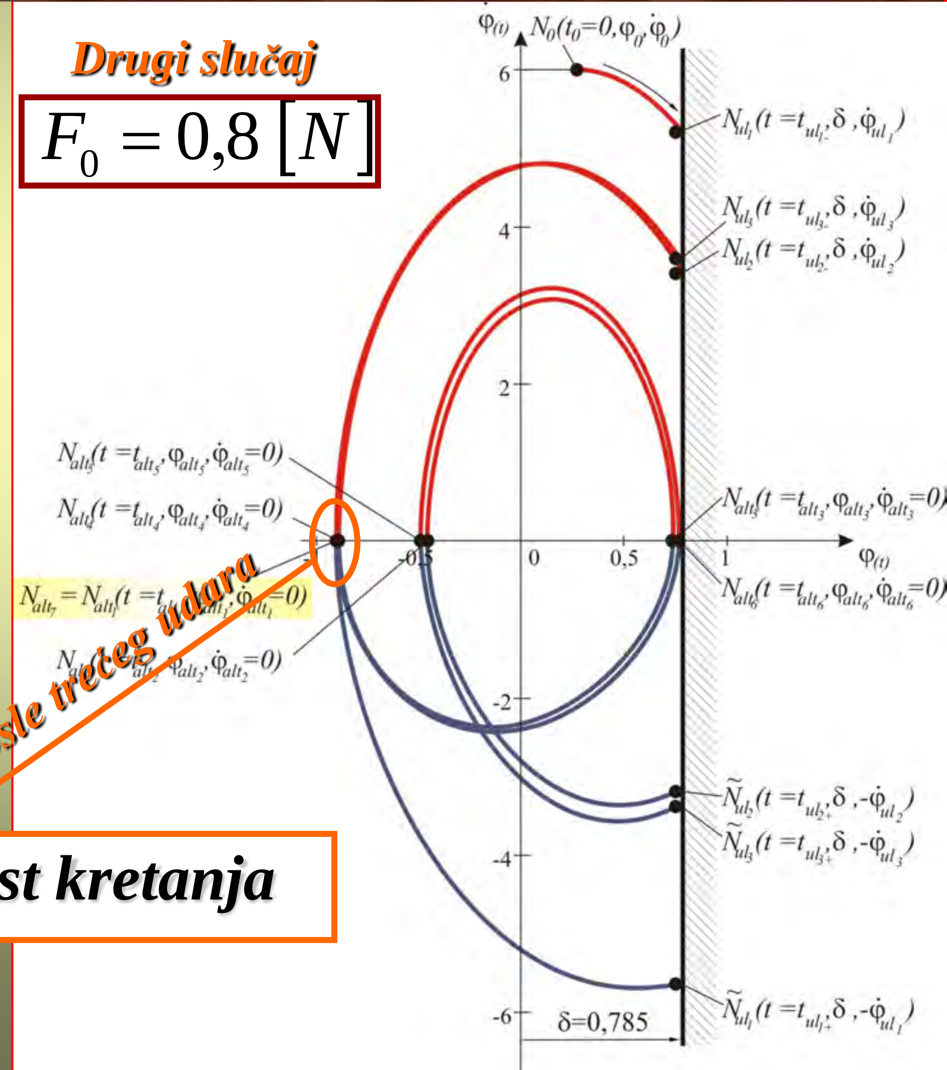
$$F_0 = 0{,}6\,[N]$$



Posle petog udara

Drugi slučaj

$$F_0 = 0{,}8\,[N]$$



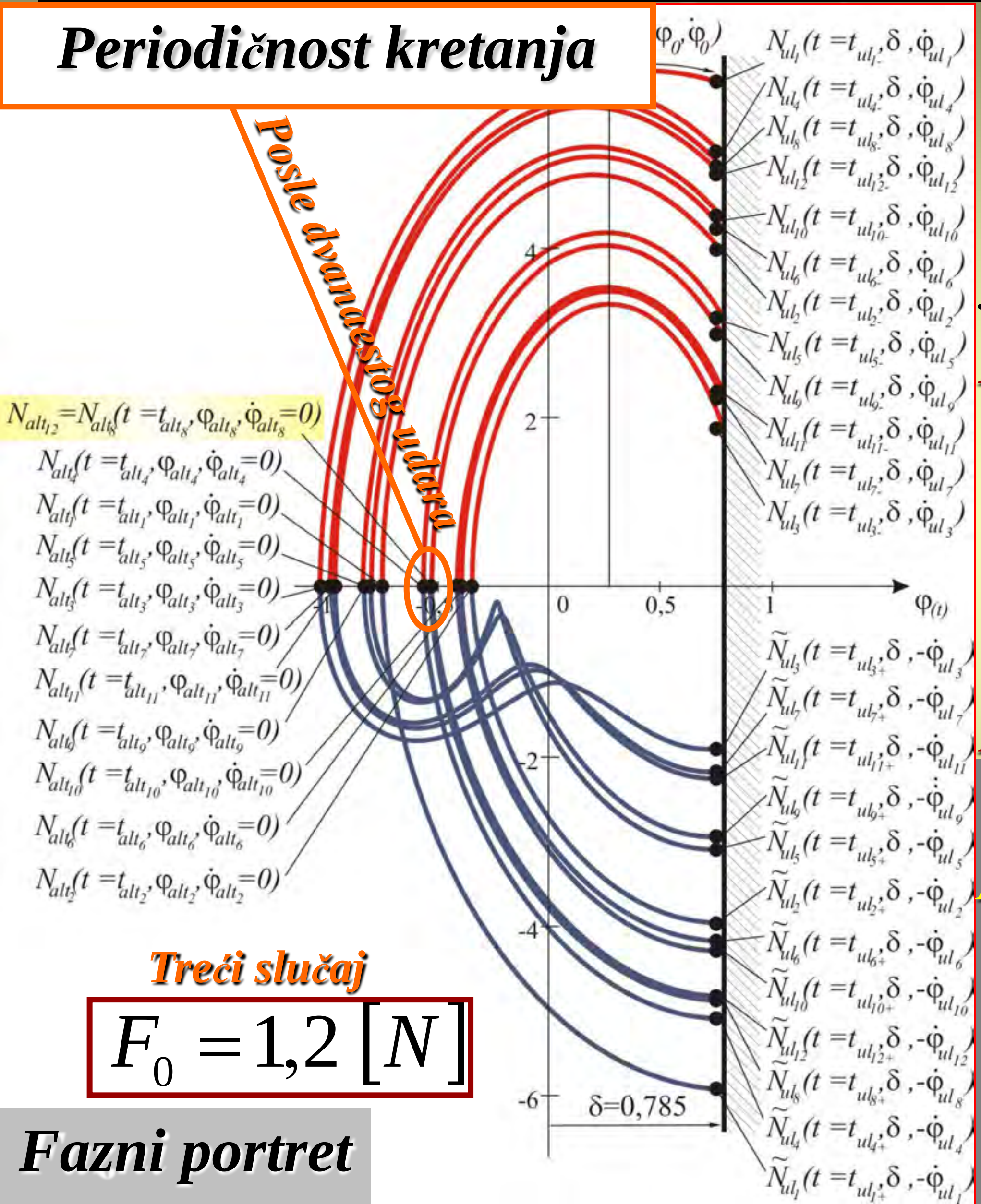
Posle trećeg udara

Periodičnost kretanja

Fazni portreti

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Periodičnost kretanja



Fazni portret

Na osnovu ova tri numerička primera možemo zaključiti:

-***Vrednost amplitude*** spoljašnje jednofrekvetne sile ***utiče da prinudno kretanje*** teške materijalne tačke po kružnoj hrapavoj liniji za različito vreme, odnosno ***za veći ili manji broj intervala kretanja postiže periodičnost kretanja***.

-***Podešavanjem vrednosti za parametre spoljašnje sile možemo uticati na kretanje posmatranog vibroudarnog sistema u ili izvan rezonantnog područja***.

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Primer 13

Sistem sa jednim nepokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa jednom kuglicom pod dejstvom spoljašnje dvofrekventne (dve jednofrekventne) sile

Položaj graničnika određen je koordintom

$$\varphi_{ul} = \delta$$

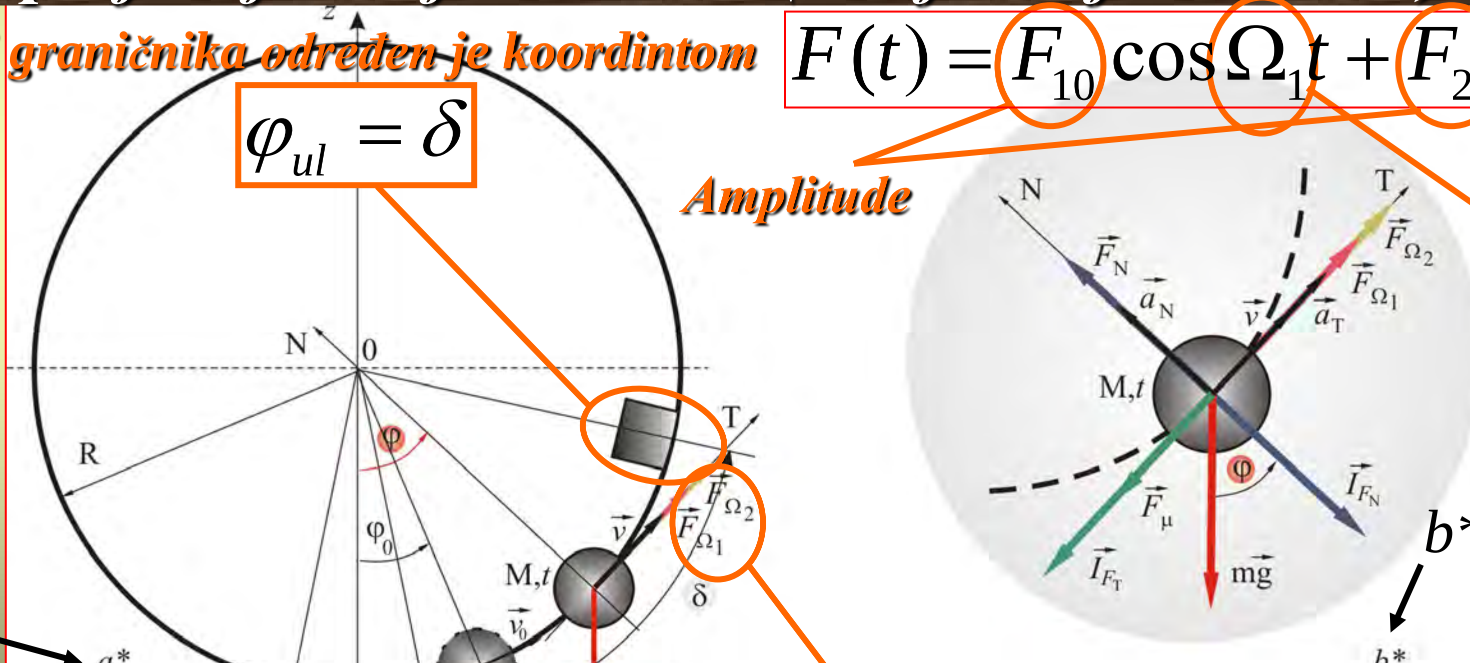
$$F(t) = F_{10}\cos\Omega_1 t + F_{20}\cos\Omega_2 t$$

Amplitude

Frekfencije

a početni i izvedeni položaj kuglice;*

b plan sila*



Grafička vizuelizacija faznog portreta teške materijalne tačke u posmatranom vibroudarnom sistemu prikazana je

sa jednom kuglicom pod dejstvom spoljašnje dvofrekventne sile.

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Vrednosti parametara su :

$$\alpha_0 = 0{,}05,\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$m = 0{,}2[kg], \delta = \frac{\pi}{3}[rad],$$

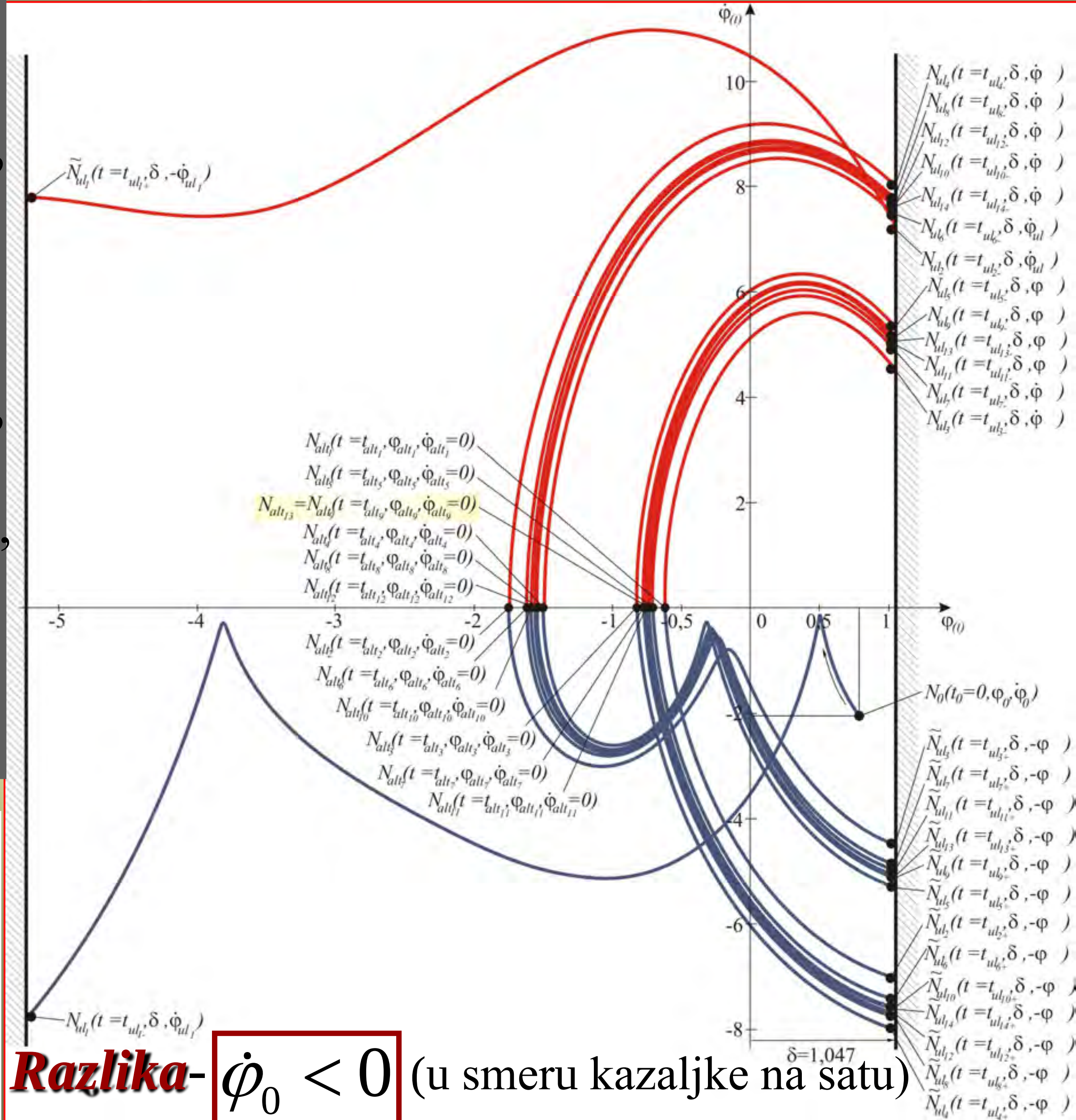
$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4},\ \dot{\varphi}_0 = -2{,}05\left[\frac{rad}{s}\right],$$

$$\Omega_1 = 3{,}3\left[\frac{rad}{s}\right], \Omega_2 = 4\left[\frac{rad}{s}\right],$$

$$F_{10} = 1{,}2[N], F_{20} = 0{,}8[N],$$

$$R = 0{,}5[m]$$

Fazni portret teške materijalne tačke koja se kreće po kružnoj hrapavoj liniji



Razlika- $\boxed{\dot{\varphi}_0 < 0}$ (u smeru kazaljke na satu)

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

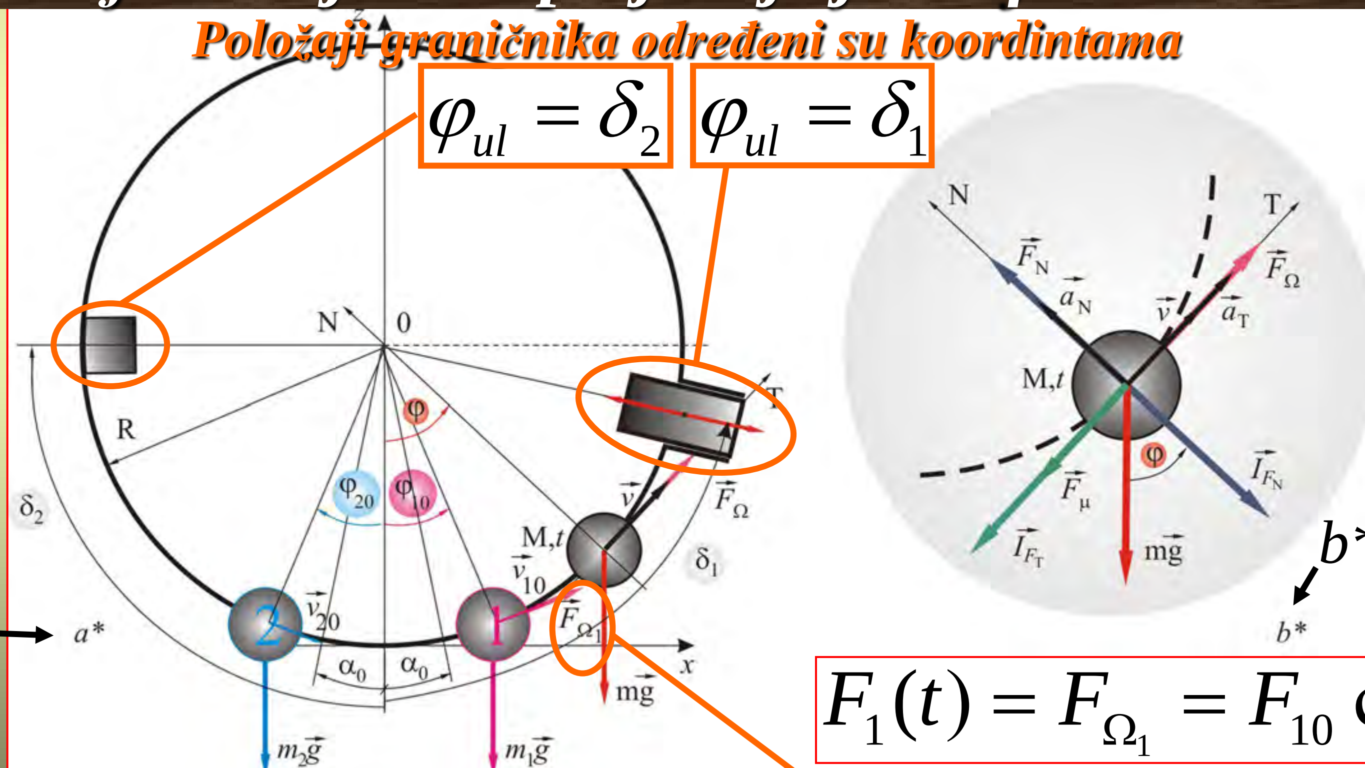
Primer 14

Sistem sa jednim nepokretnim i jednim pokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa dve kuglice pod dejstvom jedne spoljašnje jednofrekventne sile

Položaji graničnika određeni su koordintama

$$\boxed{\varphi_{ul} = \delta_2} \quad \boxed{\varphi_{ul} = \delta_1}$$

a početni i izvedeni položaj kuglice;*



b plan sila*

$$\boxed{F_1(t) = F_{\Omega_1} = F_{10}\cos\Omega_1 t}$$

Sistem sa jednim nepokretnim i jednim pokretnim ograničivačem elongacije, na bazi oscilatora sa dve kuglice pod dejstvom jedne spoljašnje jednofrekventne sile :

Vibroudarni sistemi na bazi oscilatora koji se p r i n u d n o kreće po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

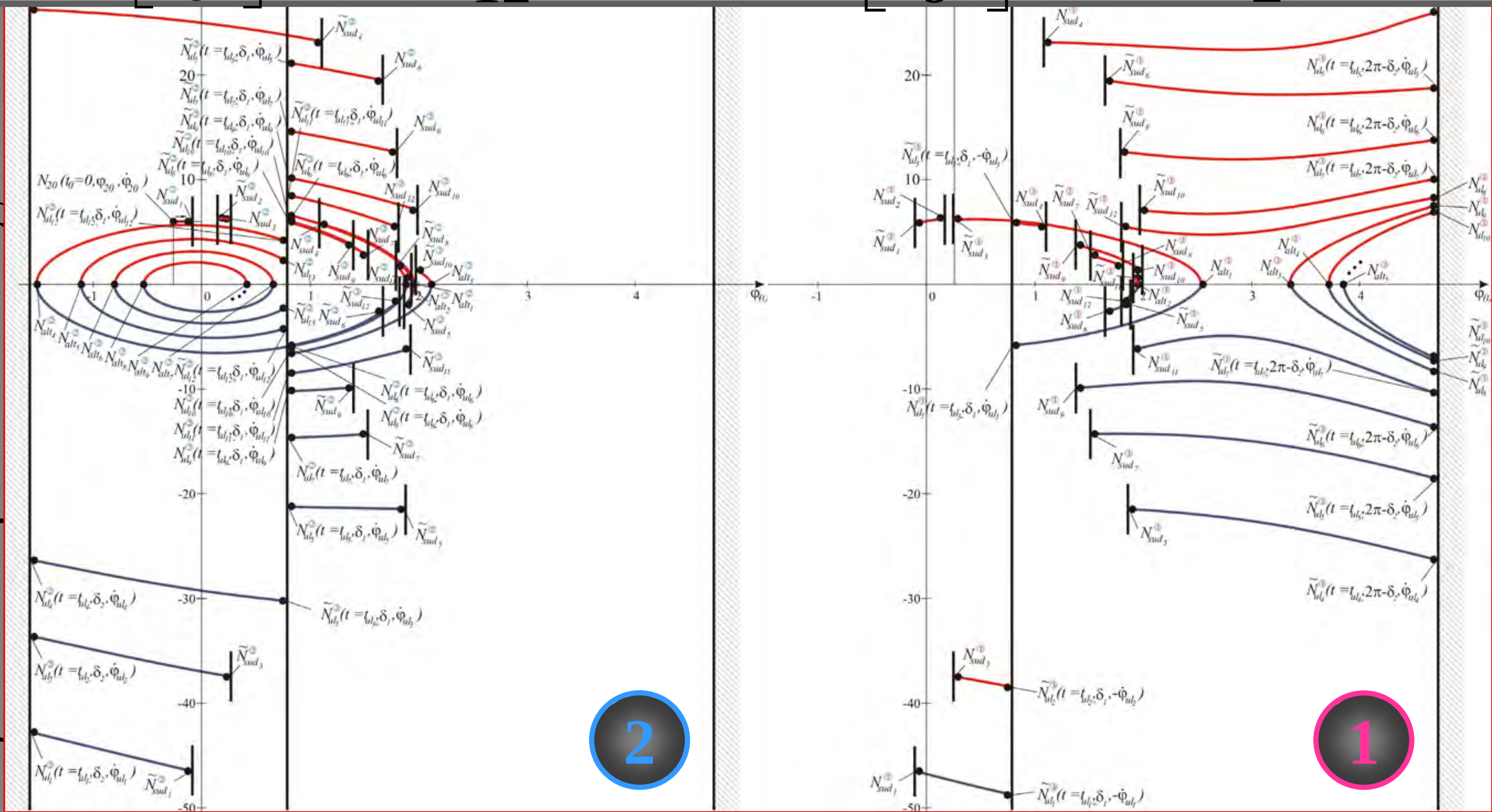
Vrednosti parametara su :

$$m = 0{,}2[kg],\ \alpha_0 = 0{,}05,\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{4}[rad],\ \varphi_{10} = \frac{\pi}{12},\ \dot{\varphi}_{10} = 50\left[\frac{rad}{s}\right],\ R = 0{,}5[m],\ F_{10} = 1{,}2[N],$$

$$\Omega_1 = 3{,}3\left[\frac{rad}{s}\right],\ \varphi_{20} = -\frac{\pi}{12}[rad],\ \dot{\varphi}_{20} = 6\left[\frac{rad}{s}\right],\ \ \delta_2 = -\frac{\pi}{2}[rad],$$

Grafička vizuelizacija analize k
posmatranog vibroudarnog sistem
je faznim portretima kuglice 2 i 1



Zaključna razmatranja

Energijska analiza dinamike vibroudarnih sistema sa krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama

Analizom ***faznih portreta i grafika promena*** kinetičke energije $\boxed{E_K}$, potencijalne energije $\boxed{E_P}$, ukupne mehaničke energije $\boxed{E}$, sile normalnog pritiska $\boxed{F_N}$ i snage koja potiče od sile trenja klizanja *Coulomb*-ovog tipa za sve primere ***slobodnog kretanja*** teških materijalnih tačaka po hrapavim krivim linijama, sa jednim, dva i tri stepena slobode možemo zaključiti:

Oblika: parabole, cikloide i kruga

Jedanaest numeričkih primera

Sila normalnog pritiska teških materijalnih tačaka na hrapavu paraboličnu, cikloidnu i kružnu liniju ***ne menja vrednost***:

* ***U toku udara teške materijalne tačke u ograničivač elongacija*** (bilo gde da je postavljen), kada je idealan elastičan udar, intenzitet brzine kretanja teške materijalne tačke se ne menja.
* ***U stanju alternacije smera kretanja teške materijalne tačke***, brzina je jednaka nuli.

Zaključna razmatranja

Za slučaj obostrano zadržavajuće veze ***u tački alternacije sila pritiska ima lokalni minimum a odgovarajuća sila trenja menja svoj smer***.

Smer sile trenja alternira:

* u tački u kojoj je ugaona brzina kretanja materijalnih tačaka jednaka nuli;

* u tački udara teške materijalne tačke u ograničivač elongacija; kao i

* u tački sudara teških materijalnih tačaka.

Promena snage koja potiče od sile trenja klizanja Coulomb-ovog tipa prati grafik promene sile trenja, samo što je snaga uvek sa negativnom vrednošću i ona ***u sledbenim reprezentativnim tačkama*** ima manju vrednost (***opada sa višeg nivoa na niži***). ***Od početnog trenutka vremena, pa do trenutka kad se tačka vratila u ravnotežni položaj, maksimalna vrednost snage konstantno opada***, bez obzira koliko posmatrani vibroudarni sistem ima stepeni slobode.

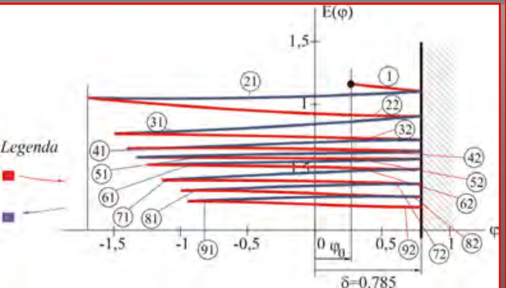
Pretpostavka – radi se o idealno elastičnom (s)udaru

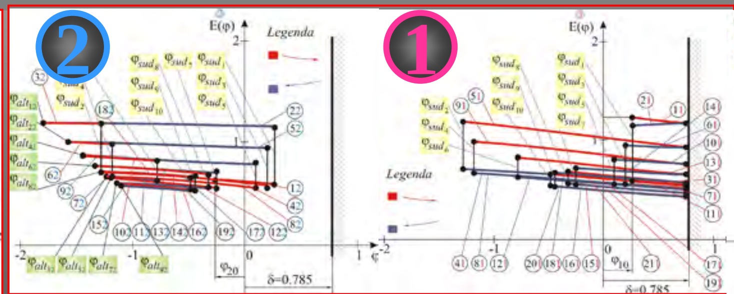
Zaključna razmatranja

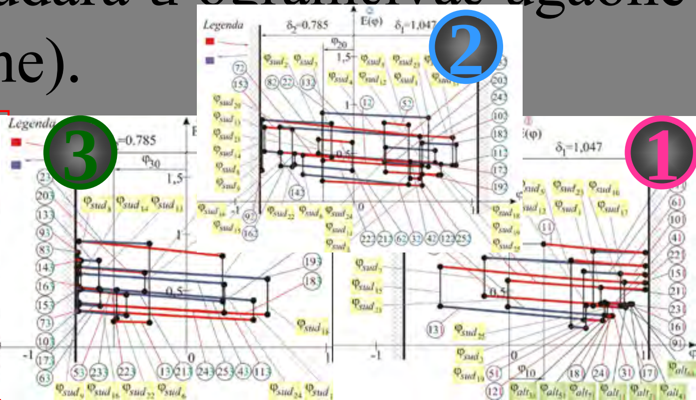
Kinetička energija, koja eksplicitno zavisi od ugaone brzine teške materijalne tačke, ***konstantno se menja i njena maksimalna vrednost u sledbenim intervalima kretanja opada***.

Potencijalna enegija ima promenu u zavisnosti od elongacije, ***koja je identična za sve*** identične ***intervale kretanja***, što proističe iz činjenice da ona zavisi od težina materijalnih tačaka i generalisanih koordinata i da ***udari i sudari nemaju uticaja na istu***, jer ona potiče od dejstva konzervativnih sila na sistem.

Ukupna mehanička energija sistema je u stalnom trendu pada, tj. u svakom narednom intervalu kretanja, ukupna mehanička energija dinamike sistema ima manju vrednost (u tački udara u ograničivač ugaone elongacije i tački alternacije smera ugaone brzine).







Zaključna razmatranja

Analizom ***faznih portreta i grafika promena*** kinetičke energije $\boxed{E_K}$, potencijalne energije $\boxed{E_P}$, ukupne mehaničke energije $\boxed{E}$, sile normalnog pritiska $\boxed{F_N}$ i snage koja potiče od sile trenja klizanja *Coulomb*-ovog tipa za sve primere ***prinudnog kretanja*** teških materijalnih tačaka po hrapavim krivim linijama, sa jednim i dva slobode možemo zaključiti:

Oblika: parabole, cikloide i kruga

Deset numeričkih primera

Bezudarno kretanje teške materijalne tačke po hrapavim krivim linijama u ovom delu ***predstavlja prinudne prigušene oscilacije***.

Odnos sile prigušenja i prinudne sile direktno utiče na zaključke.

Analizirana je dinamika vibroudarnog sistema na bazi odgovarajućeg bezudarnog sistema i ***za kinetičke parametre sistema kada se ne javljaju režimi slični haotičnim i sličnim slučajevima***, koji se u opštem slučaju mogu javiti u bezudarnom sistemu podvrgnutom dejstvu i samo jedne jednofrekventne spoljašnje sile.

Dva slučaja

Zaključna razmatranja

***Prvi slučaj* – *Uticaj spoljašnje jednofrekventne sile*, za konkretne vrednosti izabranih parametara , *nije veliki*.**

Daleko su od rezonantnog područja

Zaključke koje smo izveli za vibroudarni sistem baziran na slobodnim oscilacijama možemo preneti i na prinudne oscilacije posmatranog vibroudarnog sistema. ***Iako imamo prinudno kretanje*** teške materijalne tačke sa faznih portreta, ***vidimo da se oscilacije umiruju*** i da se posmatrani vibroudarni sistemi vraćaju u stanje mirovanja ***oko para dvojnih ravnotežnih položaja, sa većim brojem oscilacija oko njega***. ***Bitna razlika je*** u tome što pri dejstvu spoljašnje jednofrekventne sile, sa ovim parametrima, ***smanjenje ukupne mehaničke energije je očiglednije*** i teška materijalna tačka ima manji broj udara u ograničivač elongacija.

Drugi slučaj – parametri spoljašnje jednofrekventne i dvofrekventne sile su takvi da ***bezudarno kretanje*** posmatranih vibroudarnih sistema ***za kratko vreme dospe u rezonantno područje***.

U kategoriji "turbolentnog" prigušenja

Promenom parametara spoljašnje jednofrekventne sile se može uticati na uspostavljanje stabilnog vibroudarnog režima koji je periodičan

Hvala Vam

Zaključna razmatranja

Originalni rezultati izučavanja nelinearne dinamike vibroudarnih sistema sa krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama ***usmereni na otkrivanju novih saznanja o transformaciji komponenenata mehaničke energije*** u vibroudarnim sistemima sa jednim, dva ili tri stepeni slobode kretanja ***su sadržani u***:

* ***postavljanju originalne metodologije izučavanja*** energijske analize dinamike vibroudarnih sistema na bazi oscilatora koji vrši slobodno (sopstveno) kretanje po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama, sa jednim, dva i tri stepeni slobode kretanja, ***kombinovanjem analitičkih izraza za fazne trajektorije i pristupa sa upotrebom MathCad kao alata za***

-određivanje kinetičkih parametara sistema pre i posle sudara,

-grafičku vizuelizaciju grana faznih trajektorija i krivih komponentnih energija i totalne energije dinamike vibroudarnog sistema u funkciji elongacija, kao i

-sila trenja klizanja i snage rada sile trenja u intervalima između udara, sudara i kinetičkih stanja alternacije smera kretanja;

Zaključna razmatranja

postavljanju originalne metodologije i načina i postupka određivanja vremena i položaja (ugaone koordinate) ***događanja sudara teških materijalnih tačaka*** kod sopstvene dinamike vibroudarnih sistema sa dva i tri stepena slobode kretanja, kombinovanjem analitičkih izraza i pristupa sa upotrebom MathCad-a;

postavljanju originalne metodologije izučavanja energijske analize dinamike vibroudarnih sistema na bazi oscilatora koji vrši prinudno kretanje po krivolinijskim putanjama i neidealnim vezama, sa jednim i dva stepena slobode kretanja, ***kombinovanjem numeričke metode Runge-Kutta za***

- ***dobijanje grana faznih trajektorija dinamike vibroudarnog sistema izloženog dejstvu spoljašnje jedno ili dvofrekventne sile,***

koristeći pri tome kao alate dva softverska paketa ***MATLAB i Wolfram mathematica*** (pri čemu se došlo do istih rezultata, istog reda tačnosti) za

-grafičku vizuelizaciju grana faznih trajektorija i krivih komponentnih mehaničkih energija, kao i

-određivanje kinetičkih parametara i vremena udara odnosno sudara materijalnih elemenata unutar sistema;

Zaključna razmatranja

- ***proširenjem naučnih saznanja o režimima*** sopstvene, odnosno prinudne vibrudarne dinamike i raznovrsnosti tih režima na primerima dinamike vibroudarnih sistema koji sadrže jednu ili više materijalnih tačaka koje se kreću po hrapavim krivim linijama i pojavi sudara među njima;

- ***prilagođavanju primene metode podešavanja parametara vibroudarnog dinamičkog sistema na svođenje*** prinudnog kretanja teške materijalne tačke po hrapavim krivim linijama, sa ograničenim elongacijama, i pod dejstvom spoljašnje jednofrekventne i dvofrekventne sile sa parametrima koji odgovaraju području rezonansije, na periodično kretanje.

- ***oceni uticaja mase i mehaničkih karakteristika materijalne tačke*** koja se kreće između dve teške materijalne tačke na brzinu i broj udara ostalih okolnih teških materijalnih tačaka u ograničivače elongacija.

Hvala Vam