70 година Математичког инситута САНУ
Одељење за рачунарство и примењену математику

О нумеричкој апроксимацији неких нестандардних контурних проблема за парцијалне диференцијалне једначине

Бошко С. Јовановић

Универзитет у Београду, Математички факултет,

САДРЖАЈ

Парцијалне диференцијалне једначине 2. реда

Линеарна једначина:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f$$

$$a_{ij}, b_i, c, f, u \;\; - \;\; \text{функције } \; \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Семилинеарна једначина:

$$a_{ij}, b_i, c \;\; - \;\; \text{функције } \; \mathrm{x}, \quad f = f(u)$$

Квазилинеарне једначине:

$$c = 0; \qquad a_{ij}, b_i, f \;\; - \;\; \text{функције } \; \mathrm{x}, u$$

$$c = b_i = 0; \qquad a_{ij}, f \;\; - \;\; \text{функције } \; \mathrm{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

Једначине вишег реда

Једначине математичке физике

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$$

Елиптичност

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall\, \mathrm{x} \in \bar{\Omega}; \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge c_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \qquad c_0 > 0, \quad \forall\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

Дифузија

Конвекција / адвекција

Елиптички гранични проблем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = f, &\quad \mathrm{x} \in \Omega \\ u = 0, &\quad \mathrm{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{E}$$

Класично решење: $\quad u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad b_i, c \in C(\bar{\Omega}) \quad \Rightarrow \quad f \in C(\bar{\Omega})$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad b_i, c, f \in C(\bar{\Omega}) \\ \partial\Omega \text{ довољно глатка, } C^{0,\alpha} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u \in C^2(\bar{\Omega})$$

Слаба решења

Простори Собољева

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} = \int \cdots \int\limits_{\Omega} u(x_1,\ldots,x_n)v(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)\,|\,D^\sigma u \in L^2(\Omega),\ |\sigma| \le k\right\}$$

$$\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n), \quad |\sigma| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n, \quad D^\sigma u = \frac{\partial^{|\sigma|}u}{\partial x_1^{\sigma_1}\ldots\partial x_n^{\sigma_n}}$$

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\sigma|\le k} \int\limits_{\Omega} D^\sigma u(\mathrm{x}) D^\sigma v(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}$$

$$H_0^k(\Omega) := \text{ затворење } C_0^\infty(\Omega) \text{ у норми } H^k(\Omega)$$

Слаба форма (Е):

Наћи $u \in H_0^1(\Omega)$ такво да је

$$a(u,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{W}$$

где је

$$a(u,v) := \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}\, \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v + cuv \Big) d\mathrm{x}$$

$$a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega), \qquad f \in L^2(\Omega)$$

$$f \in H^{-1}(\Omega) = \big(H_0^1(\Omega)\big)' : \qquad f = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad f_i \in L^2(\Omega)$$

$$(f,v)_{L^2(\Omega)} \;\to\; \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = (f_0, v)_{L^2(\Omega)} - \sum_{i=1}^n \Big(f_i, \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big)_{L^2(\Omega)}$$

Апстрактни проблем: $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{V}'; \qquad u \in \mathcal{V}$

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle = \langle f, v\rangle_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}, \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}$$

Лема Лакса-Милграма:

$$\left.\begin{aligned} &|\langle f, v\rangle| \le \|f\|_{\mathcal{V}'}\|v\|_{\mathcal{V}} \\ &|a(u,v)| \le C_1\|u\|_{\mathcal{V}}\|v\|_{\mathcal{V}} \\ &a(u,u) \ge C_2\|u\|^2_{\mathcal{V}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \exists_1\, u \in \mathcal{V}, \quad \|u\|_{\mathcal{V}} \le \frac{1}{C_2}\,\|f\|_{\mathcal{V}'}$$

Проблем (W): $\mathcal{H} = L^2(\Omega), \quad \mathcal{V} = H^1_0(\Omega)$

$$a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega), \qquad f \in L^2(\Omega) \qquad (\text{или } \; f \in H^{-1}(\Omega))$$

$$c \ge 0, \qquad b_i \;-\; \text{“довољно мали”}$$

$$b_i \in W^{1,\infty}(\Omega), \qquad \operatorname{div} b = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \;-\; \text{“довољно мала”}$$

$c < 0$ и / или b_i – “велики”:

Гардингова (Gårding) неједнакост

$$a(u,u) \geq C_2 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - C_3 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad C_3 > C_2 > 0$$

Последица: $\lambda_i > -C_3 \qquad (\Re\lambda_i > -C_3)$

Фредхолмова алтернатива

Операторска формулација: $\quad Au = f$

$$A:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\quad D(A)\hookrightarrow\mathcal{H},\quad A=A^*>0,\quad \exists\, A^{1/2}=(A^{1/2})^*>0,$$

$$(u,v)_A=(Au,v)\,,\qquad \|u\|_A=(u,u)_A^{1/2}=\|A^{1/2}u\|\,,\qquad \mathcal{H}_A$$

$$(u,v)_{A^{-1}}=(A^{-1}u,v)\,,\qquad \|u\|_{A^{-1}}=(u,u)_{A^{-1}}^{1/2}\,,\qquad \mathcal{H}_{A^{-1}}$$

$$\mathcal{H}_A\hookrightarrow\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{H}_{A^{-1}}\,,\qquad \mathcal{H}_{A^{-1}}=\mathcal{H}'_A$$

$$(Au,v)=(f,v)\,,\qquad \forall v\in D(A)$$

$$(u,v)_A=\langle f,v\rangle\,,\qquad \forall v\in\mathcal{H}_A$$

$$|\langle f,v\rangle|\le\|f\|_{A^{-1}}\|v\|_A\,,\qquad |(u,v)_A|\le\|u\|_A\|v\|_A\,,\qquad (u,u)_A=\|u\|_A^2$$

$$a(u,v)=(u,v)_A\,,\quad A=\mathcal{L}\,,\quad \mathcal{H}=L^2(\Omega),\quad \mathcal{H}_A=\mathcal{V}=H_0^1(\Omega)$$

$$b_i=0\,,\qquad c\ge 0$$

Параболички проблем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = f, \quad (\mathrm{x}, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$$

$$u = 0, \quad (\mathrm{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \tag{P}$$

$$u = u_0, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad t = 0$$

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$$

a_{ij}, b_i, c, f, u – функције $(\mathrm{x}, t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, $\quad u_0 = u_0(\mathrm{x})$

Апстрактни проблем: $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{V}'$; $u(t) \in \mathcal{V}$

$$\left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + a(t; u(t), v) = \langle f(t), v \rangle, \quad \forall\, v \in \mathcal{V}, \quad t \in (0,T); \qquad u(0) = u_0 \in \mathcal{H}$$

$$H^k((0,T),\mathcal{H}); \quad Q = \Omega \times (0,T): \quad H^{k,l}(Q) = L^2((0,T),H^k(\Omega)) \cap H^l((0,T),L^2(\Omega))$$

$$\left.\begin{array}{l} t \to a(t; v, w) \quad \text{мерљива} \\ |a(t; v, w)| \le C_1 \|v\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}} \\ a(t; v, v) \ge C_2 \|v\|^2_{\mathcal{V}} - C_3 \|v\|^2_{\mathcal{H}} \\ f \in L^2((0,T),\mathcal{V}') \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \exists_1\, u \in L^2((0,T),\mathcal{V}), \quad \frac{du}{dt} \in L^2((0,T),\mathcal{V}')$$

Проблем (P): $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{V} = H^1_0(\Omega)$, $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(Q)$,

$$\|u\|_{H^{1,1/2}(Q)} := \|u\|_{L^2((0,T),H^1(\Omega))} + \|u\|_{H^{1/2}((0,T),L^2(\Omega))} \le C \Big(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2((0,T),H^{-1}(\Omega))} \Big)$$

$$C_3 = 0: \quad C = \text{const}; \qquad C_3 > 0: \quad C = C(T)$$

Операторска формулација:

$$\frac{du}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \qquad t \in (0,T); \qquad\qquad u(0) = u_0 \in \mathcal{H}$$

$$A(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad t \in (0,T)\,, \qquad A(t) = A^*(t) > 0$$

$$\exists\, A_0 = A_0^* > 0, \qquad A_0 \neq A_0(t), \qquad A_0 \leq A(t) \leq const\, A_0$$

$$A(t) = \mathcal{L} = \mathcal{L}(t), \qquad a(t;u,v) = (u,v)_{A(t)}, \qquad \mathcal{H} = L^2(\Omega), \qquad \mathcal{H}_{A_0} = \mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{L^2((0,T),\mathcal{H}_{A_0})} + \|u\|_{H^{1/2}((0,T),\mathcal{H})} \leq C\Big(\|u_0\|_{\mathcal{H}} + \|f\|_{L^2((0,T),\mathcal{H}_{A_0^{-1}})}\Big)$$

Хиперболички проблем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{L}u = f, \quad (\mathrm{x}, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$$

$$u = 0, \quad (\mathrm{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \qquad (H)$$

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad t = 0$$

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + cu$$

a_{ij}, b_i, c, f, u – функције $(\mathrm{x}, t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, $\quad u_0 = u_0(\mathrm{x})$, $\quad u_1 = u_1(\mathrm{x})$

Апстрактни проблем: $\qquad \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{V}'$

$$\left\langle \frac{d^2u}{dt^2}, v \right\rangle + a(t; u(t), v) = \langle f(t), v\rangle, \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}, \quad t \in (0,T)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathcal{V}, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1 \in \mathcal{H}$$

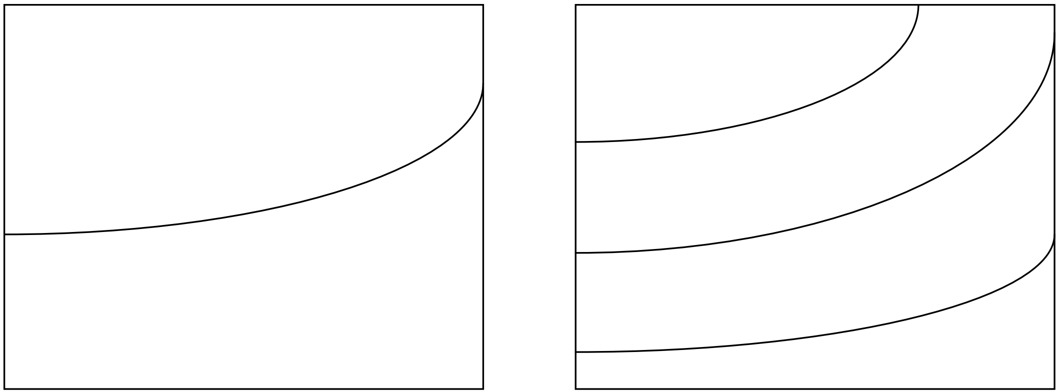
$$\left.\begin{array}{ll} t \to a(t; v, w) \quad \text{мерљива}, & a(t; v, w) = a(t; w, v) \\ |a(t; v, w)| \le C_1 \|v\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}}, & \left|\frac{d}{dt} a(t; v, w)\right| \le C_1' \|v\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}} \\ a(t; v, v) \ge C_2 \|v\|^2_{\mathcal{V}} - C_3 \|v\|^2_{\mathcal{H}}, & f \in L^2((0,T), \mathcal{V}') \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists_1\, u \in L^2((0,T), \mathcal{V}) \\ \frac{du}{dt} \in L^2((0,T), \mathcal{H}) \\ \frac{d^2u}{dt^2} \in L^2((0,T), \mathcal{V}') \end{array}\right.$$

Проблем (H): $\qquad \mathcal{H} = L^2(\Omega), \quad \mathcal{V} = H^1_0(\Omega), \quad a_{ij}, c, \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}, \in L^\infty(Q)$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty((0,T),H^1(\Omega))} \le C\Big(\|u_0\|_{H^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1((0,T),L^2(\Omega))}\Big)$$

$$C_3 = 0: \quad C = \text{const}; \qquad C_3 > 0: \quad C = C(T)$$

Пренос масе и енергије у областима са слојевима



Дифракција светлости, фазни прелаз, композитни материјали, ...

Прекидни коефицијенти, услови сагласности, ...

Интерфејс проблеми, трансмисиони проблеми, ...

Једначина са сингуларним коефицијентом

Концентрисани капацитет

$$(1+K\delta(x-\xi))\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\quad (x,t)\in Q=(0,1)\times(0,T),\quad \xi\in(0,1)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t\in(0,T)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in(0,1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_1\cup Q_2,\ \ Q_1=(0,\xi)\times(0,T),\ \ Q_2=(\xi,1)\times(0,T)$$

$$\sum_{i=1}^{N}A_i\delta^{(i)}(x-\xi)=0\ \Rightarrow\ A_i=0;\qquad \frac{d\varphi}{dx}=\left\{\frac{d\varphi}{dx}\right\}+\sum_{i=1}^{M}[\varphi]_{x=x_i}\delta(x-x_i)$$

Услови сагласности

$$[u]_{x=\xi}:=u(\xi+0,t)-u(\xi-0,t)=0,\qquad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=\xi}=K\frac{\partial u}{\partial t}(\xi,t)$$

Егзистенција решења

$$B\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t \in (0,T); \qquad u(0) = u_0$$

$$\mathcal{H} = L^2(0,1), \qquad Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad Bu = (1 + K\delta(x-\xi))u$$

$$A = A^* > 0, \qquad B = B^* > 0$$

$$\|u\|_A \asymp \|u\|_{H^1(0,1)}, \qquad \|u\|_B^2 \asymp \|u\|_{\tilde{L}^2(0,1)}^2 := \|u\|_{L^2(0,1)}^2 + u^2(\xi)$$

$$\tilde{u} = B^{1/2}u, \qquad \tilde{f} = B^{-1/2}f, \qquad \tilde{A} = B^{-1/2}AB^{-1/2}, \quad \tilde{u}_0 = B^{1/2}u_0$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}(t), \quad t \in (0,T); \qquad \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0$$

$$\|\tilde{u}\|_{L^2((0,T),\mathcal{H}_{\tilde{A}})} + \|\tilde{u}\|_{H^{1/2}((0,T),\mathcal{H})} \le C\Big(\|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{H}} + \|\tilde{f}\|_{L^2((0,T),\mathcal{H}_{\tilde{A}^{-1}})}\Big)$$

$$\|u\|_{L^2((0,T),H^1(0,1))} + \|u\|_{H^{1/2}((0,T),\tilde{L}^2(0,1))} \le C\Big(\|u_0\|_{\tilde{L}^2(0,1)} + \|f\|_{L^2((0,T),H^{-1}(0,1))}\Big)$$

Нумеричко решавање

$$\tilde{H}^s(0,1) = H_0^1(0,1) \cap H^s(0,\xi) \cap H^s(\xi,1), \qquad s \geq 1$$

$$\tilde{H}^{s,s/2}(Q) = L^2((0,T),\tilde{H}^s(0,1)) \cap H^{s/2}((0,T),\tilde{L}^2(0,1))$$

$$Q_{h\tau}, \qquad \tilde{H}^{1,1/2}(Q_{h\tau})$$

$$\|u_{h\tau} - u\|_{\tilde{H}^{1,1/2}(Q_{h\tau})} \leq C(h^2+\tau)\log\frac{1}{h}\,\|u\|_{\tilde{H}^{3,3/2}(Q)}$$

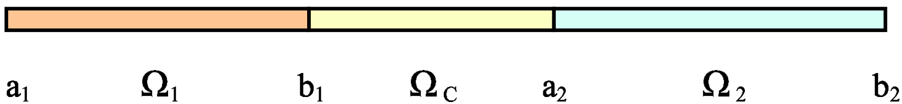
Immersed Interface Method

Контурни проблеми у строго дисјунктним областима

1 D пример

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2, \qquad \Omega = (a_1, b_2)$$

$$\Omega_1 = (a_1, b_1), \quad \Omega_c = (b_1, a_2), \quad \Omega_2 = (a_2, b_2)$$



$$\varrho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = f(x,t) \tag{1}$$

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x), & x \in \Omega_1, \\ p_c(x), & x \in \Omega_c, \\ p_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \qquad q(x) = \begin{cases} q_1(x), & x \in \Omega_1, \\ q_c(x), & x \in \Omega_c, \\ q_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$f(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t), & x \in \Omega_1, \\ f_c(x,t), & x \in \Omega_c, \\ f_2(x,t), & x \in \Omega_2, \end{cases} \qquad \varrho(x) = \begin{cases} \varrho_1 \asymp 1, & x \in \Omega_1, \\ \varrho_c \approx 0, & x \in \Omega_c, \\ \varrho_2 \asymp 1, & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) + q_i(x)u_i = f_i(x,t), \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1,2 \tag{2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p_c(x)\frac{\partial u_c}{\partial x}\right) + q_c(x)u_c = f_c(x,t), \quad x \in \Omega_c \tag{3}$$

Услови непрекидности:

$$u_1(b_1,t) = u_c(b_1,t), \quad u_c(a_2,t) = u_2(a_2,t) \tag{4}$$

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) = p_c(b_1)\frac{\partial u_c}{\partial x}(b_1,t), \quad p_c(a_2)\frac{\partial u_c}{\partial x}(a_2,t) = p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t) \tag{5}$$

$$u_c(x,t) = C_1(t)v_1(x) + C_2(t)v_2(x) + w(x,t) \tag{6}$$

$v_1(x)$, $v_2(x)$, $w(x,t)$ – познате функције

$C_1(t)$, $C_2(t)$ – непознате функције

Из (4) и (6) следи:

$$\begin{bmatrix} v_1(b_1) & v_2(b_1) \\ v_1(a_2) & v_2(a_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_c(b_1,t) - w(b_1,t) \\ u_c(a_2,t) - w(a_2,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(b_1,t) - w(b_1,t) \\ u_2(a_2,t) - w(a_2,t) \end{bmatrix}$$

одакле даље добијамо:

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1(b_1,t)}{\partial x} = -\alpha_1 u_1(b_1,t) + \beta_1 u_2(a_2,t) + \gamma_1(t) \tag{7}$$

$$-p_2(a_2)\frac{\partial u_2(a_2,t)}{\partial x} = -\alpha_2 u_2(a_2,t) + \beta_2 u_1(b_1,t) + \gamma_2(t) \tag{8}$$

$$\alpha_1 = \frac{p_c(b_1)\varDelta_1(a_2,b_1)}{\varDelta(b_1,a_2)}\,, \qquad \beta_1 = \frac{p_c(b_1)\varDelta_1(b_1,b_1)}{\varDelta(b_1,a_2)}$$

$$\alpha_2 = \frac{p_c(a_2)\varDelta_1(b_1,a_2)}{\varDelta(b_1,a_2)}\,, \qquad \beta_2 = \frac{p_c(a_2)\varDelta_1(a_2,a_2)}{\varDelta(b_1,a_2)}$$

$$\gamma_1(t) = \frac{p_c(b_1)}{\varDelta(b_1,a_2)}\left(\varDelta_1(a_2,b_1)\,w(b_1,t) - \varDelta_1(b_1,b_1)\,w(a_2,t) + \varDelta(b_1,a_2)\,\frac{\partial w}{\partial x}(b_1,t)\right)$$

$$\gamma_2(t) = \frac{p_c(a_2)}{\varDelta(b_1,a_2)}\left(\varDelta_1(a_2,a_2)w(b_1,t) - \varDelta_1(b_1,a_2)w(a_2,t) + \varDelta(b_1,a_2)\,\frac{\partial w}{\partial x}(a_2,t)\right)$$

$$\varDelta(b_1,a_2) = \begin{vmatrix} v_1(b_1) & v_2(b_1) \\ v_1(a_2) & v_2(a_2) \end{vmatrix}, \qquad \varDelta_1(r,s) = \begin{vmatrix} v_1(r) & v_2(r) \\ \frac{dv_1}{dx}(s) & \frac{dv_2}{dx}(s) \end{vmatrix}$$

$$p_c(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i,\, \beta_i > 0$$

Поставка почетно-граничног трансмисионог проблема

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + q_1(x)u_1 = f_1(x,t), \quad x \in \Omega_1, \ \ t > 0 \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + q_2(x)u_2 = f_2(x,t), \quad x \in \Omega_2, \ \ t > 0 \\
p_1(b_1)\frac{\partial u_1(b_1,t)}{\partial x} + \alpha_1 u_1(b_1,t) = \beta_1 u_2(a_2,t) + \gamma_1(t) \\
-p_2(a_2)\frac{\partial u_2(a_2,t)}{\partial x} + \alpha_2 u_2(a_2,t) = \beta_2 u_1(b_1,t) + \gamma_2(t) \\
u_1(a_1,t) = 0, \quad u_2(b_2,t) = 0 \\
u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x)
\end{gathered} \tag{9}$$

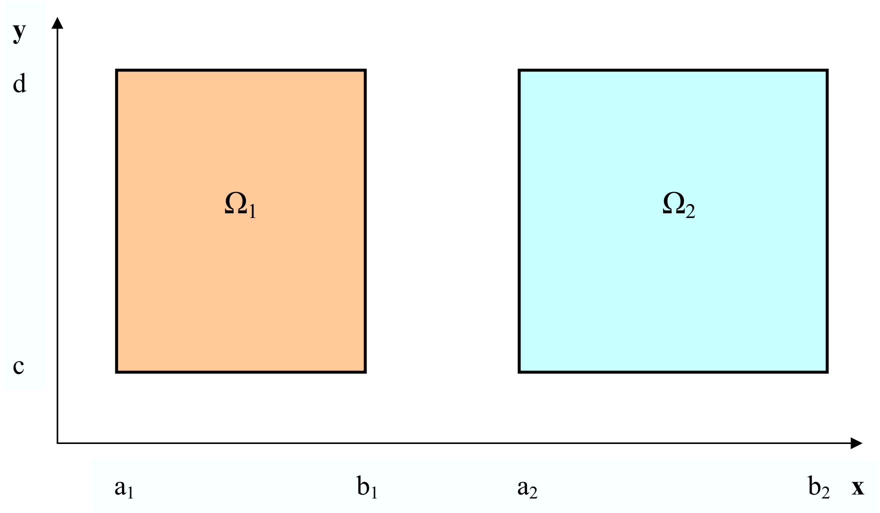
$$p_i(x),\ q_i(x) \in L^\infty(\Omega_i), \quad i = 1,2$$

$$0 < p_{0i} \le p_i(x), \quad 0 \le q_i(x), \quad \text{с. с. у } \ \Omega_i, \quad i = 1,2$$

$$\alpha_i > 0\,, \quad \beta_i > 0, \quad i = 1,2$$

2 D проблем

$$\Omega_1 = (a_1, b_1) \times (c, d), \quad \Omega_2 = (a_2, b_2) \times (c, d), \quad a_1 < b_1 < a_2 < b_2, \quad c < d$$



$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q_1(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + r_1(x,y)u_1 = f_1(x,y,t) \quad (10)$$

$$(x,y) \in \Omega_1, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q_2(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + r_2(x,y)u_2 = f_2(x,y,t) \quad (11)$$

$$(x,y) \in \Omega_2, \quad t > 0$$

$$p_1(b_1,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,y,t) + \alpha_1(y)u_1(b_1,y,t) = \int_c^d \beta_1(y,y')u_2(a_2,y',t)\,\mathrm{d}y' \quad (12)$$

$$-p_2(a_2,y)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,y,t) + \alpha_2(y)u_2(a_2,y,t) = \int_c^d \beta_2(y,y')u_1(b_1,y',t)\,\mathrm{d}y' \quad (13)$$

$$y \in (c,d), \quad t > 0$$

Нелокални услови сагласности

$$
\begin{aligned}
&u_1(a_1,y,t)=0,\;\; y\in(c,d);\quad u_1(x,c,t)=u_1(x,d,t)=0,\;\; x\in(a_1,b_1)\\
&u_2(b_2,y,t)=0,\;\; y\in(c,d);\quad u_2(x,c,t)=u_2(x,d,t)=0,\;\; x\in(a_2,b_2)
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
u_1(x,y,0)=\varphi_1(x,y),\;\;(x,y)\in\Omega_1;\quad u_2(x,y,0)=\varphi_2(x,y),\;\;(x,y)\in\Omega_2 \tag{15}
$$

Услови регуларности и елиптичности:

$$
p_i(x,y),\; q_i(x,y),\; r_i(x,y)\in L^\infty(\Omega_i),\quad i=1,2 \tag{16}
$$

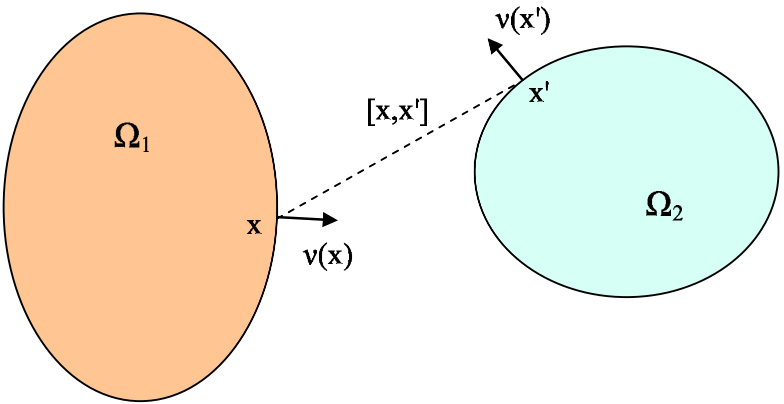
$$
0<p_{i0}\le p_i(x,y),\quad 0<q_{i0}\le q_i(x,y),\quad \text{с. с. у}\;\;\Omega_i \tag{17}
$$

$$
\alpha_i\in L^\infty(c,d),\quad \beta_i\in L^\infty\left((c,d)\times(c,d)\right),\quad i=1,2 \tag{18}
$$

$$
\alpha_i>0\,,\quad \beta_i>0
$$

Пример из физике

Пренос топлоте зрачењем између два дисјунктна црна тела



$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \operatorname{div}\left(A_i(\mathrm{x}, t, u_i)\nabla u_i\right) = f_i(\mathrm{x}, t), \quad \mathrm{x} \in \Omega_i, \quad t > 0 \tag{19}$$

$$\begin{gathered}(A_i(\mathrm{x}, t, u_i)\nabla u_i,\ \nu(\mathrm{x})) + h_i(u_i(\mathrm{x}, t)) = \\ = \int\limits_{\partial\Omega_{3-i}} h_{3-i}(u_{3-i}(\mathrm{x}', t))w(\mathrm{x}', \mathrm{x}, t)dS(\mathrm{x}') + g_i(\mathrm{x}, t), \quad \mathrm{x} \in \Gamma_{i,R} \cup \Gamma_{i,N}, \quad t > 0\end{gathered} \tag{20}$$

$$u_i(\mathrm{x}, t) = \psi_i(\mathrm{x}, t), \quad \mathrm{x} \in \Gamma_{i,D}, \quad t > 0 \tag{21}$$

$$u_i(\mathrm{x}, 0) = \varphi_i(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega_i \tag{22}$$

$$i = 1, 2$$

Систем у стању мировања:

$$w(\mathrm{x}', \mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{(\nu(\mathrm{x}'), \mathrm{x} - \mathrm{x}')(\nu(\mathrm{x}), \mathrm{x}' - \mathrm{x})}{b_n |\mathrm{x}' - \mathrm{x}|^{n+1}}, & \text{ако je } [\mathrm{x}, \mathrm{x}'] \cap (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \emptyset \\ 0, & \text{ако je } [\mathrm{x}, \mathrm{x}'] \cap (\Omega_1 \cup \Omega_2) \neq \emptyset \end{cases} \tag{23}$$

$$b_n = \operatorname{mes} S_{n-1}/(n-1), \qquad (\text{обично } n = 2 \text{ или } n = 3)$$

Зрачење Штефан-Болцмановог (Štefan-Boltzmann) типа:

$h_i(u_i) = \alpha_i |u_i|^3 u_i$

Почетно-гранични проблем (10)-(15) своди се на линеаризован нестационаран проблем преноса топлоте зрачењем типа (19)-(22) ако се β_i изаберу у складу с (23):

$$\beta_i(y, y') = \frac{\alpha_{3-i}(y')\,(a_2 - b_1)^2}{2\left[(a_2 - b_1)^2 + (y - y')^2\right]^{3/2}}\,, \qquad i = 1, 2$$

Егзистенција решења трансмисионог проблема (10)-(15)

Функционални простори

$$L^2 = L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) = \{v = (v_1, v_2) \,|\, v_i \in L^2(\Omega_i)\}$$

$$(u, v)_{L^2} = (u_1, v_1)_{L^2(\Omega_1)} + (u_2, v_2)_{L^2(\Omega_2)}, \quad \|v\|_{L^2} = (v, v)_{L^2}^{1/2}$$

$$H^k = \{v = (v_1, v_2) \,|\, v_i \in H^k(\Omega_i)\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$(u, v)_{H^k} = (u_1, v_1)_{H^k(\Omega_1)} + (u_2, v_2)_{H^k(\Omega_2)}, \quad \|v\|_{H^k} = (v, v)_{H^k}^{1/2}$$

$$H_0^1 = \{v = (v_1, v_2) \in H^1 \,|\, v_i = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_i, \ \ i = 1, 2\}$$

$$\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \{(b_1, y) \,|\, y \in (c, d)\}, \quad \Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \{(a_2, y) \,|\, y \in (c, d)\}$$

$$H^{1,1/2} = L^2((0, T), H^1) \cap H^{1/2}((0, T), L^2)$$

$$
\begin{aligned}
A(u,v) = &\int_{\Omega_1} \Big(p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + q_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial y} + r_1 u_1 v_1 \Big) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&+ \int_{\Omega_2} \Big(p_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + q_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} + r_2 u_2 v_2 \Big) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&+ \int_c^d \alpha_1(y) u_1(b_1,y) v_1(b_1,y) \, \mathrm{d}y + \int_c^d \alpha_2(y) u_2(a_2,y) v_2(a_2,y) \, \mathrm{d}y \\
&- \int_c^d \int_c^d \beta_1(y,y') u_2(a_2,y') v_1(b_1,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}y' - \int_c^d \int_c^d \beta_2(y',y) u_1(b_1,y) v_2(a_2,y') \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}y'
\end{aligned}
$$

Слаба форма (10) – (14):

$$
\Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t), \, v \Big\rangle + A(u(\cdot,t), \, v) = \langle f(\cdot,t), \, v \rangle, \qquad \forall v \in H_0^1, \quad t \in (0,T)
$$

$$
(16)\text{–}(18) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |A(u,v)| \le C_1 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \\ A(u,u) \ge C_2 \|u\|_{H^1}^2 - C_3 \|u\|_{L^2}^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \exists_1 \, u \in L^2((0,T), H_0^1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0,T), (H_0^1)') \end{cases}
$$

Априорна оцена

$$f_i(x,y,t) = f_{i0}(x,y,t) + \frac{\partial(\varrho_i(x)\, f_{i1}(x,y,t))}{\partial x} + \frac{\partial f_{i2}(x,y,t)}{\partial y} + \int_0^T \frac{f_{i3}(x,y,t,t') - f_{i3}(x,y,t',t)}{|t-t'|}\,\mathrm{d}t', \qquad i = 1,2$$

$$f_{i0},\ f_{i1},\ f_{i2} \in L^2(Q_i), \quad f_{i3} \in L^2(R_i), \quad \varrho_1(x) = b_1 - x, \quad \varrho_2(x) = x - a_2$$

$$Q_i = \Omega_i \times (0,T), \quad R_i = \Omega_i \times (0,T)^2, \quad \varphi_i \in L^2(\Omega_i)$$

$$\|u\|_{H^{1,1/2}} \le C \sum_{i=1}^{2} \Big(\|\varphi_i\|_{L^2(\Omega_i)} + \|f_{i0}\|_{L^2(Q_i)} + \|f_{i1}\|_{L^2(Q_i)} + \|f_{i2}\|_{L^2(Q_i)} + \|f_{i3}\|_{L^2(R_i)} \Big)$$

$$C = C(T) = C_4 T e^{C_5 T}\,; \qquad C_3 = 0: \quad C = \text{const}$$

Нумеричко решавање

За трансмисионе проблеме разматраног типа карактеристично је присуство нелокалних услова сагласности (видети (7)-(8), (12)-(13), (20) итд.). То доводи до извесног усложњавања нумеричких метода за њихово решавање. Наиме, приликом дискретизације задатка уместо уобичајених "ретких" матрица добијају се матрице нешто "гушће" структуре, што доводи до повећања броја аритметичких операција неопходних за добијање решења

Парцијалне једначине разломљеног реда

Интеграли и изводи разломљеног реда (Риман-Лиувил)

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)\, d\xi\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+; \qquad I_{a+}^0 f = f$$

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(\int_a^x f(\xi)\, d\xi \right) \qquad \to \qquad D_{a+}^{\alpha} = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}}\, I_{a+}^{[\alpha]+1-\alpha}$$

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\int_a^x (x-\xi)^{n-\alpha-1} f(\xi)\, d\xi \right), \qquad n-1 \le \alpha < n$$

Аналогно се дефинишу $\quad I_{b-}^{\alpha} \quad$ и $\quad D_{b-}^{\alpha}$

Примери

$$D_{0+}^{\alpha}(x^{\beta}) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\, x^{\beta-\alpha}$$

$$D_{0+}^{\alpha}(1) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0, \qquad \alpha \notin \mathbb{N}$$

$$D_{0+}^{\alpha}(e^{\pm x}) = \frac{e^{\pm x}}{x^{\alpha}}\, \gamma^{*}(-\alpha, \pm x)$$

Особине

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f = f, \quad D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f = I_{a+}^{\alpha-\beta} f, \quad \alpha \geq \beta > 0$$

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f\,, \quad \alpha \geq 0$$

$$D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f = D_{a+}^{\alpha+\beta} f\,, \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad f(a) = 0$$

Парцијални изводи разломљеног реда

Простори Собољева: $\quad H^\alpha(\Omega), \quad \dot{H}^\alpha(\Omega) = H_0^\alpha(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$|u|_{H_+^\alpha(a,b)} = \|D_{a+}^\alpha u\|_{L^2(a,b)}\,, \qquad \|u\|_{H_+^\alpha(a,b)} = \Big(\|u\|_{L^2(a,b)}^2 + |u|_{H_+^\alpha(a,b)}^2\Big)^{1/2}, \qquad \alpha > 0$$

$$H_\pm^n(a,b) = H^n(a,b), \quad n \in \mathbb{N}; \qquad \dot{H}_\pm^\alpha(a,b) \text{ затворење } \dot{C}^\infty(a,b) = C_0^\infty(a,b)$$

Лема 1. (Li, Xu, 2009) Нека је $0<\alpha<1$, $u\in H_+^\alpha(a,b)$, $v\in\dot{C}^\infty(a,b)$. Тада је

$$(D_{a+}^\alpha u,\ v)_{L^2(a,b)} = (u,\ D_{b-}^\alpha v)_{L^2(a,b)}\,.$$

Лема 2. (Ervin, Roop, 2006) Нека је $\alpha > 0$ и $u \in \dot{C}^\infty(a,b)$. Тада је

$$(D_{a+}^\alpha u,\ D_{b-}^\alpha u)_{L^2(a,b)} = \cos\pi\alpha\,\|D_{a+}^\alpha u\|_{L^2(a,+\infty)}^2\,.$$

Лема 3. Ако је $\alpha > 0$ и $\alpha \neq n + 1/2$, $n \in \mathbb{N}$, тада су простори $\dot{H}_+^\alpha(a,b)$, $\dot{H}_-^\alpha(a,b)$ и $\dot{H}^\alpha(a,b)$ једнаки а њихове норме (и семинорме) међусобно еквивалентне.

$$H_\pm^{\alpha,\beta}(Q) = L^2((0,T), H^\alpha(0,1)) \cap H_\pm^\beta((0,T), L^2(0,1))\,.$$

$$0 \le \beta < 1/2: \qquad H_+^{\alpha,\beta}(Q) = H_-^{\alpha,\beta}(Q) = H^{\alpha,\beta}(Q)\,.$$

Једначина субдифузије $\qquad \alpha \in (0,1), \quad Q = (0,1) \times (0,T)$

$$D^{\alpha}_{t,0+} u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q \tag{24}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in (0,1) \tag{25}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T) \tag{26}$$

Слаба форма проблема (24)-(26): наћи $u \in \dot{H}^{1,\alpha/2}(Q)$ такво да је

$$a(u,v) = l(v)\,, \qquad \forall\, v \in \dot{H}^{1,\alpha/2}(Q) \tag{27}$$

где је

$$\dot{H}^{1,\alpha/2}(Q) = L^2((0,T), \dot{H}^1(0,1)) \cap \dot{H}^{\alpha/2}((0,T), L^2(0,1))$$

$$a(u,v) = \left(D^{\alpha/2}_{t,0+} u,\ D^{\alpha/2}_{t,T-} v \right)_{L^2(Q)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2(Q)}$$

$$l(v) = (f,v)_{L^2(Q)}$$

Теорема 1. (Li, Xu, 2009) За $\alpha \in (0,1)$ и $f \in L^2(Q)$ проблем (27) има јединствено решење које задовољава априорну оцену

$$\|u\|_{H^{1,\alpha/2}(Q)} \le C\,\|f\|_{L^2(Q)}$$

$$f = f_0 + \frac{\partial f_1}{\partial x} + D_{t,0+}^{\alpha/2} f_2, \quad f_i \in L^2(Q): \qquad \|u\|_{H^{1,\alpha/2}(Q)} \le C \sum_{i=1}^{3} \|f_i\|_{L^2(Q)}$$

Нумеричко решавање

У случају апроксимације методом коначних разлика фракциони извод по времену нумеричког решења на временском слоју t_j се изражава као линеарна комбинација вредности решења на свим претходним временским слојевима t_k, $k < j$, коју сваки пут треба израчунати. На тај начин се повећава нумерички напор (у поређењу са стандардним нестационарним проблемима параболичког и хиперболичког типа). Осим тога, вредности нумеричког решења у чворовима мреже $v(x_i, t_k)$ морају се трајно чувати, што може бити "скупо", нарочито у вишедимензионом случају.

References

1. J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod 1968.
2. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press 1999.
3. M. Renardy, R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer 2004.
4. L. Schwartz, *Théorie des distributions I, II*, Herman, Paris 1950/51.
5. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М. 1977.
6. J. Wloka, *Partial Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987.
7. B.S. Jovanović, E. Süli, *Analysis of Finite Difference Schemes*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 46, Springer 2014.
8. A. A. Amosov, *Global solvability of a nonlinear nonstationary problem with a nonlocal boundary condition of radiation heat transfer type*, Differ. Equ. **41** (2005), 96–109.
9. V.J. Ervin, J.P. Roop, *Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation*, Numer. Methods Partial Differential Equations 23 (2006), 558–576.
10. X. Li, C. Xu, *A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation*, SIAM J. Numer. Anal. 47, No 3 (2009), 2108-2131.
11. B.S. Jovanović, L.G. Vulkov, *On the convergence of finite difference schemes for the heat equation with concentrated capacity*, Numer. Math., **89** (2001), 715–734.
12. B.S. Jovanović, L.G. Vulkov, *On the convergence of difference schemes for hyperbolic problems with concentrated data*, SIAM J. Numer. Anal., **41** (2003), 516–538.
13. B.S. Jovanović, L.G. Vulkov, *Numerical solution of a parabolic transmission problem*, IMA J. Numer. Anal. **31** (2011), 233–253.
14. A. Delić, B.S. Jovanović, *Numerical approximation of an interface problem for fractional in time diffusion equation*, Appl. Math. Comput. **229** (2014), 467–479.

Хвала на пажњи