Могуће кардиналности простора врста Булових матрица

Миодраг Живковић

$\mathcal{B}_{mn}$ — скуп свих $m \times n$ Булових матрица, $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{nn}$.

Скуп $\mathcal{B}_n$ са матричним множењем и Буловим операцијама и, или.

$\mathsf{R}(A)$ — простор врста матрице A, тј. потпростор генерисан врстама A.

$\mathsf{C}(A)$ — простор колона A;

$|\,\mathsf{C}(A)| = |\,\mathsf{R}(A)|$.

Нека je $\mathcal{R}_n = \{r \mid r = |\,\mathsf{r}(A)|,\ A \in \mathcal{B}_n\}$.

Очигледно je $\mathcal{R}_n \subseteq [1, 2^n]$.

Konieczny (1992) :

$\mathcal{R}_n \cap (2^{n-1}, 2^n] = \{2^{n-1} + 2^k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$,

хипотеза: $[1, 2^{n-1}] \subset \mathcal{R}_n$.

Li и Zhang (1995) су доказали да ова хипотеза није тачна: за $n > 6$ број $2^{n-1} - 1$ није у $\mathcal{R}_n$.

Хонг (2000.): за $n \geq 7$ је

$$\mathcal{R}_n \cap \big((2^{n-1} - 2^{n-5}, 2^{n-1} - 2^{n-6}) \cup (2^{n-1} - 2^{n-6}, 2^{n-1})\big) = \emptyset$$

или: $\mathcal{R}_n^0 = \mathcal{R}_n \cap [1, 2^{n-1}]$ има бар два интервала-празнине.

$2^{n-1} - 2^{n-5},\ 2^{n-1} - 2^{n-6} \in \mathcal{R}_n$.

Breen (2001):

$\mathcal{R}_7$ ($\mathcal{R}_7^0 = [1,64] \setminus \{61,63\}$)

$\mathcal{R}_8^0 = [1,128]\backslash\{109,111,117,119,121,122,123,125,126,127\}.$

Живковић (2006):

$$\begin{aligned} &= \mathcal{R}_9 \cap [1,256] = \\ &= [1,190] \cup [192,204] \cup \{206\} \cup [208,212] \cup \{214,216,220\} \\ &\quad \cup [224,228] \cup \{230,232,236,240,248,256\}, \end{aligned}$$

Нека је

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_3 &= \{2^i \mid 0 \le i \le n-4\}, \\
\mathcal{A}_4 &= \{2^i + 2^j \mid 0 \le j < i \le n-4\}, \\
\mathcal{A}_5' &= \{2^i + 2^{k+1} + 2^k \mid 0 \le k \le n-6,\ k+2 \le i \le n-4\}, \\
\mathcal{A}_5'' &= \begin{cases} \{2^i + 2^j + 2^k \mid n \ge 11,\ 1 \le k \le n-10, \\ \qquad k+2 \le j \le \min\{i-1, n+k-5-i\}, & n \ge 11 \\ \emptyset, & n < 11 \end{cases} \\
\mathcal{A} &= 2^{n-2} + 2^{n-3} + (\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_5' \cup \mathcal{A}_5'').
\end{aligned}
$$

Хипотеза: $\mathcal{R}_n \cap (2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-1}] = \mathcal{A}$

Доказ уз помоћ рачунара извео је Бојан Вучковић.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[192, 204] \cup \{206\} \cup [208, 212] \cup \{214, 216, 220\} \cup$$
$$[224, 228] \cup \{230, 232, 236, 240, 248, 256\} \subset \mathcal{R}(A_1),$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$[178, 190] \setminus \{183\} \subset \mathcal{R}(A_2)$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$[109, 177] \cup \{183\} \subset \mathcal{R}(A_3)$

$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_9^0$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_9^0$: проверити проширења свих 14685630688 нееквивалентних матрица из $\mathcal{B}_8^\pi$

$A \neq 0$ и $\mathrm{r}(A) = a$:

$$\mathrm{r}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a, \quad \mathrm{r}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = a + 1, \quad \mathrm{r}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2a,$$

$$a_n = \mathrm{min}\{q \geq 1 \mid q \notin \mathcal{R}_n\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_9 \cap [1, 256] \quad = \quad & [1, 190] \cup [192, 204] \cup \{206\} \cup [208, 212] \cup \{2 \\ & [224, 228] \cup \{230, 232, 236, 240, 248, 256\}, \end{aligned}$$

$$a_9 = 191.$$

$a_n \geq 5 \sqrt[11]{336}^{\,n}$ за $n \geq 31$.

$$\mathsf{r}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2a,$$

$$\mathsf{r}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2a + 1,$$

$$\mathsf{r}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2a + 2$$

ако $A \in \mathcal{B}_{n-2}$, $\mathsf{r}(A) = a$, онда постоје матрице у B_n са кардиналностима

$2a$, $2a+1$, и $2a+2$.

Лема:

$$\mathsf{r}\left[\begin{array}{c|cc} A & 0 & 1 \\ \hline 0 & C & D \\ 1 & E & F \end{array}\right] = (\mathsf{r}(A) - 2)\,\mathsf{r}(C) + \mathsf{r}\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & C & D \\ 1 & E & F \end{array}\right]$$

Ако A нема 0-врсте, 0-колоне и $\mathsf{r}(A) = a \neq 0$, онда

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{r}\left[\begin{array}{c|cc|c} A & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
= \quad & (\mathsf{r}(A) - 2) * \mathsf{r}\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] + \mathsf{r}\left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
= \quad & (\mathsf{r}(A) - 2) * 3 + 7 = 3a + 1.
\end{aligned}
$$

слично:

$$\mathrm{r}\left[\begin{array}{c|cc|c} A & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = 3a, \quad \mathrm{r}\left[\begin{array}{c|cc|c} A & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = 3a + 2.$$

Ако је $n \geq 31$ онда $a_n \geq 5\sqrt[11]{336}^{\,n}$.