3-КАТЕГОРИЈЕ, 3-ГРУПЕ, И ВИШЕ ГЕЈЏ ТЕОРИЈЕ

Марко Војиновић

у колаборацији са Тијаном Раденковић

Институт за физику у Београду

JHEP **10**, 222 (2019), `arXiv:1904.07566`

др Драгомир М. Давидовић
1944 – 2019

ТЕМЕ

- Увод
- Теорија категорија и 3-групе
- Лијеве 3-групе
- Више гејџ теорије
- Стандардни Модел
- Закључне напомене

УВОД

Конструкција гејџ теорија задавањем Лијеве групе је плодоносна и за математику и за физику:

- У математици, свакој Лијевој групи G може се доделити тзв. тополошка BF гејџ теорија на датој многострукости, што ка дефинисању тополошких инваријанти:
  - Понзано-Реџе инваријанта, од $3D$ BF теорије на групи $SU(2)$;
  - Оогури инваријанте, од $4D$ BF теорјие на групама $SO(4)$ и $SO(3,1)$;
  - Тураев-Виро инваријанта, од $3D$ BF теорије на квантној групи $SU_q(2)$.
- У физици, Лијева група G задаје број и особине гејџ поља у $4D$ BF теоријама, и фиксира многе аспекте релевантних теорија:
  - гејџ сектор Стандардног Модела је базиран на групи $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$;
  - Општа теорија релативности (у формализму Плебански дејства) је базирана на групи $SO(3,1)$.

УВОД

Да ли можемо боље?

- нове тополошке инваријанте у математици?
- уједињење свих фундаменталних поља (тзв. "теорија свега") у физици?

Можемо!! Коришћењем неких концепата развијених у оквиру теорије категорија:

- идеја "мердевина" теорије категорија (енгл. categorical ladder),
- идеја виших гејџ теорија.

Пар кључних речи за гугл и википедију:

- `higher gauge theory`
- `n-Category Café`
- `John Baez`

ТЕОРИЈА КАТЕГОРИЈА И 3-ГРУПЕ

Кратак увод у идеју "мердевина" теорије категорија:

- категорија $\mathcal{C} = (Obj, Mor)$ је структура која има објекте и морфизме међу њима,

$$X, Y, Z, \dots \in Obj\,, \qquad f, g, h, \dots \in Mor\,,$$

$$f : X \to Y, \quad g : Z \to X, \quad h : X \to Y, \dots$$

  тако да су испоштована одређена правила, попут асоцијативности композиције морфизама, итд.

- 2-категорија $\mathcal{C}_2 = (Obj, Mor_1, Mor_2)$ је структура која има објекте, морфизме, и морфизме међу морфизмима — тзв. 2-морфизме,

$$X, Y, Z, \dots \in Obj\,, \qquad f, g, h, \dots \in Mor_1\,, \qquad \alpha, \beta, \dots \in Mor_2\,,$$

$$f : X \to Y, \quad g : Z \to X, \quad h : X \to Y, \dots \qquad \alpha : f \to h\,, \dots$$

  тако да су испоштована слична правила као горе.

ТЕОРИЈА КАТЕГОРИЈА И 3-ГРУПЕ

- 3-категорија $\mathcal{C}_3 = (Obj, Mor_1, Mor_2, Mor_3)$ додатно садржи морфизме међу 2-морфизмима, тзв. 3-морфизме,

$$\Theta, \Phi, \dots \in Mor_3\,, \qquad \Theta : \alpha \to \beta\,, \dots$$

  поново са одређеним скупом аксиома о композицијама свих тих морфизама.

- ове структуре се могу уопштити на 4-категорије, n-категорије, ∞-категорије, итд.

Алгебарска структура групе је специјалан случај категорије:

- група је категорија која има само један објект, док су сви морфизми инвертибилни;

- 2-група је 2-категорија са само једним објектом, док су сви 1-морфизми и 2-морфизми инвертибилни;

- 3-група је 3-категорија са само једним објектом, док су сви 1-морфизми, 2-морфизми и 3-морфизми инвертибилни.

ЛИЈЕВЕ 3-ГРУПЕ

Мало практичнији начин да се бавимо 3-групом — тзв. 2-укрштени модул:

$$L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G \,,$$

- за наше потребе L, H и G су обичне Лијеве групе,
- задата су два "гранична хомоморфизма" δ и ∂,
- задато је дејство $\triangleright$ групе G на G, H и L,

$$\triangleright : G \times G \to G \,, \qquad \triangleright : G \times H \to H \,, \qquad \triangleright : G \times L \to L \,,$$

- задата је операција заграде над H у L (енгл. Peiffer lifting),

$$\{ \quad , \quad \} : H \times H \to L \,,$$

- и задовољене су одређене аксиоме међу свим овим пресликавањима.

ЛИЈЕВЕ 3-ГРУПЕ

Аксиоме 2**-укрштеног модула** $L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G$**:**

$$g \triangleright \partial h = \partial(g \triangleright h)\,,$$

$$g \triangleright \delta l = \delta(g \triangleright l)\,,$$

$$g \triangleright g_0 = g\, g_0\, g^{-1}\,,$$

$$g \triangleright \{h_1, h_2\} = \{g \triangleright h_1, g \triangleright h_2\}\,,$$

$$\partial\delta = 1_G\,,$$

$$\delta\,\{h_1, h_2\} = h_1 h_2 h_1^{-1} (\partial h_1) \triangleright h_2^{-1}\,,$$

$$\{\delta l_1, \delta l_2\} = l_1 l_2 l_1^{-1} l_2^{-1}\,,$$

$$\{h_1 h_2, h_3\} = \{h_1, h_2 h_3 h_2^{-1}\}\, \partial h_1 \triangleright \{h_2, h_3\}\,,$$

$$\{\delta l, h\}\,\{h, \delta l\} = l(\partial h \triangleright l^{-1})\,.$$

...за свако $g \in G$**,** $h \in H$ **и** $l \in L$**... :-)**

ЛИЈЕВЕ 3-ГРУПЕ

Свака Лијева 3**-група има одговарајућу Лијеву** 3**-алгебру, тј. диференцијални** 2**-укрштени модул:**

$$\mathfrak{l} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{h} \xrightarrow{\partial} \mathfrak{g}\,,$$

- где су $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ Лијеве алгебре од L, H, G,
- пресликавања δ, ∂, $\triangleright$ и $\{\ \ ,\ \ \}$ се наслеђују из 3-групе,
- важе "одговарајуће" аксиоме.

Осим овога, Лијеве алгебре имају своју обичну Лијеву структуру:

- генераторе,

$$T_A \in \mathfrak{l}\,, \qquad t_a \in \mathfrak{h}\,, \qquad \tau_\alpha \in \mathfrak{g}$$

- структурне константе,

$$[T_A, T_B] = f_{AB}{}^C T_C\,, \qquad [t_a, t_b] = f_{ab}{}^c t_c\,, \qquad [\tau_\alpha, \tau_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma \tau_\gamma\,,$$

- и симетричне билинеарне инваријантне форме,

$$\langle T_A, T_B \rangle_{\mathfrak{l}} = g_{AB}\,, \qquad \langle t_a, t_b \rangle_{\mathfrak{h}} = g_{ab}\,, \qquad \langle \tau_\alpha, \tau_\beta \rangle_{\mathfrak{g}} = g_{\alpha\beta}\,.$$

ЛИЈЕВЕ 3-ГРУПЕ

Главна сврха целе ове структуре је да уопшти појам паралелног транспорта са кривих на површи и запремине:

- За задату 4-димензионалну многострукост $\mathcal{M}$, дефинишемо 3-конексију (α, β, γ) као уређену тројку диференцијалних форми са вредностима у 3-алгебри,

$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & \alpha^{\alpha}{}_{\mu}(x)\, \tau_{\alpha}\, \mathbf{d}x^{\mu} & \in \Lambda^1(\mathcal{M}, \mathfrak{g})\,, \\ \beta & = & \frac{1}{2}\beta^{a}{}_{\mu\nu}(x)\, t_a\, \mathbf{d}x^{\mu} \wedge \mathbf{d}x^{\nu} & \in \Lambda^2(\mathcal{M}, \mathfrak{h})\,, \\ \gamma & = & \frac{1}{3!}\gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho}(x)\, T_A\, \mathbf{d}x^{\mu} \wedge \mathbf{d}x^{\nu} \wedge \mathbf{d}x^{\rho} & \in \Lambda^3(\mathcal{M}, \mathfrak{l})\,. \end{array}$$

- Затим уведемо линијску, површинску и запреминску холономију,

$$g = \mathcal{P}\exp\int_{\mathcal{C}_1} \alpha\,, \qquad h = \mathcal{P}\exp\int_{\mathcal{S}_2} \beta\,, \qquad l = \mathcal{P}\exp\int_{\mathcal{V}_3} \gamma\,,$$

- и одговарајуће форме кривине,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} & = & \mathbf{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha - \partial\beta\,, \\ \mathcal{G} & = & \mathbf{d}\beta + \alpha \wedge^{\triangleright} \beta - \delta\gamma\,, \\ \mathcal{H} & = & \mathbf{d}\gamma + \alpha \wedge^{\triangleright} \gamma - \{\beta \wedge \beta\}\,. \end{array}$$

ВИШЕ ГЕЈЏ ТЕОРИЈЕ

Сада можемо да конструишемо тзв. $3BF$ теорију, дејством:

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}} \langle B \wedge \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D \wedge \mathcal{H} \rangle_{\mathfrak{l}} \,.$$

- $3BF$ теорија је тополошка гејџ теорија,
- базирана је на алгебарској структури 3-групе,
- представља уопштење обичне BF теорије за задату Лијеву групу G,

Физички смисао Лагранжевих множитеља C и D:

- 1-форма C (са вредностима из $\mathfrak{h}$) се може разумети као тетрада, ако је $H = \mathbb{R}^4$ група просторвременских транслација:

$$C \to e = e^a{}_\mu(x)\, t_a \, \mathbf{d}x^\mu \,,$$

- 0-форма D (са вредностима из $\mathfrak{l}$) се може разумети као скуп поља материје, за неку задату Лијеву групу L:

$$D \to \phi = \phi^A(x)\, T_A \,.$$

ВИШЕ ГЕЈЏ ТЕОРИЈЕ

Како изабрати 3-групу? Занимљив пример за физику — 3-група Стандардног Модела:

$$G = SO(3,1) \times SU(3) \times SU(2) \times U(1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,, \qquad L \ \text{(следећи слајд).}$$

- гранични хомоморфизми су тривијални — за сваке $l \in L$ и $\vec{v} \in H$, дефинишемо
$$\delta l = 1_H = 0\,, \qquad \partial\vec{v} = 1_G\,,$$
- заграда је тривијална — за свако $\vec{u}, \vec{v} \in H$, дефинишемо
$$\{\vec{u}, \vec{v}\} = 1_L\,,$$
- дејство $\triangleright$ групе G на саму себе је коњугација, дејство на H је векторском репрезентацијом за $SO(3,1)$ а тривијалном за $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$,
- дејство G на L је нетривијално и зависи од избора L (следећи слајд).

Овакав избор пресликавања задовољава све аксиоме 3-групе.

ВИШЕ ГЕЈЏ ТЕОРИЈЕ

Како бирамо L? Простудирајмо дејство $3BF$ теорије:

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}} B^{\alpha} \wedge \mathcal{F}^{\beta} g_{\alpha\beta} + e^{a} \wedge \mathcal{G}^{b} g_{ab} + \phi^{A} \mathcal{H}^{B} g_{AB} \,.$$

- Индексе α из G разбијамо према њеној структури, као $\alpha = (ab\,,\, i)$, па су конексија и кривина

$$\alpha = \omega^{ab} J_{ab} + A^{i} \tau_{i} \,, \qquad \mathcal{F} = R^{ab} J_{ab} + F^{i} \tau_{i} \,.$$

- Векторско дејство $SO(3,1)$ на $H = \mathbb{R}^4$ имплицира сигнатуру простора Минковског за билинеарну инварианту над $\mathbb{R}^4$, тако да имамо

$$g_{ab} = \eta_{ab} \equiv \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1) \,.$$

- Пошто је $\phi = \phi^{A} T_{A}$, имамо по једну реалну компоненту поља материје $\phi^{A}(x)$ за сваки генератор $T_{A} \in \mathfrak{l}$.

СТАНДАРДНИ МОДЕЛ

Колико реалних компоненти поља материје имамо у Стандардном Моделу? Фермионски сектор нам даје:

$$\left.\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix}u_r\\ d_r\end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix}u_g\\ d_g\end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix}u_b\\ d_b\end{pmatrix}_L \\ \\ (\nu_e)_R & (u_r)_R & (u_g)_R & (u_b)_R \\ \\ (e^-)_R & (d_r)_R & (d_g)_R & (d_b)_R \end{array}\right\} = 16\ \frac{\text{спинора}}{\text{фамилији}}\times$$

$$\times 3 \text{ фамилије } \times 4\ \frac{\text{реална поља}}{\text{спинору}} = 192 \text{ реална поља } \phi^A\,.$$

Хигсов сектор нам даје:

$$\left.\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi_0\end{pmatrix}\right\} = 2 \text{ комплексна скаларна поља } = 4 \text{ реална поља } \phi^A\,.$$

Ово сугерише следећу структуру за групу L:

$$L = L_{\text{фермион}} \times L_{\text{Хигс}}\,, \qquad \dim L_{\text{фермион}} = 192\,, \qquad \dim L_{\text{Хигс}} = 4\,.$$

СТАНДАРДНИ МОДЕЛ

Дејство $\triangleright : G \times L \to L$ задаје трансформационе особине сваког реалног поља ϕ^A у односу на Лоренцову и унутрашње симетрије.

- На пример, за

  $$\begin{pmatrix} u_b \\ d_b \end{pmatrix}_L$$

  деловање

  $$g \triangleright u_b\,, \qquad g \in SO(3,1) \times SU(3) \times SU(2) \times U(1)\,,$$

  задаје да се u_b састоји од 4 реална поља која се трансформишу као:

  – лево-кирални спинор у односу на $SO(3,1)$,

  – "плава" компонента фундаменталне репрезентације $SU(3)$,

  – и као "изоспин $+\frac{1}{2}$" левог дублета у односу на $SU(2) \times U(1)$.

- Штавише, пошто G делује на исти начин на сваку фамилију, имамо:

  $$L_{\text{фермион}} = L_{\text{фамилија}} \times L_{\text{фамилија}} \times L_{\text{фамилија}}\,, \qquad \dim L_{\text{фамилија}} = 64\,.$$

СТАНДАРДНИ МОДЕЛ

Конкретна реализација која даје Стандардни Модел:

- Избор 3-групе:

$$L = \mathbb{R}^4(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G})\,,$$

$$G = SO(3,1) \times SU(3) \times SU(2) \times U(1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,,$$

  где је $\mathbb{G}$ Грасманова алгебра.

- Дејство $3BF$ теорије са везама:

$$S = \int B_{\hat\alpha} \wedge \mathcal{F}^{\hat\alpha} + e_{\hat a} \wedge \mathcal{G}^{\hat a} + D_{\hat A} \wedge \mathcal{H}^{\hat A}$$

$$+ \left(B_{\hat\alpha} - C_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta} M_{cd\hat\beta} e^c \wedge e^d\right) \wedge \lambda^{\hat\alpha} - \left(\gamma_{\hat A} - e^a \wedge e^b \wedge e^c C_{\hat A}{}^{\hat B} M_{abc\hat B}\right) \wedge \lambda^{\hat A} - 4\pi i\, l_p^2\, \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \beta^c D_{\hat A} T^{d\hat A}{}_{\hat B} D^{\hat B}$$

$$+\zeta^{ab}{}_{\hat\alpha} \wedge \left(M_{ab}{}^{\hat\alpha} \varepsilon^{cdef} e_c \wedge e_d \wedge e_e \wedge e_f - F^{\hat\alpha} \wedge e_c \wedge e_d\right) + \zeta^{ab}{}_{\hat A} \wedge \left(M_{abc}{}^{\hat A} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - F^{\hat A} \wedge e_a \wedge e_b\right)$$

$$-\varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \;\left(M_{\hat A\hat B} D^{\hat A} D^{\hat B} + Y_{\hat A\hat B\hat C} D^{\hat A} D^{\hat B} D^{\hat C} + L_{\hat A\hat B\hat C\hat D} D^{\hat A} D^{\hat B} D^{\hat C} D^{\hat D}\right)\,.$$

ЗАКЉУЧАК

- Више гејџ теорије представљају формализам у коме се гравитација, гејџ поља, фермиони и Хигсово поље третирају потпуно равноправно.
- Алгебарска структура 3-групе класификује сва фундаментална поља задавањем група L, H, G и њихових пресликавања $\delta, \partial, \triangleright, \{\ ,\ \}$.
- Ова структура има природну геметријску интерпретацију паралелног транспорта дуж криве, површи и запремине.
- Гејџ група L задаје комплетан сектор материје Стандардног Модела ако изаберемо
$$L = \mathbb{R}^4(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G}) \times \mathbb{R}^{64}(\mathbb{G})\,.$$
- Дејство $\triangleright$ групе G на L задаје трансформационе особине поља свих материје.
- Нетривијални избори 3-групе могу да отворе нове правце за истраживање унификације свих поља (тзв. “теорија свега”).

ХВАЛА!