



70 година рада Математичког института САНУ  
**Мини-симпозијум “Нелинеарна динамика”**  
Математички институт САНУ и Пројекат ОН174001,  
Београд, 25 мај 2016

Booklet of Abstracts  
**Mini-symposium “Non-Linear Dynamics”**

Уредник: Катица (Стевановић) ХЕДРИХ,  
руководилац пројекта ОН174001  
Математички институт САНУ

**Acknowledgment:** Parts of this research were supported by the Ministry of Sciences and Technology of Republic of Serbia through Mathematical Institute SANU Belgrade Grant ON174001 Dynamics of hybrid systems with complex structures;, Mechanics of materials .



70 година рада Математичког института САНУ  
**Mini-symposium “Non-Linear Dynamics”**  
Математички институт САНУ и Пројекат ОН174001, Београд, 25 мај 2016

## **Програм мини-симпозијума "Нелинеарна динамика" Program of Mini-symposium “Nonlinear Dynamics”**

Математички институт САНУ и Пројекат ОН174001,  
Београд, 25 мај 2016, од 11-17,30h, мала сала на првом спрату, Кнез Михаилова 36

Организатор и председавајући:

Проф. др **Катица (Стевановић) Хедрих**, руководилац пројекта ОН174001, Математички институт САНУ

Уводна беседа: Специјални број часописа: **International Journal of Non-Linear Mechanics - “Elements of Mathematical Phenomenology and Phenomenological Mappings in Non-linear Dynamics”**, посвећеног теорији **Михаила Петровића** о примени у нелинеарној динамици

**Председавајући:** Проф. др **Михаило Лазаревић**, Машински факултет Универзитета у Београду и др **Ивана Атанасовска**, Випи научни срадник Математички институт САНУ

Тема: Елементи математичке феноменологије самоорганизовања нелинеарних динамичких система: синергијски приступ и приступ применом рачуна нецелог реда

**Elements of mathematical phenomenology of self-organization nonlinear dynamical systems: synergetics and fractional calculus approach**

Аутор: Проф. др **Михаило Лазаревић**, Машински факултет Универзитета у Београду  
e-mail: <mihailo.lazarevic@gmail.com>;

Тема: Динамичко понашање композитних материјала

**Dynamical behavior of composite materials**

Аутор: Проф. др **Драган И. Милосављевић**, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу  
e-mail: <dmiolos@kg.ac.rs>;

Тема: Динамика нехолономних система са нелинеарним везама

**Dynamics of nonholonomic systems with non-linear constraints**

Аутор: Проф. др **Драгомир Зековић**, Машински факултет Универзитета у Београду  
e-mail: <dzekovic@mas.bg.ac.rs>;

Тема: Практични и теоријски аспекти судара птица и вадухоплова

**Practical and theoretical aspects of bird-aircraft impact**

Аутор: Проф. др **Маринко Угрчић**, Економски институт, Београд  
e-mail: <ugrcicmarinko@gmail.com>;

\*\*\*\*\*

**Председавајући:** Проф. др Драган И. Милосављевић, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу и Проф. др Маринко Угрчић, Економски институт, Београд

Тема: Нелинеарне осцилације гироротора – Теорија и примери  
**Nonlinear oscillations of gyro rotor – Theory and some examples.**

Аутор: Доц. др Љиљана Вељовић, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу  
e-mail: <veljovicljilja@yahoo.co.uk>;

Тема: Нелинеарна динамика зупчастих парова  
**Non-Linear Dynamics of gear pairs**

Аутор: др Ивана Атанасовска, Математички институт САНУ  
e-mail: <iviatanasov@yahoo.com>;

Тема: Механика лоба на интерфејсу два материјала  
**Mechanics of fracture at interface between two materials**

Аутор: Проф. др Јелена Ђоковић, Технички факултет у Бору, Универзитета у Београду  
e-mail: <jelenamdjokovic@gmail.com>;

Тема: Динамика виброударних система на моделима судара материјалних тачака  
**Dynamics of vibro-impact systems on models with collisions between mass particles**

Аутор: Проф. др Срђан Јовић, Факултет техничких наука Косовска Митровица  
Универзитета у Приштини са седиштем у Косовској Митровици  
e-mail: <jovic003@gmail.com>;

\*\*\*\*\*

**Председавајући:** Проф. др Драгомир Зековић, Машински факултет Универзитета у Београду и Проф. др Срђан Јовић, Факултет техничких наука Косовска Митровица  
Универзитета у Приштини са седиштем у Косовској Митровици

Тема: Анализа термалног извијања функционално градиране плоче према смицајним деформационим теоријама вишег реда  
**Thermal buckling analysis of functionally graded plate according to high order shear deformation theories**

Коаутори: Доц. др Гордана М. Богдановић, Драган В. Чукановић, Александар Б. Радаковић, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу; Факултет техничких наука Косовска Митровица Универзитета у Приштини са седиштем у Косовској Митровици; Државни универзитет у Новом Пазару.  
e-mail: [gocab@kg.ac.rs](mailto:gocab@kg.ac.rs)

Тема: Методологија истраживања репродуктивне биомеханике  
**Methodology of research of reproductive biomechanics**

Аутор: Анђелка Н. Хедрих, Државни универзитет у Новом Пазару  
e-mail: <handjelka@hm.co.rs>;

Тема: Осцилације и стабилност наноструктура: математички модели и примене.

**Oscillations and stability of nanostructures: Mathematical models and applications**

Аутор: **Милан Цајић**, Математички институт САНУ

e-mail: <caja84@gmail.com>;

Тема: Стабилност и робусност у нељапуновском систему посебних лчаса система аутоматског управљања

**Stability and robustness in no Lyapunov systems of special class of the automatic control systems**

Аутор: Проф. **др Драгутин Љ. Дебелковић**, Машински факултет Универзитета у Београду

Проф. **др Сретен Б. Стојановић**, Технолошки факултет у Лесковцу, Универзитета у Нишу

e-mail: <ddebeljkovic@yahoo.com>;

Тема: Кабловски вођењи роботски систем као нелинеаран роботски механизам

**Cable suspended parallel robot as nonlinear robotic mechanism**

Аутори: **Др Мирјана Филиповић**, Михаило Пупин институт, Београд

**Љубинко Кевац**, Иновациони центар Електротехничког факултета у Београду

e-mail: <mira@robot.imp.bg.ac.rs>; <ljubinko.kevac@gmail.com>;



Contents lists available at [ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

## International Journal of Non-Linear Mechanics

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/nlm](http://www.elsevier.com/locate/nlm)



### Preface



This Special Issue of IJNM, *A Phenomenological Conspectus on Nonlinear Dynamics*, emphasizes the notion that various and different physical phenomena can often be described by identical or similar mathematical instruments. In this regard, papers from disparate fields have been compiled in the issue.

It is noted that the concepts of Mathematical Phenomenology and Phenomenological Mappings are captured in the works of Professor Mihailo Petrović (1868–1943), a Serbian mathematician who was one of the doctoral students of Jules Henri Poincaré (1854–1912). The specific title of his book in French is *Mecanismes communs aux phénomènes disparates*, Paris 1921. In this book, Petrović studied (among others) certain elements of multi-dimensional geometry, couplings between mechanisms and manifestations of phenomena, quantitative vis-à-vis qualitative images of appearances (phenomena), as well as different kinds of analogies.

It is hoped that this Special Issue comprising papers of different thematic foci will serve to highlight the role of a “phenomenological” perspective for pedagogical and investigative purposes in the field of nonlinear dynamics in physically disparate systems.

*Professor, Special Issue Managing Guest Editor*  
Katica R. (Stevanović) Hedrih  
*Mathematical Institute (SANU) – Belgrade, Serbia*

*Professor, Special Issue Co-Editor*  
Ivan Kosenko  
*Technical University of Radio Techniques – Moscow, Russia*

*Professor, Special Issue Co-Editor*  
Pavel Krasilnikov  
*Moscow Aviation Institute – Moscow, Russia*

*Professor, Editor-in-Chief*  
Pol D. Spanos  
*Rice University – Houston, USA*

### Preface

This Special Issue of IJNM, *A Phenomenological Conspectus on Nonlinear Dynamics*, emphasizes the notion that various and different physical phenomena can often be described by identical or similar mathematical instruments.

In this regard, papers from disparate fields have been compiled in the issue. It is noted that the concepts of Mathematical Phenomenology and Phenomenological Mappings are captured in the works of Professor Mihailo Petrović (1868–1943), a Serbian mathematician who was one of the doctoral students of Jules Henri Poincaré (1854–1912). The specific title of his book in French is *Mecanismes communs aux phénomènes disparates*, Paris 1921. In this book, Petrović studied (among others) certain elements of multi-dimensional geometry, couplings between mechanisms and manifestations of phenomena, quantitative vis-à-vis qualitative images of appearances (phenomena), as well as different kinds of analogies.

It is hoped that this Special Issue comprising papers of different thematic foci will serve to highlight the role of a “phenomenological” perspective for pedagogical and investigative purposes in the field of non-linear dynamics in physically disparate systems.

# INTERNATIONAL JOURNAL OF NON-LINEAR MECHANICS

*Editor-in-Chief*

POL D SPANOS

L. B. Ryon Chair in Engineering, M.S. 321, Rice University, 6100 Main Street, Houston,  
TX 77251-1892, U.S.A.

VOLUME 73

JULY 2015

## CONTENTS

<b>K.R. (Stevanović) Hedrih, I. Kosenko, P. Krasilnikov and P.D. Spanos</b>	1	Preface
<b>K.R. (Stevanović) Hedrih and J.A. Tenreiro Machado</b>	2	Discrete fractional order system vibrations
<b>Anatoly Markeev</b>	12	Stability of an equilibrium position of a pendulum with step parameters
<b>K.R. (Stevanović) Hedrih and J.D. Simonović</b>	18	Structural analogies on systems of deformable bodies coupled with non-linear layers
<b>S. Maćešić, Ž. Čupić, S. Anić and L. Kolar-Anić</b>	25	Autocatalator as the source of instability in the complex non-linear neuroendocrine model
<b>M.P. Lazarević</b>	31	Elements of mathematical phenomenology of self-organization nonlinear dynamical systems: Synergetics and fractional calculus approach
<b>P. Krasil'nikov</b>	43	Fast non-resonance rotations of spacecraft in restricted three body problem with magnetic torques
<b>E.A. Kosjakov and A.A. Tikhonov</b>	51	Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body
<b>A.N. Prokopenya, M.Zh. Minglibayev and B.A. Beketauov</b>	58	Secular perturbations of quasi-elliptic orbits in the restricted three-body problem with variable masses
<b>Olga Kholostova</b>	64	Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances
<b>M.M. Jovanović, J.D. Nikodijević and M.D. Nikodijević</b>	69	Rayleigh-Bénard convection instability in the presence of spatial temperature modulation on both plates
<b>D. Nikodijević and Ž. Stamenković</b>	75	Generalistics of unsteady MHD temperature boundary layer
<b>V.S. Aslanov</b>	85	Chaotic behavior of a body in a resistant medium
<b>D. Milosavljevic, G. Bogdanovic, L. Veljovic, A. Radakovic and M. Lazic</b>	94	Wave propagation in layer with two preferred directions
<b>L. Veljović, A. Radaković, D. Milosavljević and G. Bogdanović</b>	100	Rigid body coupled rotation around two intersecting axes
<b>D.N. Zeković</b>	108	Energy integrals for mechanical systems with nonlinear nonholonomic constraints
<b>I. Atanasovska</b>	114	The mathematical phenomenological mapping in non-linear dynamics of spur gear pair and radial ball bearing due to the variable stiffness
<b>I. Grozdanović, K. Todorović, N. Vasović, N. Burić and N. Trišović</b>	121	Interplay between internal delays and coherent oscillations in delayed coupled noisy excitable systems

Indexed/abstracted in: *Appl. Mech. Rev., Cam. Sci. Abstr., Curr. Cont./Eng. Tech. & Applied Sci., Eng. Ind., Math. R., Mechanics, Res. Alert, Curr. Cont. SCISEARCH Data, SSSA/CISA/IECA/IISMEC, MSCl.*



0020-7462(201507)73:C;1-2

The Elsevier catalogue can now be accessed via the Internet using one of the following addresses:

<http://www.elsevier.com>  
[gopher.elsevier.com](http://gopher.elsevier.com)

ISSN 0020-7462  
73 1-128 (2015)

PRINTED BY POLESTAR WHEATONS LTD, EXETER, UK





Volume 73

July 2015

ISSN 0020-7462

INTERNATIONAL JOURNAL OF

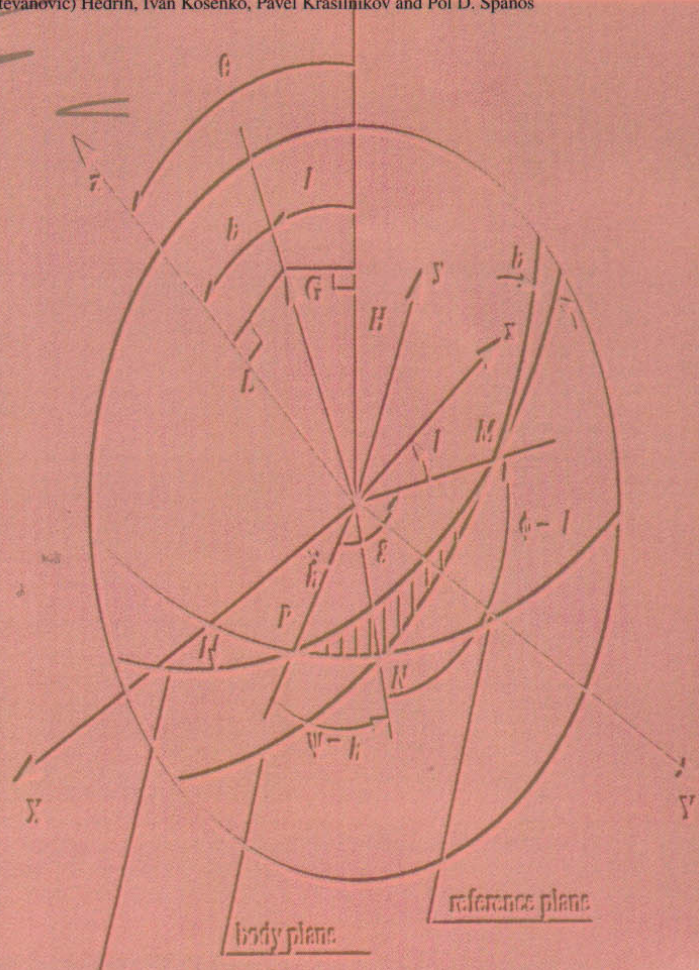
# NON-LINEAR MECHANICS

**SPECIAL ISSUE**  
**ELEMENTS OF MATHEMATICAL PHENOMENOLOGY AND**  
**PHENOMENOLOGICAL MAPPING IN NON-LINEAR DYNAMICS**

Guest Editors

Katica R. (Stevanović) Hedrih, Ivan Kosenko, Pavel Krasilnikov and Pol D. Spanos

Editor-in-Chief  
Pol Spanos



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

**ScienceDirect**



## ELEMENTS OF MATHEMATICAL PHENOMENOLOGY OF SELF-ORGANIZATION NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS- FRACTIONAL CALCULUS AND SYNERGETICS APPROACH

Mihailo P. Lazarević

Department of Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade  
Belgrade, 11120, Serbia, e-mail: mlazarevic@mas.bg.ac.rs,

**Keywords:** Nonlinear systems, Phenomenology, Synergetics, Self-organization, Fractional calculus

### ABSTRACT

The modern dynamical systems of various physical natures, such as natural, social, economic, and technical ones, are complexes of various subsystems. Here, the fundamental basis of nonlinear theory of system's synthesis based on synergetics as well as fractional calculus approach in modern control theory together with its application will be presented. Also, mathematical phenomenology of self-organization of nonlinear dynamical systems have been considered. The difference of synergetic approach from the classical scientific methods is in identification of the fundamental role of self-organization in nonlinear dynamic systems, and it is necessary to keep the conceptual correspondence to the main qualities of self-organization: nonlinearity–open systems–coherence. Russian scientist A.A. Kolesnikov developed a novel synergetic approach based on the ideas of modern mathematics, cybernetics, and synergetics to the synthesis of control systems for nonlinear, multidimensional and multilinked dynamic systems of various natures. The synergetic approach to control theory (synergetic control theory) is a novel nonlinear control method where the nonlinearities of a system are considered in the control design and a systematic design procedures. On the other side, fractional calculus (FC) has a long history of three hundred years, over which a firm theoretical foundation has been established. All fractional operators consider the entire history of the process being considered, thus being able to model the non-local and distributed effects often encountered in natural and technical phenomena and they provide an excellent instrument for description of the memory, heredity, non-locality, self-similarity, and stochasticity of various materials and processes. Fractional dynamics can be encountered in various nonlinear dynamical systems such as visco-elastic materials, electrochemical processes, thermal systems, transmission and acoustics, chaos and fractals, biomechanical systems, and many others. The fractional dynamic systems with nonlinear control represent a relatively new class of applications of the FC which certified the FC as being a fundamental tool in describing the dynamics of complex systems as well as in advanced nonlinear control theory.

**Acknowledgments** The support of the Ministry of Education, Science and Technological Development of the Republic of Serbia through projects TR 35006, 41006 is gratefully acknowledged.

### REFERENCES

- [1] Petrović, M. (1911), *Elements of mathematical phenomenology*, Serbian Royal Academy, Belgrade, pp.789, (in Serbian).
- [2] Fuchs, A. (2013) *Nonlinear Dynamics in Complex Systems Theory and Applications for the Life-, Neuro- and Natural Sciences*, Springer.
- [3] Haken, H. (2004) *Synergetics-Introduction and Advanced Topics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [4] Kolesnikov, (2004), *Synergetics and Control Theory Problems*, Moscow: Physmathlit.
- [5] Oldham, K.B., Spanier, J., (1974), *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York.
- [6] Lazarević, M.P., (2015), „Elements of mathematical phenomenology of self-organization nonlinear dynamical systems: synergetics and fractional calculus approach“, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 73, July 2015, pp. 31-42.

## ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧКЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЈЕ САМООРГАНИЗОВАЊА НЕЛИНЕАРНИХ ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА- ПРИСТУП ПРИМЕНОМ РАЧУНА НЕЦЕЛОГ РЕДА И СИНЕРГИЈСКОГ ПРИСТУПА

**Михаило П. Лазеревић**

Катедра за Механику, Машински факултет, Универзитет у Београду  
Београд, 11120, Србија, e-mail: mlazarevic@mas.bg.ac.rs

**Кључне речи:** Нелинеарни системи, Феноменологија, Синергетика, Самоорганизација, Рачун нецелог реда

Модерни динамички системи су комплексни системи различитих физичких природа, као што су природни, друштвени, економски и технички и који се састоје од различитих подсистема. Основе нелинеарних теорија синтезе система заснованог на синергетици као и фракционом математичком приступу у савременој теорији управљања, заједно са његовом применом ће овде бити представљени. Такође, разматрана је и математичка феноменологија самоорганизовања нелинеарних динамичких система. Разлика синергетског приступа од класичних научних метода огледа се у идентификацији фундаменталне улоге самоорганизовања у нелинеарним динамичким системима, где је неопходно да се задржи концептуално однос према главним одликама самоорганизовања: нелинеарност - отворени систем – кохерентност. Руски научник А.А. Колесников је развио нови синергетски приступ заснован на идејама модерне математике, кибернетике и синергетике, синтезе система управљања за нелинеарне, мултидимензионалне и вишеструко повезане динамичке системе различите природе. Синергетски приступ теорији управљања је нова нелинеарна метода управљања где су нелинеарности система узете у обзир у синтези управљања као и процедуре систематског пројектовања. С друге стране, рачун нецелог реда (РНР) има дугогодишњу историју где је успостављена теоријска основа истог. Све фракциони оператери узимају у обзир целокупну историју процеса који се разматра, чиме је омогућено сада да се моделују нелокални ефекти и ефекти дистрибуције који се често срећу у природним и техничким појавама и они омогућавају на тај начин одличан инструмент за опис меморије, наслеђивања, нелокалности, самосличности, и стохастичности различитих материјала и процеса. Фракциона динамика се може срести у различитим нелинеарним динамичким системима као што су вискоеластични материјали, електрохемијски процеси, термички процеси, акустика, хаос и фрактали, биомеханички системи и многи други. Фракциони динамички системи са нелинеарним управљањем представљају релативно нову класу примена РНР, где је потврђено да РНР представља основно средство у опису динамике сложених система као и формирању напредне нелинеарне теорије управљања.

**Захвалница** Аутор захваљује на исказаној подршци Министарству за образовање, науку и технолошки развој Републике Србије кроз пројекте ТР 35006, 41006.

### РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] Petrović, M. (1911), *Elements of mathematical phenomenology*, Serbian Royal Academy, Belgrade, pp.789, (in Serbian).
- [2] Fuchs, A. (2013) *Nonlinear Dynamics in Complex Systems Theory and Applications for the Life-, Neuro- and Natural Sciences*, Springer.
- [3] Haken, H. (2004) *Synergetics-Introduction and Advanced Topics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [4] Kolesnikov, (2004), *Synergetics and Control Theory Problems*, Moscow: Physmathlit.
- [5] Oldham, K.B., Spanier, J., (1974), *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York.
- [6] Lazarević, M.P., (2015), „Elements of mathematical phenomenology of self-organization nonlinear dynamical systems: synergetics and fractional calculus approach“, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 73, July 2015, pp. 31-42.



## DYNAMICAL BEHAVIOR OF COMPOSITE MATERIALS

**Dragan Milosavljević**

Faculty of Engineering, University of Kragujevac  
34000 Kragujevac, Sestre Janjic 6, Serbia  
e-mail: [dmilos@kg.ac.rs](mailto:dmilos@kg.ac.rs)

**Keywords:** Composites, laminates, fibre reinforced materials, dynamical behavior, slowness curves.

### ABSTRACT

Among the modern structural materials, fibre reinforced materials play very important role. In last few decades there has been made big effort in research of behavior of such materials. The low density, high strength, high stiffness to weight ratio, and remarkably good mechanical behavior, demand studies of such behavior for use in many structural applications. Fibre reinforced materials find applications in many different areas, and their use is increasing in such rapid rate that it is necessary to study static as well as dynamic properties.

In study of fibre reinforced materials two types of non-linearity occur. The first type is referred to as material non-linearity, which is due to non-linearly elastic or plastic behavior, and second type are geometric non-linearity, which occur when changes of structure are significant. Fibre reinforced composite materials are often made on the form of thin layers, called lamina. Structural elements are then formed by stacking the layers to form desired stiffness and strength for specific applications. Different stacking sequences form laminate structures which are often used in applications.

Here we are going to examine in-deep bulk wave propagation as well as guided waves in an layer in which privileged directions are in planes parallel to faces of layer. For composite structures, which are mainly used as lightweight structures, the geometric non-linearity is more important. Dynamic analysis, as more complex than static, is less examined, and here we are going to study such behavior with important numerical results showing main features of wave propagation in laminate structures. Study of theoretical formulations and solutions of governing equations of laminate composite structures constitutes objective of this study.

### REFERENCES

- [1] Reddy, J, N, (2004), *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis*, 2<sup>nd</sup> ed., CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington DC.
- [2] Kennet, B,I,N, (2009), *Seismic wave propagation in stratified media*, Anu E Press

## ДИНАМИЧКО ПОНАШАЊЕ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРИЈАЛА

**Драган Милосављевић**

Факултет инжењерских наука

Универзитет у Крагујевцу  
34000 Крагујевац, Сестре Јањић 6, Србија  
e-mail: [dmilos@kg.ac.rs](mailto:dmilos@kg.ac.rs)

**Кључне речи:** Композити, ламинати, влакнима ојачани материјали, динамичко понашање, криве спорости

### АПСТРАКТ

Међу савременим конструктивним материјалима, влакнима ојачани материјали играју врло важну улогу. У неколико задњих деценија учињен је велики напор у истраживању понашања таквих материјала. Мала густина, велика отпорност, велики однос крутост-тежина, и изузетно добро механичко понашање тражи изучавање теквог понашања за примене у многим конструкцијама. Влакнима ојачани материјали су нашли примену у различитим областима, и њихово коришћење расте тако брзо да је потребно проучавање како статичких тако и динамичких својстава.

При проучавању влакнима ојачаних материјала јављају се два типа нелинеарности. Први тип се односи на материјалну нелинеарност, везану за нелинеарно еластично или пластично понашање, а други тип су геометријске нелинеарности, које настају при великим померањима конструкције. Влакнима ојачани материјали су често направљени у облику танких слојева, који се називају ламинама. Конструктивни елементи се затим формирају спајањем слојева у циљу добијања жељене крутости и отпорности за жељене примене. Различите секвенце спајања чине ламинатне структуре које се често користе у применама.

Овде ћемо да проучимо пропагацију запреминских таласа као и пропагацију вођених таласа у слојевима у којима су привилеговани правци паралелни са странама слоја. За композитне конструкције, које се углавном користе као лаке конструкције, геометријска нелинеарност је важнија. Динамичка анализа, као комплекснија од статичке, је мање истражена, па ћемо овде да проучимо такво понашање са важним нумеричким резултатима који показују главне особине пропагације таласа у ламинатним структурама. Проучавање теоријских формулација и решења основних једначина ламинатних композитних структура представља циљ овог проучавања.

### РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] Reddy, J, N, (2004), *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis*, 2<sup>nd</sup> ed., CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington DC.
- [2] Kennet, B,I,N, (2009), *Seismic wave propagation in stratified media*, Anu E Press



70 година рада Математичког института САНУ  
**Mini-symposium “Non-Linear Dynamics”**  
Математички институт САНУ и Пројекат ОН174001, Београд, 25 мај 2016

## **DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH NONLINEAR NONHOLONOMIC CONSTRAINTS – ENERGY INTEGRAL**

**Dragomir N. Zeković**

University of Belgrade, Faculty of Mechanical Engineering, Kraljice Marije 16, 11120 Belgrade, Serbia  
e-mail: [dzekovic@mas.bg.ac.rs](mailto:dzekovic@mas.bg.ac.rs)

**Key words:** nonlinear, nonholonomic, energy, integral.

### **ABSTRACT**

The paper analyzes energy relations for mechanical systems, whose motion is restricted by nonlinear nonholonomic constraints. On the basis of the corresponding Lagrange's equations, a general law of the change in energy was formulated for mentioned systems, by the help of which it is shown that there are two types of the laws of conservation of energy, depending on the structure of elementary work of the forces of constraint reactions. Also, the condition for existing of the second type of the law of conservation of energy is formulated in the form of the system of partial differential equations. The mentioned theoretical considerations are illustrated by a model of a nonlinear nonholonomic constraint, which consists of two points that are forced to move in such a way that their velocities are perpendicular to each other. The possibility of the existence of the second type of integral is shown within the framework of this model. The same model is used to show the existence of a special form of the first type of energy integral, which is related to the so-called “free motion” of a nonholonomic system.

### **References:**

- [1] Dragomir N. Zeković, Energy Integrals for Mechanical Systems with Nonlinear Nonholonomic Constraints, *Int. J. of Nonlinear Mech.* 73 (2015), pp. 108-113.
- [2] Mušicki Dj., Zeković D., Energy Integrals for the Systems with Nonholonomic Constraints of Arbitrary Form and Origin, *Acta Mech.*, 227 (2016), pp. 467-493.



## **ДИНАМИКА МЕХАНИЧКИХ СИСТЕМА СА НЕЛИНЕАРНИМ НЕХОЛОНОМНИМ ВЕЗАМА - ИНТЕГРАЛ ЕНЕРГИЈЕ**

**Драгомир Н. Зековић**

Универзитет у Београду, Машински факултет, Краљице Марије 16, 11120 Београд, Србија

е-маил: [dzekovic@mas.bg.ac.rs](mailto:dzekovic@mas.bg.ac.rs)

**Кључне речи:** нелинеаран, нехолономан, енергија, интеграл.

### **АПСТРАКТ**

Анализирају се енергијски односи за механичке системе чије је кретање ограничено са нелинеарним нехолономним везама. На основу одговарајућих Лагранжеових једначина формиран је општи закон промене енергије за наведене системе, помоћу кога је показано да постоје два типа закона одржања енергије у зависности од структуре елементарног рада силе реакције веза. Формулисан је и услов за постојање другог типа закона одржања у облику система парцијалних диференцијалних једначина. За илустрацију наведених теоријских разматрања искоришћен је модел нелинеарне нехолономне везе који се састоји од две тачке које су принудјене да се крећу тако да су им брзине управне. У оквиру овога модела показује се могућност егзистенције интеграла другог типа. На истом моделу показује се један специјалан вид егзистенције интеграла енергије првога типа, који се односи на такозвано „слободно кретање“ нехолономног система.

### **Литература:**

- [1] Dragomir N. Zeković, Integrali energije za mehaničke sisteme sa nelinearnim neholonomnim vezama, Int. J. of Nonlinear Mech. 73 (2015), str. 108-113. [na engleskom jeziku]
- [2] Mušicki Dj., Zeković D., Integrali energije za sisteme sa neholonomnim vezama proizvoljnog oblika i porekla, Acta Mech. 227 (2016), str. 467-493. [na engleskom jeziku]

## PRACTICAL AND THEORETICAL ASPECTS OF BIRD-AIRCRAFT IMPACT

Marinko Ugrčić

Economic institute, Belgrade, 11000, Serbia, e-mail: [ugrcicmarinko@gmail.com](mailto:ugrcicmarinko@gmail.com)

**Keywords:** Bird strike, bird modeling, impact simulation, finite element analysis.

### ABSTRACT

**Abstract.** Parts of aircraft construction are intensively vulnerable to damage during flight by bird impact. The theoretical approach and results of numerical simulations of dynamic response of the windshield, wing and engine loaded by the bird impact are presented. The numerical simulation is carried out using FEM method running in the solver ANSYS AUTODYN®. As well, some results of experimental data were given.

## 2 MODELING

### 2.1 Bird modeling

An important step in the bird strike simulation is the development of an "artificial" bird model. The accurate modeling of an "artificial" bird includes the shape and material modeling of the bird. Regarding selection of the soft "artificial" bird material there are different approaches. The wax, foam, emulsions, rubber and gelatin can be chosen. In this work the porous water (homogenous gas-water mixture) was accepted with porosity 30-40% [1,2].

### 2.2 Aircraft construction modeling

One-layer windshield geometry is generated as shell part. Equation of state of accepted glass material, Polycarbonate, is considered to be linear with very small plastic part, so that could treat it like brittle material. A typical wing leading-edge profile consisting of nose box skin, baffle and two side ribs is selected for this purpose. Al-alloy was used for skin and baffles and ribs were designed using Kevlar-epoxy composites [3].

## 3 NUMERICAL SIMULATION AND EXPERIMENTS

There are presented theoretical analysis and results of numerical simulations of dynamic response of the windshield, wing and engine loaded by the bird impact. The focus is given to the validation of the contact pressure, stress and strain and possible damage of mentioned aircraft parts.

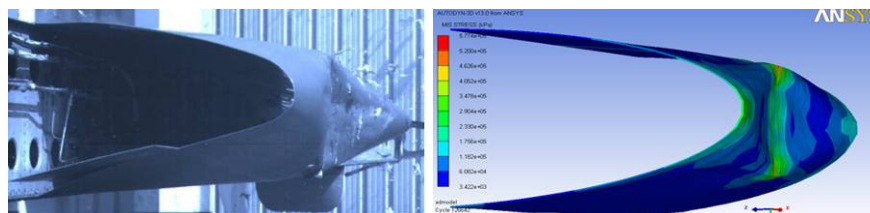


Fig. 1. Comparison of real test and numerical simulation of wing skin deformation (right)

## References

- [1] Iannucci L., (1998), "Bird-strike impact modeling, Seminar Foreign Object Impact and Energy Absorbing Structure", London, England, pp. 11-29.
- [2] Ugrčić M., (2012), "Application of the Hydrodynamic Theory and the Finite Element Method in the Analysis of Bird Strike in a Flat Barrier", Scientific Technical Review, Vol. 62, Num. 3-4, 2012, pp. 28-37.
- [3] Ugrčić M., et al., (2012), "Finite Element Modeling of Wing Bird Strike", FME Transactions, 43, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, DOI:10.5937/FMET1501076U, pp. 82-87.

## ПРАКТИЧНИ И ТЕОРИЈСКИ АСПЕКТИ СУДАРА ПТИЦЕ И ВАЗДУХОПЛОВА

Маринко Угрчић

Економски институт, Београд, 11000, Србија, e-mail: [ugrcicmarinko@gmail.com](mailto:ugrcicmarinko@gmail.com)

**Кључне речи:** удар птице, моделовање птице, симулација удара, метод коначних елемената.

### АПСТРАКТ

Делови конструкције авиона су изложени интензивним оштећењима током лета као последица могућег удара птице. Разматрани су теоријски приступ и резултати нумеричке симулације динамичког одзива ветробранског стакла, крила и погона изложених удару птице. Нумеричка симулација је извршена методом коначних елемената применом нумеричког софтвера ANSYS AUTODYN®. Приказани су и одређени експериментални резултати.

## 2 МОДЕЛОВАЊЕ

### 2.1 Моделовање птице

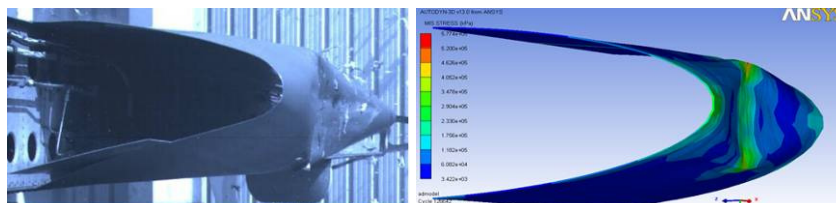
Коректно нумеричко моделовање удара птице у конструкцију летелице укључује дефинисање облика и материјала модела птице. У избору материјала за меко "вештачко" тело птице постоје различити приступи. Тако се, у ту сврху користе восак, пена, емулзије, гума и желатин. У овом раду је коришћена порозна вода (хомогена мешавина гаса и воде), са степеном порозности 30-40% [1,2].

### 2.2 Моделовање делова конструкције летелице

Један слој ветробранског стакла је генерисан као љуска. Једначина стања поликарбонатног стакла је линеарног типа тако да се стакло третира као крти материјал. Нападна ивица профила крила, састављена од кутије чеоног плашта, уздужног ојачања и два бочна ребра, је изабрана за ову анализу. Ал-легура је коришћена за плашт, а ојачања и ребра су дизајнирани применом кевлар-епоксидних композита [3].

## 3 НУМЕРИЧКА СИМУЛАЦИЈА И ЕКСПЕРИМЕНТИ

Представљени су резултати теоријске анализе и нумеричке симулације динамичког одзива ветробранског стакла, крила и погона настали при удару птице. Фокус је стављен на валидацију контактнoг притиска, напона и деформација и могућег оштећења наведених делова конструкције.



Слика 1. Поређење резултата реалног теста и нумеричке симулације деформације оплате крила

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Iannucci L., (1998), "Bird-strike impact modeling, Seminar Foreign Object Impact and Energy Absorbing Structure", London, England, pp. 11-29.
- [2] Ugrčić M., (2012), "Application of the Hydrodynamic Theory and the Finite Element Method in the Analysis of Bird Strike in a Flat Barrier", Scientific Technical Review, Vol. 62, Num. 3-4, 2012, pp. 28-37.
- [3] Ugrčić M., et al., (2012), "Finite Element Modeling of Wing Bird Strike", FME Transactions, 43, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, DOI:10.5937/FMET1501076U, pp. 82-87





## NON-LINEAR OSCILLATIONS OF GYRO-ROTOR THEORY AND SOME EXAMPLES

Ljiljana Veljović

Faculty of Engineering, University of Kragujevac  
34000 Kragujevac, Sestre Janjic 6, Serbia  
e-mail: veljovicljilja@yahoo.co.uk

**Keywords:** Rotor, nonlinear dynamics, phase portrait, mass moment vectors, angle of inclination

### ABSTRACT

Among the basic working parts in machines, rotors play very important role. Gears, axes and other rotating part are widely used in many applications including industrial power transmission systems, wind turbine, automotive transmission, as well as rotor craft. The problem of rotor vibrations has existed for a long time but it is actually still now.

Dynamical model of rotor presented in this paper is heavy rigid disc skew positioned on the self rotating axis. This axis rotates around support shaft with constant angular velocity. The shaft is supported at the both end with rigid bearings. Here are presented two special cases: when the support shaft is vertical and the rotor shaft is horizontal and when the support shaft is inclined to vertical axis for angle  $\alpha$ . In each case axes are without intersection.

Equations of motion are formulated using vector method based on mass moment vectors coupled for pole and oriented axes defined by K. Hedrih. The system has two degrees of mobility and one degree of freedom with one kinematical excitation. For such defined system nonlinear differential equation of the system dynamics in the gravitational field is obtained.

It is easy to obtain the results numerically giving suitable starting conditions and choosing time step. So, numerical analysis of obtained analytical solution is performed through Math Cad and MATLAB.

Series of phase trajectory transformations in relation with changes of angle of inclination of rigid body to a self rigid axis are presented.

### REFERENCES

- [1] Hedrih, (Stevanovic) Katica, (2001), *Vector Method of the Heavy Rotor Kinetic Parameter Analysis and Nonlinear Dynamics*, University of Nis, Monograph, p.252 (In English), YU ISBN 86-7181-046-1.
- [2] Katica (Stevanovic) Hedrih, Ljiljana Veljovic, (2013), *New Vector Description of Kinetic Pressures on Shaft Bearings of a Rigid Body Nonlinear Dynamics with Coupled Rotations around no Intersecting Axes*, Acta Polytechnica Hungarica Vol. 10, No. 7, pp 151-170, ISSN 185-8860
- [3] Ljiljana Veljovic, (2013), *Nelinearne oscilacije giro-rotora*, Doktorska disertacija, Nis, p.250



## НЕЛИНЕАРНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ ГИРОРОТОРА : ТЕОРИЈА И ПРИМЕНЕ

Љиљана Вељовић

Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

34000 Крагујевац, Сестре Јањић 6, Србија

e-mail: [veljovicljilja@yahoo.co.uk](mailto:veljovicljilja@yahoo.co.uk)

**Кључне речи:** Ротор, нелинеарна динамика, фазни портрет, вектори момента масе, угао нагиба

### АПСТРАКТ

Међу основним деловима машина ротори имају веома велики значај. Зупчаници, вратила и други машински елементи који ротирају су веома распрострањени у индустријским трансмисионим системима, турбинама, аутоматским уређајима као и бродовима. Иако се осцилаторна кретања гиро ротор проучавају доста дуго, она су и данас веома актуелна.

Динамички модел ротора који је презентован у овом раду је тежак крути ексцентрично постављен диск који се обрће око осе преносне ротације константном угаоном брзином. Вратило је учвршћено лежиштима. У раду се разматрају два случаја: оса преносне ротације је вертикална док је оса сопствене ротације хоризонтална и случај када је оса преносне ротације нагнута под углом  $\alpha$  у односу на вертикалу. У оба случаја осе су међусобом ортогоналне и међусобно се мимоилазе.

Једначине кретања су добијене применом векторске методе базиране на векторима момента масе дефинисаних у бројним радовима К. Хедрих. Систем има два степена слободе и један степен покретљивости са једном кинематичком побудом, програмираном угаоном брзином преносног кретања. За тако дефинисан систем добијена је нелинеарна диференцијална једначина.

За познате почетне услове као и за одабрани интервал лако се добијају нумерички резултати. Нумеричка анализа извршена је применом програмског пакета Math Cad и MATLAB.

У раду је приказана серија трансформација фазних трајекторија у зависности од угла нагиба тела у односу на осу сопствене ротације.

### РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] Hedrih, (Stevanovic) Katica, (2001), *Vector Method of the Heavy Rotor Kinetic Parameter Analysis and Nonlinear Dynamics*, University of Nis, Monograph, p.252 (In English), YU ISBN 86-7181-046-1.
- [2] Katica (Stevanovic) Hedrih, Ljiljana Veljovic, (2013), *New Vector Description of Kinetic Pressures on Shaft Bearings of a Rigid Body Nonlinear Dynamics with Coupled Rotations around no Intersecting Axes*, Acta Polytechnica Hungarica Vol. 10, No. 7, pp 151-170, ISSN 185-8860
- [3] Ljiljana Veljovic, (2013), *Nelinearne oscilacije giro-rotora*, Doktorska disertacija, Nis, p.250

## NONLINEAR DYNAMICS OF GEAR PAIRS

Ivana D. Atanasovska

Mathematical Institute of SASA – researcher on Project ON174001 (2011-2016)

[iviatanasov@yahoo.com](mailto:iviatanasov@yahoo.com)

**Keywords:** Nonlinear dynamics, contact, gears, numerical methods

### ABSTRACT

A large number of examples, illustrations from nature and history of machines and mechanisms running gear as an inexhaustible source of research in the field of applied mechanics with the simultaneous use of different mathematical methods. Due to its complex geometry and modes of movement and power transmission, gear pairs are real complex mechanical systems on which it is possible to study a large number of non-linear phenomena separately or simultaneously (contact with variable stiffness, vibration, impact, fatigue).

Gear tooth profile could be formed by different curves. But, the most commonly used are gears with involute profile – with tooth profile in form of involute curve – curve which is generated when straight line is rolling without slipping over the circle.

Developing of dynamic model of involute gear pair and calculation of main influential parameters are essential for studying the gears stability [1]. The described dynamic models can be used for the analysis of the gears oscillation parameters, only if all time-varying functions are known. The stiffness and load distribution have been calculated using the developed finite element model. The special attention was paid to define the procedure for time-varying mesh stiffness calculation [2]. The presented research successfully put together numerical methods for stress and strain calculations and numerical iterative methods for differential equations solving. The particular gear pair is chosen for numerical calculation and investigation of dynamics of gears.

A new methodology for analyzing the dynamic behaviour of gear pairs is presented with algorithm which includes all developed procedures for calculation the main gears characteristics [3]. The main influence factors for dynamics of involute cylindrical gears are identified and described. The special attention is paid to influence of addendum modification on gear pairs vibration characteristics. A comparative analysis of spur gears series with different addendum modification coefficient is discussed. The possibilities for optimization of tooth profile characteristics with aspect of low-vibration and stability are shown. The similar analysis is performed for comparative study of spur and helical gear pairs with same geometric characteristics and in the same load conditions.

### REFERENCES

- [1] Atanasovska, I. (2015), “The Mathematical Phenomenological Mapping in Nonlinear Dynamics of Spur Gear Pair and Radial Ball Bearing due to the Variable Stiffness”, *International Journal of Non-linear Mechanics, Elements of mathematical phenomenology and phenomenological mapping in non-linear dynamics*, Edited by Katica R. (Stevanovic) Hedrih, Ivan Kosenko, Pavel Krasilnikov and Pol D. Spanos, Vol. 73, pp. 114-120.
- [2] Atanasovska, I., Vukšić Popović, M. (2013), “Dynamics of Gear-pair Systems with Periodic Varying Mesh Stiffness - Spur Gears VS Helical Gears”, *Series: Scientific Review, Scientific and Engineering - Special Issue - Nonlinear Dynamics S2 (2013)*, Guest Editors: Katica R (Stevanović) Hedrih and Željko Mijajlović, pp. 373-388.
- [3] Atanasovska, I. et al. (2014), “The new methodology for assessment of involute gears stability”, *11<sup>th</sup> International Symposium on Stability, Vibration, and Control of Machines and Structures, SVCS2014*, Belgrade, Serbia, July 3–5, 2014, pp. 285-295.

## НЕЛИНЕАРНА ДИНАМИКА ЗУПЧАСТИХ ПАРОВА

Ивана Д. Атанасовска

Математички институт САНУ – истраживач на Пројекту ОН174001 (2011-2016)

[iviatanasov@yahoo.com](mailto:iviatanasov@yahoo.com)

**Кључне речи:** Нелинеарна динамика, контакт, зупчаници, нумеричке методе прорачуна

### АПСТРАКТ

Велики број примера, илустрација из природе и историје машина и механизма приказују зупчанике као неисцрпни извор истраживања у области примењене механике уз истовремену примену различитих математичких метода. Због своје сложене геометрије и начина преношења кретања и снаге, зупчasti парови су реални сложени механички системи на којима је могуће изучавати велики број нелинеарних феномена одвојено или истовремено (контакт променљиве крутости, вибрације, удар, замор материјала).

Профил зубаца зупчаника може се формирати од различитих кривих. У најширој употреби налазе се еволвентни зупчаници – они код којих профил зубаца представља еволвенту – криву линију која настаје котрљањем без клизања праве по кругу.

Развијање динамичког модела еволвентног зупчастог пара и прорачун утицајних параметара, неопходно је при изучавању стабилности зупчаника [1]. Описани су динамички модели који се могу користити за анализу осцилација зупчаника, али само када су познате све временски променљиве величине. Крутост и расподела оптерећења су због тога одређивани помоћу посебно развијеног модела у методи коначних елемената. Посебна пажња је посвећена дефинисању методологије за одређивање временски променљиве крутости спреге зупчастог пара [2]. Приказана истраживања су успешан спој примене нумеричких метода за одређивање деформационог и напонског стања и нумеричких итеративних метода за решавање диференцијалних једначина. Један конкретан зупчasti пар је изабран за нумерички прорачун и за изучавање динамичког понашања.

Нова методологија за анализу динамичког понашања зупчастих парова приказана је алгоритмом који обухвата нове поступке за праћење основних карактеристика зупчаника [3]. Основни утицајни фактори на динамичко понашање еволвентних цилиндричних зупчаника су идентификовани и описани. Посебна пажња посвећена је изучавању утицаја померања профила на вибрације зупчастог пара. Дискутована је компаративна анализа серије зупчастих парова са различитим коефицијентом померања профила у циљу усвајања оптималног параметра облика зубаца са аспекта смањења амплитуда вибрација и повећања стабилности. Слична анализа приказана је и код поређења параметара динамичког понашања зупчастог пара са правим зупцима и зупчастог пара са косим зупцима.

### LITERATURA

- [1] Atanasovska, I. (2015), “The Mathematical Phenomenological Mapping in Nonlinear Dynamics of Spur Gear Pair and Radial Ball Bearing due to the Variable Stiffness”, *International Journal of Non-linear Mechanics, Elements of mathematical phenomenology and phenomenological mapping in non-linear dynamics*, Edited by Katica R. (Stevanovic) Hedrih, Ivan Kosenko, Pavel Krasilnikov and Pol D. Spanos, Vol. 73, pp. 114-120.
- [2] Atanasovska, I., Vukšić Popović, M. (2013), “Dynamics of Gear-pair Systems with Periodic Varying Mesh Stiffness - Spur Gears VS Helical Gears”, *Series: Scientific Review, Scientific and Engineering - Special Issue - Nonlinear Dynamics S2 (2013)*, Guest Editors: Katica R (Stevanović) Hedrih and Željko Mijajlović, pp. 373-388.
- [3] Atanasovska, I. et al. (2014), “The new methodology for assessment of involute gears stability”, *11<sup>th</sup> International Symposium on Stability, Vibration, and Control of Machines and Structures, SVCS2014*, Belgrade, Serbia, July 3–5, 2014, pp. 285-295.

## THE CRACK ON AN INTERFACE BETWEEN THE TWO MATERIALS

Jelena M. Djoković<sup>1</sup>, Ružica R. Nikolić<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Technical Faculty of Bor, University of Belgrade, Serbia, e-mail: jdjokovic@tf.bor.ac.rs

<sup>2</sup>Faculty of Engineering, University of Kragujevac, Serbia;  
Research Center, University of Žilina, Slovakia, e-mail: ruzicarnikolic@yahoo.com

**Keywords:** Crack, Interface, Mode mixity, Delamination, Coatings.

### ABSTRACT

Many modern materials and material systems are layered, and contain interface. An interface is defined as the surface between the two materials, which has the characteristics of both materials. The interface is a characteristic of layered materials, as well as inhomogeneities, residual stresses and discontinuity of thermal and elastic characteristics. Structural properties of layered materials and systems depend just on the interface. Interfacial fracture mechanics can be applied to a large number of problems in several areas, such as protective coatings, multilayer capacitors, thin film/substrate systems for electronic packages, structural laminated composites of various types and adhesive joints.

Resistance to the interfacial fracture depends on the mixed mode, which represents the ratio of forces for the crack opening and for the sliding ahead of the crack tip. What is characteristic for the interfacial crack in the mixed mode load conditions is the existence of the high probability that the crack would kink out of the interface into one of the materials. The "competition" between the crack kinking and propagation along the interface also includes the material fracture toughness and interface fracture toughness. If there is a crack kinking out of the interface, the in-plane tensile stresses would cause destabilizing of the kinked crack and its further propagation in the material below the interface, i.e., the crack would be moving further away from the interface. On the other hand, the in-plane compressive stresses are stabilizing the kinked crack and are causing it to close.

A crack, that is approaching an interface between the two dissimilar materials, can behave in three different ways: it can arrest (stop propagating), it can deflect into the interface and continue to propagate along it or the crack can penetrate the interface and continue to propagate in the material across it. In this case the energy release rate needed for the crack deflection is compared to the energy release rate needed for the crack penetration of interface.

Depending on the type of loading to which the composite structure is subjected, the failure process can be dynamic. If the interface were already weakened by existence of flaws, they could act as the initiators for the growth of a crack, which, under certain conditions, could propagate unstably along the interface. Such situations lead to necessity of studying the dynamic crack growth at the interface.

In the layers made of different materials, during the environmental temperature change, the thermal stresses can appear as a result of the difference in the thermal expansion coefficients. Those stresses are causing the appearance of an interfacial crack. When such a crack is formed, the energy release rate needed for the crack propagation depends on intensities of stresses in both layers. The driving force of the interfacial fracture in this case is the energy release rate. The crack trajectory is different for different coatings with different fracture resistance, various residual stresses and the like.

### REFERENCES

- [1] Djokovic J. M., R. R. Nikolic, I. M. Miletic, M. M. Mićunovic, (2014), Analysis of the LEFM concept for interfacial cracks application to coating buckling delamination in terms of substrate elastic characteristics, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 52, (1), pp. 61-69,
- [2] He M. -Y. and J. W. Hutchinson (1989a), Kinking of a crack out of an interface, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 270-278.  
He M. -Y. J. W. Hutchinson, (1989b), Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 25, pp. 1053-1065 \* \* \*

## ПРСЛИНА НА ИНТЕРФЕЈСУ ИЗМЕЂУ ДВА МАТЕРИЈАЛА

Јелена М. Ђоковић<sup>1</sup>, Ружица Р. Николић<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Технички факултет у Бору, Универзитет у Београду, Србија, e-mail: jdjokovic@tf.bor.ac.rs  
<sup>2</sup> Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу, Србија  
Research Center, University of Žilina, Slovakia, e-mail: ruzicarnikolic@yahoo.com

**Кључне речи:** Прслина, Интерфејс, Мешовити мод, Раслојавање, Превлаке.

### АПСТРАКТ

Многи модерни материјали и материјални системи су слојевити, односно садрже интерфејс. Интерфејс се дефинише као гранична површина између два материјала која има карактеристике оба материјала. Интерфејс је карактеристика слојевитих материјала, као што су и нехомогености, заостали напони и дисконтинуитет термичких и еластичних карактеристика. Структурне особине слојевитих материјала и система зависе управо од интерфејса. Механика лома интерфејса може да се примени на велики број проблема у више области као што су: заштитне превлаке, вишеслојни кондензатори, системи танак слој/основа за електронске пакете, различити структурни слојевити композити и лепљени спојеви.

Отпор лому интерфејса зависи од мешовитог мода који представља однос сила отварања и клизања испред врха прслине. Оно што је карактеристично за прслину на интерфејсу у условима мешовитог мода оптерећења је да постоји велика вероватноћа да ће прслина да скрене са интерфејса у један од материјала. "Такмичење" између скретања и ширења прслине дуж интерфејса укључује жилавост лома материјала и жилавост лома интерфејса. Ако постоји скретање прслине са интерфејса, равански затежући напони, условиће дестабилизацију интерфејсне прслине и њено даље скретање у материјал испод интерфејса и удаљавање од њега. С друге стране, равански притискујући напони стабилизују интерфејсну прслину и доводе до затварања прслине која је скренула са интерфејса.

Прслина која се приближава интерфејсу између два различита материјала може да се понаша тројако: може да се заустави при контакту са интерфејсом (да престане да се шири); може да настави да се шири преко интерфејса или може да скрене у интерфејс. У овом случају пореди се брзина ослобађања енергије за скретање прслине у интерфејс са брзином ослобођања енергије за прелажење преко интерфејса.

Зависно од природе оптерећења коме је изложена композитна структура, процес разарања може да се одвија и динамички. Ако је интерфејс већ ослабљен постојањем грешака, оне могу да послуже као иницијатори прслине која може, под одговарајућим околностима, да пропагира нестабилно дуж интерфејса. Такве ситуације доводе до потребе анализирања динамичког раста прслине на интерфејсу.

У слојевима од различитих материјала приликом промене температуре околине настају термички напони као резултат разлике у коефицијентима топлотног ширења. Ови напони условљавају појаву прслине на интерфејсу. Када се ова прслина формира, покретачка сила раста прслине зависи од интензитета напона у оба слоја. Покретачка сила интерфејсног лома у овом случају је брзина ослобађања енергије. Путања прслине је различита за различите превлаке са различитом отпорношћу на лом, различитим заосталим напонима и слично.

\* \* \*

- [3] Hutchinson, J. W. and Z. Suo (1992), Mixed mode cracking in layered materials, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. **29**, pp. 63-191.
- [4] Nikolic R. R. and J. M. Djokovic, (2012), The LEFM Concept for Interfacial Cracks Application to the Problem of Coating Delamination on Cylindrical Substrates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **79** (3), pp. 031005-1 - 031005-7.
- [5] Nikolic R. R., J. M. Djokovic and M. V. Mićunović, (2010), The Competition Between the Crack Kinking Away From the Interface and Crack Propagation Along the Interface in Elastic Bicrystals, *International Journal of Fracture*, Vol. **164** (1), pp. 73-82.
- [6] Rice, J. R., (1988), Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **55**, pp. 98 -103.
- [7] Suo Z. and J. W. Hutchinson, (1990), Interface crack between two elastic layers, *International Journal of Fracture*, Vol. **43**, pp. 1-18
- [8] Yang, W., Z. Suo and C.F. Shih, (1991), Mechanics of dynamic debonding, *Proceedings of the Royal Society A, London*, Vol. **433**, pp. 679-697.
- [9] Djoković, J. M. I. R. Nikolić (2015), Mehanika loma interfejsa izmedju dva materijala, DIVK, Beograd.

## VIBRO-IMPACT SYSTEM DYNAMICS

**Srdjan Jovic**

Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica, University of Priština  
Ul. Kralja Petra I br. 149/12, Kosovska Mitrovica, Serbia, e-mail: [jovic003@gmail.com](mailto:jovic003@gmail.com)

**Keywords:** Vibro-impact dynamics, Amontons-Coulomb’s type friction force, kinetic parameter analysis, singular point, energy transfer, heavy mass particle, phase trajectory branches, bifurcation of equilibrium position, graphical presentation, representative point...

### ABSTRACT

In this paper poses an original methodology of the analysis of the dynamics of one class of vibro-impact systems based on oscillators with curvilinear routes and stationary non-ideal constraints. Beginning with integrated theoretical basis (Theory of impacts and collision of bodies, Phase plane method applied to nonlinear system dynamics, Dynamics of heavy mass particle motion along curvilinear rough lines-parabola, cycloid, circle, ellipsoid), along diverse visualizations, a new methodology base is posed, easily applicable for further scientific research and new classes of vibro-impact dynamics, as well as for the use in engineering practice for the analysis of real vibro-impact system dynamics, whose abstraction leads to one of the studied vibro-impact dynamics models. Although this methodology is presented using several examples, it becomes significant, like algorithm, which easily leads to analysis of kinetic parameters of vibro-impact dynamic system with one or more degrees of freedom of motion. This paper was compiled as a result of its authors having selected, systematized and applied one part of the new, authentic research results, which they attained through their individual research work, within scientific research projects (project ОИ144002 (2006-2010) and project ОИ174001 (2011-2016) coordinated through Mathematical Institute of Serbian Academy of Sciences and Arts and supported by Ministry of science of Republic of Serbia; whereby modern information technology (software tools – software package programmes MathCad, MATLAB, Wolfram mathematica) is used for graphic visualization of vibro-impact dynamics.

### REFERENCES

- [1] Babickii V. I.: Theory of vibro-impact systems, Moskva, "Nauka", 1978. (in Russian).
- [2] Hedrih (Stevanović) K., Vibrations of a Heavy Mass Particle Moving along a Rough Line with Friction of Coulomb Type, ©Freund Publishing House Ltd., International Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation ISSN: 1565-1339, Volume 11, NO.3, pp.203-210, 2010.
- [3] Hedrih (Stevanović) K., Free and forced vibration of the heavy material particle along line with friction: Direct and inverse task of the theory of vibrorheology, 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, J. Ambrósio et.al. (eds.), Lisbon, Portugal, September 7-11, 2009, CD –MS-24, Paper 348, pp. 1-20.
- [4] Hedrih (Stevanović) K., Raičević V., Jović S., Vibro-impact of a Heavy Mass Particle Moving along a Rough Circle with Two Impact Limiters, ©Freund Publishing House Ltd., International Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation ISSN: 1565-1339, Volume 11, NO.3, pp.211-224, 2010.
- [5] Hedrih (Stevanović) K., Raičević V., Jović S., Phase Trajectory Portrait of the Vibro-impact Forced Dynamics of Two Mass Particles along Rough Circle, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation ISSN: 1007-5704, [Volume 16, Issue 12](#), December 2011, Pages 4745-4755.
- [6] Jović S., Raičević V., Vibro-impact system based on oscillator, with three heavy mass particles moving along a rough circle, ©Freund Publishing House Ltd. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation ISSN: 1565-1339, IJNSNS ID-K01- 2010., Volume 12, NO.1, pp.63-82, 2011.
- [7] Jović S., Raičević V., Vibro-impact forced oscillations of a heavy mass particle along a rough circle excited by a single-frequency force, Acta Mechanica, ISSN: 0001-5970, Volume 223, Number 6, pp. 1153-1168, June 2012. DOI: 10.1007/s00707-012-0623-2v.
- [8] Jović S., Raičević V., The phase portrait of the vibro-impact dynamics of two mass particle motions along rough circle, Kaunas University of Technology, Scientific Journal "MECHANIKA", 2012 Nr 18(6), Article ID-No 526, pp. 657-665, ISSN 1392 - 1207, 2012.

## ДИНАМИКА ВИБРОУДАРНИХ СИСТЕМА

Срђан Јовић

Факултет техничких наука, Косовска Митровица, Универзитет у Приштини  
Ул. Краља Петра I бр. 149/12, Косовска Митровица, Србија, е-маил: [jovic003@gmail.com](mailto:jovic003@gmail.com)

**Кључне речи:** Виброударна динамика, Amontons-Coulomb-ова сила трења, анализа кинетичких параметара, сингуларна тачка, енергијска анализа, тешка материјална тачка, фазна трајекторија, алтернација смера силе трења, графичка презентација, репрезентативна тачка...

### РЕЗИМЕ

У овој раду је постављена оригинална методологија анализе динамике једне класе виброударних система на бази осцилатора са криволинијским путањама и стационарним неидеалним везама. Почевши од интегрисаних теоријских основа, као кроз различите визуелизације постављена је нова основа методологије лако применљиве за даља научна истраживања и нових класа виброударних динамика, као и за примене у инжењерској пракси за анализу динамике реалних виброударних система, чија апстракција води ка неком од проучених модела виброударне динамике. Иако је ова методологија, приказана кроз више примера, она добија на значају и као алгоритам, који олакшано води анализи кинетичких параметара виброударне динамике система са једним и више степени слободе кретања. Рад је настао тако што су њени аутори издвојили, систематизовали и употребили један део нових аутентичних истраживачких резултата, до којих су дошли у својим истраживањима у оквиру научно истраживачких пројеката (пројекат ОИ144002 (2006-2010) и пројекат ОИ174001 (2011-2016)), и при томе се користе нове информатичке технологије (софтверски алати - програми из софтверских пакета MathCad-а, MATLAB-а, Wolfram mathematica) за графичку визуелизацију виброударне динамике.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Babickii V. I.: Theory of vibro-impact systems, Moskva, "Nauka", 1978. (in Russian).
- [2] Hedrih (Stevanović) K., Vibrations of a Heavy Mass Particle Moving along a Rough Line with Friction of Coulomb Type, ©Freund Publishing House Ltd., International Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation ISSN: 1565-1339, Volume 11, NO.3, pp.203-210, 2010.
- [3] Hedrih (Stevanović) K., Free and forced vibration of the heavy material particle along line with friction: Direct and inverse task of the theory of vibrorheology, 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, J. Ambrósio et.al. (eds.), Lisbon, Portugal, September 7-11, 2009, CD –MS-24, Paper 348, pp. 1-20.
- [4] Hedrih (Stevanović) K., Raičević V., Jović S., Vibro-impact of a Heavy Mass Particle Moving along a Rough Circle with Two Impact Limiters, ©Freund Publishing House Ltd., International Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation ISSN: 1565-1339, Volume 11, NO.3, pp.211-224, 2010.
- [5] Hedrih (Stevanović) K., Raičević V., Jović S., Phase Trajectory Portrait of the Vibro-impact Forced Dynamics of Two Mass Particles along Rough Circle, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation ISSN: 1007-5704, [Volume 16, Issue 12](#), December 2011, Pages 4745-4755.
- [6] Jović S., Raičević V., Vibro-impact system based on oscillator, with three heavy mass particles moving along a rough circle, ©Freund Publishing House Ltd. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation ISSN: 1565-1339, IJNSNS ID-K01- 2010., Volume 12, NO.1, pp.63-82, 2011.
- [7] Jović S., Raičević V., Vibro-impact forced oscillations of a heavy mass particle along a rough circle excited by a single-frequency force, Acta Mechanica, ISSN: 0001-5970, Volume 223, Number 6, pp. 1153-1168, June 2012. DOI: 10.1007/s00707-012-0623-2v.
- [8] Jović S., Raičević V., The phase portrait of the vibro-impact dynamics of two mass particle motions along rough circle, Kaunas University of Technology, Scientific Journal "MECHANIKA", 2012 Nr 18(6), Article ID-No 526, pp. 657-665, ISSN 1392 - 1207, 2012.



## THERMAL BUCKLING ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED PLATE ACCORDING TO HIGH ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

Gordana M. Bogdanović<sup>1</sup>, Dragan V. Čukanović<sup>2</sup> and Aleksandar B. Radaković<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Engineering, University of Kragujevac, 34000 Kragujevac, Serbia  
e-mail: [gocab@kg.ac.rs](mailto:gocab@kg.ac.rs)

<sup>2</sup>Faculty of Technical Sciences, University of Priština, 38220 Kosovska Mitrovica, Serbia  
e-mail: [dragan.cukanovic@pr.ac.rs](mailto:dragan.cukanovic@pr.ac.rs)

<sup>3</sup>State University of Novi Pazar, 36300 Novi Pazar, Serbia  
e-mail: [aradakovic@np.ac.rs](mailto:aradakovic@np.ac.rs)

**Keywords:** thermal buckling, von Karman nonlinear theory, shape function, high order shear deformation theory

### ABSTRACT

A comparative thermal buckling analysis of functionally graded thick square and rectangular plates with and without the Winkler–Pasternak type of elastic foundation is presented. Mechanical and thermal properties of the functionally graded material, except Poisson's ratio, are assumed to vary continuously through the thickness of the plate according to a power-law distribution of the metal and ceramic volume fractions. Formulations of equilibrium and stability equations are based on high order shear deformation theory including different type of shape function as well as von Karman type of nonlinearity with the plate–foundation interaction and thermal effects. An analytical method for determination of critical buckling temperature for uniform increase of temperature, linear and nonlinear change of temperature across thickness of plate is developed. Numerical results were obtained in Matlab software using combinations of symbolic and numeric values. Comparative results of critical buckling temperature for different type of shape functions are presented. The accuracy of the presented formulation and obtained numerical results is verified by comparing the results available in the literature. The effects of the foundation stiffness, power-law index and temperature gradient on mechanical responses of the plates are discussed and appropriate conclusions are given.

### REFERENCES

- [1] Praveen, G. N., Reddy, J. N., (1998) "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates," *Int J Solids Struct.*, vol. 35, pp. 4457–4476.
- [2] Matsunaga, H. (2009) "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory," *Compos. Struct.*, vol. 90, no. 1, pp. 76–86.
- [3] Akavci, S. S. (2014) "Thermal buckling analysis of functionally graded plates on an elastic foundation according to a hyperbolic shear deformation theory," *Mech Compos Mater*, vol. 50, no. 2, pp. 197–212.
- [4] Bodaghi M., Saidi A. R., (2011) "Thermoelastic buckling behavior of thick functionally graded rectangular plates," *Arch. of Appl. Mech.*, vol. 18, no. 11, pp. 1555–1572.
- [5] Zenkour, A. M., Shoby, M. (2011) "Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory," *J. Thermal Stresses*, vol. 34, no. 11, pp. 1119–1138.

## ТЕРМИЧКО ИЗВИЈАЊЕ ФУНКЦИОНАЛНО ГРАДИЈЕНТНЕ ПЛОЧЕ ПРИМЕНОМ СМИЦАЈНЕ ДЕФОРМАЦИОНЕ ТЕОРИЈЕ ВИШЕГ РЕДА

Гордана М. Богдановић<sup>1</sup>, Драган В. Чукановић<sup>2</sup> и Александар Б. Радаковић<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу, 34000 Крагујевац, Србија  
е-маил: [gocab@kg.ac.rs](mailto:gocab@kg.ac.rs)

<sup>2</sup>Факултет техничких наука, Универзитет у Приштини, 38220 Косовска Митровица, Србија  
е-маил: [dragan.cukanovic@pr.ac.rs](mailto:dragan.cukanovic@pr.ac.rs)

<sup>3</sup>Државни универзитет у Новом Пазару, 36300 Нови Пазар, Србија  
е-маил: [aradakovic@np.ac.rs](mailto:aradakovic@np.ac.rs)

**Кључне речи:** термичко извијање, вон Карманова нелинеарна теорија, функције облика, смицајна деформациона теорија вишег реда.

### АПСТРАКТ

Представљена је упоредна анализа термичког извијања функционално градијентне квадратне и правоугаоне плоче са и без Винклер-Пастернак типа еластичне подлоге. Механичке и термичке карактеристике функционално градијентног материјала, изузев Поасоновог коефицијента, претпостављено је да се мењају континуално у правцу дебљине плоче у складу са законом који представља функцију запреминског удела метал/керамика конституената. Формулација једначина равнотеже и стабилности заснива се на смицајној деформационој теорији вишег реда укључујући различит тип функције облика као и вон Карманов тип нелинеарности са плоча-подлога интеракцијом и термичким ефектом. Аналитичка метода за одређивање критичне температуре извијања за уједначен пораст температуре, линеарни и нелинеарни раст у правцу дебљине плоче је развијен. Нумерички резултати су добијени у софтверу Матлаб коришћењем комбинације симболичких и нумеричких вредности. Представљени су упоредни резултати за критичну температуру извијања за различите типове функције облика. Тачност представљене формулације и добијених резултата верификована је поређењем са резултатима доступним у литератури. Утицај крутости еластичне подлоге, индекса удела метал/керамика конституената, као и температурног градијента на механички одзив плоче је дискутован и изнети су одговарајући закључци.

### РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] Praveen, G. N., Reddy, J. N., (1998) "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates," *Int J Solids Struct*, vol. 35, pp. 4457–4476.
- [2] Matsunaga, H. (2009) "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory," *Compos. Struct.*, vol. 90, no. 1, pp. 76-86.
- [3] Akavci, S. S. (2014) "Thermal buckling analysis of functionally graded plates on an elastic foundation according to a hyperbolic shear deformation theory," *Mech Compos Mater*, vol. 50, no. 2, pp. 197-212.
- [4] Bodaghi M., Saidi A. R., (2011) "Thermoelastic buckling behavior of thick functionally graded rectangular plates," *Arch. of Appl. Mech.*, vol. 18, no. 11, pp. 1555-1572.
- [5] Zenkour, A. M., Shoby, M. (2011) "Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory," *J. Thermal Stresses*, vol. 34, no. 11, pp. 1119-1138.

## RESEARCH METHODOLOGIES IN REPRODUCTIVE BIOMECHANICS

**Andjelka N. Hedrih**

Department of Biomedical science  
State University of Novi Pazar, Novi Pazar, 36 300, Serbia  
e-mail: handjelka@hm.co.rs

**Keywords:** Reproductive Biomechanics, Biomechanical Models, Reproductive Cells, Birth, Spermiogenesis, Sperm Motility Models, Continuum Method, Oscillatory Models

### ABSTRACT

Human reproduction continues to fascinate researches with mechanisms involved in process of creation of new being as well with dynamics of these processes of which some are still not examined enough. Reproductive biomechanics include, but are not limited to, a wide area from micro (cellular level) to macro scale, as well as different hormonal oscillatory processes in both genders. Each phase of reproductive process is a unique challenge for modeling biomechanical behavior. Due to specificity of the processes in each phase, approaches in solving biomechanical problems are different. We highlight some specific areas of research like sperm motility biomechanics, contact biomechanics of reproductive cells, fertilization biomechanics on macro level with gender specifics, embryo growth biomechanics, uterus birth biomechanics, vaginal childbirth biomechanics, biomechanical models of pathological processes like erectile dysfunction. All of them use different methodologies and approaches: finite element analysis, method of discrete continuum, theory of oscillations in chain systems, fluid and structural mechanics, theory of chaos, atomic force microscopy measurements, resistive force theory, fluid mechanical model based on immersed boundary method...Different methodological approaches for these reproductive research problems will be discussed. A new, innovative approach in the study of biomechanics of sperm cell shape transformation process-spermiogenesis that occur during sperm maturation will be proposed and discussed.

### REFERENCES

- [1] Udelson, D. (2007) “Biomechanics of male erectile function,” *J. R. Soc. Interface* 4, pp. 1031–1047.
- [2] Gaffney, E.A., Gadelha, H., Smith, D.J., Blake, J.R. and Kirkman-Brown, J.C. (2011). “Mammalian Sperm Motility: Observation and Theory,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* 43, pp. 501–28.
- [3] M.P. Curtis J.C.Kirkman-Brown b,c, T.J.Connolly, E.A.Gaffney. “Modelling a tethered mammalian sperm cell undergoing hyperactivation,” *Journal of Theoretical Biology* 309 (2012) 1–10.
- [4] Hedrih, A., and Ugrcic, M. (2012). “Vibrational properties characterization of mouse embryo during microinjection,” *Theor. App. Mech.*, 40:(S1), 189-202. UDC 519.673:531:01. doi:10.2298/TAM1301189H
- [5] Buttin, R., Zara, F., Shariat, B., Redarce, T., Grangé, G. (2013) “Biomechanical simulation of the fetal descent without imposed theoretical trajectory,” *Comput Methods Programs Biomed.* 111(2), pp. 389-401.
- [6] Hsiao WW, Liao HS, Lin HH, Ding RF Huang KY & Chang CS. (2013). “Motility Measurement of a Mouse Sperm by Atomic Force Microscopy,” *Analt Sci* 29:3-8.
- [7] Hedrih, A., Lazarevic, M., Mitrovic-Jovanovic, A. (2015). “Influence of sperm impact angle on successful fertilization through mZP oscillatory spherical net model,” *Computers in Biology and Medicine* 59, pp. 19–29.
- [8] Hedrih, A. and Banic, M. (2016). “The effect of friction and impact angle on the spermatozoa - oocyte local contact dynamics,” *Journal of Theoretical Biology.* *Journal of Theoretical Biology* 393, pp. 32–42.

## МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА РЕПРОДУКТИВНЕ БИОМЕХАНИКЕ

**А. Хедрих**

Департман за Биомедицинске науке, Државни Универзитет у Новом Пазару  
Нови Пазар, 36 300, Србија, е-маил: handjelka@hm.co.rs

**Кључне речи:** Репродуктивна Биомеханика, Биомехнички Модели, Гамети, Порођај, Спермиогенеза, Модели Кретања Сперматозооида, Метод Континуума, Осцилаторни Модели

### АПСТРАКТ

Хумана репродукција и даље фасцинира истраживаче не само због механизма укључених у настанак нове јединке већ и због динамике самих процеса од којих су неки још увек недовољно проучени. Репродуктивна биомеханика обухвата широку област од микро (ћелијског) до макро нивоа као и различите хормонске осцилаторне процесе код јединки оба пола. Свака од фаза у процесу репродукције је посебан изазов за биомеханичко моделовање. С обзиром на специфичности природе процеса сваке фазе приступи у решавању биомеханичких проблема су различити. Издвајамо посебне области истраживања: механику кретања сперматозооида, биомеханику контакта репродуктивних ћелија, биомеханику оплодње на макро нивоу која са полним специфичностима, биомеханику раста ембриона, биомеханику контракција утеруса при порођају, биомеханику проласка плода кроз порођајне канале, моделе патолошких процеса као што је ерекцилна дисфункција. Свака од наведених области користи различиту методологију и приступе: методу коначних елемената, методу дискретног континуума, теорију осцилација у ланчаним системима, методолошки приступ структурне механике и механике флуида, теорију хаоса, мерења атомских сила посредством микроскопа, теорију отпорних сила, методу интеракције флуида и чврстог тела засноване на методи граничних елемената и другим комбинацијама научних метода. Биће укратко изложени различити методолошки приступи наведених биомеханичких феномена у репродуктивној медицини као и нов иновативни приступ за динамику спермиогенезе- трансформација облика сперматозооида у процесу сазревања.

### РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] Udelson, D. (2007) Biomechanics of male erectile function. *J. R. Soc. Interface* 4, pp. 1031–1047.
- [2] Gaffney, E.A., Gadelha, H., Smith, D.J., Blake, J.R. and Kirkman-Brown, J.C. (2011). “Mammalian Sperm Motility: Observation and Theory,” *Annu. Rev. Fluid Mech.* 43, pp. 501–28.
- [3] M.P. Curtis J.C.Kirkman-Brown b,c, T.J.Connolly, E.A.Gaffney. Modelling a tethered mammalian sperm cell undergoing hyperactivation. *Journal of Theoretical Biology* 309 (2012) 1–10.
- [4] Hedrih, A., and Ugrecic, M. (2012). Vibrational properties characterization of mouse embryo during microinjection. *Theor. App. Mech.*, 40:(S1), 189-202. UDC 519.673:531:01. doi:10.2298/TAM1301189H
- [5] Buttin, R., Zara, F., Shariat, B., Redarce, T., Grangé, G. (2013) Biomechanical simulation of the fetal descent without imposed theoretical trajectory. *Comput Methods Programs Biomed.* 111(2), pp. 389-401.
- [6] Hsiao WW, Liao HS, Lin HH, Ding RF Huang KY & Chang CS. (2013). Motility Measurement of a Mouse Sperm by Atomic Force Microscopy. *Analt Sci* 29:3-8.
- [7] Hedrih, A., Lazarevic, M., Mitrovic-Jovanovic, A. (2015). Influence of sperm impact angle on successful fertilization through mZP oscillatory spherical net model. *Computers in Biology and Medicine* 59, pp. 19–29.
- [8] Hedrih, A. and Banic, M. (2016). The effect of friction and impact angle on the spermatozoa - oocyte local contact dynamics. *Journal of Theoretical Biology. Journal of Theoretical Biology* 393, pp. 32–42.



## VIBRATION AND STABILITY OF NANOSTRUCTURES: MATHEMATICAL MODELS AND APPLICATIONS

**Milan S. Cajic**

Department of Mechanics, Mathematical institute of the SASA  
University of Belgrade, 11001 Belgrade, Serbia  
e-mail: mcajic@mi.sanu.ac.rs

**Keywords:** vibration, nanostructures, stability, nonlocal elasticity, viscoelasticity

### ABSTRACT

Here, we will present recent results in the field of vibration and stability analysis of nanostructures like nanorods, nanobeams and nanoplates. Systems with one and more nanostructures embedded in the elastic/viscoelastic medium are modeled via nonlocal elasticity and viscoelasticity and using corresponding displacement field and linear deformation-displacement relations. Motion equations are derived using D’Alambert’s principle and shown as functions of displacement and corresponding parameters of the system. Influences of nonlocal parameter, parameters of elastic/viscoelastic medium, and structural parameters of nanostructures on natural frequencies of the system and time response are shown on several numerical examples.

### 2 NONLOCAL MODELS OF NANOSTRUCTURES

Nanostructures such as nanorods, nanobeams and nanoplates are widely used in modern nano-electromechanical, nano-optomechanical and other nano devices. Difficulties in performing experiments on nano-scale and limitations of atomistic methods to nanostructures with small number of atoms brings in the foreground the continuum based methods and their modifications for the analysis of complex nanostructure systems. Nonlocal theory of Eringen [1] is a modification of classical continuum theory where the basic assumption is that the stress at a point of an elastic body is not a function of strain only at that point but also depends on strains at all other points of that body. Latter, that theory is applied for the analysis of vibration and stability of complex nanostructure based systems as well as nanostructures subjected to the influence of magnetic and temperature fields [2]. Here, we will summarize recent results in the field of vibration and stability analysis of complex nanorod, nanobeam and nanoplate based systems [2, 3]. Systems with single or multiple elastica/viscoelastic coupled nanostructures representing carbon nanotubes or graphene sheets embedded in a polymer matrix are modeled using theories of nonlocal elasticity and classical or fractional viscoelasticity and corresponding beam or plate theories. Motion equations are derived via D’Alambert’s principle and shown in terms of displacement and system parameters. Validation study and influences of nonlocal parameter, parameters of elastic/viscoelastic medium and other system parameters on frequencies and time response of the system are shown through several numerical examples.

### REFERENCES

- [1] Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics*, 54(9), 4703-4710.
- [2] Karlicic, D., Murmu, T., Adhikari, S., & McCarthy, M. (2015). *Non-local Structural Mechanics*. John Wiley & Sons.
- [3] Cajic, M., Karličić, D., & Lazarević, M. Damped vibration of a nonlocal nanobeam resting on viscoelastic foundation: fractional derivative model with two retardation times and fractional parameters. *Meccanica*, 1-20.

## ОСЦИЛАЦИЈЕ И СТАБИЛНОСТ НАНОСТРУКТУРА: МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ И ПРИМЕНЕ

Милан С. Цајић

Одељење за механику, Математички институт САНУ  
Универзитет у Београду, 11001 Београд, Србија, е-маил: mcajic@mi.sanu.ac.rs

**Кључне речи:** осцилације, наноструктуре, стабилност, нелокална еластичност, вискоеластичност

### АПСТРАКТ

Овде ће бити приказани недавни резултати из области анализе осцилација и стабилности наноструктура као што су наноштапови, наногреде и наноплоче. Системи са једном или више наноструктура које се налазе у средини са еластичним/вискоеластичним својствима, моделирани су применом конститутивних релација нелокалне еластичности и вискоеластичности и одговарајућих поља померања и линеарних веза између деформација и померања. Једначине кретања система су изведене применом Даламберовог принципа и приказане у функцији померања и одговарајућих параметара система. Утицаји нелокалног параметра, параметара еластичне/вискоеластичне средине и крутости или структурног пригушења на природне фреквенције система или временски одзив система приказани су на неколико нумеричких примера.

### 2 НЕЛОКАЛНИ МОДЕЛИ НАНОСТРУКТУРА

Наноструктуре као што су наноштапови, наногреде и наноплоче су широко примењени у савременим нано-електромеханичким, нано-оптомеханичким и другим нано уређајима. Потешкоће у извођењу експеримената на нано скали и ограничења атомистичких метода симулације на системе са мањим бројем атома доводе у први план континуум методе и њихове модификације у сврху анализе сложених система наноструктура. Нелокална теорија еластичности Ерингена [1] је модификација класичне континуум теорије где је основна претпоставка да напон у некој тачки тела није функција деформације само у тој тачки већ зависи и од деформације у свим осталим тачкама тог тела. Касније је та теорија примењена за анализу осцилација и стабилности сложених система наноструктура као и наноструктура под утицајем магнетног или температурног поља [2]. Овде ће бити сумирани недавни резултати у области анализе осцилација и стабилности сложених система наноштапова, наногреда и наноплоча [2, 3]. Системи са једним или више еластично/вискоеластично спрегнутих наноструктура које представљају системе угљеничних наноцеви или графена у некој полимерној средини моделиране су применом теорије нелокалне еластичности и класичне или фракционе вискоеластичности и одговарајућих теорија греда и плоча. Једначине кретања система су изведене применом Даламберовог принципа и приказане у функцији померања и одговарајућих параметара система. Валидација резултата и утицаји нелокалног параметра, параметара еластичне/вискоеластичне средине и осталих параметара система на фреквенције или временски одзив система приказани су на неколико нумеричких примера.

### РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics*, 54(9), 4703-4710.
- [2] Karlicic, D., Murmu, T., Adhikari, S., & McCarthy, M. (2015). *Non-local Structural Mechanics*. John Wiley & Sons.
- [3] Cajić, M., Karličić, D., & Lazarević, M. Damped vibration of a nonlocal nanobeam resting on viscoelastic foundation: fractional derivative model with two retardation times and fractional parameters. *Meccanica*, 1-20.

## FINITE-TIME STABILITY CRITERIA FOR UNCERTAIN CONTINUOUS-TIME SYSTEMS WITH TIME-VARYING DELAY

Sreten B. Stojanovic<sup>1</sup>, Dragutim L.J. Debeljkovic<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Technology, University of Nis, Leskovac, 16000, Serbia  
e-mail: sstojanovic@tf.ni.ac.rs, web page: <http://www.tf.ni.ac.rs/>

<sup>2</sup>Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade,  
Belgrade, 11120, Serbia

**Keywords:** Finite-time stability, Uncertain continuous-time systems, Time-varying delay systems, Linear matrix inequality.

### ABSTRACT

The most of existing literature related to stability systems is focused on Lyapunov asymptotic stability, which is defined over an infinite time interval. However, often, this stability concept is insufficient for practical purposes, because there are some real systems whose state variables, during the transient period, must not exceed a certain value when the upper bound of initial condition is given. In such cases, new concept of finite-time stability (FTS) is introduced. Recently, the concept of FTS is applied to various systems, such as time-delay systems, nonlinear systems, systems with parametric uncertainties, neural network systems, fuzzy systems, switched systems, etc.

Time-delay, which is a common phenomenon encountered in various engineering systems (chemical systems, electrical networks, large-scale systems, and long transmission lines) is known to be great sources of poor performance and instability of systems. The concept of finite-time stability can be also applied to time-delay systems. In many practical systems, time delay is not constant but time-varying.

Other important factors causing poor performance of practical systems are nonlinear perturbations and parameter uncertainties of systems. To the best of the authors' knowledge, the FTS problem for the mentioned classes of the systems has not been properly investigated so far, which motivates us to carry out this study. In this paper, we extend recent results and apply FTS concept on the time-varying delay systems with nonlinear perturbations and parameter uncertainties. Our contributions are given as follows. In order to obtain less conservative results, a new integral quadratic inequality with exponential function (QIEF) is proposed and applied to the considered systems. By using LKLF with exponential function, QIEF and estimations of LKLF in the initial and the current time, new less conservative stability criteria are proposed in the form of linear matrix inequalities, in comparison with the existing literature [1], [2], [3]. Finally, numerical examples are given to illustrate the applicability of the developed results.

### REFERENCES

- [1] Stojanovic, S.B., Debeljkovic, D.Lj. and Antic, D.S. (2013), “Robust finite-time stability and stabilization of linear uncertain time-delay systems“, *Asian J. Control* 15 (5), pp. 1548–1554.
- [2] Rojsiraphaisal, T. and Puangmalai, J. (2014), “An Improved Finite-Time Stability and Stabilization of Linear System with Constant Delay“, *Math. Probl. Eng.* 2014, pp. 1-7.
- [3] Zhang, Z., Zhang, Z. and Zhang, H. (2015), “Finite-time stability analysis and stabilization for uncertain continuous-time system with time-varying delay“, *J. Franklin Inst.* 352, pp. 1296–1317.

## КРИТЕРИЈУМИ СТАБИЛНОСТИ НА КОНАЧНОМ ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ ЗА КОНТИНУАЛНЕ СИСТЕМЕ СА ПРИСУТНИМ НЕОДРЕЂЕНОСТИМА И ВРЕМЕНСКИ ПРОМЕНЉИВИМ КАШЊЕЊЕМ

Сретен Б. Стојановић<sup>1</sup>, Драгутим Љ. Дебељковић<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Технолошки факултет у Лесковцу, Универзитет у Нишу, Лесковац, 16000, Србија  
e-mail: sstojanovic@tf.ni.ac.rs, web strana: <http://www.tf.ni.ac.rs/>

<sup>2</sup>Машински факултет у Београду, Универзитет у Београду, Београд, 11120, Србија  
e-mail: ddebeljkovic@mas.bg.ac.rs, web strana: <http://www.mas.bg.ac.rs/>

**Кључне речи:** Стабилност на коначном временском интервалу, Континуални системи са присутним неодређеностима, Системи са временски-променљивим кашњењем, Линеарне матричне неједначине.

### АПСТРАКТ

Већина постојеће литературе, која се бави проучавањем стабилности система, користи Љапунову асимптотску стабилност дефинисану на бесконачном временском интервалу. Овај концепт стабилности често је недовољан за практичну примену, јер постоје одређени реални системи чије променљиве стања у прелазном режиму не смеју да пређу одређене границе, при унапред задатој горњој граници почетних услова система. У таквим случајевима уводи се концепт стабилности на коначном временском интервалу (SKVI). У последње време, овај концепт стабилности се примењује на различите класе система као што су: нелинеарни системи, системи са параметарским неодређеностима, системи неуронских мрежа, фази системи и прекидачи системи.

Временско кашњење, које се често појављује у различитим техничким системима (хемијски системи, електричне мреже, велики системи, системи са дугим преносним линијама), може бити извор лоше перформансе и нестабилности система. Концепт SKVI се може применити и на ову класу система са кашњењем. Често, у многим практичним системима временско кашњење није константно већ временски променљиво.

Други важан извор лоше перформансе система јесу нелинеарне пертурбације и параметарске неодређености у систему. Према нашим сазнањима, проблем SKVI за поменуту класу система није у довољној мери испитиван до сада. Због тога смо, у овом раду, проширили постојеће резултате примене концепта SKVI на класу система са временски променљивим кашњењем и присутним нелинеарним пертурбацијама и параметарским неодређеностима. Допринос рада је следећи. У циљу постизања мање конзервативних резултата, предложена је нова интегрална квадратна неједнакост са експоненцијалном функцијом (KNEF) и примењена је на разматрану класу система. Користећи функционал сличан Љапунов-Красовски функционалу са експоненцијалном функцијом (LKFEF), KNEF и процене LKFEF за почетни и текући тренутак времена, добијени су нови критеријуми стабилности у облику линеарних матричних неједнакости, који су мање конзервативни у поређењу са постојећим критеријумима [1], [2], [3]. Коначно, помоћу нумеричких примера, демонстрирана је применљивост изведених резултата.

### РЕФЕРЕНЦЕ

- [1] Stojanovic, S.B., Debeljkovic, D.Lj. and Antic, D.S. (2013), “Robust finite-time stability and stabilization of linear uncertain time-delay systems”, *Asian J. Control* 15 (5), pp. 1548–1554.
- [2] Rojsiraphaisal, T. and Puangmalai, J. (2014), “An Improved Finite-Time Stability and Stabilization of Linear System with Constant Delay”, *Math. Probl. Eng.* 2014, pp. 1-7.
- [3] Zhang, Z., Zhang, Z. and Zhang, H. (2015), “Finite-time stability analysis and stabilization for uncertain continuous-time system with time-varying delay”, *J. Franklin Inst.* 352, pp. 1296–1317.



## CABLE SUSPENDED PARALLEL ROBOT AS A NONLINEAR MECHANISM

Mirjana M. Filipović<sup>1</sup> and Ljubinko B. Kevac<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Mihajlo Pupin Institute, The University of Belgrade, Volgina 15, 11000 Belgrade

e-mail: [mira@robot.imp.bg.ac.rs](mailto:mira@robot.imp.bg.ac.rs), web page: <http://www.pupin.rs/>

<sup>2</sup>School of Electrical Engineering, The University of Belgrade, and Innovation centre of School of Electrical Engineering, The University of Belgrade, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11000 Belgrade, Serbia

e-mail: [ljubinko.kevac@ic.etf.rs](mailto:ljubinko.kevac@ic.etf.rs), web page: <http://www.icef.etf.rs/index.php?lang=en>

**Keywords:** Cable-Suspended Parallel Robot - CPR system, nonlinear kinematics, nonlinear dynamics.

### ABSTRACT

This paper deals with the developing and modeling the kinematics and dynamics of Cable-Suspended Parallel Robot - CPR system. In this paper, we have presented several new types (constructions) of Cable-suspended Parallel Robot. Each new design requires studious approach and detection of specific phenomena, which needs to be defined through the process of mathematics modeling. The characteristic features of CPR structures can be grouped as follows:

1. shape of the work space (plane, spatial (different forms)),
2. number of motors,
3. number of hanging points,
4. total number of ropes for the implementation of the CPR system,
5. number of ropes from the camera carrier to the hanging points,
6. type of motor translational or rotational, translational motors in this paper will not be analyzed, while the rotary motor can operate in three ways:
  - ❖ motor with the same side winds or unwinds the rope,
  - ❖ the motor on one side winds the rope but on the other side unwinds the same rope,
  - ❖ the motor winds or unwinds two ropes at the same time from the same side.

Each of these characteristics differently affects the response of the CPR system. The geometric relations between the motor and the camera carrier motion are highly important for the kinematic and dynamic modeling of the system. The mathematical model (kinematic and dynamic) is defined as generally solution. If it assumed that all the parameters of the considered systems are the same, therefore the comparison of these systems will be easier. It is evident that the choice of construction of CPR significantly affects the response of this system.

We point out the advantages of novel constructions in comparison with so far published papers. The development of these systems gives a wide possibility of their application in different areas of human activities:

1. supervision and monitoring the workspace for different purposes: securing and monitoring the area.
2. monitoring and tracking the mass sports (football, hockey, tennis, ...) and culutral events,
3. monitoring and assisting children, elderly and disabled,
4. irrigation in greenhouses, glasshouses and open plantations, and
5. applications for security, police and military purposes.

This paper is an overview of the modeling approaches of different constructions of Cable - Suspended Parallel Robots, CPR systems.

The so far achieved results on the *CPR system* project (since the beginning of 2011) have resulted in many published papers: 2 papers published in international monographs, 4 papers published in international journals from SI list, 18 papers published in international conferences, 1 invited paper in international conference, 3 papers published in national journals, 7 papers published in national conferences, 10 technical solutions (program packages). The quantity and quality of published papers in the area of CPR system's development support the popularity of the subject and the fact that this technology was not yet developed in Serbia and in surrounding countries.

## КАБЛОВСКИ ВОЂЕЊИ РОБОТСКИ СИСТЕМ КАО НЕЛИНЕАРАН РОБОТСКИ МЕХАНИЗАМ

Мирјана М. Филиповић<sup>1</sup> и Љубинко Б. Кевац<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Михајло Пупин Институт, Универзитет у Београду, Волгина 15, 11000 град  
e-mail: [mira@robot.imp.bg.ac.rs](mailto:mira@robot.imp.bg.ac.rs), web page: <http://www.pupin.rs/>

<sup>2</sup> Иновациони центар Електротехничког факултета, Универзитет у Београду, Булевар краља Александра 73,  
11000 Белграде, Србија, e-mail: [ljubinko.kevac@ic.etf.rs](mailto:ljubinko.kevac@ic.etf.rs), web page: <http://www.icetf.etf.rs/index.php?lang=en>

**Кључне речи:** Cable-Suspended Parallel Robot - CPR систем, нелинеарна кинематика, нелинеарна динамика.

### САЖЕТАК

Овај рад се бави развојем и моделирањем кинематике и динамике кабловски вођених система (Cable-Suspended Parallel Robot - CPR систем). У овом раду је представљено више нових типова Cable-suspended Parallel Robot - CPR конструкција. Сваки нови дизајн захтева студиозан приступ и препознавање карактеристичних феномена који треба да буду дефинисани током процеса математичког моделирања. Особине које карактеришу CPR структуре могу бити груписане на следећи начин: 1. облик радног простора (равански, просторни (разни облици)), 2. број мотора, 3. број тачака вешања, 4. укупан број каблова који се користе за израду CPR система, 5. број каблова који повезују тачке од носача терета до тачака вешања, 6. транслаторни или ротациони мотор, транслаторни мотори неће бити анализирани у овом раду, док ротациони мотори могу да раде на следећи начин:

- ❖ мотор намотава или одмотава уже са исте стране,
- ❖ са једне стране мотор намотава уже док са друге стране одмотава уже,
- ❖ мотор намотава или одмотава два ужета са исте стране.

Свака од ових карактеристика различито утиче на одзив CPR система. Геометријска веза између кретања мотора и носача камере је веома битна за формирање кинематичког и динамичког модела система. Математички модел (кинематички и динамички) је дефинисан као генерално решење. Ако се претпостави да су сви параметри разматраних система идентични тада је упоредна анализа представљених система олакшана. Евидентно је да избор конструкције CPR система значајно утиче на одзив система.

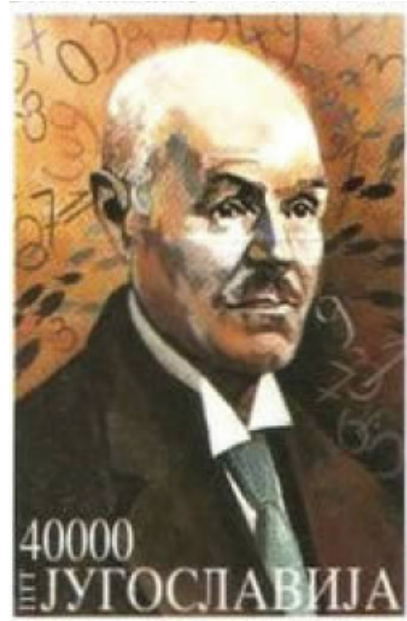
Указује се на предности нових конструкција у односу на до сада публикована решења. Развој ових система даје широку могућност њихове примене у разнородним областима људске делатности:

1. надгледање и снимање радног простора за различите намене: обезбеђење и надгледање радног простора,
2. снимање и праћење масовних спортских (фудбалских, хокејских, тениских, ...) и културних манифестација,
3. надзор и помоћ деци, старим и хендикепираним особама,
4. наводњавање у стакленицима, пластеницима и отвореним плантажама, па све до
5. примене за безбедносне, полицијске и војне намене.

У овом раду приказујемо преглед метода моделирања различитих конструкција Цабле - Suspended Parallel Robots – CPR система.

Досадашњи резултати истраживања на пројекту CPR система од почетка 2011, верификовани су на међународној и домаћој научно-стручној сцени публикацијом низа радова: 4 рада публикована у интернационалним часописима са SI листе, 18 радова публикованих на интернационалним конференцијама, 1 рад по позиву публикован на интернационалној конференцији, 3 рада публикована у домаћим часописима, 7 радова публикованих на домаћим конференцијама, 10 техничких решења (програмских пакета). Број и квалитет публикованих радова у области развоја CPR система иду у прилог актуелности теме и у односу на чињеницу да ова технологија није до сада развијана у Србији а такође ни у земљама у окружењу.

## Mihailo Petrović (6 May 1868–8 June 1943)



**Mihailo Petrović** was born on 6 May 1868, in Belgrade, as the first child of Nikodim, a professor of theology, and Milica (Lazarević).

Mihajlo Petrović Alas was a great figure of Serbian Science and Culture. Petrović was a very influential Serbian mathematician with numerous doctoral students in Serbia. He was also a distinguished professor of mathematics at University of Belgrade. Petrović was a regular member of Serbian Royal Academy of Science. Petrović contributed significantly to the study of differential equations and phenomenology, as well as inventing one of the first prototypes of an analog computer.

He finished the First Belgrade Gymnasium in 1885, and afterwards enrolled at the natural science-mathematical section of the Faculty of Philosophy in Belgrade. At the time when Petrović finished his studies in Serbia in 1889, several Serbian mathematicians who had acquired their doctorate degrees abroad, like Dr. Dimitrije Nešić (at Vienna and Karlsruhe Institute of Technology), Dr. Dimitrije Danić (at Jena, 1885) and Bogdan Gavrilović (at Budapest, 1887) were beginning to make a name for them. Subsequently, in September 1889, Petrović too went abroad, to Paris to receive further education, at the Ecole Normale Supérieure. He got a degree in mathematical sciences from Sorbonne University in 1891. He worked on preparing his doctoral dissertation titled:

### **"Sur les zéros et infinis des intégrales des équations différentielles algébriques"**

and on 21 June 1894 he defended his doctoral degree at the Sorbonne. His doctorate was in the field of differential equations.. His doctoral dissertation was approved by **Hermite** (Charles Hermite (1822 -1901)), **Picard** (Charles Émile Picard (1856 -1941)), **Painlevé** (Paul Painlevé (1863 -1933)).

Petrović received a title "Docteur des sciences mathématiques" (doctor of mathematical sciences). At the **École Normale Supérieure** in Paris, he got the following degrees: **Licence ès sciences mathématiques (1892)**, **Licence ès sciences physiques (1893)** and **Docteur ès sciences mathématiques (1894)**.

Petrović was righ French Sorbonne student of famous scientists as **Poincaré** (Jules Henri Poincaré (1854 -1912)), **Appall** (Paul Appell (1855 -1930)), **Hermite** (Charles Hermite (1822 -1901)), **Picard** (Charles Émile Picard (1856 -1941)), **Painlevé** (Paul Painlevé (1863 -1933)), **Bousinesq** (Joseph Valentin Boussinesq (1842 -1929)) and other.

**In bio-bibliography of Jules Henri Poincaré Mihailo Petrović is listed as one of thre Poincaré's student doctorantes.**

In 1894, Petrović became a professor of mathematics at the Belgrade's Grande ecole (which later became the University of Belgrade). When in 1905 the Grande ecole was transformed into the University of Belgrade Petrović was among first eight regular professors, who elected other professors. He held lectures until his retirement in 1938. In 1897, he became a corresponding member of the Serbian Royal Academy and associate member of the Yugoslav Academy of Sciences and Arts in Zagreb. He became a full member of the Serbian Royal Academy in 1899, when he was only 31.

Mihailo Petrović constructed a hidrointegrator, and was laurete of the gold medal at the World Exposition in Paris 1900. He published a large number of inventions, scientific works in mathematics and books. He received numerous awards and acknowledgments and was a member of several foreign science academies (Prague, Bucharest, Warsaw, Krakow) and scientific societies.

Mihailo Petrović Alas was a close friend of the prince Đorđe P. Karađorđević, the king's brother, who was arrested in 1925. This is reson yaht in 1927, when Jovan Cvijić died, members of the Serbian Royal academy proposed Mihailo Petrović as the new president of academy, but the authorities did not accept this proposal.

He founded the Belgrade School of Mathematics. All doctoral dissertations defended on the Belgrade University since 1912 until the Second World War were under Petrović's mentorship.

Mihailo Petrović is laurete of the higher prestigious Sebian church order of Saint Sava, first class.

He participated in the Balkan Wars and in the First World War as an officer, and he practised cryptography, and his cipher systems were used by the Yugoslav army until World War II. On 8 June 1943, professor Petrović died in his home in Belgrade.

He was a passionate traveller, and he visited both the North and South poles. Mihailo Petrović got the nickname "Alas" because of his passion for fishery. His nickname "Alas" is river fisherman. He played violin, and in 1896, founded musical society named Suz.

## Mihailo Petrović's Theory: Elements of Mathematical Phenomenology and Phenomenological Mappings

Complete theory under the title: “Elements of Mathematical Phenomenology” [11], from 1911, is published on 789 pages and title “Phenomenological Mappings” [2], issued in 1933 on 33 pages, contain fundamental and basic ideas, which from time to time appear in current scientific publications. These cited Petrović's publications contain general theory of Elements of Mathematical Phenomenology and Phenomenological Mappings, but both books were published in Serbian and not visible from other world languages.

Now, let's present some basic parts of the published theory: Elements of Mathematical Phenomenology (“Елементата математичке феноменологије” [1]). We list only key elements and titles and sub-titles, for obtaining general view of numerous ideas and organization of this fundamental book or theory. For this Petrović's Elements of Mathematical Phenomenology, Milutin Milanković (author of world known famous **Canon of Sun insolation**) and one of three important Serbian, and also, world scientists (first is Tesla Nikola -Unit “Tesla” and second Mihaio Pupin, Rector of Columbia University in New York) evaluate this book as some important in Petrović's scientific results, but understandable only for two persons, both Serbian scientist in this period, and not readable for other world scientists because is published in Serbian Language. A short presentation of this book was in France, but not in integral form.

Introducing part is titled: *Some elements of multi-dimensional geometry*, and then in first subsection take into presentation *Elements for descriptions of phenomena and their mechanisms*. These elements are elements for *schematically and analytical descriptions*.

Second part is titled: *Coupling between mechanisms and manifestation of phenomena* in which present: *Basic differential equations for description of simple and complex phenomena*. In next sections *general transformations of differential equations* are presented.

Third part is dedicated to *transformation of equations for phenomenon in holonomic systems*, and fourth part is dedicated to *potential phenomena*. In this part are presented and *analyzed systems of Appel's and Lagrange's equations*.

Third section is under the subtitle: *The immediate consequence of phenomenological differential equations*, in which it is presented, *stationary phases of phenomena*. In next section, Petrović present proper theory of the *viva forces* and their *phenomenological consequences*. This subsection is very important for new quality that Petrović point out proper separation in its proper approaches and differences *from pure geometrical and introducing approach in dynamics of systems*, usually not understandable for pure mathematicians. This is very important part and point of view to geometry and dynamics.

In next section *action of discontinuous causes* is presented.

In the fourth section studies *the events of occurrence as a result of its composition mechanisms* are presented. The head of the headlines are: *Quantitative and qualitative images of appearances (phenomenons)*.

Five part is under the title: *The composition and patterns of phenomenological mechanisms*, within which combinations and distribution role in the mechanisms of emergence and activation activity in the mechanisms of occurrence are studied.

The sixth chapter is entitled: *Phenomenological analogies* which include following heads: *Mathematical analogies and qualitative analogy*.

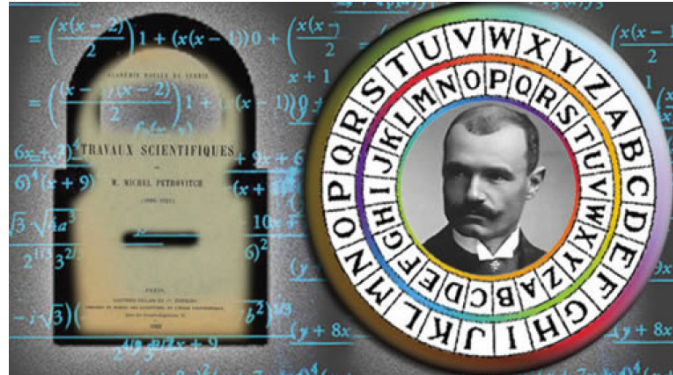


Figure: Illustration of Mihailo Petrović interdisciplinary research results.

## References

M. Petrović, *Elementi matematičke fenomenologije* (Elements of mathematical phenomenology), Srpska kraljevska akademija, Beograd, 1911. str. 789. <http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/476?locale-attribute=sr>

M. Petrović, *Fenomenološko preslikavanje* (Phenomenological mapp), Srpska kraljevska akademija, Beograd, 1933. str. 33. <http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/475>

M. Petrović.: *Mecanismes communs aux phenomenes disparates*, Paris 1921. [http://en.wikipedia.org/wiki/Mihailo\\_Petrovi%C4%87](http://en.wikipedia.org/wiki/Mihailo_Petrovi%C4%87)

D. Trifunović, (1991). *Bard srpske matematike Mihailo Petrović Alas* (Bard of Serbian mathematics Mihailo Petrović Alas), Prilog intelektualnoj biografiji. Belgrade: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

Wikipedia: Mihailo Petrović [http://en.wikipedia.org/wiki/Mihailo\\_Petrovi%C4%87](http://en.wikipedia.org/wiki/Mihailo_Petrovi%C4%87)

(Reference: Text from Wikipedia: Mihailo Petrović [http://en.wikipedia.org/wiki/Mihailo\\_Petrovi%C4%87](http://en.wikipedia.org/wiki/Mihailo_Petrovi%C4%87))

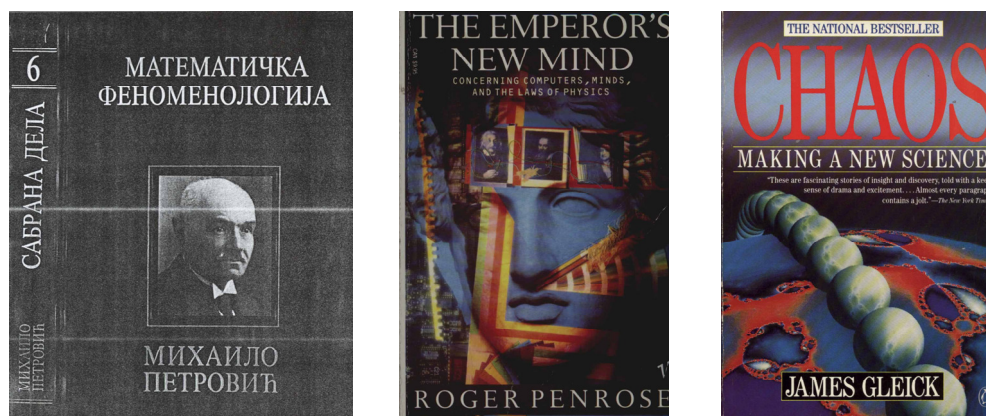


Figure 1. Covers of three publications: a\* Mihailo Petrović's theory: *Mathematical Phenomenology*[3] first published 1911; b\* Roger Penrose: *The Emperor's New Mind*, concerning Computers [2], Minds and the Laws of Physics, ISBN 009 977170 S, Oxford University Press 1985/ 199 and c\* James Gleick, *Chaos: Making a new Sciences* [1], Penguin BOOKS, ISBN 014 00 92501, 1987/1988.



70 godina rada Matematičkog instituta SANU  
**Mini-symposium “Non-Linear Dynamics”**  
 Matematički institut SANU i Projekat ON174001, Beograd, 25 maj 2016

<p style="text-align: center;"><b>THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS</b>  <b>TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA</b></p> <p style="text-align: center;">SERIES: SPECIAL ISSUE – DEDICATED TO MEMORY OF  <b>ANTON D. BILIMOVIĆ (1879-1970), Vol. 41 (S1), 2014.</b></p> <p style="text-align: center;">GUEST EDITORS: KATICA R. (STEVANOVIĆ) HEDRIH      DRAGOSLAV ŠUMARAC</p> <p><b>Content</b></p> <p>Preface: Address by Guest-Editors: Anton D. Bilimović ..... 3</p> <p>I.E. Rikan, chief bibliographer of Odessa National Scientific Library named after M. Gorky      Anton Dmitrievich Bilimovich, an Outstanding Scientist of Mechanics ..... 7</p> <p><b>Radu Miran:</b>      On the Lagrangian and Hamiltonian Mechanical Systems ..... 11</p> <p><b>Alexander M. Kovalov, G.V. Gerr:</b>      Invariant relations method development in the Problems of rigid body dynamics ..... 21</p> <p><b>Katica R. (Stevanović) Hedrih:</b>      Multi membrane Fractional order system vibrations ..... 43</p> <p><b>Julijana Simonić:</b>      Stability analysis of stationary oscillatory regimes of coupled deformable bodies system ..... 61</p> <p><b>Zeković N. Dragomir:</b>      Analysis of Hamilton's principle for nonlinear nonholonomic systems      with regard to transpositional relations in quasicordinates ..... 71</p> <p><b>Ivana Kovačić:</b>      On the motion of a two blade system with a nonlinear spring ..... 83</p> <p><b>Z. Perović, D. Šumarić:</b>      Analysis of cyclic plasticity of trusses using the Preisach model of hysteresis ..... 99</p> <p><b>Jelena M. Djeković, Ružica R. Nikalić:</b>      The in-plane stress influence on crack kinking out from the interface ..... 115</p> <p><b>Dragiša Nikadžević, Zvezlin Stamenković:</b>      Unsteady magnetohydrodynamic heat and mass transfer past THE body      with time varying wall temperature ..... 123</p> <p><b>Borđe S. Čertrak, Novica Z. Tolstoj:</b>      Influence of the Reynolds number on the statistical and correlation-spectral      properties of turbulent swirl flow ..... 137</p> <p><b>Sreten B. Stepanović, Dragutin Lj. Debeljavić, Goran Simunović, Nabažka Dimitrijević:</b>      Finite-Time Boundedness of uncertain discrete-time descriptor      systems with time-varying exogenous disturbance ..... 149</p> <p><b>Appendix</b>      Guest Editors:      Academician Božidar Vujanović (1930-2014) ..... 163</p> <p><b>D. V. Bredaslevy, A. A. Larin, V. B. Kanavaleva:</b>      The Scientific and Social Activity of Professor N. N. Saltykov in Russia in 1894-1919 ..... 179</p> <p><b>Katica R. (Stevanović) Hedrih:</b>      Radu Miran Lagrangian and Hamiltonian Geometries, Applications in Analytical Mechanics ..... 189</p> <p style="text-align: center;"><b>SERBIAN SOCIETY OF MECHANICS</b>  <b>SRPSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKU</b></p>	<b>THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS</b> <b>TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA</b>	<p style="text-align: right;">ISSN 1450-5584</p> <h1 style="text-align: center;">THEORETICAL      AND TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA      APPLIED      MECHANICS</h1> <p style="text-align: center;">SERIES: SPECIAL ISSUE – DEDICATED TO MEMORY OF  <b>ANTON D. BILIMOVIĆ (1879-1970), Vol. 41 (S1), 2014.</b></p> <p style="text-align: center;">GUEST EDITORS: KATICA R. (STEVANOVIĆ) HEDRIH      DRAGOSLAV ŠUMARAC</p> <p style="text-align: center;"><b>Serbian Society of Mechanics</b></p> <p style="text-align: right;">BELGRADE 2014.</p>
---	--	---

<p style="text-align: center;"><b>THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS</b>  <b>TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA</b></p> <p style="text-align: center;">Series: Special Issue - Address to Mechanics, Vol. 40 (S1), 2012.</p> <p style="text-align: center;">ADDRESS TO MECHANICS:      HISTORICAL, TEORIJESKA I PRIMENJENA MEHANIKA      GUEST EDITORS: KATICA R. (STEVANOVIĆ) HEDRIH</p> <p><b>Radoslav M. Babićević:</b>      ON THE MECHANICAL MOTION IN A SPHERICAL COORDINATE SYSTEMS ..... 5</p> <p><b>Zoran Dukićević:</b>      ON THE DEFORMATION OF A SURFACE DURING A SLIDING      GEOMETRIES ON A SURFACE ..... 17</p> <p><b>Jana Čurčić and Rada M. Jovanović:</b>      DEPENDENCY OF THE CRACK GROWTH RATE ON THE CRACK LENGTH ..... 27</p> <p><b>Ljiljana Čuković:</b>      NINETY YEARS OF BOHRER'S EQUATION ..... 49</p> <p><b>Julio K. Kucharski, M. Jovanović:</b>      ON A MICROSTRUCTURE-BASED MODEL OF SEMICONDUCTORS ..... 65</p> <p><b>Milica M. Jovanović:</b>      VORTEX EVOLUTION IN FERROFERRIC FLUID FLOW ..... 71</p> <p><b>Slavica Erić:</b>      A-ALYEN IN THE INVESTIBLE ..... 87</p> <p><b>Veljko A. Vujanović:</b>      MECHANICS OF EARTH'S GREAT OCEANIC ..... 121</p> <p><b>Milica M. Jovanović:</b>      LOADS IN THE SUN'S ORBIT ..... 127</p> <p><b>Aleksandar S. Jovanović:</b>      THE HELIX ORBIT PARADOX ..... 135</p> <p><b>Milica Koprivica and Nana F. Jovanović:</b>      CURRENT TRENDS IN MECHANICS IN SERBIA,      A REVIEW OF RESEARCH TRENDS ..... 147</p> <p><b>Milica P. Jovanović:</b>      BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF LINEAR AND NONLINEAR      AND BIFURCATION PROBLEMS AND SOME APPLICATIONS ..... 163</p> <p><b>Andrija H. Helić and Vukobratović Miroslav:</b>      FRACTAL CALCULUS IN MECHANICS ..... 163</p> <p><b>Andrija H. Helić and Vukobratović Miroslav:</b>      VIBRATIONAL PROPERTIES CHARACTERIZATION OF      MOLECULAR EMERSON DURING MICROSCOPIC ..... 189</p> <p><b>Tamara N. Jovanović:</b>      ACTIVE CONTROL OF MECHANICAL      STRUCTURES IN RESEARCH AND EDUCATION ..... 203</p> <p><b>Sreten B. Stepanović and Dragutin Lj. Debeljavić:</b>      DELAY INDEPENDENT STABILITY OF LINEAR      TIME-DELAY SYSTEMS ..... 223</p> <p><b>Sreten B. Stepanović and Dragutin Lj. Debeljavić:</b>      ROBUST CONTROL OF LINEAR      TIME-DELAY SYSTEMS ..... 247</p> <p><b>Natasa R. Todorović:</b>      ACTIVE FEEDBACK CONTROL ANALYSIS      OF MECHANICAL STRUCTURES ..... 263</p> <p><b>Prerad Janković, Tomislav Jakić and Dragutin Nikadžević:</b>      PROBABILISTIC ANALYSIS OF THE RELIABILITY OF      MECHANICAL STRUCTURES AND THE QUALITY ..... 277</p> <p><b>Galina R. Todorović, I. Helić:</b>      ADVANCES IN CLASSICAL AND ANALYTICAL MECHANICS:      A REVIEW OF ACTIVITY IN SERBIA ..... 283</p> <p style="text-align: center;"><b>SERBIAN SOCIETY OF MECHANICS</b>  <b>SRPSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKU</b></p>	<b>THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS</b> <b>TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA</b>	<p style="text-align: right;">ISSN 1450-5584</p> <h1 style="text-align: center;">THEORETICAL      AND TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA      APPLIED      MECHANICS</h1> <p style="text-align: center;">Series: Special Issue - Address to Mechanics, Vol. 40 (S1), 2012.</p> <h2 style="text-align: center; color: red;">VOL 1-2 , 2013</h2> <p style="text-align: center;"><b>Serbian Society of Mechanics</b></p> <p style="text-align: right;">BELGRADE 2012.</p>
---	--	---



70 година рада Математичког института САНУ  
**Mini-symposium “Non-Linear Dynamics”**  
 Математички институт САНУ и Пројекат ОН174001, Београд, 25 мај 2016

<p style="text-align: center;">UDK 001      SCIENTIFIC REVIEW      YU ISSN 0350-2910</p> <p style="text-align: center;">SERBIAN SCIENTIFIC SOCIETY  <small>SRPSKO NAUČNO DRUŠTVO</small>      <small>SRPSKO NAUČNO DRUŠTVO</small></p> <hr/> <p style="text-align: center;">НАУЧНО ДРУШТВО СРБИЈЕ  <b>SCIENTIFIC REVIEW</b>      New Series</p> <p style="text-align: center;">Series: Scientific and Engineering      Special Issue <b>Nonlinear Dynamics S2 (2013)</b>      Dedicated to <b>Milutin Milanković (1879- 1958)</b></p> <p style="text-align: center;">Guest Editors:  <b>Katica R. (Stevanović) Hedrih and Žarko Mijačević</b></p> <p style="text-align: center;"><b>CONTENT</b></p> <p>Milutin Milanković (1879- 1958) and Astrodynamics ..... 1-2      ADDRESS by Guest Editors ..... 3-6      Сравнительный анализ аддитивных методов интегрирования      на примере уравнения Бетельджи, Ташкир Исмаилов ..... 7-36      A generalization of Lagrange method of variation constants,      Katica R. (Stevanović) Hedrih ..... 37-66      Linear and nonlinear reaction systems,      Ljiljana Kolar-Anić, Željko Čupić ..... 67-88      Short review on the models of Bray-Liebhafsky oscillatory reaction,      B. Straković, S. Anić ..... 89-112      Bright solitons from defocusing nonlinearities,      Olga V. Borovkova, Yaroslav V. Kartashov, Luis Torner, and Boris A. Malomed ..... 113-122      Modern concepts of actively controlled smart structures - Aeronaut design approach,      Tamara Nektarević ..... 123-148      Further results on applications of fractional calculus in nonlinear dynamics      - Stability and control issues,      Mihailo Lazarević ..... 149- 178      Differential equations of motion for mechanical systems with nonlinear nonholonomic      constraints - various forms and their equivalence,      Dragomir N. Zeković ..... 179-196      The new form of force function of two finite bodies in terms of modified Delaunay's      and Andoyer's angle variables,      Alexander Zelenko ..... 197-206      Some aspects of bird impact theory,      Marinka Ugrčić ..... 207-222</p>	<p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">SCIENTIFIC REVIEW - SPECIAL ISSUE NONLINEAR DYNAMICS S2 (2013)      Dedicated to Milutin Milanković (1879- 1958)</p>	<p style="text-align: center;">UDK 001      SERBIAN SCIENTIFIC SOCIETY      YU ISSN 0350-2910</p> <p style="text-align: center;">SRPSKO NAUČNO DRUŠTVO      SRPSKO NAUČNO DRUŠTVO</p> <hr/> <p style="text-align: center;">НАУЧНО ДРУШТВО СРБИЈЕ</p> <p style="text-align: center;"><b>SCIENTIFIC REVIEW</b>      New Series</p> <p style="text-align: center;">Series: Scientific and Engineering      Special Issue <b>Nonlinear Dynamics S2 (2013)</b>      Dedicated to  <b>Milutin Milanković (1879- 1958)</b></p> <p style="text-align: center;">Guest Editors:  <b>Katica R. (Stevanović) Hedrih      and Žarko Mijačević</b></p> <p style="text-align: center;">Belgrade      2013</p>
--	---	--

Симпозијуми и –или минисимпозијуми нелинеарне механике и нелинеарје динамике у Србији:

Ниш 1991, Ниш 1975, Врњачка Бања 1997, Ниш 2000, Нип 2003, Врњачка Бања 2011, Београд 2012, Врњачка Бања 2013, Аранђеловац 2015, Београд 2016





**Истраживачи из Математичког института на Конгресу механике у Аранђеловцу 2015**



**Један број учесника Минисимпозијума; Mini Symposium Nonlinear Dynamics – Milutin Milankovic, Interdisciplinary and multidisciplinary sciences, Organizer: Katica R. (Stevanovic) Hedrih , Аранђеловац 2015**

Fundamental Research (2011-2016)

## **Dynamics of the hybrid systems with complex structures. Mechanics of materials.**

*(Project ON174001 in area of Theoretical and Applied Mechanics)*

Series of keywords representing obtained original scientific research results are large and contain all keywords included in submitted plan of project research for period 2011-2016. These keywords are: Hybrid systems, discrete continuum, nonlinear dynamics, phenomenology and analogies, phenomenological mappings, systems of fractional order, fractional order modes, generalized function of fractional order dissipation of system mechanical energy, theorems of energy dissipation,



Project Leader  
Katica (Stevanović) Hedrih

nonlinear transformation, rheonomic system, nonholonomic constraints, mass moment vectors, gyro-rotor dynamics, approximation, amplitude-frequency characteristic, stability, synchronization, theory of collision, vibro-impact system, dynamics of billiards, energy analysis, non-local theory and applications, biomechanical oscillators, DNA helicoid chains, Zona pelucida, mechanics of fracture and damage, control motion, patent, technological solution.

Obtained original scientific research results are from following research themes:

- 1\* Elements of mathematical phenomenology and applications (in Mechanics, in nonlinear dynamics in general, in integration of scientific knowledge and for reduction of number of models of dynamical systems known in world heritage);
- 2\* Analytical mechanics of discrete fractional order systems; Derived a series of theorems.
- 3\* Nonlinear and rare phenomena in dynamics of hybrid systems with coupled structures rigid and deformable bodies; Transfer energy through the system and subsystems; Synchronization of subsystems.
- 4\* Models of biodynamical oscillators; Phenomenon of transfer of signals, information and energy through their complex structures; Oscillations of DNA helix chains and discrete continuum models of Zona Pelucida.
- 5\* Mechanics of discrete continuum models. Dynamics of coupled structures of deformable bodies and discrete continuum layers with different constitutive relations: Linear elastic, nonlinear elastic, visco-elastic, hereditary and fractional order properties.
- 6\* Phenomenon of dynamics of systems with friction and vibro-impact system; Theory of collision of rolling bodies; Dynamics of billiards.
- 7\* Mechanics of damage and fracture.
- 8\* Control of system with delay and theorems of stability.
- 9\* Continuation of doctoral research in accordance with scientific based themes by young doctorantes which are included in listed themes of project research 1\*-8\*.
- 10\* 13 Ph.D. Students, younger than 30 ages, are included in project team and project scientific research, and all were participants of project starting two years seminar: Mathematical methods on mechanics with applications. 12 Ph.D. Students examined all subject at doctoral study programs; 5 doctorantes defended doctoral dissertation, 3 Ph.D. Students have official decision of accepted Ph.D. theme

Home page of the Project activities: <http://www.mi.sanu.ac.rs/projects/174001a.htm>

**Researchers of the Project Grant ON174001 Dynamics of hybrid systems with complex structures, Mechanics of materials (2011-2015) , coordinated through Mathematical Institute SANU Belgrade and financially supported by the Ministry of Educations, Sciences and Technology of Republic of Serbia.**

Name	Title	Institution
Katica (Stevanović) Hedrih	Professor	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Milan Cajić	Research Assistant	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Danilo Karličić	Research Assistant	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Marija Stamenković	Research Assistant	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Nikkola Nešić	Research Assistant	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Aleksandar Atanasov	Ph.D. Student Training	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Ivana Atanasovska	Research Associated Professor	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Slobodanka Boljanović	Research Assistant Professor	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Ugrčić Marinko	Professor	Institute of Economz, Belgrade
Stevan Maskimović	Professor	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Dušan Mikičić	Professor	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Katarina Maksimović	Research Assistant Trainee	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Tamara Nestorović-Trajkov	Professor	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Đorđe Mušicki	Professor	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts
Marinko Ugrčić	Professor	Mathematical Institute - Serbian Academy of Sciences and Arts and Economic institute, Belgrade
Julka Knežević-Miljanović	Professor	Faculty of Mathematics, Belgrade
Marija Mikić	Teaching Assistant	Faculty of Mathematics, Belgrade
Milutin Marjanov	Professor	Faculty of Forestry, Belgrade
Radoslav Radulović	Teaching Assistant	Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade
Dragutin Debeljković	Professor	Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade
Nebojša Dimitrijević	Research Assistant Professor	Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade
Nataša Trišović	Associated Professor	Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade
Dragomir Zeković	Professor	Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade
Goran Simeunović	Assistant Professor	Innovation Center, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade
Ilija Nikolić	Professor	Faculty of Mechanical Engineering, Kragujevac

Name	Title	Institution
Ljiljana Veljović	Professor	Faculty of Mechanical Engineering, Kragujevac
Miloš Jovanović	Assistant Professor	Faculty of Mechanical Engineering, Niš
Tomislav Petrović	Professor	Faculty of Mechanical Engineering, Niš
Julijana Simonović	Doctor of technical Sciences, Teaching Assistant	Faculty of Mechanical Engineering, Niš
Jelena Veljković-Doković	Associated Professor	Technical Faculty, Bor
Sreten Stojanović	Associated Professor	Faculty of Technology, Leskovac
Andelka Hedrih	Teaching Assistant	State University, Novi Pazar
Vera Nikolić-Stanojević	Professor Emeritus	State University, Novi Pazar
Srdan Jović	Associated Professor	Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica
Ivica Čamagić	Assistant Professor	Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica
Vladimir Raičević	Professor	Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica
Zlatibor Vasić	Professor	Faculty of Technical Sciences, Kosovska Mitrovica
Vladimir Veljić	Ph.D. Student	Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade
Jan Awrejcewicz	Professor	Technical University of Lodz, Department of Automatics and Biomechanics, Poland
Dumitru Baleanu	Professor	Cankaya University, Faculty of Art and Sciences, Department of Mathematics and Computer Sciences, Balgat 0630, Ankara, Turkey
Jose Manuel Balthazar	Professor	UneSP Brazil, Rio Claro, SP Brasil
Matthew P. Cartmell	Professor	Department of Mechanical Engineering, University of Glasgow, Scotland, UK
Rega Giuseppe	Professor	Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Universita' di Roma La Sapienza, Italy
J.A. Tenreiro Machado	Professor	ISEP - Institute of Engineering of Porto, Portugal
Yuri Mikhlin	Professor	Department of Applied Mathematics, National Technical University Kharkov, Ukraine
Ali Hasan Nayfeh	University Distinguished Professor	Virginia Polytechnic Institute and State University
Subhash C. Sinha	Alumni Professor and Director	Nonlinear Systems Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering, Auburn University, Auburn, Alabama
Jerzy Warminski	Ph.D. D.Sc. Professor	Technical University of Lublin, Department of Applied Mechanics, Poland
Hiroshi Yabuno	Professor	Department of Mechanical Engineering, Faculty of Science and Technology, Kio University, Japan



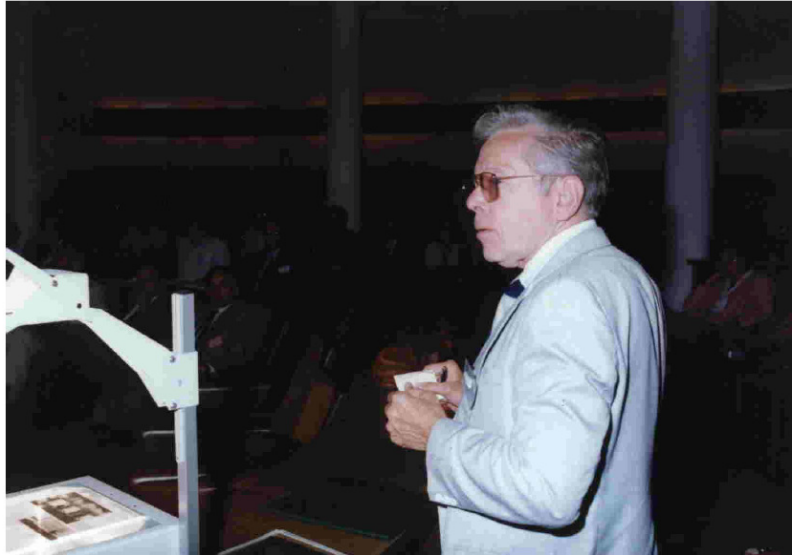
Participants of Symposium Nonlinear Dynamics, Belgrade 2012-



Researchers of Projecz ON174001 as participants of Serbian Congress of Theoretical and Applied Mechanics and Mini'Symposium Nonlinear Dynamics, Arandjelovac 2015.

Yugoslav Conference on  
**Deterministic and Stochastic Processes in Dynamical Systems with  
Applications Nis 1991**

Invited Lecturer: Professor *Willem Nash* from MIT Massachusetts (Nonlinear Mechanics-Editor)



Први симпозијум нелинеарне динамике , Ниш 1991



Симпозијум нелинеарне дунамике, Ниш 2000.

## The Founders of the Institute



Dr. Bilimović Anton

*Anton Bilimović*



Dr. Kašanin Radivoj

*Radivoj Kašanin*



Dr. Gavrilović Bogdan

*Bogdan Gavrilović*



Dr. Milanković Milutin

*Milutin Milanković*



Dr. Mišković Vojislav

*Vojislav Mišković*



Dr. Saltikov Nikola

*Nikola Saltikov*



Dr. Karamata Jovan

*Jovan Karamata*



