Gradimir V. Milovanović
Radosav Ž. Đorđević

MATEMATIČKA ANALIZA I

Predgovor

Ova knjiga predstavlja udžbenik iz predmeta *Matematička analiza I* koji se, počev od školske 2004/2005. godine, studentima Elektronskog fakulteta u Nišu predaje u II semestru. Knjiga je nastala na osnovu više puta objavljivanih udžbenika istih autora, pod naslovom: *Matematika za studente tehničkih fakulteta, I deo* i *Matematika za studente tehničkih fakulteta, II deo.*

Udžbenik *Matematička analiza I* sastoji se iz šest glava, od kojih poslednja glava (*Teorija redova*) nije predvidjena nastavnim programom pomenutog predmeta. Ova oblast se inače predaje u okviru matematičkih kurseva na drugoj godini studija na Elektronskom fakultetu u Nišu.

U glavi *Realne funkcije i njihove osnovne osobine* izložen je prvo sâm pojam funkcije, posebno pojam realne funkcije realne promenljive, a zatim i osnovne osobine realnih funkcija jedne realne promenljive, kao što su: parnost i neparnost, periodičnost, monotonost, konveksnost, pojam inverzne funkcije, kao i pojmovi funkcije zadate parametarski i implicitno zadate funkcije, ali i pojmovi elementarnih i neelementarnih funkcija. U drugom delu ove glave ukazano je na pojam metrike i metričkih prostora, kao i na neke osnovne topološke pojmove.

Glava *Nizovi* sastoji se iz dela u kojem je definisan pojam niza i pojam njegove granične vrednosti, u kojem su izložene osnovne osobine konvergentnih nizova i navedene neke granične vrednosti nizova u $\mathbb{R}$, kao i iz dela u kojem je ukazano na pojam Cauchyevog niza i na pojam kompletnog prostora.

Funkcije jedne realne promenljive je glava u kojoj su izloženi: pojam graničnih vrednosti realnih funkcija, osobine graničnih vrednosti, pojam neprekidnosti funkcija, kao i osobine neprekidnih funkcija. Isto tako, u ovoj glavi je ukazano i na neke osobine monotonih funkcija, na mogućnost upoređivanja funkcija među sobom, na simbole o i O, kao i na ravnomernu neprekidnost realnih funkcija.

U glavi *Diferenciranje funkcija jedne realne promenljive* izloženi su pojmovi izvoda i diferencijala funkcije prvog i višeg reda, osnovne teoreme diferencijalnog računa, kao i njihova primena na ispitivanje osnovnih osobina realnih funkcija. Isto tako, u ovoj glavi su definisane i osobene tačke krivih, kao i pojmovi asimptota krivih i krivine krivih, a ukazano je takođe i na pojam dodira krivih. Na kraju ove glave ukazano je i na grafičko predstavljanje funkcija.

Glava *Integracija funkcija jedne realne promenljive* obuhvata: neodređeni integral, metode integracije i integraciju elementarnih funkcija, kao i pojam određenog integrala, njegove osobine i primenu određenog integrala.

I na kraju, u glavi *Teorija redova* izloženi su numerički i fukcionalni redovi, vrste konvergencije, kao i kriterijumi za konvergenciju numeričkih i stepenih redova. Posebno su izloženi trigonometrijski i Fourierovi redovi i njihova primena.

Svaka glava je podeljena na poglavlja, a poglavlja na odeljke.

Numeracija objekata (formula, teorema, definicija i sl.) u okviru jednog odeljka izvršena je pomoću tri broja od kojih prvi ukazuje na poglavlje, drugi na odeljak i treći na redni broj tog objekta u posmatranom odeljku. Tako, na primer, teorema 3.2.4 predstavlja *četvrtu* teoremu u *drugom* odeljku *trećeg* poglavlja odgovarajuće glave. Na ovaj način je uspostavljena jednoznačna numeracija objekata u okviru jedne glave.

Sva teorijska izlaganja propraćena su odgovarajućim primerima. Na kraju svake glave nalazi se poglavlje *Zadaci za vežbu*, čiji je cilj da korisnicima ove knjige omogući samostalno uvežbavanje prethodno izložene teorije.

Kako je knjiga pisana u skladu sa najnovijim planom i programom studija na Elektronskom fakultetu u Nišu, ona je, pre svega, namenjena studentima računarstva i informatike, telekomunikacija, elektronike i elektrotehnike, ali i studentima drugih tehničkih fakulteta, kao i studentima matematike i fizike na prirodno-matematičkim fakultetima.

Niš, 31. januara 2005.

G. V. Milovanović / R. Ž. Đorđević

Sadržaj

III G L A V A

Funkcije jedne realne promenljive

IV G L A V A

Diferenciranje funkcija jedne realne promenljive

V GLAVA

Integracija funkcija jedne realne promenljive

VI GLAVA

Teorija redova

æ

I GLAVA

Osnovi matematičke analize

1. REALNE FUNKCIJE

1.1. Pojam funkcije i oblast definisanosti

U algebri, a posebno u teoriji algebarskih struktura, uobičajeno je da se pojam funkcije uvodi pomoću pojmova: *relacija* i *preslikavanje* (Videti, na primer, knjigu [15], str. 9-23.). Iako to nije predmet ovog udžbenika, ukratko ćemo ukazati na ova dva pojma.

Ako su X i Y dva neprazna skupa, tada se za svaki podskup ρ skupa $X \times Y$ kaže da je relacija ρ u skupu $X \times Y$. Dakle, svaka relacija ρ u skupu $X \times Y$ je skup izvesnih uređenih parova (x, y), takvih da je $x \in X$ i $y \in Y$, tj. uvek je $(x, y) \in X \times Y$, ali su samo neki $(x, y) \in \rho$.

Sve relacije koje ćemo ovde razmatrati odnose se na skupove $X \times Y$, gde su X i Y podskupovi skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Pri tome, ako su neprazni skupovi X i Y $(X, Y \subset \mathbb{R})$ posmatraćemo samo one relacije $\rho \subset X \times Y$ koje imaju osobinu da za svaki element $x \in X$ postoji samo jedan element $y \in Y$ takav da $(x, y) \in \rho$. Za svaku takvu relaciju ρ govorićemo da je *preslikavanje* ili *funkcija* sa skupa X u skup Y, a umesto $(x, y) \in \rho$ uobičajeno je da se ta činjenica označava sa $y = \rho(x)$. Štaviše, umesto ρ najčešće se koristi oznaka[1)] f.

Isto tako, činjenicu da je neka relacija $f \subset X \times Y$ preslikavanje, tj. funkcija, označavaćemo sa $f\colon X \to Y$ ili sa $X \xrightarrow{f} Y$, govoreći da se element x preslikava u element $y = f(x) \in Y$. To ćemo simbolizovati i sa $x \mapsto y = f(x)$ ili kraće $x \mapsto f(x)$.

Element x zovemo *original*, dok za element $y = f(x)$ koristimo termin *slika elementa* x pri preslikavanju f ili *vrednost funkcije* u tački x. U slučaju kada x predstavlja proizvoljan element iz X kažemo da je x *argument* ili *nezavisno promenljiva*, a $y\,(= f(x))$ *zavisno promenljiva.*

Skup slika svih elemenata $x \in X$ obeležavamo sa $f(X)$. Očigledno je da je $f(X) \subseteq Y$.

[1)] Oznaka f dolazi od reči *funkcija* (*function* na engleskom jeziku). U upotrebi su, takođe, i oznake g, h, …, φ, ψ, …, itd.

Skup X koji preslikavamo zovemo *oblast definisanosti* ili *domen* funkcije f, a skup slika $f(X)$ nazivamo *skup vrednosti* ili *kodomen* funkcije f. Ponekad se oblast definisanosti funkcije f označava sa $\mathcal{D}(f)$, a skup njenih vrednosti sa $\mathcal{R}(f)$.

Na osnovu prethodnog možemo dati formalnu definiciju funkcije:

Definicija 1.1.1. Za relaciju $f \subset X \times Y$ kažemo da je funkcija $f\colon X \to Y$ ako

(1) $(\forall x \in X)\,(\exists y \in Y)\ \ (x, y) \in f\,,$

(2) $(x, y) \in f \,\wedge\, (x, z) \in f \ \Rightarrow\ y = z\,.$

Osobina (1) poznata je pod imenom *definisanost*, a osobina (2) *jednoznačnost.*

Primer 1.1.1. 1° Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b, c, d\}$ i neka je ρ relacija $\{(1, a), (2, b), (3, c)\} \subset A \times B$. Relacija ρ je funkcija koja preslikava elemente skupa A u skup B.

Oblast definisanosti ove funkcije je skup A, a skup vrednosti funkcije je skup $\{a, b, c\} \subset B$.

2° Neka je $A = \{0, 1, 2\}$ i $X = A^2 = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$. Relacija

$$\big\{((0,0),0),((0,1),1),((0,2),4),((1,0),1),((1,1),2),((1,2),5),\\ ((2,0),4),((2,1),5),((2,2),8)\big\} \subset X \times \mathbb{R}$$

je funkcija koja preslikava elemente skupa $X = A^2$ u skup $\mathbb{R}$. Ovo preslikavanje $f\colon A^2 \to \mathbb{R}$ se može izraziti simbolički, na primer, pomoću

$$(x, y) \mapsto f((x, y)) = x^2 + y^2.$$

Oblast definisanosti funkcije f je skup A^2, a skup vrednosti funkcije f je skup $f(A^2) = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} \subset \mathbb{R}$.

3° Neka je dat segment $S = [0, 1]$, $X = S^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in S\}$, $Y = \mathbb{R}^2$. Relacija $f \subset S^3 \times \mathbb{R}^2$, definisana pomoću

$$f((x, y, z)) = (x^2 + y^2 + z^2, 3xyz) \qquad (x, y, z \in S),$$

je funkcija sa S^3 u $\mathbb{R}^2$, pri čemu, svakoj uređenoj trojki (x, y, z) $(\in S^3)$ se pridružuje uređeni par $(x^2 + y^2 + z^2, 3xyz)$ $(\in \mathbb{R}^2)$. $\triangle$

Napomena 1.1.1. Ako je $c \in Y$, tada za preslikavanje $f\colon X \to Y$, definisano pomoću $f(x) = c$ za svako $x \in X$, kažemo da je *konstantno preslikavanje.* Takođe, kaže se i da je funkcija f konstanta.

Ako je $Y = X$ tada se preslikavanje $f\colon X \to X$, definisano pomoću $f(x) = x$ za svako $x \in X$, naziva *identičko preslikavanje* u X.

Definicija 1.1.2. Za dve funkcije $f: X \to Y$ i $g: U \to V$ kažemo da su jednake ako je $X = U$ i $Y = V$ i ako je

$$(\forall x \in X) \quad f(x) = g(x). \tag{1.1.1}$$

Ako je, međutim, $X \subset U$ i ako važi (1.1.1), reći ćemo da je f *suženje* ili *restrikcija* funkcije g (sa skupa U na skup X), tj. da je g *proširenje* ili *ekstenzija* funkcije f (sa skupa X na skup U).

Primer 1.1.2. 1° Neka su funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definisane redom pomoću

$$f(x) = x^2 \qquad \text{i} \qquad g(x) = x^2.$$

Iako su ove dve funkcije definisane istim analitičkim izrazom, one nisu među sobom jednake funkcije jer su im domeni različiti skupovi. S obzirom na inkluziju

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}, \qquad \text{tj.} \qquad \mathcal{D}(g) \subset \mathcal{D}(f),$$

zaključujemo da je funkcija g ekstenzija funkcije f, kao i da je funkcija f restrikcija funkcije g.

2° Neka je dat segment $S = [0, 2]$ i funkcija $g: S^2 \to \mathbb{R}$, definisana pomoću $z = g((x, y)) = x^2 + y^2$. Ova funkcija predstavlja ekstenziju funkcije $f: A^2 \to \mathbb{R}$ iz primera 1.1.1 (videti 2°). Za funkciju g kažemo da je funkcija od dve promenljive x i y i umesto $g((x, y))$ pišemo jednostavno $g(x, y)$. $\triangle$

Skup $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ naziva se *grafik* funkcije f. Ako su $X \subset \mathbb{R}$ i $f(X) \subset \mathbb{R}$, grafik funkcije se može predstaviti kao skup tačaka u *Dekartovoj*[2] *ravni*[3] Oxy.

Primer 1.1.3. 1° Deo grafika funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisane pomoću $y = f(x) = x^2$ (videti slučaj 1° u primeru 1.1.2), predstavljen je na slici 1.1.1. Na istoj slici 1.1.1, prikazan je i deo grafika funkcije $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (takođe videti primer 1.1.2), koji se sastoji iz niza tačaka. Naime, na slici su prikazane samo prve četiri tačke, tj. deo grafika $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\} \subset \Gamma(g)$.

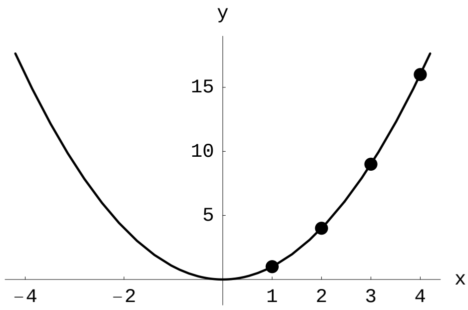
2° Funkcija od dve promenljive (videti slučaj 2° u primeru 1.1.2), definisana na $[0, 2] \times [0, 2]$ pomoću $z = g(x, y) = x^2 + y^2$, može se, takođe, grafički prikazati. Njen grafik je dat na slici 1.1.2, zajedno sa grafikom njene restrikcije f iz primera 1.1.1 (videti slučaj 2°).

Primetimo da se grafik funkcije f sastoji iz devet tačaka. $\triangle$

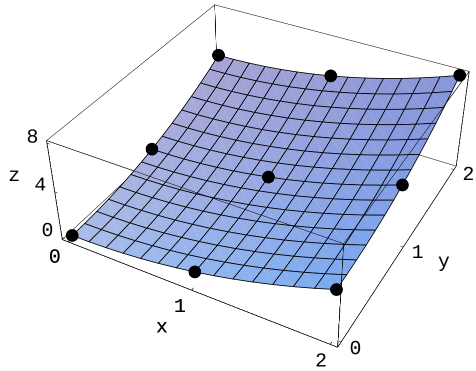
---

[2] René Descartes Cartesius)(1596–1650), veliki francuski filozof i matematičar.

[3] Za ovaj način predstavljanja grafika funkcije dovoljno je znanje iz srednje škole. Inače, Dekartov pravougli koordinatni sistem, kao i neki drugi koordinatni sistemi, detaljno su tretirani u predmetu *Linearna algebra*.



Sl. 1.1.1



Sl. 1.1.2

Napomena 1.1.2. Funkcije $f: X \to Y$ sa kojima se najčešće srećemo su realne, tj. takve da je $Y = \mathbb{R}$, a $X \subset \mathbb{R}^n$, gde je $n \geq 1$. Kada je $n = 1$ imamo slučaj realnih funkcija jedne realne promenljive, čije će osnovne osobine biti razmatrane u narednim odeljcima. Slučaj $n > 1$ dovodi nas do tzv. realnih funkcija više promenljivih, tačnije realnih funkcija n promenljivih. Dakle, uređenoj n-torki $(x_1, \dots, x_n) \in X$ pridružuje se vrednost $y = f((x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}$, pri čemu pišemo jednostavno $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Kod preslikavanja $f: X \to Y$ razlikovaćemo sledeća dva moguća slučaja: $f(X) = Y$ i $f(X) \subset Y$. U prvom slučaju kažemo da je skup X preslikan *na* skup Y, a u drugom da je skup X preslikan *u* skup Y. Postoje, dakle, sa tog stanovišta dve vrste preslikavanja: preslikavanje *na* skup i preslikavanje *u* skup. Za preslikavanje *na* skup kaže se da je *surjekcija* ili *surjektivno* preslikavanje.

Ako je preslikavanje $f: X \to Y$ takvo da iz jednakosti $f(x_1) = f(x_2)$ sleduje $x_1 = x_2$, kaže se da je f *injekcija* ili *injektivno* preslikavanje. Prema tome, kod ovog preslikavanja, ukoliko su slike jednake moraju biti jednaki i originali. Za ovo preslikavanje koristimo i termin preslikavanje 1–1.

Za svako preslikavanje koje je istovremeno surjekcija i injekcija kaže se da je *bijekcija* ili *bijektivno* preslikavanje. Takođe, za takvo preslikavanje kažemo da je *biunivoko* ili *obostrano jednoznačno* preslikavanje.

Definicija 1.1.3. Neka su X, Y i Z neprazni skupovi i neka su data preslikavanja $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$. Funkciju $h = g \circ f$, tj. funkciju $h: X \to Z$ definisanu pomoću

$$(\forall x \in X) \quad h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

zovemo *složena funkcija* od funkcija f i g ili *kompozicija preslikavanja* f i g.

U stvari, složena funkcija $h = g \circ f$ preslikava elemente x skupa X u elemente $z = h(x)$ skupa Z posredno, pomoću funkcija f i g, na sledeći način: prvo elemente x skupa X funkcijom f preslikava u elemente $y = f(x)$ skupa Y, a zatim tako dobijene elemente $y = f(x) \in Y$ funkcijom g preslikava u elemente $z = g(y) = g(f(x))$ skupa Z.

Preslikavanja f i g su, u stvari, međupreslikavanja.

Naravno, jedno složeno preslikavanje može biti realizovano i sa više međupreslikavanja. Ponekad se kaže da sva ta međupreslikavanja čine *lanac preslikavanja*, a ona sâma su *karike lanca.*

Napomenimo: ako su sva međupreslikavanja jednog složenog preslikavanja biunivoka preslikavanja, tada je i složeno preslikavanje biunivoko.

Bez dokaza[4)] navodimo sledeće tvrđenje:

Teorema 1.1.1. *Neka su X, Y, Z, W neprazni skupovi i neka $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$, tj. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} Z$. Tada je*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \tag{1.1.2}$$

Primer 1.1.4. 1° Funkcija $x \mapsto \log(\sin x + 1)$ je složena funkcija. Čine je preslikavanja:

(a) $y \mapsto \log y$ i $x \mapsto y = \sin x + 1$,

(b) $z \mapsto \log z$, $y \mapsto z = y + 1$ i $x \mapsto y = \sin x$.

2° Preslikavanje $x \mapsto 2\sin(3x^2 + 1)$ je složeno preslikavanje. Čine ga, na primer, sledeća preslikavanja:

(a) $y \mapsto 2\sin y$ i $x \mapsto y = 3x^2 + 1$,

(b) $z \mapsto 2\sin z$, $y \mapsto z = y + 1$ i $x \mapsto y = 3x^2$. $\triangle$

Iz ovih primera se vidi da lanac jednog složenog preslikavanja nije jednoznačno određen. Ali, iz jednog lanca složenog preslikavanja jednoznačno se dobija složeno preslikavanje.

Primetimo da složena preslikavanja $f \circ g$ i $g \circ f$ ne moraju biti jednaka.

Primer 1.1.6. Za funkcije $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date pomoću

$$g(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad \text{i} \qquad f(x) = x^2 - 1\,,$$

imamo

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= f(x)^2 - 3f(x) + 2\\ &= (x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1) + 2 = x^4 - 5x^2 + 6\end{aligned}$$

[4)] Dokazi teorema koje navodimo u ovom odeljku mogu se naći u knjizi [15].

i

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^2 - 3x + 2)^2 - 1 = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 3.$$

Očigledno, $(g \circ f)(x) \not\equiv (f \circ g)(x)$. $\triangle$

Primer 1.1.7. Neka su funkcije $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane pomoću $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2$.

Kompozicija funkcija f i g, tj. $(g \circ f)\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, određena je sa

$$(\forall x \in \mathbb{R}_0^+) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Kako je skup slika $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$ $(\subset \mathbb{R})$, funkciju g možemo tretirati kao preslikavanje $\mathbb{R}$ *na* skup $\mathbb{R}_0^+$, pa je onda moguće definisati i kompoziciju funkcija g i f, tj.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Dakle, funkciju $x \mapsto |x|$ dobili smo kao kompoziciju funkcija $x \mapsto x^2$ i $x \mapsto \sqrt{x}$.

Primetimo da se oblasti definisanosti kompozicija $g \circ f$ i $f \circ g$ razlikuju. Funkcija $f \circ g$ je ekstenzija funkcije $g \circ f$. $\triangle$

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.1.2. *Neka je $f\colon X \to Y$ biunivoko preslikavanje. Tada postoji jedno i samo jedno biunivoko preslikavanje $\bar{f}\colon Y \to X$, za koje važi*

$$(\forall x \in X) \qquad \big(\bar{f} \circ f\big)(x) = x \tag{1.1.3}$$

i

$$(\forall y \in Y) \qquad \big(f \circ \bar{f}\big)(y) = y. \tag{1.1.4}$$

Primetimo da uslovi (1.1.3) i (1.1.4) pokazuju da su kompozicije $\bar{f} \circ f$ i $f \circ \bar{f}$ identička preslikavanja u X i Y, respektivno.

Na osnovu prethodnog moguće je dati definiciju *inverzne* funkcije:

Definicija 1.1.4. Neka je $f\colon X \to Y$ biunivoko preslikavanje. Za preslikavanje $f^{-1}\colon Y \to X$, za koje je $f^{-1} \circ f$ identičko preslikavanje u X i $f \circ f^{-1}$ identičko preslikavanje u Y, kažemo da je inverzno preslikavanje za f.

Dakle, preslikavanja $f\colon X \to Y$ i $f^{-1}\colon Y \to X$ su biunivoka i za njih važi

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f(f^{-1}(y)) = y \qquad (x \in X,\, y \in Y).$$

Ukazaćemo sada na neke osnovne osobine realnih funkcija jedne realne promenljive. Neka je, dakle, data funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$, čija je oblast definisanosti (domen) $X \subset \mathbb{R}$.

Oblast definisanosti jedne realne funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$ može biti bilo koji neprazan podskup od $\mathbb{R}$: interval (a,b), segment $[a,b]$, polusegmenti $[a,b)$ i $(a,b]$, unije bilo kojih od ovih skupova, uključujući, eventualno, i izolovane tačke. U posebnom slučaju, kada je funkcija f zadata „analitički", tj. formulom, od interesa je naći tzv. *prirodnu oblast definisanosti* takve funkcije. To je, u stvari, skup svih realnih brojeva $x \in \mathbb{R}$ za koje takva formula ima smisla, tj. za koje je $f(x) \in \mathbb{R}$.

Primer 1.1.8. 1° Funkcija $x \mapsto \sqrt{x}$ definisana je za $x \ge 0$, tj. njena oblast definisanosti je $X = [0, +\infty)$. Skup vrednosti funkcije je takođe skup $[0, +\infty)$.

2° Logaritamska funkcija $x \mapsto \log x$ definisana je za $x > 0$. Ovde je oblast definisanosti $X = (0, +\infty)$, a skup njenih vrednosti je $(-\infty, +\infty)$. $\triangle$

Primer 1.1.9. 1° Oblast definisanosti funkcije $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ je

$$X = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

2° Za funkciju $x \mapsto \log(5 + 4x - x^2)$ oblast definisanosti je interval $X = (-1, 5)$.

3° Funkcija $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}\,\log(5 + 4x - x^2)$ ima oblast definisanosti $X = [1, 5)$, što predstavlja presek oblasti definisanosti funkcija iz 1° i 2°. $\triangle$

Primer 1.1.10. Funkcija $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, definisana pomoću $f(x) = 1$, ima za oblast definisanosti skup svih racionalnih brojeva, dok se skup vrednosti funkcije sastoji samo od jedne tačke $f(\mathbb{Q}) = \{1\}$. $\triangle$

Primer 1.1.11. Oblast definisanosti funkcije $x \mapsto \log(\sin x)$ je unija intervala $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. $\triangle$

Primer 1.1.12. Posmatrajmo tzv. *stepenu funkciju* $x \mapsto f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Odredićemo oblast definisanosti ove funkcije u zavisnosti od α.

1° Ako je α bilo koji realan broj, tada se funkcija f definiše pomoću $f(x) = e^{\alpha \log x}$, odakle zaključujemo da je oblast definisanosti ove funkcije $X = (0, +\infty)$;

2° Ako je α ceo ili racionalan broj oblika $\alpha = p/q$, gde je q neparan broj, stepena funkcija $x \mapsto x^\alpha$ ima smisla, kao realna funkcija, i za negativno x. Tada je oblast definisanosti $X = \mathbb{R}$ ako je $\alpha > 0$ i $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ako je $\alpha < 0$. $\triangle$

Primer 1.1.13. Ukazaćemo na tri interesantne funkcije, koje se često koriste i na koje ćemo se u daljem tekstu, povremeno, pozivati.

1° Funkcija *najveće celo od* x, u oznaci $[x]$, definisana je sa

$$x \mapsto [x] = n \qquad (n \le x < n+1,\ n \in \mathbb{Z}).$$

2° Funkcija *razlomljeni deo od* x, u oznaci (x), definisana je sa

$$x \mapsto (x) = x - [x] \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3° Funkcija *znak od* x, u oznaci $\operatorname{sgn}(x)$, definisana je sa

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ako je} \quad x < 0, \\ 0, & \text{ako je} \quad x = 0, \\ 1, & \text{ako je} \quad x > 0. \end{cases}$$

Primetimo da za $x \neq 0$ važi $\operatorname{sgn}(x) = |x|/x$. $\triangle$

Često se umesto funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$ posmatra njena restrikcija na neko $D\,(\subset X)$ (videti definiciju 1.1.2). Ako ne može doći do zabune, restrikciju $f^*\colon D \to \mathbb{R}$ označavaćemo jednostavno sa $f\colon D \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.1.5. Za funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$ kažemo da ima *infimum* (*supremum*) ako postoji infimum (supremum) skupa $f(X)$.

Ako funkciju f tretiramo kao preslikavanje u prošireni skup realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}\,(= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$, tada infimum i supremum u $\overline{\mathbb{R}}$ uvek postoje tako da imamo

$$m = \inf_{x \in X} f(x) = \inf f(X) \qquad \text{i} \qquad M = \sup_{x \in X} f(x) = \sup f(X).$$

Za brojeve m i M koriste se i termini *donja* i *gornja međa funkcije* na X.

Ako je m konačan broj, za funkciju f kažemo da je *ograničena odozdo*. Isto tako, ako je M konačan broj, kažemo da je funkcija f *ograničena odozgo*.

Ako u X postoji tačka ξ takva da je $f(\xi) = m$, tada kažemo da je m *minimum funkcije* f na X. Slično se definiše *maksimum funkcije* na X.

Definicija 1.1.6. Za funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ kažemo da je *ograničena* ako je skup vrednosti funkcije $\mathcal{R}(f)$ ograničen skup. Za funkciju koja nije ograničena, kažemo da je *neograničena*.

Drugim rečima, funkcija f je ograničena na X ako je

$$-\infty < \inf_{x \in X} f(x) \leq \sup_{x \in X} f(x) < +\infty\,,$$

a neograničena ako je

$$\inf_{x \in X} f(x) = -\infty \qquad \text{ili/i} \qquad \sup_{x \in X} f(x) = +\infty\,.$$

Definicija 1.1.7. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ ograničena na X. Za broj

$$\Omega(f) = M - m = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$$

kažemo da je *oscilacija funkcije* f na X.

Primer 1.1.14. 1° Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2 \ \big(x \in (-1,1)\big)$ je ograničena na $(-1,1)$ jer je skup $[0,1)$ ograničen. Minimum ove funkcije na $(-1,1)$ je $m = 0$, dok je $M = 1$ supremum funkcije na intervalu definisanosti. Oscilacija funkcije na $(-1,1)$ je $\Omega(f) = M - m = 1$. Napomenimo da je f restrikcija stepene funkcije $x \mapsto x^2$ sa $\mathbb{R}$ na $(-1,1)$.

2° Funkcija $x \mapsto f(x) = (x) \ \ (x \in \mathbb{R})$ je ograničena jer je $0 \le (x) < 1$.

3° Funkcija $x \mapsto f(x) = 1/x \ \big(x \in (0,1)\big)$ nije ograničena jer skup vrednosti funkcije f, tj. skup $(1, +\infty)$, nije ograničen. Ovde je

$$\inf_{x \in (0,1)} f(x) = 1 \qquad \text{i} \qquad \sup_{x \in (0,1)} f(x) = +\infty\,.$$

Očigledno, funkcija f je ograničena odozdo, a neograničena odozgo. △

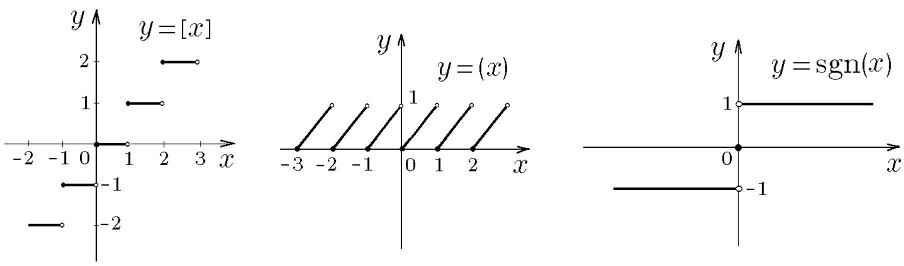
1.2. Grafik funkcije

Neka je $X\,(\subset \mathbb{R})$ oblast definisanosti funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$. Kao što smo videli u odeljku 1.1, skup

$$\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in X\}$$

zove se grafik funkcije f i on se može predstaviti kao skup tačaka u ravni Oxy. Taj skup tačaka geometrijski u nekim delovima (ili u celosti) može predstavljati liniju i/ili neki skup izolovanih tačaka (videti primer 1.1.3). Kada je u pitanju linija, za grafik funkcije f kažemo da predstavlja krivu $y = f(x)$.

Primer 1.2.1. Grafici funkcija iz primera 1.1.13 su dati na slici 1.2.1. △



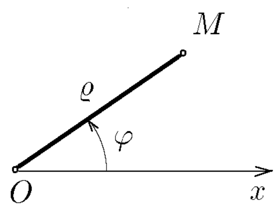
Sl. 1.2.1

Umesto pravouglog koordinatnog sistema, za predstavljanje grafika funkcije može se koristiti i neki drugi koordinatni sistem, na primer, polarni koordinatni sistem, koji ćemo uvesti na sledeći način:

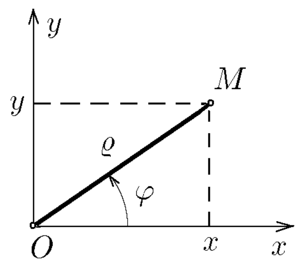
U ravni R izaberimo tačku O i poluosu Ox za koje kažemo da su *pol* i *polarna osa*. Proizvoljna tačka M u ravni R može se potpuno opisati pomoću rastojanja ϱ između tačaka O i M i ugla φ koji zaklapa duž $\overline{OM}$ sa polarnom osom uzet u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku (videti sliku 1.2.2). Za brojeve ϱ i φ kažemo da su *polarne koordinate* tačke M u ravni R. Broj ϱ se naziva *polarni radijus*, a φ *polarni ugao*. Moguće vrednosti polarnih koordinata su, dakle,

$$0 \leq \varrho < +\infty, \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi\,.$$

Pol O se predstavlja samo jednom koordinatom $\varrho = 0$. Za polarni ugao pola O kažemo da nije određen.



Sl. 1.2.2



Sl. 1.2.3

Napomena 1.2.1. Za polarni ugao φ mogu se uzeti vrednosti iz intervala $(-\pi, +\pi]$.

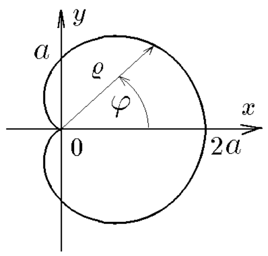
Ako na polarnu osu Ox u ravni R postavimo pod pravim uglom osu Oy, dobijamo Dekartov pravougli koordinatni sistem u ravni R (slika 1.2.3). Veza između polarnih koordinata (ϱ, φ) i pravouglih (x, y) data je sa

$$x = \varrho \cos\varphi, \qquad y = \varrho \sin\varphi\,,$$

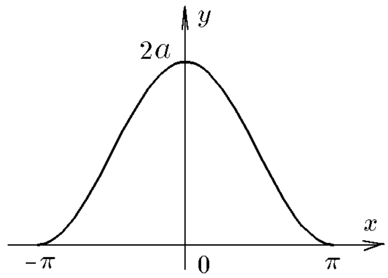
odnosno

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\varrho}\,.$$

Kako je $\varrho \geq 0$, u polarnom koordinatnom sistemu ima smisla posmatrati samo funkcije $\varphi \mapsto \varrho = f(\varphi)$, gde je $f(\varphi) \geq 0$.



Sl. 1.2.4



Sl. 1.2.5

Primer 1.2.2. Neka je $\varrho = f(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$. Uzmimo da se polarni ugao φ menja u granicama od $-\pi$ do π (videti napomenu 1.2.1). Kako je $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, dovoljno je razmatrati slučaj kada je $0 \le \varphi \le \pi$. U tabeli su date koordinate nekih tačaka grafika ove krive koja je, inače, poznata kao *kardioida*.

φ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
ϱ	$2a$	$3a/2$	a	$a/2$	0

Kriva je simetrična u odnosu na polarnu osu (slika 1.2.4). $\triangle$

Napomena 1.2.2. Iako se polarna osa poklapa sa pozitivnim delom x-ose, treba razlikovati grafik funkcije $\varphi \mapsto f(\varphi)$ u polarnom sistemu od grafika funkcije $x \mapsto f(x)$ u pravouglom koordinatnom sistemu jer se radi o različitim skupovima tačaka. Na primer, kriva $\varrho = a(1+\cos\varphi)$ predstavlja kardioidu u polarnom sistemu, a kriva $y = a(1+\cos x)$ transliranu sinusoidu (slika 1.2.5) u pravouglom koordinatnom sistemu.

1.3. Parne i neparne funkcije

Neka je X $(\subset \mathbb{R})$ takav da ako je $x \in X$ sleduje da je i $-x \in X$. Za takav skup kažemo da je *simetričan skup*. Moguća su sledeća tri slučaja:

1° Za svako $x \in X$ važi $f(-x) = f(x)$;

2° Za svako $x \in X$ važi $f(-x) = -f(x)$;

3° Ne važi ni 1° ni 2°, sem, možda, za neke $x \in X$.

Definicija 1.3.1. Ako za svako $x \in X$ važi $f(-x) = f(x)$, kažemo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ *parna funkcija.*

Definicija 1.3.2. Ako za svako $x \in X$ važi $f(-x) = -f(x)$, kažemo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ *neparna funkcija.*

Primer 1.3.1. 1° Funkcija $x \mapsto x^2$, definisana za $x \in X = (-1,1)$, je parna jer je $f(-x) = f(x)$ za svako $x \in X$.

2° Funkcija $x \mapsto \sin x$, definisana za $x \in \mathbb{R}$, je neparna jer je $f(-x) = -f(x)$ za svako realno x.

3° Funkcija $x \mapsto e^x$, definisana za $x \in \mathbb{R}$, nije ni parna ni neparna jer za svako $x \neq 0$ važi $f(-x) \neq \pm f(x)$.

4° Za funkciju $x \mapsto x^2$, definisanu na $X = (1, 2)$, nema smisla postavljati pitanje parnosti ili neparnosti jer skup X nije simetričan. $\triangle$

Teorema 1.3.1. *Svaka funkcija $x \mapsto f(x)$, definisana na simetričnom skupu X $(\subset \mathbb{R})$, može se predstaviti kao zbir jedne parne i jedne neparne funkcije.*

Dokaz. Posmatrajmo funkcije $x \mapsto \varphi(x)$ i $x \mapsto \psi(x)$ $(x \in X)$, određene sa

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \qquad \text{i} \qquad \psi(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big).$$

Nije teško proveriti da je φ parna, a ψ neparna funkcija. Međutim, očigledno je $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. $\square$

Napomenimo da se činjenica da je neka funkcija parna ili neparna može iskoristiti kod skiciranja njenog grafika. Naime, kako su tačke $M(x, f(x))$ i $N(-x, f(x))$ simetrične u odnosu na y-osu, zaključujemo da je grafik parne funkcije $x \mapsto f(x)$ simetričan u odnosu na osu Oy koordinatnog sistema Oxy. Isto tako, grafik neparne funkcije $x \mapsto f(x)$ je simetričan u odnosu na koordinatni početak O jer su tačke $M(x, f(x))$ i $N(-x, -f(x))$ simetrične u odnosu na tačku O.

1.4. Periodične funkcije

Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.4.1. Ako postoji pozitivan broj τ takav da je za svako $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + \tau) = f(x),$$

kažemo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ *periodična funkcija*, a da je τ njen *period*. Ako je T najmanji od svih takvih brojeva τ, kažemo da je T *osnovni period* periodične funkcije f.

Primetimo da za periodičnu funkciju f, takođe, važi $f(x - \tau) = f(x)$.

Iz definicije 1.4.1 neposredno sleduje sledeće tvrđenje:

Teorema 1.4.1. *Ako je T period periodične funkcije $x \mapsto f(x)$ i $k \in \mathbb{N}$, tada je i kT period funkcije f.*

Teorema 1.4.2. *Ako je $\lambda \neq 0$ i $x \mapsto f(x)$ periodična funkcija sa osnovnim periodom T, tada je i funkcija $x \mapsto f(\lambda x)$ periodična sa osnovnim periodom $T/|\lambda|$.*

Dokaz. Definišimo funkciju φ pomoću $\varphi(x) = f(\lambda x)$. Tada je

$$\varphi\Big(x + \frac{T}{|\lambda|}\Big) = f\Big(\lambda x + T\,\frac{\lambda}{|\lambda|}\Big) = f\big(\lambda x + T \operatorname{sgn} \lambda\big) = f(\lambda x) = \varphi(x).$$

Dakle, osnovni period funkcije $x \mapsto f(\lambda x) = \varphi(x)$ je $T/|\lambda|$. $\triangle$

Primer 1.4.1. 1° Funkcija $x \mapsto a(1 + \cos x)$ $(x \in \mathbb{R})$ je periodična funkcija sa osnovnim periodom $T = 2\pi$ (slika 1.2.5).

2° Funkcija $x \mapsto x - [x]$ je periodična sa osnovnim periodom $T = 1$.

3° Funkcija $x \mapsto \tan 5x$ je periodična sa osnovnim periodom $T = \pi/5$. $\triangle$

Primer 1.4.2. Za *Dirichletovu*[5] *funkciju* $x \mapsto \chi(x)$, određenu sa

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ako je} \quad x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

važi $\chi(x + \tau) = \chi(x)$, za svako racionalno τ. Međutim, ova funkcija nema osnovni period T jer ne postoji najmanji pozitivan racionalan broj. $\triangle$

Saznanje da je $x \mapsto f(x)$ periodična funkcija može koristiti kod skiciranja njenog grafika. Naime, dovoljno je skicirati ga samo na segmentu dužine T.

Napomenimo na kraju da iz periodičnosti funkcije $x \mapsto g(x)$ sleduje periodičnost složene funkcije $x \mapsto f(g(x))$. Na primer, funkcija $x \mapsto \log(|\sin x|)$ je periodična sa osnovnim periodom $T = \pi$.

1.5. Monotone funkcije

Neka je data funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ i neka je $D \subset X \subset \mathbb{R}$.

Definicija 1.5.1. Funkcija f je *neopadajuća* na D ako za svaki par različitih vrednosti $x_1, x_2 \in D$ važi implikacija: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$. U slučaju stroge nejednakosti kažemo da je f *rastuća funkcija* na D.

Definicija 1.5.2. Funkcija f je *nerastuća* na D ako za svaki par različitih vrednosti $x_1, x_2 \in D$ važi implikacija: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$. U slučaju stroge nejednakosti kažemo da je f *opadajuća funkcija* na D.

[5] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), francuski matematičar.

Napomenimo da implikacijama u prethodnim definicijama odgovaraju nejednakosti:

$$(x_1 - x_2)\big(f(x_1) - f(x_2)\big) \geq 0 \qquad \text{i} \qquad (x_1 - x_2)\big(f(x_1) - f(x_2)\big) \leq 0.$$

Primer 1.5.1. 1° Funkcija $x \mapsto [x]$ je neopadajuća na $\mathbb{R}$ jer za svaki par realnih brojeva $x_1 < x_2$ sleduje $[x_1] \leq [x_2]$ (videti grafik ove funkcije na slici 1.2.1).

2° Funkcija $x \mapsto x^2$ je rastuća na $D = [0, +\infty)$ jer je $x_1^2 < x_2^2$ za $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D)$.

3° Neka je $x \mapsto f(x) = |x - 1| - |x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Kako je

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -2x + 1, & 0 \leq x < 1, \\ -1, & x \geq 1, \end{cases}$$

zaključujemo da je f nerastuća funkcija na $\mathbb{R}$.

4° Funkcija $x \mapsto 1/x$ je opadajuća na $D = (0, +\infty)$ jer za svaki par različitih vrednosti $x_1, x_2 \in D$ važi

$$(x_1 - x_2)\Big(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\Big) = -\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2} < 0. \quad \triangle$$

Definicija 1.5.3. Za funkcije određene definicijama 1.5.1 i 1.5.2 kažemo da su *monotone funkcije* na D.

Iz ovih definicija neposredno sleduju sledeća tvrđenja:

Teorema 1.5.1. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neopadajuća, rastuća, nerastuća ili opadajuća na D, tada je funkcija $x \mapsto -f(x)$, respektivno, nerastuća, opadajuća, neopadjuća ili rastuća na D.*

Važi, dakle, dualizam: (ne)rastuća – (ne)opadajuća.

Isto tako, važe sledeća tvrđenja:

Teorema 1.5.2. *Ako su funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ neopadajuće na D, takva je i funkcija $x \mapsto f(x) + g(x)$.*

Teorema 1.5.3. *Ako je $x \mapsto f(x)$ neopadajuća na D i ako je $\alpha > 0$, tada je i funkcija $x \mapsto \alpha f(x)$ neopadajuća na D.*

Teorema 1.5.4. *Ako su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ nenegativne opadajuće funkcije na D, takva je i funkcija $x \mapsto f(x)g(x)$.*

Teorema 1.5.5. *Ako je $x \mapsto f(x)$ pozitivna i neopadajuća funkcija na D, tada je funkcija $x \mapsto 1/f(x)$ nerastuća na D.*

Naravno, važe i njima dualna tvrđenja koja nećemo navoditi.

Za neke klase funkcija moguće je jednostavnije ispitati njihovu monotonost na D korišćenjem pojma izvoda funkcije, o čemu će biti reči u IV glavi ove knjige.

1.6. Konveksne funkcije

Neka je data funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ i $D = [a, b] \subset X \subset \mathbb{R}$.

Definicija 1.6.1. Za funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je *konveksna u Jensenovom*[6] *smislu* ili da je *J-konveksna* na D ako za svaki par vrednosti x_1 i x_2 iz D važi nejednakost

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\,. \tag{1.6.1}$$

Ako u (1.6.1) važi striktna nejednakost, funkcija f je *striktno J-konveksna* na D.

Primer 1.6.1. Funkcija $x \mapsto x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ je J-konveksna jer se nejednakost

$$\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big)^2 \le \frac{1}{2}\Big(x_1^2 + x_2^2\Big)\,,$$

koja karakteriše J-konveksnost posmatrane funkcije, svodi na $(x_1 - x_2)^2 \ge 0$, a ona je tačna za bilo koje vrednosti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Definicija 1.6.2. Za funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je (*striktno*) *konkavna u Jensenovom smislu* ili da je (*striktno*) *J-konkavna* na D ako je funkcija $x \mapsto -f(x)$ (*striktno*) *J-konveksna* na D.

Napomena 1.6.1. Funkcija $x \mapsto f(x)$ je konkavna u Jensenovom smislu na D ako za svaki par vrednosti x_1 i x_2 iz D važi nejednakost

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\,.$$

Primer 1.6.2. Funkcija $x \mapsto \log x$ $(x > 0)$ je konkavna u Jensenovom smislu jer se nejednakost

$$\log\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \ge \frac{1}{2}(\log x_1 + \log x_2),$$

svodi na nejednakost $(x_1 - x_2)^2 \ge 0$. $\triangle$

Pored konveksnosti u Jensenovom smislu, postoje i drugi tipovi konveksnosti. Navešćemo neke od njih.

---

[6] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859–1926), danski matematičar.

Definicija 1.6.3. Za funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je *konveksna* na D ako je

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \tag{1.6.2}$$

za svaki par vrednosti x_1 i x_2 iz D i za sve realne brojeve $\lambda \in [0,1]$. Ako u (1.6.2) važi striktna nejednakost, funkcija $x \mapsto f(x)$ je *striktno konveksna* na D.

Nejednakost (1.6.2) može se predstaviti u obliku

$$f\Big(\frac{px_1 + qx_2}{p+q}\Big) \le \frac{pf(x_1) + qf(x_2)}{p+q}, \tag{1.6.3}$$

gde smo stavili: $\lambda = p/(p+q)$; $p, q \ge 0$; $p+q > 0$.

Teorema 1.6.1. *Svaka konveksna funkcija je J-konveksna.*

Dokaz. Ako u (1.6.2) stavimo $\lambda = 1/2$, dobijamo nejednakost koja je, u stvari, nejednakost (1.6.1). $\square$

Teorema 1.6.2. *Funkcija $x \mapsto f(x)$ je konveksna na D ako i samo ako je, za bilo koje tri tačke x_1, x_2, x_3 iz D ($x_1 < x_2 < x_3$),*

$$(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) \ge 0\,. \tag{1.6.4}$$

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija na D, tj. neka za bilo koji par vrednosti $x, y \in D$ važi nejednakost

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{1.6.5}$$

Pretpostavimo da je $x < y$, što ne umanjuje opštost razmatranja.

Ako stavimo $x = x_1$ i $y = x_3$, nejednakost (1.6.5) postaje

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3\big) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3). \tag{1.6.6}$$

Kako je $x_1 < x_3$, uvek postoji $x_2 \in D$ tako da je $x_1 < x_2 < x_3$. Postoji, dakle, x_2 tako da je $0 < x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, tj. da važi $0 < (x_3 - x_2)/(x_3 - x_1) < 1$. Stavljajući u (1.6.6) $\lambda = (x_3 - x_2)/(x_3 - x_1)$ dobijamo

$$f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3),$$

tj. (1.6.4). Dakle, ako je funkcija f konveksna funkcija, onda ona zadovoljava nejednakost (1.6.4).

Obrnuto, ako stavimo

$$x_1 = x, \quad x_3 = y, \quad x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3 = \lambda x + (1-\lambda)y,$$

gde je $x < y$, imamo

$$x_3 - x_2 = \lambda(y-x), \quad x_1 - x_3 = -(y-x), \quad x_2 - x_1 = (1-\lambda)(y-x),$$

pa nejednakost (1.6.4) postaje

$$(1-\lambda)f(x) - f\bigl(\lambda x + (1-\lambda)y\bigr) + \lambda f(y) \geq 0,$$

tj. (1.6.5). Prema tome, ako funkcija f zadovoljava nejednakost (1.6.4), onda je ona konveksna funkcija. $\square$

Napomena 1.6.2. Nejednakost (1.6.4) može se predstaviti i u obliku

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + \frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \geq 0,$$

što se dobija deljenjem (1.6.4) sa $(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2) > 0$ $(x_1 < x_2 < x_3)$.

Napomena 1.6.3. Nejednakostima koje su suprotne nejednakostima (1.6.2), (1.6.3) i (1.6.4) definišu se odgovarajuće konkavnosti posmatranih funkcija.

1.7. Inverzne funkcije

U odeljku 1.1 uveli smo pojam inverzne funkcije i pokazali da samo biunivoka preslikavanja imaju sebi inverzna preslikavanja i da za njih važi

(1.7.1) $$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f(f^{-1}(y)) = y \qquad (x \in X,\, y \in Y).$$

Ovde je $X = \mathcal{D}(f)$ i $Y = \mathcal{R}(f) = f(X)$.

Sledeća teorema se odnosi na strogo monotone (rastuće ili opadajuće) funkcije na X.

Teorema 1.7.1. *Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ strogo monotona funkcija na $X(\subset \mathbb{R})$. Tada f ima inverznu funkciju f^{-1}, definisanu na $Y = f(X)$, koja je strogo monotona na Y.*

Dokaz. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je f rastuća funkcija na X, tj. da je $f(x_1) < f(x_2)$ kada je $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$. Ovo znači da je f

tzv. preslikavanje 1–1 ili injekcija (videti odeljak 1.4). Štaviše, preslikavanje $f\colon X \to f(X)$ je preslikavanje *na*, pa zaključujemo da je ono, u stvari, biunivoko preslikavanje. Zato postoji inverzno preslikavanje f^{-1}, definisano na $Y = f(X)$.

Dokazaćemo sada da je ovo preslikavanje rastuća funkcija na Y, tj. da je $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ kada je $y_1 < y_2$ $(y_1, y_2 \in Y)$. Zaista, kada bi bilo obrnuto, tj. $f^{-1}(y_1) \ge f^{-1}(y_2)$, imali bismo da je

$$f\bigl(f^{-1}(y_1)\bigr) \ge f\bigl(f^{-1}(y_2)\bigr)$$

jer je funkcija f rastuća. Na osnovu (1.7.1), poslednja nejednakost se svodi na $y_1 \ge y_2$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $y_1 < y_2$. Dakle, mora važiti

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Potpuno analogno se dokazuje slučaj kada je f opadajuća funkcija na X. Tada se dokazuje da je funkcija f^{-1} opadajuća na $Y = f(X)$. $\square$

Primer 1.7.1. 1° Funkcija $x \mapsto x^3$ je rastuća na $\mathbb{R}$ i preslikava $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Na osnovu prethodne teoreme, postoji njena inverzna funkcija $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ koja raste na $\mathbb{R}$.

2° Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisana sa $f(x) = x^2$, nema inverznu funkciju jer f nije 1–1 preslikavanje. Međutim, restrikcije ove funkcije na $[0, +\infty)$, odnosno na $(-\infty, 0]$, imaju svoje inverzne funkcije.

Zaista, funkcija $x \mapsto x^2$, definisana na $X = [0, +\infty)$, je rastuća na X i preslikava X na X. Ovo znači da ona ima inverznu funkciju $y \mapsto \sqrt{y}$, definisanu na $[0, +\infty)$, koja je rastuća na $[0, +\infty)$.

Slično, restrikcija f na $X' = (-\infty, 0]$ je opadajuća na X' i preslikava X' na X. Njena inverzna funkcija $y \mapsto -\sqrt{y}$ preslikava X na X' i opada na X. $\triangle$

Na kraju ovog odeljka dajemo jednu geometrijsku interpretaciju koja se odnosi na grafike funkcija f i f^{-1}.

Neka je $a \in X$. Nije teško proveriti da su, u koordinatnom sistemu Oxy, tačke $M\bigl(a, f(a)\bigr)$ i $M'\bigl(f(a), a\bigr)$ simetrične u odnosu na pravu $y = x$. Kako je $a = f^{-1}\bigl(f(a)\bigr)$, tačka M' je, u stvari, tačka $M'\bigl(f(a), f^{-1}\bigl(f(a)\bigr)\bigr)$. Prema tome, M' je tačka grafika funkcije $x \mapsto f^{-1}(x)$. Ovo znači da su grafici funkcija $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto f^{-1}(x)$, u koordinatnom sistemu Oxy, simetrični u odnosu na pravu $y = x$.

Dakle, krive $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ simetrične su u odnosu na pravu $y = x$. Naravno, ovu činjenicu moguće je korisno upotrebiti za skiciranje grafika funkcije $x \mapsto f^{-1}(x)$ ako je poznat grafik krive $y = f(x)$ i obrnuto.

1.8. Krive i funkcije u parametarskom obliku

Jednačinama oblika

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad (\alpha \le t \le \beta), \tag{1.8.1}$$

moguće je definisati izvesnu krivu Γ u ravni, gde je t parametar. Naime, neka su date dve funkcije $t \mapsto x = \varphi(t)$ i $t \mapsto y = \psi(t)$ koje preslikavaju $[\alpha, \beta]$ u neke skupove $X\,(\subset \mathbb{R})$ i $Y\,(\subset \mathbb{R})$, respektivno. Za dato $t \in [\alpha, \beta]$, uređenom paru (x, y) pridružićemo tačku M $(= M(t))$ sa odgovarajućim koordinatama x i y u Dekartovoj ravni Oxy. Kao što smo videli u odeljku 2.2, u izvesnim slučajevima, skup tačaka

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (\alpha \le t \le \beta)\} \tag{1.8.2}$$

može predstavljati krivu. Za krivu (1.8.2) kažemo da je *definisana parametarski* pomoću jednačina (1.8.1).

Ponekad, eliminacijom t iz jednačina (1.8.1) moguće je naći eksplicitnu vezu između x i y.

Primer 1.8.1. Neka je

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \qquad (a, b > 0;\ t \in \mathbb{R}). \tag{1.8.3}$$

Zbog periodičnosti funkcija $t \mapsto \cos t$ i $t \mapsto \sin t$ dovoljno je razmatrati samo slučaj kada $t \in [0, 2\pi)$. Kako je

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

zaključujemo da je jednačinama (1.8.3) definisana elipsa u ravni Oxy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Ovim su, u stvari, definisane dve funkcije:

$$x \mapsto b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad x \mapsto -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad (-a \le x \le a). \quad \triangle$$

Pretpostavimo da je na nekom segmentu $T = [t_1, t_2]$ $(\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta)$ jedna od funkcija φ ili ψ strogo monotona. Neka je to, na primer, funkcija

φ. Tada, na osnovu teoreme 1.7.1, postoji njena inverzna funkcija φ^{-1} definisana na $\varphi(T)$. U tom slučaju, iz (1.8.1) sleduje

$$y = \psi\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr),$$

gde $x \in [\varphi(t_1), \varphi(t_2)]$ ili $x \in [\varphi(t_2), \varphi(t_1)]$, u zavisnosti da li je funkcija φ rastuća ili opadajuća na T. Ovim smo, dakle, odredili funkciju

$$x \mapsto f(x) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x) = \psi\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr) \qquad (x \in \varphi(T)),$$

čiji je grafik deo krive Γ koji odgovara parametru $t \in T$. Za funkciju f kažemo da je *parametarski zadata* pomoću

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (t_1 \le t \le t_2).$$

Dakle, u definiciji funkcije f bitnu ulogu je imala egzistencija inverzne funkcije φ^{-1}.

Slično, ako funkcija ψ ima inverznu funkciju ψ^{-1}, definisanu na $\psi(T)$, tada se, na osnovu (1.8.1), može definisati funkcija g pomoću

$$y \mapsto g(y) = (\varphi \circ \psi^{-1})(y) = \varphi\bigl(\psi^{-1}(y)\bigr) \qquad (y \in \psi(T)).$$

Primer 1.8.2. 1° Funkcijama $t \mapsto x = t^2$ i $t \mapsto y = t^4 + 1$ $(t \ge 0)$ definisana je funkcija

$$x \mapsto y = x^2 + 1 \qquad (x \ge 0).$$

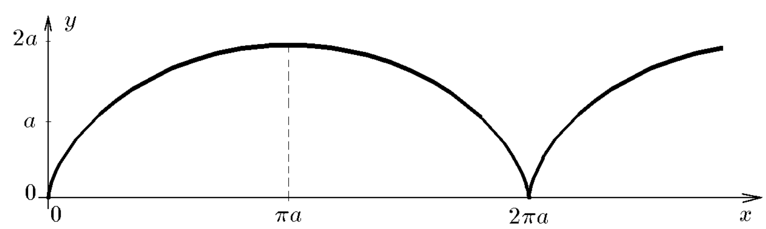
2° Funkcije $t \mapsto x = e^t + 1$ i $t \mapsto y = \log t - 1$ $(t > 0)$ određuju funkciju

$$x \mapsto y = \log\bigl(\log(x-1)\bigr) - 1 \qquad (x > 2). \quad \triangle$$

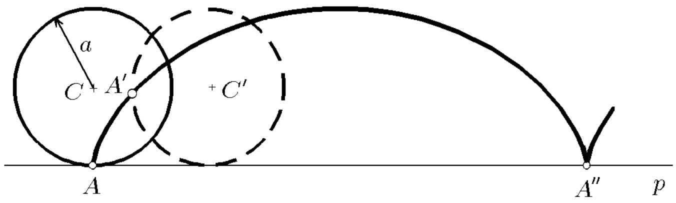
Primer 1.8.3. Neka su date parametarske jednačine cikloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (a > 0;\ t \in \mathbb{R}). \tag{1.8.4}$$

To je, u stvari, kriva (slika 1.8.1) koja se dobija kao trajektorija jedne fiksirane tačke A kruga, sa centrom u tački C i poluprečnika a, koji se kotrlja bez klizanja po datoj pravoj p. Na slici 1.8.2 prava p je identifikovana sa x-osom.



Sl. 1.8.1



Sl. 1.8.2

Posmatrajmo funkciju $t \mapsto \psi(t) = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ na segmentu $T = [0, \pi]$. Kako je ona rastuća i preslikava T na $[0, 2a]$, zaključujemo da postoji njena inverzna funkcija $\psi^{-1}\colon [0, 2a] \to T$, koja je data pomoću

$$y \mapsto t = \arccos(1 - y/a) \qquad (y \in [0, 2a]).$$

Na osnovu (1.8.4) nalazimo

$$\text{(1.8.5)} \qquad y \mapsto x = g(y) = a \arccos(1 - y/a) - \sqrt{y(2a - y)}\,.$$

Grafik ove funkcije u pravouglim koordinatama je prva polovina luka cikloide $(0 \le y \le 2a,\ 0 \le x \le a\pi)$. Ovde je očigledna prednost parametarskih jednačina (1.8.4) nad (1.8.5). $\triangle$

Napomenimo da se svaka funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in X)$ može predstaviti kao funkcija u parametarskom obliku, na primer, stavljajući $x = t$ i $y = f(t)$ ili $x = t - 1$ i $y = f(t - 1)$. Kako, očigledno, ima više načina za uvođenje parametara, to za zadatu funkciju njeno predstavljanje u parametarskom obliku nije jednoznačno.

1.9. Implicitno definisane funkcije

Neka su X, Y, Z neprazni podskupovi skupa $\mathbb{R}$ pri čemu $0 \in Z$ i neka je na skupu $X \times Y$ definisano preslikavanje $F\colon X \times Y \to Z$.

Ako postoje skupovi $D_x \subset X$ i $D_y \subset Y$ takvi da za svako fiksirano $x \in D_x$ jednačina $F(x, y) = 0$ ima jedinstveno rešenje $y \in D_y$, tada se na D_x može definisati preslikavanje $f\colon D_x \to D_y$ koje svakom elementu $x \in D_x$ stavlja u korespondenciju element $y \in D_y$, koje je, u stvari, rešenje jednačine $F(x, y) = 0$. Za takvu funkciju f kažemo da je *implicitno definisana* pomoću preslikavanja F.

Primer 1.9.1. Neka je na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definisano preslikavanje $(x, y) \mapsto F(x, y) = x - e^y + 3$. Kako za svako $x > -3$ jednačina

$$\text{(1.9.1)} \qquad F(x, y) = x - e^y + 3 = 0$$

ima jedinstveno rešenje $y = \log(x+3)$, zaključujemo da je pomoću (1.9.1) implicitno definisana funkcija $x \mapsto f(x) = \log(x+3)$ koja preslikava $(-3,+\infty)$ na $\mathbb{R}$. Napomenimo da smo u ovom primeru imali $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $D_x = (-3,+\infty)$ i $D_y = \mathbb{R}$. $\triangle$

Primer 1.9.2. Neka je na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dato preslikavanje

$$(x,y) \mapsto F(x,y) = x^2 + y^2 - 2.$$

Ovde je $X = Y = \mathbb{R}$ i $Z = [-1,+\infty)$.

Iz jednačine $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, tj. $y^2 = 1 - x^2$, zaključujemo da ima smisla razmatrati samo slučaj kada je $D_x = [-1,1]$. Kako ova kvadratna jednačina ima dva rešenja $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, razmotrićemo dva slučaja s obzirom na izbor skupa $D_y \subset \mathbb{R}$:

1° Neka je $D_y = [0,1]$. Tada, za svako $x \in D_x$, jednačina $F(x,y) = 0$ ima jedinstveno rešenje u skupu D_y dato sa $y = \sqrt{1-x^2}$. Dakle, imamo funkciju $f_1 \colon D_x \to D_y$ određenu sa $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$.

2° Uzmimo sada da je $D_y = [-1,0]$. U tom slučaju dobijamo funkciju $f_2 \colon D_x \to D_y$ određenu sa $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

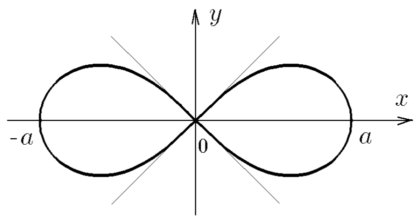
Dakle, pomoću jednačine $F(x,y) = 0$ implicitno su definisane dve funkcije:

$$x \mapsto f_1(x) = +\sqrt{1-x^2} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \qquad (x \in [-1,1]). \qquad \triangle$$

U nekim slučajevima pogodno je jednačinu $F(x,y) = 0$ prevesti na polarne koordinate i tada razmatrati krivu u polarnom koordinatnom sistemu.

Primer 1.9.3. Neka je data jednačina $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, gde je $a > 0$. Stavljajući $x = \varrho\cos\varphi$ i $y = \varrho\sin\varphi$ dobijamo $\varrho^2 = a^2\cos 2\varphi$, tj.

$$\varrho = f(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}\,. \tag{1.9.2}$$



Sl. 1.9.1

Kako je f parna funkcija, dovoljno je razmotriti samo slučaj kada $\varphi \in [0,\pi]$. Iz uslova $\cos 2\varphi \geq 0$ sleduje da je f definisano za $\varphi \in [0,\pi/4] \cup [3\pi/4,\pi]$. Kriva definisana sa (1.9.2) naziva se *lemniskata* (slika 1.9.1). $\triangle$

1.10. Elementarne funkcije

Definicija 1.10.1. Pod *osnovnim elementarnim funkcijama* podrazumevaju se sledeće funkcije:

1° *Konstanta*: $x \mapsto \text{const}$;

2° *Stepena funkcija*: $x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$;

3° *Eksponencijalna funkcija*: $x \mapsto a^x \quad (a > 0)$;

4° *Logaritamska funkcija*: $x \mapsto \log_a x \quad (a > 0,\, a \neq 1)$;

5° *Trigonometrijske funkcije*:

$$x \mapsto \sin x, \qquad x \mapsto \cos x, \qquad x \mapsto \tan x, \qquad x \mapsto \cot x\,;$$

6° *Inverzne trigonometrijske* (*ciklometrijske*) *funkcije*:

$$x \mapsto \arcsin x, \quad x \mapsto \arccos x \quad x \mapsto \arctan x, \quad x \mapsto \operatorname{arccot} x\,.$$

Napomenimo da su funkcije $x \mapsto \arcsin x$ i $x \mapsto \arccos x$ definisane na skupu $X = [-1, 1]$, dok je oblast definisanosti funkcija $x \mapsto \arctan x$ i $x \mapsto \operatorname{arccot} x$ skup $\mathbb{R}$.

Definicija 1.10.2. Za funkcije koje se dobijaju konačnom primenom aritmetičkih operacija i konačnim brojem kompozicija nad osnovnim elementarnim funkcijama kažemo da su *elementarne funkcije.*

Primer 1.10.1. Elementarne su funkcije, na primer:

1° $x \mapsto \sin 2x \quad (x \in \mathbb{R})$,

2° $x \mapsto 2e^{3x} + \log(x+1) \quad (x > -1)$,

3° $x \mapsto x^3 + 3\cos 2x \quad (x \in \mathbb{R})$,

4° $x \mapsto \log|\sin 3x| - e^{\arctan\sqrt{x}} \quad \big(x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{k\pi/3 \mid k \in \mathbb{N}\}\big)$,

5° $x \mapsto \dfrac{2\sin(x+1)\,\log x}{e^x + \sqrt{x^2+1}} \quad (x > 0). \qquad \triangle$

Elementarne funkcije mogu se podeliti na *algebarske* i *transcendentne.*

Od algebarskih funkcija navodimo sledeće:

(1) *Polinomi.* To su funkcije oblika

$$x \mapsto P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

gde su a_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ realni brojevi, koji se nazivaju koeficijenti polinoma. Broj $n\,(\in \mathbb{N}_0)$ naziva se stepen polinoma. Polinom čiji je stepen nula je konstanta (elementarna funkcija navedena pod 1° u definiciji 1.10.1).

(2) *Racionalne funkcije.* Neka su $x \mapsto P(x)$ i $x \mapsto Q(x)$ polinomi stepena n i m, respektivno, i neka je $Z(Q)$ skup svih tačaka $x \in \mathbb{R}$ za koje je $Q(x) = 0$. Tada se na skupu $X = \mathbb{R} \setminus Z(Q)$ može definisati tzv. racionalna funkcija $x \mapsto R(x)$ pomoću

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}.$$

(3) *Iracionalne funkcije.* Konačnom primenom aritmetičkih operacija i konačnim brojem kompozicija nad konstantom i stepenom funkcijom sa racionalnim izložiocem, dobijamo iracionalne funkcije.

Na primer, funkcija

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^5+1} - 4\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+3}}}{3 + \sqrt{2x+1} + 4x^2 - x\sqrt[5]{x+2}}$$

je iracionalna funkcija.

U stvari, u opštem slučaju, za svaku funkciju $x \mapsto y = f(x)$ koja zadovoljava bar jednu jednačinu oblika

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}y + P_n(x) = 0,$$

gde su $x \mapsto P_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ neki polinomi, kažemo da je *algebarska funkcija*.

Za sve elementarne funkcije koje nisu algebarske kažemo da su *transcendentne funkcije.* Takve su, na primer:

$$x \mapsto \sin x, \qquad x \mapsto x^2 + \arctan x, \qquad x \mapsto a^x, \qquad x \mapsto \log_a x.$$

Sada ćemo posebno definisati jednu klasu transcendentnih funkcija, poznatu kao *hiperboličke funkcije.* To su funkcije:

(1) *Sinus hiperbolički*: $x \mapsto \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (x \in \mathbb{R});$

(2) *Kosinus hiperbolički*: $x \mapsto \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (x \in \mathbb{R});$

(3) *Tangens hiperbolički*: $x \mapsto \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (x \in \mathbb{R});$

(4) *Kotangens hiperbolički*: $x \mapsto \coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$

Nazivi ovih funkcija su uzeti zbog izvesnih sličnosti sa trigonometrijskim funkcijama. Na primer, važe sledeće formule:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x, \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Primer 1.10.2. 1° Kako je $x \mapsto \sinh x$ rastuća na $\mathbb{R}$ i preslikava $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, zaključujemo da postoji njena inverzna funkcija koju ćemo označavati sa arsinh. Pokazaćemo sada da se ona može izraziti pomoću logaritamske funkcije.

Iz $y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ sleduje $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, odakle je

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}\,, \qquad \text{tj.} \qquad x = \log\bigl(y + \sqrt{y^2+1}\bigr),$$

pri čemu uzimamo znak $+$ jer je $e^x > 0$. Dakle, imamo

$$\operatorname{arsinh} y = \log\bigl(y + \sqrt{y^2+1}\bigr) \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

2° Slično, funkcija $x \mapsto \tanh x$ je rastuća i preslikava $\mathbb{R}$ na $(-1,1)$. Zato postoji njena inverzna funkcija data sa

$$y \mapsto \operatorname{artanh} y = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} \qquad (y \in (-1,1)). \qquad \triangle$$

Primer 1.10.3. Funkcija $x \mapsto \cosh x$ koja preslikava $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ nema inverznu funkciju jer nije 1–1 preslikavanje. Međutim, njene restrikcije na $(-\infty, 0]$ i $[0, +\infty)$ imaju inverzne funkcije, slično kao kod funkcije $x \mapsto x^2$ (videti primer 1.7.1 pod 2°).

U slučaju restrikcije na $[0, +\infty)$, inverzna funkcija je

$$y \mapsto \operatorname{arcosh} y = \log\bigl(y + \sqrt{y^2-1}\bigr) \qquad (y \in [1, +\infty)).$$

Kada je reč o restrikciji na $(-\infty, 0]$ inverzna funkcija je

$$y \mapsto \operatorname{arcosh} y = -\log\bigl(y + \sqrt{y^2-1}\bigr) \qquad (y \in [1, +\infty))$$

jer je $y - \sqrt{y^2-1} = 1/\bigl(y + \sqrt{y^2-1}\bigr)$. $\triangle$

Napomena 1.10.1. Sve ostale funkcije koje nisu elementarne su *neelementarne funkcije.*

2. METRIČKI PROSTORI I TOPOLOŠKI POJMOVI

2.1. Metrički prostori i neke osnovne nejednakosti

Neka je X neprazan skup čiji su elementi $x, y, z, \ldots$. Da bismo mogli, pre svega, da tretiramo problem konvergencije niza tačaka u X, neophodno je definisati rastojanje između proizvoljnih tačaka skupa X. U tom cilju posmatrajmo preslikavanje $d\colon X^2 \to [0, +\infty)$.

Definicija 2.1.1. Ako preslikavanje $d\colon X^2 \to [0,+\infty)$ ispunjava uslove

1° $d(x,y)=0 \iff x=y$,

2° $d(x,y)=d(y,x)$,

3° $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$,

za svako $x,y,z\in X$, onda kažemo da je d *rastojanje* ili *metrika* u skupu X. Za skup X snabdeven metrikom d kažemo da je *metrički prostor* i to označavamo sa (X,d).

Dakle, metrički prostor čine skup X i uvedena metrika d. Uvek kada je poznata metrika d i kada ne može doći do zabune, umesto (X,d) pišemo kraće X.

Osobina 1° u definiciji 2.1.1 ukazuje da je rastojanje između dve tačke x i y uvek pozitivno sem u slučaju kada je $x=y$. Druga osobina, koja se inače naziva osobina simetričnosti, kazuje da je rastojanje između tačke x i tačke y jednako rastojanju između tačke y i tačke x. Najzad, osobina 3° predstavlja analogon dobro poznate nejednakosti za trougao da jedna stranica trougla nikad nije veća od zbira druge dve stranice. Zato se ova osobina i naziva *nejednakost trougla*.

Primer 2.1.1. Neka je $X=\mathbb{R}$ i $d(x,y)=|x-y|$. Kako je

1° $|x-y|>0$ $(x\ne y)$ i $|x-y|=0 \iff x=y$,

2° $|x-y|=|y-x|$,

3° $|x-y|=|(x-z)+(z-y)|\le |x-z|+|z-y|$,

za svako $x,y,z\in\mathbb{R}$, zaključujemo da je $(\mathbb{R},d)$ metrički prostor. $\triangle$

Pre nego što primerima ilustrujemo još neke metričke prostore, dokazaćemo sledeća tri tvrđenja:

Teorema 2.1.1. *Ako je $p>1$ i $1/p+1/q=1$, za svako $a,b>0$ važi nejednakost*

$$ab\le \frac{1}{p}\,a^p+\frac{1}{q}\,b^q. \tag{2.1.1}$$

Znak jednakosti važi ako i samo ako je $a^p=b^q$.

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $x\mapsto y=x^m$ za $x\ge 0$ i $0<m<1$. Kako ordinate krive $y=x^m$ nisu veće od odgovarajućih ordinata njene tangente u tački $x=1$, važi nejednakost

$$x^m\le 1+m(x-1)\qquad (x\ge 0,\ \ 0<m<1). \tag{2.1.2}$$

Naravno, u (2.1.2) važi jednakost ako i samo ako je $x = 1$.

Ako u (2.1.2) stavimo $m = 1/p$ $(p > 1)$ i $x = a^p/b^q$, dobijamo (2.1.1), gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $a^p = b^q$. □

Teorema 2.1.2. *Neka su a_k i b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ realni ili kompleksni brojevi i neka je $1/p + 1/q = 1$ $(p > 1)$. Tada važi nejednakost*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\Big)^{1/q}. \tag{2.1.3}$$

Dokaz. Uvedimo oznake $A = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p$ i $B = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q$. Ako u (2.1.1) stavimo $a = |a_k|/A^{1/p}$ i $b = |b_k|/B^{1/q}$ dobijamo nejednakosti

$$\frac{|a_k|}{A^{1/p}} \cdot \frac{|b_k|}{B^{1/q}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{|a_k|^p}{A} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|b_k|^q}{B} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Sabiranjem ovih nejednakosti za $k = 1, 2, \ldots, n$ dobijamo

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|}{A^{1/p} B^{1/q}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

tj. nejednakost (2.1.3). □

Nejednakost (2.1.3) je u matematičkoj literaturi poznata pod imenom *Hölderova*[7] *nejednakost.*

Za $p = 2$, (2.1.3) se svodi na nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\Big)^{1/2}, \tag{2.1.4}$$

koja je poznata kao *Bunjakowsky*[8]*–Cauchy*[9]*–Schwarzova*[10] *nejednakost.*

[7] Otto Ludwig Hölder (1859-1937), nemački matematičar.
[8] Viktor Jakovlevič Bunjakowsky (1804–1889), ruski matematičar.
[9] Augustin Luis Cauchy (1789–1857), veliki francuski matematičar.
[10] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), nemački matematičar.

Teorema 2.1.3. *Ako su* a_k *i* b_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ *realni ili kompleksni brojevi i ako je* $p \geq 1$, *važi nejednakost*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{1/p}. \tag{2.1.5}$$

Dokaz. Kako je, za $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p &= \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big) |a_k + b_k|^{p-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \cdot |a_k + b_k|^{p-1},
\end{aligned}$$

posle primene nejednakosti (2.1.3) na svaki od poslednja dva izraza, dobijamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \\
+ \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Kako je $1/p + 1/q = 1$, posle sređivanja, nejednakost (2.1.6) postaje nejednakost (2.1.5). $\square$

Nejednakost (2.1.5) je poznata kao *nejednakost Minkowskog*[11)].

Neka je $X = \mathbb{R}^n$, tj. neka su elementi skupa X uređene n-torke realnih brojeva. Dakle, neka su

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Na primerima koji slede, ilustrovaćemo više načina uvođenja metrike u $\mathbb{R}^n$, kao i u nekim drugim skupovima.

---

11) Hermann Minkowski (1864–1909), nemački matematičar i fizičar.

Primer 2.1.2. Ako je, za svako $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

tada je $(\mathbb{R}^n, d)$ metrički prostor.

Lako se proverava da funkcija $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ima osobine 1° i 2° iz definicije 2.1.1. Kako je

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k + z_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \big(|x_k - z_k| + |z_k - y_k|\big),$$

zaključujemo da je

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| + \sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}),$$

tj. da funkcija d ima i osobinu 3°. Prema tome, $(\mathbb{R}^n, d)$ je metrički prostor. △

Primer 2.1.3. Ako je, za svako $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\Big)^{1/2},$$

tada je $(\mathbb{R}^n, d)$ metrički prostor.

Nije teško proveriti da ovako definisana funkcija d ima osobine 1° i 2° iz definicije 2.1.1. Kako je, na osnovu nejednakosti Minkowskog (za $p = 2$),

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k|^2\Big)^{1/2} \\
&= d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}),
\end{aligned}$$

zaključujemo da funkcija d ima i osobinu 3° i da je, prema tome, metrika. Dakle, $(\mathbb{R}^n, d)$ je metrički prostor. △

Napomena 2.1.1. Metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d)$, iz primera 2.1.3, poznat je kao *Euklidov*[12] *prostor*.

---

[12] Euklid (IV–III vek pre naše ere), starogrčki matematičar.

Primer 2.1.4. $(\mathbb{R}^n, d)$, gde je

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\Big)^{1/p} \qquad (p \geq 1),$$

je, takođe, metrički prostor. △

Primer 2.1.5. Ako je

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k|, \tag{2.1.7}$$

tada je $(\mathbb{R}^n, d)$, takođe, metrički prostor jer funkcija d, definisana pomoću (2.1.7), ima sve osobine iz definicije 2.1.1. △

Primer 2.1.6. Neka je X neprazan skup i

$$d(x, y) = 1 \quad (x \neq y), \qquad d(x, y) = 0 \quad (x = y).$$

(X, d) je metrički prostor. Za metriku d kažemo da je *diskretna* metrika, a za prostor (X, d) da je diskretni metrički prostor. △

Sledeći primeri se odnose na prostore nizova i funkcija[13]:

Primer 2.1.7. Neka je X skup svih ograničenih nizova $\boldsymbol{x} = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i neka je

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k| .$$

(X, d) je metrički prostor koji označavamo sa m. △

Primer 2.1.8. Ako je X skup svih nula-nizova $\boldsymbol{x} = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i ako je odstojanje d definisano kao u prethodnom primeru, tada je (X, d) metrički prostor koji se obeležava sa c_0. △

Primer 2.1.9. Ako je X skup svih konvergentnih nizova $\boldsymbol{x} = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i ako je odstojanje d definisano kao u primeru 2.1.7, (X, d) je metrički prostor koji se obeležava sa c. △

Primer 2.1.10. Ako je X skup svih beskonačnih nizova $\boldsymbol{x} = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i ako je odstojanje $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ definisano sa

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \, \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

(X, d) je metrički prostor koji je poznat kao prostor s. △

---

[13] Nizove i funkcije proučavamo počev od druge glave ove knjige. Za dalje praćenje materije ovi primeri nisu neophodni.

Primer 2.1.11. Neka je X skup svih funkcija $t \mapsto x(t)$ definisanih i neprekidnih na segmentu $[a, b]$ i neka je

$$d(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \qquad (x, y \in X).$$

Očigledno, (X, d) je metrički prostor. Taj prostor je poznat i kao *prostor neprekidnih funkcija na segmentu* $[a, b]$ i označava se sa $C[a, b]$. $\triangle$

Na kraju ovog odeljka definisaćemo jednu klasu preslikavanja u metričkom prostoru (X, d). Neka je f jedno preslikavanje skupa X u samog sebe, tj. $f \colon X \to X$.

Definicija 2.1.2. Ako postoji pozitivan broj $q < 1$ tako da, za svako $x, y \in X$, važi nejednakost

$$d\big(f(x), f(y)\big) \le q d(x, y),$$

za funkciju $f \colon X \to X$ kažemo da je *kontrakcija* ili *kontraktivno* preslikavanje.

U slučaju kada je $X = [\alpha, \beta]$ $(\subset \mathbb{R})$ i $d(x, y) = |x - y|$, uslov za kontrakciju se svodi na važenje nejednakosti

$$|f(x) - f(y)| \le q|x - y|, \tag{2.1.8}$$

za svako $x, y \in [\alpha, \beta]$. Za funkciju f koja zadovoljava nejednakost (2.1.8) često se kaže da zadovoljava *Lipschitzov*[14)] *uslov* na segmentu $[\alpha, \beta]$ sa konstantom q manjom od jedinice. Inače, u opštem slučaju, ako su (X, d_1) i (Y, d_2) metrički prostori, za funkciju $f \colon X \to Y$ kažemo da zadovoljava Lipschitzov uslov ako postoji pozitivna konstanta L takva da je

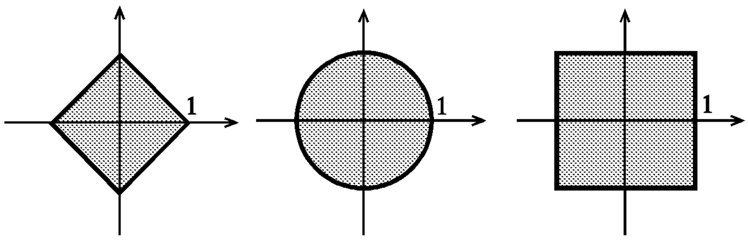
$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \le L\, d_1(x, y),$$

za svako $x, y \in X$. Pri tome, za L kažemo da je *Lipschitzova konstanta.*

2.2. Osnovni topološki pojmovi

Neka je (X, d) metrički prostor, tačka $a \in X$ i $r \in \mathbb{R}^+$.

14) Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903), nemački matematičar.



Sl. 2.2.1 Sl. 2.2.2 Sl. 2.2.3

Definicija 2.2.1. Skup $K(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$ zovemo *otvorena kugla* poluprečnika r, sa centrom u tački a.

Naravno, šta kugla $K(a,r)$ predstavlja u metričkom prostoru (X,d) zavisi od prirode skupa X, ali i od uvedene metrike d. Ilustrovaćemo to na nekim primerima:

Primer 2.2.1. U metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, gde je $d(x,y) = |x-y|$, kugla $K(a,r)$ je interval $(a-r, a+r)$. $\triangle$

Primer 2.2.2. Neka je $(\mathbb{R}^2, d)$ metrički prostor i neka su uređeni parovi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ određeni sa $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ i $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$.

1° Ako je metrika definisana pomoću

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

kugla $K\big((0,0),1\big)$ je kvadrat prikazan na slici 2.2.1.

2° Ako imamo euklidsku metriku

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\,,$$

kugla $K\big((0,0),1\big)$ je krug prikazan na slici 2.2.2.

3° Ako je $d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, kugla $K\big((0,0),1\big)$ je kvadrat na slici 2.2.3. $\triangle$

Primer 2.2.3. Ako je (X,d) diskretan metrički prostor i $a \in X$, tada je, očigledno,

$$K(a,r) = \{a\}, \quad \text{ako je} \quad r \le 1 \qquad \text{i} \qquad K(a,r) = X, \quad \text{ako je} \quad r > 1. \quad \triangle$$

Definicija 2.2.2. Skup $K[a,r] = \{x \in X \mid d(a,x) \le r\}$ zovemo *zatvorena kugla* poluprečnika r, sa centrom u tački a.

Očigledno, tačka a pripada skupovima $K(a,r)$ i $K[a,r]$.

Definicija 2.2.3. Za otvorenu kuglu $K(a, \varepsilon)$ kažemo da je ε-*okolina* tačke a.

Definicija 2.2.4. Okolina tačke $x \in X$ je svaki podskup skupa X koji sadrži bar jednu ε-okolinu tačke x.

Naravno, u smislu definicije 2.2.4, ε-okolina tačke x je, takođe, okolina tačke $x \in X$.

Definicija 2.2.5. Skup $A \subset X$ je *otvoren* skup ako je prazan ili ako za svaku tačku $x \in A$ postoji neka njena ε-okolina koja je podskup od A.

U smislu ove definicije, sâm skup X i prazan skup su, svakako, otvoreni skupovi. Iz definicije 2.2.5 neposredno sleduju sledeće dve osobine otvorenih skupova: (a) presek konačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup; (b) unija konačno ili beskonačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.

Definicija 2.2.6. Skup $A \subset X$ je *zatvoren* skup, ako je njegov komplement A', u odnosu na skup X, otvoren skup.

Iz definicija 2.2.5 i 2.2.6 i činjenice da su prazan skup i sam skup X otvoreni skupovi, sleduje da su prazan skup i čitav skup X takođe i zatvoreni skupovi.

Na osnovu De Morganovih obrazaca i definicije 2.2.5, zaključujemo da zatvoreni skupovi imaju sledeće osobine koje su dualne osobinama otvorenih skupova: (a) unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup; (b) presek konačno ili beskonačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Definicija 2.2.7. Za tačku $x \in A$ kažemo da je *unutrašnja* tačka skupa $A \subset X$ ako postoji okolina tačke x koja je podskup skupa A. Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A čini njegovu *unutrašnjost*, u oznaci $\operatorname{int} A$.

Prema tome, tačka x je unutrašnja tačka skupa $A \subset X$ ako je i sâm skup A jedna njena okolina. Očigledno je $\operatorname{int} A \subseteq A$.

Bez dokaza navodimo sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.1. *Skup* $\operatorname{int} A$ *je najopsežniji otvoren skup sadržan u* A.

Prema tome, skup A je otvoren ako i samo ako je $\operatorname{int} A = A$, tj. otvoren skup se sastoji samo iz unutrašnjih tačaka.

Definicija 2.2.8. Tačka $a \in X$ je *granična tačka*, ili *tačka nagomilavanja*, skupa $A \subset X$ ako svaka okolina tačke a sadrži bar jednu tačku iz A, različitu od tačke a. Skup svih graničnih tačaka skupa A zovemo *izvedeni skup* skupa A i označavamo ga sa A^*.

Dakle, tačka nagomilavanja skupa A ne mora pripadati skupu A.

Definicija 2.2.9. Tačka $a \in A \subset X$ je *izolovana tačka* skupa A ako postoji okolina tačke a u kojoj, sem tačke a, nema drugih tačaka iz A.

Definicija 2.2.10. Tačka $x \in X$ je *adherentna tačka* skupa A ako u svakoj njenoj okolini ima tačaka iz skupa A. Skup svih adherentnih tačaka skupa A čini *adherenciju* skupa A, u oznaci $\tilde{A}$.

Napomenimo da adherentna tačka skupa A ne mora da pripada skupu A. Treba uočiti i da su izolovana tačka i tačka nagomilavanja skupa A njegove adherentne tačke. Takođe, očigledno je da važi $A \subseteq \tilde{A}$.

Definicija 2.2.11. Tačka a je *rubna tačka* skupa $A \subset X$ ako je istovremeno adherentna tačka skupa A i skupa A'. Skup svih rubnih tačaka skupa $A \subset X$ je *rub skupa* A.

Očigledno, rub skupa A je i rub skupa A'.

Primer 2.2.4. U skupu $\mathbb{R}$, rub intervala (a, b) je skup $\{a, b\}$. $\triangle$

Primer 2.2.5. Otvoren interval (a, b), kao podskup skupa $\mathbb{R}^2$, ima za rub segment $[a, b]$. $\triangle$

Primer 2.2.6. U skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, rub skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$. $\triangle$

Teorema 2.2.2. *Skup svih tačaka ruba skupa $A \subset X$ je zatvoren skup.*

Dokaz. Iz definicije 2.2.11 sleduje da je rub skupa A skup $\tilde{A} \cap \tilde{A}'$. Kako su $\tilde{A}$ i $\tilde{A}'$ zatvoreni skupovi, njihov presek je, takođe, zatvoren skup. $\square$

Definicija 2.2.12. Skup $A \subset X$ je *ograničen* ako postoji kugla $K(a, r)$, konačnog poluprečnika r i sa centrom u tački $a \in X$, takva da je $A \subset K(a, r)$.

Napomenimo da je svaki konačan skup ograničen.

Definicija 2.2.13. Ako je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$, odstojanje tačke $a \in X$ od skupa A, u oznaci $d(a, A)$, određeno je pomoću

$$d(a, A) = \inf \{d(a, x) \mid x \in A\}.$$

Napomenimo da ovaj infimum postoji jer je skup $\{d(a, x) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}$ ograničen odozdo.

Ako je $a \in A$, tada je $d(a, A) = 0$. Međutim, obrnuto ne mora da važi jer je, na primer, $d(0, \mathbb{R}^+) = 0$, ali ipak $0 \notin \mathbb{R}^+$. U stvari, sve rubne tačke skupa $A \subset X$ su na odstojanju 0 od skupa A, ali, naravno, ne moraju mu pripadati.

Definicija 2.2.14. Ako je (X, d) metrički prostor i ako su A i B podskupovi skupa X, rastojanje između skupova A i B, u oznaci $d(A, B)$, određeno je sa

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Definicija 2.2.15. Ako je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$ ograničen skup, tada za broj

$$\operatorname{diam} A = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

kažemo da je *dijametar skupa* A.

Ako skup A nije ograničen, tada je $\operatorname{diam} A = +\infty$.

Bez dokaza navodimo sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.3. *Svaki beskonačan i ograničen skup realnih brojeva ima bar jednu graničnu tačku.*

Teorema 2.2.3 je poznata pod imenom *Bolzano*[15] *−Weierstrassova*[16] *teorema.*

3. ZADACI ZA VEŽBU

3.1. Skicirati grafike funkcija $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$, ako je

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x-3} \qquad \text{i} \qquad g(x) = 3\sin\Bigl(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\Bigr).$$

3.2. Rešiti jednačinu

$$[x-1] = \left[\frac{x+2}{2}\right].$$

Rezultat. $3 \le x < 5$.

3.3. Ako je n prirodan broj dokazati jednakost

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

[15] Bernhard Bolzano (1781–1848), češki matematičar, logičar i filozof.
[16] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), nemački matematičar.

3.4. Ispitati parnost sledećih funkcija:

1° $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$, 2° $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}\,)$,

3° $f(x) = \sin x - \cos x$, 4° $f(x) = \sin 2x + \cos \dfrac{x}{2} + \tan x$.

3.5. Neka je

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1}\,.$$

Dokazati da važi jednakost: $f(-x) = f(x)$.

3.6. Neka je $|x| \le 1$. Ako je n nula ili prirodan broj, ispitati parnost funkcija:

$$x \mapsto T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad \text{i} \qquad x \mapsto U_n(x) = \sin(n \arccos x).$$

3.7. Ispitati periodičnost funkcija:

$$x \mapsto f(x) = |x|, \quad x \mapsto f(x) = x - |x|, \quad x \mapsto f(x) = x|x|,$$
$$x \mapsto f(x) = [x], \quad x \mapsto f(x) = x - [x], \quad x \mapsto f(x) = x[x].$$

3.8. Ispitati periodičnost funkcija:

$$f(x) = \sqrt{\tan x}\,, \qquad f(x) = \tan \sqrt{x}\,, \qquad f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2}\,).$$

3.9. Ako su f i g funkcije definisane pomoću

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto g(x) = \frac{1-x}{1+x}\,,$$

odrediti njima inverzne funkcije $x \mapsto f^{-1}(x)$ i $x \mapsto g^{-1}(x)$.

3.10. Dokazati tvrđenje: Rub skupa S se poklapa sa skupom S ako i samo ako je unutrašnjost skupa S prazan skup.

3.11. Ako je (X, d) metrički prostor, dokazati da je i preslikavanje

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \qquad (x, y \in X)$$

metrika, tj. da je i (X, d') metrički prostor.

Uputstvo. Dokazati prvo da važi nejednakost: $\dfrac{a}{1+a} \le \dfrac{b}{1+b}$ $(0 < a \le b)$.

II GLAVA

Nizovi

1. NIZOVI I KONVERGENCIJA NIZOVA

1.1. Niz i granična vrednost niza

Neka je (X, d) metrički prostor i neka je f preslikavanje skupa $\mathbb{N}$ u skup X, tj. neka je $n \mapsto f(n) = a_n \in X$. Za uređeni skup tačaka $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, u oznaci $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, koji dobijamo na ovaj način, kažemo da je *niz tačaka* u metričkom prostoru (X, d).

Definicija 1.1.1. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *konvergentan* ako u prostoru X postoji tačka a, takva da za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $d(a_n, a) < \varepsilon$ za svako $n > n_0$. U tom slučaju kažemo da niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka tački a, koju nazivamo *granica* ili *granična vrednost* niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Simbolički to označavamo sa

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \text{ili} \qquad a_n \to a \quad (n \to +\infty).$$

Ako niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira, kažemo da *divergira* ili da je *divergentan*.

Primer 1.1.1. Niz $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u prostoru $\mathbb{R}$, sa standardnom metrikom određenom sa $d(x, y) = |x - y|$, konvergira ka nuli, tj. važi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n = 0$. Međutim, ovaj niz u prostoru $\mathbb{R}^+$ nije konvergentan, s obzirom da tačka $x = 0$ ne pripada skupu $\mathbb{R}^+$. $\triangle$

Označimo sa $D\,(\subset X)$ skup vrednosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ preslikavanja $f\colon \mathbb{N} \to X$. Jasno je da skup D može imati konačan ili beskonačan dijametar, tj. da skup D može biti ograničen ili neograničen.

Definicija 1.1.2. Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je *ograničen* ili *neograničen*, prema tome da li je skup D ograničen ili neograničen.

Ako je $X = \mathbb{R}$, definicija ograničenog niza može imati sledeće alternativne formulacije:

(a) Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen ako postoji pozitivan broj M, takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi nejednakost $|a_n| \le M$;

(b) Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen ako postoje realni brojevi m i M, takvi da je $m \le a_n \le M$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Isto tako, niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je neograničen ako za svaki pozitivan broj M postoji broj n takav da je $|a_n| > M$.

Primer 1.1.2. Neka je $X = \mathbb{R}$ metrički prostor sa standardnom metrikom.

1° Ako je $a_n = 1/n$, skup D je beskonačan skup, ali njegov dijametar je 1, pa je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen. Ovaj niz je konvergentan.

2° Ako je $a_n = n$, skup D je beskonačan skup, njegov dijametar je beskonačan, pa niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nije ograničen. Ovaj niz je divergentan.

3° Za niz $a_n = (-1)^n$ skup vrednosti je $D = \{-1, 1\}$. Dakle, niz je ograničen, ali nije konvergentan. $\triangle$

Primer 1.1.3. Neka je $X = \mathbb{C}$ i $d(z, w) = |z - w|$. Za niz $a_n = i^n$ $(i^2 = -1)$, skup $D = \{1, -1, i, -i\}$ je konačan skup, njegov dijametar je takođe konačan, pa je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen. Ovaj niz je divergentan. $\triangle$

Kao što se iz primera 1.1.2 i 1.1.3 može videti, ograničen niz ne mora biti konvergentan.

1.2. Osnovne osobine konvergentnih nizova

U ovom poglavlju dokazaćemo neke teoreme koje se odnose na konvergentne nizove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u metričkom prostoru (X, d).

Teorema 1.2.1. *Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $a \in X$ ako i samo ako svaka okolina tačke a sadrži sve članove niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sem njih konačno mnogo.*

Dokaz. Neka je $K(a, \varepsilon)$ okolina tačke a.

1° Pretpostavimo da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konveregira ka a. Iz uslova $d(b, a) < \varepsilon$ $(b \in X)$ sleduje $b \in K(a, \varepsilon)$. Kako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj n_0, takav da je $d(a_n, a) < \varepsilon$ za svako $n > n_0$, sleduje da sve tačke niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pripadaju okolini $K(a, \varepsilon)$, sem tačaka $a_1, \ldots, a_{n_0}$.

2° Pretpostavimo sada da svaka okolina $K(a, \varepsilon)$ sadrži sve članove niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sem njih konačno mnogo, tj. da za svako $\varepsilon > 0$ važi $d(a_n, a) < \varepsilon$, osim za konačno mnogo članova ovog niza. Neka je n_0 najveći indeks članova niza za koje ne važi ova nejednakost. Tada su ispunjeni uslovi definicije 1.1.1, pa niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka tački a. $\square$

Teorema 1.2.2. *Konvergentan niz ima jedinstvenu granicu.*

Dokaz. Pretpostavimo da konvergentan niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima dve granice a i a', takve da je $d(a,a') > 0$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_0 i n_0', takvi da je

$$d(a_n, a) < \varepsilon/2 \qquad \text{i} \qquad d(a_n, a') < \varepsilon/2$$

za svako $n > n_0$ i $n > n_0'$, respektivno.

Kako je

$$d(a,a') \le d(a,a_n) + d(a_n,a') = d(a_n,a) + d(a_n,a'),$$

za $n > \max(n_0, n_0')$ važi nejednakost $d(a,a') < \varepsilon$. S obzirom da je ε proizvoljno mali pozitivan broj, zaključujemo da je $d(a,a') = 0$, tj. da je $a' = a$, što je u kontradikciji sa učinjenom pretpostavkom. $\square$

Teorema 1.2.3. *Konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz. Iz pretpostavke da niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka a, sleduje da postoji prirodan broj m takav da je $d(a_n,a) < 1$ za svako $n > m$. Tvrđenje teoreme sleduje iz činjenice da je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$d(a_n,a) \le \max\{1, d(a_1,a), d(a_2,a), \dots, d(a_m,a)\}. \quad \square$$

Teorema 1.2.4. *Ako je a tačka nagomilavanja skupa $A \subset X$, tada postoji niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(a_n \in A)$ takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.*

Dokaz. Kako je a tačka nagomilavanja skupa A, to za svako n postoji tačka $a_n \in A$, takva da $a_n \in K(a, 1/n)$. Posmatrajmo niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kako je za svako $\varepsilon > 0$ moguće izabrati prirodan broj n_0, takav da je $n_0 > 1/\varepsilon$, zaključujemo da je, za $n > n_0$,

$$d(a_n,a) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

što znači da niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka tački a. $\square$

U daljem tekstu razmotrićemo neke rezultate koji se odnose na realne nizove, tj. na nizove u prostoru $\mathbb{R}$, sa standardnom metrikom koja je definisana sa $d(x,y) = |x-y|$.

Najpre, dajemo sledeću definiciju:

Definicija 1.2.1. Niz koji konvergira ka nuli, zovemo *nula-niz*.

Navodimo bez dokaza jedan jednostavan rezultat:

Teorema 1.2.5. *Ako niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira ka tački* a *i ako je* $\alpha \in \mathbb{R}$ *proizvoljna konstanta, tada su i nizovi* $\{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\{\alpha+a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentni i važe jednakosti*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha a_n = \alpha a \qquad i \qquad \lim_{n\to+\infty} (\alpha + a_n) = \alpha + a\,.$$

Neposredna posledica ove teoreme je sledeće tvrđenje:

Teorema 1.2.6. *Ako je* a *granica konvergentnog niza* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, tada je niz* $\{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ *nula-niz i obrnuto.*

Teorema 1.2.7. *Ako konvergentan niz nije nula-niz i ako je njegova granica* a*, tada postoji prirodan broj* m *takav da je* $|a_n| > |a|/2$ *za svako* $n > m$*.*

Dokaz. Iz konvergencije niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sleduje da za $\varepsilon = |a|/2$ postoji prirodan broj m takav da za svako $n > m$ važi nejednakost $|a_n - a| < |a|/2$. Kako je (videti [15, str. 73, teorema 3.5.7]) $|a_n - a| \geq ||a| - |a_n|| \geq |a| - |a_n|$, tim pre važi nejednakost $|a|/2 > |a| - |a_n|$, odakle sleduje tvrđenje teoreme. $\square$

Teorema 1.2.8. *Ako su nizovi* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentni sa granicama* a *i* b *respektivno, tada su i nizovi* $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentni i važi*

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n = a + b \tag{1.2.1}$$

i

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n = ab. \tag{1.2.2}$$

Dokaz. Kako je $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$ i kako iz konvergencije nizova $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2, takvi da važe nejednakosti

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad (n > n_1) \qquad \text{i} \qquad |b_n - b| < \varepsilon/2 \quad (n > n_2),$$

zaključujemo da za $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ važi

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon,$$

čime je dokazana jednakost (1.2.1).

Isto tako, iz konvergencije nizova $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2, takvi da važe nejednakosti

$$|a_n - a| < \sqrt{\varepsilon} \quad (n > n_1) \quad \text{i} \quad |b_n - b| < \sqrt{\varepsilon} \quad (n > n_2).$$

Tada je $|a_n - a|\,|b_n - b| < \varepsilon$ za svako $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$, tj.

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - a)(b_n - b) = 0,$$

što, zapravo, znači da je niz $\{(a_n - a)(b_n - b)\}_{n\in\mathbb{N}}$ nula-niz.

Ako na identitet

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)(b_n - b) + b(a_n - a) + a(b_n - b),$$

primenimo dokazanu jednakost (1.2.1) i teoremu 1.2.5 dobijamo

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to+\infty}(a_n b_n - ab) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\Big((a_n - a)(b_n - b) + b(a_n - a) + a(b_n - b)\Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty}(a_n - a)(b_n - b) + \lim_{n\to+\infty} b(a_n - a) + \lim_{n\to+\infty} a(b_n - b) \\
&= \lim_{n\to+\infty}(a_n - a)(b_n - b) + b\lim_{n\to+\infty}(a_n - a) + a\lim_{n\to+\infty}(b_n - b).
\end{aligned}$$

Kako su nizovi $\{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n - b\}_{n\in\mathbb{N}}$ nula-nizovi, zaključujemo da je $L = 0$, što dokazuje jednakost (1.2.2). $\square$

Za konvergentne nizove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, čije su granice $a, b, \dots, w$, respektivno, lako se, primenom prethodne teoreme, matematičkom indukcijom dokazuje sledeće tvrđenje:

Teorema 1.2.9. *Nizovi $\{a_n + b_n + \cdots + w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{a_n b_n \cdots w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su konvergentni nizovi i važe jednakosti*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n + \cdots + w_n) = a + b + \cdots + w$$

i

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n \cdots w_n) = ab \cdots w.$$

Teorema 1.2.10. *Ako konvergentan niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ima granicu* $a\,(\neq 0)$ *i ako je* $a_n \neq 0\,(n = 1, 2, \dots)$*, tada je i niz* $\{1/a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan i granica mu je* $1/a$*.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 1.2.7, zaključujemo da postoji prirodan broj m takav da je $|a_n| > |a|/2$ za svako $n > m$. Sa druge strane, iz konvergencije niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji pozitivan broj $n_0 > m$ takav da je $|a_n - a| < (\varepsilon/2)a^2$ za svako $n > n_0$.

Dakle, za $n > n_0$ imamo

$$\Big|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\Big| = \frac{1}{|a||a_n|}|a_n - a| < \frac{2}{|a||a|}\,\frac{\varepsilon}{2}\,a^2 = \varepsilon,$$

čime je dokaz teoreme završen. $\square$

Teorema 1.2.11. *Ako su nizovi* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentni sa granicama* a *i* b*, respektivno, i ako je niz* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *takav da je* $b_n \neq 0\,(n = 1, 2, \dots)$ *i* $b \neq 0$*, tada je i niz* $\{a_n/b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan i ima granicu* a/b*.*

Dokaz. Tvrđenje ove teoreme je tačno jer je neposredna posledica teorema 1.2.8 i 1.2.10. $\square$

Teorema 1.2.12. *Ako je niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan sa granicom* a *i ako je* $A \leq a_n \leq B$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$*, tada je* $A \leq a \leq B$*.*

Dokaz. Iz konvergencije niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (n > n_0). \tag{1.2.3}$$

Za dokaz nejednakosti $A \leq a$ pretpostavimo suprotno, tj. da je $A > a$. Ako stavimo $\varepsilon = A - a\,(> 0)$, tada iz (1.2.3) zaključujemo da je $a_n < A$ za svako $n > n_0$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom u teoremi.

Slično se dokazuje i druga nejednakost $a \leq B$. $\square$

Teorema 1.2.13. *Ako su nizovi* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentni sa granicama* a *i* b*, respektivno, i ako je* $a_n \leq b_n$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$*, tada je* $a \leq b$*.*

Dokaz. Posmatrajmo niz $\{b_n - a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji je, na osnovu teorema 1.2.5 i 1.2.8, konvergentan i za koji je $b_n - a_n \geq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada, na osnovu prethodne teoreme, zaključujemo da je $b - a \geq 0$, tj. $a \leq b$. $\square$

Teorema 1.2.14. *Ako su nizovi* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentni sa istom granicom* a *i ako je za svako* $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \le c_n \le b_n,$$

tada je i niz $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan i njegova granica je, takođe,* a.

Dokaz. Iz konvergencije nizova $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2, takvi da važe nejednakosti

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (n > n_1) \quad \text{i} \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad (n > n_2).$$

Tada za svako $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ imamo

$$-\varepsilon < a_n - a \le c_n - a \le b_n - a < \varepsilon,$$

tj. $|c_n - a| < \varepsilon$. Dakle, niz $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$. $\square$

Imajući u vidu prošireni skup realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}$, moguće je razmatrati konvergenciju nizova $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ka $+\infty$ i $-\infty$:

Definicija 1.2.2. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da teži ka $+\infty$, u oznaci

$$a_n \to +\infty \quad (n \to +\infty) \qquad \text{ili} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty,$$

ako za svako $A > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n > A$ za svako $n > n_0$.

Definicija 1.2.3. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da teži ka $-\infty$, u oznaci

$$a_n \to -\infty \quad (n \to +\infty) \qquad \text{ili} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty,$$

ako za svako $A > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n < -A$ za svako $n > n_0$.

Za ovakve nizove kažemo da određeno divergiraju ili da su određeno divergentni.

Naglasimo: ako su $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ određeno divergentni nizovi, o konvergenciji nizova $\{a_n \pm b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{a_n/b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ često ne možemo, u opštem slučaju, ništa konkretno reći bez dodatnog ispitivanja.

Primer 1.2.1. Neka je $a_n = \sqrt{n^2+n}$ i $b_n = n$. Očigledno, $a_n \to +\infty$ i $b_n \to +\infty$, kada $n \to +\infty$. Da bismo ispitali konvergenciju niza $\{\sqrt{n^2+n}-n\}_{n\in\mathbb{N}}$ transformišimo opšti član ovog niza na sledeći način:

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\,.$$

Kako je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}\,,$$

zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty}\Bigl(\sqrt{n^2+n}-n\Bigr) = \frac{1}{2}\,,$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+1/n} = 1$. Ovo je zaista tačno jer za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je za svako $n > n_0$

$$\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right| < \varepsilon\,.$$

Ovde je $n_0 = [1/(\varepsilon^2+2\varepsilon)]+1$. Na primer, za $\varepsilon = 10^{-5}$ imamo da je $n_0 = 50000$. $\triangle$

Primer 1.2.2. Za niz $\{\sqrt{n^2+1}-n\}_{n\in\mathbb{N}}$, slično kao u prethodnom primeru, dokazujemo da je nula-niz. $\triangle$

Na kraju ovog odeljka posmatraćemo konvergenciju nizova u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$, sa standardnom euklidskom metrikom (videti primer 2.1.3, glava I)

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Bigl(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\Bigr)^{1/2},$$

gde su $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ proizvoljne tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.15. *Neka je $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}^n$ i*

$$\boldsymbol{a}_k = \bigl(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\bigr).$$

Niz $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ako i samo ako je

$$\lim_{k\to+\infty} a_m^{(k)} = a_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.2.4}$$

Dokaz. Ako niz $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $\boldsymbol{a}$, tada iz nejednakosti

$$\mid a_m^{(k)} - a_m \mid \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} \mid a_i^{(k)} - a_i \mid^2\Big)^{1/2} = d(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a})$$

sleduje (1.2.4) za svako m $(1 \leq m \leq n)$.

Obrnuto, ako nizovi $\big\{a_m^{(k)}\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiraju ka a_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoje prirodni brojevi k_m, takvi da je za svako $k > k_m$

$$\mid a_m^{(k)} - a_m \mid < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.2.5}$$

Ako stavimo $k_0 = \max(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, tada na osnovu (1.2.5) zaključujemo da je za svako $k > k_0$

$$d(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}) = \Big(\sum_{m=1}^{n} \mid a_m^{(k)} - a_m \mid^2\Big)^{1/2} < \varepsilon,$$

tj. da je $\lim\limits_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}$. $\square$

Za niz $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}$ i nizove $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}^n$ definišimo sledeće operacije:

$$\alpha_k \boldsymbol{a}_k = \big(\alpha_k a_1^{(k)}, \alpha_k a_2^{(k)}, \ldots, \alpha_k a_n^{(k)}\big),$$
$$\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k = \big(a_1^{(k)} + b_1^{(k)}, a_2^{(k)} + b_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)} + b_n^{(k)}\big),$$

gde su

$$\boldsymbol{a}_k = \big(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\big), \qquad \boldsymbol{b}_k = \big(b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)}\big).$$

Na osnovu teorema 1.2.8 i 1.2.15 može se dokazati sledeći rezultat:

Teorema 1.2.16. *Neka su $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nizovi u $\mathbb{R}^n$ i $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}$. Ako su ovi nizovi konvergentni, tada važe jednakosti*

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_k \boldsymbol{a}_k = \lim_{k\to+\infty} \alpha_k \cdot \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}_k\,,$$
$$\lim_{k\to+\infty} (\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k) = \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}_k + \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{b}_k\,.$$

1.3. Granične vrednosti nekih nizova u $\mathbb{R}$

U ovom odeljku razmotrićemo neke klase nizova u $\mathbb{R}$, kao i egzistenciju njihovih graničnih vrednosti.

Neka su

$$\Delta a_n \equiv a_{n+1} - a_n \qquad \text{i} \qquad \Delta^2 a_n \equiv a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n.$$

Definicija 1.3.1. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *nerastući* ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $\Delta a_n \leq 0$.

Primer 1.3.1. Niz

$$\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right]^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \right\}$$

je nerastući. △

Definicija 1.3.2. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *neopadajući* ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $\Delta a_n \geq 0$.

Primer 1.3.2. Nizovi

$$\left\{n - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 2, 4, 4, 4, 6, \dots\}$$

i

$$\left\{\left[\frac{n}{3}\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots\}$$

su neopadajući. △

Definicija 1.3.3. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *rastući* ili *strogo rastući* ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $\Delta a_n > 0$.

Primer 1.3.3. Niz $\{2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je strogo rastući. △

Definicija 1.3.4. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *opadajući* ili *strogo opadajući* ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $\Delta a_n < 0$.

Primer 1.3.4. Niz $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je strogo opadajući. △

Definicija 1.3.5. Za nizove koji su nerastući ili neopadajući kažemo da su *monotoni* nizovi.

Napomenimo da je svaki monotoni niz ograničen bar sa jedne strane. Naime, nerastući je ograničen sa gornje, a neopadajući sa donje strane. Sa stanovišta konveregencije interesantni su monotoni nizovi koji su ograničeni sa obe strane, tj. oni nerastući nizovi koji su ograničeni sa donje, kao i oni neopadajući nizovi koji su ograničeni sa gornje strane. O konvergenciji takvih nizova biće reči kasnije.

Definicija 1.3.6. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *konveksan* ako za svako $n = 1, 2, \ldots$ važi $\Delta^2 a_n \geq 0$.

Primer 1.3.5. Niz $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konveksan. $\triangle$

Definicija 1.3.7. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *konkavan* ako za svako $n = 1, 2, \ldots$ važi $\Delta^2 a_n \leq 0$.

Primer 1.3.6. Niz $\{\log n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konkavan niz. $\triangle$

Sledeća teorema daje jedan jednostavan kriterijum za egzistenciju granične vrednosti nizova u $\mathbb{R}$:

Teorema 1.3.1. *Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.*

Dokaz. Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton i ograničen niz. Razlikovaćemo slučajeve kada je ovaj niz rastući i kada je opadajući.

Neka je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rastući. Kako je on i ograničen, što u ovom slučaju znači ograničen odozgo, postoji broj $a = \sup a_n$ za koji je $a_n \leq a$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Naravno, to je isto što i $a_n < a + \varepsilon$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i bilo kako malo pozitivno ε.

Međutim, kako a predstavlja supremum rastućeg niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, za svako proizvoljno malo ε mora postojati prirodan broj n_0 takav da je $a_n > a - \varepsilon$ za svako $n > n_0$. Dakle, za bilo koje proizvoljno malo ε i za svako $n > n_0$ važe nejednakosti

$$a_n - a < \varepsilon \qquad \text{i} \qquad a_n - a > -\varepsilon,$$

tj. za $n > n_0$ i proizvoljno ε važi nejednakost $|a_n - a| < \varepsilon$. Prema tome, niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan niz i njegova granica je $a = \sup a_n$.

Naravno, i za slučaj da je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ opadajući može se, na isti način, dokazati da se radi o konvergentnom nizu čija je granica $a = \inf a_n$. $\square$

Primer 1.3.7. Neka su $x > 0$ i $a_0 > 0$. Posmatrajmo niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definisan pomoću

$$a_n = \frac{1}{2}\Big(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\Big), \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.3.1}$$

Pre svega, iz definicije niza sleduje da su svi članovi niza pozitivni.

Korišćenjem nejednakosti $(t-1)^2 \geq 0$, koja se za $t > 0$ svodi na nejednakost $t + 1/t \geq 2$, i stavljanjem $t = a_{n-1}/\sqrt{x}$, dobijamo

$$2 \leq \frac{a_{n-1}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a_{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}\Big(a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\Big) = \frac{2}{\sqrt{x}} a_n,$$

tj. $a_n \geq \sqrt{x}$, što znači da je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen odozdo.

Kako je $x \leq a_n^2$, imamo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{x}{a_n}\Big) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n,$$

tj. $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n \leq 0$. Dakle, niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono nerastući.

Na osnovu teoreme 1.3.1 zaključujemo da je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Da bismo odredili njegovu graničnu vrednost stavimo $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ i primenimo granični proces na (1.3.1). Tada imamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}\Bigg(\lim_{n\to+\infty} a_{n-1} + \frac{x}{\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n-1}}\Bigg),$$

tj.

$$a = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{x}{a}\Big),$$

odakle nalazimo $a^2 = x$. Kako je $a_n \geq \sqrt{x} > 0$, zaključujemo da je $a = \sqrt{x} > 0$. Dakle,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{x}\,. \quad \triangle$$

Napomena 1.3.1. Formula (1.3.1) predstavlja tzv. *iterativni proces*[17]. Za član niza a_n kažemo da je n-ta iteracija. Ako sa e_n označimo grešku u n-toj iteraciji, tj. stavimo $e_n = a_n - \sqrt{x}$, jednostavno se može dokazati formula

$$e_{n+1} = \frac{1}{2a_n}\, e_n^2,$$

na osnovu koje zaključujemo da je greška u $(n+1)$-oj iteraciji srazmerna kvadratu greške u n-toj iteraciji. Prilikom određivanja kvadratnog korena iz broja x, pomoću (1.3.1), iterativni proces se prekida kada je greška u n-toj iteraciji manja od unapred izabrane tačnosti ε i tada se uzima $\sqrt{x} \approx a_n$. Ilustracije radi primenimo formulu (1.3.1) na određivanje vrednosti $\sqrt{2}$, startujući, na primer, sa $a_0 = 2$. Tako dobijamo sledeći niz vrednosti:

$$\left\{\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \frac{886731088897}{627013566048}, \frac{1572584048032918633353217}{1111984844349868137938112}, \dots\right\},$$

[17] Iterativni procesi za rešavanje jednačina proučavaju se detaljno u okviru kursa *Numerička matematika*.

ili

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \mathbf{1}\,.\,5,\\
x_2 &= \mathbf{1}\,.\,\mathbf{41}666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 66666\ 6667,\\
x_3 &= \mathbf{1}\,.\,\mathbf{41421}\ 56862\ 74509\ 80392\ 15686\ 27450\ 98039\ 21568\ 62745\ 0980,\\
x_4 &= \mathbf{1}\,.\,\mathbf{41421}\ \mathbf{35623}\ \mathbf{7}4689\ 91062\ 62955\ 78890\ 13491\ 01165\ 59622\ 1157,\\
x_5 &= \mathbf{1}\,.\,\mathbf{41421}\ \mathbf{35623}\ \mathbf{73095}\ \mathbf{04880}\ \mathbf{168}96\ 23502\ 53024\ 36149\ 81925\ 7762,\\
x_6 &= \mathbf{1}\,.\,\mathbf{41421}\ \mathbf{35623}\ \mathbf{73095}\ \mathbf{04880}\ \mathbf{16887}\ \mathbf{24209}\ \mathbf{69807}\ \mathbf{85696}\ \mathbf{71875}\ \mathbf{37}72,
\end{aligned}
$$

pri čemu je računanje izvedeno pomoću softvera MATHEMATICA sa 50 cifara. Cifre koje su prikazane „polu-crno“ su tačne. Dakle, iteracije $x_1, \ldots, x_6$ imaju redom jednu, tri, šest, 12, 24 i 48 tačnih cifara.

Teorema 1.3.2. *Neka je niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan sa granicom* a *i neka je niz* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definisan pomoću*

$$
c_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk} a_k \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.3.2}
$$

gde su za svako $n \in \mathbb{N}$

1° $p_{nk} \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$,

2° $\sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk} = 1$

i za svako fiksirano k

3° $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{nk} = 0\,.$

Tada je niz $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan i važi*

$$
\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = a. \tag{1.3.3}
$$

Dokaz. Kako je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je za svako $n > n_0$

$$
|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{1.3.4}
$$

Naravno, ovaj niz je i ograničen, što znači da postoji pozitivan broj M takav da je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$
|a_n| \leq M \qquad \text{i} \qquad |a_n - a| \leq 2M. \tag{1.3.5}
$$

Najzad, iz konvergencije niza $\{p_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}}$, za fiksirano k (uslov 3°), proizilazi da postoje prirodni brojevi n_k ($> n_0$) takvi da je za svako $n > \max\limits_{1\le k\le n} n_k$

$$p_{nk} < \frac{\varepsilon}{4Mn_0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_0). \tag{1.3.6}$$

Neka je sada $n > \max\limits_{1\le k\le n} n_k$. Tada je, zbog uslova 1° i 2°,

$$|c_n - a| = \left|\sum_{k=1}^{n} p_{nk}a_k - a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(a_k - a)\right| \le \sum_{k=1}^{n} p_{nk}|a_k - a|\,.$$

Ako poslednju sumu razdelimo na dve sume: za $k \le n_0$ i $k > n_0$, i iskoristimo nejednakosti (1.3.4), (1.3.5) i (1.3.6), dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_{nk}|a_k - a| &= \sum_{k=1}^{n_0} p_{nk}|a_k - a| + \sum_{k=n_0+1}^{n} p_{nk}|a_k - a| \\ &\le \frac{\varepsilon}{4Mn_0}\cdot 2M\cdot n_0 + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n_0+1}^{n} p_{nk} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Dakle, za svako $n > \max\limits_{1\le k\le n} n_k$, važi nejednakost $|c_n - a| < \varepsilon$, što znači da niz $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definisan pomoću (1.3.2), konvergira ka istoj granici kao i niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Prethodni rezultat je poznat kao *Toeplitzova*[18] *teorema*. Iz ove teoreme može se jednostavno izvesti sledeća *Stolzova*[19] *teorema*:

Teorema 1.3.3. *Neka su dati nizovi* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *takvi da je niz* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *rastući i ima beskonačnu granicu. Ako postoji granična vrednost*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\,, \tag{1.3.7}$$

tada postoji $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n/b_n)$ *i važi jednakost*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\,.$$

[18] Otto Toeplitz (1881–1940), nemački matematičar.
[19] Otto Stolz (1842–1905), austrijski matematičar.

Dokaz. Stavimo $a_0 = b_0 = 0$,

$$p_{nk} = \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad A_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

Pretpostavimo da postoji konačna granična vrednost (1.3.7), tj. da je $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$. Kako je $p_{nk} > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} p_{nk} = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1}) = 1$$

i $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{nk} = 0$, za svako fiksirano k, zaključujemo da su zadovoljeni uslovi prethodne teoreme tako da za niz $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definisan pomoću

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk}A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} = \frac{a_n}{b_n},$$

na osnovu (1.3.3), važi

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A.$$

Ako je granična vrednost (1.3.7) beskonačna, tj. $A = +\infty$, tada se, takođe, može pokazati da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$. $\square$

Napomena 1.3.2. Tvrđenje Stolzove teoreme ostaje u važnosti ako je niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ neopadajući počev od indeksa $n > n_0$ $(\in \mathbb{N})$.

Primer 1.3.8. Primenom teoreme 1.3.3, pokazaćemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{1.3.8}$$

S obzirom da je niz $\{n^{k+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ rastući i $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{k+1} = +\infty$, uslovi teoreme 1.3.3 su ispunjeni pa imamo

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}},$$

tj.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - \Big(n^{k+1} - \binom{k+1}{1}n^k + \binom{k+1}{2}n^{k-1} - \cdots + (-1)^{k+1}\Big)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k + 1 - \binom{k+2}{2}\frac{1}{n} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{n^k}}. \end{aligned}$$

Najzad, kako su nizovi $\{1/n^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(m = 1, \ldots, k)$ nula-nizovi (videti, takođe, tvrđenje 1° u teoremi 1.3.5), zaključujemo da je $L = 1/(k+1)$. △

Napomena 1.3.3. Graničnu vrednost (1.3.8) moguće je, za $k = 1$ i $k = 2$, odrediti i na sledeći način:

1° Kako je $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$, imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\,;$$

2° Isto tako, zbog

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

sleduje

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Naravno, graničnu vrednost (1.3.8) moguće je odrediti na ovaj način i za $k = 3, 4$, itd. Međutim, ne i za proizvoljno k zbog teškoća koje postoje kod određivanja zbirova $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

Neposredna posledica teoreme 1.3.2 je sledeća teorema koja je poznata kao *Cauchyeva teorema*:

Teorema 1.3.4. *Neka je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz i neka mu je granica a. Ako je $A_n = \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, tada je i niz $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i granica mu je, takođe, a.*

Dokaz. Stavljajući $p_{nk} = 1/n\,(k = 1, 2, \ldots, n)$ i $c_n = A_n$, uslovi 1°, 2° i 3° u teoremi 1.3.2 su zadovoljeni, pa niz aritmetičkih sredina niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka istoj granici a. □

Napomenimo da iz konvergencije niza $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne sleduje konvergencija niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Naime, neka je $a_n = \sin^2 n\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$. Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ očigledno ne konvergira. Međutim, niz $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan jer je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} A_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin^2 k\alpha \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\alpha}{2} \cdot \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\Big) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Neka je dat konvergentan niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sa pozitivnim članovima, čija je granica $a > 0$. Pored niza aritmetičkih sredina $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, koji je razmatran u teoremi 1.3.4, posmatrajmo i nizove geometrijskih i harmonijskih sredina $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gde su

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad \text{i} \qquad H_n = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}\,.$$

Primenom Cauchyeve teoreme 1.3.4 na konvergentni niz $\{1/a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaključujemo da je niz njegovih aritmetičkih sredina konvergentan sa granicom $1/a$. Prema tome, važi $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = a\,.$

Može se dokazati da i niz geometrijskih sredina $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, takođe, konvergira ka a. Primenom nejednakosti za sredine (videti [15, str. 30, teorema 2.1.3])

$$H_n \le G_n \le A_n,$$

na osnovu teoreme 1.2.14, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a\,.$$

Na osnovu ovog rezultata može se dokazati da za svaki niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sa pozitivnim članovima, za koji postoji granična vrednost $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n/a_{n-1})$, važi jedna interesantna jednakost.

Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}},$$

primenom prethodno pomenutog rezultata na niz $\{a_n/a_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, sa $a_0 = 1$, dobijamo

$$\text{(1.3.9)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Teorema 1.3.5. *Ako je $a > 0$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada važi:*

$$1^\circ \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0\,; \quad 2^\circ \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,; \quad 3^\circ \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\lambda}{(1+a)^n} = 0\,.$$

Dokaz. 1° Nejednakost $|1/n^a - 0| = |1/n^a| < \varepsilon$ važi ako je $n^a > 1/\varepsilon$, tj. ako je $n > (1/\varepsilon)^{1/a}$. Prema tome, niz $\{1/n^a\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka nuli jer je uvek $1/n^a < \varepsilon$ za $n > n_0 = 1 + [(1/\varepsilon)^{1/a}]$.

2° Razlikovaćemo tri slučaja: (i) Slučaj $a > 1$. Neka je $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$, tj. $(1 + b_n)^n = a$. Napomenimo da je b_n pozitivno. Kako je

$$1 + nb_n < (1 + b_n)^n = a, \qquad \text{tj.} \qquad 0 < b_n < \frac{a-1}{n},$$

zaključujemo da je niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nula-niz, tj. da je $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + b_n) = 1$, pa, prema tome, i $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) Slučaj $0 < a < 1$. Ako stavimo $a = 1/b$ $(b > 1)$, imamo da je $\sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{b}$. Kako je, na osnovu (i), za $b > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b} = 1$, neposredno sleduje da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(iii) Slučaj $a = 1$. Ovde je $\sqrt[n]{a} = 1$, tj. svi članovi niza $\{\sqrt[n]{a}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jednaki su jedinici, pa je i $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Tvrđenje 2° se može dokazati i neposrednom primenom jednakosti (1.3.9). Naime, za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gde je $a_n = a$ $(n \in \mathbb{N})$, iz (1.3.2) sleduje

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{a} = 1\,.$$

3° Neka je k ceo broj takav da je $k > \max(\lambda, 0)$. Ako pretpostavimo da je $n > 2k$, imamo

$$(1 + a)^n > \binom{n}{k} a^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\, a^k > \frac{a^k n^k}{k! 2^k}\,,$$

jer je $n - m + 1 > n/2$ za $n > 2k$ i $m = 1, \ldots, k$. Koršćenjem ove nejednakosti nalazimo da je za $n > 2k$

$$0 < \frac{n^\lambda}{(1 + a)^n} < Cn^{\lambda-k}, \tag{1.3.10}$$

gde je $C = k! 2^k / a^k$. Kako je $\lambda - k < 0$, na osnovu 1°, imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\lambda-k} = 0$. Najzad, prelaskom na graničnu vrednost u (1.3.10), kada $n \to +\infty$, dobijamo 3°. $\square$

Teorema 1.3.6. *Niz* $\{\sqrt[n]{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je konvergentan i važi*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Dokaz. Neka je $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$, tj. $n = (1+b_n)^n$, pri čemu je b_n pozitivno za $n \geq 2$. Tada iz

$$n = (1+b_n)^n > 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2}\, b_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}\, b_n^2$$

sleduje

$$0 < b_n^2 < \frac{2}{n-1}\,,$$

tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Stoga je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. $\square$

I ovo se tvrđenje može dokazati na osnovu jednakosti (1.3.9), stavljajući $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Teorema 1.3.7. *Ako je* $0 < q < 1$, *tada je* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Dokaz. Ako stavimo $\lambda = 0$ i $1/(1+a) = q$, tada se tvrđenje 3° u teoremi 1.3.5 svodi na $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. $\square$

Teorema 1.3.8. *Ako je* $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, *tada je niz* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan niz.*

Dokaz. Dokazaćemo da je niz $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotono rastući niz i da je ograničen odozgo.

Kako na osnovu (GA) nejednakosti, tj. na osnovu nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine (videti [15, str. 30, teorema 2.1.3]), važi stroga nejednakost

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n(1+1/n)}{n+1}$$

i kako je

$$\frac{1 + n(1+1/n)}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}\,,$$

lako zaključujemo da je

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

tj. $e_n < e_{n+1}$.

Prema tome, niz $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono rastući niz.

Da bismo dokazali da je niz $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen, dokazaćemo prvo da važe nejednakosti

$$1+\frac{k}{n} \;\le\; \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^k \;<\; 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2} \qquad (k\le n). \tag{1.3.11}$$

Prva od ovih nejednakosti, tj. nejednakost

$$1+\frac{k}{n} \;\le\; \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^k,$$

je tačna. To je, u stvari, poznata *Bernoullieva*[20] *nejednakost.*

Primenom metoda matematičke indukcije, dokazaćemo da važi nejednakost

$$\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^k \;<\; 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2} \qquad (k\le n). \tag{1.3.12}$$

Lako je zaključiti da je nejednakost (1.3.12) tačna za $k=1$. Na osnovu pretpostavke da je ona tačna za $k=m\ge 1$, zaključujemo da važi

$$\begin{aligned}
\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^{m+1} &= \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^m\\
&< \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)\Bigl(1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\Bigr)\\
&= 1+\frac{m+1}{n}+\frac{m^2+m}{n^2}+\frac{m^2}{n^3}\\
&= 1+\frac{m+1}{n}+\frac{(m+1)^2}{n^2}-\frac{n(m+1)-m^2}{n^3},
\end{aligned}$$

tj.

$$\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^{m+1} < 1+\frac{m+1}{n}+\frac{(m+1)^2}{n^2} \qquad (m\le n),$$

jer je $n(m+1)-m^2>0$ za $m\le n$. Dakle, nejednakost (1.3.12) je tačna za svaki prirodan broj $k\le n$.

Ovim je, naravno, dokazana dvostruka nejednakost (1.3.11), koja za $k=n$ postaje

$$2\le \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n < 3.$$

[20] Jakob Bernoulli (1654–1705), švajcarski matematičar.

Prema tome, važi $2 \le e_n < 3$. Niz $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je, dakle, ograničen.

Kako je niz $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotono rastući i ograničen odozgo, on je, na osnovu teoreme 1.3.1, konvergentan. $\square$

Granicu niza $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, čiju smo konvergenciju dokazali, obeležavaćemo sa e. Dakle, važi jednakost $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = e$. Ovaj broj se uzima kao osnova prirodnih logaritama.

Primer 1.3.9. Neka je

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pokazaćemo da je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i da mu je granica broj e.

S obzirom da je

$$\begin{aligned} e_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{n^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big) \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,, \end{aligned}$$

zaključujemo da je $e_n < a_n$. Isto tako, iz

$$\begin{aligned} \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = 1 + 1 &+ \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big) \\ > 1 + 1 &+ \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) \end{aligned}$$

zaključujemo da je za svako $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = a_k\,,$$

tj. da važi $a_k < e$. Dakle, niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen odozgo. Očigledno, niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je i rastući. Prema tome, on je konvergentan.

Kako je, na osnovu prethodnog, $e_n < a_n < e$, sledi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$. $\triangle$

Primer 1.3.10. Dokazaćemo da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji broj $\theta_n \in (0,1)$ tako da važi jednakost

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}\,. \tag{1.3.13}$$

Ako stavimo

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,,$$

neposredno sleduje

$$\begin{aligned}
a_{n+m} - a_{n-1} &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\
&= \frac{1}{n!}\Big(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\Big) \\
&< \frac{1}{n!}\Big(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^m}\Big) \\
&= \frac{1}{n!}\cdot\frac{1 - \dfrac{1}{(n+1)^{m+1}}}{1 - \dfrac{1}{n+1}} < \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n!n}\,,
\end{aligned}$$

tj.

$$a_{n+m} - a_n = a_{n+m} - a_{n-1} - \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!n}\,.$$

Na osnovu prethodnog dobijamo

$$\lim_{m\to+\infty}(a_{n+m} - a_n) = e - a_n < \frac{1}{n!n}\,.$$

Važi, dakle, dvostruka nejednakost

$$0 < e - a_n < \frac{1}{n!n},$$

tj.

$$0 < (e - a_n)n!n < 1.$$

Ako stavimo $(e - a_n)n!n = \theta_n$, gde je, očigledno, $0 < \theta_n < 1$, dobijamo

$$e = a_n + \frac{\theta_n}{n!n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}\,. \quad \triangle$$

Napomena 1.3.4. Za približno određivanje broja e pogodno je koristiti niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Naime, možemo uzeti da je $e \approx a_n$, pri čemu se greška procenjuje primenom formule (1.3.13). Tako na primer, za $n = 10$ imamo $e \approx a_{10} \approx 2.7182818$, gde je

$$e - a_{10} = \frac{\theta_{10}}{10!\cdot 10} < \frac{1}{10!\cdot 10} \approx 2.8\times 10^{-8}.$$

Takođe, formula (1.3.13) ima i teorijski značaj jer se njenom primenom može dati jednostavan dokaz da je broj e iracionalan. Zaista, ako bismo pretpostavili suprotno, tj. da je broj e racionalan, na primer $e = m/n$ $(m, n \in \mathbb{N})$, tada bi moralo, na osnovu (1.3.13), da važi

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}\,,$$

odakle sleduje

$$\frac{\theta_n}{n} = (n-1)!m - n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right),$$

što je nemoguće jer je na desnoj strani jednakosti ceo broj, a na levoj razlomak θ_n/n, čija se vrednost nalazi u intervalu $(0, 1/n)$. Prema tome, e ne može biti racionalan broj. Kao što je navedeno u [15, str. 64, napomena 3.4.1], broj e je transcendentan.

Primer 1.3.11. Pokazaćemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e\,.$$

Posmatrajmo niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gde je $a_n = n^n/n!$. Tada je, prema (1.3.9),

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n},$$

tj.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,. \quad \triangle$$

Primer 1.3.12. Korišćenjem niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz primera 1.3.10, dokazaćemo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(2e\pi n!) = 2\pi$.

Kako je $\theta_n = (e - a_n)n!n$ $(0 < \theta_n < 1)$ i

$$e = a_{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)} = a_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)} \quad (0 < \theta_{n+1} < 1),$$

imamo

$$\theta_n = (e - a_n)n!n = n!n\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\right),$$

tj.

$$\theta_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\,. \tag{1.3.14}$$

Takođe, nalazimo da je

$$2e\pi n! = 2\pi n!\left(a_n + \frac{\theta_n}{n!n}\right) = 2\pi n!a_n + \frac{2\pi\theta_n}{n}\,.$$

Kako je $n!a_n$ ceo broj, imamo

$$\sin(2e\pi n!) = \sin\left(2\pi n!a_n + \frac{2\pi\theta_n}{n}\right) = \sin\frac{2\pi\theta_n}{n}\,.$$

Prelaskom na graničnu vrednost, kada $n \to +\infty$, na osnovu (1.3.14) zaključujemo da $\theta_n \to 1$, pa je $\{2\pi\theta_n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nula-niz. Isti takav je i niz $\{\sin(2\pi\theta_n/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kako je, za svaki nula-niz $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sin\alpha_n)/\alpha_n = 1$ (videti odeljak 1.4, glava III), nalazimo

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin(2e\pi n!) = \lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{2\pi\theta_n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{2\pi\theta_n}{n}}{\dfrac{2\pi\theta_n}{n}}\,2\pi\theta_n = 2\pi. \qquad \triangle$$

Primer 1.3.13. Ako je

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\,,$$

niz $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan. Njegova granica γ poznata je kao *Eulerova*[21] *konstanta* i za nju važi

$$\gamma = 0\,.\,57721\;56649\;01532\;86060\;65120\;90082\;40243\;10421\;59335\;\ldots\;.$$

Pre svega, iz činjenice da je niz $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ rastući i da konvergira ka e, sleduje da važi nejednakost $(1+1/k)^k < e$ $(k \in \mathbb{N})$, tj.

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{1.3.15}$$

Niz $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, gde je $a_k = (1+1/k)^{k+1}$, takođe konvergira ka e, ali je opadajući jer se primenom Bernoullieve nejednakosti dobija da je

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k}{k+1}\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{k+2} > \frac{k}{k+1}\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1\,.$$

---

[21] Léonhard Euler (1707–1783), veliki švajcarski matematičar.

Stoga važi nejednakost $e < (1 + 1/k)^{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$, tj.

$$\frac{1}{k+1} < \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{1.3.16}$$

Kako je

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

na osnovu (1.3.16) zaključujemo da je $\gamma_{n+1} < \gamma_n$, što znači da je $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ opadajući niz.

Sabiranjem nejednakosti (1.3.15) za $k = 1, 2, \ldots, n$, dobijamo da je

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ili, što je isto,

$$\log \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

tj.

$$\log(n+1) < \gamma_n + \log n.$$

Dakle, važi

$$\gamma_n > \log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0,$$

odakle zaključujemo da je niz $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen. Skup njegovih vrednosti je podskup skupa $(0, 1]$. Prema tome, niz $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan. $\triangle$

1.4. Delimični nizovi

Uočimo jedan niz $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ prirodnih brojeva $n_1, n_2, \ldots$, takvih da je

$$n_1 < n_2 < \cdots .$$

Definicija 1.4.1. Za svaki niz $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *delimični niz* niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Napomena 1.4.1. U trivijalnom slučaju, i sâm niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je, takođe, delimični niz niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicija 1.4.2. Ako je delimični niz $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan, za njegovu granicu kažemo da je *delimična granica* niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Navodimo bez dokaza sledeće tvrđenje:

Teorema 1.4.1. *Niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira ka* a *ako i samo ako svaki njegov delimični niz konvergira ka* a.

Teorema 1.4.2. *Skup delimičnih granica niza* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *u metričkom prostoru* (X,d) *je zatvoren skup.*

Dokaz. Neka je D skup vrednosti niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i D^* skup svih delimičnih granica tog niza. Neka je b jedna granična tačka skupa D^*. Dokazaćemo da je b granična tačka i skupa D.

Kako je b granična tačka skupa D^* to za svako $\varepsilon > 0$, postoji tačka $c \in D^*$ takva da je $0 < d(b,c) < \varepsilon/2$. Isto tako, s obzirom da je c delimična granica niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, postoji tačka $a_n \in D$, takva da je $d(a_n,c) < d(b,c)$. Kako je $a_n \neq b$, imamo

$$0 < d(a_n,b) \leq d(a_n,c) + d(c,b) < 2d(b,c) < \varepsilon,$$

odakle zaključujemo da je tačka b granična tačka skupa D.

Prema tome, kako je tačka b granična tačka skupa D ona je, na osnovu teoreme 1.2.4, granična vrednost nekog niza iz D, tj. ona je jedna delimična granica niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dakle, b pripada skupu D^*, što znači da je D^* zatvoren skup. $\square$

U daljem tekstu razmatraćemo, opet, samo nizove u $\overline{\mathbb{R}}$.

Teorema 1.4.3. *Svaki ograničeni niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sadrži delimični niz koji je konvergentan.*

Dokaz. Neka je D skup vrednosti ograničenog niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Razlikovaćemo dva slučaja: 1° kada je D konačan skup i 2° kada je D beskonačan skup.

1° U skupu D postoji tačka a, takva da za beskonačno mnogo indeksa $n_1, n_2, \ldots$ (za koje je $n_1 < n_2 < \cdots$) važi $a_{n_1} = a_{n_2} = \cdots = a$. Prema tome, delimični niz $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je konvergentan niz i granica mu je a.

2° Kako je D ograničen skup, na osnovu Bolzano-Weierstrassove teoreme (teorema 2.2.3, glava I), on ima graničnu tačku. Neka je to tačka a. Tada, prema teoremi 1.2.4, u skupu D postoji niz koji konvergira ka tački a. $\square$

Kao što smo i do sada činili, sa D^* ćemo obeležavati skup svih delimičnih granica niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Da bismo mogli da razmatramo i divergentne nizove, podrazumevaćemo da skup D^* sadrži sve delimične granice, pa eventualno i simbole $-\infty$ i $+\infty$.

Definicija 1.4.3. Brojevi $a_* = \inf D^*$ i $a^* = \sup D^*$ nazivaju se *donja granica* i *gornja granica* niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respektivno.

Za brojeve a_* i a^* koriste se i alternativne oznake

$$a_* = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \varliminf_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{i} \qquad a^* = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Za nizove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ važe sledeća tvrđenja:

Teorema 1.4.4. *Ako je $a_n \le b_n$ za $n > n_0 \in \mathbb{N}$, tada je*

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \le \varliminf_{n\to+\infty} b_n \qquad i \qquad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Naravno, za konvergentne nizove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ za koje je $a_n \le b_n$ $(n > n_0 \in \mathbb{N})$ važi

$$\lim_{n\to+\infty} a \le \lim_{n\to+\infty} b.$$

Teorema 1.4.5. *Ako za nizove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ postoje donja i gornja granica, tada je*

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$$

i

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n \le \varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Teorema 1.4.6. *Ako su a_n i b_n $(n > n_0 \in \mathbb{N})$ nenegativni i ako za nizove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ postoje donja i gornja granica, tada je*

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n b_n) \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$$

i

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to+\infty} b_n \le \varliminf_{n\to+\infty} (a_n b_n) \le \varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Teorema 1.4.7. *Ako je $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, tada je*

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \varliminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Teorema 1.4.8. *Skup D^* sadrži $a_* = \varliminf_{n\to+\infty} a_n$ i $a^* = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n$.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti samo za a^*. Za a_* dokaz je sličan.

Razlikovaćemo tri slučaja:

1° Neka je a^* konačan broj. To znači da je skup D^* ograničen sa gornje strane. Prema tome, na osnovu teoreme 1.4.3, u skupu D^* postoji bar jedna delimična granica niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kako je, prema teoremi 1.4.2, skup D^* i zatvoren skup, njemu pripada i njegov supremum a^*.

2° Neka je $a^* = -\infty$. Tada D^* sadrži samo jedan element i to $-\infty$. U tom slučaju, ne postoji ni jedna delimična granica niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3° Neka je $a^* = +\infty$. Tada skup D^* nije ograničen sa gornje strane. Prema tome, postoji delimični niz $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ takav da $a_{n_k} \to +\infty$, pa $+\infty$ pripada skupu D^*. $\square$

Bez dokaza navodimo sledeće tvrđenje:

Teorema 1.4.9. *Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ važi nejednakost $a_* \le a^*$. Znak jednakosti važi ako i samo ako je niz konvergentan ili određeno divergentan.*

Primer 1.4.1. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gde je $a_n = (-1)^n\Big(1 + \dfrac{1}{n+1}\Big)$, imamo

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\frac{3}{2}, \quad \liminf_{n\to+\infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n = 1, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{4}{3}. \quad \triangle$$

2. CAUCHYEV NIZ I KOMPLETNI PROSTORI

2.1. Cauchyev niz

Ovde će opet biti reči o nizovima u proizvoljnom metričkom prostoru (X, d). Naravno, kao i ranije, sva razmatranja je lako interpretirati za nizove u $\mathbb{R}$.

Definicija 2.1.1. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u prostoru X kažemo da je *Cauchyev niz* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ za svako $m, n > n_0$.

Primer 2.1.1. Niz $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyev niz u metričkom prostoru $\mathbb{R}$ jer je $|1/m - 1/n| < 1/m + 1/n$, što za $m, n > n_0$, u stvari, znači $|1/m - 1/n| < 2/n_0 = \varepsilon$. Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 sa traženom osobinom. U našem slučaju to je $n_0 = [2/\varepsilon] + 1$. $\triangle$

Prethodna definicija može se dati i u ekvivalentnom obliku:

Definicija 2.1.1′. Za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je *Cauchyev niz* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $d(a_{n+p}, a_n) < \varepsilon$ za svako $n > n_0$ i svako $p \in \mathbb{N}$.

Izučićemo sada neke osobine Cauchyevih nizova.

Teorema 2.1.1. *Svaki Cauchyev niz je ograničen.*

Dokaz. Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz u metričkom prostoru (X, d). Tada za svako proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $d(a_m, a_{n_0}) < \varepsilon$ $(m > n_0)$, što znači da se svi članovi ovog niza, počev od indeksa n_0, nalaze u kugli $K(a_{n_0}, \varepsilon)$. Zato postoji pozitivan broj r takav da se svi članovi posmatranog niza nalaze u kugli $K(a_{n_0}, r)$, tj. u kugli konačnog poluprečnika r. Dakle, niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen. $\square$

Teorema 2.1.3. *Svaki konvergentan niz je Cauchyev niz.*

Dokaz. Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz i neka mu je granica a. Kako je

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n)$$

i kako zbog konvergencije niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ za $m, n > n_0$ važe nejednakosti

$$d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2},$$

zaključujemo da je $d(a_m, a_n) < \varepsilon$, tj. niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyev niz. $\square$

Napomena 2.1.1. Na osnovu teorema 2.1.2 i 2.1.1 sleduje tvrđenje da je svaki konvergentan niz ograničen, tj. tvrđenje koje smo dokazali ranije (teorema 1.2.3).

Pokazaćemo da, u opštem slučaju, ne važi obrnuto tvrđenje. Naime, pokazaćemo da niz koji je Cauchyev ne mora biti i konvergentan, tj. da postoje nizovi koji su Cauchyevi, ali nisu konvergentni.

Posmatrajmo u skupu $\mathbb{Q}$, kao metričkom prostoru sa standardnom metrikom, skup približnih racionalnih vrednosti broja $\sqrt{2}$. Neka je q_n onaj racionalan broj koji se dobija iz decimalnog razvoja broja $\sqrt{2}$ zadržavanjem prvih n decimala.

Očigledno, niz $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyev niz jer je za $m > n$

$$|q_m - q_n| < \varepsilon = 10^{-n}.$$

Međutim, u metričkom prostoru $\mathbb{Q}$, niz $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nije konvergentan, jer on ne konvergira ka nekom racionalnom broju $q \in \mathbb{Q}$. Njegova granica je broj $\sqrt{2}$, a on ne pripada metričkom prostoru $\mathbb{Q}$.

Naravno, nije ovo jedini primer da jedan Cauchyev niz nije konvergentan. Naime, za svaki konvergentan niz moguće je konstruisati ovakav primer ako se iz prostora u kome se posmatra konvergentni niz isključi granica niza kao tačka prostora. Tako, niz iz primera 2.1.1, koji je Cauchyev i konvergentan u prostoru $\mathbb{R}$, jeste Cauchyev, ali ne i konvergentan u prostoru $\mathbb{R}^+$. Dakle, ako je niz konvergentan on je i Cauchyev, ali u opštem slučaju obrnuto ne važi.

Međutim, ako je $X = \mathbb{R}$ važi i obrnuto tvrđenje. Naime, važi sledeća teorema:

Teorema 2.1.3. *Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u prostoru $\mathbb{R}$ je konvergentan ako i samo ako je Cauchyev niz.*

Dokaz. Ako je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, prema teoremi 2.1.2, on je i Cauchyev.

Pretpostavimo, sada, da je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev, tj. neka za svako proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (m > n > n_0). \tag{2.1.1}$$

Na osnovu teoreme 2.1.1, kao što smo videli, Cauchyev niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen i sa donje i sa gornje strane. Prema tome, njegov skup vrednosti D ima i donju i gornju među (videti [15, str.15, definicije 1.3.19 i 1.3.20]). Neka su one redom a_* i a^*.

Tada je, za dovoljno veliko n_0 i $m > n > n_0$,

$$|a^* - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |a_n - a_*| < \frac{\varepsilon}{3},$$

pa je, prema tome, i

$$\begin{aligned} |a^* - a_*| &= |a^* - a_m + a_m - a_n + a_n - a_*| \\ &< |a^* - a_m| + |a_m - a_n| + |a_n - a_*| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, razlika $a^* - a_*$ se može učiniti proizvoljno malom, tj. važi $a^* = a_*$. Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je, prema tome, konvergentan. □

Primer 2.1.2. Posmatrajmo tzv. harmonijski niz

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.1.2}$$

Kako je, za proizvoljno n i $m = 2n$,

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2},$$

zaključujemo da postoji ε $(0 < \varepsilon < 1/2)$ za koje se ne može naći n_0 takvo da važi (2.1.1). Dakle, niz (2.1.2) nije Cauchyev. On je divergentan niz. $\triangle$

Primer 2.1.3. Neka je

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.1.3}$$

Kako je za svako $m > n > n_0$

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0},
\end{aligned}$$

zaključujemo da za svako $\varepsilon > 0$ važi nejednakost $|a_m - a_n| < \varepsilon$ kada je $m > n > n_0 = [1/\varepsilon] + 1$. Dakle, (2.1.3) je Cauchyev niz. Na osnovu teoreme 2.1.3 ovaj niz je konvergentan. $\triangle$

2.2. Kompletni prostori

Kao što smo videli, svaki konvergentni niz u metričkom prostoru (X, d) je Cauchyev niz. Međutim, videli smo, takođe, da ima Cauchyevih nizova koji nisu konvergentni. Štaviše, naveli smo primere u kojima to ne zavisi od uočenog niza, već od metričkog prostora u kome se niz posmatra.

To nam ukazuje na mogućnost da izvršimo jednu karakterizaciju metričkog prostora (X, d) u odnosu na konvergenciju Cauchyevih nizova posmatranih u njemu.

Definicija 2.2.1. Za metrički prostor (X, d) u kome svaki Cauchyev niz konvergira kažemo da je *kompletan.*

Primer 2.2.1. 1° Metrički prostor $\mathbb{R}$ sa standardnom metrikom je kompletan. 2° Metrički prostor $\mathbb{R}^+$ nije kompletan prostor. $\triangle$

Primer 2.2.2. Kompletni su i sledeći metrički prostori: 1° prostor m; 2° prostor $C[a, b]$; 3° prostor $\mathbb{R}^n$. $\triangle$

Napomenimo da je osobinu kompletnosti prostora, pod određenim uslovima, moguće preneti sa jednog metričkog prostora na drugi.

Dokazaćemo, sada, nekoliko stavova koji se odnose na zatvorene skupove, konvergentne nizove i kompletne metričke prostore.

Teorema 2.2.1. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Skup* $A \subset X$ *je zatvoren skup ako i samo ako za svaki konvergentan niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *u prostoru* X*, za koji je* $a_n \in A$*, iz konvergencije* $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ *sleduje da je* $a \in A$.

Dokaz. Neka je $A \subset X$ zatvoren skup i neka niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka granici $a\,(\in X)$. Tada je A' otvoren skup, pa za svako $b \in A'$ postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $K(b, \varepsilon) \subseteq A'$. To znači da $a_n \notin K(b, \varepsilon)$ ni za jedno $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, tačka b nije granica niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kako je b bilo koja tačka iz A', zaključujemo da niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nema granicu koja pripada skupu A', tj. njegova granica a pripada skupu A.

Neka je sada skup A takav da iz konvergencije $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(a_n \in A)$ sleduje da je $a \in A$. Za svaki skup $B \subseteq X$, koji nije zatvoren skup, postoji tačka $b \in B'$ takva da je skup $B \cap K(b, 1/n)$ neprazan skup za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako to ne bi bilo, tada bi za svaku tačku $b \in B'$ postojala okolina $K(b, 1/n)$ koja čitava leži u B', tj. skup B' bi bio otvoren, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da skup B nije zatvoren.

Posmatrajmo sada niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(b_n \in B \cap K(b, 1/n))$. To je niz za koji važi: $b_n \in B$ za svako $n \in \mathbb{N}$, konvergentan je u X i granica mu je $b \in B'$, tj. $b \notin B$.

Skup B, dakle, nema osobinu koju ima skup A, tj. skup A nije nijedan od skupova B. Skup A, prema tome, ne pripada skupovima koji nisu zatvoreni. Skup A je, znači, zatvoren skup. □

Interesantno je i sledeće tvrđenje koje ukazuje na povezanost pojmova zatvoren skup i Cauchyev niz u kompletnom metričkom prostoru:

Teorema 2.2.2. *Neka je* (X, d) *metrički prostor i* $Y \subset X$ *zatvoren skup. Ako je prostor* (X, d) *kompletan, tada je i prostor* (Y, d) *kompletan.*

Dokaz. Neka je $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev niz u prostoru (Y, d). Tada je niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyev i u prostoru (X, d). Kako je (X, d) kompletan prostor, niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka granici $b \in X$. Međutim, skup Y je zatvoren, pa granica b, kao granica niza iz prostora (Y, d), prema teoremi 2.2.1, pripada skupu Y, tj. $b \in Y$. Dakle, niz $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyev niz u Y koji konvergira ka granici $b \in Y$. Metrički prostor (Y, d) je, prema tome, kompletan. □

Neposredna posledica ove teoreme je sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.3. *Svaki zatvoren podskup euklidskog prostora* $(\mathbb{R}^n, d)$ *je kompletan metrički prostor.*

Primer 2.2.3. Svaki segment $[\alpha, \beta]$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ je kompletan prostor. △

3. ZADACI ZA VEŽBU

3.1. Neka je $a > 0$. Ispitati konvergenciju niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opšti član

$$a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a + \sqrt{a}}}}\,. \tag{1}$$

U slučaju da je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz, odrediti njegovu granicu.

Uputstvo. Konstatovati prvo da je $a_n > 0$, a zatim zaključiti da važi rekurentna relacija $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Rezultat. Niz je konvergentan i važi jednakost $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$.

3.2. Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetički niz sa razlikom $a\,(> 0)$ i neka je

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}\right).$$

Odrediti graničnu vrednost $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n$.

Rezultat. $1/\sqrt{a}$.

3.3. Ako je

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(a + \frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a + \frac{n-1}{n}\right)^2\right),$$

proveriti jednakost $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a^2 + a + \frac{1}{3}$.

3.4. Dokazati jednakosti:

1° $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} = 0 \qquad (a > 0)$,

2° $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab} \qquad (a, b > 0)$,

3° $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\big(a^{1/n} - 1\big) = \log a \qquad (a > 0)$.

4° $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{1}{3}$,

3.5. Neka su a i b dati brojevi. Ispitati konvergenciju nizova $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ako su oni definisani pomoću

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \qquad \text{i} \qquad b_1 = b, \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n}\,.$$

3.6. Ako su p i q prirodni brojevi, odrediti graničnu vrednost

$$A = \lim_{n\to+\infty} n^2\biggl(\Bigl(1+\frac{p}{n}\Bigr)^q - \Bigl(1+\frac{q}{n}\Bigr)^p\biggr).$$

Rezultat. $A = \dfrac{pq}{2}\,(q-p)$.

3.7. Neka je dat niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opšti član

$$a_n = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}\,,$$

gde i u brojiocu i u imeniocu ima po n kvadratnih korena.

Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3/2$.

Uputstvo. Staviti: $\sqrt{2} = 2\cos(\pi/4)$ i $\sqrt{3} = 2\cos(\pi/6)$.

3.8. Odrediti: $\inf a_n$, $\sup a_n$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$ i $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$, ako je

1° $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}\,,$ $\qquad 2^\circ$ $\quad a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}\,,$

3° $\quad a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{n(n-1)/2},$ $\qquad 4^\circ$ $\quad a_n = n^{(-1)^n}.$

Rezultat. Tražene vrednosti su, redom:

1° $\inf a_n = -1$, $\sup a_n = \dfrac{3}{2}$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 0$ i $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 1$,

2° $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = 2$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 0$ i $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 2$,

3° $\inf a_n = -4$, $\sup a_n = 6$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = -4$ i $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 6$,

4° $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = 0$ i $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

III G L A V A

Funkcije jedne realne promenljive

1. GRANIČNE VREDNOSTI FUNKCIJA

1.1. Pojam granične vrednosti

U II glavi razmatrali smo granične vrednosti nizova $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, tj. nizova $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gde je $n \mapsto f(n) = a_n$. Ovde ćemo razmatrati složenije probleme koji se odnose na granične procese za funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$, gde je $X \subset \mathbb{R}$.

Pre svega, saglasno definiciji 2.2.3, glava I, i ovde ćemo pod δ-okolinom tačke $a \in \mathbb{R}$ podrazumevati interval $(a-\delta, a+\delta)$, koji ćemo nadalje označavati i sa $U(a,\delta)$. U daljim razmatranjima koristićemo i nešto drugačiju δ-okolinu tačke $a \in \mathbb{R}$. Tu drugačiju δ-okolinu uvodimo sledećom definicijom:

Definicija 1.1.1. Za skup $U(a,\delta) \setminus \{a\}$, u oznaci $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$, kažemo da je *probodena δ-okolina* tačke a.

Probodena δ-okolina tačke a, dakle, ne sadrži tačku a.

Kada nije neophodno naglasiti da je broj δ poluprečnik okoline tačke a, pisaćemo jednostavno $U(a)$ ili $\overset{\circ}{U}(a)$ umesto $U(a,\delta)$, tj. umesto $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$. Isto tako, u celom ovom poglavlju pod terminom „funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana na skupu D“ nećemo podrazumevati da je D oblast definisanosti funkcije f, već da je to samo skup na kome razmatramo funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$. Drugim rečima, može se reći da u tom slučaju razmatramo restrikciju funkcije f sa X na $D\,(\subset X)$. U slučaju kada je D okolina $U(a)$ ili $\overset{\circ}{U}(a)$, često ćemo govoriti: „funkcija f definisana *u* okolini ...“ umesto: „funkcija f definisana *na* okolini ...“.

Neka je $\mathcal{X}(a,\delta)$ skup svih nizova $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sa vrednostima $x_n \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$, koji konvergiraju ka a, tj.

$$\mathcal{X}(a,\delta) = \big\{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \overset{\circ}{U}(a,\delta),\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a\big\}.$$

Uočimo jedan niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}(a,\delta)$ i neka $x \in \mathbb{R}$ uzima samo vrednosti x_n iz uočenog niza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kako x_n teži ka a kada n neograničeno raste, ima smisla govoriti i da x teži ka a. Kažemo, u tom slučaju, da x teži ka a preko niza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicija 1.1.2. Ako x teži ka a preko svih nizova $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}(a,\delta)$, kažemo da x teži ka a, u oznaci $x \to a$.

Posmatrajmo sada funkciju $x \mapsto f(x)$ definisanu u okolini $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$. Od interesa je videti šta je sa skupom slika $f(x)$ kada $x \to a$. Napomenimo da, pri ovome, nas ne interesuje da li je funkcija f definisana ili nije u samoj tački a. Jedina bitna činjenica je da je a tačka nagomilavanja skupa $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$.

Ako x teži ka a preko uočenog niza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}(a,\delta)$, odgovarajući skup slika $f(x_n)$ određivaće niz $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Može se desiti da ovaj dobijeni niz slika konvergira i da mu je granica, na primer, $A \in \mathbb{R}$. Štaviše, može se desiti da A bude granica svih nizova $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dobijenih kada x teži ka a, u smislu definicije 1.1.1, tj. kada x teži ka a preko svih nizova $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}(a,\delta)$. U tom slučaju kažemo da funkcija f ima graničnu vrednost A, kada x teži ka a ili, jednostavno, da je A granična vrednost funkcije f u tački a. Ovim smo, u stvari, došli do *Heineove*[22] *definicije granične vrednosti funkcija:*

Definicija 1.1.3. Funkcija $x \mapsto f(x)$, definisana u nekoj okolini $\overset{\circ}{U}(a)$, ima *graničnu vrednost* A u tački a ako za svaki niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}(a,\delta)$ odgovarajući niz $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka A, tj. važi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

Često pišemo $f(x) \to A$ kada $x \to a$.

Primer 1.1.1. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = \sin(1/x)$, koja, očigledno, nije definisana za $x = 0$. Da bismo razmotrili egzistenciju granične vrednosti $\lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$, uočimo dva nula-niza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, data pomoću

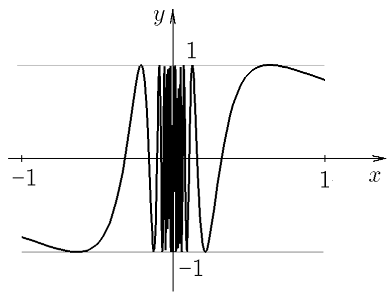
$$x_n = \frac{1}{n\pi}, \qquad x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

koji, očigledno, za neko $\delta > 0$ pripadaju $\mathcal{X}(0,\delta)$.

Kako je funkcija f definisana u $\overset{\circ}{U}(0,\delta)$ i kako je $f(x_n) = \sin n\pi = 0$ i $f(x'_n) = \sin((4n+1)\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$, za svako $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = 1,$$

[22] Heinrich Eduard Heine (1821–1881), nemački matematičar.



Sl. 1.1.1

što, na osnovu definicije 1.1.3, znači da granična vrednost funkcije f u tački $x = 0$ ne postoji. Grafik ove funkcije je prikazan na slici 1.1.1. $\triangle$

Može se dokazati da je sledeća definicija, koju je dao Cauchy, ekvivalentna definiciji 1.1.3.

Definicija 1.1.4. Funkcija $x \mapsto f(x)$, definisana u nekoj okolini $\overset{\circ}{U}(a)$, ima *graničnu vrednost* A u tački a ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da je za svako x, koje zadovoljava uslov $0 < |x - a| < \delta$, ispunjena nejednakost $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Drugim rečima, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji probodena okolina $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ takva da $f(x) \in U(A, \varepsilon)$ kad god $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$, granična vrednost funkcije f u tački $x = a$ egzistira. Jezikom matematičke logike, Cauchyeva definicija 1.1.4 se može iskazati u obliku

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \ \big((\forall x)\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\big).$$

Navedena implikacija može se iskazati inkluzijom $f(\overset{\circ}{U}(a, \delta)) \subset U(A, \varepsilon)$.

Postojanje granične vrednosti funkcije u nekoj tački predstavlja jedno tzv. *lokalno svojstvo* funkcije. Napomenimo da ovo svojstvo, između ostalog, znači da je funkcija definisana u nekoj okolini takve tačke, sem možda u samoj toj tački.

Primer 1.1.2. Pokažimo da funkcija $x \mapsto x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ u tački $x = 2$ ima graničnu vrednost $A = 4$. Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. Tada je nejednakost

$$|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |(x - 2)^2 + 4(x - 2)| \leq |x - 2|^2 + 4|x - 2| < \varepsilon$$

ispunjena za svako x, koje zadovoljava uslov

$$0 < |x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 = \delta\,.$$

Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ postoji pozitivan broj $\delta = \sqrt{4+\varepsilon}-2$ takav da važi implikacija

$$0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; |x^2-4| < \varepsilon\,.$$

Prema tome, $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$. $\triangle$

Primer 1.1.3. Neka je $x \mapsto f(x) = (x^2-9)/(x-3)$ $(x \neq 3)$. Pokazaćemo da postoji granična vrednost funkcije kada $x \to 3$ i da je ona $A = 6$.

Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. S obzirom da je

$$|f(x)-6| = \left|\, \frac{x^2-9}{x-3} - 6 \,\right| = |x-3| < \varepsilon$$

kad god je $0 < |x-3| < \varepsilon$, zaključujemo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji pozitivno $\delta = \varepsilon$ sa traženom osobinom. Dakle,

$$A = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6. \quad \triangle$$

1.2. Jednostrane granične vrednosti

Prirodno je pretpostaviti da je moguće da x teži ka a tako da je uvek $x < a$ ili, pak, tako da je uvek $x > a$. Stoga ćemo, pre svega, definisati *levu* i *desnu δ-okolinu tačke* pomoću $U(a-,\delta) = (a-\delta, a]$ i $U(a+,\delta) = [a, a+\delta)$, respektivno. Naravno, tada će odgovarajuće probodene okoline biti definisane sa

$$\overset{\circ}{U}(a-,\delta) = (a-\delta, a) = U(a-,\delta) \setminus \{a\}$$

i

$$\overset{\circ}{U}(a+,\delta) = (a, a+\delta) = U(a+,\delta) \setminus \{a\}.$$

Slično kao i u prethodnom odeljku, sa $\mathcal{X}(a-,\delta)$ i $\mathcal{X}(a+,\delta)$ označićemo skup svih konvergentnih nizova ka tački a i sa vrednostima u $\overset{\circ}{U}(a-,\delta)$ i $\overset{\circ}{U}(a+,\delta)$, respektivno. Ako x teži ka a preko svih nizova iz $\mathcal{X}(a-,\delta)$, kažemo da x teži ka a sa leve strane i to označavamo sa $x \to a-$. Slično, $x \to a+$ označava činjenicu da x teži ka a s desne strane, tj. preko svih nizova iz $\mathcal{X}(a+,\varepsilon)$.

Prema tome, sada se može govoriti o graničnim vrednostima funkcija i u odnosu na to da li x teži ka a sa leve ili sa desne strane. Navešćemo, zbog toga, sledeće dve Heineove definicije:

Definicija 1.2.1. Funkcija $x \mapsto f(x)$, definisana u nekoj okolini $\overset{\circ}{U}(a-)$, ima *levu graničnu vrednost* A u tački a ako za svaki niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{X}(a-,\delta)$ odgovarajući niz $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka A.

Definicija 1.2.2. Funkcija $x \mapsto f(x)$, definisana u nekoj okolini $\overset{\circ}{U}(a+)$, ima *desnu graničnu vrednost* B u tački a ako za svaki niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{X}(a+,\delta)$ odgovarajući niz $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka B.

Njima ekvivalentne Cauchyeve definicije glase:

Definicija 1.2.3. Funkcija $x \mapsto f(x)$, definisana u nekoj okolini $\overset{\circ}{U}(a-)$, ima *levu graničnu vrednost* A u tački a ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da za svako $x \in (a-\delta, a)$ važi nejednakost $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Definicija 1.2.4. Funkcija $x \mapsto f(x)$, definisana u nekoj okolini $\overset{\circ}{U}(a+)$, ima *desnu graničnu vrednost* B u tački a ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da za svako $x \in (a, a+\delta)$ važi nejednakost $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Ako brojevi A i B postoje, simbolički ćemo to označavati sa

$$A = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0) = f(a-), \quad B = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0) = f(a+).$$

Primer 1.2.1. Za funkciju $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ postoje leva i desna granična vrednost u tački $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1. \quad \triangle$$

Primer 1.2.2. Posmatrajmo funkciju iz primera 1.1.1, tj. $x \mapsto f(x) = \sin(1/x)$ $(x \neq 0)$. Kako nula-nizovi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, posmatrani u primeru 1.1.1, za neko $\delta > 0$ pripadaju skupu $\mathcal{X}(0+,\delta)$, na osnovu ranijeg razmatranja zaključujemo da funkcija f nema desnu graničnu vrednost u tački $x = 0$. Kako je f neparna funkcija, to ne postoji ni odgovarajuća leva granična vrednost. $\triangle$

Primer 1.2.3. Neka je $x \mapsto f(x) = \tanh(1/x)$ $(x \neq 0)$. Odredićemo

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to 0+} f(x).$$

Kako je

$$\tanh\frac{1}{x} = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}\,,$$

redom sleduje

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{2/x} - 1}{e^{2/x} + 1} = -1$$

i

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1 - e^{-2/x}}{1 + e^{-2/x}} = 1. \quad \triangle$$

Nije teško pokazati da važi sledeći rezultat:

Teorema 1.2.1. *Funkcija $x \mapsto f(x)$ ima graničnu vrednost u tački a ako i samo ako u toj tački postoje leva i desna granična vrednost i ako su one među sobom jednake.*

Dakle, ako postoje leva i desna granična vrednost i ako su jednake, tada je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x).$$

Pretpostavimo sada da tačka a pripada proširenom skupu realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}$. U tom slučaju, potrebno je definisati odgovarajuće okoline za $+\infty$ i $-\infty$:

$$U(+\infty, \delta) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x > \delta\}, \qquad U(-\infty, \delta) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x < -\delta\}$$

i

$$\overset{\circ}{U}(+\infty, \delta) = (\delta, +\infty) = U(+\infty, \delta) \setminus \{+\infty\},$$
$$\overset{\circ}{U}(-\infty, \delta) = (-\infty, -\delta) = U(-\infty, \delta) \setminus \{-\infty\}.$$

Sada smo u situaciji da tretiramo granične vrednosti funkcija i u slučajevima kada $x \to +\infty$ ili $x \to -\infty$, ili kada vrednosti funkcija neograničeno rastu.

Stoga opšti pojam granične vrednosti funkcije uvodimo sledećom definicijom:

Definicija 1.2.5. Funkcija $x \mapsto f(x)$, definisana u nekoj okolini $\overset{\circ}{U}(a)$ tačke $a (\in \overline{\mathbb{R}})$, ima graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\,(\in \overline{\mathbb{R}})$ ako za proizvoljnu okolinu $U(A, \varepsilon)$ tačke A postoji okolina $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, takva da je $f(\overset{\circ}{U}(a, \delta)) \subset U(A, \varepsilon)$.

Primer 1.2.4. Za funkciju $x \mapsto f(x) = 1/x$ $(x \neq 0)$ imamo

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty. \quad \triangle$$

Primer 1.2.5. Za svaki polinom

$$x \mapsto P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_0 > 0;\ n \geq 1)$$

važi

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty, & n \text{ parno}, \\ -\infty, & n \text{ neparno}. \end{cases} \quad \triangle$$

Primer 1.2.6. Odredimo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ako je

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus (-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,)\big).$$

Neka je $x > \sqrt{2}$. Tada je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+14/x^2}+1}{\sqrt{1-2/x^2}+1} = 1.$$

Za $x < -\sqrt{2}$ i $x = -t$ imamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{x^2-2}+x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^2+14}-t}{\sqrt{t^2-2}-t} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{\big(\sqrt{t^2+14}-t\big)\big(\sqrt{t^2+14}+t\big)\big(\sqrt{t^2-2}+t\big)}{\big(\sqrt{t^2-2}-t\big)\big(\sqrt{t^2-2}+t\big)\big(\sqrt{t^2+14}+t\big)} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{14\big(\sqrt{t^2-2}+t\big)}{-2\big(\sqrt{t^2+14}+t\big)} = -7 \lim_{t\to+\infty} \frac{\big(\sqrt{t^2-2}+t\big)}{\big(\sqrt{t^2+14}+t\big)} = -7, \end{aligned}$$

gde smo iskoristili prethodno određenu graničnu vrednost. $\triangle$

1.3. Osobine graničnih vrednosti

S obzirom da je pojam granične vrednosti funkcije uveden preko nizova, možemo zaključiti da teoreme o osobinama graničnih vrednosti nizova ostaju u važnosti i za granične vrednosti funkcija. Navešćemo ih bez posebnog dokazivanja.

Teorema 1.3.1. *Ako je $\alpha \le f(x) \le \beta$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ i ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, tada je $\alpha \le \lim\limits_{x\to a} f(x) \le \beta$.*

Teorema 1.3.2. *Ako je $f(x) \le g(x)$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ i ako postoje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, tada važi nejednakost*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

Teorema 1.3.3. *Ako postoje granične vrednosti* $\lim_{x\to a} f(x)$ *i* $\lim_{x\to a} g(x)$ *koje su međusobno jednake i ako je* $f(x) \le h(x) \le g(x)$ *za svako* $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$, *tada postoji i granična vrednost* $\lim_{x\to a} h(x)$ *i važi*

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Teorema 1.3.4. *Ako postoje granične vrednosti*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \qquad i \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B,$$

tada postoje i granične vrednosti funkcija $x \mapsto f(x) \pm g(x)$ *i* $x \mapsto f(x)g(x)$ *i važe jednakosti*

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B, \qquad \lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = AB.$$

Osim toga, ako je $B \neq 0$, *tada postoji i granična vrednost funkcije* $x \mapsto f(x)/g(x)$ $(g(x) \neq 0)$ *i važi jednakost*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Teorema 1.3.5. *Ako postoje granične vrednosti* $\lim_{x\to a} f(x)$ *i* $\lim_{x\to a} g(x)$ *i ako su* α *i* β *realni brojevi, tada i za funkciju* $x \mapsto \alpha f(x)+\beta g(x)$ *postoji granična vrednost kada* x *teži ka* a *i važi jednakost*

$$\lim_{x\to a}\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x).$$

Na osnovu ovih teorema, lako je utvrditi da ako postoji granična vrednost $\lim_{x\to a} f(x)$, tada postoje i granične vrednosti $\lim_{x\to a} \alpha f(x)$ i $\lim_{x\to a} f(x)^n$, kao i da važe jednakosti

$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} f(x)^n = \big(\lim_{x\to a} f(x)\big)^n. \tag{1.3.1}$$

Egzistencija ovih graničnih vrednosti i odgovarajućih jednakosti (1.3.1) upućuje na sledeće razmišljanje:

Ako postoji granična vrednost funkcije $x \mapsto f(x)$ kada $x \to a$, koje uslove mora ispunjavati funkcija F da bi postojala granična vrednost složene funkcije $x \mapsto F\,(f(x))$ kada $x \to a$ i da bi, naravno, važila jednakost

$$\lim_{x\to a} F\big(f(x)\big) = F\big(\lim_{x\to a} f(x)\big)?$$

Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema:

Teorema 1.3.6. *Ako postoje granične vrednosti* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *i* $\lim_{y\to b} F(y)$ *i ako u nekoj probodenoj okolini* $\overset{\circ}{U}(a)$ *važi* $f(x) \neq b$*, tada u tački* a *postoji granična vrednost složene funkcije* $x \mapsto F(f(x))$ *i važi jednakost*

$$\lim_{x\to a} F(f(x)) = \lim_{y\to b} F(y).$$

Ukazaćemo sada na još jednu osobinu funkcija koje u uočenoj tački imaju graničnu vrednost.

Teorema 1.3.7. *Neka funkcija* $x \mapsto f(x)$ *ima graničnu vrednost* A *kada* x *teži ka* a.

Ako je $A > p$*, tada u okolini* $U(a,\delta)$ *postoje tačke* x *za koje je* $f(x) > p$.

Ako je $A < q$*, tada u okolini* $U(a,\delta)$ *postoje tačke* x *za koje je* $f(x) < q$.

Dokaz. Neka je $A > p$. Očigledno, tada je $0 < A - p$, pa je moguće izabrati dovoljno mali pozitivan broj ε_p, takav da je $0 < \varepsilon_p < A - p$, tj. takav da je $p < A - \varepsilon_p$.

Kako je A granična vrednost funkcije f, kada x teži ka a, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U(a,\delta)$ tako da za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ važi nejednakost $|f(x) - A| < \varepsilon$, tj.

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

odakle, uzimajući $\varepsilon = \varepsilon_p$, zaključujemo da je

$$p < A - \varepsilon_p < f(x).$$

Na sličan način, može se dokazati i drugi deo tvrđenja. $\square$.

1.4. Primeri graničnih vrednosti

Granične vrednosti nekih funkcija imaju čestu primenu u matematičkoj analizi. Stoga ćemo u ovom odeljku posvetiti pažnju nekima od njih.

Teorema 1.4.1. *Funkcija* $x \mapsto (\sin x)/x$ *kada* $x \to 0$ *ima graničnu vrednost jednaku jedinici, tj. važi*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1.4.1}$$

Dokaz. Iz očigledne dvostruke nejednakosti

$$\sin x < x < \tan x \qquad (0 < x < \pi/2)$$

dobijamo

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}, \qquad \text{tj.} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

odakle je

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 = \frac{x^2}{2} \qquad \Big(0 < x < \frac{\pi}{2}\Big).$$

Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. Tada nejednakost

$$\Big|\, 1 - \frac{\sin x}{x}\, \Big| < \frac{x^2}{2} < \varepsilon$$

važi za svako x koje zadovoljava uslov $0 < x < \sqrt{2\varepsilon} = \delta$. Ovo znači da postoji desna granična vrednost, tj. $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)/x = 1$.

Kako je, međutim, funkcija $x \mapsto (\sin x)/x$ parna, zaključujemo da postoji i leva granična vrednost i da je $\lim\limits_{x\to 0-} (\sin x)/x = 1$. Prema tome, važi jednakost (1.4.1). $\square$

Teorema 1.4.2. *Ako x neograničeno raste, funkcija $x \mapsto \Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)^x$ ima graničnu vrednost, pri čemu je*

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Dokaz. Neka je $e_n = \big(1 + 1/n\big)^n$. Kao što smo videli, niz $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira i granica mu je broj e. To znači da i za svaki delimični niz $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niza prirodnih brojeva $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$, za koji je $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$, važi jednakost

$$\lim_{n_k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k} = e, \qquad \text{tj.} \qquad \lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k} = e\,.$$

Neka je sada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ bilo koji niz pozitivnih brojeva x_k $(k \in \mathbb{N})$, takav da je

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty. \tag{1.4.2}$$

Ako stavimo $[x_k] = n_k$, tada je $n_k \le x_k < n_k + 1$, odakle sleduje

$$1 + \frac{1}{n_k + 1} < 1 + \frac{1}{x_k} \le 1 + \frac{1}{n_k},$$

tj.

$$\Big(1 + \frac{1}{n_k + 1}\Big)^{n_k} < \Big(1 + \frac{1}{x_k}\Big)^{x_k} < \Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k+1}.$$

Kako je

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k + 1}\Big)^{n_k} = \frac{\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k + 1}\Big)^{n_k+1}}{\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k + 1}\Big)} = \frac{e}{1} = e$$

i

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k+1} = \lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k} \cdot \lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big) = e,$$

na osnovu teoreme 1.2.14, glava II, zaključujemo da važi i jednakost

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{x_k}\Big)^{x_k} = e. \tag{1.4.3}$$

Kako je $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljni niz za koji važi (1.4.2), iz (1.4.3) neposredno sleduje tvrđenje teoreme. □

Primetimo da je i

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{x} = e.$$

2. NEPREKIDNOST FUNKCIJA

2.1. Pojam neprekidnosti i neprekidne funkcije

Jednu veoma važnu klasu funkcija predstavljaju tzv. *neprekidne funkcije* koje ćemo u ovom i nekoliko narednih odeljaka detaljnije proučiti.

Pretpostavimo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana u okolini $U(a, \delta)$ tačke $x = a$.

Definicija 2.1.1. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da je za svako x, koje zadovoljava uslov $|x - a| < \delta$, ispunjena nejednakost

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon\,,$$

tada za funkciju f kažemo da je *neprekidna u tački* $x = a$.

Drugim rečima, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U(a, \delta)$ takva da $f(x) \in U(f(a), \varepsilon)$, kad god $x \in U(a, \delta)$, funkcija f je neprekidna u tački $x = a$. Jezikom matematičke logike, ova definicija se može iskazati u obliku

$$\begin{aligned}&\big(f \ \text{ je neprekidna u tački } \ x = a\big)\\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ \big((\forall x)\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big).\end{aligned}$$

Ovde je značajno uočiti da je uslov: *neprekidnost funkcije f u tački $x = a$* stroživji od uslova: *f ima graničnu vrednost u tački $x = a$*. Zaista, ako je f neprekidna funkcija u tački $x = a$, tada su uslovi za egzistenciju granične vrednosti (videti definiciju 1.1.4) zadovoljeni sa $A = f(a)$. Dakle, tada je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Obrnuto, očigledno, ne važi. Na primer, granična vrednost funkcije u tački $x = a$ može postojati, a da funkcija nije definisana u toj tački (videti primer 1.1.3).

Korišćenjem pojma granične vrednosti, definicija 2.1.1 može se iskazati i na sledeći ekvivalentan način:

Definicija 2.1.1′. Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ ima graničnu vrednost u tački $x = a$ i ako je ona jednaka $f(a)$, za funkciju f kažemo da je *neprekidna u tački* $x = a$.

Dakle, egzistencija jednakosti $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ obezbeđuje neprekidnost funkcije f u tački $x = a$.

Primer 2.1.1. 1° Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2 + 1$ je neprekidna u tački $x = 2$ jer je nejednakost

$$|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |(x - 2)^2 + 4(x - 2)| \le |x - 2|^2 + 4|x - 2| < \varepsilon$$

ispunjena za svako x koje zadovoljava uslov

$$|x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 = \delta\,.$$

U skladu sa definicijom 2.1.1′, funkcija $x \mapsto f(x) = x^2 + 1$ je neprekidna u tački $x = 2$ jer je

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 + 1) = f(2) = 5.$$

2° Funkcija $x \mapsto f(x) = \sin x$ je neprekidna u tački $x = a$ jer je za svako $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| &= 2\Big|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\Big| \\ &\le 2\Big|\sin\frac{x-a}{2}\Big| < 2\,\frac{|x-a|}{2} = |x-a| < \varepsilon, \end{aligned}$$

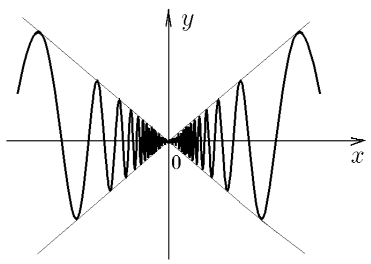
kad god je $|x - a| < \delta = \varepsilon$.

Drugim rečima, funkcija $x \mapsto \sin x$ je neprekidna u tački $x = a$ jer je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sin x = \sin a = f(a). \quad \triangle$$

Primer 2.1.2. Neka je

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x\ \sin(1/x) & (x \ne 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$



Sl. 2.1.1

Očigledno je da važi $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$. Kako je f parna funkcija, važi i $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0 = f(0)$. Prema tome, funkcija $x \mapsto f(x) = x\ \sin(1/x)$ je neprekidna u tački $x = 0$. Grafik ove funkcije prikazan je na slici 2.1.1. $\triangle$

Definicija 2.1.2. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna u svakoj tački skupa D, kažemo da je f *neprekidna na skupu* D.

Skup svih neprekidnih funkcija na D označavamo sa $C(D)$. Ako je D segment $[a, b]$, tada skup neprekidnih funkcija na $[a, b]$ označavamo sa $C[a, b]$.

Nije teško proveriti da važe sledeća tvrđenja:

Teorema 2.1.1. *Ako su funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ neprekidne na segmentu $[a, b]$, tada je i funkcija $x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ neprekidna na $[a, b]$.*

Teorema 2.1.2. *Ako su funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ neprekidne na segmentu $[a,b]$, neprekidna je i funkcija $x \mapsto f(x)g(x)$, a ako je $g(x) \neq 0$, tada je i funkcija $x \mapsto f(x)/g(x)$ neprekidna za svako $x \in [a,b]$.*

Napomena 2.1.1. Ako je sabiranje funkcija $f, g \in C[a,b]$ i njihovo množenje skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ definisano sa

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{i} \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in [a,b]),$$

može se lako proveriti da je skup $C[a,b]$ linearni prostor nad poljem $\mathbb{R}$.

Dokazaćemo neka tvrđenja koja se odnose na granične vrednosti i neprekidnost složene funkcije $x \mapsto F(x) = f\big(g(x)\big)$.

Teorema 2.1.3. *Ako funkcija $x \mapsto g(x)$ ima u tački $x = a$ graničnu vrednost b i ako je $y \mapsto f(y)$ neprekidna u tački $y = b$, tada složena funkcija $x \mapsto f\big(g(x)\big)$ ima graničnu vrednost u tački $x = a$ i važi*

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x \to a} g(x)\big) = f(b).$$

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcije f u tački $y = b$ sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\varepsilon_1 > 0$ tako da je $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$, kad god je $y - b| < \varepsilon_1$.

S druge strane, na osnovu pretpostavke da funkcija $x \mapsto g(x)$ ima graničnu vrednost u tački $x = a$, zaključujemo da za svako $\varepsilon_1 > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $|g(x) - b| = |y - b| < \varepsilon_1$, za svako x za koje je $0 < |x - a| < \delta$.

Kako je $|f(y) - f(b)| = |f(g(x)) - f(b)|$, tvrđenje je dokazano. $\square$

Teorema 2.1.4. *Neka je funkcija $x \mapsto g(x)$ neprekidna u tački $x = a$ i neka je funkcija $y \mapsto f(y)$ neprekidna u tački $y = b = g(a)$. Tada je u tački $x = a$ neprekidna i složena funkcija $x \mapsto f\big(g(x)\big)$.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 2.1.3, važi jednakost $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Kako je g neprekidna funkcija, tj. kako je $b = \lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, sleduje

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f(b) = f\big(\lim_{x \to a} g(x)\big) = f\big(g(a)\big),$$

čime je teorema dokazana. $\square$

Primer 2.1.3. Dokazaćemo da važe jednakosti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Pre svega, ako stavimo $x = 1/t$, očigledno, imamo

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{t\to\pm\infty}\Big(1+\frac{1}{t}\Big)^t = e.$$

Kako je logaritam neprekidna funkcija[23], na osnovu teoreme 2.1.3, neposredno dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x} = \log\Big(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\Big) = \log e = 1.$$

Za dokaz druge granične vrednosti stavimo $e^x - 1 = t$, tj. $x = \log(1+t)$, i iskoristimo već dokazanu prvu jednakost. Dakle, imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}} = 1. \quad \triangle$$

Primer 2.1.4. Dokazaćemo sada da za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ i funkciju

$$x \mapsto \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \qquad (x > -1, x \neq 0)$$

važi jednakost

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha. \tag{2.1.4}$$

Prvo, ako je $\alpha = 0$, tvrđenje je očigledno.

Drugo, ako je $\alpha \neq 0$, važe jednakosti

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{x} = \frac{\alpha\log(1+x)}{x}\cdot\frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)}.$$

Stoga je

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha\log(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)}.$$

Ako stavimo $\alpha\log(1+x) = t$, tada iz činjenice da $x \to 0$ sleduje da $t \to 0$, što znači da važi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t}.$$

Tada, na osnovu primera 2.1.3, dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = \alpha. \quad \triangle$$

---

[23] Funkcija $y \mapsto f(y) = \log y$ je neprekidna u intervalu definisanosti, tj. za svako $y \in (0, +\infty)$. Inače, u posmatranom slučaju od interesa je neprekidnost funkcije f u tački $y = e$.

2.2. Vrste prekida i neprekidno produženje

Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x)$, koja je definisana u intervalu $D = (\alpha, \beta)$, osim možda u tački $x = a \in (\alpha, \beta)$.

Definicija 2.2.1. Za tačku $x = a$ kažemo da je *tačka prekida funkcije* $x \mapsto f(x)$

1° ako funkcija f nije definisana u tački $x = a$, ili

2° ako je f definisana u $x = a$, ali nije neprekidna u toj tački.

U tom slučaju, za samu funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je *prekidna u tački* $x = a$.

Definicija 2.2.2. Ako je $x = a$ tačka prekida funkcije $x \mapsto f(x)$ i ako postoje konačne jednostrane granične vrednosti

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b_1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = b_2,$$

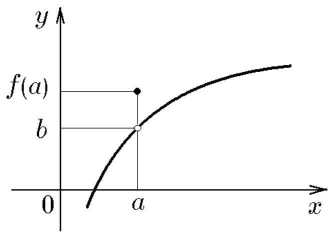
tada kažemo da je $x = a$ *tačka prekida prve vrste*. Za veličinu $s_f(a) = b_2 - b_1$ kažemo da je *skok funkcije* f u tački $x = a$.

Definicija 2.2.3. Ako za funkciju $x \mapsto f(x)$ tačka prekida $x = a$ nije prekidna tačka prve vrste, kažemo onda da je $x = a$ *tačka prekida druge vrste*.

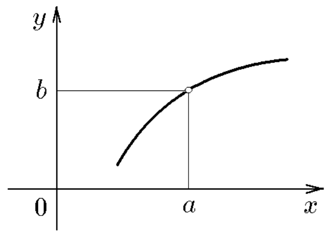
Primetimo da u slučaju prekida druge vrste bar jedna od jednostranih graničnih vrednosti ne postoji kao konačna. Dakle, može se desiti da neka od ovih graničnih vrednosti ne postoji ili da je beskonačna.

Definicija 2.2.4. Ako je za funkciju $x \mapsto f(x)$ tačka $x = a$ prekid prve vrste i ako je $s_f(a) = 0$, tada za prekid kažemo da je *odstranjiv*.

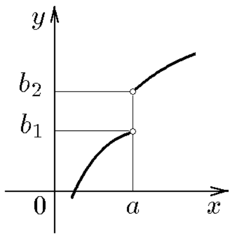
Na slikama 2.2.1–2.2.10 grafički su prikazani različiti slučajevi prekidnih funkcija.



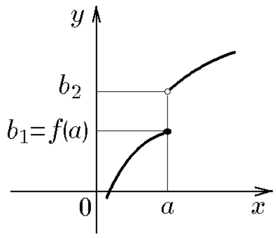
Sl. 2.2.1



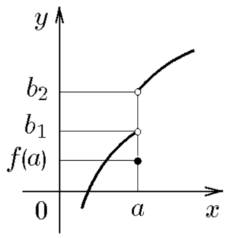
Sl. 2.2.2



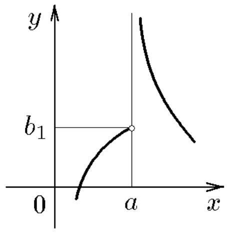
Sl. 2.2.3



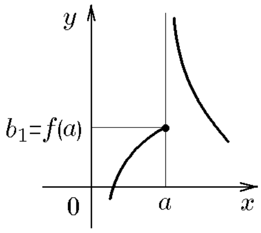
Sl. 2.2.4



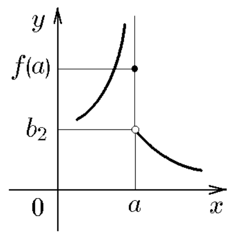
Sl. 2.2.5



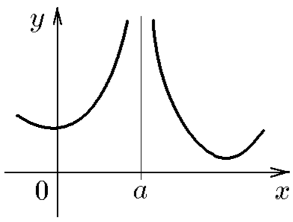
Sl. 2.2.6



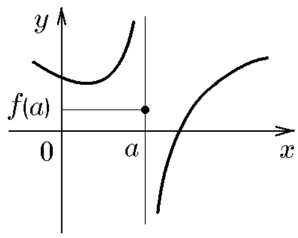
Sl. 2.2.7



Sl. 2.2.8



Sl. 2.2.9



Sl. 2.2.10

Primer 2.2.1. Funkcija $x \mapsto f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ definisana je za svako $x \neq 2$. Tačka $x = 2$ je prekid prve vrste za ovu funkciju jer leva i desna granična vrednost funkcije u tački $x = 2$ postoje. Naime,

$$b_1 = \lim_{x \to 2-} f(x) = 4 \qquad \text{i} \qquad b_2 = \lim_{x \to 2+} f(x) = 4.$$

Kako je $b_1 = b_2$, ovaj prekid je odstranjiv. $\triangle$

Primer 2.2.2. U primeru 1.1.13, glava I, definisali smo tri prekidne funkcije $x \mapsto f(x) = [x]$, $x \mapsto g(x) = (x) = x - [x]$, $x \mapsto h(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Njihovi grafici prikazani su na slici 1.2.1, glava I. Sve prekidne tačke ovih funkcija su prekidi prve vrste.

Funkcija f je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, ali je prekidna za $x = k$, gde je k bilo koji ceo broj. Ovo znači da f ima prebrojivo mnogo prekida prve vrste. Primetimo da je u prekidnoj tački $x = k$

$$b_1 = \lim_{x \to k-} f(x) = k - 1 \qquad \text{i} \qquad b_2 = \lim_{x \to k+} f(x) = k = f(k).$$

U svim prekidnim tačkama imamo da je

$$s_f(k) = b_2 - b_1 = k - (k-1) = 1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Slična je situacija i sa funkcijom g, za koju u prekidnim tačkama $x = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ imamo

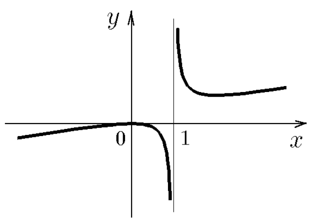
$$b_1 = \lim_{x \to k-} g(x) = 1, \qquad b_2 = \lim_{x \to k+} g(x) = 0 = g(k), \qquad s_g(k) = -1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Funkcija h ima samo jednu prekidnu tačku $x = 0$. Ovde je $b_1 = -1$ i $b_2 = 1$. U samoj tački $x = 0$ funkcija je definisana sa $f(0) = 0$. $\triangle$

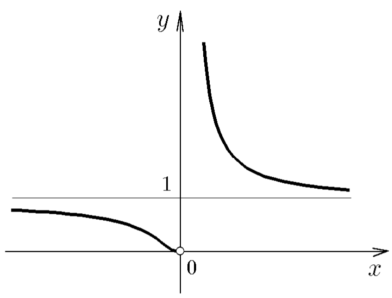
Primer 2.2.3. Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2/(x-1)$ definisana je za svako $x \neq 1$. Kako je

$$b_1 = \lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty \qquad \text{i} \qquad b_2 = \lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty,$$

tačka $x = 1$ je prekid druge vrste (videti sliku 2.2.11).



Sl. 2.2.11



Sl. 2.2.12

Primer 2.2.4. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = e^{1/x}$, koja je definisana za svako $x \neq 0$. Kako je

$$b_1 = \lim_{x \to 0-} f(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad b_2 = \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty,$$

tačka $x = 0$ je prekid druge vrste (videti sliku 2.2.12). Napomenimo da i funkcije g i h, definisane za svako $x \in \mathbb{R}$ pomoću

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0), \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$

imaju prekid druge vrste u tački $x = 0$. Primetimo da je kod funkcije h leva granična vrednost u tački $x = 0$ jednaka vrednosti funkcije u toj tački. $\triangle$

Primer 2.2.5. Funkcija $x \mapsto \sin(1/x)$ definisana je za svako $x \neq 0$ (videti primer 1.1.1 i grafik na slici 1.1.1). Kako leva i desna granična vrednost u tački $x = 0$ ne postoje, ova funkcija ima prekid druge vrste u tački $x = 0$. $\triangle$

Primer 2.2.6. Dirichletova funkcija

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{I}), \end{cases}$$

prekidna je u svakoj tački.

Neka je $a \in \mathbb{Q}$. Ako uzmemo da x teži ka a preko niza čiji su članovi iracionalni brojevi, imaćemo

$$\lim_{x \to a} \chi(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad \chi(a) = 1,$$

što znači da je $x = a$ tačka prekida prve vrste funkcije χ.

Ako je $a \in \mathbb{I}$, uzećemo da x teži ka a preko niza čiji su članovi racionalni brojevi, pa ćemo imati

$$\lim_{x \to a} \chi(x) = 1 \qquad \text{i} \qquad \chi(a) = 0.$$

Dakle, i u tom slučaju a je tačka prekida prve vrste. Funkcija χ je, prema tome, prekidna u svakoj tački. $\triangle$

Primer 2.2.7. Neka su $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ uzajamno prosti brojevi. Posmatrajmo tzv. *Riemannovu*[24)] *funkciju*, koja se definiše pomoću

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1/n & (x = m/n \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{I}). \end{cases}$$

Uočimo realan broj a i interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Tada, za svako fiksirano $n_0 \in \mathbb{N}$, u intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ima konačno mnogo racionalnih brojeva $x = m/n$, za

---

24) Bernhard Riemann (1826–1866), veliki nemački matematičar.

koje je $n \leq n_0$, pa je moguće izabrati pozitivan broj $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tako da u intervalu $(a-\varepsilon_0, a+\varepsilon_0)$ nema ni jednog od tih racionalnih brojeva, sem broja a ako je on jedan od njih. Prema tome, za svako x iz $\overset{\circ}{U}(a,\varepsilon_0)$ važi nejednakost

$$|f(x)| < \frac{1}{n_0}\,.$$

Kako se za n_0 može uzeti proizvoljno veliki broj, zaključujemo da je

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = 0.$$

Dakle, ako je a iracionalan broj, funkcija f je neprekidna u tački $x=a$ jer je u tom slučaju $f(a)=0$. Međutim, ako je $a \in \mathbb{Q}$, tada je $f(a) \neq 0$ pa je $x=a$ prekid prve vrste za funkciju f. Prema tome, funkcija f je neprekidna u iracionalnim, a prekidna u racionalnim tačkama. $\triangle$

Razmotrimo sada detaljnije odstranjivi prekid funkcije f u tački $x=a$. Naime, to je slučaj kada funkcija f nije definisana u tački $x=a$, a pri tome leva i desna granična vrednost u toj tački postoje[25)] i međusobno su jednake

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b.$$

Za funkciju f možemo definisati njeno proširenje (videti definiciju 1.1.2, glava I) koje će biti neprekidno u tački $x=a$. Takvo *proširenje po principu neprekidnosti* za koje se koristi i termin *neprekidno produženje* je funkcija g definisana pomoću

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq a), \\ b & (x = a). \end{cases}$$

Često, kada ne može doći do zabune, za proširenje po principu neprekidnosti koristi se ista oznaka f uzimajući da je $f(a)=b$.

Primer 2.2.8. Posmatrajmo funkciju f iz primera 2.2.1 koja u tački $x=2$ ima odstranjivi prekid. Njeno proširenje po principu neprekidnosti je neprekidna funkcija

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (x \neq 2), \\ 4 & (x = 2). \end{cases} \qquad \triangle$$

Razmotrimo sada slučaj kada je funkcija f definisana u tački $x=a$ i ima prekid u toj tački, pri čemu važi jedna od jednakosti

$$\text{(i)} \quad b_1 = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a) \qquad \text{ili} \qquad \text{(ii)} \quad b_2 = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a).$$

[25)] Ovde podrazumevamo postojanje konačne granične vrednosti.

Kažemo da je funkcija f u tački $x = a$ *neprekidna sa leve strane* ako važi jednakost (i). Isto tako, ako važi jednakost (ii), kažemo da je funkcija f u tački $x = a$ *neprekidna sa desne strane.*

Primer 2.2.9. Funkcije $x \mapsto f(x) = [x]$ i $x \mapsto g(x) = (x)$ iz primera 2.2.2 su neprekidne sa desne strane u svakoj prekidnoj tački $x = k$ $(k \in \mathbb{Z})$. $\triangle$

Naravno, sada se može zaključiti: jedna funkcija je neprekidna u nekoj tački ako je u njoj neprekidna i sa leve i sa desne strane.

Smatra se da je, po definiciji, svaka funkcija neprekidna u izolovanim tačkama svoje oblasti definisanosti.

Navešćemo bez dokaza sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.1. *Bilo koja elementarna funkcija neprekidna je u svakoj tački koja pripada njenoj oblasti definisanosti.*

2.3. Neke osobine neprekidnih funkcija

U ovom odeljku dokazaćemo nekoliko veoma važnih osobina za funkcije koje su neprekidne na segmentu $[a, b]$. Napomenimo da se ovde za neprekidnost funkcije u tačkama a i b pretpostavlja neprekidnost sa desne strane u tački $x = a$ i neprekidnost sa leve strane u tački $x = b$.

Teorema 2.3.1. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada je ona na tom segmentu ograničena, tj. postoji broj $M > 0$ tako da za svako $x \in [a, b]$ važi nejednakost $|f(x)| \le M$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svako $M > 0$ postoji $x_M \in [a, b]$ tako da je $|f(x_M)| > M$.

Uzimajući za M redom prirodne brojeve zaključujemo da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in [a, b]$ takvo da je

$$|f(x_n)| > n. \tag{2.3.1}$$

Očigledno, niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen. Prema tome, on sadrži (videti teoremu 1.4.3, glava II) delimični niz $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ $(x_{n_k} \in [a, b])$ koji je konvergentan. Neka je njegova granica α, tj. neka je $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \alpha$. Naravno, i α pripada segmentu $[a, b]$.

Kako $f \in C[a, b]$, zbog neprekidnosti funkcije u tački $x = \alpha$, imamo

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to+\infty} x_{n_k}) = f(\alpha). \tag{2.3.2}$$

S druge strane, kako (2.3.1) važi za svako $n \in \mathbb{N}$, to za $n = n_k$ imamo da je

$$|f(x_{n_k})| > n_k\,,$$

što znači da je

$$\lim_{k\to+\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$$

jer $n_k \to +\infty$ kada $k \to +\infty$. Ova jednakost, očigledno, protivureči jednakosti (2.3.2), po kojoj niz $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ima konačnu graničnu vrednost. Dakle, učinjena pretpostavka ne može biti ispunjena, što znači da je funkcija f ograničena na $[a, b]$. $\square$

Napomena 2.3.1. Uslovi teoreme 2.3.1 da je funkcija f neprekidna na *segmentu* je bitan. Naime, tvrđenje ne važi za funkcije neprekidne na intervalu. Na primer, funkcija $x \mapsto 1/x$ je neprekidna na intervalu $(0, 1)$, ali nije ograničena na tom intervalu.

Teorema 2.3.1 je poznata kao *prva Weierstrassova teorema.*

Teorema 2.3.2. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada u $[a, b]$ postoje bar dve tačke ξ i η takve da je*

$$f(\xi) = m = \inf_{a\le x\le b} f(x) \qquad i \qquad f(\eta) = M = \sup_{a\le x\le b} f(x).$$

Dokaz. Kako je, na osnovu teoreme 2.3.1, funkcija f ograničena, postoje vrednosti $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$ i $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ za koje je

$$m \le f(x) \le M \qquad (x \in [a, b]).$$

Da bismo dokazali da postoji bar jedna tačka $\xi \in [a, b]$ takva da je $f(\xi) = m$ pretpostavimo suprotno, tj. da $f(x)$ nije jednako m ni za jedno $x \in [a, b]$. S obzirom na činjenicu da je $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, to znači da je

$$f(x) - m > 0 \qquad (x \in [a, b]).$$

Međutim, tada je funkcija $x \mapsto 1/(f(x) - m)$ $(x \in [a, b])$ neprekidna na $[a, b]$. Kako je, na osnovu teoreme 2.3.1, ova funkcija ograničena, tj. postoji pozitivan broj λ takav da je

$$0 < \frac{1}{f(x) - m} \le \lambda \qquad (x \in [a, b]),$$

zaključujemo da je

$$f(x) \geq m + \frac{1}{\lambda} \qquad (x \in [a, b]),$$

što je u suprotnosti sa činjenicom da je $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. Kako je do ove protivrečnosti došlo na osnovu učinjene pretpostavke da ne postoji $\xi \in [a, b]$ za koje je $f(\xi) = m$, zaključujemo da takva tačka, ipak, postoji.

Na sličan način, može se dokazati da postoji i tačka η iz segmenta $[a, b]$ za koju je $f(\eta) = M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. $\square$

Teorema 2.3.2 je poznata kao *druga Weierstrassova teorema*.

Napomena 2.3.2. Teorema 2.3.2 kazuje da svaka neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ dostiže svoju najmanju i svoju najveću vrednost.

Teorema 2.3.3. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i ako su $f(a)$ i $f(b)$ različitog znaka, tada u intervalu (a, b) postoji bar jedna tačka ξ za koju je $f(\xi) = 0$.*

Dokaz. Neka je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Kako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$, ona u svakoj tački segmenta $[a, b]$ ima graničnu vrednost, pa i u tačkama a i b. U skladu sa teoremom 1.3.7, u okolini tačke a ima tačaka x za koje je $f(x) < 0$, a u okolini tačke b tačaka za koje je $f(x) > 0$.

Kako je $[a, b]$ ograničen skup, takav je i skup onih tačaka x iz $[a, b]$ za koje je $f(x) < 0$. Svakako, taj skup ima svoj supremum. Neka je to tačka ξ. Pokazaćemo da je $f(\xi) = 0$.

Pretpostavimo da je $f(\xi) < 0$. Tada, prema teoremi 1.3.7, u $[\xi, b]$ ima tačaka za koje je $f(x) < 0$, što znači da ξ nije supremum skupa takvih tačaka. Kako ovo protivureči pretpostavci, zaključujemo da $f(\xi)$ nije negativno. Na sličan način, može se pokazati da $f(\xi)$ nije pozitivno. Prema tome, važi $f(\xi) = 0$. $\square$

Ovaj rezultat je poznat kao *prva Bolzano–Cauchyeva teorema*.

Teorema 2.3.4. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ i ako je $f(a) < f(b)$, tada za svako C za koje je $f(a) < C < f(b)$ postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je $f(\xi) = C$.*

Dokaz. Funkcija $x \mapsto g(x) = f(x) - C$ $(x \in [a, b])$ je neprekidna na segmentu $[a, b]$, a u tačkama $x = a$ i $x = b$ ima vrednosti

$$g(a) = f(a) - C < 0 \qquad \text{i} \qquad g(b) = f(b) - C > 0.$$

Kako funkcija g ispunjava uslove teoreme 2.3.3, zaključujemo da postoji tačka $\xi \in [a,b]$ takva da je $g(\xi) = 0$, tj. $f(\xi) = C$. $\square$

Tvrđenje 2.3.4 poznato je kao *druga Bolzano–Cauchyeva teorema.*

Na osnovu prethodnog može se zaključiti da neprekidna funkcija $x \mapsto f(x)$ na $[a,b]$ uzima sve vrednosti iz segmenta $[m,M]$, gde su $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$ i $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$. Uz dodatni uslov da je funkcija strogo monotona na $[a,b]$, može se dokazati da postoji njena inverzna funkcija $y \mapsto f^{-1}(y)$ koja je neprekidna na segmentu $[m,M]$ i iste je monotonosti kao i funkcija f. Napomenimo da se egzistencija i monotonost inverzne funkcije mogu dokazati izostavljanjem uslova o neprekidnosti funkcije f na $[a,b]$ (videti teoremu 2.7.1, glava I).

2.4. Osobine monotonih funkcija

U odeljku 1.5, glava I, definisali smo monotone funkcije i ukazali na neke njihove osobine. S obzirom da monotone funkcije predstavljaju jednu veoma važnu klasu funkcija, ovde ćemo proučiti još neke njihove osobine sa gledišta egzistencije graničnih vrednosti, kao i u odnosu na neprekidnost.

Teorema 2.4.1. *Ako je $x \mapsto f(x)$ monotona funkcija na segmentu $[a,b]$, tada postoje konačne granične vrednosti*

$$1^\circ \quad \lim_{x\to c-} f(x), \quad \lim_{x\to c+} f(x) \quad (a<c<b); \qquad 2^\circ \quad \lim_{x\to a+} f(x), \quad \lim_{x\to b-} f(x).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f neopadajuća funkcija. U tom slučaju je

$$f(x) \le f(c) \qquad (a \le x < c),$$

što znači da važe nejednakosti

$$f(x) \le \sup_{a\le x<c} f(x) = M \le f(c) \qquad (c<b). \tag{2.4.1}$$

Odavde sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $x_\varepsilon \in [a,c)$, tako da važi

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon). \tag{2.4.2}$$

Kako je $x_\varepsilon < c$, stavimo $\delta = c - x_\varepsilon > 0$. Tada za svako $x \in (x_\varepsilon, c)$, tj. za svako $x \in (c-\delta, c)$, važi nejednakost

$$f(x_\varepsilon) \le f(x) \tag{2.4.3}$$

jer je f neopadajuća funkcija.

Prema tome, iz (2.4.1), (2.4.2) i (2.4.3) sleduje da za $x \in (c-\delta, c)$ važi

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq M,$$

tj. da je

$$M - \varepsilon < f(x) \leq M \qquad (c - \delta < x < c),$$

odakle možemo zaključiti da postoji granična vrednost funkcije f, kada x teži ka c sa leve strane, i da pri tome važi jednakost

$$\lim_{x \to c-} f(x) = M = \sup_{a \leq x < c} f(x). \tag{2.4.4}$$

Na sličan način, može se pokazati da funkcija f ima u tački $x = c$ i desnu graničnu vrednost i da važi

$$\lim_{x \to c+} f(x) = m = \inf_{c < x \leq b} f(x). \tag{2.4.5}$$

U specijalnom slučaju, stavljajući da je $c = b$, a zatim i $c = a$, iz (2.4.4) i (2.4.5) respektivno sleduju jednakosti 2°.

Na sličan način mogu se razmatrati i ostali vidovi monotonosti funkcije f, a zaključak bi bio isti. $\square$

Neposredna posledica teoreme 2.4.1 je sledeće tvrđenje:

Teorema 2.4.2. *Ako je $x \mapsto f(x)$ monotona funkcija na segmentu $[a, b]$, tada za svako $c \in (a, b)$ važe nejednakosti*

$$\lim_{x \to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \to c+} f(x)$$

ako je f neopadajuća i nejednakosti

$$\lim_{x \to c-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x \to c+} f(x)$$

ako je f nerastuća funkcija na $[a, b]$.

Dokazaćemo sada dva interesantna i veoma važna tvrđenja:

Teorema 2.4.3. *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona funkcija na segmentu $[a,b]$. Ako je f prekidna funkcija, tada su njene prekidne tačke prekidi prve vrste.*

Dokaz. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je f neopadajuća funkcija na $[a,b]$. Ako je c proizvoljna tačka intervala (a,b), na osnovu teoreme 2.4.1 postoje konačne granične vrednosti

$$\alpha = \lim_{x\to c-} f(x) \qquad \text{i} \qquad \beta = \lim_{x\to c+} f(x).$$

Očigledno, ako je $\alpha = \beta$, funkcija f je neprekidna u tački $x = c$. Kako su α i β konačni, ako je $\alpha \neq \beta$, zaključujemo da je $x = c$ tačka prekida prve vrste za funkciju f. $\square$

Teorema 2.4.4. *Na segmentu $[a,b]$ monotona funkcija može imati najviše prebrojivo mnogo prekidnih tačaka.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neopadajuća funkcija i da je $x = \xi$ njena prekidna tačka prve vrste, tj. da je

$$f(\xi - 0) = \lim_{x\to\xi-} f(x) \neq \lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi + 0).$$

Ove vrednosti jednoznačno određuju interval $I_\xi = \big(f(\xi-0), f(\xi+0)\big)$ koji odgovara tački ξ.

Slično, prekidnoj tački η odgovara interval I_η, čiji su krajevi $f(\eta-0)$ i $f(\eta+0)$. Ako je $\xi < \eta$, zbog učinjene pretpostavke da je f neopadajuća funkcija, važi nejednakost $f(\xi+0) \le f(\eta-0)$, odakle zaključujemo da su intervali I_ξ i I_η disjunktni. Kako u svakom intervalu postoji bar jedan racionalan broj, u intervalima I_ξ i I_η postoje, respektivno, racionalni brojevi r_ξ i r_η, takvi da je $r_\xi \neq r_\eta$ jer su, kao što smo videli, I_ξ i I_η disjunktni skupovi.

Prema tome, različitim tačkama prekida funkcije f odgovaraju različiti racionalni brojevi. Naravno, skup svih tih racionalnih brojeva je podskup skupa svih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Kako je $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup, zaključujemo da je skup svih tačaka prekida neopadajuće funkcije f prebrojiv.

Na isti način moguće je konstatovati da tvrđenje važi i ako je f nerastuća funkcija. $\square$

Neposredna posledica teoreme 2.4.4 je sledeći rezultat:

Teorema 2.4.5. *Monotona funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in [a,b])$ je neprekidna na segmentu $[a,b]$ ako i samo ako je skup njenih vrednosti segment čiji su krajevi $f(a)$ i $f(b)$.*

2.5. Upoređivanje funkcija

U matematičkoj analizi je često potrebno uporediti vrednosti funkcija u izvesnoj okolini neke tačke $x = a$. Najčešće se to ostvaruje pomoću razlike ili količnika tih funkcija. U ovom odeljku razmotrićemo ovaj problem posmatrajući količnik.

Uvedimo, najpre, pojam tzv. beskonačno male veličine.

Definicija 2.5.1. Za funkciju $x \mapsto \alpha(x)$ koja, kada x teži ka $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ima graničnu vrednost jednaku nuli, kažemo da je *beskonačno mala veličina* kada x teži ka a.

Beskonačno mala veličina naziva se i *infinitezimala*, pa se, zbog toga, ponekad, ovaj deo matematičke analize kao račun sa beskonačno malim veličinama, sada infinitezimalama, tako i zove: *infinitezimalni račun*.

Primer 2.5.1. Funkcija $x \mapsto \sin x$ je beskonačno mala veličina kada $x \to 0$ jer je $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Isto tako, funkcija $x \mapsto x^2 - 4$ je beskonačno mala veličina kada $x \to 2$ jer je $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4) = 0$. $\triangle$

Od velikog je interesa međusobno upoređivanje beskonačno malih veličina. Kao što smo naglasili, to upoređivanje ćemo ostvariti posmatranjem njihovog količnika.

Stoga posmatrajmo funkciju $x \mapsto \gamma(x) = \alpha(x)/\beta(x)$, gde su $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)$ bekonačno male veličine kada $x \to a$.

Moguće je da nastupi bilo koji od sledećih slučajeva:

$$\lim_{x\to a} \gamma(x) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \tag{2.5.1}$$

$$\lim_{x\to a} \gamma(x) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty, \tag{2.5.2}$$

$$\lim_{x\to a} \gamma(x) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lambda, \tag{2.5.3}$$

gde je λ realan broj različit od nule.

Definicija 2.5.2. Ako je ispunjena jednakost (2.5.1), kažemo da je funkcija $x \mapsto \alpha(x)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na beskonačno malu veličinu $x \mapsto \beta(x)$ kada $x \to a$.

Primer 2.5.2. Funkcije $x \mapsto 1 - \cos x$ i $x \mapsto x$ su beskonačno male veličine kada $x \to 0$. Kako je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \sin(x/2) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x\to 0} \sin(x/2) = 1 \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

zaključujemo da je funkcija $x \mapsto 1 - \cos x$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na beskonačno malu veličinu $x \mapsto x$ kada $x \to 0$. $\triangle$

Definicija 2.5.3. Ako je ispunjena jednakost (2.5.2), kažemo da je funkcija $x \mapsto \alpha(x)$ *beskonačno mala veličina nižeg reda* u odnosu na beskonačno malu veličinu $x \mapsto \beta(x)$.

Definicija 2.5.4. Ako je, kada $x \to a$, funkcija $x \mapsto \alpha(x)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na beskonačno malu veličinu $x \mapsto \beta(x)$, kažemo da je $x \mapsto \beta(x)$ beskonačno mala veličina nižeg reda u odnosu na beskonačno malu veličinu $x \mapsto \alpha(x)$.

Definicija 2.5.5. Ako je ispunjena jednakost (2.5.3), kažemo da su funkcije $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)$ *beskonačno male veličine istoga reda* kada $x \to a$.

Primer 2.5.3. Iz

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\ \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} = \frac{1}{2},$$

sleduje da su funkcije $x \mapsto 1 - \cos x$ i $x \mapsto x^2$ beskonačno male veličine istoga reda kada $x \to 0$. $\triangle$

Definicija 2.5.6. Ako je u jednakosti (2.5.3) $\lambda = 1$, kažemo da su beskonačno male veličine $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)$ *ekvivalentne*.

Činjenicu da su, $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ ekvivalentne beskonačno male veličine kada $x \to a$ simbolizovaćemo sa $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Napomenimo da uvedena relacija $\sim$ u skupu svih beskonačno malih veličina kada $x \to a$ predstavlja relaciju ekvivalencije.

Napomena 2.5.1. Ako su $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)$ beskonačno male veličine istoga reda kada $x \to a$, tj. ako važi jednakost (2.5.3), tada su $\alpha(x)$ i $\lambda\beta(x)$ ekvivalentne beskonačno male veličine kada $x \to a$.

Primer 2.5.4. Funkcije $x \mapsto 1 - \cos x$ i $x \mapsto x^2/2$ su ekvivalentne beskonačno male veličine kada $x \to 0$. Važi, dakle, $1 - \cos x \sim x^2/2$ kada $x \to 0$. $\triangle$

Teorema 2.5.1. *Ako su $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)$ beskonačno male veličine kada x teži ka a i ako je $x \mapsto \gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na bilo koju od beskonačno malih veličina $\alpha(x)$ ili $\beta(x)$, tada su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ ekvivalentne beskonačno male veličine.*

Dokaz. Neka je, na primer, $\lim\limits_{x\to a} \gamma(x)/\beta(x) = 0$. Tada je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\\ &= \lim_{x\to a}\Big(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\Big) = \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta(x)} = 1. \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 2.5.2. *Ako su $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)$ beskonačno male veličine kada x teži ka a, funkcija $x \mapsto \alpha(x)\beta(x)$ je beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na bilo koju beskonačno malu veličinu $\alpha(x)$ ili $\beta(x)$ kada x teži ka a.*

Dokaz. Tvrđenje sleduje iz jednakosti

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\beta(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0. \quad \square$$

Definicija 2.5.7. Ako je funkcija $x \mapsto \alpha(x)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na beskonačno malu veličinu $x \mapsto \beta(x)$ kada $x \to a$ i ako postoji pozitivan broj k takav da su funkcije $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto (\beta(x))^k$ beskonačno male veličine istoga reda, tada kažemo da je $x \mapsto \alpha(x)$ u odnosu na $x \mapsto \beta(x)$ *beskonačno mala veličina reda k*.

Primer 2.5.5. Iz primera 2.5.3 i 2.5.4 sleduje da je funkcija $x \mapsto 1 - \cos x$ beskonačno mala veličina reda dva u odnosu na beskonačno malu veličinu $x \mapsto x$ kada $x \to 0$. $\triangle$

Od interesa je upoređivanje i tzv. beskonačno velikih veličina, koje uvodimo sledećom definicijom:

Definicija 2.5.8. Za funkciju $x \mapsto \alpha(x)$ koja, kada x teži ka $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ima graničnu vrednost $+\infty$ ili $-\infty$, kažemo da je *beskonačno velika veličina* kada x teži ka a.

Primer 2.5.6. Funkcija $x \mapsto 1/(x-1)^2$ je beskonačno velika veličina kada $x \to 1$ jer je $\lim\limits_{x\to 1} 1/(x-1)^2 = +\infty$.

Isto tako, funkcija $x \mapsto \log x$ je beskonačno velika veličina kada x teži ka nuli, jer je $\lim\limits_{x \to 0+} \log x = -\infty$. $\triangle$

Naravno, sve definicije i teoreme koje se odnose na beskonačno velike veličine moguće je formulisati kao dualne iskaze za infinitezimale. Zbog toga ih, možda, ne bi trebalo posebno iskazivati. Međutim, mi ćemo ih ovde navesti iz sasvim praktičnih razloga.

Posmatrajmo funkciju $x \mapsto \gamma(x) = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, gde su $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)$ bekonačno velike veličine kada $x \to a$.

Moguće je da nastupi bilo koji od sledećih slučajeva:

$$\lim_{x \to a} \gamma(x) = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty, \tag{2.5.4}$$

$$\lim_{x \to a} \gamma(x) = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \tag{2.5.5}$$

$$\lim_{x \to a} \gamma(x) = \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lambda, \tag{2.5.6}$$

gde je λ realan broj različit od nule.

Definicija 2.5.9. Ako je ispunjena jednakost (2.5.4), kažemo da je funkcija $x \mapsto \alpha(x)$ *beskonačno velika veličina višeg reda* u odnosu na beskonačno veliku veličinu $x \mapsto \beta(x)$ kada $x \to a$.

Primer 2.5.7. Kako je $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^2 + 1)/x = \pm\infty$, zaključujemo da je funkcija $x \mapsto x^2 + 1$ $(x \to \pm\infty)$ beskonačno velika veličina višeg reda u odnosu na funkciju $x \mapsto x$, koja je takođe beskonačno velika veličina kada $x \to \pm\infty$. $\triangle$

Definicija 2.5.10. Ako je ispunjena jednakost (2.5.5), kažemo da je funkcija $x \mapsto \alpha(x)$ *beskonačno velika veličina nižeg reda* u odnosu na beskonačno veliku veličinu $x \mapsto \beta(x)$.

Primer 2.5.8. Beskonačno velika veličina $x \mapsto \log x$ $(x \to 0+)$ je nižeg reda u odnosu na beskonačno veliku veličinu $x \mapsto 1/x$ $(x \to 0)$ jer je

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \to 0+} x \log x = 0. \quad \triangle$$

Definicija 2.5.11. Ako je funkcija $x \mapsto \alpha(x)$ beskonačno velika veličina višeg reda u odnosu na beskonačno veliku veličinu $x \mapsto \beta(x)$ kada $x \to a$, tada kažemo da je $x \mapsto \beta(x)$ beskonačno velika veličina nižeg reda u odnosu na $x \mapsto \alpha(x)$.

Definicija 2.5.12. Ako je ispunjena jednakost (2.5.6), kažemo da su funkcije $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)$ *beskonačno velike veličine istoga reda* kada $x \to a$.

Primer 2.5.9. Kako je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2 + \frac{x-1}{x^2+1}\right) = 2,$$

beskonačno velike veličine $x \mapsto 2x^2+x+1$ i $x \mapsto x^2+1$, kada x teži ka $\pm\infty$, su beskonačno velike veličine istoga reda. $\triangle$

Definicija 2.5.13. Ako je u jednakosti (2.5.6) $\lambda = 1$, kažemo da su beskonačno velike veličine $x \to \alpha(x)$ i $x \to \beta(x)$ *ekvivalentne* kada $x \to a$.

Činjenicu da su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ ekvivalentne beskonačno velike veličine kada $x \to a$, simbolizovaćemo sa $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Naravno, $\sim$ je relacija ekvivalencije u skupu svih beskonačno velikih veličina kada x teži ka a.

Primer 2.5.10. Funkcije $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ i $x \mapsto x$ kada $x \to +\infty$, su ekvivalentne beskonačno velike veličine jer je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Važi, dakle, $\sqrt{x^2+1} \sim x$ kada $x \to +\infty$. $\triangle$

Napomena 2.5.2. Ako za beskonačno velike veličine $x \to \alpha(x)$ i $x \to \beta(x)$, kada $x \to a$, važi jednakost (2.5.6), tada su $x \to \alpha(x)$ i $x \to \lambda\beta(x)$ ekvivalentne beskonačno velike veličine kada $x \to a$.

Primer 2.5.11. Iz primera 2.5.9 sleduje da su, kada x teži ka $\pm\infty$, beskonačno velike veličine $x \mapsto 2x^2+x+1$ i $x \mapsto 2(x^2+1)$ ekvivalentne. $\triangle$

Definicija 2.5.14. Ako je $x \mapsto \alpha(x)$ beskonačno velika veličina višeg reda u odnosu na beskonačno veliku veličinu $x \mapsto \beta(x)$, kada $x \to a$, i ako postoji pozitivan broj k takav da su funkcije $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)^k$ beskonačno velike veličine istoga reda, tada kažemo da je $x \mapsto \alpha(x)$ *beskonačno velika veličina reda* k u odnosu na $x \mapsto \beta(x)$.

Primer 2.5.12. Kako je $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2} = 2$, funkcija $x \mapsto 2x^2+1$ je beskonačno velika veličina reda dva u odnosu na beskonačno veliku veličinu $x \mapsto x$ kada $x \to +\infty$. $\triangle$

Na kraju ovog odeljka, napomenimo da se ekvivalencija dve beskonačno male ili dve beskonačno velike veličine može uspešno iskoristiti prilikom određivanja nekih graničnih vrednosti. Neka je, na primer, potrebno odrediti $\lim\limits_{x\to a} f(x)/\alpha(x)$. Ako su funkcije $x \mapsto \alpha(x)$ i $x \mapsto \beta(x)$ ekvivalentne kada $x \to a$, tj. ako je $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)/\beta(x) = 1$, tada je, očigledno,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\beta(x)}.$$

Isto tako, ako je $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$ i $\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$ kada $x \to a$ i ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to a}\bigl(\alpha_1(x)/\alpha_2(x)\bigr)$, tada postoji i granična vrednost $\lim\limits_{x\to a}\bigl(\beta_1(x)/\beta_2(x)\bigr)$ i važi jednakost

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}.$$

Primer 2.5.13. Kako je $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)/(2x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x)/(3x) = 1$, zaključujemo da je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} &= \lim_{x\to 0}\Bigl(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x}\Bigr)\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}. \quad \triangle\end{aligned}$$

Primer 2.5.14. Kako je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2/3} = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/2} = 1,$$

funkcije $x \mapsto \sqrt[3]{1+x^2}-1$ i $x \mapsto x^2/3$, kao i funkcije $x \mapsto 1-\cos x$ i $x \mapsto x^2/2$ su ekvivalentne beskonačno male veličine kada x teži nuli, pa je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/3}{x^2/2} = \frac{2}{3}. \quad \triangle$$

Napomenimo na kraju da nekorektna primena činjenice da su dve veličine ekvivalentne može dovesti do pogrešnih zaključaka. Ilustrovaćemo to sledećim primerom.

Primer 2.5.15. Posmatrajmo beskonačno velike veličine

$$x \mapsto \alpha(x) = \sqrt{x^2+x} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto \beta(x) = x \qquad (x \to +\infty).$$

Tada je, svakako,

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(\alpha(x)-\beta(x)\bigr)=\lim_{x\to+\infty}\Bigl(\sqrt{x^2+x}-x\Bigr)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Međutim, nekorektnim korišćenjem činjenice da su $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ ekvivalentne beskonačno velike veličine kada x teži ka $+\infty$, moglo bi se, naravno pogrešno, zaključiti da je

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(\alpha(x)-\beta(x)\bigr)=\lim_{x\to+\infty}\bigl(\sqrt{x^2+x}-x\bigr)=\lim_{x\to+\infty}(x-x)=0. \quad \triangle$$

Nije, dakle, preporučljivo jednu veličinu zamenjivati njoj ekvivalentnom veličinom kada je veličina koju zamenjujemo sabirak funkcije čiju graničnu vrednost tražimo.

2.6. Simboli o i O

Za sve funkcije koje ćemo razmatrati u ovom odeljku smatraćemo da su definisane u okolini $U(a)$ tačke $a\in\overline{\mathbb{R}}$.

Ako za funkcije $x\mapsto f(x)$ i $x\mapsto g(x)$ postoji pozitivna konstanta $M\in\mathbb{R}$ takva da je

$$(2.6.1)\qquad |f(x)|\le M|g(x)| \qquad \bigl(x\in U(a)\bigr),$$

kažemo da je u okolini $U(a)$ funkcija f ograničena u odnosu na funkciju g.

Činjenicu iskazanu pomoću (2.6.1) simbolizujemo sa

$$(2.6.2)\qquad f(x)=O(g(x)) \qquad (x\to a).$$

Napomenimo da ovde oznaka $x\to a$ ne ukazuje na granični proces već na činjenicu da ova jednakost važi u nekoj okolini $U(a)$ tačke a. U stvari, ako je funkcija $x\mapsto\lambda(x)$ određena pomoću $f(x)=\lambda(x)g(x)$ $\bigl(x\in\mathring{U}(a)\bigr)$ i ako postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{x\to a}\lambda(x)$, tada je $f(x)=O\bigl(g(x)\bigr)$ $(x\to a)$. Simbol $O\bigl(g(x)\bigr)$ čitamo: *veliko O od* $g(x)$.

Primer 2.6.1. Kako je $|\sin x|\le 1\cdot|x|$ $(x\in U(0))$, važi jednakost $\sin x=O(x)$ $(x\to 0)$. $\triangle$

Primer 2.6.2. Kako je, za svako $x \in U(0)$,

$$x \mapsto 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \le 2 \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}\, x^2,$$

važi jednakost $1 - \cos x = O(x^2) \quad (x \to 0)$. $\triangle$

Kako je svaka funkcija koja u nekoj tački a ima konačnu graničnu vrednost istovremeno i ograničena u okolini te tačke, zaključujemo da iz jednakosti

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \tag{2.6.3}$$

sleduje da postoji $M \in \mathbb{R}^+$ tako da važi jednakost

$$\Big|\, \frac{f(x)}{g(x)} \,\Big| \le M \quad (x \to a), \qquad \text{tj.} \qquad |f(x)| \le M|g(x)| \quad (x \to a),$$

što, zapravo, znači da iz jednakosti (2.6.3) sleduje $f(x) = O\big(g(x)\big)$ $(x \to a)$. Činjenicu da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda$ možemo simbolizovati sa $f(x) = O(1)$ $(x \to a)$.

Primer 2.6.3. Kako je $\lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 2) = 6$, važi jednakost $x^3 - 2 = O(1) \quad (x \to 2)$. $\triangle$

Naglasimo da iz

$$f_1(x) = O\big(g(x)\big) \quad \text{i} \quad f_2(x) = O\big(g(x)\big) \quad (x \to a)$$

ne sleduje jednakost $f_1(x) = f_2(x)$, nego zaključak da funkcije f_1 i f_2 pripadaju skupu funkcija koje su u okolini $U(a)$ ograničene u odnosu na funkciju g. Ispravnije je, prema tome, umesto oznake $f(x) = O\big(g(x)\big)$ $(x \to a)$, pisati $f \in O(g)$ $(x \to a)$. Međutim, uobičajen je prvi način označavanja koji ćemo i mi koristiti.

Ako za funkcije f i g važi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \tag{2.6.4}$$

tj.

$$|f(x)| \le \varepsilon |g(x)| \qquad (x \to a), \tag{2.6.5}$$

gde je ε proizvoljno mali pozitivan broj, funkcija f je, takođe, ograničena u odnosu na funciju g. Međutim, (2.6.4) i (2.6.5), kazuju da je funkcija

$x \mapsto f(x)$ beskonačno mala veličina u odnosu na funkciju $x \mapsto g(x)$, kada x teži ka a. Ovu činjenicu simbolizovaćemo sa

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \qquad (x \to a). \tag{2.6.6}$$

Simbol $o\big(g(x)\big)$ čitamo: *malo o od* $g(x)$.

Dakle, ako za $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ važi $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ i ako je $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, tada je $f(x) = o\big(g(x)\big)$ $(x \to a)$.

Primer 2.6.4. Lako se proverava da važe jednakosti

a) $x^2 = o(x) \quad (x \to 0)$, c) $1 - \cos x = o(x) \quad (x \to 0)$,

b) $x = o(x^2) \quad (x \to \infty)$, d) $\tan x - \sin x = o(x) \quad (x \to 0)$. $\triangle$

Činjenicu da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, možemo simbolizovati sa i pomoću $f(x) = o(1)$ $(x \to a)$ jer je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)/1$.

Primer 2.6.5. 1° Važi $x = o(1)$ $(x \to 0)$; 2° Kako je $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, važi $\sin x = o(1)$ $(x \to 0)$. $\triangle$

Kao što smo videli, ako važi jednakost (2.6.6) zaključujemo da je, u poređenju sa funkcijom g, funkcija f beskonačno mala kada $x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Ali, isto tako, to znači: ako je pri tome i funkcija $x \mapsto g(x)$ beskonačno mala veličina, tada je funkcija $x \mapsto f(x)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na funkciju g.

Napomenimo da, ako je $f(x)$ beskonačno mala veličina kada $x \to a$, zbog

$$\lim_{x\to a} \frac{o\big(f(x)\big)}{f(x)} = 0,$$

sleduje da je funkcija $o\big(f(x)\big)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na funkciju $f(x)$. Svakako, i u ovom slučaju, iz jednakosti

$$f_1(x) = o\big(g(x)\big) \quad \text{i} \quad f_2(x) = o\big(g(x)\big) \quad (x \to a)$$

ne sleduje jednakost $f_1(x) = f_2(x)$, nego zaključak da funkcije f_1 i f_2 pripadaju skupu funkcija koje su beskonačno male u odnosu na funkciju g, kada $x \to a$. I ovde važi konstatacija o ispravnijem načinu pisanja da je $f \in o(g)$ $(x \to a)$, umesto $f(x) = o\big(g(x)\big)$ $(x \to a)$. Ipak, mi ćemo koristiti uobičajeni način pisanja.

Može se zaključiti da važi implikacija

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \;\Rightarrow\; f(x) = O\big(f(x)\big).$$

Ako je $f(x) = O\big(g(x)\big)$, tj. ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), tada iz jednakosti

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda = \lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\Big) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\lambda g(x)}{g(x)} = 0,$$

zaključujemo da je

$$f(x) = \lambda g(x) + o\big(g(x)\big) \qquad (x \to a). \tag{2.6.7}$$

Primer 2.6.6. 1° Kako je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\sin x}{x} - 1\Big) = 0$, važi jednakost

$$\sin x = x + o(x) \qquad (x \to 0).$$

2° Isto tako, važi $\log(1+x) = x + o(x)$ $(x \to 0)$ jer je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x) - x}{x} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\log(1+x)}{x} - 1\Big) = 0. \quad \triangle$$

Primer 2.6.7. 1° U skladu sa prethodnim, iz

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\cos x - 1}{x} + \frac{1}{2}\Big) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

sleduje

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = o(x^2) \qquad (x \to 0),$$

ali i

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0) \quad \text{i} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0).$$

2° Kako je $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 1)/x = 0$, važe jednakosti

$$\cos x - 1 = o(x) \quad (x \to 0) \qquad \text{i} \qquad \cos x = 1 + o(x) \quad (x \to 0). \quad \triangle$$

Ako je $f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big)$ $(x \to a)$, za funkciju $x \mapsto g(x)$ kažemo da je glavni deo funkcije f, kada $x \to a$. Na primer, glavni deo funkcije $x \mapsto \sin x$, kada $x \to 0$, je x jer je $\sin x = x + o(x)$, $x \to 0$.

Očigledno, ako je $g(x)$ glavni deo funkcije $x \mapsto f(x)$, kada $x \to a$, tada je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Simbole o i O uveli su Bachmann[26)] i Landau[27)].

Na osnovu izloženog, nije teško izvesti sledeći zaključak.

Ako u nekoj okolini $\overset{\circ}{U}(a)$ tačke a važi jednakost $f(x) = \lambda(x)g(x)$, tada:

1° ako je $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = A \neq 0$ važi $f(x) = O(g(x))$;

2° ako je $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$, funkcije f i g su ekvivalentne kada $x \to a$;

3° ako je $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 0$, važi $f(x) = o(g(x))$.

Pre nego što na nekoliko primera pokažemo kako se primenom simbola o i O dosta jednostavno mogu upoređivati funkcije i nalaziti granične vradnosti, ukazaćemo na neke osobine ovih simbola.

Teorema 2.6.1. *Ako je $f(x) = O\big(g(x)\big)$ i $g(x) = O\big(h(x)\big)$ $(x \to a)$, tada je $f(x) = O\big(h(x)\big)$, kada $x \to a$.*

Dokaz. Iz jednakosti

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \qquad \text{i} \qquad g(x) = O\big(h(x)\big) \quad (x \to a),$$

tj. iz

$$|f(x)| \le M_1|g(x)| \qquad \text{i} \qquad |g(x)| \le M_2|h(x)| \quad (x \to a),$$

gde su $M_1, M_2 > 0$, sleduje

$$|f(x)| \le M_1|g(x)| \le M_1M_2|h(x)| = M|h(x)| \quad (x \to a),$$

gde je $M = M_1M_2 > 0$. Dakle, $f(x) = O\big(h(x)\big)$ $(x \to a)$. $\square$

Teorema 2.6.2. *Za funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$, kada $x \to a$, važe jednakosti:*

1° $O\big(f(x)\big) + O\big(f(x)\big) = O\big(f(x)\big)$,

2° $O\big(f(x)\big) \cdot O\big(g(x)\big) = O\big(f(x)g(x)\big)$,

3° $O\big(\alpha f(x)\big) = |\alpha| O\big(f(x)\big) = O\big(f(x)\big)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

[26)] Paul Gustav Henrich Bachmann (1837–1920), nemački matematičar.

[27)] Edmund Georg German Landau (1877–1938), nemački matematičar.

Dokaz. 1° Neka su $g_1(x) = O\big(f(x)\big)$ i $g_2(x) = O\big(f(x)\big)$, tj.

$$|g_1(x)| \le M_1|f(x)| \qquad \text{i} \qquad |g_2(x)| \le M_2|f(x)|,$$

gde su $M_1, M_2 > 0$. Tada je, očigledno, $|g_1(x) + g_2(x)| = |O\big(f(x)\big) + O\big(f(x)\big)|$, ali i

$$\begin{aligned}|g_1(x) + g_2(x)| &\le |g_1(x)| + |g_2(x)| \le M_1|f(x)| + M_2|f(x)| \\ &= (M_1 + M_2)|f(x)| = M|f(x)|,\end{aligned}$$

gde smo stavili $M = M_1 + M_2$. Prema tome, važi $|g_1(x)+g_2(x)| = O\big(f(x)\big)$, tj.

$$O\big(f(x)\big) + O\big(f(x)\big) = O\big(f(x)\big) \quad (x \to a).$$

2° Ako stavimo $f_1(x) = O\big(f(x)\big)$ i $g_1(x) = O\big(g(x)\big)$, tada je

$$|f_1(x)| \le M_1|f(x)|, \qquad |g_1(x)| \le M_2|g(x)| \qquad (M_1, M_2 > 0),$$

što znači da važi

$$|f_1(x)g_1(x)| = |f_1(x)||g_1(x)| \le M_1M_2|f(x)||g(x)| = M|f(x)g(x)|,$$

gde smo stavili $M = M_1M_2$. Prema tome, važi jednakost 2°.

3° Ako stavimo $g(x) = O\big(\alpha f(x)\big)$, što, zapravo, znači

$$|g(x)| \le M|\alpha f(x)| = M|\alpha||f(x)| \quad (M > 0),$$

zaključujemo da važi $g(x) = O\big(f(x)\big)$. $\square$

Na sličan način mogu se dokazati i sledeća tvrđenja:

Teorema 2.6.3. *Za funkciju $x \mapsto f(x)$, kada $x \to a$, važe jednakosti:*

1° $o\big(f(x)\big) + o\big(f(x)\big) = o\big(f(x)\big)$,

2° $o\big(f(x)\big) \cdot o\big(f(x)\big) = o\big(f(x)\big)$,

3° $o\big(o\big(f(x)\big)\big) = o\big(f(x)\big)$.

Teorema 2.6.4. *Za funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$, kada $x \to a$, važe jednakosti:*

$$1^\circ \quad \frac{o\big(f(x)\big)}{g(x)} = o\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big), \qquad 2^\circ \quad \frac{O\big(f(x)\big)}{g(x)} = O\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big).$$

Teorema 2.6.5. *Za funkciju $x \mapsto f(x)$, kada $x \to a$, važe jednakosti:*

1° $O\big(f(x)\big) + o\big(f(x)\big) = O\big(f(x)\big)$,

2° $o\big(O\big(f(x)\big)\big) = o\big(f(x)\big)$, $\quad 3^\circ$ $O\big(o\big(f(x)\big)\big) = o\big(f(x)\big)$.

Primer 2.6.8. Neka je

$$x \mapsto f(x) = \frac{\log(1 + x + x^2) + \arcsin 3x - 5x^2}{\sin 2x + \tan^2 x + (e^x - 1)^5} \,.$$

Odredićemo $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Kada $x \to 0$ imamo

1° $\log(1 + x + x^2) = x + o(x)$; $\quad 4^\circ$ $\sin 2x = 2x + o(x)$;

2° $\arcsin 3x = 3x + o(x)$; $\quad 5^\circ$ $\tan^2 x = o(x)$;

3° $5x^2 = o(x)$; $\quad 6^\circ$ $(e^x - 1)^5 = o(x)$.

Dakle,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x) + 3x + o(x) - o(x)}{2x + o(x) + o(x) + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x + o(x)}{2x + o(x)} = 2. \qquad \triangle$$

Primer 2.6.9. Neka je $x \mapsto \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ i neka x teži nuli. Tada je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \dfrac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3!} + O(x^2)\right) = \frac{1}{6}. \qquad \triangle$$

Primer 2.6.10. Odredićemo

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\sqrt[7]{\frac{x^3 + x}{x^3 + 1}} - \cos\frac{1}{x}\right).$$

Kako je, kada $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 + x}{x^3 + 1} &= \frac{1 + 1/x^2}{1 + 1/x^3} = \Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{x^3}\Big)^{-1} \\
&= \Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{x^3} + O(1/x^6)\Big) = 1 + \frac{1}{x^2} + O(1/x^3), \\
\sqrt[7]{\frac{x^3 + x}{x^3 + 1}} &= \left(1 + \frac{1}{x^2} + O(1/x^3)\right)^{1/7} = 1 + \frac{1}{7}\,\frac{1}{x^2} + O\left(1/x^3\right), \\
\cos\frac{1}{x} &= 1 - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{x^2} + O(1/x^4),
\end{aligned}$$

zaključujemo da je

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\sqrt[7]{\frac{x^3 + x}{x^3 + 1}} - \cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\frac{9}{14}\,\frac{1}{x^2} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\right) = \frac{9}{14}. \qquad \triangle$$

2.7. Ravnomerna neprekidnost

U odeljku 2.1 definisali smo neprekidnost funkcije $x \mapsto f(x)$ u tački i proširili taj pojam i na skup D, što se jezikom matematičke logike može iskazati u obliku

$$\begin{aligned}&\big(f \text{ je neprekidna na } D\big) \Leftrightarrow \\ &(\forall \varepsilon > 0)(\forall y \in D)(\exists \delta > 0)\ \big((\forall x \in D)\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).\end{aligned}$$

Ovo znači da za svako $\varepsilon > 0$ i svako $y \in D$ mora da postoji pozitivan broj δ koji, očigledno, zavisi ne samo od ε, već i od tačke y. Dakle, $\delta = \delta(\varepsilon, y)$. U vezi sa neprekidnošću, može se postaviti pitanje egzistencije pozitivnog broja δ koji ne zavisi od y, već samo od ε. Na taj način dolazimo do tzv. pojma ravnomerne neprekidnosti funkcije na D.

Definicija 2.7.1. Za funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je *ravnomerno neprekidna* na D, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$, takav da za svako $x, y \in D$ važi nejednakost $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, kad god je $|x - y| < \delta$.

Jezikom matematičke logike ova definicija se može iskazati na sledeći način:

$$\begin{aligned}&\big(f \text{ je ravnomerno neprekidna na } D\big) \Leftrightarrow \\ &\qquad(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \big((\forall x, y \in D)\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).\end{aligned}$$

Napomena 2.7.1. Za funkciju koja je ravnomerno neprekidna kažemo, isto tako, da je *uniformno neprekidna.*

Napomenimo da neprekidna funkcija na skupu D ne mora biti ravnomerno neprekidna na tom skupu. Obrnuto je, međutim, tačno. Ako je f ravnomerno neprekidna funkcija na D, tada je ona neprekidna u svakoj tački $a \in D$, tj. $f \in C(D)$. Zaista, stavljajući $y = a$, definicija 2.7.1 se svodi na definiciju neprekidne funkcije u tački $x = a$ (videti definiciju 2.1.1).

Na osnovu definicije 2.7.1 zaključujemo da funkcija f *nije* ravnomerno neprekidna na D ako postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $\delta > 0$ postoje tačke $x, y \in D$ takve da je $|x - y| < \delta$ i $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Primer 2.7.1. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = x^2$ na intervalu $(-1, 2)$.

Kako je

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| < 4|x - y| \qquad (x, y \in (-1, 2)),$$

zaključujemo da je f ravnomerno neprekidna na $(-1, 2)$ jer za svako $\varepsilon > 0$ možemo uzeti $\delta = \varepsilon/4$ tako da za svako $x, y \in (-1, 2)$ važi implikacija

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |x^2 - y^2| < \varepsilon.$$

Međutim, ova funkcija nije ravnomerno neprekidna na intervalu $(0, +\infty)$. Zaista, ako za $\varepsilon = 1$ i svako $\delta > 0$ stavimo $x_\delta = 1/\delta$, $y_\delta = 1/\delta + \delta/2$, tada imamo $|x_\delta - y_\delta| = \delta/2 < \delta$ i

$$|f(x_\delta) - f(y_\delta)| = \frac{\delta}{2}\Big(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\Big) = 1 + \frac{1}{4}\delta^2 > 1. \quad \triangle$$

Primer 2.7.2. Funkcija $x \mapsto f(x) = \sin(1/x)$ je neprekidna na $(0, \pi/2]$.

Ako stavimo

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \qquad \text{i} \qquad y_n = \frac{2}{(2n+1)\pi} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tada imamo da je $f(x_n) = \sin n\pi = 0$, $f(y_n) = \sin{(2n+1)\pi/2} = (-1)^n$ i

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1.$$

Sada uzmimo da je, na primer, $\varepsilon = 1$. Kako za svako $\delta > 0$ možemo (sa dovoljno velikim $n \in \mathbb{N}$) izabrati tačke x_n i y_n tako da je $|x_n - y_n| < \delta$ i $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon = 1$, zaključujemo da ova funkcija nije ravnomerno neprekidna na $(0, \pi/2]$. $\triangle$

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.7.1. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada je ona na tom segmentu i ravnomerno neprekidna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ nije ravnomerno neprekidna na tom segmentu. Dakle, neka postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $\delta > 0$ postoje tačke $x, y \in [a, b]$ tako da je

$$|x - y| < \delta \qquad \text{i} \qquad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \tag{2.7.1}$$

Stavimo $\delta = 1/n$, a odgovarajuće tačke x i y označimo sa x_n i y_n, respektivno. Tada (2.7.1) postaje

$$|x - y| < \frac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{2.7.2}$$

Uzimajući redom $n = 1, 2, \ldots$, dobijamo nizove $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ čiji svi članovi pripadaju segmentu $[a, b]$. Kako su ovi nizovi ograničeni, to svaki od njih sadrži konvergentni podniz (videti teoremu 1.4.3, glava II).

Bez ikakvih ograničenja za dalja razmatranja, jednostavnosti radi, možemo pretpostaviti da su nizovi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, u stvari, ti podnizovi i neka oni konvergiraju ka x_0 i y_0, respektivno, pri čemu $x_0, y_0 \in [a,b]$.

Kako je, na osnovu relacije trougla,

$$0 \le |y_n - x_0| \le |y_n - x_n| + |x_n - x_0| < \frac{1}{n} + |x_n - x_0|,$$

zaključujemo da $|y_n - x_0| \to 0$, kada $n \to +\infty$, tj. da je $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_0$.

Zbog neprekidnosti funkcije f u tački x_0 imamo

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} y_n) = f(x_0).$$

S druge strane, prelaskom na graničnu vrednost, druga nejednakost u (2.7.2) svodi se na $|f(x_0) - f(x_0)| \ge \varepsilon > 0$. Dobijena protivurečnost znači da funkcija f mora biti ravnomerno neprekidna na $[a,b]$. $\square$

Ovaj rezultat je poznat kao *Cantorova*[28)] *teorema*.

Često se ravnomerna neprekidnost iskazuje pomoću tzv. modula neprekidnosti funkcije.

Definicija 2.7.2. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana na skupu D. Broj $\omega(\delta; f, D)$, određen sa

$$\omega(\delta; f, D) = \sup_{|x-y|\le\delta} |f(x) - f(y)| \qquad (x, y \in D), \tag{2.7.3}$$

nazivamo *modul neprekidnosti funkcije* f na skupu D.

Kada ne može doći do zabune, umesto $\omega(\delta; f, D)$ pišemo $\omega(\delta; f)$ ili samo $\omega(\delta)$.

Ako je $D = [a,b]$, modul neprekidnosti funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkcija $\delta \mapsto \omega(\delta)$ definisana na segmentu $[0, b-a]$.

Primer 2.7.3. Odredimo modul neprekidnosti za funkciju $x \mapsto f(x) = x^2$ na segmentu $[0,1]$.

Neka je $0 \le x - \delta \le y \le x \le 1$, $\delta > 0$. Tada, zbog nejednakosti

$$x^2 - y^2 \le x^2 - (x-\delta)^2 = 2x\delta - \delta^2 \le 2\delta - \delta^2,$$

[28)] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918), nemački matematičar.

zaključujemo da je

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|x-y|\le\delta} |x^2 - y^2| \le 2\delta - \delta^2.$$

Međutim, za $x = 1$ i $y = 1 - \delta$ imamo

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|x-y|\le\delta} |x^2 - y^2| \ge 1 - (1-\delta)^2 = 2\delta - \delta^2.$$

Dakle, modul neprekidnosti za funkciju $f(x) = x^2$ na segmentu $[0, 1]$ je dat sa $\omega(\delta; f) = 2\delta - \delta^2$. Primetimo da je $\lim\limits_{\delta\to 0+} \omega(\delta; f) = 0$. $\triangle$

Napomena 2.7.2. Ako funkcija f zadovoljava Lipschitzov uslov na $[a, b]$, tj. ako postoji konstanta $L > 0$ takva da je (videti nejednakost (2.1.8), glava I)

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \qquad (x, y \in [a, b]),$$

tada iz (2.7.3) sleduje $\omega(\delta; f) \le L\delta$.

Korišćenjem modula neprekidnosti, ravnomerna neprekidnost funkcije se može izraziti i na sledeći način:

Teorema 2.7.2. *Funkcija $x \mapsto f(x)$, definisana na skupu D, je ravnomerno neprekidna na D ako i samo ako je*

$$\lim_{\delta\to 0+} \omega(\delta; f, D) = 0. \tag{2.7.4}$$

Dokaz. Pretpostavimo da (2.7.4) važi, tj. da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ tako da je $\omega(\delta) < \varepsilon$, kad god je $0 < \delta < \delta_\varepsilon$. Uzmimo bilo koje δ koje zadovoljava ovaj uslov. Tada za svako $x, y \in D$ za koje je $|x - y| < \delta$ važi

$$|f(x) - f(y)| \le \omega(\delta) < \varepsilon,$$

što znači da je f ravnomerno neprekidna funkcija na D.

Pretpostavimo sada da je f ravnomerno neprekidna na D. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ takvo da je

$$(\forall x, y \in D) \qquad |x - y| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

odakle zaključujemo da za svako $\delta < \delta_\varepsilon$ važi

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y|\le\delta} |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dakle, $\lim\limits_{\delta\to 0+} \omega(\delta) = 0$. $\square$

Na kraju ovog odeljka navodimo bez dokaza dve teoreme:

Teorema 2.7.3. *Ako je* $\delta \mapsto \omega(\delta; f)$ $(\delta \in [0, b-a])$ *modul neprekidnosti funkcije* f *na segmentu* $[a, b]$, *tada važi:*

(i) $\omega(0; f) = 0$*;*

(ii) $\omega(\delta; f)$ *je monotono neopadajuća funkcija;*

(iii) $\omega(\delta_1 + \delta_2; f) \le \omega(\delta_1; f) + \omega(\delta_2; f) \qquad (\delta_1, \delta_2, \delta_1 + \delta_2 \in [0, b-a])$*;*

(iv) $\omega(\delta; f)$ *je neprekidna funkcija na* $[0, b-a]$.

Teorema 2.7.4. *Ako su funkcije* $x \mapsto f(x)$ *i* $x \mapsto g(x)$ *definisane na segmentu* $[a, b]$, *tada je*

1° $\omega(\delta; f+g) \le \omega(\delta; f) + \omega(\delta; g)$;

2° $\omega(\delta; \alpha f) = \alpha\omega(\delta; f) \quad (\alpha = \text{const} > 0)$;

3° $\omega(\delta; fg) \le \sup\limits_{a \le x \le b} |f(x)| \cdot \omega(\delta; g) + \sup\limits_{a \le x \le b} |g(x)| \cdot \omega(\delta; f)$.

Napomena 2.7.3. Svaka funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in [0, b-a])$, koja ima osobine (i)–(iv) iz teoreme 2.7.3, predstavlja modul neprekidnosti neke neprekidne funkcije. Stoga se modul neprekidnosti može definisati kao funkcija koja ima sve četiri osobine navedene u teoremi 2.7.3.

Napomena 2.7.4. Konstatovaćemo jednu interesantnu činjenicu:

Neka funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in [0, b-a])$ poseduje osobine (i)–(iv). Tada, na osnovu osobine (iii), važi nejednakost

$$f(x+h) - f(x) \le f(h) \qquad (x, x+h \in [0, b-a],\ h > 0).$$

Kako je, za proizvoljno $\delta \in [0, b-a]$,

$$f(\delta) = f(\delta) - f(0) \le \omega(\delta; f) = \sup_{\substack{0 \le x \le b-a-h \\ 0 \le h \le \delta}} |f(x+h) - f(x)| \le \sup_{0 \le h \le \delta} f(h) = f(\delta),$$

zaključujemo da je $\omega(\delta; f) = f(\delta)$. Prema tome, funkcija f koja ima osobine (i)–(iv) je modul neprekidnosti i za samu sebe.

Iz teoreme 2.7.4 neposredno sleduje zaključak: ako su funkcije f i g ravnomerno neprekidne, tada su i funkcije $f+g$, αf i fg, takođe ravnomerno neprekidne.

3. ZADACI ZA VEŽBU

3.1. Odrediti granične vrednosti:

$$1^\circ \quad L_1 = \lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}, \qquad 2^\circ \quad L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \quad (m,n\in\mathbb{Z}).$$

Rezultat. 1° $L_1 = -8$, 2° $L_2 = m/n$.

3.2. Dokazati:

$$1^\circ \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x^a} - \frac{1}{1-x^b}\right) = \frac{a-b}{2} \qquad (a,b\in\mathbb{Z}),$$

$$2^\circ \quad \lim_{x\to 1} \frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\cdots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\cdots(x^k-1)} = \binom{n}{k},$$

$$3^\circ \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}} = 3, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}} = -6,$$

$$4^\circ \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos a}{1-\cos x} = -2\cos a.$$

3.3. Proveriti jednakosti:

$$1^\circ \quad \lim_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x} = e^3, \qquad 2^\circ \quad \lim_{x\to\pi/4} \frac{\log\tan x}{\cos 2x} = -1,$$

$$3^\circ \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x)}{x} = \log a - \log b \qquad (a>0, b>0),$$

$$4^\circ \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{x^2} = 1.$$

3.4. Odrediti $\ell = \varliminf\limits_{x\to 0} f(x)$ i $L = \varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)$, ako je

$$f(x) = \sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}.$$

Rezultat. $\ell = -1$ i $L = 1$.

3.5. Proveriti jednakosti:

$$1^\circ \quad (1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+o(x^2) \quad (x\to 0),$$

$$2^\circ \quad \cos ax = 1-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2) \quad (x\to 0),$$

$$3^\circ \quad a^x = 1+x\log a+o(x), \quad (x\to 0),$$

$$4^\circ \quad x+\cos x = O(1) \quad (x\to 0), \qquad 5^\circ \quad \arctan\frac{1}{x} = O(1) \quad (x\to 0).$$

3.6. Odrediti graničnu vrednost

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2)+\arcsin 3x - 5x^2}{\sin 2x + \tan^2 x + (e^x-1)^5}\,.$$

Uputstvo. Dokazati prvo da, kada $x \to 0$, važe jednakosti:

$$\begin{array}{rrr} \log(1+x+x^2) = x + o(x), & \arcsin 3x = 3x + o(x), & 5x^2 = o(x), \\ \sin 2x = 2x + o(x), & \tan^2 x = o(x), & (e^x-1)^5 = o(x). \end{array}$$

3.7. Odrediti tačke prekida funkcija:

$$1^\circ \quad y = \sqrt{x} - \big[\sqrt{x}\,\big]\,, \qquad 2^\circ \quad y = \log\log(1+x^2)\,, \qquad 3^\circ \quad y = \frac{x}{\sin x}\,.$$

Rezultat. 1° $x = n^2$ $(n \in \mathbb{Z})$, 2° $x = 0$, 3° $x = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

3.8. Dokazati da je funkcija

$$x \mapsto f(x) = \frac{2x^2-4x}{|x+1|+|x-3|-2}\,,$$

neprekidna funkcija.

3.9. Ispitati neprekidnost funkcija:

$$f(x) = \arctan\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\Big)\,, \qquad g(x) = \log\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}\,.$$

3.10. Ispitati neprekidnost funkcije

$$\chi(x) = \lim_{m\to+\infty}\Big(\lim_{n\to+\infty}\cos^n(m!\pi x)\Big).$$

Rezultat. Funkcija χ je prekidna u svakoj svojoj tački.

3.11. Mogu li se funkcije $x \mapsto f_i(x)$ zadate pomoću

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\,, \qquad f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x}\,, \qquad f_3(x) = x\log^2 x,$$

dodefinisati tako da budu neprekidne funkcije ?

3.12. Ispitati ravnomernu neprekidnost funkcija

$$f(x) = x^2 \quad (-l < x < l) \qquad \text{i} \qquad g(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Rezultat. Funkcija f je ravnomerno neprekidna, a funkcija g nije ravnomerno neprekidna.

IV G L A V A

Diferenciranje funkcija jedne realne promenljive

1. IZVOD I DIFERENCIJAL FUNKCIJE

1.1. Izvod funkcije i diferencijabilnost

Pretpostavimo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana u okolini $U(a)$ tačke $x = a$ i da je neprekidna u toj okolini. Za veličine

$$x - a \qquad \text{i} \qquad f(x) - f(a)$$

kažemo, redom, da su *priraštaj argumenta* i *priraštaj funkcije* u tački $x = a$. Razumljivo, kada $x \to a$, veličina $x - a$ je beskonačno mala veličina, a zbog pretpostavke o neprekidnosti funkcije f, beskonačno mala veličina je i $f(x) - f(a)$. Kao što ćemo videti, interesantno je proučiti odnos ovih dveju beskonačno malih veličina.

Zato ćemo posmatrati graničnu vrednost količnika

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1.1.1}$$

kada $x \to a$.

Definicija 1.1.1. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna u okolini $U(a)$ i ako postoji konačna granična vrednost količnika (1.1.1) kada $x \to a$, kažemo da funkcija f ima izvod u tački $x = a$, u oznaci $f'(a)$, i pišemo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \tag{1.1.2}$$

Primer 1.1.1. Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2 + 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ u tački $x = a$ ima izvod

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 + 3x - (a^2 + 3a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a + 3) = 2a + 3.$$

Za $a = 2$ imamo $f'(2) = 7$. $\triangle$

Primer 1.1.2. Kako je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\,\cos\frac{x+a}{2}=1\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a,\end{aligned}$$

funkcija $x\mapsto \sin x$ $(x\in\mathbb{R})$ u tački $x = a$ ima izvod $\cos a$. $\triangle$

Kako količnik (1.1.1) predstavlja koeficijent pravca sečice S koja prolazi kroz tačke $A(a, f(a))$ i $M(x, f(x))$ (videti sliku 1.1.1), važi jednakost

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\tan\varphi,$$

gde je φ ugao koji sečica S zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose. Očigledno, ugao φ zavisi od položaja tačke M, što znači da zavisi od x. S obzirom da $x\to a$, sečica S teži tangenti T, koja u tački A dodiruje krivu $y = f(x)$, i u graničnom slučaju za ugao φ važi jednakost $\lim\limits_{x\to a}\varphi=\alpha$, gde je α ugao koji tangenta T zaklapa sa pozitivnim delom x-ose. Ovo znači da jednačina tangente T glasi

$$y-f(a)=\tan\alpha\cdot(x-a),\quad\text{tj.}\quad y-f(a)=\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a),$$

ili, na osnovu (1.1.2),

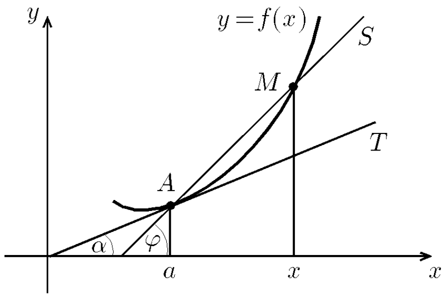
$$y-f(a)=f'(a)(x-a). \tag{1.1.3}$$

Prema tome, geometrijski, izvod $f'(a)$ predstavlja koeficijent pravca tangente T na krivu $y = f(x)$ u tački $A(a, f(a))$.

Primetimo da, ako je $f'(a)\neq 0$, prava

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}\,(x-a) \tag{1.1.4}$$

takođe prolazi kroz tačku A i sa tangentom (1.1.3) zaklapa prav ugao. Za pravu (1.1.4) kažemo da je *normala na krivu* $y = f(x)$ u tački $A(a, f(a))$.



Sl. 1.1.1

Ako je $f'(a) = 0$, jednačina tangente je $y = f(a)$ i to je prava koja je paralelna sa x-osom. U tom slučaju, jednačina normale glasi $x = a$. Očigledno, to je prava koja je paralelna y-osi.

Izvod funkcije ima svoje značenje i u fizici. Neka je, na primer, M materijalna tačka koja se kreće. Kao što je poznato, ako je njeno kretanje ravnomerno i ako za interval vremena t tačka M pređe put dužine s, tada količnik s/t predstavlja njenu brzinu kretanja.

Međutim, ako je kretanje tačke neravnomerno, pređeni put s je funkcija vremena t, određena funkcijom $t \mapsto s(t)$ $(t > 0)$. Neka je t_0 uočeni trenutak i $t > t_0$. Za vreme $t - t_0$ posmatrana tačka M pređe put $s(t) - s(t_0)$, a količnik $\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ je srednja brzina njenog kretanja od trenutka t_0 do trenutka t. U opštem slučaju taj količnik nije konstanta, a granična vrednost

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

predstavlja brzinu kretanja tačke M u trenutku t_0. To, zapravo, znači da je brzina kretanja materijalne tačke M u trenutku t_0 određena izvodom funkcije puta $t \mapsto s(t)$ za $t = t_0$.

Ako granična vrednost (1.1.2) ne postoji, tada funkcija f nema izvod u tački a.

Primer 1.1.3. Kako je

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

funkcija $x \mapsto |x|$ nema izvod u tački $x = 0$.

Nije teško pokazati da u svakoj drugoj tački $x \neq 0$ ova funkcija ima izvod. $\triangle$

Definicija 1.1.2. Za funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je *diferencijabilna funkcija* u tački $x = a$ ako se njen priraštaj $f(x) - f(a)$ može predstaviti u obliku

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + o(x - a),$$

gde je A konstanta.

U stvari, to znači da je funkcija f diferencijabilna u tački $x = a$ ako njen priraštaj u tački $x = a$ ima oblik

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \omega(x)(x - a), \tag{1.1.5}$$

gde je A neka konstanta, a ω funkcija za koju je

$$\lim_{x \to a} \omega(x) = 0. \tag{1.1.6}$$

Primer 1.1.4. 1° Funkcija $x \mapsto x^2$ je diferencijabilna u tački $x = a$, jer za njen priraštaj u tački $x = a$ važi jednakost oblika

$$x^2 - a^2 = A(x - a) + o(x - a),$$

tj. jednakost

$$x^2 - a^2 = 2a(x - a) + (x - a)^2.$$

2° Funkcija $x \mapsto \sin x$ je takođe diferencijabilna u tački $x = a$ jer važi jednakost

$$\sin x - \sin a = \cos a(x - a) + \left(\frac{\sin x - \sin a}{x - a} - \cos a\right)(x - a),$$

koja je oblika

$$\sin x - \sin a = A(x - a) + \omega(x)(x - a). \quad \triangle$$

Napomenimo da je pojam diferencijabilnosti funkcije u tački $x = a$ ekvivalentan postojanju konačnog izvoda funkcije u toj tački. U stvari, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.1.1. *Funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in U(a))$ je diferencijabilna u tački $x = a$ ako i samo ako u tački $x = a$ ima konačan izvod $f'(a)$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je funkcija f diferencijabilna. Tada postoje konačna konstanta A i funkcija $x \mapsto \omega(x)$ koja ima osobinu (1.1.6) tako da važi jednakost (1.1.5). Ako jednakost (1.1.5) podelimo sa $x - a$, a zatim pustimo da $x \to a$, neposredno zaključujemo da važi

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \lim_{x \to a} \omega(x) = A,$$

što znači da funkcija f u tački $x = a$ ima konačan izvod $f'(a) = A$.

Obrnuto, pretpostavimo sada da funkcija f ima u tački $x = a$ konačan izvod $f'(a)$, tj. neka je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Tada je

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0,$$

odakle zaključujemo da je, kada $x \to a$, funkcija $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na beskonačno malu veličinu $x \mapsto x - a$, što znači da je

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = o(x - a) \qquad (x \to a),$$

tj.

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + o(x - a).$$

Ovo znači da postoji konačna konstanta $A = f'(a)$, kao i da postoji funkcija $x \mapsto \omega(x) = \dfrac{o(x - a)}{x - a}$ koja ima osobinu (1.1.6). $\square$

Primer 1.1.5. Kao što smo videli, funkcija $x \mapsto x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ ima izvod u tački $x = 2$. Ona je, dakle, u toj tački diferencijabilna.

Isto tako, funkcija $x \mapsto \sin x$ je diferencijabilna u svakoj tački, jer za svako $x = a$ ima izvod jednak $\cos a$. $\triangle$

Za funkciju koja nema izvod u nekoj tački kažemo da nije diferencijabilna u toj tački.

Primer 1.1.6. Kao što smo videli, funkcija $x \mapsto |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ nema izvod u tački $x = 0$. Prema tome, ona nije diferencijabilna u tački $x = 0$. $\triangle$

Jedna posledica osobine da je neka funkcija diferencijabilna u tački jeste sledeće tvrđenje:

Teorema 1.1.2. *Ako je $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna funkcija u tački $x = a$, tada je f u tački a neprekidna funkcija.*

Dokaz. Tvrđenje teoreme sleduje neposredno ako se u jednakosti (1.1.5) pređe na granični proces kada $x \to a$. $\square$

Naravno, kao što smo videli u primeru 1.1.3, obrnuto tvrđenje ne važi.

Iako ćemo se nadalje, uglavnom, baviti diferencijabilnim funkcijama i njihovim osobinama, ovde ćemo razmotriti i slučaj kada funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in U(a))$ nije diferencijabilna u tački $x = a$, tj. slučaj kada granična vrednost količnika (1.1.1) ne postoji. To je, u stvari, slučaj kada za granične vrednosti

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1.1.7}$$

važi jedna od tri mogućnosti:

1° obe granične vrednosti postoje, ali se razlikuju;

2° jedna od njih ne postoji;

3° nijedna od njih ne postoji.

U slučaju 1° kažemo da postoje *levi* i *desni izvod funkcije* f u tački $x = a$, označavajući ih redom sa $f'_-(a)$ i $f'_+(a)$.

Dakle,

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{i} \quad f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Primer 1.1.7. U tački $x = 0$, funkcija $x \mapsto f(x) = |x|$ ima izvode $f'_-(0) = -1$ i $f'_+(0) = 1$. $\triangle$

U slučaju 2° kažemo da funkcija f ima u tački $x = a$ levi ili desni izvod, prema tome koja od graničnih vrednosti (1.1.7) postoji.

Primer 1.1.8. Funkcija

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & (x \le 0), \\ x \sin(1/x) & (x > 0), \end{cases}$$

ima levi izvod u tački $x = 0$,

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = 1,$$

ali njen desni izvod u tački $x = 0$ ne postoji jer (videti primer 1.1.1, glava III) ne postoji granična vrednost

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x\sin(1/x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}\,. \quad \triangle$$

U slučaju 3° funkcija f nema ni levi ni desni izvod u tački $x = a$.

Primer 1.1.9. Neka je

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Kako je (videti primer 2.1.2, glava III) funkcija f neprekidna u tački $x = 0$, formalnim se pristupom dobija

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(1/x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}\,.$$

Međutim, poslednja granična vrednost ne postoji jer funkcija $x \mapsto \sin(1/x)$, kada x teži ka 0, nema ni levu ni desnu graničnu vrerdnost. To, zapravo, znači da u tački $x = 0$ funkcija f nema ni levi ni desni izvod. Dakle, funkcija f nije diferencijabilna u tački $x = 0$. $\triangle$

Za funkciju koja u nekoj tački ima levi izvod kažemo da je u toj tački *diferencijabilna sa leve strane*. Isto tako, za funkciju koja u nekoj tački ima desni izvod kažemo da je u toj tački *diferencijabilna sa desne strane*.

Zbog toga se sada može reći da funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in U(a))$ ima izvod $f'(a)$ u tački $x = a$, ako postoje izvodi $f'_-(a)$ i $f'_+(a)$ i ako su oni jednaki.

Napomenimo da funkcija koja je neprekidna samo sa leve strane u tački $x = a$, u toj tački može imati samo levi izvod. Isto tako, funkcija koja je u tački $x = a$ neprekidna samo sa desne strane, u toj tački može imati samo desni izvod.

Međutim, suprotno definiciji 1.1.1, može se desiti da granična vrednost (1.1.2) nije konačna, tj. može se desiti da je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty \qquad \text{ili} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty\,.$$

U tom slučaju za funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da u tački $x = a$ ima *beskonačan izvod*, označavajući ga takođe sa $f'(a)$. I tada se može govoriti o tzv. levom ili desnom beskonačnom izvodu u tački $x = a$.

Kao što smo videli, diferencijabilnost funkcije u nekoj tački je jedna njena lokalna osobina. Prirodno je očekivati da postojanje te osobine indukuje neka druga svojstva posmatrane funkcije. U ovoj glavi biće, uglavnom, reči o tim indukovanim osobinama funkcija.

Saglasno definiciji 1.1.1 može se posmatrati izvod funkcije koja je neprekidna na čitavom segmentu $[a, b]$.

Definicija 1.1.3. Neka $f \in C[a,b]$. Ako za svako $x \in [a,b]$ postoji granična vrednost[29)]

$$\lim_{X \to x} \frac{f(X) - f(x)}{X - x}, \tag{1.1.8}$$

kažemo da funkcija $x \mapsto f(x)$ ima izvod u proizvoljnoj tački $x \in [a,b]$ ili da je diferencijabilna na $[a,b]$.

Taj ćemo izvod označavati sa y' ili $f'(x)$, tj.

$$y' = f'(x) = \lim_{X \to x} \frac{f(X) - f(x)}{X - x}\,.$$

Dakle, izvod funkcije f predstavlja funkciju $x \mapsto f'(x)$ koja se na ovaj način može pridružiti polaznoj funkciji $x \mapsto f(x)$. Vrednost $f'(a)$ predstavlja izvod $f'(x)$ u tački $x = a$, što se često simbolizuje sa

$$f'(a) = f'(x)\Big|_{x=a}\,.$$

Granična vrednost (1.1.8) za izvod funkcije $x \mapsto f(x)$ može se posmatrati u različitim oblicima pisanja. Naime, ako uvedemo oznake

$$Y = f(X), \quad \Delta x = X - x, \quad \Delta y = f(X) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = Y - y,$$

izvod funkcije f je određen sa

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \lim_{X \to x} \frac{f(X) - f(x)}{X - x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{X \to x} \frac{Y - y}{X - x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,. \end{aligned}$$

Napomenimo da se za priraštaj argumenta $X - x$ često, umesto Δx, koristi i oznaka h.

[29)] Za $x = a$ i $x = b$ podrazumevamo da postoje desna i leva granična vrednost, respektivno.

Kao što ćemo u narednim odeljcima videti, izvode nekih funkcija kojima ćemo se u narednim primerima baviti, uz neka nova saznanja, moguće je relativno lako odrediti. Ipak, u ovom odeljku odredićemo izvode nekih osnovnih elementarnih funkcija, oslanjajući se samo na definiciju 1.1.3.

Primer 1.1.10. Neka je n prirodan broj i $x \mapsto x^n$ $(x \in \mathbb{R})$.

Kako je

$$(x+\Delta x)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \cdots + \binom{n}{n-1}x\Delta x^{n-1} + \binom{n}{n}\Delta x^n,$$

jedno za drugim dobijamo

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x^n}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Big(nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\Big)\Delta x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\Big(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\Big),\end{aligned}$$

tj.

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad \triangle$$

Primer 1.1.11. Ako je $x \mapsto e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, u skladu sa definicijom 1.1.3, imamo

$$(e^x)' = \lim_{X\to x}\frac{e^X - e^x}{X - x} = \lim_{X\to x} e^x \cdot \frac{e^{X-x} - 1}{X - x} = e^x \cdot \lim_{X\to x}\frac{e^{X-x} - 1}{X - x},$$

tj.

$$(e^x)' = e^x,$$

jer je (videti primer 2.1.3, glava III) $\displaystyle\lim_{X\to x}\frac{e^{X-x}-1}{X-x} = 1.$ $\triangle$

Primer 1.1.12. Neka je $a > 0$ i $a \neq 1$. Ako je $x \mapsto a^x$ $(x \in \mathbb{R})$, imamo

$$\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
&= a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x \, \log a} - 1}{\Delta x} \\
&= a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log a \cdot \left(e^{\Delta x \log a} - 1\right)}{\Delta x \, \log a} = a^x \log a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x \log a} - 1}{\Delta x \, \log a} \\
&= a^x \, \log a
\end{aligned}$$

jer je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x \log a} - 1}{\Delta x \, \log a} = 1$. $\triangle$

Primer 1.1.13. Za funkciju $x \mapsto \log x$ $(x > 0)$ imamo

$$\begin{aligned}
(\log x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log \frac{x + \Delta x}{x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log \frac{x + \Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x/\Delta x} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

jer je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x/\Delta x} = \log \left(\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x/\Delta x} \right) = \log e = 1.$$

Napomenimo da za parnu funkciju $x \mapsto \log|x|$ $(x \neq 0)$ imamo $(\log|x|)' = 1/x$. $\triangle$

Primer 1.1.14. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto x^\alpha$, gde je α realan broj.

Kao što je poznato (videti primer 1.1.12, glava I), funkcija $x \mapsto x^\alpha$ definisana je pomoću $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ $(x > 0)$. Stoga je

$$\begin{aligned}
(x^\alpha)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\alpha \log(x+\Delta x)} - e^{\alpha \log x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\alpha \log x}(e^{\alpha \log(x+\Delta x) - \alpha \log x} - 1)}{\Delta x} \\
&= e^{\alpha \log x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+\Delta x/x)} - 1}{\Delta x} \\
&= x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{\alpha}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log(1+\Delta x/x) \cdot \frac{e^{\alpha \log(1+\Delta x/x)} - 1}{\alpha \log(1+\Delta x/x)} \Big) \\
&= \alpha x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \to 0} \log\Big(1 + \frac{\Delta x}{x}\Big)^{x/\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+\Delta x/x)} - 1}{\alpha \log(1+\Delta x/x)} \\
&= \alpha x^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

jer je (videti primer 2.1.4, glava III)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \log\Big(1 + \frac{\Delta x}{x}\Big)^{x/\Delta x} = \log \lim_{\Delta x \to 0} \Big(1 + \frac{\Delta x}{x}\Big)^{x/\Delta x} = \log e = 1$$

i

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+\Delta x/x)} - 1}{\alpha \log(1+\Delta x/x)} = 1. \quad \triangle$$

Primer 1.1.15. 1° Na osnovu primera 1.1.2, nije teško zaključiti da je

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2° Za funkciju $x \mapsto \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$, dobijamo

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} \\
&= -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \\
&= -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\Big(x + \frac{\Delta x}{2}\Big) \\
&= -\sin x. \quad \triangle
\end{aligned}$$

Primer 1.1.16. Kako je, za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \text{i} \qquad \cot\alpha - \cot\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\,,$$

jedno za drugim dobijamo

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \lim_{X\to x}\frac{\tan X - \tan x}{X-x} = \lim_{X\to x}\frac{\sin(X-x)}{(X-x)\cos X\cos x}\\ &= \lim_{X\to x}\frac{1}{\cos X\cos x}\cdot\lim_{X\to x}\frac{\sin(X-x)}{X-x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= \lim_{X\to x}\frac{\cot X - \cot x}{X-x} = \lim_{X\to x}\frac{-\sin(X-x)}{(X-x)\sin X\sin x}\\ &= -\lim_{X\to x}\frac{1}{\sin X\sin x}\cdot\lim_{X\to x}\frac{\sin(X-x)}{X-x}\\ &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad \triangle\end{aligned}$$

Oznake y' i $f'(x)$, za izvod funkcije $x \mapsto y = f(x)$, uveo je u literaturu Lagrange[30]. Mi ćemo, ponekad, da bismo naglasili da je u pitanju izvod u odnosu na promenljivu x, umesto y' ili $f'(x)$ koristiti i oznake y'_x, tj. $f'_x(x)$.

Isto tako, za izvode y' i $f'(x)$ koristićemo i oznake $\mathcal{D}y$ i $\mathcal{D}f(x)$, a ako je potrebno da naglasimo da je izvod po promenljivoj x, pisaćemo $\mathcal{D}_x y$ ili $\mathcal{D}_x f(x)$. Oznaku $\mathcal{D}$ uveo je Cauchy.

Leibnitz[31] je uveo oznaku $\dfrac{d}{dx}$ simbolizujući njome izvod funkcije $x \mapsto y = f(x)$ sa

$$y' = \frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx} \qquad \text{ili} \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx}\,,$$

gde je očigledno da se radi o izvodu po promenljivoj x.

Mi ćemo, prema potrebi, koristiti svaku od ovih oznaka. Operatorski posmatrano, $\mathcal{D} \equiv \dfrac{d}{dx}$ predstavlja tzv. operator diferenciranja koji se primenjuje na funkciju koja stoji iza operatora. Napomenimo da i znak $'$ treba shvatiti kao operator diferenciranja. Dakle, ovaj operator funkciji f pridružuje njen izvod f'.

---

[30] Joseph Louis Lagrange (1736–1813), francuski matematičar.

[31] Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716), nemački filozof i matematičar.

1.2. Diferencijal funkcije

U prethodnom odeljku definicijom 1.1.2 uveli smo pojam diferencijabilne funkcije u tački $x = a$ i konstatovali da su postojanje konačnog izvoda funkcije u nekoj tački i diferencijabilnost funkcije u toj tački ekvivalentni pojmovi. Dakle, funkcija f je diferencijabilna u proizvoljnoj tački $X = x$, ako se njen priraštaj $f(X) - f(x)$ u toj tački može predstaviti u obliku

$$f(X) - f(x) = f'(x)(X - x) + o(X - x),$$

tj.

$$f(X) - f(x) = f'(x)(X - x) + \omega(X)(X - x), \tag{1.2.1}$$

gde funkcija ω zadovoljava uslov

$$\lim_{X \to x} \omega(X) = 0. \tag{1.2.2}$$

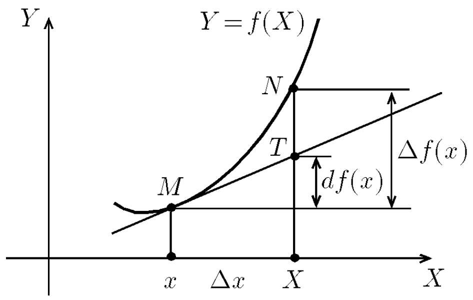
Ovde je formulacija data za tačku x, umesto za tačku a kako je dato u definiciji 1.1.2.

Definicija 1.2.1. Ako je funkcija f diferencijabilna u tački $X = x$, za veličinu $f'(x)(X - x)$ kažemo da je *diferencijal funkcije* u tački $X = x$, označavajući ga sa df ili $df(x)$.

Dakle, diferencijal $df(x)$ je proizvod izvoda funkcije u tački $X = x$ i priraštaja argumenta $\Delta x = X - x$, tj.

$$df(x) = f'(x)(X - x) = f'(x)\Delta x. \tag{1.2.3}$$

Diferencijal $df(x)$ je linearna funkcija promenljive X i definisan je za svako realno X. Šta više, diferencijal se može posmatrati i kao linearna funkcija priraštaja $\Delta x = X - x$.



Sl. 1.2.1

Ako je funkcija f zadata sa $x \mapsto y = f(x)$, za diferencijal $df(x)$ koristimo oznaku dy i pišemo $dy = y'\Delta x$.

Posmatrajmo sada krivu $y = f(x)$ prikazanu na slici 1.2.1, tačke $M(x, y)$ i $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$ i tangentu krive u tački M čija je jednačina data sa

$$Y - y = f'(x)(X - x).$$

Neka je T tačka na tangenti sa apscisom $x + \Delta x$. Njena ordinata je određena sa

$$Y = y + f'(x)(X - x) = y + f'(x)\Delta x = y + dy.$$

Prema tome, ta tačka je $T(x + \Delta x, y + dy)$. Očigledno, geometrijski, diferencijal dy funkcije f predstavlja razliku ordinata tačaka T i M.

Primetimo, takođe, da diferencijal dy funkcije f predstavlja priraštaj tangente u tački $X = x$, odgovarajući pritom priraštaju argumenta Δx.

Što se interpretacije diferencijala u fizici tiče, ona se ogleda u sledećem: Ako je $s(t)$ put koji je prevalila materijalna tačka M za protok vremena t, tada je

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

brzina kretanja tačke M u trenutku t. Kako je $ds = s'(t)\Delta t$, tj. $ds/\Delta t = s'(t)$, zaključujemo da je diferencijal ds put koji bi materijalna tačka prešla za interval vremena Δt da se je kretala stalnom brzinom jednakoj brzini svog kretanja u trenutku t.

Diferencijalu funkcije (1.2.3) može se dati i tzv. simeteričan oblik. Naime, ako uzmemo linearnu funkciju definisanu sa $g(X) = X$, njen izvod je jednak jedinici u svakoj tački tako da za diferencijal takve funkcije u tački $X = x$ imamo

$$dg(x) = dx = 1 \cdot \Delta x,$$

odakle zaključujemo da se priraštaj argumenta $\Delta x = X - x$ može izraziti kao diferencijal linearne funkcije $X \mapsto X$ u tački $X = x$, tj. $\Delta x = dx$. Dakle, imamo

$$df(x) = f'(x)dx \qquad \text{ili} \qquad dy = y'dx.$$

Primer 1.2.1. Nije teško zaključiti da važe sledeće jednakosti:

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\,dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

$$d(e^x) = e^x\,dx, \qquad d(a^x) = a^x \log a\,dx \quad (a > 0), \qquad d(\log x) = \frac{1}{x}\,dx,$$

$$d(\sin x) = \cos x\,dx, \qquad d(\cos x) = -\sin x\,dx. \qquad \triangle$$

Na osnovu izloženog neposredno zaključujemo da je $f'(x) = dy/dx$, čime se veoma jednostavno opravdava Leibnitzova oznaka operatora diferenciranja a, šta više, na osnovu ovoga se dozvoljava upotreba oznake dy/dx kao razlomka čiji je brojilac dy i imenilac dx. Naravno, to isto se može shvatiti da važi i za operator diferenciranja d/dx, pa je to „razlomak“ čiji je „brojilac“ d i „imenilac“ dx. Kao što ćemo videti, ovakvo shvatanje operatora diferenciranja d/dx olakšaće nam njegovu primenu.

1.3. Neke primene diferencijala funkcije

U opštem slučaju priraštaj funkcije Δy i njen diferencijal dy se među sobom razlikuju. Kako je $dy = f'(x)\Delta x$, iz jednakosti (1.2.1) i (1.2.2), tj. iz

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \omega(X)\Delta x \qquad \Bigl(\lim_{X \to x} \omega(X) = 0\Bigr),$$

za $f'(x) \neq 0$, dobijamo

$$\frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\omega(X)}{f'(x)},$$

odakle sleduje

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

Prema tome, priraštaj Δy i diferencijal dy su ekvivalentne beskonačno male veličine kada $\Delta x \to 0$, tj. kada $X \to x$. Dakle, za male vrednosti Δx može se uzeti da je

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x,$$

tj.

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

što daje mogućnost aproksimacije priraštaja funkcije njenim diferencijalom. Na osnovu ove jednakosti može se odrediti približna vrednost funkcije u tački $x + \Delta x$. Dakle,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{1.3.1}$$

Primer 1.2.1. Ako je $|h|$ mnogo manje od jedinice, što se označava sa $|h| \ll 1$, na osnovu (1.3.1) može se dobiti jedna tipična „inženjerska formula"

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}\,h. \tag{1.3.2}$$

Naime, za $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$, $\Delta x = h$, formula (1.3.1) svodi se na

$$\sqrt{1+h} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot h,$$

tj. na (1.3.2). Na primer, za $h = 0.1$ imamo $\sqrt{1.1} \approx 1.05$. $\triangle$

Primer 1.2.2. Ako je potrebno da se približno odredi vrednost $\sqrt[3]{27.3}$, posmatraćemo funkciju definisanu sa $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Kako je $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$, formula (1.3.1) se svodi na

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3x}\sqrt[3]{x}\,\Delta x,$$

odakle, ako stavimo $x = 27$ i $\Delta x = 0.3$, dobijamo

$$\sqrt[3]{27.3} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\cdot 27}\sqrt[3]{27}\cdot 0.3 \approx 3.011. \quad \triangle$$

Primer 1.2.3. Da bismo približno odredili vrednost $\sin 47^\circ$, posmatraćemo funkciju $x \mapsto f(x) = \sin x$ za koju formula (1.3.1) postaje

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x\,\Delta x.$$

U konkretnom slučaju, za

$$x = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \qquad \text{i} \qquad \Delta x = 2^\circ = \frac{\pi}{90},$$

imamo

$$\sin 47^\circ = \sin\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}\Big) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{90},$$

tj.

$$\sin 47^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{90} \approx 0.731. \quad \triangle$$

Ukazaćemo ovde na još jednu moguću primenu formule (1.3.1). Pretpostavimo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna u intervalu (a,b) i da u tom intervalu ima jedinstvenu nulu $x = \xi$. Dakle, neka je $f(\xi) = 0$ i $f'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$.

Stavimo $\xi = x + \Delta x$, gde je $x = x_0$ neka vrednost u okolini nule ξ. Tada, primenom formule (1.3.1), imamo

$$0 = f(\xi) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

tj. $\Delta x \approx -f(x_0)/f'(x_0)$, što znači da nulu ξ možemo aproksimirati pomoću

$$\xi = x_0 + \Delta x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ako desnu stranu u ovoj jednakosti označimo sa x_1, tj. stavimo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

tada sleduje da je $\xi \approx x_1$. Stavljajući sada x_1 umesto x_0, dobijamo novu aproksimaciju $\xi \approx x_2$, gde je

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Nastavljajući ovaj postupak možemo konstruisati niz $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ stavljajući

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

Na ovaj način dobijaju se vrednosti x_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$, koje su aproksimacije za ξ. Može se pokazati da je ovaj niz konvergentan i da mu je granica ξ. Navedeni postupak određivanja približnih vrednosti za ξ poznat je kao *Newtonov*[32)] *metod* ili *metod tangente*. Za detalje u vezi sa ovim metodom videti knjigu: G. V. Milovanović, *Numerička analiza, I deo* (treće izdanje), Naučna knjiga, Beograd, 1991.

1.4. Teoreme o izvodima

U ovom odeljku ukazaćemo na neke osnovne osobine operatora diferenciranja. Pri tome, ako nije drugačije naglašeno, smatratćemo da se pojam diferencijabilnosti funkcije odnosi na tačku x, ali da se može uzeti i kao diferencijabilnost na intervalu (a, b).

---

32) Isac Newton (1643–1727), veliki engleski matematičar i fizičar.

Teorema 1.4.1. *Ako su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ diferencijabilne funkcije, diferencijabilna je i funkcija*

$$x \mapsto F(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

i važi jednakost

$$F'(x) = \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)' = \alpha f'(x) + \beta g'(x). \tag{1.4.1}$$

Dokaz. Na osnovu definicije neposredno imamo

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)' \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha f(x+\Delta x) + \beta g(x+\Delta x) - \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha f(x+\Delta x) - \alpha f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta g(x+\Delta x) - \beta g(x)}{\Delta x} \\
&= \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \alpha f'(x) + \beta g'(x). \quad \square
\end{aligned}$$

Dakle, na osnovu (1.4.1), tj. na osnovu jednakosti

$$\mathcal{D}\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha\, \mathcal{D} f(x) + \beta\, \mathcal{D} g(x),$$

zaključujemo da je operator diferenciranja linearan.

Primer 1.4.1. Kako su funkcije $x \mapsto 3x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ i $x \mapsto 5\sqrt{x}$ $(x > 0)$ diferencijabilne funkcije, za $x > 0$ važi jednakost

$$(3x^2 + 5\sqrt{x}\,)' = 3(x^2)' + 5(\sqrt{x}\,)' = 6x + \frac{5}{2\sqrt{x}}\,. \quad \triangle$$

Primer 1.4.2. Za hiperbolične funkcije

$$x \mapsto \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

imamo

$$(\sinh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x,$$

i

$$(\cosh x)' = \Big(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\Big)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x. \quad \triangle$$

Nije teško primenom matematičke indukcije zaključiti da za n diferencijabilnih funkcija $x \mapsto f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ važi

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\Big)' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x).$$

Teorema 1.4.2. *Ako su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ diferencijabilne funkcije, diferencijabilna je i funkcija $x \mapsto y = f(x)g(x)$ i važi jednakost*

$$y' = \big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dokaz. Kako je

$$\big(f(x)g(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x},$$

jedno za drugim sleduje

$$\begin{aligned}
y' &= \big(f(x)g(x)\big)' \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\, g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)\, \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x),
\end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Primer 1.4.3. Ako je $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sin x$, tada je

$$\big(f(x)g(x)\big)' = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x\,. \quad \triangle$$

Primer 1.4.4. Kako je $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, za funkciju $x \mapsto \sin 2x$ $\ (x \in \mathbb{R})$ imamo

$$\begin{aligned}
(\sin 2x)' &= (2 \sin x \cos x)' = 2(\sin x \cos x)' = 2\big((\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)'\big) \\
&= 2\big(\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\big) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x. \quad \triangle
\end{aligned}$$

Za količnik dve diferencijabilne funkcije važi:

Teorema 1.4.3. *Ako su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ $(\neq 0)$ diferencijabilne funkcije, diferencijabilna je i funkcija $x \mapsto F(x) = f(x)/g(x)$ i važi jednakost*

$$F'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,.$$

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned}
F'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \frac{1}{g(x)^2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \frac{1}{g(x)^2}\left(g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \frac{1}{g(x)^2}\big(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\big)\,,
\end{aligned}$$

tvrđenje je dokazano. □

Primer 1.4.5. Ako je $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$, za $x \neq 0$ imamo

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{(\sin x)'x^2 - (x^2)'\sin x}{(x^2)^2} = \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}\,. \qquad \triangle$$

Primer 1.4.6. Za funkciju $x \mapsto \tan x$ $(x \neq (2k+1)\pi/2)$ važi

$$\begin{aligned}
(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\big((\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'\big)\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}(\cos x\cos x + \sin x\sin x)\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}\,. \qquad \triangle
\end{aligned}$$

Primer 1.4.7. Primenom teoreme 1.4.3, za hiperbolične funkcije

$$x \mapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

neposredno sleduje

$$\begin{aligned}(\tanh x)' = \Big(\frac{\sinh x}{\cosh x}\Big)' &= \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{1}{\cosh^2 x}\end{aligned}$$

i slično

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}\,. \quad \triangle$$

Napomenimo da se za teoreme dokazane u ovom odeljku često kaže da predstavljaju *pravila za traženje izvoda*.

Ako su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ diferencijabilne funkcije, za određivanje diferencijala važe sledeća pravila:

$$\begin{aligned}d(f(x)+g(x)) &= df(x)+dg(x),\\ d(f(x)g(x)) &= g(x)df(x)+f(x)dg(x),\\ d(\alpha f(x)) &= \alpha df(x),\\ d\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) &= \frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g(x)^2}\,.\end{aligned}$$

1.5. Izvod inverzne funkcije

Pretpostavimo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna i strogo monotona u nekoj okolini tačke x. Tada (videti teoremu 1.7.1, glava I) postoji inverzna funkcija f^{-1} određena sa $x = f^{-1}(y)$.

Dokazaćemo da za takve funkcije važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.5.1. *Ako je f diferencijabilna funkcija u tački x i ako je $f'(x) \neq 0$, tada je diferencijabilna i njena inverzna funkcija f^{-1}, u tački $y = f(x)$, i važi jednakost*

$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \frac{1}{f'(x)}\,. \tag{1.5.1}$$

Dokaz. Pre svega, iz $x = f^{-1}(y)$ i $y = f(x)$ sleduje

$$\Delta x = f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y) \qquad \text{i} \qquad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Kako su funkcije f i f^{-1} neprekidne, može se zaključiti da $\Delta y \to 0$ kada $\Delta x \to 0$, ali, isto tako, i da $\Delta x \to 0$ kada $\Delta y \to 0$. Stoga je

$$\begin{aligned}\big(f^{-1}(y)\big)' &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} \\ &= \frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}},\end{aligned}$$

odakle, zbog diferncijabilnosti funkcije f, sleduje

$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \frac{1}{f'(x)} . \quad \square$$

Dakle, za izvod inverzne funkcije imamo simboličku formulu

$$\mathcal{D}_y f^{-1}(y) = \frac{1}{\mathcal{D}_x f(x)} .$$

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da se traženje izvoda neke funkcije može svesti na traženje izvoda njoj inverzne funkcije.

Primer 1.5.1. Ako je $y = \arcsin x$ $(-1 < x < 1)$ sleduje

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . \quad \triangle$$

Primer 1.5.2. Za $y = \arccos x$ $(-1 < x < 1)$ imamo

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . \quad \triangle$$

Primer 1.5.3. Za funkcije

$$x \mapsto y = \arctan x \qquad \text{i} \qquad x \mapsto y = \operatorname{arccot} x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

dobijamo

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1/(\cos^2 y)} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} ,$$

i

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-1/(\sin^2 y)} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2} . \quad \triangle$$

Primer 1.5.4. Za $y = \log x$ $(x > 0)$, zbog $x = e^y$, imamo

$$(\log x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x} . \quad \triangle$$

1.6. Izvod složene funkcije

Neka je funkcijama

$$x \mapsto u = g(x) \quad (x \in D) \qquad \text{i} \qquad u \mapsto y = f(u) \quad (u = g(x) \in g(D))$$

definisana složena funkcija

$$x \mapsto y = f(u) = f\big(g(x)\big) = F(x) \qquad (x \in D).$$

Teorema 1.6.1. *Ako je g diferencijabilna funkcija u tački x, a f diferencijabilna u tački $u = g(x)$, tada je, u tački x, diferencijabilna i složena funkcija F i važi jednakost*

$$y' = (F(x))' = (f(g(x))' = f'\,(g(x))\,g'(x).$$

Dokaz. Ako stavimo $u = g(x)$ i $U = g(X)$, tj.

$$F(X) = f(g(X)) = f(U),$$

imamo

$$\begin{aligned} F(X) - F(x) &= f\,(g(X)) - f\,(g(x)) = f(U) - f(u) \\ &= \frac{f(U) - f(u)}{U - u}\,(U - u) = \frac{f(U) - f(u)}{U - u}\,\big(g(X) - g(x)\big). \end{aligned}$$

Tada je

$$\frac{F(X) - F(x)}{X - x} = \frac{f(U) - f(u)}{U - u} \cdot \frac{g(X) - g(x)}{X - x}\,,$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{X \to x} \frac{F(X) - F(x)}{X - x} \\ &= \lim_{U \to u} \frac{f(U) - f(u)}{U - u} \cdot \lim_{X \to x} \frac{g(X) - g(x)}{X - x} \\ &= f'(u)g'(x) \\ &= f'(g(x))g'(x), \end{aligned}$$

jer, kada $X \to x$, zbog neprekidnosti funkcije g, sleduje da $g(X) \to g(x)$, tj. da $U \to u$. $\square$

Dakle, ako je $y = F(x) = f(g(x))$, zaključujemo da za operatore $\mathcal{D}$ i d/dx važe jednakosti

$$y' = \mathcal{D}y = \mathcal{D}_x F(x) = \mathcal{D}_x f\,(g(x)) = \mathcal{D}_u f(u)\,\mathcal{D}_x g(x)$$

i

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{du}f(u)\,\frac{d}{dx}u = \frac{d}{du}f(u)\frac{d}{dx}g(x).$$

Primer 1.6.1. Neka je $y = f(x) = (x^2+1)^{100}$. Ako stavimo $y = u^{100}$ i $u = x^2+1$, imamo

$$y' = f'(x) = \mathcal{D}_u f \cdot \mathcal{D}_x u = 100u^{99} \cdot 2x = 200x(x^2+1)^{99}. \quad \triangle$$

Primer 1.6.2. Neka je $y = \sqrt[3]{\sin x}$ $(x \in \mathbb{R})$. Ako stavimo

$$y = \sqrt[3]{u}, \quad u = \sin x,$$

dobijamo

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{u^2}}\,\cos x = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,\cos x\,. \quad \triangle$$

Primenom teoreme 1.6.1 može se lako dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 1.6.2. *Ako je parna funkcija diferencijabilna, njen izvod je neparna funkcija. Ako je neparna funkcija diferencijabilna, njen izvod je parna funkcija.*

Za izvod kompozicije od više diferencijabilnih funkcija važi:

Teorema 1.6.3. *Ako su funkcije $u_k \mapsto f_k(u_k)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ diferencijabilne, tada je i kompozicija $x \mapsto F(x) = (f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n)(x)$ diferencijabilna funkcija i važi jednakost*

$$F'(x) = f_1'(u_1)f_2'(u_2)\cdots f_n'(u_n),$$

gde su $u_n = x$ i $u_{k-1} = f_k(u_k)$ $(k = n, n-1, \dots, 2)$.

Primer 1.6.3. Neka je $y = \sin^3(x^2+1)$ $(x \in \mathbb{R})$. Ako stavimo

$$y = u^3,\ u = \sin v,\ v = x^2+1,$$

imamo

$$y' = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = (\mathcal{D}_u u^3)\,(\mathcal{D}_v \sin v)\,\big(\mathcal{D}_x(x^2+1)\big) = 6x\sin^2(x^2+1)\cos(x^2+1)\,. \quad \triangle$$

Napomena 1.6.1. Primenom teoreme 1.6.1, lako se može dokazati teorema 1.5.1 o izvodu inverzne funkcije. Naime, kako je

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x,$$

na osnovu teoreme 1.6.1, važi

$$\left(f(f^{-1}(x))\right)' = f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}(x)\right)' = 1,$$

odakle sleduje jednakost (1.5.1).

Ponekad je, da bi se odredio izvod diferencijabilne funkcije $x \mapsto y = f(x)$, zgodnije posmatrati pogodno izabranu složenu diferencijabilnu funkciju

$$y \mapsto F(y) = F\left(f(x)\right) = G(x). \tag{1.6.1}$$

Iz (1.6.1), na osnovu teoreme 1.6.1, diferenciranjem dobijamo

$$F'(y)y' = G'(x),$$

odakle sleduje

$$y' = \frac{1}{F'(y)}\, G'(x) \qquad (F'(y) \neq 0).$$

Ovaj način traženja izvoda se često primenjuje ako se za funkciju F uzme $F(y) = \log y$. Tada iz $\log y = G(x)$ dobijamo

$$\frac{1}{y}\, y' = G'(x), \qquad \text{tj.} \qquad y' = f'(x) = yG'(x) = f(x)G'(x).$$

Primer 1.6.4. Neka je $y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$. Tada je

$$\log y = \log\bigl(x^{\sin x}\bigr) = \sin x\, \log x,$$

odakle diferenciranjem dobijamo

$$\frac{y'}{y} = \cos x\, \log x + \frac{\sin x}{x},$$

tj.

$$y' = y\Bigl(\cos x\, \log x + \frac{\sin x}{x}\Bigr) = x^{\sin x}\Bigl(\cos x\, \log x + \frac{\sin x}{x}\Bigr). \quad \triangle$$

Određivanje izvoda na način kako je to učinjeno u primeru 1.6.4, naziva se *logaritamsko diferenciranje*.

Kao što smo videli u odeljku 1.9, glava I, pod određenim uslovima, jednakost

$$F(x,y)=0 \qquad (x\in D_x,\ y\in D_y)$$

implicitno definiše funkciju

$$x\mapsto y=f(x) \qquad (x\in D_x)$$

za koju je

$$F(x,y)=F(x,f(x))\equiv 0.$$

Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija. Pokazaćemo da se, u slučajevima kada funkcija F ima podesan oblik, primenom teoreme 1.6.1, može odrediti izvod funkcije f, bez njenog eksplicitnog određivanja.

Na primer, ako su $x\mapsto g(x)$ i $y\mapsto h(y)$ diferencijabilne funkcije i ako je

$$F(x,y)\equiv g(x)+h(y)=g(x)+h(f(x)),$$

iz

$$g(x)+h(f(x))=0,$$

diferenciranjem dobijamo

$$g'(x)+h'(f(x))\cdot f'(x)=0, \qquad \text{tj.} \qquad g'(x)+h'(y)y'=0,$$

odakle, ako je $h'(y)\neq 0$, sleduje

$$f'(x)=y'=-\frac{g'(x)}{h'(y)} \qquad (h'(y)\neq 0).$$

Primer 1.6.5. Neka je $F(x,y)\equiv x^2+y^2-1=0$. Diferenciranjem dobijamo $2x+2yy'=0$, odakle sleduje $y'=-x/y$ $(y\neq 0)$. $\triangle$

Primer 1.6.6. Ako je $F(x,y)\equiv e^x\sin x+e^y\cos y-2=0$, posle diferenciranja dobijamo

$$e^x(\sin x+\cos x)+e^y(\cos y-\sin y)y'=0,$$

tj.

$$y'=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{e^y(\sin y-\cos y)} \qquad \Big(y\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Big). \quad \triangle$$

Napomena 1.6.2. Nije teško zaključiti da je moguće odrediti izvod implicitno definisane funkcije $x \mapsto y = f(x)$ i u slučaju kada je ona zadata jednakošću

$$F\Big(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(y)\Big) = 0,$$

ako su funkcije $x \mapsto g_i(x)$ i $x \mapsto h_i(x)$ diferencijabilne i ako je ispunjen uslov

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i'(y) \neq 0.$$

Primer 1.6.7. Ako je jednakošću $F(x,y) = e^x \cos y + e^y \sin x = 0$ definisana diferencijabilna funkcija $x \mapsto y = f(x)$, primenom teoreme 1.6.1 dobijamo

$$y'(e^x \sin y - e^y \sin x) = e^x \cos y + e^y \cos x,$$

tj.

$$y' = f'(x) = \frac{e^x \cos y + e^y \cos x}{e^x \sin y - e^y \sin x}. \quad \triangle$$

1.7. Tablice izvoda elementarnih funkcija

Na osnovu primera iz odeljaka 1.4, 1.5 i 1.6, moguće je sačiniti tabelarni pregled izvoda osnovnih elementarnih funkcija.

$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \log a$
$y = \log x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$
$y = \tanh x$	$y' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$y = \coth x$	$y' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

Primetimo da su isvodi ovih elementarnih funkcija, takođe, elementarne funkcije.

1.8. Izvod funkcija u parametarskom obliku

Neka je $T = [\alpha, \beta]$ i neka su funkcije φ i ψ definisane pomoću

$$x = \varphi(t) \qquad \text{i} \qquad y = \psi(t) \quad (t \in T).$$

Kao što smo videli (odeljak 1.8, glava I), ako je funkcija φ strogo monotona za $t \in T$, tada je pomoću φ i ψ definisana funkcija

$$x \mapsto y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \qquad (x \in \varphi(T)).$$

Isto tako, ako je za $t \in T$ funkcija ψ strogo monotona, funkcije ψ i φ određuju funkciju

$$y \mapsto x = g(y) = \varphi(\psi^{-1}(y)) \qquad (y \in \psi(T)).$$

Posmatrajmo slučaj kada su pomoću funkcija φ i ψ definisane funkcija f ili funkcija g. U svakom slučaju, ako bi bilo koja od funkcija f ili g bila diferencijabilna, sa malom ili većom teškoćom mogli bismo, primenjujući teoremu o izvodu složene funkcije (teorema 1.6.1), da odredimo izvod svake od njih. Međutim, i u tom slučaju, kao i u slučaju kada nije moguće odrediti odgovarajuće analitičke izraze za funkcije f ili g ili kada njihovo određivanje nije potrebno, izvodi funkcija f ili g mogu se naći neposredno.

Teorema 1.8.1. *Ako su φ i ψ diferencijabilne funkcije na segmentu T i ako je $\varphi'(t) \neq 0$, tada je i funkcija f diferencijabilna i važi*

$$y' = f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (t \in T).$$

Dokaz. Kako su φ i ψ diferencijabilne funkcije, važe jednakosti

$$dx = \varphi'(t)dt \qquad \text{i} \qquad dy = \psi'(t)dt$$

na osnovu kojih neposredno sleduje

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (t \in T). \quad \square$$

Teorema 1.8.2. *Ako su φ i ψ diferencijabilne funkcije na segmentu T i ako je $\psi'(t) \neq 0$, tada je i funkcija g diferencijabilna i važi*

$$x' = g'(y) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \qquad (t \in T).$$

Napomenimo da se za izvode $\varphi'(t)$ i $\psi'(t)$ umesto x'_t i y'_t, respektivno, koriste oznake $\dot{x}$ i $\dot{y}$. Tada se y'_x i x'_y označavaju sa $y'_x = \dot{y}/\dot{x}$, kao i $x'_y = \dot{x}/\dot{y}$.

Primer 1.8.1. Funkcijama φ i ψ, određenim pomoću

$$x = \varphi(t) = \cos t \qquad \text{i} \qquad y = \psi(t) = \sin t \quad (0 < t < \pi), \tag{1.8.1}$$

definisana je funkcija

$$x \mapsto y = f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = \sin(\arccos x) \qquad (-1 < x < 1).$$

Kako je $\dot{x} = \varphi'(t) = -\sin t$ i $\dot{y} = \psi'(t) = \cos t$, na osnovu teoreme 1.8.1, sleduje

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\cos t}{\sin t}, \qquad \text{tj.} \qquad y'_x = -\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Naravno, do istog rezultata moguće je doći i na sledeći način: Iz (1.8.1) sleduje $x^2 + y^2 = 1$, odakle, zbog $y > 0$, dobijamo

$$y = \sqrt{1-x^2} \qquad (-1 < x < 1),$$

a odavde sleduje

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{tj.} \quad y'_x = -\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\frac{\cos t}{\sin t}. \quad \triangle$$

Primer 1.8.2. Neka su date funkcije

$$t \mapsto x = \varphi(t) = e^{2t}\cos^2 t \qquad \text{i} \qquad t \mapsto y = \psi(t) = e^{2t}\sin^2 t,$$

gde je $t \neq \pi/4 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Kako je

$$\varphi'(t) = 2e^{2t}\cos t(\cos t - \sin t) \qquad \text{i} \qquad \psi'(t) = 2e^{2t}\sin t(\cos t + \sin t),$$

neposredno dobijamo

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \tan t \cdot \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t} = \tan t \cdot \tan\Big(\frac{\pi}{4} + t\Big). \quad \triangle$$

1.9. Izvodi višeg reda

Kao što smo u odeljku 1.3 naglasili, izvod funkcije $x \mapsto y = f(x)$ je funkcija $x \mapsto g(x) = f'(x)$.

Ako je funkcija g diferencijabilna funkcija u tački x, tj. ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x),$$

kažemo da je g' drugi izvod funkcije f u tački x i označavamo ga sa y'' ili $f''(x)$. Zbog toga se sada za izvode y' i $f'(x)$ kaže da predstavljaju prvi izvod funkcije $x \mapsto y = f(x)$.

Dakle, važi

$$y'' = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x},$$

tj.

$$y'' = (y')' \qquad \text{i} \qquad f''(x) = \big(f'(x)\big)'.$$

Naravno, operatorima $\mathcal{D}$ i d/dx to simbolizujemo sa

$$(1.9.1) \qquad y'' = \mathcal{D}y' = \frac{d}{dx}\,y' \qquad \text{i} \qquad f''(x) = \mathcal{D}f'(x) = \frac{d}{dx}\,f'(x).$$

Kako je $\mathcal{D}y' = \mathcal{D}(\mathcal{D}y)$, tj. $\mathcal{D}f'(x) = \mathcal{D}(\mathcal{D}f(x))$, ako stavimo $\mathcal{D}(\mathcal{D}y) = \mathcal{D}^2 y$, tj. $\mathcal{D}(\mathcal{D}f(x)) = \mathcal{D}^2 f(x)$ umesto (1.9.1), možemo pisati

$$y'' = \mathcal{D}^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad \text{i} \qquad f''(x) = \mathcal{D}^2 f(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\,.$$

Napomenimo da se za drugi izvod neke funkcije kaže da je to njen izvod drugog reda ili izvod reda dva. Isto tako, za funkciju za koju postoji njen drugi izvod kažemo da je dvaput diferencijabilna.

Primer 1.9.1. 1° Ako je $y = x^3$, tada je

$$y' = 3x^2 \qquad \text{i} \qquad y'' = 6x.$$

2° Za $y = \sin x$, imamo

$$y' = \cos x \qquad \text{i} \qquad y'' = -\sin x. \qquad \triangle$$

Prirodno, sada se nameće pitanje postojanja trećeg izvoda, tj. postojanje izvoda trećeg reda neke funkcije. Ako za funkciju $x \mapsto y = f(x)$ postoji treći izvod, označavamo ga sa y''' ili $f'''(x)$.

Pomoću operatora $\mathcal{D}$ i d/dx ovaj izvod označavamo sa

$$y''' = \mathcal{D}^3 y, \qquad \text{tj.} \qquad y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

i

$$f'''(x) = \mathcal{D}^3 f(x), \qquad \text{tj.} \qquad f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}\,.$$

Primer 1.9.2. Kao što smo videli, za funkciju $x \mapsto y = \sin x$ je $y'' = -\sin x$, odakle sleduje da je $y''' = -\cos x$. $\triangle$

Induktivnim pristupom dolazimo do pojma n-tog izvoda, tj. izvoda reda n neke funkcije $x \mapsto y = f(x)$, u oznakama

$$y^{(n)}, \quad \mathcal{D}^n y, \quad \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{i} \quad f^{(n)}(x), \quad \mathcal{D}^n f(x), \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}\,.$$

To je, u stvari, prvi izvod $(n-1)$-og izvoda. Važi, dakle,

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}\,,$$

tj.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)', \qquad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' .$$

Primer 1.9.3. Ako su m i n prirodni brojevi, matematičkom indukcijom lako se dokazuju jednakosti:

$$(x^m)^{(n)} = n!\binom{m}{n}x^{m-n} \quad (n \le m), \qquad (\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad \triangle$$

Definicija 1.9.1. Za funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je n *puta diferencijabilna* u tački $x = a$, ako u tački a ima izvod n-tog reda.

Primer 1.9.4. Funkcija $x \mapsto y = x^n|x|$ $(x \in \mathbb{R})$ je n puta diferencijabilna u tački $x = 0$. Ona u tački $x = 0$ nema izvod reda $n + 1$. $\triangle$

Definicija 1.9.2. Za funkciju za koju postoji izvod proizvoljnog reda, kažemo da je *proizvoljan broj puta* ili *beskonačno puta diferencijabilna funkcija*.

Primer 1.9.5. Funkcije $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ $x \mapsto \arctan x$ su proizvoljan broj broj puta diferencijabilne funkcije. $\triangle$

Napomenimo da, kada je to zbog jednoobraznosti pisanja potrebno, smatramo da je $f(x) = f^{(0)}(x)$.

Neka su $x \mapsto u(x)$ i $x \mapsto v(x)$ n puta diferencijabilne funkcije i neka je $f(x) = u(x)v(x)$. Tada je i funkcija f takođe n puta diferencijabilna. Pokazaćemo da se izvod $f^{(n)}$ može izraziti pomoću izvoda $u^{(k)}$ i $v^{(k)}$ za $k = 0, 1, \ldots, n$.

Uzastopnim diferenciranjem nalazimo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),\\
f''(x) &= (u(x)v(x))'' = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x),\\
f'''(x) &= (u(x)v(x))''' = u'''(x)v(x) + 3u''(x)v'(x)\\
&\qquad\qquad + 3u'(x)v''(x) + u(x)v'''(x).
\end{aligned}$$

Očigledno je da postoji sličnost ovih jednakosti sa binomnom formulom, a matematičkom indukcijom može se dokazati da važi jednakost

$$f^{(n)}(x) = (u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x), \tag{1.9.2}$$

koja je poznata kao *Leibnitzova formula* za n-ti izvod funkcije.

Primer 1.9.6. Za $f(x) = x^2 \cos x$ imamo

$$f'''(x) = x^2 \sin x - 6x \cos x - 6 \sin x. \quad \triangle$$

Nije teško proveriti da za svaku $(m+n)$-puta diferencijabilnu funkciju $x \mapsto y = f(x)$, važe jednakosti

$$f^{(m+n)}(x) = \big(f^{(n)}(x)\big)^{(m)} = \big(f^{(m)}(x)\big)^{(n)}.$$

Sada je moguće govoriti i o izvodu višeg reda funkcija koje su zadate parametarski. Kao što smo u prethodnom odeljku videli, ako je pomoću

$$t \mapsto x = \varphi(t) \qquad \text{i} \qquad t \mapsto y = \psi(t) \qquad (t \in T)$$

definisana funkcija

$$x \mapsto y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \qquad (x \in \varphi(T))$$

i ako su φ i ψ diferencijabilne funkcije, pri čemu je $\varphi'(t) \neq 0$, tada je izvod $y' = f'(x)$ određen pomoću

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,. \tag{1.9.3}$$

Međutim, ako su φ i ψ dvaput diferencijabilne funkcije, pri čemu je $\varphi'(t) \neq 0$, tada primenom teoreme 1.6.1 neposredno sleduje

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx}\,,$$

odakle, na osnovu (1.9.3), dobijamo

$$\begin{aligned} y'' = f''(x) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^2} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3}\,. \end{aligned}$$

Ako stavimo $\varphi''(t) = \ddot{x}$ i $\psi''(t) = \ddot{y}$, tada je

$$y'' = f''(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\,. \tag{1.9.4}$$

Primer 1.9.7. Neka je funkcija $x \mapsto y = f(x)$ zadata parametarski pomoću

$$x = \cos t \qquad \text{i} \qquad y = \sin t \qquad (0 \le t \le \pi).$$

Tada je $\dot{x} = -\sin t$, $\dot{y} = \cos t$ i $\ddot{x} = -\cos t$, $\ddot{y} = -\sin t$, odakle sleduje

$$y' = f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t,$$

a na osnovu (1.9.4)

$$y'' = f''(x) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{-\sin^3 t} = -\frac{1}{\sin^3 t}. \qquad \triangle$$

Primer 1.9.8. Ako je pomoću

$$x = a(t - \sin t) \qquad \text{i} \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \le x \le 2\pi)$$

definisana funkcija $x \mapsto y = f(x)$, tada je

$$\dot{x} = a(1 - \cos t) \qquad \text{i} \qquad \dot{y} = a \sin t,$$

tj.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}\,.$$

Kako je

$$\ddot{x} = a \sin t \qquad \text{i} \qquad \ddot{y} = a \cos t,$$

na osnovu (1.9.4) sleduje

$$y'' = f''(x) = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}\,. \qquad \triangle$$

1.10. Diferencijali višeg reda

Neka je funkcija $x \mapsto y = f(x)$ diferencijabilna u tački x. Kao što smo videli, njen diferencijal određen je pomoću $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$. Za fiksirano x diferencijal je, kao što smo videli, linearna funkcija po Δx. Međutim, ako fiksiramo Δx, diferencijal se može tretirati kao funkcija od x. Dakle,

$$x \mapsto df(x) = f'(x)\Delta x = g(x).$$

Ako je funkcija f dvaput diferencijabilna u tački x, tada je funkcija g diferencijabilna u istoj tački, pa je njen diferencijal (za isto fiksirano Δx) dat sa

$$dg(x) = g'(x)\Delta x = f''(x)\Delta x \cdot \Delta x = f''(x)(\Delta x)^2.$$

Na ovaj način dobijamo tzv. *drugi diferencijal* ili *diferencijal drugog reda* funkcije f u tački x, koji označavamo sa d^2y ili $d^2f(x)$. Dakle,

$$d^2y = d^2f(x) = f''(x)(\Delta x)^2 = f''(x)dx^2,$$

s obzirom da je $dx = \Delta x$.

Za $dy = df(x) = f'(x)dx$ kaže da je *prvi diferencijal* ili *diferencijal prvog reda* funkcije $y = f(x)$.

Primer 1.10.1. Neka je $y = \sin 2x$. Kako je $y' = 2\cos 2x$ i $y'' = -4\sin 2x$, imamo

$$d^2y = y''dx^2 = -4\sin 2x\, dx^2. \quad \triangle$$

Sada se, induktivno, za n puta diferencijabilnu funkciju $x \mapsto y = f(x)$ može uvesti pojam diferencijala reda n, pomoću

$$d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) \qquad (n > 1),$$

odakle nalazimo da je

$$d^ny = d^nf(x) = f^n(x)(\Delta x)^n = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Primer 1.10.2. Za funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \log x$, imamo

$$d^nf(x) = d^n(\sin x) = \sin\Bigl(x + \frac{n\pi}{2}\Bigr)dx^n$$

i

$$d^ng(x) = d^n(\log x) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}\,dx^n. \quad \triangle$$

1.11. Osnovne osobine diferencijabilnih funkcija

Jednu veoma važnu klasu funkcija čine diferencijabilne funkcije. One imaju veliki značaj u matematici i njenim primenama, a naročito u tehnici. Zbog toga ćemo u ovom odeljku ukazati na neke osobine koje poseduju diferencijabilne funkcije.

Teorema 1.11.1. *Neka funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in [a,b])$ dostiže svoju najmanju ili svoju najveću vrednost u tački $\xi \in (a,b)$. Ako je f diferencijabilna funkcija u tački ξ, tada je $f'(\xi) = 0$.*

Dokaz. Neka u tački ξ funkcija f ima najmanju vrednost, što znači da je tada $f(x) \geq f(\xi)$ za svako $x \in [a,b]$. Tada, očigledno, važe nejednakosti

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \quad (x<\xi) \qquad \text{i} \qquad \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \quad (x>\xi). \tag{1.11.1}$$

Kako, na osnovu pretpostavke da je funkcija f diferencijabilna u tački ξ, postoji $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, iz nejednakosti (1.11.1) sleduje da je

$$f'(\xi) \leq 0 \qquad \text{i} \qquad f'(\xi) \geq 0,$$

što znači da je $f'(\xi) = 0$. Nije teško dokazati da isti zaključak važi i za slučaj kada funkcija f u tački ξ dostiže svoju najveću vrednost. $\square$

Primer 1.11.1. Očigledno, za funkciju $x \mapsto f(x) = x^2$ $(-1 \leq x \leq 2)$ važi

$$\min_{-1\leq x\leq 2} f(x) = 0 = f(0) \qquad \text{i} \qquad f'(0) = 0.$$

Dakle, $\xi = 0$. $\triangle$

Primer 1.11.2. Za diferencijabilnu funkciju $x \mapsto g(x) = \sin x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ je

$$\min_{0\leq x\leq 2\pi} g(x) = \min_{0\leq x\leq 2\pi} \sin x = -1 = \sin\frac{3\pi}{2}$$

i

$$\max_{0\leq x\leq 2\pi} g(x) = \max_{0\leq x\leq 2\pi} \sin x = 1 = \sin\frac{\pi}{2},$$

pa na osnovu teoreme 1.11.1 zaključujemo da u intervalu $(0, 2\pi)$ postoje vrednosti $\xi_1 = 3\pi/2$ i $\xi_2 = \pi/2$ tako da važe jednakosti

$$g'\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \text{i} \qquad g'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

koje su očigledne. $\triangle$

Teorema 1.11.1 poznata je kao *Fermatova*[33)] *teorema.*

33) Pierre de Fermat (1601–1665), francuski matematičar.

Teorema 1.11.2. *Neka je* $x \mapsto f(x)$ $(x \in [a,b])$ *neprekidna funkcija i neka je* $f(a) = f(b)$. *Ako je* f *diferencijabilna u intervalu* (a,b), *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a,b)$ *za koju je* $f'(\xi) = 0$.

Dokaz. Kako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, ona ima i svoju najmanju i svoju najveću vrednost na tom segmentu (videti napomenu 2.3.2 i teoremu 2.3.2, obe u III glavi). Ako se ove vrednosti postižu u tačkama a i b, tada, zbog uslova $f(a) = f(b)$, zaključujemo da je funkcija f konstantna na $[a,b]$, pa je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$. U suprotnom slučaju, bar jednu od ovih vrednosti (najmanju ili najveću) funkcija f dostiže u nekoj tački $\xi \in (a,b)$. Kako je f diferencijabilna u tački ξ, na osnovu Fermatove teoreme, zaključujemo da je $f'(\xi) = 0$. $\square$

Primer 1.11.3. 1° Funkcija $x \mapsto x^2$ $(-1 \le x \le 1)$ je diferncijabilna funkcija i važi $f(-1) = f(1) = 1$. Prema tome, funkcija f ispunjava uslove teoreme 1.11.2, pa u intervalu $(-1,1)$ postoji tačka ξ takva da je $f'(\xi) = 0$. Nije teško zaključiti da je $\xi = 0$.

2° Funkcija $x \mapsto g(x) = \sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$ zadovoljava uslove teoreme 1.11.2 jer je diferencijabilna i važi $g(0) = g(2\pi) = 0$. Prema tome, postoji $\xi \in (0,2\pi)$ tako da je $g'(\xi) = \cos\xi = 0$. Primetimo da u ovom slučaju postoje dve takve tačke $\xi_1 = \pi/2$ i $\xi_2 = 3\pi/2$. $\triangle$

U literaturi, teorema 1.11.2 je poznata kao *Rolleova*[34)] *teorema*.

Sledeće tvrđenje je poznato kao *Lagrangeova teorema*:

Teorema 1.11.3. *Neka je funkcija* $x \mapsto f(x)$ *neprekidna na segmentu* $[a,b]$ *i neka je diferencijabilna za svako* $x \in (a,b)$. *Tada u intervalu* (a,b) *postoji bar jedna tačka* ξ *za koju je*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{1.11.2}$$

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto F(x)$ $(x \in [a,b])$, određenu sa

$$F(x) = \big(f(x) - f(a)\big)(b-a) - \big(f(b) - f(a)\big)(x-a).$$

Ovako definisana funkcija F zadovoljava uslove Rolleove teoreme, pa, prema tome, postoji $\xi \in (a,b)$ tako da je $F'(\xi) = 0$.

Kako je

$$F'(x) = f'(x)(b-a) - (f(b) - f(a)),$$

za $x = \xi$, neposredno sleduje tvrđenje teoreme. $\square$

---

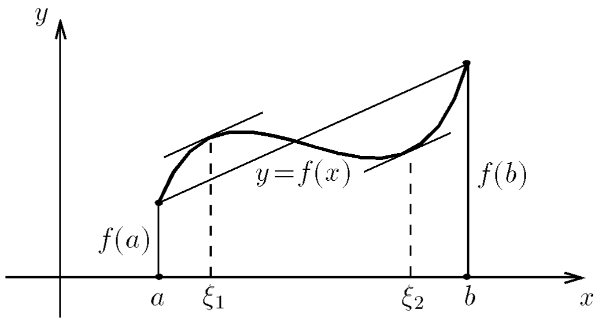
34) Michel Rolle (1652–1719), francuski matematičar.

Lako se zaključuje da je teorema 1.11.3 uopštenje teoreme 1.11.2.

Kako se (1.11.2) može predstaviti i u obliku

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

zaključujemo: ako funkcija f zadovoljava uslove Lagrangeove teoreme tada postoji tačka ξ u kojoj je tangenta na krivu $y = f(x)$ paralelna sečici koja prolazi kroz tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Geometrijska interpretacija ove činjenice prikazana je na slici 1.11.1.



Sl. 1.11.1

Primetimo da u ovom slučaju postoje dve takve tačke ξ_1 i ξ_2.

Primer 1.11.4. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto \sin x$. Na osnovu teoreme 1.11.3 sleduje da za svako a i b $(a < b)$ postoji ξ iz intervala (a, b) tako da je

$$\sin b - \sin a = (b-a)\cos\xi.$$

Primetimo, ovom prilikom, da iz poslednje jednakosti neposredno sleduje

$$|\sin b - \sin a| = |b-a||\cos\xi|,$$

odakle, zbog $|\cos\xi| \le 1$, zaključujemo da za svako a i b važi nejednakost

$$|\sin b - \sin a| \le |b-a|. \quad \triangle$$

Nije teško zaključiti da je za funkciju $x \mapsto f(x) = \text{const}$, uvek $f'(x) = 0$. Međutim, važi i obrnuto tvrđenje:

Teorema 1.11.4. *Ako za svako $x \in (a, b)$ važi $f'(x) = 0$, funkcija $x \mapsto f(x)$ je konstanta.*

Dokaz. Neka je $(x_1, x_2) \subset (a, b)$. Na osnovu Lagrangeove teoreme imamo

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2),$$

odakle, zbog uslova da je $f'(x) = 0$ za svako x iz intervala (a, b), zaključujemo da je $f(x_2) - f(x_1) = 0$, tj. važi $f(x_2) = f(x_1)$ za bilo koje $x_1, x_2 \in (a, b)$, što znači da je funkcija f konstanta. $\square$

Neposredna posledica teoreme 1.11.4 je sledeći rezultat:

Teorema 1.11.5. *Neka su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ $(x \in (a, b))$ diferencijabilne funkcije za koje je $f'(x) = g'(x)$. Tada je $f(x) - g(x) = \text{const}$ za svako x iz (a, b).*

Teorema 1.11.5, u stvari, kazuje da ako dve funkcije imaju jednake izvode na otvorenom intervalu (a, b), onda se one na tom intervalu razlikuju za konstantu.

Primer 1.11.5. Neka su

$$x \mapsto f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} \qquad (x \neq 1) \qquad \text{i} \qquad x \mapsto g(x) = \arctan x.$$

Odredićemo funkcionalnu zavisnost između f i g.

Kako je

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\Big(\arctan \frac{1+x}{1-x}\Big) = \frac{1}{1 + \Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)^2} \cdot \frac{d}{dx}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = \frac{1}{1+x^2} = g'(x),$$

zbog

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0,$$

na osnovu teoreme 1.11.5 zaključujemo da je $f(x) - g(x) = C$ na svakom intervalu (a, b) na kome su obe funkcije diferencijabilne. Kako tačka $x = 1$ ne pripada domenu funkcije f, zaključujemo da mora biti

$$f(x) - g(x) = C_1, \quad x \in (-\infty, 1) \qquad \text{i} \qquad f(x) - g(x) = C_2, \quad x \in (1, +\infty).$$

Konstante C_1 i C_2 možemo odrediti na sledeći način

$$\begin{aligned} C_1 &= f(0) - g(0) = \arctan \frac{1+0}{1-0} - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}, \\ C_2 &= \lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to +\infty} \Big(\arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x\Big) \\ &= \arctan(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}. \quad \triangle \end{aligned}$$

Ako u (1.11.2) stavimo $a = x$ i $b = x + \Delta x$, dobijamo jednakost

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x, \tag{1.11.3}$$

koja je poznata kao *formula konačnog priraštaja* funkcije f.

Teorema 1.11.6. *Neka su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ neprekidne funkcije na $[a, b]$ i neka su obe diferencijabilne za svako $x \in (a, b)$. Ako $g'(x)$ nije nula ni za jedno $x \in (a, b)$, tada u intervalu (a, b) postoji tačka ξ takva da važi jednakost*

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\big(g(b) - g(a)\big). \tag{1.11.4}$$

Dokaz. Funkcija $x \mapsto F(x)$ $(x \in [a, b])$, određena sa

$$F(x) = \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)\big(g(x) - g(a)\big),$$

zadovoljava uslove teoreme 1.11.2, što znači da postoji tačka $\xi \in (a, b)$, takva da je $F'(\xi) = 0$. Kako je $F'(x) = f'(x)\big(g(b) - g(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)g'(x)$, za $x = \xi$, sleduje tvrđenje teoreme. $\square$

Napomena 1.11.1. Zbog uslova $g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ nije moguć slučaj da je $g(b) = g(a)$ jer bi tada na osnovu Rolleove teoreme postojala bar jedna tačka u kojoj bi prvi izvod funkcije g bio jednak nuli. Zbog toga se jednakost (1.11.4) često piše i u obliku

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Za $g(x) = x$, jednakost (1.11.4) postaje (1.11.2), pa zaključujemo da je teorema 1.11.6 jedna generalizacija Lagrangeove teoreme.

Teorema 1.11.6 poznata je kao *Cauchyeva teorema*.

Primer 1.11.6. Neka su funkcije f i g kao u primeru 1.11.5. Primenom Cauchyeve teoreme može se, takođe, odrediti veza između f i g. Kako je (videti primer 1.11.5) $f'(x) = g'(x)$, na osnovu Cauchyeve teoreme važi

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = 1,$$

kada $x, a \in (-\infty, 1)$ ili $x, a \in (1, +\infty)$.

U slučaju $x \in (-\infty, 1)$, uzimajući, na primer, $a = 0$ $(f(0) = \arctan 1 = \pi/4$ i $g(0) = \arctan 0 = 0)$, dobijamo $f(x) - g(x) = f(0) - g(0) = \pi/4$.

Ako $x \in (1, +\infty)$, možemo uzeti, na primer, $a = 2$. Tada važi $f(x) - g(x) = f(2) - g(2) = \arctan(-3) - \arctan 2 = -(\arctan 3 + \arctan 2) = -3\pi/4$. $\triangle$

U svim prethodnim teoremama tačka ξ se može predstaviti u obliku $\xi = a + \theta(b - a)$, gde je θ neki broj između nule i jedinice, pa se, na primer, formula (1.11.4) može predstaviti i u obliku

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(a + \theta(b - a))}{g'(a + \theta(b - a))} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Sada ćemo dokazati jedno važno tvrđenje koje je u literaturi poznato kao *L'Hospitalova*[35] *teorema*. Iz praktičnih razloga, ovo tvrđenje ćemo formulisati i dokazati kroz naredne četiri teoreme.

Teorema 1.11.7. *Neka su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ diferencijabilne funkcije u okolini $\overset{\circ}{U}(a)$ tačke $a \in \mathbb{R}$, neka $g'(x)$ nije nula ni za jedno x iz $\overset{\circ}{U}(a)$ i neka je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0. \tag{1.11.5}$$

Tada, ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x)$, postoji i granična vrednost $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x)$ i važi jednakost

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. Pre svega, zbog jednakosti (1.11.5) možemo definisati funkcije $\bar{f}$ i $\bar{g}$ pomoću

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overset{\circ}{U}(a), \\ 0, & x = a, \end{cases} \qquad \bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \overset{\circ}{U}(a), \\ 0, & x = a, \end{cases}$$

koje su neprekidne za svako $x \in U(a)$, a diferencijabilne, kao i funkcije f i g, za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Kako je $\bar{f}\,'(x) = f'(x)$ i $\bar{g}\,'(x) = g'(x) \neq 0$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, primenom Cauchyeve teoreme na segment $[a, x]$ ili na segment $[x, a]$ dobijamo

$$\frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(a)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(a)} = \frac{\bar{f}'(\xi)}{\bar{g}'(\xi)},$$

[35] Guillaume Fransoi Antoine de L'Hospital (1661–1704), francuski matematičar.

tj.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,, \tag{1.11.6}$$

gde je $\xi = a + \theta(x-a)$ i $0 < \theta < 1$.

Kada x teži ka a mora i ξ težiti ka a, pa ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, postoji i granična vrednost $\lim\limits_{\xi\to a} f'(\xi)/g'(\xi)$ i one su jednake. Na osnovu toga, zbog (1.11.6), sleduje

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \quad \square$$

Primer 1.11.7. Primenom teoreme 1.11.7 neposredno dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\log 2}{\cos x} = \log 2. \quad \triangle$$

Da bi i formulacija i dokaz naredne teoreme bili jednostavniji, smatraćemo da $\overset{\circ}{U}(\infty,\delta)$ predstavlja jednu od okolina $\overset{\circ}{U}(-\infty,\delta)$ ili $\overset{\circ}{U}(+\infty,\delta)$ i da, respektivno, oznaka $x\to\infty$ znači da ili $x\to-\infty$ ili $x\to+\infty$.

Teorema 1.11.8. *Neka su $x\mapsto f(x)$ i $x\mapsto g(x)$ diferencijabilne funkcije u okolini $\overset{\circ}{U}(\infty,\delta)$, neka $g'(x)$ nije nula ni za jedno x iz $\overset{\circ}{U}(\infty,\delta)$ i neka je*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Tada, ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)/g'(x)$, postoji i granična vrednost $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ i važi jednakost

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dokaz. Definišimo funkcije F i G pomoću

$$F(t) = f(1/t) \qquad \text{i} \qquad G(t) = g(1/t).$$

Tada postoji probodena okolina $\overset{\circ}{U}(0)$ tačke $t=0$ u kojoj funkcije F i G zadovoljavaju uslove prethodne teoreme. Zato imamo

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}\,,$$

odakle, stavljanjem $x = 1/t$, zaključujemo da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} . \quad \square$$

Primer 1.11.8. Primenjujući teoremu 1.11.8 neposredno dobijamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(1/x)}{e^{1/x}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1/x^2)\cosh(1/x)}{(-1/x^2)e^{1/x}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh(1/x)}{e^{1/x}} = \frac{1}{1} = 1. \quad \triangle$$

Teorema 1.11.9. *Neka su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ diferencijabilne funkcije u okolini $\mathring{U}(a)$, neka je izvod $g'(x)$ različit od nule za svako $x \in \mathring{U}(a)$ i neka je*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad i \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Tada, ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, postoji i granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ i važi jednakost

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dokaz. Neka je $\alpha \in \mathring{U}(a)$ i neka je $a < \alpha$. Tada, za svako $x \in (a, \alpha)$, funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ ispunjavaju uslove Cauchyeve teoreme. Prema tome, postoji $\xi \in (x, \alpha)$ tako da je

$$f(x) - f(\alpha) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\big(g(x) - g(\alpha)\big) \qquad (x < \xi < \alpha),$$

odakle dobijamo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(\alpha)}{g(x)} - \frac{g(\alpha)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (x < \xi < \alpha). \tag{1.11.7}$$

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_1 > 0$, takvo da je

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (0 < x - a < \delta_1). \tag{1.11.8}$$

Ako izaberemo α tako da je $0 < \alpha - a < \delta_1$, tada je i $0 < \xi - a < \delta_1$, pa važi nejednakost

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{1.11.9}$$

Na osnovu učinjene pretpostavke da je $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, tj. $\lim\limits_{x\to\infty} 1/g(x) = 0$, zaključujemo da postoji $\delta_2 > 0$ tako da za $0 < x - a < \delta_2$ važe nejednakosti

$$\left|\frac{f(\alpha)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{i} \qquad \left|\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3A+\varepsilon}\,. \tag{1.11.10}$$

Neka je $0 < x - a < \min(\delta_1, \delta_2)$. Kako je po pretpostavci $g'(x) \neq 0$, iz (1.11.7), na osnovu nejednakosti (1.11.8), (1.11.9) i (1.11.10), neposredno sleduje

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| &= \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A + \frac{f(\alpha)}{g(x)} - \frac{g(\alpha)}{g(x)}\cdot\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \\
&\le \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| + \left|\frac{f(\alpha)}{g(x)}\right| + \left|\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right|\cdot\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3A+\varepsilon}\cdot\Bigl(A + \frac{\varepsilon}{3}\Bigr) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da važi jednakost $\lim\limits_{x\to a+} f(x)/g(x) = A$.

Na isti način, ako bismo uzeli da je $\alpha \in \overset{\circ}{U}(a)$ takvo da je $\alpha < a$, moglo bi se dokazati da važi i jednakost $\lim\limits_{x\to a-} f(x)/g(x) = A$. $\square$

Primer 1.11.9. Odredićemo graničnu vrednost funkcije $x \mapsto (\log x)/e^{1/x}$ $(x \neq 0)$ kada $x \to 0$. Na osnovu L'Hospitalove teoreme dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{e^{1/x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{(-1/x^2)e^{1/x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{1/x}} = 0. \qquad \triangle$$

Sledeća teorema dokazuje se slično teoremi 1.11.8, pri čemu se simbol ∞ takođe koristi prema potrebi: kao simbol $+\infty$ ili $-\infty$.

Teorema 1.11.10. *Neka su* $x \mapsto f(x)$ *i* $x \mapsto g(x)$ *diferencijabilne funkcije u okolini* $\overset{\circ}{U}(\infty, \delta)$, *neka je izvod* $g'(x)$ *različit od nule za svako* x *iz* $\overset{\circ}{U}(\infty, \delta)$ *i neka je*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad i \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$

Tada, ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)/g'(x)$, *postoji i granična vrednost* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ *i važi jednakost*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Primer 1.11.10. 1° Za funkciju $x \mapsto (\log x)/x \quad (x > 0)$ imamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

2° Za funkciju je $x \mapsto e^x/x$ $(x \neq 0)$, na osnovu teoreme 1.11.10, sleduje

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty. \qquad \triangle$$

Ako se prilikom primene L'Hospitalove teoreme naiđe na teškoće kod određivanja granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, a funkcije f' i g' zadovoljavaju uslove L'Hospitalove teoreme, tada se opet može primeniti L'Hospitalova teorema, tako što će se potražiti granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} f''(x)/g''(x)$. Ako ona postoji, tada je očigledno

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}\,.$$

Naravno, ako su ispunjeni odgovarajući uslovi i ako za to postoji potreba, ovaj se postupak može nastaviti i za traženje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$, i tako dalje. Prema tome, L'Hospitalovu teoremu moguće je primenjivati više puta.

Primer 1.11.11. Neka je $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ $\quad (x \neq 0)$. Uzastopnom primenom L'Hospitalove teoreme dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2. \qquad \triangle\end{aligned}$$

Primer 1.11.12. Uzastopnom primenom L'Hospitalove teoreme, jedno za drugim dobijamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} &= \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\cdot\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\Big((1+x)^{1/x}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2}\Big)\\
&= \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2}\\
&= e\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\log(1+x)}{2x} = -e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{2} = -\frac{e}{2}. \quad\triangle
\end{aligned}
$$

Kao što smo videli, L'Hospitalova teorema se pod određenim uslovima može primeniti za traženje graničnih vrednosti funkcija oblika $f(x)/g(x)$, kada $x\to a$ ($a\in\overline{\mathbb{R}}$), i to u slučajevima kada istovremeno važe jednakosti

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

ili

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty.$$

To su slučajevi koji se simbolički mogu predstaviti sa $\dfrac{0}{0}$, ili sa $\dfrac{\infty}{\infty}$, a za koje kažemo da su *neodređeni izrazi*. U tom smislu, ima i drugih neodređenih izraza. Tako su i

$$\infty-\infty, \qquad 0\cdot\infty, \qquad 1^{\infty}, \qquad 0^0, \qquad \infty^0$$

neodređeni izrazi kojima se, respektivno, simbolizuju granične vrednosti

$$\lim_{x\to a}\big(f_1(x)-f_2(x)\big), \qquad \lim_{x\to a} g(x)f_1(x) \tag{1.11.11}$$

i

$$\lim_{x\to a}\big(h(x)\big)^{f_1(x)}, \qquad \lim_{x\to a}\big(g(x)\big)^{f(x)}, \qquad \lim_{x\to a}\big(f_1(x)\big)^{g(x)}, \tag{1.11.12}$$

pri čemu za funkcije f_1, f_2, g, f, h važe sledeće jednakosti

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a} f_2(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 1.$$

Jasno je da se L'Hospitalova teorema ne može direktno primeniti za određivanje graničnih vrednosti (1.11.11) i (1.11.12). Međutim, ako stavimo

$$f_1(x) = \frac{1}{1/f_1(x)} = \frac{1}{F_1(x)} \qquad \text{i} \qquad f_2(x) = \frac{1}{1/f_2(x)} = \frac{1}{F_2(x)}$$

dobijamo

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{F_2(x) - F_1(x)}{F_1(x)F_2(x)},$$

gde $F_1(x)$ i $F_2(x)$ teže nuli kada $x \to a$, pa se traženje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}\bigl(f_1(x) - f_2(x)\bigr)$ svodi na određivanje granične vrednosti

$$\lim_{x\to a} \frac{F_2(x) - F_1(x)}{F_1(x)F_2(x)},$$

na koju se, pod određenim uslovima, može primeniti L'Hospitalova teorema.

Primer 1.11.13. Za graničnu vrednost

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\Bigr).$$

imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\Bigl(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\Bigr) &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0. \quad \triangle\end{aligned}$$

Ostali slučajevi su „proizvodi" i „stepeni" i oni se mogu svesti na jedan od prethodna dva slučaja $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$ jednostavnom transformacijom odgovarajućih funkcionalnih izraza. Izraz $0 \cdot \infty$ može se lako transformisati u bilo koji od izraza oblika $\dfrac{0}{0}$ ili $\dfrac{\infty}{\infty}$. Isto tako, umesto da se određuju granične vrednosti koje simbolizujemo sa 1^∞, 0^0, ∞^0, moguće ih je tražiti na taj način što bi se prethodno odredile granične vrednosti njihovih logaritama jer se svaki izraz oblika $F(x)^{G(x)}$ logaritmovanjem svodi na proizvod.

Ilustrovaćemo ova razmatranja narednim primerima.

Primer 1.11.14. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}$. Kako je $\log f(x) = \dfrac{1}{1-\cos x} \cdot \log \dfrac{\sin x}{x}$, imamo

$$\lim_{x\to 0} \log f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log \sin x - \log x}{1-\cos x},$$

odakle, uzastopnom primenom L'Hospitalove teoreme, dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \log f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sin x + 2x\cos x} \\ &= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos x - 2x \sin x} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Važi, dakle, $\log \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1/3$, tj. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^{-1/3}$. $\triangle$

Primer 1.11.15. Neka je $f(x) = (x + 2^x)^{1/x}$ i neka $x \to +\infty$. Kako je

$$\log f(x) = \frac{1}{x} \log(x + 2^x),$$

uzastopnom primenom L'Hospitalove teoreme jedno za drugim dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \Big(\log f(x)\Big) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+2^x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{1+2^x \log 2}{x+2^x}}{1} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1+2^x \log 2}{x+2^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x \log 2 \cdot \log 2}{1+2^x \log 2} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x \log 2 \cdot \log 2 \cdot \log 2}{2^x \log 2 \cdot \log 2} = \log 2,\end{aligned}$$

odakle sleduje

$$\log\Big(\lim_{x\to +\infty} f(x)\Big) = \log 2, \qquad \text{tj.} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2. \quad \triangle$$

Bez namere da umanjujemo značaj L'Hospitalove teoreme, pokazaćemo na sledećim primerima da njena primena nije uvek baš tako efikasna.

Primer 1.11.16. Neka je $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}$. Uzastopnom primenom L'Hospitalove teoreme imamo

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2x\sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - \sin x}{6\cos x - 6x\sin x + x^2\cos x} = \frac{1}{3}.$$

Međutim, već posle prve primene L'Hospitalove teoreme, neposredno dobijamo

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2 + \dfrac{x}{\sin x} \cos x} = \frac{1}{3}. \quad \triangle$$

Primer 1.11.17. Graničnu vrednost $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ nije moguće odrediti primenom L'Hospitalove teoreme. Naime, posle dve njene primene dobijamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Međutim, neposredno sleduje

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1. \quad \triangle$$

Primer 1.11.18. Za određivanje granične vrednosti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \cos x},$$

primenom L'Hospitalove teoreme dobijamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \cos x}{2x + \sin x},$$

a dalja primena L'Hospitalove teoreme nije moguća jer granična vrednost

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}$$

ne postoji.

Međutim, neposredno se dobija

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + (\sin x)/x^2}{1 - (\cos x)/x^2} = 1. \quad \triangle$$

1.12. Taylorova formula

Jedna od fundamentalnih teorema u matematičkoj analizi i koja ima velike primene u mnogim oblastima nauke i tehnike je tzv. *Taylorova*[36] *teorema*, koju ćemo u ovom odeljku prvo dokazati, a zatim i detaljnije razmotriti.

Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ n puta diferencijabilna u tački $x = a$. Za *polinomsku funkciju*[37] $x \mapsto T_n(x)$ određenu pomoću

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{1.12.1}$$

kažemo da je *Taylorov polinom* koji u tački $x = a$ odgovara funkciji f.

Napomenimo da se za $a = 0$ (1.12.1) svodi na tzv. *Maclaurinov*[38] *polinom*

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n.$$

Nije teško zaključiti da za Taylorov polinom $x \mapsto T_n(x)$, definisan pomoću (1.12.1) važe jednakosti

$$T_n(a) = f(a), \quad T_n'(a) = f'(a), \ \ldots\ , \ T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \tag{1.12.2}$$

Obrnuto, polinomska funkcija

$$x \mapsto P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n \tag{1.12.3}$$

za koju je

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \ \ldots\ , \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

poklapa se sa Taylorovim polinomom (1.12.1). Zaista, diferenciranjem polinomske funkcije (1.12.3) nalazimo da je

$$P^{(k)}(a) = k!c_k = f^{(k)}(a) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

tj. $P(x) \equiv T_n(x)$.

---

[36] Brook Taylor (1685–1731), engleski matematičar.

[37] Detaljnije o polinomima može se naći u [15, glava IV].

[38] Colin Maclaurin (1698–1746), škotski matematičar.

Jednakosti (1.12.2) ukazuju da se funkcija f i njen Taylorov polinom T_n „slično ponašaju“ tako da se $T_n(x)$ može uzeti kao aproksimacija za $f(x)$ u okolini tačke $x = a$.

Zbog toga ćemo, nadalje, razmotrati razliku $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Na primer, za $n = 1$ imamo $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, pa je

$$R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a).$$

Kako $R_1(x)$ predstavlja razliku priraštaja funkcije i njenog diferencijala u tački $x = a$, imamo da je

$$R_1(x) = o(x - a) \qquad (x \to a).$$

U opštem slučaju važi:

Teorema 1.12.1. *Neka je $x \mapsto f(x)$ n puta diferencijabilna u tački $x = a$ i neka je $x \mapsto T_n(x)$ njen Taylorov polinom u tački $x = a$. Tada je*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = o\left((x - a)^n\right) \qquad (x \to a). \tag{1.12.4}$$

Dokaz. Funkcija $x \mapsto R_n(x)$, definisana pomoću (1.12.4), n puta je diferencijabilna u tački $x = a$, a pri tome važe jednakosti

$$R_n(a) = R_n'(a) = \cdots = R_n^{(n)}(a) = 0. \tag{1.12.5}$$

Uzastopnom primenom L'Hospitalove teoreme dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} \\
&\;\vdots \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} \\
&= \frac{R_n^{(n)}(a)}{n!} = 0,
\end{aligned}$$

što, zapravo, znači da je $R_n(x)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na takođe beskonačno malu veličinu $(x-a)^n$, kada $x \to a$. Dakle, važi jednakost (1.12.4). $\square$

Naglasimo da se $R_n(x)$ naziva *ostatak* i da je pomoću (1.12.4) dat tzv. *Peanov*[39] *oblik ostatka*. Tvrđenje 1.12.1 poznato je kao *Taylorova teorema*, a jednakost (1.12.4), tj. jednakost

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n) \qquad (x \to a) \tag{1.12.6}$$

kao *Taylorova formula*.

Primer 1.12.1. Za funkciju $x \mapsto e^x$ važe sledeće Taylorove formule:

$$1^\circ \quad e^x = 1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0),$$

$$2^\circ \quad e^x = 1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + o(x^n) \quad (x \to 0),$$

$$3^\circ \quad e^x = 2\Big(1 + \frac{1}{1!}(x - \log 2) + \frac{1}{2!}(x-\log 2)^2\Big) + o((x-\log 2)^2).$$

Poslednja formula važi kada $x \to \log 2$. $\triangle$

Primer 1.12.2. Neka je $f(x) = \sqrt{x}$. Tada je:

$$1^\circ \quad \sqrt{x} = 1 + \frac{1/2}{1!}\,(x-1) - \frac{1/4}{2!}\,(x-1)^2 + o((x-1)^2) \quad (x \to 1),$$

$$2^\circ \quad \sqrt{x} = 2 + \frac{1/4}{1!}\,(x-4) + o(x-4) \quad (x \to 4). \quad \triangle$$

Primer 1.12.3. Neka su T_5, T_6, T_7, T_8 Taylorovi polinomi koji odgovaraju funkciji $x \mapsto \sin x$ u tački $x = 0$. Kako je $T_6(x) \equiv T_5(x)$ i $T_8(x) \equiv T_7(x)$, nije teško zaključiti da važe sledeće Taylorove formule:

$$1^\circ \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \quad (x \to 0),$$

$$2^\circ \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8) \quad (x \to 0),$$

ali i formula

$$3^\circ \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (x \to 0).$$

Isto tako imamo da je

$$4^\circ \quad \sin x = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\Big(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\Big) \quad (x \to \pi/2).$$

---

[39] Giuseppe Peano (1858–1932), italijanski matematičar.

Na sličan način dobijamo Taylorove formule:

$$5^\circ \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \quad (x \to 0),$$

$$6^\circ \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7) \quad (x \to 0),$$

$$7^\circ \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad (x \to 0),$$

kao i formulu

$$8^\circ \quad \cos x = -1\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2!}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 - \frac{1}{3!}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^3 + o\Big(\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^4\Big),$$

kada $x \to \pi/2$.

Za stepenu i logaritamsku funkciju važe formule:

$$9^\circ \quad (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0),$$

$$10^\circ \quad \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0). \qquad \triangle$$

Napomena 1.12.1. Iz formule 9°, za $\alpha = n$, neposredno sleduje poznata binomna formula

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

jer je za $k > n$ uvek $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$.

Isto tako, iz formule 9°, za $\alpha = -1$ i $\alpha = 1/2$, dobijamo formule

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (x \to 0)$$

i

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1!!}{4!!}x^2 + \frac{3!!}{6!!}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

Za $\alpha = -1/2$, iz formule 9°, dobijamo Taylorovu formulu

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1!!}{2!!}x + \frac{3!!}{4!!}x^2 - \frac{5!!}{6!!}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

Za n puta diferencijabilnu funkciju f u tački $x = a$ Taylorov polinom T_n je jedinstven. Naime, ako je P_n neki polinom stepena n za koji važi

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \qquad (x \to a), \tag{1.12.7}$$

tada se može dokazati da je $P_n \equiv T_n$. Zaista, na osnovu (1.2.6) i (1.2.7) zaključujemo da je

$$P_n(x) - T_n(x) = o((x-a)^n) \qquad (x \to a),$$

tj.

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

što je moguće samo ako je $P_n(x) \equiv T_n(x)$.

Dakle, ako na bilo koji način nađemo polinom $P_n(x)$ za koji važi (1.12.7), tada je on Taylorov polinom za n puta diferencijablinu funkciju f u tački $x = a$.

Primer 1.12.4. Na osnovu formule 2° iz primera 1.12.1 važi

$$e^{2x} = 1 + \frac{1}{1!}\,(2x) + \frac{1}{2!}\,(2x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,(2x)^n + o((2x)^n) \qquad (x \to 0),$$

tj.

$$e^{2x} = 1 + \frac{2}{1!}\,x + \frac{2^2}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{2^n}{n!}\,x^n + o(x^n) \qquad (x \to 0).$$

Isto tako je

$$e^{x^2} = 1 + \frac{1}{1!}\,(x^2) + \frac{1}{2!}\,(x^2)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,(x^2)^n + o((x^2)^n) \qquad (x \to 0),$$

tj. važi

$$e^{x^2} = 1 + \frac{1}{1!}\,x^2 + \frac{1}{2!}\,x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^{2n} + o(x^{2n}) \qquad (x \to 0). \quad \triangle$$

Pretpostavimo sada da je poznata Taylorova formula koja u tački $x = a$ odgovara funkciji $x \mapsto f'(x)$, tj. neka je

$$f'(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad (x \to a),$$

gde su a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ poznati koeficijenti. S obzirom da ta formula ima oblik

$$f'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

kada $x \to a$, upoređujući ove formule, nije teško zaključiti da za $k = 0, 1, \dots, n-1$ važe jednakosti

$$\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} = a_k, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} = \frac{a_k}{k+1}.$$

Stoga, Taylorova formula koja u tački $x = a$ odgovara funkciji f ima oblik

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \\ &= f(a) + \frac{a_0}{1}(x-a) + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}). \end{aligned}$$

U sledećim primerima koristićemo ovaj postupak za dobijanje Taylorovog razvoja.

Primer 1.12.5. Neka je $f(x) = \log(1+x)$. Kako je $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ i kako je

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (x \to 0),$$

na osnovu prethodnog zaključujemo da važi formula

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}) \qquad (x \to 0).$$

Primer 1.12.6. Iz Taylorove formule

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) \qquad (x \to 0),$$

na osnovu izloženog dobijamo da, kada $x \to 0$, važi formula

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}). \qquad \triangle$$

Primer 1.12.7. Kako je

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) = \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

na osnovu 9° iz primera 1.12.3 imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 - \tbinom{-1/2}{1}x + \tbinom{-1/2}{2}x^2 - \tbinom{-1/2}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \tbinom{-1/2}{n}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + \frac{1!!}{2!!}x + \frac{3!!}{4!!}x^2 + \frac{5!!}{6!!}x^3 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n), \end{aligned}$$

kada $x \to 0$. Odavde neposredno dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1!!}{2!!}x^2 + \frac{3!!}{4!!}x^4 + \frac{5!!}{6!!}x^6 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + o(x^{2n}) \quad (x \to 0).$$

Primenom izloženog postupka, može se zaključiti da važi

$$\arcsin x = x + \frac{1!!}{3!}\,x^3 + \frac{3!!}{5!}\,x^5 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad (x \to 0). \qquad \triangle$$

Obrnuto, iz Taylorove formule za funkciju f može se odrediti odgovarajuća Taylorova formula za funkciju f' neposrednim diferenciranjem.

Primer 1.12.8. Kako je

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o((x^{2n+2})) \qquad (x \to 0),$$

neposredno dobijamo

$$(\sin x)' = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad (x \to 0).$$

Isto tako, iz Taylorove formule

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \qquad (x \to 0),$$

sleduje

$$\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + o(x^{n-1}) \qquad (x \to 0). \qquad \triangle$$

Napomena 1.12.2. Navedene mogućnosti određivanja odgovarajućih Taylorovih formula znače, u stvari, da je za svaku funkciju njen Taylorov polinom uočenog stepena jedinstven.

Naredne tri teoreme dokazaćemo pod dodatnom pretpostavkom da funkcija f u nekoj okolini tačke a $(x \in U(a,\delta))$ ima ograničen $(n+1)$-vi izvod $f^{(n+1)}(x)$.

Teorema 1.12.2. *Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ zadovoljava uslove Taylorove teoreme u tački $x = a$ i ako za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ ima ograničen $(n+1)$-vi izvod $f^{(n+1)}(x)$, tada u okolini $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ postoji tačka ξ tako da važi jednakost*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}\,(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p \qquad (p > 0). \tag{1.12.7}$$

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $t \mapsto \varphi(t)$ definisanu pomoću

$$\varphi(t) = f(x) - \Big(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big),$$

koja je, očigledno, diferencijabilna i za čiji izvod važi jednakost

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = &- f'(t) - \Big(f''(t)(x-t) - f'(t)\Big)\\ &- \Big(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t)\Big)\\ &\vdots\\ &- \Big(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\Big),\end{aligned}$$

tj.

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Neka je $x \mapsto \psi(t)$ $(t \in U(a,\delta))$ za sada proizvoljna diferencijabilna funkcija za koju je $\psi'(t) \neq 0$. Kako je $\varphi(x) = 0$ i $\varphi(a) = R_n(x)$, primenom Cauchyeve teoreme, neposredno zaključujemo da važi jednakost

$$\frac{R_n(x)}{\psi(x)-\psi(a)} = -\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)} = -\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

gde je $a < \xi < x$ ili $x < \xi < a$, tj. $\xi = a + \theta(x-a)$ $(0 < \theta < 1)$, što znači da i tačka ξ, takođe, pripada $\mathring{U}(a,\delta)$.

Na osnovu prethodnog dobijamo da je

$$R_n(x) = -\frac{\psi(x)-\psi(a)}{\psi'(\xi)} \cdot \varphi'(\xi) \qquad (\xi \in \mathring{U}(a,\delta)),$$

tj.

$$R_n(x) = \frac{\psi(x)-\psi(a)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad (\xi \in \mathring{U}(a,\delta)). \tag{1.12.8}$$

Kako je po pretpostavci $f^{(n+1)}$ ograničena funkcija, očigledno $R_n(x) \to 0$, kada $x \to a$.

Ako stavimo $\psi(t) = (x-t)^p$ $(p > 0)$, jednakost (1.12.8) postaje (1.12.7), čime je teorema dokazana. $\square$

Za ostatak $R_n(x)$ iskazan pomoću (1.12.7) kažemo da je *Schlömlich*[40)]-*Rocheov*[41)] *oblik ostatka.*

Napomenimo da se ovom obliku može dati nešto drugačija forma uzimajući da je $\xi = a + \theta(x-a)$, gde je $0 < \theta < 1$. Tada je $x - \xi = x - a - \theta(x-a) = (1-\theta)(x-a)$, pa jednakost (1.12.7) postaje

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!p}\,(1-\theta)^{n+1-p}(x-a)^{n+1}, \tag{1.12.9}$$

gde je $0 < \theta < 1$.

Teorema 1.12.3. *Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ zadovoljava uslove Taylorove teoreme u tački $x = a$ i ako za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ ima ograničen $(n+1)$-vi izvod $f^{(n+1)}(x)$, tada u okolini $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ postoji tačka ξ tako da važi jednakost*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}. \tag{1.12.10}$$

Dokaz. Ako u (1.12.7) stavimo $p = n+1$, tvrđenje teoreme sleduje neposredno. $\square$

Za ostatak $R_n(x)$ određen pomoću (1.12.10) kažemo da je *Lagrangeov oblik ostatka*. Napomenimo da u tom slučaju Taylorova formula ima oblik

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Za $n = 0$, dobijamo jednakost

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a),$$

koja predstavlja Lagrangeovu formulu. Dakle, teorema 1.12.3 je jedno uopštenje Lagrangeove teoreme 1.11.4.

---

40) Oscar Schlömlich (1864–1933), nemački matematičar.
41) Edwards Albert Roche (1839–1883), francuski astronom i matematičar.

Teorema 1.12.4. *Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ zadovoljava uslove Taylorove teoreme u tački $x = a$ i ako za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ ima ograničen $(n+1)$-vi izvod $f^{(n+1)}(x)$, tada za $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ važi jednakost*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))}{n!}\,(1 - \theta)^n (x - a)^{n+1}, \tag{1.12.11}$$

gde je $0 < \theta < 1$.

Dokaz. Ako u (1.12.9) stavimo $p = 1$, dobijamo jednakost (1.12.11). □

Za ostatak $R_n(x)$ u obliku (1.12.11) kažemo da je *Cauchyev oblik ostatka*.

Kao što smo videli, Taylorova formula (1.12.6) ima oblik

$$f(x) = T_n(x) + o((x - a)^n) \qquad (x \to a),$$

odakle zaključujemo da je polinom T_n glavni deo funkcije f kada $x \to a$.

Napomenimo da se Taylorovoj formuli (1.12.6) može dati i drugačiji oblik. Naime, ako se u (1.12.6) umesto x stavi $x + h$ i umesto a stavi x, dobija se

$$f(x + h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,h + \frac{f''(x)}{2!}\,h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o(h^n) \quad (h \to 0),$$

što, takođe, predstavlja Taylorovu formulu funkcije $x \mapsto f(x)$, ali sada u proizvoljnoj tački x.

Pokazaćemo sada kako se Taylorova formula može primeniti na određivanje graničnih vrednosti funkcija, o čemu govori sledeća teorema:

Teorema 1.12.5. *Neka su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ dovoljan broj puta diferencijabilne funkcije i neka je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad (a \in \overline{\mathbb{R}}).$$

Ako su n i m prirodni brojevi i ako važe jednakosti

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x - a)^n + o((x - a)^n) \qquad (x \to a),$$

i

$$g(x) = \frac{g^{(m)}(a)}{m!}\,(x - a)^m + o((x - a)^m) \qquad (x \to a),$$

tada je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0 & (m<n),\\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{g^{(m)}(a)} & (m=n),\\ \infty & (m>n).\end{cases}$$

Dokaz. Na osnovu učinjenih pretpostavki neposredno dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)}{\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m+o((x-a)^m)}\\
&=\frac{\lim\limits_{x\to a}\Big(\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)\Big)}{\lim\limits_{x\to a}\Big(\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m+o((x-a)^m)\Big)}\\
&=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m}\\
&=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m}\\
&=\frac{m!}{n!}\,\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(m)}(a)}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)^{n-m},\end{aligned}$$

odakle sleduje tvrđenje teoreme. $\square$

Primer 1.12.9. Neka je $x\mapsto\dfrac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x}$.

Kao što smo videli, kada $x\to 0$, važe formule

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3),\quad \arcsin x=x+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),\quad \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),$$

a nije teško zaključiti da važi i

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\qquad(x\to 0).$$

Stoga je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\Big(x-\dfrac{1}{3}\,x^3+o(x^3)\Big)-\Big(x-\dfrac{1}{3!}\,x^3+o(x^3)\Big)}{\Big(x+\dfrac{1}{3}\,x^3+o(x^3)\Big)-\Big(x+\dfrac{1}{3!}\,x^3+o(x^3)\Big)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{6}\,x^3+o(x^3)}{\dfrac{1}{6}\,x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{6}\,x^3}{\dfrac{1}{6}\,x^3}=-1.\quad\triangle$$

Primer 1.12.10. Odredićemo graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e\cdot(1+x)^{-1/x}-1}{x}$.

Kako je

$$(1+x)^{-1/x}=e^{-\log(1+x))/x}\qquad\text{i}\qquad \log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

neposredno dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot(1+x)^{-1/x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot e^{-1+x/2+o(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x/2+o(x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x/2+o(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x/2+o(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x/2}{x}=\frac{1}{2}.\quad\triangle$$

Napomena 1.12.3. Uporediti ovaj primer i primer 1.11.12.

Kako je polinom $T_n(x)$ glavni deo funkcije $x\mapsto f(x)$ kada $x\to a$, to se $f(x)$ u nekoj okolini $U(a,\delta)$ može aproksimirati polinomom $T_n(x)$,

$$f(x)\approx T_n(x)\qquad (x\in U(a,\delta))\,,\tag{1.12.12}$$

pri čemu činimo grešku koja je jednaka ostatku $R_n(x)$. Greška je beskonačno mala veličina kada $x\to a$ i to reda n u odnosu na beskonačno malu veličinu $x-a$. U aproksimaciji (1.12.12) mogu se uočiti sledeći elementi: (1) stepen n Taylorovog polinoma; (2) interval aproksimacije $(a-\delta,a+\delta)$, tj. okolina $U(a,\delta)$; (3) učinjena greška $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$, kada $x\in(a-\delta,a+\delta)$. U vezi sa tim postavljaju se sledeća tri pitanja:

1° Ako je $U(a,\delta)$ data okolina tačke a i ako je stepen Taylorovog polinoma dati prirodan broj n, izvršiti procenu greške $R_n(x)$ koja se čini aproksimacijom funkcije f njenim Taylorovim polinomom T_n ;

2° Ako je $U(a,\delta)$ data okolina tačke a i ako se aproksimacijom (1.12.12) načini greška $R_n(x)$ za koju se unapred traži da za svako $x \in U(a,\delta)$ ne sme biti veća od zadate vrednosti ε, odrediti stepen polinoma T_n ;

3° Ako funkciji $x \mapsto f(x)$ odgovara Taylorov polinom T_n uočenog stepena n i ako je zadata granica greške ε, odrediti okolinu $U(a,\delta)$ tako da se aproksimacijom (1.12.12) ne načini greška veća od zadate, tj. da je u toj okolini uvek $|R_n(x)| \le \varepsilon$.

Analiziraćemo svako od ovih pitanja na pojedinačnim primerima.

Primer 1.12.11. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto e^x \quad (-1 \le x \le 1)$ i Taylorovu formulu

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + R_n(x),$$

gde je ostatak $R_n(x)$ dat u Lagrangeovom obliku

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1} \qquad (-1 < \xi < 1).$$

Odredićemo najmanji prirodan broj n tako da je

$$|R_n(x)| = |e^x - T_n(x)| \, < \, 10^{-3}$$

za svako $x \in [-1,1]$. Kako je

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1}\right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,|x|^{n+1}\\ &\le \frac{e^{|\xi|}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!},\end{aligned}$$

nejednakost $|R_n(x)| < 10^{-3}$ važi ako je $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$, tj. ako je $n > 6$.

Prema tome, može se uzeti da je

$$e^x \; \approx \; 1 + x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{6!}\,x^6,$$

pri čemu je greška manja od 10^{-3}, za svako $x \in [-1,1]$.

Za $x = 1$ dobijamo

$$e \; \approx \; 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} = 2.718055\ldots.$$

Dobijena vrednost za e je određena sa većom tačnošću. Ovde je greška manja od $2.3 \cdot 10^{-4}$. Inače, za broj e važi:

$$e = 2.\,71828\;18284\;59045\;23536\;02784\;71352\;66249\;77572\;47093\;69995\;95749\ldots\,,$$

gde smo naveli 55 prvih tačnih decimalnih cifara. $\triangle$

Napomena 1.12.4. Kako je $(x) \in (0,1)$ i $x = [x] + (x)$, moguće je za svako x odrediti približnu vrednost za e^x koristeći dobijeni rezultat i činjenicu da je

$$e^x = e^{[x]+(x)} = e^{[x]} \cdot e^{(x)}.$$

Primer 1.12.12. Neka je $x \mapsto \sin x \quad (0 \le x \le \pi/4)$ i neka je

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} + R_{2n+1}(x).$$

Ako stavimo $n = 3$, a ostatak $R_7(x)$ uzmemo u Lagrangeovom obliku

$$R_7(x) = \frac{\sin\xi}{9!}\,x^9 \qquad \bigl(0 < \xi < \frac{\pi}{4}\bigr),$$

dobijamo

$$\begin{aligned} |\sin x - T_7(x)| = |R_7(x)| \;&\le\; \frac{1}{9!}\,x^9 \;\le\; \frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^9 \\ &\le\; \frac{1}{9!}\,(0.8)^9 <\; \frac{1}{362\,880}\cdot 0.2 <\; .000\,005. \end{aligned}$$

Znači, ako se, za $0 \le x \le \pi/4$, vrednosti funkcije $x \mapsto \sin x$ zamene vrednostima njenog Taylorovog polinoma T_7, tj. ako se uzme

$$\sin x \;\approx\; x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \frac{1}{7!}\,x^7 \qquad \bigl(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\bigr),$$

čini se greška koja je manja od $5 \cdot 10^{-6}$. $\triangle$

Primer 1.12.13. Posmatrajmo Taylorovu formulu

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 + R_5(x) = 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 + \frac{\cos\xi}{6!}\,x^6 \qquad (-\alpha < \xi < \alpha),$$

gde je α pozitivan broj koji ćemo odrediti tako da pri aproksimaciji

$$\cos x \;\approx\; 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 \qquad (-\alpha \le x \le \alpha)$$

bude $|R_5(x)| < 5 \cdot 10^{-5}$. Kako je

$$|R_5(x)| = \left|\frac{\cos\xi}{6!}\, x^6\right| \le \frac{1}{6!}\,|x|^6,$$

zaključujemo da je $|R_5(x)| < 5 \cdot 10^{-5}$ ako je $|x|^6 < 6! \cdot 5 \cdot 10^{-5}$, tj. ako je

$$|x| < \sqrt[6]{6! \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 0.57\ .$$

Prema tome, dovoljno je uzeti $\alpha = 0.57$. $\triangle$

2. ISPITIVANJE FUNKCIJA

2.1. Opšte i lokalne osobine funkcija

Kao što smo naglasili (videti glave I i III, kao i prethodno poglavlje), funkcije mogu imati izvesne osobine koje ih karakterišu u čitavoj njihovoj oblasti definisanosti ili samo u nekim delovima te oblasti. To su, na primer, parnost, periodičnost, monotonost, konveksnost, kao i neprekidnost i diferencijabilnost na segmentu. Te osobine su *opšte osobine funkcija* i njih smo, uglavnom, izučili.

Zato ćemo u narednim odeljcima posvetiti pažnju tzv. *lokalnim osobinama funkcija*, tj. osobinama koje funkcije imaju u pojedinim tačkama svojih oblasti definisanosti.

Prirodno, postavlja se pitanje koje su te tačke. Mi neke od njih znamo. To su, na primer: izolovane tačke, tačke prekida funkcije ili tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna. Međutim, u oblasti definisanosti funkcijâ ima i drugih tačaka u kojima se „nešto dešava“ u odnosu na posmatrane funkcije. One su, na izvestan način, osobene za te funkcije i za njih kažemo da su *karakteristične tačke* tih funkcija.

U nameri da omogućimo detaljnije ispitivanje funkcija, u narednim odeljcima ovog poglavlja ukazaćemo na još neke karakteristične tačke nekih funkcija, naročito diferencijabilnih i, prirodno, u tim tačkama ćemo izučiti i njihove lokalne osobine.

2.2. Monotonost

U odeljku 1.5 (glava I) definisali smo pojam monotone funkcije. Tom prilikom naglasili smo da se za neke klase funkcija može, primenom izvoda, dosta jednostavno ispitati da li je neka funkcija monotona na nekom delu svoje oblasti definisanosti. Naravno, sada nije teško zaključiti da se radi o klasi diferencijabilnih funkcija. U tom smislu, u ovom odeljku dokazaćemo nekoliko tvrđenja koja se odnose na diferencijabilne funkcije u intervalu (a, b).

Teorema 2.2.1. *Diferencijabilna funkcija* $x \mapsto f(x)$ *je neopadajuća u intervalu* (a,b) *ako i samo ako za svako* $x \in (a,b)$ *važi nejednakost* $f'(x) \geq 0$, *a nerastuća je samo ako je* $f'(x) \leq 0$ *za svako* $x \in (a,b)$.

Dokaz. Neka je $f(x)$ neopadajuća funkcija u intervalu (a,b). Ako je x_0 bilo koja tačka iz (a,b) i $\Delta x > 0$. Tada je $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$, odakle zaključujemo da je i $\Delta y/\Delta x \geq 0$, tj. važi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x) = f'(x_0) \geq 0$.

Pretpostavimo sada da je $f'(x) \geq 0$ za svako x iz intervala (a,b). Ako su x_1 i x_2 proizvoljne tačke iz (a,b) za koje je $x_1 < x_2$, tj. $x_2 - x_1 > 0$, tada na osnovu Lagrangeove formule važi jednakost

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < \xi < x_2),$$

odakle, zbog $x_2 - x_1 > 0$ i $f'(x) \geq 0$, sleduje nejednakost

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \qquad (a < x_1 < x_2 < b).$$

Funkcija f je, prema tome, neopadajuća u intervalu (a,b).

Na sličan način dokazuje se i drugi deo tvrđenja teoreme. $\square$

Primer 2.2.1. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x)$ određenu sa

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & (-1 < x < 0), \\ 0 & (0 \leq x \leq 1), \\ (x-1)^2 & (1 < x < 2), \end{cases}$$

za koju je

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & (-1 < x < 0), \\ 0 & (0 \leq x \leq 1), \\ 2(x-1) & (1 < x < 2). \end{cases}$$

Očigledno, važe nejednakosti

$$f'(x) > 0 \quad (-1 < x < 0), \quad f'(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad f'(x) > 0 \quad (1 < x < 2).$$

Prema tome, važi nejednakost $f'(x) \geq 0$ $(-1 < x < 2)$, što znači da je funkcija f neopadajuća u intervalu $(-1,2)$. $\triangle$

Napomena 2.2.1. Teorema 2.2.1 važi i u slučaju kada je f neprekidna funkcija koja samo u konačnom broju tačaka intervala (a,b) nije diferencijabilna.

Primer 2.2.2. Takva je funkcija

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x+2 & (-2 < x < -1), \\ 1 & (-1 \leq x \leq 1), \\ x & (1 < x < 2), \end{cases}$$

koja nije diferencijabilna u tačkama $x = -1$ i $x = 1$. $\triangle$

Slično teoremi 2.2.1 možemo dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.2. *Ako za svako $x \in (a, b)$ važi nejednakost $f'(x) > 0$, diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ je rastuća u intervalu (a, b). Ako je, međutim, $f'(x) < 0$, funkcija je opadajuća u intervalu (a, b).*

Primer 2.2.3. 1° Neka je $x \mapsto f(x) = \log x \quad (x > 0)$. Zbog $f'(x) = 1/x > 0$ $(x > 0)$, sleduje da je funkcija $x \mapsto \log x$ rastuća za $x \in (0, +\infty)$.

2° Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ ima izvod $f'(x) = 2x$. Za $x < 0$ funkcija f je opadajuća, dok je za $x > 0$ rastuća. △

Primer 2.2.4. Neka je $x \mapsto f(x)$ $(0 \le x \le \pi/2)$ funkcija za koju je

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0), \\ \dfrac{\sin x}{x} & (0 < x \le \pi/2)\,. \end{cases}$$

Kako je

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)/x - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

i

$$f'(x) = \Bigl(\frac{\sin x}{x}\Bigr)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\,(x - \tan x) < 0,$$

jer, za svako x iz intervala $(0, \pi/2)$, važi nejednakost $x - \tan x < 0$, zaključujemo da je funkcija f opadajuća. △

Primer 2.2.5. Neka je $x \mapsto f(x) = (1 + 1/x)^x$ $(x > 0)$. Dokazaćemo da je f rastuća funkcija, tako što ćemo za funkciju $g(x) = \log f(x)$ dokazati da je rastuća. Kako je

$$g(x) = \log f(x) = x\bigl(\log(x + 1) - \log x\bigr) \qquad (x > 0)$$

i

$$g'(x) = \log(x + 1) - \log x + x\Bigl(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x}\Bigr) = \log(x + 1) - \log x - \frac{1}{x + 1}\,,$$

na osnovu Lagrangeove formule

$$\log(x + 1) - \log x = \frac{1}{\xi} \qquad (0 < x < \xi < x + 1),$$

za $g'(x)$ dobijamo

$$g'(x) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{x + 1} \qquad (0 < x < \xi < x + 1) \qquad \text{tj.} \qquad g'(x) > 0 \qquad (x > 0).$$

Funkcija $x \mapsto g(x) = \log f(x)$ je, prema tome, rastuća, odakle sleduje da je i $x \mapsto f(x)$ rastuća funkcija. △

Primer 2.2.6. Funkcija

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^3 & (-1 < x \leq 1)\,, \\ \sqrt{x} & (1 \leq x < +\infty), \end{cases}$$

nije diferencijabilna u tački $x = 1$, jer je

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3 \qquad \text{i} \qquad f'_+(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}\,.$$

Dakle, $f'(1)$ ne postoji. Nije teško zaključiti da je $f'(0) = 0$ i da za ostale vrednosti za x važi nejednakost $f'(x) > 0$. Prema tome, neprekidna funkcija f je rastuća u intervalu $(-1, +\infty)$. $\triangle$

Važi i sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.3. *Neka je $x \mapsto f(x)$ $(a < x < b)$ diferencijabilna funkcija i neka je $\alpha \in (a, b)$. Ako je $f'(\alpha) > 0$, tada postoji okolina $U(\alpha, \delta)$ u kojoj je funkcija f rastuća. Ako je $f'(\alpha) < 0$, tada postoji okolina $U(\alpha, \delta)$ u kojoj je funkcija f opadajuća.*

Zbog toga se često kaže da ako je $f'(\alpha) > 0$ da funkcija f raste u tački $x = \alpha$. Isto tako, ako je $f'(\alpha) < 0$ kaže se da u tački $x = \alpha$ funkcija f opada.

Primer 2.2.7. Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ u tački $x = -2$ opada, jer je $f'(-2) = -4 < 0$, a u tački $x = 1$ raste, jer je $f'(1) = 2 > 0$. $\triangle$

U stvari, funkcija f raste u tački $x = \alpha$, ako istovremeno: za svako $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ važi nejednakost $f(x) < f(\alpha)$ i ako za svako $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ važi $f(\alpha) < f(x)$.

Isto tako, funkcija f opada u tački $x = \alpha$, ako istovremeno: za svako $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ važi nejednakost $f(x) > f(\alpha)$ i ako za svako $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ važi $f(\alpha) > f(x)$.

Kao što vidimo, činjenica da neka funkcija f raste, ili opada, u tački α predstavlaja, u stvari, jednu lokalnu osobinu te funkcije u tački $x = \alpha$.

Nije teško zaključiti da ako je neka funkcija rastuća (opadajuća) u nekom intervalu, da ona raste (opada) u svakoj tački tog intervala, ali, i obrnuto, ako funkcija raste (opada) u svakoj tački nekog intervala, tada je ta funkcija rastuća (opadajuća) u celom tom intervalu.

Primer 2.2.8. Funkcija $x \mapsto g(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ raste u svakoj tački, jer za njen izvod g' važi nejednakost $g'(x) = e^x > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. $\triangle$

2.3. Lokalni ekstremumi funkcija

Još u prvoj glavi (videti odeljak 1.1) napomenuli smo da se kaže da funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ ima *minimum*, u oznaci $\min\limits_{x\in D} f(x)$, ako postoji $\inf\limits_{x\in D} f(x)$ i ako taj infimum pripada skupu vrednosti funkcije f, tj. ako $\inf\limits_{x\in D} f(x) \in f(D)$. To, u stvari, znači da funkcija $x \mapsto f(x)$ ima minimum ako u skupu D postoji tačka $x = \alpha$, takva da je

$$f(\alpha) = \inf_{x\in D} f(x) = \inf(f(D)).$$

Isto tako, kaže se da funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ ima *maksimum*, u oznaci $\max\limits_{x\in D} f(x)$, ako postoji $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ i ako taj supremum pripada skupu vrednosti funkcije f, tj. ako $\sup\limits_{x\in D} f(x) \in f(D)$. Dakle, to znači da funkcija $x \mapsto f(x)$ ima maksimum ako u skupu D postoji tačka $x = \beta$, takva da je

$$f(\beta) = \sup_{x\in D} f(x) = \sup(f(D)).$$

Kao što vidimo, ovako definisani minimum je zaista najmanja, a maksimum najveća vrednost funkcije $x \mapsto f(x)$. Zbog toga se, ponekad, za tako definisani minimum kaže da je to *apsolutni minimum*, a za maksimum da je *apsolutni maksimum* funkcije f.

Napomenimo da je uvek $f(D) \subseteq \big[\inf\limits_{x\in D} f(x), \sup\limits_{x\in D} f(x)\big]$. Samo se po sebi razume: ako je $f(D)$ interval, polusegment (poluinterval) ili segment, onda su vrednosti $\inf\limits_{x\in D} f(x)$ i $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ njegovi krajevi.

Sledećim dvema definicijama uvešćemo neke nove pojmove.

Definicija 2.3.1. Za tačku $a \in (\alpha, \beta)$ kažemo da je *tačka minimuma* funkcije $x \mapsto f(x)$ $(x \in (\alpha, \beta))$ ako postoji $\delta > 0$ takvo da je $f(x) \geq f(a)$ za svako $x \in U(a, \delta)$. U tom slučaju, za funkciju f kažemo da u tački a ima *minimum* $f(a)$.

Definicija 2.3.2. Za tačku $a \in (\alpha, \beta)$ kažemo da je *tačka maksimuma* funkcije $x \mapsto f(x)$ $(x \in (\alpha, \beta))$ ako postoji $\delta > 0$ takvo da je $f(x) \leq f(a)$ za svako $x \in U(a, \delta)$. U tom slučaju, za funkciju f kažemo da u tački a ima *maksimum* $f(a)$.

Nije teško zaključiti da ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ rastuća, da je tada $f(a)$ minimum, a $f(b)$ maksimum funkcije f na segmentu $[a, b]$. I obrnuto, ako je f opadajuća funkcija, tada je $f(a)$ maksimum i $f(b)$ minimum funkcije $f(x)$ za $x \in [a, b]$.

Za najmanju i najveću vrednost neke funkcije, tj. za njen minimum i njen maksimum, često se kaže da su to njene *ekstremne vrednosti* ili da su to njeni *ekstremumi*.

Kako je svaka diferencijabilna funkcija istovremeno i neprekidna, na osnovu druge Weierstrassove teoreme (videti: glava III, teorema 2.3.2) neposredno sleduje da svaka na segmentu $[a, b]$ diferencijabilna funkcija ima i svoj minimum i svoj maksimum.

Dokazaćemo sada neka tvrđenja koja se odnose na ekstremne vrednosti funkcija.

Teorema 2.3.1. *Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ u tački $a \in (\alpha, \beta)$ ima ekstremum, tada ili funkcija f u toj tački nije diferencijabilna ili je $f'(a) = 0$.*

Dokaz. Očigledno, u skladu sa definicijama 2.3.1 i 2.3.2, činjenica da u tački $a \in (\alpha, \beta)$ funkcija f ima ekstremum znači da postoji okolina $U(a, \delta) \subset (\alpha, \beta)$ takva da je $f(a) \geq f(x)$ ili $f(a) \leq f(x)$, za $x \in U(a, \delta)$. Prema tome, u tački a funkcija f dostiže svoju najmanju ili svoju najveću vrednost. Stoga, na osnovu Fermatove teoreme (videti teoremu 1.11.1), zaključujemo da ako postoji $f'(a)$ važi jednakost $f'(a) = 0$, čime je dokazan jedan deo tvrđenja teoreme.

Naravno, ako $f'(a)$ ne postoji, funkcija f u tački a nije diferencijabilna.

Ovim je teorema dokazana. $\square$

Primer 2.3.1. Očigledno, funkcije $x \mapsto f(x) = x^2$ i $x \mapsto g(x) = |x|$ u tački $x = 0$ dostižu svoje minimalne vrednosti. Pri tome, za funkciju f važi $f'(0) = 0$, a fukcija g nije diferencijabilna u tački $x = 0$. $\triangle$

Napomenimo da jednakost $f'(a) = 0$ ne znači da diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ ima ekstremum u tački $x = a$. Na primer, funkcija $x \mapsto f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ ima u tački $x = 0$ izvod jednak nuli, ali u toj tački nema ekstremum.

Teoremom 2.3.1 se, prema tome, utvrđuje potreban uslov da funkcija $x \mapsto f(x)$ u tački $x = a$ ima ekstremum.

Međutim, važi i sledeće tvrđenje:

Teorema 2.3.2. *Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna u tački $x = a$ i neka je diferencijabilna u okolini $U(a, \delta) \subset (\alpha, \beta)$, sem možda u tački a. Ako su vrednosti $f'(x)$, za svako $x \in U(a-, \delta)$ i za svako $x \in U(a+, \delta)$, različitog znaka, funkcija f u tački $x = a$ ima ekstremum.*

Dokaz. Razlikovaćemo dva slučaja: slučaj kada je

$$(2.3.1)\quad f'(x) > 0 \quad (a - \delta < x < a) \qquad \text{i} \qquad f'(x) < 0 \quad (a < x < a + \delta),$$

a zatim, slučaj kada je

$$(2.3.2)\quad f'(x) < 0 \quad (a - \delta < x < a) \qquad \text{i} \qquad f'(x) > 0 \quad (a < x < a + \delta).$$

Razmotrimo prvi slučaj. Neka, dakle, za $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ važe nejednakosti (2.3.1). Tada, na osnovu Lagrangeove formule

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) \qquad (a < \xi < x \quad \text{ili} \quad x < \xi < a)$$

zaključujemo da je razlika $f(x) - f(a)$ uvek negativna, tj. uvek važi nejednakost $f(x) < f(a)$, jer su, zbog (2.3.1), $f'(\xi)$ i $x - a$ različitog znaka. Vrednost $f(a)$ je, prema tome, najveća vrednost funkcije f za $x \in U(a,\delta)$, što znači da u tački $x = a$ funkcija f dostiže svoj maksimum.

Na sličan način dokazuje se da u drugom slučaju, tj. u slučaju da važi (2.3.2), funkcija f u tački $x = a$ dostiže svoj minimum. $\square$

Primer 2.3.2. Neka je $x \mapsto f(x) = \sin x \ \ (0 \le x \le 2\pi)$.

1° Kako je $f'(x) = \cos x$ i

$$\cos x > 0 \quad \Big(\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}\Big) \qquad \text{i} \qquad \cos x < 0 \quad \Big(\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \delta\Big),$$

na osnovu teoreme 2.3.2 zaključujemo da u tački $x = \pi/2$ funkcija f dostiže svoj maksimum $f(\pi/2) = 1$.

2° Isto tako, funkcija f, zbog

$$\cos x < 0 \quad \Big(\frac{3\pi}{2} - \delta < x < \frac{3\pi}{2}\Big) \qquad \text{i} \qquad \cos x > 0 \quad \Big(\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + \delta\Big),$$

prema teoremi 2.3.2, u tački $x = 3\pi/2$ dostiže svoj minimum $f(3\pi/2) = -1$. $\triangle$

Primer 2.3.3. Kao što smo videli funkcija $x \mapsto |x|$ u tački $x = 0$ ima minimum, iako u njoj nije diferencijabilna, što je u skladu sa teoremom 2.3.2. $\triangle$

Napomenimo da su uslovi teoreme 2.3.2 samo dovoljni uslovi, ali ne i potrebni da bi funkcija f imala ekstremum u tački $x = a$. Naime, ako funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in (\alpha,\beta))$ ima u tački $x = a$ ekstremum, na primer minimum, to ne znači da mora postojati okolina $U(a,\delta)$ takva da je $f'(x) < 0$ kada $x \in \overset{\circ}{U}(a-,\delta)$ i $f'(x) > 0$ ako $x \in \overset{\circ}{U}(a+,\delta)$.

Ilustrovaćemo ovaj zaključak sledećim primerom:

Primer 2.3.4. Posmatrajmo funkciju

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Neka je $x \neq 0$. Tada iz nejednakosti

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1,$$

jedno za drugim dobijamo

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2 \qquad \text{i} \qquad x^2 \leq 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x} \leq 3x^2,$$

odakle, zbog $f(0) = 0$, sleduje dvostruka nejednakost

$$x^2 \leq f(x) \leq 3x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.3.3}$$

Kako je $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} x^2 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} 3x^2 = 0$, iz (2.3.3) neposredno zaključujemo da funkcija f, u tački $x = 0$, ima minimum $f(0) = 0$.

Međutim, ni u jednoj od okolina $\mathring{U}(0-, \delta)$ ili $\mathring{U}(0+, \delta)$ funkcija

$$x \mapsto f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

nema stalni znak. Šta više, ona ga u svakoj od njih beskonačno puta menja. △

Teorema 2.3.3. *Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ dvaput diferencijabilna u tački $x = a$ i neka je $f'(a) = 0$ i $f''(a) \neq 0$. Tada funkcija f u tački a dostiže svoj maksimum ako je $f''(a) < 0$, a minimum ako je $f''(a) > 0$.*

Dokaz. Pod navedenim uslovima, za funkciju f važi Taylorova formula

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + R_2(x) \qquad (x \to a),$$

tj. jednakost

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + o\big((x - a)^2\big) \qquad (x \to a).$$

Kako je

$$\lim_{x\to a}\frac{R_2(x)}{(x-a)^2}=0,\qquad \text{tj.}\qquad \lim_{x\to a}\frac{R_2(x)}{\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2}=0,$$

zaključujemo da postoji okolina $U(a,\delta)$ tačke $x=a$ u kojoj važi

$$\left|\frac{R_2(x)}{\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2}\right|<\frac{1}{2},$$

što, zapravo, znači da važi nejednakost

$$|R_2(x)|<\frac{1}{2}\left|\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\right|.$$

Prema tome, u okolini $U(a,\delta)$, razlika $f(x)-f(a)$, tj. zbir

$$\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+R_2(x),$$

ima isti znak kao i izraz $\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$, tj. kao izvod $f''(a)$.

Dakle, ako je $f''(a)>0$, za $x\in\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ važi nejednakost $f(x)-f(a)>0$, tj. funkcija f u tački $x=a$ dostiže svoj minimum.

Ali, ako je $f''(a)<0$, za $x\in\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ važi nejednakost $f(x)-f(a)<0$, tj. funkcija f u tački $x=a$ dostiže svoj maksimum. $\square$

Primer 2.3.5. Neka je $x\mapsto f(x)=x^2$ $(-1<x<1)$. Kako je $f'(x)=2x$ i $f''(x)=2$, zbog $f'(0)=0$ i $f''(0)=2>0$, na osnovu teoreme 2.3.3, zaključujemo da je $f(0)=0$ minimum funkcije f.

Ako je $x\mapsto g(x)=\sin x$ $(0<x<\pi)$, tada je, isto tako na osnovu teoreme 2.3.3, $g(\pi/2)=\sin\pi/2=1$ maksimum funkcije g, jer iz $g'(x)=\cos x$ i $g''(x)=-\sin x$ sleduje $g'(\pi/2)=0$ i $g''(\pi/2)=-1<0$. $\triangle$

Na sličan način može se dokazati sledeće opštije tvrđenje:

Teorema 2.3.4. *Neka je funkcija $x\mapsto f(x)$ n puta diferencijabilna u tački $x=a$ i neka je*

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0\qquad i\qquad f^{(n)}(a)\neq 0\quad (n\geq 2).$$

Tada, ako je n paran broj, funkcija f u tački a ima ekstremum, i to: minimum ako je $f^{(n)}(a) > 0$, a maksimum ako je $f^{(n)}(a) < 0$.

Ako je n neparan broj, funkcija f u tački a raste ako je $f^{(n)}(a) > 0$, a opada ako je $f^{(n)}(a) < 0$.

Primer 2.3.6. 1° Neka je $f(x) = x^4 \quad (-1 < x < 1)$. Na osnovu izvoda

$$\mathcal{D}f(x) = 4x^3, \quad \mathcal{D}^2 f(x) = 12x^2, \quad \mathcal{D}^3 f(x) = 24x, \quad \mathcal{D}^4 f(x) = 24,$$

zaključujemo da funkcija f, u tački $x = 0$, ima minimum $f(0) = 0$.

2° Ako je $g(x) = x + \sin x \quad (\pi/2 < x < 3\pi/2)$, tada je

$$g'(x) = 1 + \cos x, \qquad g''(x) = -\sin x, \qquad g'''(x) = -\cos x,$$

odakle sleduje

$$g'(\pi) = g''(\pi) = 0 \qquad \text{i} \qquad g'''(\pi) = 1 > 0.$$

Prema tome, na osnovu teoreme 2.3.4, zaključujemo da funkcija g u tački $x = \pi$ nema ekstremum. Ona u toj tački raste. $\triangle$

Na kraju, napomenimo da se, u skladu sa ovim razmatranjima, konvencijom uzima da funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ u svakoj tački $a \in D$ za koju je $f(a)$ izolovana tačka skupa $f(D)$, dostiže svoj ekstremum. Naravno, u konkretnim slučajevima, prirodu tog ekstremuma nije teško utvrditi. Zanimljivo je da se u izolovanoj tački a skupa D, za koju je $f(a)$ izolovana tačka skupa $f(D)$, takođe konvencijom uzima da funkcija f istovremeno dostiže i svoj minimum i svoj maksimum.

Primer 2.3.7. Funkcije

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 0), \\ -1 & (x = 0) \end{cases}$$

u tački $x = 0$ imaju, respektivno, maksimum $f(0) = 1$ i minimum $g(0) = -1$. $\triangle$

Primer 2.3.8. Kako oblast definisanosti funkcije $x \mapsto f(x) = x(\sqrt{x-1} + 1)$ čini unija skupova $\{0\}$ i $[1, +\infty)$, tj. skup $D = \{0\} \cup [1, +\infty)$, tačka $x = 0$ je izolovana tačka tog skupa. Kao što smo naglasili, konvencijom se uzima da u tački $x = 0$ funkcija f dostiže i svoju minimalnu i svoju maksimalnu vrednost

$$\min f(x) = \max f(x) = f(0) = 0.$$

Inače, funkcija f u tački $x = 1$ takođe dostiže svoju minimalnu vrednost

$$\min f(x) = f(1) = 0,$$

jer je rastuća za $x \in [1, +\infty)$. $\triangle$

2.4. Konveksnost i prevojne tačke

U odeljku 1.6 (glava I) dokazali smo nekoliko teorema koje su se odnosile na konveksne funkcije. Između ostalog (videti teoremu 1.6.2), dokazali smo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ konveksna na (a, b) ako i samo ako je

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0, \tag{2.4.1}$$

za svaku trojku vrednosti $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ za koju je $x_1 < x < x_2$. Ovde ćemo dokazati nekoliko tvrđenja koja se odnose na konveksnost diferencijabilnih funkcija.

Teorema 2.4.1. *Diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ je konveksna (strogo konveksna) na (a, b) ako i samo ako je njena izvodna funkcija f' neopadajuća (rastuća) na (a, b).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f konveksna funkcija na (a, b), tj. neka za svako x_1, x, x_2 $(a < x_1 < x < x_2 < b)$ važi nejednakost (2.4.1).

Kako je $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, nejednakost (2.4.1) je ekvivalentna nejednakosti

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (x_1 < x < x_2), \tag{2.4.2}$$

odakle, jedno za drugim, dobijamo

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

i

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Prema tome, za svaki par vrednosti $x_1, x_2 \in (a, b)$, za koji je $x_1 < x_2$, važi nejednakost $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, što kazuje da je f' neopadajuća funkcija na (a, b). U slučaju stroge konveksnosti funkcije f, u (2.4.2) važi stroga nejednakost, odakle, na osnovu Lagrangeove teoreme, sleduje

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

gde je $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Prema tome, za svako $x_1 < x_2$ postoje ξ_1 i ξ_2 $(\xi_1 < \xi_2)$ za koje je

$$f'(x_1) \le f'(\xi_1), \qquad f'(\xi_1) < f'(\xi_2), \qquad f'(\xi_2) \le f'(x_2),$$

tj. $f'(x_1) < f'(x_2)$. Dakle, ako je f strogo konveksna funkcija na (a,b), tada je f' rastuća funkcija na (a,b).

Neka je sada funkcija f' neopadajuća na (a,b). Na osnovu Lagrangeove formule, za $a < x_1 < x < x_2 < b$ imamo

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \qquad \text{i} \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2), \tag{2.4.3}$$

gde je $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$.

Kako je f' neopadajuća funkcija, važi nejednakost $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, odakle, obzirom na (2.4.3), zaključujemo da važi nejednakost (2.4.2), pa, prema tome, i njoj ekvivalentna nejednakost (2.4.1). Dakle, funkcija f je konveksna.

Ako je f' rastuća funkcija, stroga konveksnost funkcije f, tj. stroga nejednakost u (2.4.1), sleduje iz nejednakosti $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$. $\square$

Primer 2.4.1. Funkcija $x \mapsto f(x) = x^4$ $(x \in \mathbb{R})$ je konveksna, jer je funkcija $x \mapsto f'(x) = 4x^3$ neopadajuća.

Za funkciju $x \mapsto f(x) = e^x$ važi $f'(x) = e^x$. Kako je f' rastuća, funkcija f je strogo konveksna. $\triangle$

Na sličan način može se zaključiti da važi i dualno tvrđenje:

Teorema 2.4.2. *Diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ je konkavna (strogo konkavna) na (a,b) ako i samo ako je njena izvodna funkcija f' nerastuća (opadajuća) na (a,b).*

Primer 2.4.2. 1° Funkcija $x \mapsto f(x) = 4x - x^4$ $(x \in \mathbb{R})$ je konkavna na intervalu $(-\infty, +\infty)$ jer je $x \mapsto f'(x) = 4(1-x^3)$ nerastuća funkcija za $x \in (-\infty, +\infty)$.

2° Funkcija $x \mapsto f(x) = \sin x$ $(0 < x < \pi)$ je strogo konkavna na $(0,\pi)$ jer je $x \mapsto f'(x) = \cos x$ $(0 < x < \pi)$ opadajuća funkcija. $\triangle$

Teorema 2.4.3. *Diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ je konveksna na (a,b) ako i samo ako važi nejednakost*

$$f(x) - f(\alpha) \ge f'(\alpha)(x-\alpha) \qquad (x, \alpha \in (a,b))\,. \tag{2.4.4}$$

Funkcija je strogo konveksna na ako i samo ako važi stroga nejednakost u (2.4.4).

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija na (a, b). Kako je

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\xi)(x - \alpha) \qquad (x < \xi < \alpha \;\text{ ili }\; \alpha < \xi < x)$$

nejednakost (2.4.4) postaje

$$\left(f'(\xi) - f'(\alpha)\right)(x - \alpha) \geq 0 \qquad (x < \xi < \alpha \;\text{ ili }\; \alpha < \xi < x),$$

i ona je tačna jer je, na osnovu teoreme 2.4.1, funkcija f' neopadajuća funkcija na (a, b). Dakle, pod pretpostavkom da je f konveksna funkcija, dokazali smo da važi nejednakost (2.4.4).

Pretpostavimo sada da važi nejednakost (2.4.4), tj.

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq f'(\alpha) \quad (x < \alpha) \qquad \text{i} \qquad \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq f'(\alpha) \quad (\alpha < x),$$

ili, što je isto,

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq f'(x) \quad (x_1 < x) \quad \text{i} \quad f'(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (x < x_2).$$

Iz ovih nejednakosti zaključujemo da je

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (x_1 < x < x_2),$$

odakle, za proizvoljne vrednosti $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ za koje je $a < x_1 < x < x_2 < b$, sleduje da je funkcija f konveksna.

Stroga nejednakost u (2.4.4) je potreban i dovoljan uslov za strogu konveksnost funkcije f na (a, b). $\square$

Napomena 2.4.1. Tvrđenje teoreme 2.4.3 ima sledeću geometrijsku interpretaciju: Ako je f konveksna (ili: strogo konveksna) funkcija na (a, b), tada za krivu $y = f(x)$ $(x \in (a, b))$ i njenu tangentu $y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$ u proizvoljnoj tački $\alpha \in (a, b)$ važi da za svako x iz intervala (a, b) ordinate krive nisu manje (ili: veće su) od ordinata tangente. I obrnuto, ako ova osobina važi za krivu čija je jednačina $y = f(x)$ i svaku njenu tangentu, funkcija f je konveksna (ili: strogo konveksna) funkcija.

Naravno, važi i tvrđenje koje je dualno teoremi 2.4.3:

Teorema 2.4.4. *Diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ je konkavna na (a, b) ako i samo ako važi nejednakost*

$$f(x) - f(\alpha) \leq f'(\alpha)(x - \alpha) \qquad (x, \alpha \in (a, b)) . \tag{2.4.5}$$

Funkcija je strogo konkavna ako i samo ako važi stroga nejednakost u (2.4.5).

Napomena 2.4.2. Tvrđenju teoreme 2.4.4 može se dati slična geometrijska interpretacija kao što je to učinjeno u napomeni 2.4.1 za konveksne funkcije. U stvari, može se zaključiti da luk grafika svake konveksne ili konkavne funkcije u okolini neke njene tačke M čitav leži sa jedne strane njene tangente u toj tački M.

Dokazaćemo sada jedno važno tvrđenje koje se u praksi veoma često koristi.

Teorema 2.4.5. *Neka je $x \mapsto f(x)$ dvaput diferencijabilna funkcija na (a, b). Funkcija f je konveksna na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$, za svako $x \in (a, b)$, a konkavna ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$, za svako $x \in (a, b)$.*

Dokaz. Ako je f konveksna funkcija na (a, b), tada je funkcija $x \mapsto f'(x)$ $(a < x < b)$, na osnovu teoreme 2.4.1, neopadajuća, što na osnovu teoreme 2.2.1 znači da je $f''(x) \geq 0$ za $x \in (a, b)$.

Obrnuto, ako je $f''(x) \geq 0$, na osnovu teoreme 2.2.1 zaključujemo da je funkcija $x \mapsto f'(x)$ $(a < x < b)$ neopadajuća, što prema teoremi 2.4.1 znači da je funkcija f konveksna na (a, b).

Sličan dokaz se može dati i za konkavne funkcije. $\square$

Napomena 2.4.3. U slučaju stroge konveksnosti (stroge konkavnosti) drugi izvod $f''(x)$ treba biti pozitivan (negativan).

Primer 2.4.3. 1° Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = x^4 - 4x$ $(x \in \mathbb{R})$. Kako je $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, na osnovu teoreme 2.4.5 zaključujemo da je funkcija f konveksna na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

2° Funkcija $x \mapsto f(x) = -x^2 - 2\cos x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ ima drugi izvod f'', određen sa $f''(x) = 2(\cos x - 1)$, za koji važi nejednakost $f''(x) \leq 0$, što na osnovu teoreme 2.4.5 znači da je f konkavna funkcija. $\triangle$

Primer 2.4.4. 1° Neka je $x \mapsto f(x) = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $(x \in \mathbb{R})$. Kako je $f''(x) = \cosh x > 0$ za svako realno x, na osnovu teoreme 2.4.6 imamamo da je f strogo konveksna na $(-\infty, +\infty)$.

2° Neka je $x \mapsto g(x) = \log x$ $(x > 0)$. Kako je $f''(x) = -1/(x^2) < 0$, na osnovu teoreme 2.4.6 zaključujemo da je funkcija g strogo konkavna na $(0, +\infty)$. $\triangle$

Napomena 2.4.4. Ako je funkcija $x \mapsto y = f(x)$ $(a < x < b)$ strogo konveksna (konkavna), tada ne postoji interval (a_1, b_1) $(a < a_1 < b_1 < b)$ u kome je funkcija $x \mapsto f''(x)$ identički jednaka nuli. Zaista, ako bi takvog intervala bilo, tada bi se iz identiteta $f''(x) \equiv 0$ $(a_1 < x < b_1)$, moglo zaključiti da je, na tom delu intervala (a, b), luk krive $y = f(x)$, u stvari, deo prave linije, tj. deo krive koja nije ni konveksna ni konkavna. To bi, naravno, bilo u suprotnosti sa učinjenom pretpostavkom da je funkcija f strogo konveksna (konkavna).

Definicija 2.4.1. Za tačku $\alpha \in (a, b)$ kažemo da je *prevojna tačka funkcije* $x \mapsto f(x)$ $(x \in (a, b))$ ako postoji $\delta > 0$ tako da je: f strogo konveksna za $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ i strogo konkavna funkcija za $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$, ili da je: f strogo konkavna za $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ i strogo konveksna funkcija za $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$. Za tačku $A\,(\alpha, f(\alpha))$ kažemo da je *prevojna tačka krive* $y = f(x)$.

Kao što vidimo, u prevojnoj tački funkcija menja konveksnost u konkavnost ili obrnuto.

Teorema 2.4.6. *Ako je $\alpha \in (a, b)$ prevojna tačka funkcije $x \mapsto f(x)$ $(a < x < b)$, tada ili funkcija f u toj tački nije dvaput diferencijabilna ili je $f''(\alpha) = 0$.*

Dokaz. Iz činjenice da je α prevojna tačka funkcije f sleduje da u njoj funkcija f menja smisao konveksnosti. To znači da postoji $\delta > 0$, tako da je, na primer, funkcija f za $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ konkavna (konveksna) i za $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ konveksna (konkavna). Na osnovu teorema 2.4.2 i 2.4.1, funkcija $x \mapsto f'(x)$ je nerastuća (neopadajuća) za $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ i neopadajuća (nerastuća) za $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$.

Prema tome, funkcija f' u tački $x = \alpha$ dostiže svoj minimum (maksimum). Odavde, na osnovu Fermatove teoreme zaključujemo: ako postoji $f''(\alpha)$, tada važi jednakost $f''(\alpha) = 0$.

S druge strane, ako $f''(\alpha)$ ne postoji, funkcija f nije dvaput diferencijabilna u tački α. $\square$

Primer 2.4.5. Funkcija $x \mapsto f(x) = x^3$ ima u tački $x = 0$ prevojnu tačku. Istovremeno važi $f''(0) = 0$. $\triangle$

Primer 2.4.6. 1° Očigledno, tačka $x = 0$ je prevojna tačka funkcije

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^3 & (x \le 0), \\ x^2 & (x \ge 0), \end{cases}$$

jer je $f''(x) = 6x < 0$ $(x < 0)$ i $f''(x) = 2 > 0$ $(x > 0)$, iako funkcija f nije dvaput diferencijabilna u tački $x = 0$.

2° Neka je $0 < a < b$ i

$$x \mapsto y = f(x) = \begin{cases} -a + \sqrt{a^2 - x^2} & (-a \le x \le 0), \\ b - \sqrt{b^2 - x^2} & (0 \le x \le b). \end{cases}$$

Nije teško proveriti da je $O(0,0)$ prevojna tačka krive $y = f(x)$. Naime, kako je

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}} & (-a \le x \le 0), \\ \dfrac{b^2}{(b^2 - x^2)^{3/2}} & (0 \le x \le b)\,, \end{cases}$$

zaključujemo da je funkcija f konkavna u intervalu $(-a, 0)$ i da je konveksna u intervalu $(0, b)$. Međutim, funkcija f nije dvaput diferencijabilna u tački $x = 0$ jer je

$$f''_-(0) = -1/a \qquad \text{i} \qquad f''_+(0) = 1/b. \quad \triangle$$

Teorema 2.4.7. *Neka je $x \mapsto f(x)$ $(x \in (a,b))$ triput diferencijabilna funkcija i neka je $f''(\alpha) = 0$ i $f'''(\alpha) \neq 0$ $(\alpha \in (a,b))$. Tada je $x = \alpha$ prevojna tačka funkcije f.*

Dokaz. Pod navedenim pretpostavkama, Taylorova formula funkcije f u tački $x = \alpha$ ima oblik

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x - \alpha) + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x - \alpha)^3 + o\big((x - \alpha)^3\big) \quad (x \to \alpha),$$

tj. važi jednakost

$$f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x - \alpha) = \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x - \alpha)^3 + o\big((x - \alpha)^3\big) \quad (x \to \alpha).$$

Slično kao u dokazu teoreme 2.3.3 možemo zaključiti da je izraz

$$f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x - \alpha) \tag{2.4.6}$$

istog znaka kao i

$$\frac{f'''(\alpha)}{3!}(x - \alpha)^3 \qquad (x \to \alpha).$$

Odavde nije teško zaključiti da izraz (2.4.6) menja svoj znak sa promenom znaka razlike $x - \alpha$. Na osnovu prethodnih teoremai, ovo znači da funkcija

f u tački $x = \alpha$ menja smisao svoje konveksnosti. Tačka α je, prema tome, prevojna tačka funkcije f. $\square$

Na osnovu teoreme 2.4.7 može se zaključiti da su prevojne tačke funkcije $x \mapsto f(x)$ one tačke u kojima njena izvodna funkcija f' ima ekstremume. Napomenimo da se može desiti da funkcija f ima prevojnu tačku $x = \alpha$ u kojoj je njen prvi izvod $f'(\alpha)$ beskonačan.

Primer 2.4.7. Takva je, na primer, funkcija $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$, za koju je tačka $x = 0$ prevojna tačka. $\triangle$

Bez dokaza navodimo sledeće opštije tvrđenje, koje se može dokazati na sličan način kao i teorema 2.4.7:

Teorema 2.4.8. *Neka je funkcija* $x \mapsto f(x) \quad (x \in (a, b))$ n *puta diferencijabilna u tački* $x = \alpha$ *i neka je*

$$f''(\alpha) = f'''(\alpha) = \cdots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0 \quad i \quad f^{(n)}(\alpha) \neq 0 \qquad (n \geq 3).$$

Ako je n *neparan broj, tačka* α *je prevojna tačka funkcije* f*, ako je* n *paran broj, tačka* α *nije prevojna tačka funkcije* f*.*

2.5. Asimptote

Posmatrajmo funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$. Kao što smo ranije naglasili (videti odeljak 2.6, glava III) ako je

$$f(x) = g(x) + o(x - a) \qquad (x \to a),$$

za funkciju g se kaže da je glavni deo funkcije f, kada $x \to a$. U stvari, tada je

$$f(x) - g(x) = o(x - a) \qquad (x \to a),$$

ali i

$$g(x) - f(x) = o(x - a) \qquad (x \to a),$$

što znači da je i funkcija f glavni deo funkcije g, kada $x \to a$.

Definisaćemo sada neke nove pojmove koji su u neposrednoj vezi sa glavnim delovima dveju funkcija kada x teži ka a. Pri tome ćemo, prirodno, razlikovati simbole $-\infty$ i $+\infty$. Međutim, kada nije potrebno posebno isticati tu različitost i kada ne može da dođe do zabune, koristićemo jednostavno samo simbol ∞.

Definicija 2.5.1. Za funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ kažemo da se *asimptotski jednako ponašaju* u okolini $\overset{\circ}{U}(\infty, \delta)$ ako je

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0,$$

ili da se *asimptotski jednako ponašaju* u okolini $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ $(-\infty < a < +\infty)$ ako važe jednakosti

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Za funkcije koje se asimptotski jednako ponašaju, često se kaže da su *asimptotski jednake*.

Ponekad se činjenica da se funkcije f i g asimptotski jednako ponašaju, tj. da su asimptotski jednake, kada $x \to \infty$ ili kada $x \to a$, simbolizuje sa

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty), \qquad \text{tj.} \qquad f(x) \sim g(x) \quad (x \to a).$$

Primer 2.5.1. Neka su date funkcije

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}, \qquad x \mapsto g(x) = x^2 \qquad \text{i} \qquad x \mapsto h(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Funkcije f i g se asimptotski jednako ponašaju kada $x \to \infty$ jer je

$$\lim_{x\to\infty} ((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{x^4+1}{x^2} - x^2\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Važi, dakle, asimptotska jednakost

$$f(x) \sim g(x) \qquad (x \to \infty), \qquad \text{tj.} \qquad \frac{x^4+1}{x^2} \sim x^2 \qquad (x \to \infty).$$

Međutim, i funkcije f i h su, takođe, asimptotski jednake, ali kada $x \to 0$, jer je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

i

$$\lim_{x\to 0} (f(x) - h(x)) = \lim_{x\to 0} \Big(\frac{x^4+1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\Big) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Prema tome, važi i asimptotska jednakosost

$$f(x) \sim h(x) \qquad (x \to 0), \qquad \text{tj.} \qquad \frac{x^4+1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2} \qquad (x \to 0). \qquad \triangle$$

Nije teško zaključiti da je asimptotska jednakost $\sim$ jedna relacija ekvivalencije u skupu funkcija koje se asimptotski jednako ponašaju u okolini $\overset{\circ}{U}(\infty, \delta)$ ili u okolini $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$.

Definicija 2.5.2. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ asimptotski jednaka funkciji $x \mapsto g(x)$ kada $x \to \infty$, kažemo da je kriva $y = g(x)$ *krivolinijska asimptota* krive $y = f(x)$. Ako je $g(x) = \alpha x + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, asimptota $y = g(x)$ je *pravolinijska*.

Razumljivo, kako je asimptotska jednakost obostrana, ako je kriva $y = g(x)$ krivolinijska asimptota krive $y = f(x)$, iz definicije 2.5.2 sleduje da je tada kriva $y = f(x)$ krivolinijska asimptota krive $y = g(x)$.

Definicija 2.5.3. Za pravu $y = \alpha x + \beta$ kažemo da je *kosa asimptota* krive $y = f(x)$ ako je

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0 \qquad \text{ili} \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0.$$

Primer 2.5.2. Prava $y = x$ je kosa asimptota krive $y = \sqrt{x^2 - 1}$ jer je

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0. \quad \triangle$$

Primer 2.5.3. Prava $y = x - 4$ je kosa asimptota krive $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$ jer je

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-3x+2}{x+1} - (x-4)\Big) = \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x+1} = 0$$

i

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2-3x+2}{x+1} - (x-4)\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x+1} = 0. \quad \triangle$$

Prema tome, ako je $y = \alpha x + \beta$ kosa asimptota krive $y = f(x)$, na osnovu definicije 2.5.1 zaključujemo da važe asimptotske jednakosti

$$f(x) \sim \alpha x + \beta \quad (x \to -\infty) \qquad \text{ili} \qquad f(x) \sim \alpha x + \beta \quad (x \to +\infty).$$

Naglasimo da je, prema definiciji 2.5.3, prava $y = \alpha x + \beta$ kosa asimptota krive $y = f(x)$ ako je razlika njihovih odgovarajućih ordinata beskonačno mala veličina kada $x \to -\infty$ ili kada $x \to +\infty$.

Definicija 2.5.4. Za pravu $y = \beta$ kažemo da je *horizontalna asimptota* krive $y = f(x)$ ako je

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - \beta) = 0 \qquad \text{ili} \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \beta) = 0.$$

Primer 2.5.4. Prava $y = 0$ je horizontalna asimptota krive $y = e^x$ jer je

$$\lim_{x\to-\infty}(e^x - 0) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0. \quad \triangle$$

Primer 2.5.5. Prava $y = 1$ je horizontalna asimptota krive $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ jer je

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2-1}{x^2+1} - 1\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x^2+1} = 0. \quad \triangle$$

Primer 2.5.6. Prava $y = -1$ je horizontalna asimptota krive $y = \dfrac{1-x^2}{x^2}$ jer je

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1-x^2}{x^2} + 1\Big) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0. \quad \triangle$$

Dakle, ako je $y = \beta$ horizontalna asimptota krive $y = f(x)$, važe asimptotske jednakosti

$$f(x) \sim \beta \quad (x \to -\infty) \qquad \text{ili} \qquad f(x) \sim \beta \quad (x \to +\infty).$$

Isto tako, na osnovu definicije 2.5.4 zaključujemo da ako je prava $y = \beta$ asimptota krive $y = f(x)$, razlika $f(x) - \beta$ je beskonačno mala veličina kada $x \to -\infty$ ili kada $x \to +\infty$.

Definicija 2.5.5. Za pravu $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) kažemo da je *vertikalna asimptota* krive $y = f(x)$ ako je

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ili} \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty.$$

Primer 2.5.7. Prava $x = 0$ je vertikalna asimptota krive $y = \log x$ jer je

$$\lim_{x\to 0+}\log x = -\infty. \quad \triangle$$

Primer 2.5.8. Prava $x = 1$ je vertikalna asimptota krive $y = \dfrac{1}{1-x}$ jer je

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{1-x} = +\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to 1+}\frac{1}{1-x} = -\infty. \quad \triangle$$

Primer 2.5.9. Prava $x = 2$ je vertikalna asimptota krive $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$ jer je

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x}{(x-2)^2} = +\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to 2+}\frac{x}{(x-2)^2} = +\infty. \quad \triangle$$

Na osnovu definicije 2.5.5 nije teško zaključiti da je prava $x = a$ vertikalna asimptota krive $y = f(x)$ ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ beskonačno velika veličina kada $x \to a$. Očigledno, to znači: ako je prava $x = a$ vertikalna asimptota krive $y = f(x)$, tačka $x = a$ je tačka prekida druge vrste funkcije f.

Sada ćemo, pod pretpostavkom da kriva $y = f(x)$ ima kosu asimptotu, kada na primer $x \to +\infty$, izložiti postupak za njeno određivanje. Neka je, dakle, prava $y = \alpha x + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ kosa asimptota krive $y = f(x)$. Tada je, prema definiciji 2.5.3,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0, \tag{2.5.1}$$

tj.

$$\lim_{x\to+\infty} x\Big(\frac{f(x)}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x}\Big) = 0,$$

što znači da važi jednakost

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\frac{f(x)}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x}\Big) = 0,$$

odakle neposredno sleduje da je

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{2.5.2}$$

jer je $\lim\limits_{x\to+\infty} (\beta/x) = 0$. Dakle, koeficijent α je određen pomoću (2.5.2).

Za tako određeno α, iz jednakosti (2.5.1) dobijamo

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x). \tag{2.5.3}$$

Razumljivo, kriva $y = f(x)$ nema kosu asimptotu kada $x \to +\infty$, ako bar jedna od graničnih vrednosti (2.5.2) ili (2.5.3) ne postoji.

Ako kriva ima kosu asimptotu kada $x \to -\infty$, postupak za njeno određivanje je sličan prethodnom.

Primer 2.5.10. Za krivu $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ (videti primer 2.5.3), kosa asimptota $y = \alpha x + \beta$, kada $x \to -\infty$, određena je pomoću

$$\alpha = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x + 1)} = 1$$

i

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - \alpha x) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-3x+2}{x+1} - x\Big) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x-2}{x+1} = -4.$$

Iste vrednosti se dobijaju i ako $x \to +\infty$.

Prema tome, tražena kosa asimptota je prava $y = x - 4$. $\triangle$

Napomenimo da je ponekad kosu asimptotu krive $y = f(x)$ moguće odrediti i neposredno. Naime, ako je $y = f(x) = \alpha x + \beta + g(x)$, gde je $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, tada je $x \mapsto \alpha x + \beta$ glavni deo funkcije f kada $x \to \infty$, tj. $f(x)$ i $\alpha x + \beta$ se asimptotski jednako ponašaju. Važi, dakle, asimptotska jednakost $f(x) \sim \alpha x + \beta$ kada $x \to \infty$, što, zapravo, znači da je prava $y = \alpha x + \beta$ kosa asimptota krive $y = f(x)$.

Primer 2.5.11. Neka je $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$ $(x \neq 0)$. Kako je

$$\frac{x^2+x+1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}\,,$$

zaključujemo da je, kada $x \to \infty$, prava $y = x + 1$ asimptota krive $y = f(x)$ jer je $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x) = 0$. $\triangle$

Primer 2.5.12. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}$. Kako je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

i

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) &= \lim_{x\to\infty}\Big(\sqrt[3]{x^3+x^2} - x\Big)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}{x^2} + \dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x} + 1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^2} + \sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{3}\,,
\end{aligned}$$

zaključujemo da je prava $y = x + 1/3$ asimptota krive $y = \sqrt[3]{x^3+x^2}$ i kada $x \to -\infty$ i kada $x \to +\infty$.

Do istog rezultata moguće je doći i na sledeći način: Iz

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} = (x^3+x^2)^{1/3} = x\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{1/3},$$

na osnovu Taylorove formule

$$\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big) \qquad \Big(\frac{1}{x}\to 0\Big),$$

neposredno dobijamo da važi asimptotska jednakost

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} \sim x+\frac{1}{3} \qquad \Big(\frac{1}{x}\to 0,\ \text{tj. } x\to\infty\Big).$$

Znači, prava $y = x+1/3$ je asimptota krive $y = \sqrt[3]{x^3+x^2}$ kada $x\to\infty$. △

Određivanje horizontalnih asimptota krive $y = f(x)$, kada $x \to -\infty$ ili kada $x \to +\infty$, vrši se neposredno na osnovu definicije 2.5.4, tj. traženjem odgovarajućih graničnih vrednosti $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ili $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Nije teško zaključiti da je horizontalna asimptota krive $y = f(x)$, u stvari, njena kosa asimptota $y = \alpha x+\beta$, za koju je $\alpha = 0$. Zbog toga se određivanje horizontalnih asimptota neke krive može svesti na određivanje njenih kosih asimptota.

Od interesa je naglasiti da je ponekad važno utvrditi ponašanje krive $y = f(x)$ prema svojim asimptotama: kosoj $y = \alpha x+\beta$, horizontalnoj $y = \beta$ ili vertikalnoj $x = a$.

Za kosu i horizontalnu asimptotu, to ponašanje se ispituje tako što se u postupku traženja graničnih vrednosti

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(\alpha x+\beta)\big) \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-\beta\big),$$

ako je moguće, konstatuje znak razlike $f(x)-(\alpha x+\beta)$, tj. $f(x)-\beta$, kada x neograničeno raste.

Primer 2.5.13. U primeru 2.5.12 utvrdili smo da je prava $y = x+1/3$ kosa asimptota krive $y = \sqrt[3]{x^3+x^2}$. Lako se proverava da važe nejednakosti

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} > x+\frac{1}{3} \quad (x<0) \qquad \text{i} \qquad \sqrt[3]{x^3+x^2} < x+\frac{1}{3} \quad (x>0),$$

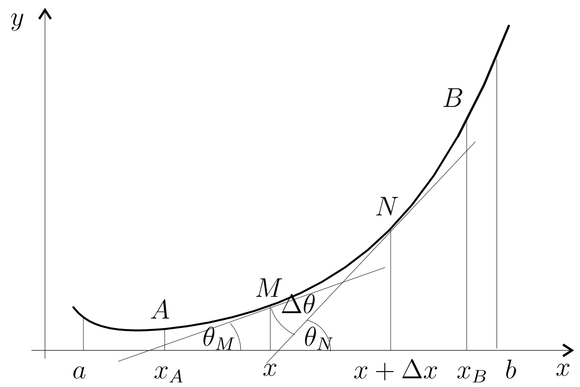
odakle zaključujemo da je u prvom slučaju, tj. kada $x\to-\infty$, kriva iznad asimptote, a u drugom slučaju, kada $x\to+\infty$, kriva je ispod asimptote. △

Primer 2.5.14. Ako je $f(x) = e^{-x}+1$, kriva $y = e^{-x}+1$ ima horizontalnu asimptotu $y = 1$ kada $x\to+\infty$. Međutim, kako je $e^{-x}+1-1 = e^{-x} > 0$ za svako x, zaključujemo da su ordinate krive $y = e^{-x}+1$ veće od ordinata njene asimptote $y = 1$, pa se posmatrana kriva tako ponaša prema asimptoti i kada $x\to+\infty$. △

Ponašanje krive $y = f(x)$ prema vertikalnoj asimptoti $x = a$ izučili smo kada smo razmatrali tačke prekida funkcija (videti odeljak 2.2 u III glavi).

2.6. Krivina krive i poluprečnik krivine

Neka je $x \mapsto f(x)$ dvaput diferencijabilna funkcija u (a, b). Uočimo na krivoj $y = f(x)$ (videti sliku 2.6.1) dve njene tačke $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ $(a < x_A < x_B < b)$. Iako će o tome biti reči kasnije (glava V) pretpostavićemo da nam je pojam *dužine luka krive* poznat intuitivno.



Sl. 2.6.1

Prirodno je uzeti da se dužina luka svake krive računa od neke uočene tačke krive, uzete za početnu tačku, u smeru koji je okarakterisan rašćenjem promenljive x. U našem slučaju to bi mogla da bude tačka A. Da bismo naglasili da je reč o dužini luka krive od tačke A do tačke B, ako je to potrebno, tu dužinu označavaćemo sa $s = l(\overset{\frown}{AB})$.

Neka su tačke $M(x, y)$ i $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$ na luku $\overset{\frown}{AB}$ krive $y = f(x)$ $(x_A < x < x + \Delta x < x_B)$ i neka su $\theta_M = \theta$ i $\theta_N = \theta + \Delta\theta$ veličine uglova koje sa pozitivnim smerom x-ose zaklapaju tangente povučene na krivu $y = f(x)$ u tačkama M i N, respektivno. Naglasimo da je $\Delta\theta$, u stvari, ugao između tih tangenata.

Očigledno je da je dužina luka krive, u oznaci s, u stvari, funkcija promenljive x. Može se, dakle, pisati da je s funkcija $x \mapsto s(x)$. Kako se apscise tačaka N i M razlikuju za Δx, dužinu luka krive $y = f(x)$ od tačke M do tačke N označićemo sa Δs, pri čemu je

$$\Delta s = l(\overset{\frown}{MN}) = l(\overset{\frown}{AN}) - l(\overset{\frown}{AM}).$$

Ugao θ takođe zavisi od x, pa se može uzeti da je θ funkcija $x \mapsto \theta(x)$. Isto tako je očigledno, ali ćemo, ipak, naglasiti da važe implikacije:

$$N \to M \quad \Rightarrow \quad \Delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta s \to 0 \quad \Rightarrow \quad N \to M.$$

Definisaćemo sada dva nova pojma, pri čemu ćemo se koristiti gore navedenim oznakama.

Definicija 2.6.1. *Srednja krivina luka* $\overset{\frown}{MN}$, u oznaci K_{sred}, je veličina

$$K_{\text{sred}} = \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| .$$

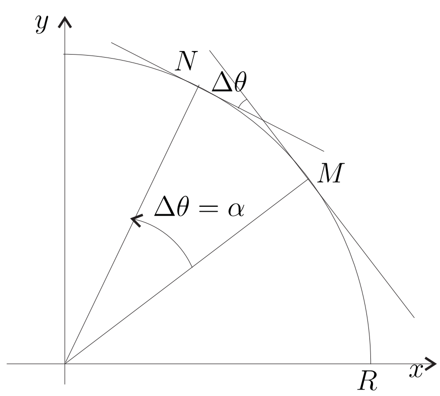
Definicija 2.6.2. Za graničnu vrednost

$$K = \lim_{N \to M} K_{\text{sred}} = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$

kažemo da je *krivina krive u tački* M.

Primer 2.6.1. Grafik funkcije $x \mapsto f(x) = x$ je prava $y = x$. Kako je, za bilo koje dve njene tačke, uvek $\Delta\theta = 0$, sleduje da je srednja krivina bilo kog luka prave $y = x$ jednaka nuli, tj. važi $K_{\text{sred}} = 0$, odakle dobijamo da je i krivina K prave $y = x$ u svakoj njenoj tački jednaka nuli. Za pravu $y = x$, prema tome važi $K = 0$.

Napomenimo da ovu osobinu ima bilo koja prava. Prema tome, krivina svake prave jednaka je nuli. $\triangle$



Sl. 2.6.2

Primer 2.6.2. Posmatrajmo krug $x^2 + y^2 = R^2$. Nije teško proveriti (videti sliku 2.6.2) da je za luk $\overset{\frown}{MN}$ odgovarajući ugao $\Delta\theta$ jednak centralnom uglu α koji odgovara luku $\overset{\frown}{MN}$ jer su to uglovi sa normalnim kracima. Zato je

$$K_{\text{sred}} = \frac{\Delta\theta}{R\alpha} = \frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{1}{R} .$$

Naravno, tada je i krivina luka $\widehat{MN}$ određena sa $K = 1/R$. Prema tome, dati krug, ali to znači i svaki krug, ima konstantnu krivinu K koja je brojno jednaka recipročnoj vrednosti njegovog poluprečnika R. $\triangle$

Napomena 2.6.1. Ponekada se, za tačke krive u kojima njena krivina ima ekstremne vrednosti kaže da su *temena krive*.

Teorema 2.6.1. *Ako je $x \mapsto f(x)$ dvaput diferencijabilna funkcija u (a,b), tada je krivina krive $y = f(x)$ u proizvoljnoj tački x intervala (a,b) određena pomoću*

$$K = \left| \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \right| . \tag{2.6.1}$$

Dokaz. Kako su θ i s funkcije promenljive x, može se uzeti da je funkcija θ parametarski zadata kao funkcija od s, gde promenljiva x igra ulogu parametra. Stoga je, zbog

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\theta'_x}{s'_x},$$

krivina K, u skladu sa definicijom 2.6.2, određena pomoću

$$K = \left| \frac{\theta'_x}{s'_x} \right| . \tag{2.6.2}$$

S obzirom da je $\tan\theta = y'$, tj. $\theta = \arctan y'$, za θ'_x dobijamo

$$\theta'_x = \frac{y''}{1+y'^{\,2}} . \tag{2.6.3}$$

S druge strane, iz trougla MNP (videti sliku 2.6.1) sleduje

$$\overline{MN}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \qquad \text{tj.} \qquad \overline{MN} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

odakle dobijamo

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{l(\widehat{MN})}{\Delta x} = \frac{l(\widehat{MN})}{\overline{MN}} \cdot \frac{\overline{MN}}{\Delta x} = \frac{l(\widehat{MN})}{\overline{MN}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} . \tag{2.6.4}$$

Dužina luka $\widehat{MN}$ i dužina njemu odgovarajuće tetive $\overline{MN}$ ekvivalentne su beskonačno male veličine ako su M i N bliske tačke, tj. ako $M \to N$. To, u stvari, znači da važi jednakost

$$\lim_{N\to M} \frac{l(\widehat{MN})}{\overline{MN}} = 1. \tag{2.6.5}$$

Prema tome, na osnovu (2.6.5), iz jednakosti (2.6.4) dobijamo da je

$$s'_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \sqrt{1+\Big(\frac{\Delta y}{\Delta x}\Big)^2} = \sqrt{1+y'^{\,2}}\,. \tag{2.6.6}$$

Na osnovu (2.6.6) i (2.6.3), jednakost (2.6.2) postaje (2.6.1), čime je teorema dokazana. $\square$

Neka je $y = f(x)$ kriva koja predstavlja grafik dvaput diferencijabilne funkcije $x \mapsto f(x)$ za $x \in (a,b)$ i neka je M proizvoljna tačka intervala (a,b).

Definicija 2.6.3. Ako je M tačka krive $y = f(x)$, tada za krug koji:

1° prolazi kroz tačku M i u njoj ima zajedničku tangentu sa krivom $y = f(x)$,
2° u okolini tačke M ima isti smisao konveksnosti sa lukom krive $y = f(x)$,
3° ima istu krivinu kao i luk krive $y = f(x)$ u tački M,

kažemo da je *krug krivine* krive $y = f(x)$ u tački M.

Napomena 2.6.2. Ako je $x \mapsto f(x)$ funkcija kojom je definisana kriva $y = f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ funkcija koja definiše odgovarajući luk $y = g(x)$ kruga krivine krive $y = f(x)$ u tački $x = a$, iz definicije 2.6.3 neposredno sleduje da važe jednakosti

$$f(a) = g(a), \qquad f'(a) = g'(a), \qquad f''(a) = g''(a).$$

Napomena 2.6.3. Kao što je tangenta neke krive granični položaj prave koja prolazi kroz dve beskrajno bliske tačke te krive, krug krivine krive je granični položaj kruga koji prolazi kroz tri beskrajno bliske tačke krive. Kako se za granični položaj kruga koji prolazi kroz tri beskrajno bliske tačke neke krive kaže da predstavlja tzv. *oskulatorni krug* te krive, zaključujemo da se krug krivine neke krive i njen oskulatorni krug poklapaju.

Definicija 2.6.4. Za poluprečnik kruga krivine krive $y = f(x)$ u tački M kažemo da je *poluprečnik krivine* krive $y = f(x)$ u tački M, a za centar kruga krivine kažemo da je *centar krivine* te krive u tački M.

Napomena 2.6.4. Iako je jasno, naglasimo da se centar kruga krivine u tački $x = a$ nalazi na normali na krivu u tački $M(a, f(a))$. Dakle, na pravoj

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a) \quad (f'(a) \neq 0) \qquad \text{ili} \qquad x = a \quad (f'(a) = 0).$$

Na osnovu definicija 2.6.4 i 2.6.3 i na osnovu primera 2.6.2, zaključujemo da ako kriva $y = f(x)$ ima u proizvoljnoj tački $M(x, y)$ krivinu K, određenu pomoću (2.6.1), poluprečnik krivine te krive u toj tački je $R = 1/K$, tj. poluprečnik R krivine krive $y = f(x)$ u tački M određen je pomoću

$$R = \left| \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \right| . \tag{2.6.7}$$

Primer 2.6.3. Neka je $y = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Kako je $y' = 2x$, $y'' = 2$, važi

$$K = \frac{1}{R} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}} ,$$

odakle neposredno dobijamo da kriva $y = x^2$, u tački $x = 0$ ima krivinu $K = 2$ i poluprečnik krivine $R = 1/2$. Isto tako, ta parabola ima u tački $x = 1$ krivinu $K = 2\sqrt{5}/25$ i poluprečnik krivine $R = 5\sqrt{5}/2$. △

Primer 2.6.4. Posmatrajmo elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(-a < x < a,\ a > b)$ zadatu i parametarski sa

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Lako je utvrditi da su krivina i poluprečnik krivine date elipse određeni pomoću

$$K = \frac{1}{R} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{a^4b^4}{(a^4y^2 + b^4x^2)^{3/2}} .$$

Kako je $a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t$, zaključujemo da je

$$b^2 \leq a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \leq a^2,$$

tj. da za krivinu K važe nejednakosti

$$\frac{b}{a^2} \leq K \leq \frac{a}{b^2} .$$

Nije teško proveriti da krivina K dostiže svoju najveću vrednost a/b^2 ako je $t = 0$ i $t = \pi$, tj. u tačkama $A(a, 0)$ i $C(-a, 0)$ i svoju najmanju vrednost b/a^2 ako je $t = \pi/2$ i $t = 3\pi/2$, dakle u tačkama $B(0, b)$ i $D(0, -b)$. Tačke A, B, C i D su, prema tome (videti napomenu 2.6.1), temena date elipse. Odgovarajući poluprečnici krivina su $R = b^2/a$ i $R = a^2/b$. △

Prirodno, sada se postavlja pitanje određivanja kruga krivine krive $y = f(x)$. Ako je $M(x, f(x))$ tačka za koju određujemo krug krivine, prethodno određenog poluprečnika R, i ako je tačka $C(\xi, \eta)$ centar toga kruga, njegova jednačina je

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = R^2. \tag{2.6.8}$$

Međutim, kako centar C leži na normali krive u tački M, to znači da je

$$y = \eta - \frac{1}{y'}(x-\xi).$$

Na osnovu (2.6.7) i (2.6.8), dobijamo da su koordinate centra C određene pomoću

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2) \qquad \text{i} \qquad \eta = y + \frac{1}{y''}(1+y'^2), \tag{2.6.9}$$

čime je krug (2.6.8) potpuno određen.

Primer 2.6.5. 1° Nije teško zaključiti da su krugovi krivine krive $y = x^2$, u tačkama $x = 0$ i $x = 1$, respektivno određeni jednačinama

$$x^2 + \Big(y - \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4} \qquad \text{i} \qquad (x+4)^2 + \Big(y - \frac{7}{2}\Big)^2 = \frac{125}{4}\,.$$

2° Elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ima u tački $x = a$ krug krivine čija je jednačina

$$\Big(x - \frac{a^2-b^2}{a}\Big)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}\,.$$

U tački $x = 0$ krug krivine date elipse je

$$x^2 + \Big(y + \frac{a^2-b^2}{b}\Big)^2 = \frac{a^4}{b^2}\,. \quad \triangle$$

Definicija 2.6.5. Za skup svih centara krivine krive $y = f(x)$ kažemo da je *evoluta* krive $y = f(x)$, a za samu krivu kažemo da je *evolventa* svoje evolute.

Primer 2.6.6. Evoluta cikloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.6.10}$$

je cikloida

$$x = a(t + \sin t), \quad y = -a(1 + \cos t) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{2.6.11}$$

Cikloida (2.6.10) je evolventa cikloide (2.6.11). $\triangle$

Primer 2.6.7. Evoluta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \ \ (-a \leq x \leq a)$ je kriva, poznata pod nazivom *astroida*, čija je jednačina

$$\Big(\frac{ax}{a^2 - b^2}\Big)^{3/2} + \Big(\frac{by}{a^2 - b^2}\Big)^{3/2} = 1. \qquad \triangle$$

Navodimo bez dokaza jedno interesantno tvrđenje:

Teorema 2.6.2. *Svaka normala na krivu $y = f(x)$ je tangenta evolute te krive. I obrnuto, svaka tangenta evolute krive $y = f(x)$ je normala na tu krivu.*

Napomenimo da je za datu krivu njena evoluta jednoznačno određena. Ali, obrnuto ne važi. Naime, za datu krivu njene evolvente su tzv. ekvidistantne krive. To su, u stvari, krive kod kojih je normala na jednu od njih normala i na sve ostale, pri čemu su, za dve uočene krive, odstojanja između tačaka tih krivih, računatih duž zajedničkih normala, među sobom jednaka.

2.7. Dodiri krivih

Neka su date funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x) \ \ (x \in \mathbb{R})$.

Definicija 2.7.1. Ako je $f(a) = g(a)$, za krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$ kažemo da imaju *zajedničku tačku $x = a$.*

U prvi mah bi se moglo reći da se krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$ seku u tački $M(a, f(a))$, tj. u tački $M(a, g(a))$. Međutim, to nije uvek slučaj. Naime, nije teško zaključiti da kriva $y = x^2$ i prava $x = 2$ imaju zajedničku tačku $A(2, 4)$ i da je A njihova presečna tačka. Međutim, kriva $y = x^2$ i prava $y = 4x - 4$, takođe, imaju tačku A kao zajedničku tačku, ali se one u njoj ne seku.

Sada bi se, opet nesmotreno, moglo reći da je to zbog toga što je prava $y = 4x - 4$ tangenta krive $y = x^2$ u tački A. Međutim, ni to nije uvek tačno: prava $y = 0$ je u tački $O(0, 0)$ tangenta krive $y = x^3$, a tačka O je, ipak, tačka njihovog preseka.

Zbog toga ćemo detaljnije razmotriti prirodu zajedničkih tačaka, prvo krive i prave, a zatim dveju krivih.

Definicija 2.7.2. Ako je $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna funkcija u tački $x = a$, za krivu $y = f(x)$ i njenu tangentu $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ kažemo da se dodiruju u tački $M(a, f(a))$. Za tačku M kažemo da je njihova *tačka dodira* ili da je njihova *dodirna tačka*. Za svaku drugu pravu koja prolazi kroz tačku M kažemo da u tački M seče krivu $y = f(x)$, a za tačku M kažemo i da je njihova *tačka preseka* ili da je njihova *presečna tačka*.

Očigledno, u oba slučaja u prethodnoj definiciji, tačka M je njihova zajednička tačka.

Na primerima funkcija $x \mapsto f(x) = x^2$ i $x \mapsto f(x) = x^3$, tj. na primerima krivih $y = x^2$ i $y = x^3$ i prave $y = 0$, kao njihove tangente u tački $x = 0$, može se zaključiti da postoje krive koje se ne seku sa svojim tangentama u dodirnim tačkama, ali da ima i takvih krivih čije ih tangente seku u tačkama dodira. U stvari, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.7.1. *Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ dvaput diferencijabilna u nekoj okolini $U(a)$ tačke $x = a$. Kriva $y = f(x)$ i njena tangenta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ se ne seku u dodirnoj tački $x = a$ ako i samo ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ konveksna (konkavna) u toj okolini tačke $x = a$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f konveksna, tj. da je $f''(x) > 0$ za $x \in \overset{\circ}{U}(a)$.

Ako stavimo $g(x) \equiv f(a) + f'(a)(x - a)$, na osnovu Taylorove formule za funkciju f u tački $x = a$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + o((x - a)^2) \qquad (x \to a),$$

neposredno dobijamo

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + o((x - a)^2) \qquad (x \to a),$$

odakle sleduje da je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^2} = \frac{1}{2!} f''(a), \tag{2.7.1}$$

jer je $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{o((x - a)^2)}{(x - a)^2} = 0$.

Kako je $f''(a) > 0$, na osnovu jednakosti (2.7.1), zaključujemo da je $f(x) - g(x) > 0$, tj. da su sve ordinate krive $y = f(x)$ u okolini $\overset{\circ}{U}(a)$ veće od odgovarajućih ordinata tangente $y = g(x)$. To, u stvari, znači da kriva $y = f(x)$ i njena tangenta u tački $x = a$ nemaju drugih zajedničkih tačaka osim tačke $M(a, f(a))$.

Obrnuto, pretpostavimo da kriva $y = f(x)$ i njena tangenta u tački $x = a$, tj. da kriva $y = f(x)$ i prava $y = g(x)$, nemaju u okolini $U(a)$ drugih zajedničkih tačaka osim tačke $M(a, f(a))$. Pretpostavimo, dakle, da je, na primer, za $x \in \mathring{U}(a)$ razlika $f(x) - g(x)$ pozitivna i da važe jednakosti $f(a) = g(a)$ i $f'(a) = g'(a)$. To znači da važi jednakost (2.7.1), odakle nije teško zaključiti da je $f''(a) > 0$, što dokazuje da je za $x \in \mathring{U}(a)$ funkcija $x \mapsto f(x)$ konveksna.

Na sličan način dokazuje se tvrđenje teoreme i u drugom slučaju. □

Prirodno, to znači da važi i sledeći rezultat:

Teorema 2.7.2. *Neka je $x \mapsto f(x)$ $(x \in U(a))$ dvaput diferencijabilna funkcija. Tada se kriva $y = f(x)$ i njena tangenta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ seku u dodirnoj tački $x = a$ ako i samo ako funkcija f u tački $x = a$ menja prirodu svoje konveksnosti.*

Prema tome, tangenta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ seče krivu $y = f(x)$ u njihovoj dodirnoj tački $x = a$, ako i samo ako je tačka $x = a$ prevojna tačka krive $y = f(x)$.

Dakle, kriva $y = f(x)$ i njena tangenta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ u tački $M(a, f(a))$ se ne seku u dodirnoj tački $x = a$ ako je $f''(a) \neq 0$ i seku se ako je $f''(a) = 0$.

Primeri funkcija koje smo razmatrali ilustruju ova tvrđenja.

Napomena 2.7.1. Na osnovu jednakosti (2.7.1) nije teško zaključiti da je, u prvom slučaju, razlika $f(x) - g(x)$ beskonačno mala veličina reda dva u odnosu na infinitezimalu $x - a$, kada $x \to a$.

Međutim, u drugom slučaju razlika $f(x) - g(x)$ je beskonačno mala veličina trećeg reda u odnosu na infinitezimalu $x - a$ kada $x \to a$, jer je tada $f''(a) = 0$ i $f'''(a) \neq 0$, pa Taylorova formula za funkciju f u tački a glasi

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{3!} f'''(a)(x - a)^3 + o((x - a)^3) \qquad (x \to a),$$

odakle, zbog $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, sleduje

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^2} = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^3} = \frac{1}{3!} f'''(a).$$

Definicija 2.7.3. Ako za funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$, diferencijabilne u tački $x = a$, važe jednakosti $f(a) = g(a)$ i $f'(a) = g'(a)$, za krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$ kažemo da u tački $x = a$ imaju zajedničku tangentu.

Ta zajednička tangenta je određena pomoću

$$y = p + q(x - a) \qquad (p = f(a) = g(a),\ q = f'(a) = g'(a)).$$

Definicija 2.7.4. Za krive koje u svojoj zajedničkoj tački M imaju zajedničku tangentu kažemo da se dodiruju u tački M. Za tačku M kažemo da je njihova dodirna tačka.

Napomena 2.7.2. Kriva i njen krug krivine u uočenoj tački M dodiruju se u toj tački.

Na osnovu teorema 2.7.1 i 2.7.2 zaključili smo da se kriva $y = f(x)$ i njena tangenta u tački $x = a$ ne seku u dodirnoj tački a ako je kriva konveksna ili konkavna u okolini $\overset{\circ}{U}(a)$ dodirne tačke $x = a$, tj. ako je $f''(a) \neq 0$. Ali, ako je dodirna tačka $x = a$ istovremeno i prevojna tačka krive $y = f(x)$, kriva i njena tangenta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ seku se u dodirnoj tački $x = a$.

Na osnovu ovog zaključka i na osnovu napomene 2.7.1, prirodno je uvesti sledeću definiciju:

Definicija 2.7.5. Zajednička tačka $x = a$ krivih $y = f(x)$ i $y = g(x)$ je njihova *dodirna tačka reda* n ($n \in \mathbb{N}$) ako je razlika $f(x) - g(x)$ beskonačno mala veličina reda $n + 1$ u odnosu na beskonačno malu veličinu $x - a$ kada x teži ka a.

Važi sledeći rezultat:

Teorema 2.7.3. *Neka je $x = a$ zajednička tačka krivih $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i neka su funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ u njoj $(n + 1)$-puta diferencijabilne, tada je tačka $x = a$ njihova dodirna tačka reda n $(n \geq 0)$ ako i samo ako važe jednakosti*

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.7.2}$$

i ako je

$$f^{(n+1)}(a) \neq g^{(n+1)}(a). \tag{2.7.3}$$

Dokaz. Ako su ispunjeni uslovi (2.7.2) i (2.7.3), za funkciju $x \mapsto f(x) - g(x)$ u tački $x = a$ važi Taylorova formula

$$f(x) - g(x) = \frac{f^{(n+1)}(a) - g^{(n+1)}(a)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} + o((x - a)^{n+1}), \tag{2.7.4}$$

odakle sleduje

$$\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(a)-g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}+\frac{o((x-a)^{n+1})}{(x-a)^{n+1}},$$

tj.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\Big(f^{(n+1)}(a)-g^{(n+1)}(a)\Big)\neq 0. \tag{2.7.5}$$

Kako je $f^{(n+1)}(a)-g^{(n+1)}(a)\neq 0$, jednakost (2.7.5) kazuje da je razlika $f(x)-g(x)$ beskonačno mala veličina reda $n+1$ u odnosu na beskonačno malu veličinu $x-a$, što, prema definiciji 2.7.5, znači da je tačka $x=a$ dodirna tačka reda n krivih $y=f(x)$ i $y=g(x)$.

Obrnuto, ako je tačka $x=a$ dodirna tačka reda n krivih $y=f(x)$ i $y=g(x)$, na osnovu definicije 2.7.5 sleduje da postoji konstanta λ ($\lambda\neq 0$) tako da je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^{n+1}}=\lambda \qquad (\lambda\neq 0),$$

tj. da važi jednakost

$$f(x)-g(x)=\lambda(x-a)^{n+1}+o((x-a)^{n+1}) \qquad (x\to a),$$

koja, u stvari, predstavlja Taylorovu formulu funkcije $x\mapsto f(x)-g(x)$ u tački $x=a$. Kako to znači da je odgovarajući Taylorov polinom posmatrane funkcije $x\mapsto f(x)-g(x)$ oblika $T_{n+1}(x)=\lambda(x-a)^{n+1}$, zaključujemo da važe jednakosti

$$f^{(k)}(a)-g^{(k)}(a)=0 \qquad (k=0,1,\ldots,n),$$

tj. (2.7.2), ali i da je

$$\frac{1}{(n+1)!}\Big(f^{(n+1)}(a)-g^{(n+1)}(a)\Big)=\lambda\neq 0,$$

što znači da važi i nejednakost (2.7.3). $\square$

Na osnovu prethodne teoreme i teoreme 2.4.9, nije teško zaključiti da se krive $y=f(x)$ i $y=g(x)$ ne seku u dodirnoj tački, ako je njen red dodira neparan broj i da se u dodirnoj tački seku, ako je njen red dodira paran broj.

Primer 2.7.1. Posmatrajmo funkcije $x \mapsto f(x) = x^3$ i $x \mapsto g(x) = (x-2)^2$. Kako je $f(1) = g(1)$, tačka $A(1,1)$ je zajednička tačka krivih $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Međutim, ona nije njihova dodirna tačka jer je $f'(1) \neq g'(1)$. Krive se u njoj samo seku. $\triangle$

Primer 2.7.2. Ako su funkcije f i g zadate pomoću $x \mapsto f(x) = x^3$ i $x \mapsto g(x) = \sqrt{6x-5}$, krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$ imaju zajedničku tačku $A(1,1)$ i u njoj zajedničku tangentu $y = 3x - 2$. Tačka A je, prema tome, njihova dodirna tačka. Kako je $f''(1) \neq g''(1)$, krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$ se ne seku u njihovoj dodirnoj tački A. $\triangle$

Primer 2.7.3. Krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gde su funkcije f i g određene sa $x \mapsto f(x) = x$ i $x \mapsto g(x) = \sin x$, dodiruju se u tački $O(0,0)$, ali se u njoj i seku jer je

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0) \qquad \text{i} \qquad f'''(0) \neq g'''(0).$$

Tačka O je njihova dodirna tačka reda dva. $\triangle$

Primer 2.7.4. Ako su funkcije f, g i h definisane pomoću

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \mapsto g(x) = x^2 - 3x + 3 \quad \text{i} \quad x \mapsto h(x) = -x^3 + 4x^2 - 6x + 4,$$

tačka $A(1,1)$ je

1° za krive $y = f(x)$ i $y = g(x)$ dodirna tačka drugog reda,

2° za krive $y = f(x)$ i $y = h(x)$ dodirna tačka reda tri, i

3° za krive $y = g(x)$ i $y = h(x)$ dodirna tačka prvog reda. $\triangle$

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.7.4. *Ako je $x \mapsto T_n(x)$ Taylorov polinom stepena n koji u tački $x = a$ odgovara funkciji $x \mapsto f(x)$, tada se krive $y = f(x)$ i $y = T_n(x)$ dodiruju u tački a i tačka $x = a$ je njihova dodirna tačka reda n.*

Dokaz. Tvrđenje teoreme sleduje neposredno: iz jednakosti (1.12.2), tj. iz jednakosti $f^{(k)}(a) = T_n^{k)}(a)$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. $\square$

Primer 2.7.5. Krive $y = e^x$ i $y = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3$ dodiruju se u tački $A(1,1)$. Njihov red dodira je tačno tri. $\triangle$

Napomenimo da teorema 2.7.4 ne osporava mogućnost da red dodira krivih $y = f(x)$ i $y = T_n(x)$ bude i veći od n.

Primer 2.7.6. Kako je

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5) \qquad (x \to a),$$

krive

$$y = \cos x \qquad \text{i} \qquad y = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

se dodiruju u tački $x = 0$. Red te dodirne tačke je pet. $\triangle$

Kao što smo naglasili (videti napomenu 2.7.2), kriva i njen krug krivine dodiruju se među sobom. U stvari, važi tvrđenje koje navodimo bez dokaza:

Teorema 2.7.5. *Od svih krugova koji u uočenoj tački dodiruju neku krivu, njen krug krivine u toj tački čini sa krivom dodir najvišeg mogućeg reda.*

To, zapravo, znači da je red dodira krive i njenog kruga krivine najmanje dva. Međutim, kao što ćemo videti, red njihovog dodira ne može biti veći od tri.

Primer 2.7.7. Krugovi $x^2 + y^2 = b^2$ i $x^2 + (y + b)^2 = 4b^2$ dodiruju elipsu

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{2.7.6}$$

u tački $B(0, b)$. Nije teško proveriti da se u oba slučaja radi isključivo o dodirima prvog reda. $\triangle$

Primer 2.7.8. Parabola $y = x^2$ i njen krug krivine u tački $A(1, 1)$, tj. krug

$$(x + 4)^2 + \Bigl(y - \frac{7}{2}\Bigr)^2 = \frac{125}{4}$$

imaju u tački A dodir drugog reda. $\triangle$

Primer 2.7.9. Kao što smo videli (videti primer 2.6.4), krug

$$x^2 + \Bigl(y + \frac{a^2 - b^2}{b}\Bigr)^2 = \frac{a^4}{b^2}$$

je krug krivine elipse (2.7.6) u tački $B(0, b)$. Međutim, tačka B je njihova dodirna tačka reda tri. $\triangle$

Iz ovih nekoliko primera mogli smo da zaključimo da se krug i kriva mogu dodirivati u nekoj tački tako da su im redovi dodira jedan, dva ili tri.

U stvari, ne upuštajući se u njihovo dokazivanje, mogu se izvesti sledeći zaključci:

1° Red dodira kruga i krive je jedan, ako se radi o bilo kojem krugu koji dodiruje krivu ;

2° Red dodira kruga i krive je dva, ako se radi o krugu krivine krive u njihovoj dodirnoj tački ;

3° Red dodira kruga i krive je tri, ako se radi o krugu krivine krive u njihovoj dodirnoj tački koja je teme krive, tj. u tačkama krive u kojima krivina krive ima ekstremne vrednosti.

Primeri 2.7.7, 2.7.8 i 2.7.9 ilustruju tačnost ovih zaključaka.

2.8. Glatke krive, prelomne i povratne tačke

U ovom odeljku ćemo ukazati na još nekoliko pojmova koji se odnose na funkcije i njihove grafike.

Definicija 2.8.1. Za diferencijabilnu funkciju $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$, čiji je izvod $x \mapsto f'(x)$ neprekidna funkcija, kažemo da je *neprekidno-diferencijabilna funkcija*.

Definicija 2.8.2. Ako je $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ neprekidno-diferencijabilna funkcija, za krivu $y = f(x)$ $(x \in D)$ kažemo da je *glatka kriva*.

Primer 2.8.1. Krive $y = \sin x$ i $y = x^2 + 3$ su glatke krive za $x \in \mathbb{R}$, jer su $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto x^2 + 3$ neprekidno-diferencijabilne funkcije za svako realno x. $\triangle$

Primer 2.8.2. Kako su funkcije $x \mapsto e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ i $x \mapsto \log x$ $(x > 0)$ neprekidno-diferencijabilne, za $x \in \mathbb{R}$ i za $x > 0$ respektivno, krive $y = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ i $y = \log x$ $(x > 0)$ su glatke. $\triangle$

Definicija 2.8.3. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ neprekidno-diferencijabilna u intervalu $I \subset D$, za luk krive $y = f(x)$ $(x \in I)$ kažemo da je *glatki luk krive* $y = f(x)$.

Primer 2.8.3. Neka je $x \mapsto f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Kako je f neprekidno-diferencijabilna funkcija u intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, kriva $y = f(x)$ ima dva glatka luka:

$$y = f(x) = -x \quad (-\infty < x < 0) \qquad \text{i} \qquad y = f(x) = x \quad (0 < x < +\infty). \quad \triangle$$

Primer 2.8.4. Krivu $y = f(x)$ za koju je $f(x) = x^2$ $(x \leq 0)$ i $f(x) = \sin x$ $(x \geq 0)$, takođe čine njena dva glatka luka krivih $y = x^2$ i $y = \sin x$. $\triangle$

Napomena 2.8.1. Nije teško zaključiti: Ako u tački $x = a$ funkcija $x \mapsto f(x)$ ima izvod, tada postoji okolina $U(a, \delta)$ takva da je luk krive $y = f(x)$ za $x \in U(a, \delta)$ njen glatki luk.

Definicija 2.8.4. Neka je $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ neprekidna funkcija. Ako krivu $y = f(x)$ $(x \in D)$ čini konačan broj njenih glatkih lukova, za krivu $y = f(x)$ kažemo da je *deo po deo glatka kriva*.

Primer 2.8.5. Neka je $x \mapsto f(x) = \sqrt{|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$. Kriva $y = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ je deo po deo glatka kriva jer je čine njena dva glatka luka:

$$y = f(x) = \sqrt{-x} \quad (-\infty < x \leq 0) \qquad \text{i} \qquad y = f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty). \quad \triangle$$

Primer 2.8.6. Kriva $y = |\sin x|$ $(-2\pi < x < 2\pi)$ je deo po deo glatka kriva jer je čine četiri njena glatka luka:

$$\begin{aligned} &y = \sin x \quad (-2\pi < x \leq -\pi), && y = -\sin x \quad (-\pi \leq x \leq 0), \\ &y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi), && y = -\sin x \quad (\pi \leq x < 2\pi). \quad \triangle \end{aligned}$$

Napomena 2.8.2. Naravno, u trivijalnom smislu, svaka glatka kriva je i deo po deo glatka kriva.

Neka je $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ i neka je $y = f(x)$ deo po deo glatka kriva. Posmatrajmo dva susedna glatka luka ove krive

$$y = f(x) \quad (\alpha < x \leq a) \quad \text{i} \quad y = f(x) \quad (a \leq x < \beta) \quad (\alpha, \beta \in D), \tag{2.8.1}$$

za koje je, kao što vidimo, tačka $A(a, f(a))$ njihova zajednička tačka.

Definicija 2.8.5. Ako su $f'_-(a)$ i $f'_+(a)$ konačne vrednosti i ako je $f'_-(a) \neq f'_+(a)$, za tačku $A(a, f(a))$ kažemo da je *prelomna tačka* deo po deo glatke krive (2.8.1).

Primer 2.8.7. Kao što smo videli, kriva $y = f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ je deo po deo glatka kriva. Kako je $f'_-(0) = -1$ i $f'_+(0) = 1$, zaključujemo da je tačka $O(0, 0)$ prelomna tačka krive $y = f(x) = |x|$. $\triangle$

Primer 2.8.8. Prelomne tačke krive $y = f(x) = |\sin x|$ su tačke $A_k(k\pi, 0)$, gde je k bilo koji ceo broj. $\triangle$

Definicija 2.8.6. Ako je

$$f'_-(a) = -\infty \quad \text{i} \quad f'_+(a) = +\infty \quad \text{ili} \quad f'_-(a) = +\infty \quad \text{i} \quad f'_+(a) = -\infty,$$

za tačku $A(a, f(a))$ kažemo da je *povratna tačka* krive $y = f(x)$.

Primer 2.8.9. Tačka $x = 0$ je povratna tačka krive $y = f(x) = \sqrt{|x|}$. $\triangle$

Definicijom 2.8.4 uveli smo pojam deo po deo glatke krive, podrazumevajući da je ta kriva grafik jedne funkcije, na primer funkcije $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$.

Međutim, ako pod pojmom deo po deo glatka kriva ne podrazumevamo grafik jedne funkcije, već skup izvesnog, ali, u svakom slučaju konačnog broja, dva po dva, među sobom susednih glatkih lukova raznih krivih, na primer lukova

$$y = f(x) \quad (\alpha < x \leq a) \qquad \text{i} \qquad y = g(x) \quad (\beta < x \leq a) \tag{2.8.2}$$

ili lukova

$$y = f(x) \quad (b \leq x < \alpha) \qquad \text{i} \qquad y = g(x) \quad (b \leq x < \beta), \tag{2.8.3}$$

gde je $\alpha < \beta$ i $f(a) = g(a)$, tj. $f(b) = g(b)$, tada se pojam povratne tačke može uvesti sledećom definicijom.

Definicija 2.8.7. Ako deo po deo glatku krivu čine glatki lukovi (2.8.2), čija je zajednička tačka $A(a, f(a))$, tj. tačka $A(a, g(a))$, i ako je $f'_-(a) = g'_-(a)$, za tačku A kažemo da je povratna tačka posmatrane deo po deo glatke krive.

Ako deo po deo glatku krivu čine glatki lukovi (2.8.3), čija je zajednička tačka $B(b, f(b))$, tj. tačka $B(b, g(b))$, i ako je $f'_+(b) = g'_+(b)$, za tačku B kažemo da je povratna tačka posmatrane deo po deo glatke krive.

Primer 2.8.10. Za krivu $y = f(x)$ određenu lukovima krivih $y = x^2-1$ $(x \geq 1)$ i $y = \log x$ $(x \geq 1)$, tačka $A(1, 0)$ je njena povratna tačka. $\triangle$

Primer 2.8.11. Ako krivu $y = f(x)$ čine lukovi krivih $y = x^2$ $(0 \leq x < 1)$ i $y = x^3$ $(0 \leq x < 1)$, tačka $O(0, 0)$ je povratna tačka krive $y = f(x)$. $\triangle$

U svakom slučaju, ako je neka tačka povratna tačka posmatrane krive $y = f(x)$, tada oba glatka luka $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ te deo po deo glatke krive leže sa jedne iste strane njihove zajedničke normale povučene kroz tu tačku.

Kao što se iz poslednja dva primera može videti, postoje dve vrste povratnih tačaka. U primeru 2.8.10 susedni lukovi posmatrane deo po deo glatke krive su sa raznih strana njihove zajedničke tangente $y = 0$, a u primeru 2.8.11 oba susedna luka su sa iste strane svoje zajedničke tangente $y = x-1$.

Stoga, sledećom definicijom uvodimo još dva nova pojma.

Definicija 2.8.8. Ako su dva susedna glatka luka, deo po deo glatke krive, sa raznih strana zajedničke tangente povučene kroz povratnu tačku, za tu povratnu tačku se kaže da je *povratna tačka prve vrste*.

Ako su dva susedna glatka luka, deo po deo glatke krive, sa iste strane zajedničke tangente povučene kroz povratnu tačku, za tu povratnu tačku se kaže da je *povratna tačka druge vrste*.

Primer 2.8.12. Za krivu iz primera 2.8.10, tačka $A(1, 0)$ je povratna tačka prve vrste krive $y = f(x)$.

Primer 2.8.13. Za krivu iz primera 2.8.11, tačka $O(0, 0)$ je njena povratna tačka druge vrste. $\triangle$

Primer 2.8.14. Lukovi krivih $y = x - 1$ $(x \geq 1)$ i $y = \log x$ $(x \geq 1)$ određuju deo po deo glatku krivu, za koju je tačka $A(1, 0)$ njena povratna tačka. Međutim, kako se ovde radi o graničnom slučaju, jer je jedan od posmatranih lukova deo prave, može se uzeti da je A njena povratna tačka bilo prve bilo druge vrste. $\triangle$

Napomenimo, na kraju, još i ovo: ako su funkcije kojima su određeni susedni lukovi deo po deo glatke krive dvaput diferencijabilne funkcije, tada nije teško pokazati da je jedna povratna tačka povratna tačka prve vrste ako je jedan od glatkih lukova konveksan, a drugi konkavan. Ali i da je, isto tako, jedna povratna tačka povratna tačka druge vrste ako su oba susedna glatka luka konveksna ili oba konkavna.

2.9. Grafičko predstavljanje funkcija

U prethodnim odeljcima izučavali smo lokalne osobine funkcija kao i načine pomoću kojih se te osobine mogu konstatovati, a u ovom odeljku ćemo pokazati kako je na osnovu tih osobina moguće nacrtati odgovarajuće grafike posmatranih funkcija.

Namera da se nacrta grafik neke funkcije ukazuje na potrebu da se za datu funkciju utvrde sve ili, ako to nije moguće, onda, što više njenih lokalnih osobina.

U tom smislu, ispitivanje funkcija moguće je sprovesti na način i redosledom koji navodimo:

- Odrediti prirodnu oblast definisanosti funkcije;
- Odrediti tačke preseka krive sa koordinatnim osama;
- Ispitati da li je funkcija parna, neparna ili ni parna ni neparna;
- Ispitati periodičnost funkcije;
- Odrediti vertikalne, horizontalne i kose asimptote;
- Utvrditi intervale monotonosti funkcije;
- Odrediti tačke ekstremuma i ekstremne vrednosti;
- Utvrditi intervale konveksnosti i konkavnosti;
- Odrediti prevojne tačke;
- Odrediti temena, prelomne i povratne tačke.

Naravno, ova preporuka je uslovna. To znači da se ne treba strogo držati navedenog redosleda, niti treba pošto-poto insistirati na ispitivanju svake moguće osobine. Tako se, na primer, određivanje preseka krive sa koordinatnim osama ili određivanje asimptota može sprovesti kasnije ili na kraju, a ako je funkcija rastuća ili opadajuća, tada ne postoji potreba ispitivanja egzistencije ekstremuma takvih funkcija. Isto tako, kod polinomskih i racionalnih funkcija ne treba ispitivati periodičnost. I tako dalje.

Ilustrovaćemo ove sugestije kroz nekoliko narednih primera.

Primer prvi. *Ispitaćemo funkciju* $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ *i skicirati krivu* $y = f(x)$.

Očigledno, funkcija f je definisana za svako x. Prema tome, njena oblast definisanosti je interval $(-\infty, +\infty)$.

Funkcija je neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$.

Za vrednosti $f(x)$ važe nejednakosti

$$f(x) \geq 0 \quad (-\infty < x \leq 2) \qquad \text{i} \qquad f(x) < 0 \quad (2 < x < +\infty).$$

Iz činjenice da je $f(0) = f(2) = 0$ sleduje da kriva $y = f(x)$ seče koordinatne ose u koordinatnom početku i u tački $A(2, 0)$.

Očigledno, funkcija f nije parna, ali nije ni neparna.

Kako je

$$f'(x) = \frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}} \qquad (x \neq 0 \text{ i } x \neq 2), \tag{2.9.1}$$

nije teško zaključiti da je

1° $f'(x) < 0$, ako je $x \in (-\infty, 0)$,
2° $f'(x) > 0$, ako je $x \in (0, 4/3)$,
3° $f'(4/3) = 0$,
4° $f'(x) < 0$, ako je $x \in (4/3, +\infty)$.

To znači da u intervalima $(-\infty, 0)$ i $(4/3, +\infty)$ funkcija f opada, da u intervalu $(0, 4/3)$ raste i da, prema tome, u tački $x = 4/3$ dostiže svoj maksimum $f(4/3) = (2\sqrt[3]{4})/3$.

Isto tako, iz (2.9.1) neposredno zaključujemo da je

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$$

i

$$\lim_{x\to 2-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2+} f'(x) = -\infty.$$

Prema tome, funkcija f u tački $x = 0$ nije diferencijabilna, ali, na osnovu 1° i 2°, u njoj ima minimum $f(0) = 0$. Zbog činjenice da je $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, zaključujemo da je $O(0, 0)$ povratna tačka krive.

Kako je $f''(x) = -\dfrac{8}{9(2-x)\sqrt[3]{x^4(2-x)^2}}$ važe nejednakosti

$$f''(x) < 0 \quad (x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)) \qquad \text{i} \qquad f''(x) > 0 \quad (x \in (2, +\infty)).$$

Odavde zaključujemo da je funkcija f strogo konkavna u intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, 2)$, a da je u intervalu $(2, +\infty)$ strogo konveksna. Kako u tački $x = 2$ funkcija f menja smisao konveksnosti, tačka $A(2,0)$ je prevojna tačka krive $y = f(x)$.

Isto tako, iz činjenice da je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} = -1$$

i

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \Big(f(x) - (-x)\Big) &= \lim_{x\to\pm\infty} \big(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x\big) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^4(2-x)^2} - x\sqrt[3]{x^2(2-x)} + x^2} \\ &= \frac{2}{3},\end{aligned}$$

zaključujemo da je prava $y = -x + \dfrac{2}{3}$ kosa asimptota krive.

Međutim, kako je

$$\sqrt[3]{2x^2 - x^3} - \Big(-x + \frac{2}{3}\Big) < 0 \qquad \Big(x < \frac{2}{9}\Big)$$

i

$$\sqrt[3]{2x^2 - x^3} - \Big(-x + \frac{2}{3}\Big) > 0 \qquad \Big(x > \frac{2}{9}\Big),$$

nije teško zaključiti da kada $x \to -\infty$ kriva $y = f(x)$ leži ispod asimptote, a kada $x \to +\infty$ kriva je iznad asimptote. Kriva i asimptota seku se u tački $B(2/9,\ 4/9)$.

Na kraju, na osnovu svih ovih osobina funkcije f, nije teško zaključiti da kriva $y = f(x)$ ima izgled prikazan na slici 2.9.1.

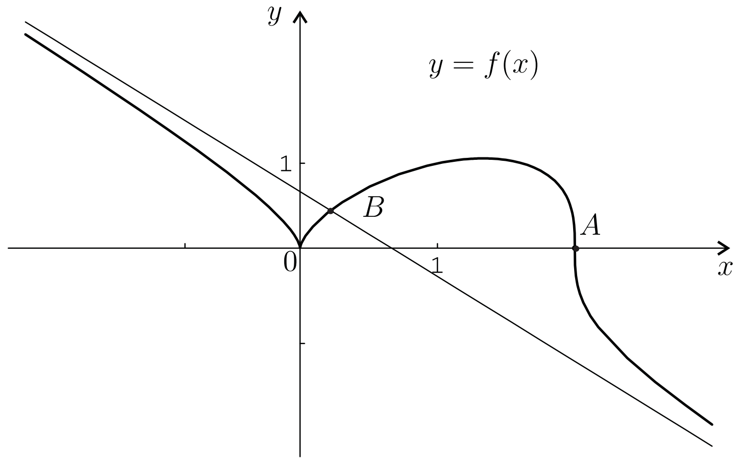
Primer drugi. *Ispitaćemo tok i skicirati grafik funkcije*

$$x \mapsto y = f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1.$$

Funkcija je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$.

Tačke $A(-1,0)$ i $B(0,2)$ na koordinatnim osama pripadaju grafiku funkcije f.

Funkcija je neprekidna u čitavoj svojoj oblasti definisanosti.



Sl. 2.9.1

Funkcija nije parna, ali nije ni neparna.

Napomena 2.9.1. Kako funkcija f nije parna, ali ni neparna, ne bez razloga naglasićemo da njen grafik nije simetričan ni u odnosu na y-osu, ni u odnosu na koordinatni početak.

Međutim, ako izvršimo transformaciju koordinatnog sistema Oxy u koordinatni sistem $O'XY$, pomoću

$$X = x + \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad Y = y,$$

u novom koordinatnom sistemu imaćemo krivu

$$Y = \sqrt[3]{\Big(X + \frac{1}{2}\Big)^2} - \sqrt[3]{\Big(X - \frac{1}{2}\Big)^2} + 1.$$

Ako sada posmatramo funkciju

$$X \mapsto Y = g(X) = \sqrt[3]{\Big(X + \frac{1}{2}\Big)^2} - \sqrt[3]{\Big(X - \frac{1}{2}\Big)^2} + 1,$$

nije teško zaključiti da je funkcija g neparna jer je $g(-X) = -g(X)$, pa je njen grafik simetričan u odnosu na novi koordinatni početak O', tj. u odnosu na tačku koja je u starom koordinatnom sistemu Oxy određena koordinatama $x = -1/2$ i $y = 1$. Dakle, kriva $y = f(x)$ je simetrična, ali u odnosu na tačku $A(-1/2, 1)$, što se je, inače, moglo zaključiti i iz činjenice da je

$$f\Big(-\frac{1}{2} - x\Big) = -f\Big(-\frac{1}{2} + x\Big).$$

Kako je

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \qquad (x \neq -1 \text{ i } x \neq 0), \tag{2.9.2}$$

zaključujemo da je

$$f'_-(-1) = -\infty, \qquad f'_+(-1) = +\infty,$$

i

$$f'_-(0) = +\infty, \qquad f'_+(0) = -\infty.$$

To znači da u tačkama $x = -1$ i $x = 0$ funkcija f nije diferencijabilna. Tačke $B(-1,0)$ i $C(0,2)$ su povratne tačke krive $y = f(x)$.

Isto tako, iz jednakosti (2.9.2) jedno za drugim sleduje:

1° Kako je $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+1} < 0$ za $x \in (-\infty, -1)$, zaključujemo da važi nejednakost

$$f'(x) < 0 \qquad (-\infty < x < -1)\,;$$

2° Iz nejednakosti $\sqrt[3]{x} < 0 < \sqrt[3]{x+1}$ $(-1 < x < 0)$, sleduje

$$f'(x) > 0 \qquad (-1 < x < 0)\,;$$

3° Kako je $0 < \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+1}$ $(0 < x < +\infty)$, dobijamo nejednakost

$$f'(x) < 0 \qquad (0 < x < +\infty).$$

Na osnovu ovih zapažanja zaključujemo da je funkcija f opadajuća u intervalima $(-\infty, -1)$ i $(0, +\infty)$ i da je rastuća u intervalu $(-1, 0)$.

Isto tako, na osnovu prethodnih zapažanja zaključujemo da funkcija f u tački $x = -1$ dostiže svoj minimum $f(-1) = 0$, a da u tački $x = 0$ ima maksimalnu vrednost $f(0) = 2$.

Iz jednakosti

$$f''(x) = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}} \right) \qquad (x \neq -1 \text{ i } x \neq 0),$$

neposredno zaključujemo da je

$$f''(x) < 0 \qquad \left(x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2} \right) \right)$$

i

$$f''(x) > 0 \qquad \Big(x \in \Big(-\frac{1}{2}, 0\Big) \cup (0, +\infty)\Big).$$

Prema tome, funkcija f je strogo konkavna u intervalima $(-\infty, -1)$ i $(-1, -1/2)$, a u intervalima $(-1/2, 0)$ i $(0, +\infty)$ je strogo konveksna. Kako u tački $x = -1/2$ posmatrana funkcija menja smisao konveksnosti, tačka $A(-1/2, 1)$ je prevojna tačka krive $y = f(x)$. Naravno, nije teško proveriti da je $f''(-1/2) = 0$.

I na kraju, kako je

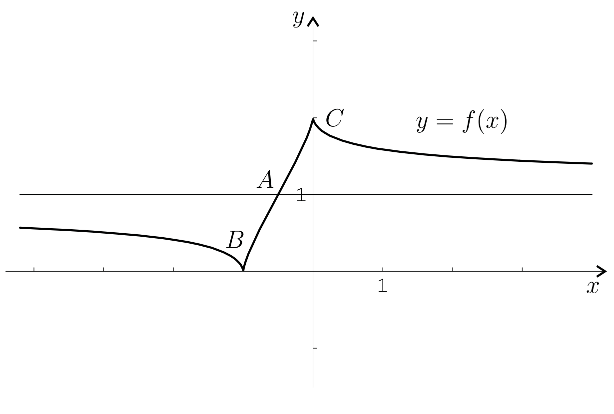
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty}\Big(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1\Big) \\
&\qquad = \lim_{x\to\pm\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^4}} + 1\Big) \\
&\qquad = 1,
\end{aligned}$$

zaključujemo da je prava $y = 1$ horizontalna asimptota krive $y = f(x)$ i kada $x \to -\infty$ i kada $x \to +\infty$.

Napomenimo da je tačka $A(-1/2, 1)$ jedini presek krive i asimptote.

S obzirom da je f opadajuća funkcija za $x \in (-\infty, -1)$, grafik funkcije f leži ispod asimptote kada $x \to -\infty$ jer je $f(-1) = 0$, a u slučaju kada $x \to +\infty$, kriva leži iznad prave $y = 1$ jer je i za $x \in (0, +\infty)$ funkcija opadajuća ali važi $f(0) = 2$.

Kako je $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, nije teško zaključiti da kriva $y = f(x)$ nema kosih asimptota.



Sl. 2.9.2

Na osnovu svega sleduje da kriva ima oblik prikazan na slici 2.9.2.

Primer treći. *Ispitaćemo funkciju* $x \mapsto y = f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$.

Funkcija je definisana za svako x, osim za $x = 0$.

Kako je $f(x) > 0$, grafik funkcije leži iznad x-ose.

Funkcija je parna.

Tačka $x = 0$ je prekidna tačka druge vrste jer je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Iz jednakosti $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, zaključujemo da se $f(x)$ i x^2 asimptotski jednako ponašaju kada $x \to \infty$, ali i da se $f(x)$ i $\dfrac{1}{x^2}$ takođe asimptotski jednako ponašaju ako $x \to 0$. Prema tome, kriva $y = f(x)$ ima dve krivolinijske asimptote:

$$y = x^2, \quad \text{kada} \quad x \to \pm\infty \qquad \text{i} \qquad y = \frac{1}{x^2} \quad \text{kada} \quad x \to 0.$$

Očigledno je da važe nejednakosti

$$f(x) > x^2 \qquad \text{i} \qquad f(x) > \frac{1}{x^2},$$

što ukazuje da kriva $y = f(x)$ leži iznad svojih krivolinijskih asimptota $y = x^2$ i $y = 1/x^2$.

Prava $x = 0$ je vertikalna asimptota krive $y = f(x)$.

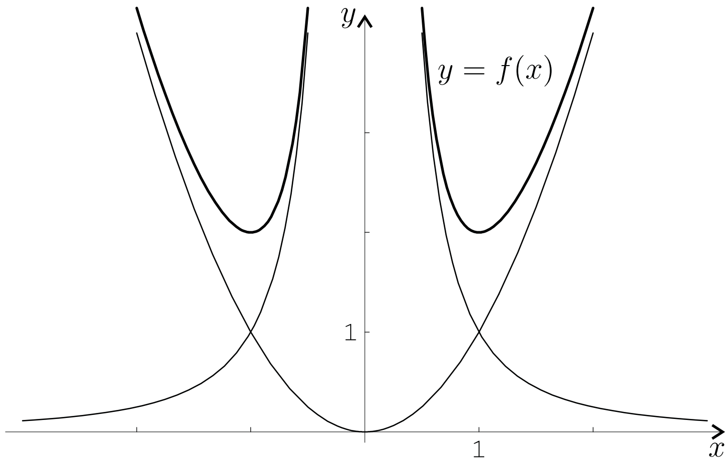
Kako je

$$f'(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3} \qquad (x \neq 0),$$

tj.

$$f'(x) < 0 \quad \big(x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)\big) \quad \text{i} \quad f'(x) > 0 \quad \big(x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)\big),$$

zaključujemo da je funkcija f opadajuća u intervalima $(-\infty,-1)$ i $(0,1)$, a u intervalima $(-1,0)$ i $(1,+\infty)$ rastuća, kao i da u tačkama $x = -1$ i $x = 1$, u kojima je $f'(-1) = f'(1) = 0$, dostiže svoje minimalne vrednosti $f(-1) = f(1) = 2$.



Sl. 2.9.3

Isto tako, iz jednakosti

$$f''(x) = \frac{2(x^4+3)}{x^4} \qquad (x \neq 0).$$

sleduje da za $x \neq 0$ važi $f''(x) > 0$. Dakle, funkcija f je strogo konveksna u intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$. Prema tome, kriva $y = f(x)$ nema prevojnih tačaka.

Sada nije teško zaključiti da grafik ove krive ima oblik prikazan na slici 2.9.3.

Primer četvrti. *Ispitaćemo tok i skicirati grafik funkcije* $x \mapsto y = f(x)$ *određene pomoću*

$$(2.9.3) \qquad t \mapsto x = \varphi(t) = 2t - t^2 \qquad i \qquad t \mapsto y = \psi(t) = 3t - t^3.$$

Očigledno, funkcije φ i ψ definisane su za svako realno t. Dakle, i x i y su jednoznačno određeni za svako $t \in \mathbb{R}$.

Kako je

$$(2.9.4) \qquad \dot{x} = \varphi'(t) = 2(1-t) \qquad \text{i} \qquad \ddot{x} = \varphi''(x) = -2,$$

zaključujemo da za $t \in (-\infty, 1)$ funkcija φ raste, uzimajući vrednosti od $-\infty$ do 1, da za $t = 1$ dostiže svoju najveću vrednost $\varphi(1) = 1$, a da za $t \in (1, +\infty)$ opada, uzimajući vrednosti od 1 do $-\infty$.

To znači da oblast definisanosti funkcije $x \mapsto f(x)$ čine dva dela domena funkcije φ: jedan deo je $\varphi(D_1)$ koji nastaje preslikavanjem poluintervala $D_1 = (-\infty, 1]$, a drugi $\varphi(D_2)$ koji se dobija preslikavanjem polusegmenta $D_2 = [1, +\infty)$.

Prema tome, pomoću (2.9.3) definisane su dve funkcije:

$$x \mapsto y = f_1(x) \qquad (t \in (-\infty, 1],\ \text{tj. } x \in \varphi(D_1))$$

i

$$x \mapsto y = f_2(x) \qquad (t \in [1, +\infty),\ \text{tj. } x \in \varphi(D_2)),$$

tj.

$$x \mapsto y = f_1(x) \quad (-\infty < x \leq 1) \qquad \text{i} \qquad x \mapsto y = f_2(x) \quad (-\infty < x \leq 1).$$

Ispitaćemo obe funkcije f_1 i f_2.

Lako se proverava da je

$$\dot{y} = \psi'(t) = 3(1 - t^2) \qquad \text{i} \qquad \ddot{y} = \psi''(t) = -6t. \tag{2.9.5}$$

Na osnovu (2.9.4) i (2.11.5) sleduju jednakosti

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3}{2}(1 + t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.9.6}$$

i

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - t} \qquad (t \neq 1). \tag{2.9.7}$$

Analizom navedenih činjenica, jedno za drugim neposredno zaključujemo:

1° Na osnovu (2.9.6), za $t \in (-\infty, -1)$, tj. za $x \in (-\infty, -3)$, sleduje da važi nejednakost $f_1'(x) < 0$, pa je funkcija f_1 opadajuća na intervalu $(-\infty, -3)$;

2° Isto tako, na osnovu (2.9.6), zaključujemo da za $t \in (-1, 1)$, tj. da za $x \in (-3, 1)$, važi $f_1'(x) > 0$, što znači da funkcija f_1 raste za $x \in (-3, 1)$;

3° Za $t = -1$, tj. u tački $x = -3$, funkcija f_1 dostiže svoj minimum $f_1(-3) = \psi(-1) = -2$;

4° Na osnovu (2.9.7) zaključujemo da za svako $t \in (-\infty, 1)$, pa prema tome za svako $x \in (-\infty, 1)$ važi nejednakost $f_1''(x) > 0$, što znači da je funkcija f_1 strogo konveksna u intervalu $(-\infty, 1)$;

5° Za $t = 1$, tj. u tački $x = 1$, funkcija f_1 dostiže svoj maksimum $f_1(1) = \psi(1) = 2$;

6° Kako je $\psi(-\sqrt{3}) = \psi(0) = 0$, tj. $f_1(-3 - 2\sqrt{3}) = f_1(0) = 0$, kriva $y = f_1(x)$ seče x-osu u tačkama $x = -3 - 2\sqrt{3}$ i $x = 0$;

7° Tačka $A(1, 1)$ je tzv. *završna tačka* krive $y = f_1(x)$;

8° U tački $x = 1$ funkcija f_1 ima levi izvod $f_1'(x)\big|_{x=1-} = 3$.

Isto tako, sličnom analizom, za funkciju f_2 se može zaključiti:

1° Kako, na osnovu (2.9.6), za $t \in [1, +\infty)$, što znači za $x \in (-\infty, 1]$, važi nejednakost $f_2'(x) > 0$, sleduje da funkcija f_2 raste i to od $-\infty$ do $f_2(1) = 1$;

2° Za $t = \sqrt{3}$, dobijamo $x = \varphi(\sqrt{3}) = -3 + 2\sqrt{3}$ i $y = f_2(-3 + 2\sqrt{3}) = \psi(\sqrt{3}) = 0$, odakle sleduje da kriva $y = f_2(x)$ seče x-osu u tački $x = -3 + 2\sqrt{3}$.

Isto tako, za $t = 2$ dobijamo $x = \varphi(2) = 0$ i $y = f_2(0) = \psi(2) = -2$, što znači da kriva $y = f_2(x)$ seče y-osu u tački $y = -2$;

3° Na osnovu (2.9.7) sleduje da za $t \in (1, +\infty)$, tj. za $x \in (-\infty, 1)$, važi nejednakost $f_2''(x) < 0$, što znači da je funkcija f_2 strogo konkavna za $x \in (-\infty, 1)$;

4° Za $t = 1$, tj. u tački $x = 1$, funkcija f_2 dostiže svoj maksimum $f_2(1) = \psi(1) = 2$;

5° Tačka $A(1, 1)$ je, takođe, završna tačka i krive $y = f_2(x)$;

6° U tački $x = 1$ funkcija f_2 ima levi izvod $f_1'(x)\big|_{x=1-} = 3$.

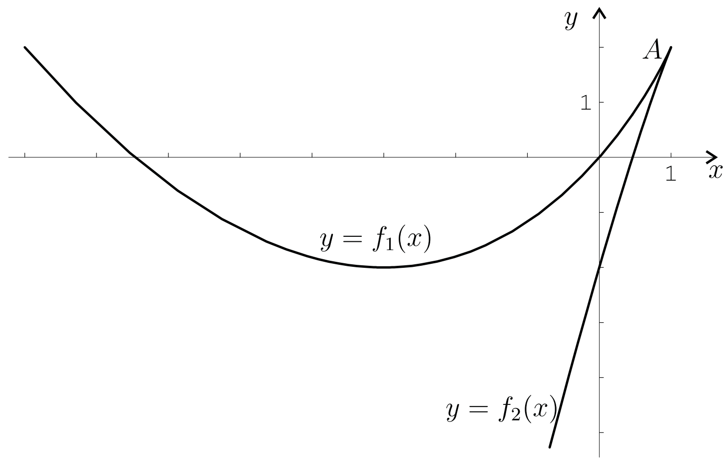
Prema tome, kriva $y = f(x)$, sastoji se iz dva dela i čine je krive:

$$y = f_1(x) \quad (-\infty < x \leq 1) \qquad \text{i} \qquad y = f_2(x) \quad (-\infty < x \leq 1).$$

Tačka $A(1, 1)$ je njihova zajednička tačka, a poluprava $y = 3x - 2$ $(x \leq 1)$ njihova zajednička tangenta.

Kako je kriva $y = f_1(x)$ strogo konveksna, a kriva $y = f_2(x)$ strogo konkavna, ako se cela kriva $y = f(x)$ shvati kao jedna kriva, onda je ona deo po deo glatka kriva, a tačka A je njena povratna tačka prve vrste.

Grafik krive $y = f(x)$ prikazan je na slici 2.9.4.



Sl. 2.9.4

Primer peti. *Ispitaćemo funkciju*

$$x \mapsto y = f(x) = 2\sin x + \cos 2x$$

i skicirati njen grafik.

Pre svega, funkcija f je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$. Međutim, ona je periodična sa periodom $\omega = 2\pi$, pa je dovoljno ispitati je na polusegmentu $[0, 2\pi)$ i, naravno, samo na tom polusegmentu i skicirati njen grafik.

Dakle, neka $x \in [0, 2\pi)$.

Očigledno, funkcija f je neprekidna.

S obzirom da je $f(0) = 1$, kriva $y = f(x)$ seče y-osu u tački čija je ordinata $y = 1$.

Primetimo da je $f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$ i da jednačina

$$2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0 \tag{2.9.8}$$

ima jedno jedino realno rešenje

$$\sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,.$$

Odavde nije teško zaključiti da su osnovna rešenja jednačine (2.9.8)

$$x = -\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad \text{i} \qquad x = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,.$$

Prema tome, sva rešenja jednačine (2.9.8) su

$$x = -\arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 2k_1\pi \qquad \text{i} \qquad x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 2k_2\pi,$$

od kojih samo ona koja se iz ovih rešenja dobijaju za $k_1 = 1$ i za $k_2 = -1$, tj. samo

$$x' = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad \text{i} \qquad x'' = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,,$$

pripadaju polusegmentu $[0, 2\pi)$.

Kako je $0 < \arcsin(\sqrt{3}-1)/2 < \pi/2$, zaključujemo da je

$$\pi < x' < 3\pi/2 < x'' < 2\pi.$$

Vrednosti x' i x'' su, u stvari, apscise tačaka u kojima kriva $y = f(x)$ seče x-osu.

Kako je

$$f'(x) = 2(1 - 2\sin x)\cos x,$$

zaključujemo da je $f'(x) = 0$ za

$$x_1 = \frac{\pi}{6}\,, \qquad x_2 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad x_3 = \frac{5\pi}{6}\,, \qquad x_4 = \frac{3\pi}{2}\,.$$

Tačke x_1, x_2, x_3, x_4 su stacionarne tačke funkcije f.

Radi lakšeg praćenja toka funkcije, polusegment $[0, 2\pi)$ podelićemo na disjunktne podskupove:

$$I_1 = [0, x_1), \quad I_2 = (x_1, x_2), \quad I_3 = (x_2, x_3), \quad I_4 = (x_3, x_4), \quad I_5 = (x_4, 2\pi)$$

Nije teško zaključiti da je $f'(x) > 0$ ako x pripada skupovima I_1, I_3, I_5, tj. ako $x \in I_1 \cup I_3 \cup I_5$. Funkcija f je na tim skupovima strogo rastuća.

Kako je $f'(x) < 0$ ako x pripada skupovima I_2 i I_4, tj. ako $x \in I_2 \cup I_4$, funkcija f je na tim skupovima strogo opadajuća.

Prema tome, u tačkama x_1 i x_3 funkcija f dostiže svoje lokalne maksimume

$$f(x_1) = f(\pi/6) = 3/2 \qquad \text{i} \qquad f(x_3) = f(5\pi/6) = 3/2,$$

a u tačkama x_2 i x_4 svoje lokalne minimalne vrednosti

$$f(x_2) = f(\pi/2) = 1 \qquad \text{i} \qquad f(x_4) = f(3\pi/2) = -3.$$

Napomenimo da smo zaključke o ovim ekstremnim vrednostima mogli da izvedemo i na osnovu jednakosti

$$f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x = 2(4\sin^2 x - \sin x - 2),$$

i činjenica da je, redom,

$$f''(x_1) = -3 < 0, \quad f''(x_2) = 2 > 0, \quad f''(x_3) = -3 < 0, \quad f''(x_4) = 6 > 0.$$

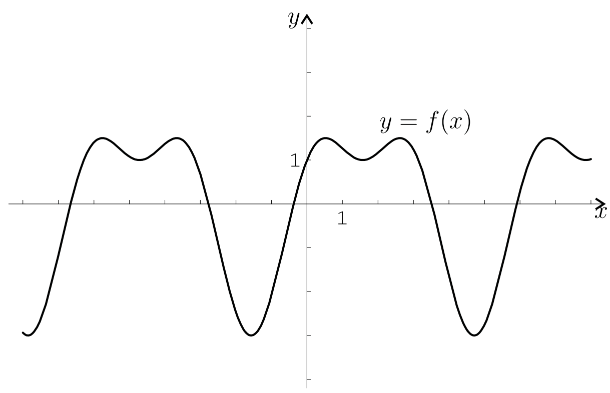
Rešavanjem jednačine $f''(x) = 0$ dobijamo

$$\sin x = \alpha = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \qquad \text{i} \qquad \sin x = \beta = \frac{1-\sqrt{33}}{8},$$

što znači da se drugi izvod $f''(x)$ anulira u tačkama čije su apscise

$$\arcsin\alpha \in I_2, \quad \pi - \arcsin\alpha \in I_3, \quad \pi - \arcsin\beta \in I_4, \quad 2\pi + \arcsin\beta \in I_5.$$

Tačke sa ovim apscisama su prevojne tačke krive $y = f(x)$.



Sl. 2.9.5

Sada nije teško zaključiti da grafik krive izgleda kao što je prikazan na slici 2.9.5.

Napomena 2.9.2. Naglasimo da smo do svih ovih zaključaka o funkciji f, tj. o krivoj $y = f(x)$, mogli da dođemo da smo prethodno izvršili transformaciju koordinatnog sistema tako da novi koordinatni početak bude u tački $O'(\pi/2, 0)$, a nove koordinatne ose ostanu paralelne starim. Dakle, da smo transformaciju isvršili pomoću

$$X = x - \frac{\pi}{2}, \qquad Y = y.$$

U novom koordinatnom sistemu, jednačina krive bi glasila

$$Y = F(X) = 2\cos X + \cos 2X,$$

odakle se lako može zaključiti da je kriva $Y = F(X)$ simetrična u odnosu na Y-osu.

To, međutim, znači da je kriva $y = f(x)$ simetrična u odnosu na pravu $x = \pi/2$, što se, takođe, može zaključiti iz činjenice da važi jednakost

$$f(\pi/2 - t) = f(\pi/2 + t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

U stvari, može se pokazati da je kriva $y = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ simetrična u odnosu na svaku pravu oblika $x = (2k+1)\pi/2$, gde je k bilo koji ceo broj.

3. ZADACI ZA VEŽBU

3.1. Proveriti tvrđenja: Ako su funkcije $x \mapsto f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ zadate pomoću

$$f_1(x) = \frac{1 - \log x}{1 + \log x}, \qquad f_4(x) = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2}\,,$$

$$f_2(x) = \frac{\log(\sin x)}{\log(\cos x)}, \qquad f_5(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \log\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right),$$

$$f_3(x) = \sin^2 x \cdot \sin x^2, \qquad f_6(x) = e^{ax}(a \sin x - \cos x),$$

tada je

$$f_1'(x) = -\frac{2}{x(1 + \log x)^2}, \qquad f_4'(x) = 9x^2 \arcsin x\,,$$

$$f_2'(x) = \frac{\cot x \log \cos x + \tan x \log \sin x}{\log^2 \cos x}, \qquad f_5'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x},$$

$$f_3'(x) = 2 \sin x (x \sin x \cos^2 x + \cos x \sin^2 x), \qquad f_6'(x) = (a^2 + 1)e^{ax} \sin x.$$

3.2. Proveriti tvrđenje: Ako je $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$, tada je

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

3.3. Proveriti jednakosti:

$$\begin{aligned}
(\sin^n x \cos nx)' &= n \sin^{n-1} x \, \cos(n+1)x, \\
(\sin^n x \sin nx)' &= n \sin^{n-1} x \, \sin(n+1)x, \\
(\cos^n x \sin nx)' &= n \cos^{n-1} x \, \cos(n+1)x, \\
(\cos^n x \cos nx)' &= -n \cos^{n-1} x \, \sin(n+1)x.
\end{aligned}$$

3.4. Odrediti $f^{(100)}(x)$, ako je

$$f(x) = x \sinh x.$$

Rezultat. $f^{(100)}(x) = x \sinh x + 100 \cosh x$.

3.5. Neka je $f(x) = \arctan x$. Odrediti $f^{(n)}(0)$.

Uputstvo. Dokazati prvo da važi rekurentna jednakost

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(0) \qquad (n \geq 2).$$

Rezultat. $f^{(2k)}(0) = 0$ i $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

3.6. Ako su funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ oblika

$$f(x) = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} \qquad \text{i} \qquad g(x) = \frac{1 + \alpha x + \beta x^2}{1 + \gamma x + \delta x^2},$$

odrediti realne koeficijente A, B i α, β, γ, δ tako da je

$$\cot x = f(x) + O(x^5) \qquad \text{i} \qquad e^x = g(x) + O(x^5) \qquad (x \to 0).$$

Rezultat. $A = -2/5$, $B = -1/15$ i $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/12$, $\gamma = -1/2$, $\delta = 1/12$.

3.7. Odrediti:

$$1^\circ \quad \frac{d}{d(x^2)}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big), \qquad 2^\circ \quad \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}, \qquad 3^\circ \quad \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}.$$

Rezultat. 1° $\dfrac{1}{2x^2}\Big(\cos x - \dfrac{\sin x}{x}\Big)$, 2° $-\cot x$ $(x \neq k\pi)$, 3° -1 $(-1 < x < 1)$.

3.8. Odrediti $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ako je:

1° $\begin{cases} x = a(2-\sin^2 t)\sin t, \\ y = b\sin^2 t\,\cos t, \end{cases}$ 3° $\begin{cases} x = a\big(e^t(\sin t + \cos t) - 1\big), \\ y = a\big(e^t(\sin t - \cos t) + 1\big), \end{cases}$

2° $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ 4° $\begin{cases} x = 2t\cos t + (t^2-2)\sin t, \\ y = 2t\sin t - (t^2-2)\cos t. \end{cases}$

3.9. Dokazati formulu

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \qquad (a > 0),$$

a zatim pomoću nje, za $|x|$ dovoljno malo u odnosu na a, približno odrediti:

$$\sqrt[3]{9}\,, \qquad \sqrt[4]{80}\,, \qquad \sqrt[7]{100}\,, \qquad \sqrt[10]{1000}\,.$$

3.10. Na krivoj $y = x^3$ odrediti tačku u kojoj je njena tangenta paralelna sečici koja prolazi kroz tačke određene apscisama $x = -1$ i $x = 2$.

3.11. Odrediti jednačinu kruga krivine hiperbole $xy = 1$ u tački $A(1,1)$.

Rezultat. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$.

3.12. Ispitati funkcije $x \mapsto f(x)$ i skicirati grafike krivih $y = f(x)$, ako je

$f(x) = (x+1)(x-2)^2,$ $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}\,,$

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}\,,$ $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}\,,$

$f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}\,,$ $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}\,,$

$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x,$ $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}\,,$

$f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\,,$ $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\,.$

3.13. Ispitati funkciju

$$x \mapsto f(x) = \frac{1+\log|x|}{x(1-\log|x|)}\,,$$

a zatim skicirati grafik krive $y = f(x)$.

V G L A V A

Integracija funkcija jedne realne promenljive

1. NEODREĐENI INTEGRAL

1.1. Primitivna funkcija i neodređeni integral

Prirodno je da se postavi pitanje određivanja funkcije čiji je izvod poznat. Štaviše, ovo pitanje se nameće i u nizu problema koji se javljaju u nauci i tehnici.

Definicija 1.1.1. Za funkciju $F\colon I \to \mathbb{R}$, gde je I interval, kažemo da je *primitivna funkcija* funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$ ako je

$$F'(x) = f(x)$$

za svako $x \in I$.

Tako je, na primer,

1° Funkcija $x \mapsto F(x) = \sin x$ primitivna funkcija za $x \mapsto f(x) = \cos x$ na $\mathbb{R}$;

2° Funkcija $x \mapsto F(x) = \log x$ primitivna funkcija za $x \mapsto f(x) = 1/x$ na $I = (0, +\infty)$;

3° Funkcija $x \mapsto F(x) = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ primitivna funkcija za $x \mapsto f(x) = \sqrt{(1 + x)/(1 - x)}$ na $I = [-1, 1)$.

Primetimo da je, na primer, i funkcija $x \mapsto F_1(x) = \sin x + 2$, takođe, primitivna funkcija za $x \mapsto f(x) = \cos x$ na $\mathbb{R}$, jer je

$$F_1'(x) = (\sin x + 2)' = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Isto tako je i funkcija $x \mapsto F_2(x) = \sin x + C$, gde je C proizvoljna realna konstanta, primitivna funkcija za f na $\mathbb{R}$.

Na osnovu ovoga, može se zaključiti da važi:

Teorema 1.1.1. *Ako je $F\colon I \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija za $f\colon I \to \mathbb{R}$ i C proizvoljna realna konstanta, tada je i funkcija $x \mapsto F(x)+C$, takođe, primitivna funkcija za funkciju f.*

Ovo tvrđenje neposredno sleduje iz sledeće teoreme:

Teorema 1.1.2. *Ako su $F_1\colon I \to \mathbb{R}$ i $F_2\colon I \to \mathbb{R}$ dve primitivne funkcije za $f\colon I \to \mathbb{R}$, tada postoji realna konstanta C takva da je*

$$F_1(x) - F_2(x) = C \tag{1.1.1}$$

za svako $x \in I$.

Dokaz. Neka je $x \mapsto G(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Na osnovu učinjenih pretpostavki za F_1 i F_2, važi $G'(x) = 0$ za svako $x \in I$. Neka je a fiksirana tačka u I. Tada, na osnovu Lagrangeove teoreme, za svako $x \in I$, važi

$$G(x) - G(a) = G'(\xi)(x-a),$$

gde je $\xi = a + \theta(x-a)$ $(0 < \theta < 1)$. Kako je $G'(\xi) = 0$ dobijamo

$$(\forall x \in I) \qquad G(x) = G(a),$$

tj. (1.1.1), gde smo stavili $G(a) = C$. $\square$

Definicija 1.1.2. Neka je $x \mapsto F(x)$ primitivna funkcija za $x \mapsto f(x)$. Skup svih primitivnih funkcija za funkciju f, tj. skup

$$\{G \mid G(x) = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\}$$

naziva se *neodređeni integral* funkcije f i označava sa

$$\int f(x)\,dx.$$

Mada nekorektno, uobičajeno je da se piše

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Mi ćemo, takođe, koristiti ovaj način pisanja, ali ćemo uvek pod oznakom $\int f(x)\,dx$ podrazumevati skup iz definicije 1.1.2.

Nalaženje neodređenog integrala funkcije f zovemo integracija funkcije f, a samu funkciju nazivamo *podintegralnom funkcijom.* Za izraz $f(x)dx$ kažemo da je *podintegralni izraz*.

Napomenimo da su diferenciranje i integracija u izvesnom smislu inverzne operacije, tj. važi

$$\int F'(x)\,dx = \int d(F(x)) = F(x) + C. \tag{1.1.2}$$

1.2. Tablica integrala

Na osnovu poznavanja izvoda elementarnih funkcija, kao i na osnovu (1.1.2), nije teško neposredno utvrditi da važe sledeće jednakosti:

$$
\begin{aligned}
&\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \qquad (p \neq -1),\\
&\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C,\\
&\int e^x\,dx = e^x + C,\\
&\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C,\\
&\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\\
&\int \cos x\,dx = \sin x + C,\\
&\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C,\\
&\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C,\\
&\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C,\\
&\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C,\\
&\int \sinh x\,dx = \cosh x + C,\\
&\int \cosh x\,dx = \sinh x + C,\\
&\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C,\\
&\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C,\\
&\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C,
\end{aligned}
$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2+1}) + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \log\big|\,x+\sqrt{x^2-1}\,\big| + C.$$

Ovi integrali čine tablicu integrala, koja, naravno, navedenim integralima nije iscrpljena.

Teorema 1.2.1. *Neka su $F_k\colon I \to \mathbb{R}$ primitivne funkcije za funkcije $f_k\colon I \to \mathbb{R}$, respektivno za $k = 1, \dots, n$. Tada je funkcija $F\colon I \to \mathbb{R}$, definisana pomoću*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k(x) \qquad (\lambda_k \in \mathbb{R}),$$

primitivna funkcija za $x \mapsto f(x)$, gde je

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x).$$

Dokaz se izvodi neposrednim diferenciranjem.

Ovu teoremu često primenjujemo kada je moguće funkciju f rastaviti na linearnu kombinaciju funkcija čije su primitivne funkcije poznate, jer se u tom slučaju integracija može izvršiti neposredno.

Primer 1.2.1. Neka je $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. Tada je

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C. \qquad \triangle$$

Primer 1.2.2. Neka je $f(x) = \dfrac{1-2x-x^2}{x(1-x^2)}$. Kako je

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2\cdot\frac{1}{1-x^2},$$

imamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1-2x-x^2}{x(1-x^2)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{1-x^2}\,dx\\ &= \log|x| - 2\cdot\frac{1}{2}\log\left|\,\frac{1+x}{1-x}\,\right| + C\\ &= \log\left|\,\frac{x(1-x)}{1+x}\,\right| + C. \quad \triangle\end{aligned}$$

2. METODI INTEGRACIJE

2.1. Metod uvođenja nove promenljive

Metodi integracije, koje ćemo izložiti u ovom i narednim odeljcima ovog poglavlja, imaju za cilj da integraciju date funkcije dovedu do integracije funkcija čije primitivne funkcije znamo na osnovu tablice integrala.

Razmotrimo najpre *metod uvođenja nove promenljive*.

Neka su I i J intervali u $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.1. *Neka je funkcija $g\colon J \to I$ diferencijabilna i neka ima inverznu funkciju $g^{-1}\colon I \to J$. Ako je $t \mapsto F(t)$ primitivna funkcija za $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ na J, tada je za funkciju f, na intervalu I, primitivna funkcija $x \mapsto F\left(g^{-1}(x)\right)$ i tada važi*

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int f(g(t))g'(t)\,dt\\ &= F(t) + C\\ &= F\left(g^{-1}(x)\right) + C.\end{aligned}$$

Dokaz. Kako je $x = g(t)$, tj. $t = g^{-1}(x)$, imamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(F\left(g^{-1}(x)\right) + C\Big) &= \frac{d}{dt}\left(F(t)+C\right)\cdot\frac{dt}{dx}\\ &= F'(t)\cdot\frac{1}{g'(t)}\\ &= f(g(t))g'(t)\frac{1}{g'(t)}\\ &= f(x). \quad \square\end{aligned}$$

Na osnovu ove teoreme, može se zaključiti da se ideja metoda uvođenja nove promenljive t, sastoji u tome da se pogodnim izborom funkcije $t \mapsto g(t)$ polazni integral transformiše u integral koji je od njega pogodniji za tretman u smislu dalje integracije, ili je tablični. Naravno, ovu ideju nije uvek moguće sprovesti. U narednom poglavlju daćemo klasifikaciju podintegralnih funkcija za koje je moguće uvek naći funkciju g, tako da nas ovaj metod dovodi do željenog cilja.

Napomena 2.1.1. Nekada ćemo metod uvođenja nove promenljive zvati *metod zamene*, ili *metod smene*, ili *smena promenljivih*.

Primer 2.1.1. Smenom $x = g(t) = t/2$ imamo

$$\int \cos 2x \, dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{2} \, dt = \frac{1}{2} \sin t + C,$$

tj.

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C. \qquad \triangle$$

Primer 2.1.2. Za određivanje integrala

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \qquad (a > 0)$$

stavimo $x = g(t) = a \sin t$ $(-\pi/2 \le t \le \pi/2)$. Ovde je $I = [-a, a]$, $J = [-\pi/2, \pi/2]$ i $t = g^{-1}(x) = \arcsin(x/a)$.

Tada je

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt \\ &= a^2 \int \cos^2 t \, dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 \left(\int dt + \int \cos 2t \, dt \right), \end{aligned}$$

odakle, na osnovu prethodnog primera, dobijamo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= \frac{1}{2} a^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \\ &= \frac{1}{2} a^2 \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Slično prethodnom, ako u integralima oblika

$$\int \Phi(f(x))f'(x)\,dx$$

stavimo $f(x) = t$ ($\Rightarrow f'(x)dx = dt$), oni postaju

$$\int \Phi(f(x))f'(x)\,dx = \int \Phi(t)\,dt.$$

Na primer, imamo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log|f(x)| + C.$$

Primer 2.1.3. Za određivanje integrala

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

pogodno je uzeti $f(x) = 1 + x^2 = t$. Tada je $f'(x)dx = 2xdx = dt$ pa je

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}t^{3/2} + C,$$

tj.

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\Big(1+x^2\Big)^{3/2} + C. \quad \triangle$$

Primer 2.1.4. Za određivanje integrala

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

prethodno transformišimo podintegralnu funkciju $x \mapsto 1/\sin x$, na sledeći način,

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{\tan(x/2)} \cdot \frac{1}{2\cos^2(x/2)},$$

a zatim uvedimo smenu $t = f(x) = \tan(x/2)$. Tada imamo

$$dt = f'(x)dx = \frac{1}{\cos^2(x/2)} \cdot \frac{1}{2}\,dx,$$

pa je

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\tan(x/2)} \cdot \frac{1}{2\cos^2(x/2)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C,$$

tj.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \log\Big|\tan\frac{x}{2}\Big| + C. \quad \triangle$$

Primer 2.1.5. Kako je $\cos x = \sin(x+\pi/2)$, na osnovu prethodnog primera, smenom $x = t - \pi/2$, dobijamo

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin(x+\pi/2)}\,dx = \int \frac{1}{\sin t}\,dt = \log\Big|\tan\frac{t}{2}\Big| + C,$$

tj.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \log\Big|\tan\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big| + C. \quad \triangle$$

Primer 2.1.6. Smenom $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$ $(0 < t < \pi/2)$ integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx \qquad (a < x < b)$$

postaje

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx &= 2\int dt = 2t + C\\ &= 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C,\end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned}&x-a = (b-a)\sin^2 t, \quad b-x = (b-a)\cos^2 t,\\ &dx = (b-a)\sin 2t\,dt, \quad \tan^2 t = \frac{x-a}{b-x}. \quad \triangle\end{aligned}$$

Primer 2.1.7. Za određivanje integrala

$$\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,dx$$

uvedimo smenu $t = \arctan x$. Tada je $dt = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$, pa je

$$\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,dx = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}(\arctan x)^4 + C. \quad \triangle$$

2.2. Metod parcijalne integracije

Teorema 2.2.1. *Neka su* $x \mapsto u(x)$ *i* $x \mapsto v(x)$ *diferencijabilne funkcije takve da* $x \mapsto u(x)v'(x)$ *i* $x \mapsto v(x)u'(x)$ *imaju primitivne funkcije. Tada je*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2.2.1}$$

Dokaz. Na osnovu učinjenih pretpostavki o diferencijabilnosti funkcija u i v, jednakosti

$$d(uv) = uv'dx + vu'dx = udv + vdu,$$

kao i na osnovu učinjene pretpostavke o egzistenciji primitivnih funkcija za uv' i vu', zaključujemo da važi (2.2.1). $\square$

Na osnovu jednakosti (2.2.1) zasniva se *metod parcijalne integracije*. Za njegovu primenu na određivanje integrala $\int f(x)\,dx$ potrebno je podintegralni izraz $f(x)dx$ predstaviti u obliku

$$f(x)dx = u(x)v'(x)dx = udv.$$

Na taj način određivanje integrala $\int u\,dv$ svodimo na određivanje integrala $\int v\,du$, koji u izvesnim slučajevima može biti pogodniji za dalju integraciju.

Primer 2.2.1. 1° Stavljajući $u = \log x$, $dv = dx$ ($\Rightarrow du = (1/x)dx$, $v = x$) imamo

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int dx = x(\log x - 1) + C.$$

2° Integral $\int x^a \log x\,dx$ $(a \neq -1)$, takođe, određujemo primenom metoda parcijalne integracije stavljajući

$$u = \log x \qquad \text{i} \qquad dv = x^a dx.$$

Naime, imamo

$$\begin{aligned}\int x^a \log x\,dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \int \frac{x^a}{a+1}\,dx\\ &= \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x - \frac{1}{a+1}\right) + C. \qquad \triangle\end{aligned}$$

Primer 2.2.2. Ako u integralu

$$S = \int e^{ax}\sin bx\,dx \qquad (ab \neq 0)$$

uzmemo da je $u = e^{ax}$ i $dv = \sin bx\,dx$, pri čemu je, naravno, $du = ae^{ax}dx$ i $v = -(1/b)\cos bx$, dobijamo

$$S = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx. \tag{2.2.2}$$

Slično, stavljajući $u = e^{ax}$ i $dv = \cos bx\,dx$, imamo

$$K = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}S. \tag{2.2.3}$$

Iz (2.2.2) i (2.2.3) sleduje

$$S = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx - b\cos bx) + C_1$$

i

$$K = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(b\sin bx + a\cos bx) + C_2,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. $\triangle$

Napomena 2.2.1. Integrali K i S se mogu dobiti integracijom kompleksne funkcije $x \mapsto e^{(a+ib)x}$. Naime, iz

$$K + iS = \int e^{(a+ib)x}\,dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + (C_1 + iC_2),$$

sleduje

$$K = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,\mathrm{Re}\big\{(a-ib)e^{ibx}\big\} + C_1$$

i

$$S = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,\mathrm{Im}\big\{(a-ib)e^{ibx}\big\} + C_2.$$

Primer 2.2.3. Za određivanje integrala

$$\int \arctan x\,dx$$

stavimo $u = \arctan x$ i $dv = dx$. Tada je $du = 1/(1+x^2)dx$ i $v = x$, pa imamo

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C,\end{aligned}$$

jer je (do na aditivnu konstantu)

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2). \quad \triangle$$

2.3. Metod rekurzivnih formula

U nekim slučajevima moguće je primeniti metod parcijalne integracije na određivanje integrala funkcija koje zavise od celobrojnog parametra, na taj način što se polazni integral I_n (n – celobrojni parametar) izražava rekurzivno pomoću integrala I_m ($m < n$).

Do sličnih rekurzivnih formula moguće je doći i na neki drugi način.

U svakom slučaju, ovaj način određivanja integrala svodi se na nalaženje rekurzivne formule oblika

$$I_n = \Phi(I_{n-1}, \ldots, I_{n-k}). \tag{2.3.1}$$

Da bi se, na osnovu rekurzivne formule (2.3.1), odredio integral I_n, potrebno je znati uzastopnih k integrala oblika I_n. Naravno, ako se znaju integrali $I_0, \ldots, I_{k-1}$ onda je moguće odrediti integrale I_n, za svako $n \geq k$.

Ovakav način određivanja integrala I_n poznat je kao *metod rekurzivnih formula*.

Ilustrovaćemo ovaj metod na nekoliko primera.

Primer 2.3.1. Posmatrajmo integral

$$I_n = \int x^a (\log x)^n \, dx \qquad (a \neq -1;\ n \in \mathbb{N}).$$

Ako stavimo $u = (\log x)^n$ i $dv = x^a dx$, imamo

$$du = \frac{n}{x}(\log x)^{n-1} dx \qquad \text{i} \qquad v = \frac{1}{a+1} x^{a+1}.$$

Tada je

$$I_n = \frac{x^{a+1}}{a+1}(\log x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\log x)^{n-1} \, dx,$$

tj.

$$I_n = \frac{x^{a+1}}{a+1}(\log x)^n - \frac{n}{a+1} I_{n-1}. \tag{2.3.2}$$

Formula (2.3.2) predstavlja rekurzivnu formulu za određivanje integrala I_n. Na ovaj način, određivanje integrala I_n sveli smo na određivanje integrala I_{n-1}. Uzastopnom primenom formule (2.3.2) moguće je određivanje integrala I_n svesti na određivanje integrala I_1, za koji smo u primeru 2.2.1 pokazali da je

$$I_1 = \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x - \frac{1}{a+1}\right) + C. \qquad \triangle$$

Primer 2.3.2. Neka je

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx \qquad (a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Ako stavimo $u = 1/(x^2+a^2)^n$ i $dv = dx$, imamo $du = -2nx/(x^2+a^2)^{n+1}dx$ i $v = x$. Tada primenom metoda parcijalne integracije na I_n dobijamo

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx.$$

Kako je

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = I_n - a^2 I_{n+1},$$

imamo

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}),$$

tj.

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{2.3.3}$$

S obzirom da je

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

iz rekurzivne formule (2.3.3) moguće je odrediti I_n za $n = 2, 3, \dots$. Na primer, za $n = 2$ i $n = 3$ imamo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ax}{x^2+a^2} + \arctan\frac{x}{a}\right) + C,\\ I_3 &= \frac{1}{8a^5}\left(\frac{2a^3x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3ax}{x^2+a^2} + 3\arctan\frac{x}{a}\right) + C. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Primer 2.3.3. Neka je

$$I_n = \int \tan^n x\,dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Za $n = 0$ i $n = 1$ imamo

$$I_0 = x + C \quad \text{i} \quad I_1 = -\log|\cos x| + C.$$

Neka je $n \geq 2$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx \\
&= \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
&= \int \tan^{n-2} x \, d(\tan x) - I_{n-2},
\end{aligned}$$

tj.

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}.$$

Poslednja formula predstavlja rekurzivnu formulu za određivanje integrala I_n ($n \geq 2$). S obzirom da su poznati integrali I_0 i I_1, uzastopnom primenom ove formule moguće je dobiti I_n za svako $n \geq 2$.

Na primer,

$$\begin{aligned}
I_4 = \int \tan^4 x \, dx &= \frac{1}{3} \tan^3 x - I_2 \\
&= \frac{1}{3} \tan^3 x - (\tan x - I_0) \\
&= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C. \qquad \triangle
\end{aligned}$$

Primer 2.3.4. Ako je $n \geq 2$, za integrale

$$S_n = \int \sin^n x \, dx \quad \text{i} \quad K_n = \int \cos^n x \, dx$$

važe rekurzivne formule

$$S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2}$$

i

$$K_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}.$$

Dokažimo sada formulu za S_n. Ako stavimo $u = \sin^{n-1} x$ i $dv = \sin x dx$, imamo $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$ i $v = -\cos x$. Tada, primenom metoda parcijalne integracije, dobijamo

$$\begin{aligned}
S_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx,
\end{aligned}$$

tj.

$$nS_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)S_{n-2}.$$

Kako su $S_0 = x + C$, $S_1 = -\cos x + C$, $K_0 = x + C$, $K_1 = \sin x + C$, integrali S_n i K_n mogu se odrediti za svako $n \geq 2$. Tako imamo,

$$\begin{aligned} S_6 &= -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{5}{6}S_4 \\ &= -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{5}{6}\Big(-\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}S_2\Big) \\ &= -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x \cos x + \frac{5}{8}\Big(-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}S_0\Big), \end{aligned}$$

tj.

$$S_6 = \cos x\Big(-\frac{1}{6}\sin^5 x - \frac{5}{24}\sin^3 x - \frac{5}{16}\sin x\Big) + \frac{5}{16}x + C. \qquad \triangle$$

Primer 2.3.5. Ako je

$$I_n = \int \frac{1}{(a + b\cos x)^n}\, dx \qquad (|a| \neq |b|;\ n \in \mathbb{N})\,,$$

važi rekurzivna formula

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(b^2 - a^2)}\left[\frac{b\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} - (2n-3)aI_{n-1} + (n-2)I_{n-2}\right].$$

Za određivanje I_1 videti odeljak 3.3 (posebno primer 3.3.1). $\triangle$

2.4. Metod neodređenih koeficijenata

U slučajevima kada nam je unapred poznat opšti oblik primitivne funkcije moguće je za integraciju koristiti *metod neodređenih koeficijenata.* Ilustovaćemo ovaj metod na jednom jednostavnom primeru.

Posmatrajmo integral

$$\int e^{\lambda x} P_n(x)\, dx \qquad (\lambda \neq 0),$$

gde je $x \mapsto P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinom n-tog stepena. Nije teško uočiti da će, u ovom slučaju, primitivna funkcija imati oblik $e^{\lambda x} Q_n(x)$, gde je Q_n polinom, takođe, stepena n. Pretpostavimo da je

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k,$$

gde su b_k zasad neodređeni koeficijenti. Tada, diferenciranjem jednakosti

$$\int e^{\lambda x} P_n(x)\, dx = e^{\lambda x} Q_n(x) + C,$$

dobijamo

$$e^{\lambda x} P_n(x) = \lambda e^{\lambda x} Q_n(x) + e^{\lambda x} Q_n'(x),$$

tj.

$$\lambda Q_n(x) + Q_n'(x) = P_n(x).$$

Dakle, imamo

$$\lambda \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

tj.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda b_k + (k+1) b_{k+1})\, x^k + \lambda b_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Na osnovu metoda neodređenih koeficijenata, iz poslednje jednakosti sleduje

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n}{\lambda}, \\ b_k &= \frac{1}{\lambda}\,(a_k - (k+1) b_{k+1}) \qquad (k = n-1, \ldots, 1, 0). \end{aligned}$$

Primer 2.4.1. Pri određivanju integrala $\int e^{-2x}(x^3 - x)\, dx$ treba pretpostaviti da je

$$\int e^{-2x}(x^3 - x)\, dx = e^{-2x}\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3\right) + C.$$

Diferenciranjem ove jednakosti i skraćivanjem sa e^{-2x} dobijamo

$$x^3 - x = (b_1 - 2b_0) + (2b_2 - 2b_1)x + (3b_3 - 2b_2)x^2 - 2b_3 x^3,$$

odakle sleduje

$$b_3 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{3}{4}, \quad b_1 = -\frac{1}{4}, \quad b_0 = -\frac{1}{8}.$$

Dakle,

$$\int e^{-2x}(x^3 - x)\, dx = -\frac{1}{8} e^{-2x}\left(1 + 2x + 6x^2 + 4x^3\right) + C. \quad \triangle$$

3. INTEGRACIJA ELEMENTARNIH FUNKCIJA

3.1. Integracija racionalnih funkcija

Ovo poglavlje je posvećeno integraciji nekih klasa elementarnih funkcija koje se često javljaju u primenama. To su, pre svega, racionalne funkcije, a zatim i neke jednostavnije klase iracionalnih funkcija, kao i neke trigonometrijske funkcije. U ovom odeljku razmatraćemo samo klasu racionalnih funkcija.

Neka su P i Q polinomi sa realnim koeficijentima, takvi da je stepen polinoma P manji od stepena polinoma Q, tj. $\operatorname{dg} P < \operatorname{dg} Q$. Kao što znamo, takva racionalna funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ naziva se prava racionalna funkcija (videti [15, str. 292]).

Kako se opšta racionalna funkcija, za koju je $\operatorname{dg} P \geq \operatorname{dg} Q$, uvek može predstaviti kao zbir jednog polinoma i jedne prave racionalne funkcije, to se integracija opšte racionalne funkcije svodi na integraciju polinoma i integraciju prave racionalne funkcije.

Primer 3.1.1. Posmatrajmo integral

$$J = \int \frac{x^6 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 7}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx.$$

Deljenjem brojioca imeniocem u podintegralnoj funkciji $x \mapsto R(x)$ dobijamo (videti [15, str. 292, primer 5.1.1)

$$R(x) = x^2 - 2 + \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} J &= \int \left(x^2 - 2 + \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 2x + \int \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx. \end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{x}{1 + x^2} + \frac{1}{4 + x^2} \tag{3.1.1}$$

imamo

$$J = \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C. \qquad \triangle$$

Iz ovog primera može se videti da je za integraciju prave racionalne funkcije $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ veoma važno njeno rastavljanje na parcijalne razlomke (formula (3.1.1)). Opšti slučaj rastavljanja prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke razmatran je u [15, str. 293–298].

Neka su P i Q polinomi sa realnim koeficijentima, takvi da je stepen polinoma P manji od stepena polinoma Q, tj. $\operatorname{dg} P < \operatorname{dg} Q$. Pretpostavimo da polinom Q ima realne nule $a_1, \dots, a_m$, sa redom višestrukosti $r_1, \dots, r_m$, i parove konjugovano-kompleksnih nula $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_l \pm i\beta_l$, sa redom višestrukosti $s_1, \dots, s_l$. Naravno, mora biti

$$\sum_{k=1}^{m} r_k + 2\sum_{k=1}^{l} s_k = \operatorname{dg} Q.$$

Parovima konjugovano-kompleksnih nula $\alpha_k \pm i\beta_k$ odgovaraju kvadratni faktori $x^2 + p_k x + q_k$ ($p_k = -2\alpha_k,\ q_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2$) odgovarajuće višestrukosti s_k.

Kao što je poznato, polinom Q može se faktorisati u obliku

$$Q(x) = A\prod_{k=1}^{m}(x-a_k)^{r_k}\prod_{k=1}^{l}(x^2+p_kx+q_k)^{s_k}, \tag{3.1.2}$$

gde je A koeficijent uz najviši stepen u polinomu Q. Ovo omogućava da se prava racionalna funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ rastavi na parcijalne razlomke čiji oblik zavisi od oblika faktora u (3.1.2). Tako imamo

$$R(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{r_k}\frac{A_{kn}}{(x-a_k)^n} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{n=1}^{s_k}\frac{M_{kn}x + N_{kn}}{(x^2+p_kx+q_k)^n}, \tag{3.1.3}$$

gde se nepoznati koeficijenti A_{kn}, M_{kn}, N_{kn}, određuju metodom neodređenih koeficijenata.

Pretpostavimo da je prava racionalna funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ definisana za svako $x \in I$, tj. da polinom Q nema nula u intervalu I. Na osnovu (3.1.3), integracija prave racionalne funkcije zahteva nalaženje integrala oblika

$$J_n = \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx \qquad \text{i} \qquad K_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx.$$

Integral J_n je jednostavan i za njega važi

$$J_1 = A \log |x-a| + C,$$
$$J_n = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad (n > 1).$$

Razmotrićemo sada integral K_n. Kako je

$$x^2 + px + q = \Big(x + \frac{p}{2}\Big)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

uvođenjem nove promenljive $t = x + p/2$ i stavljanjem $a^2 = q - p^2/4 > 0$, nalazimo

$$\begin{aligned} K_n &= \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}\, dx \\ &= M \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^n}\, dt + \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^n}\, dt. \end{aligned}$$

Za $n = 1$ imamo

$$K_1 = \frac{M}{2} \log(t^2 + a^2) + \frac{2N - Mp}{2a} \arctan \frac{t}{a} + C,$$

tj.

$$K_1 = \frac{M}{2} \log(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{2a} \arctan \frac{2x + p}{2a} + C, \tag{3.1.4}$$

gde je $a = (q - p^2/4)^{1/2}$.

U slučaju kada je $n > 1$ imamo

$$K_n = \frac{-M}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2N - Mp}{2} I_n, \tag{3.1.5}$$

gde je integral I_n određen u primeru 2.3.2.

Primer 3.1.2. U cilju određivanja integrala

$$\int \frac{1}{1 + x^3}\, dx,$$

podintegralnu funkciju rastavimo u obliku

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Metodom neodređenih koeficijenata iz identiteta

$$A(x^2-x+1) + (Mx+N)(x+1) \equiv 1,$$

tj. iz

$$(A+M)x^2 + (M+N-A)x + (A+N) \equiv 1,$$

dobijamo sistem jednačina

$$A+M=0, \quad M+N-A=0, \quad A+N=1,$$

odakle sleduje $A = 1/3$, $M = -1/3$, $N = 2/3$.

Dakle, imamo

$$\int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx.$$

Drugi integral na desnoj strani je tipa K_1 i dat je pomoću (3.1.4). Ilustracije radi, ponovimo izloženi postupak na određivanje ovog integrala Tako imamo

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt,$$

gde smo stavili $x - 1/2 = t$.

Prema tome, važi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx &= \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt - \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\log\Big(t^2+\frac{3}{4}\Big) - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2-x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \quad \triangle$$

Primer 3.1.3. Odredimo

$$J = \int \frac{8x^3 + 21x - 11}{(x^3 - 1)^2}\, dx.$$

Podintegralna funkcija $R(x)$ ima oblik

$$R(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + x + 1} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + x + 1)^2}, \tag{3.1.6}$$

gde su (videti [15, str. 296–297, primer 5.2.1])

$$A_1 = 1,\ A_2 = 2,\ M_1 = -1,\ N_1 = -4,\ M_2 = -1,\ N_2 = -8.$$

Odredimo najpre integral poslednjeg razlomka na desnoj strani u (3.1.6).

Kako je

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

saglasno prethodnoj notaciji, imamo $p = q = 1$, $t = x + \frac{1}{2}$, $a^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, pa je, na osnovu (3.1.5),

$$K_2 = \int \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + x + 1)^2}\, dx = -\frac{-1}{2 \cdot 1(t^2 + \frac{3}{4})} + \frac{2 \cdot (-8) - (-1) \cdot 1}{2} I_2,$$

tj.

$$K_2 = \frac{1}{2(t^2 + \frac{3}{4})} - \frac{15}{2} I_2.$$

Kako je (videti primer 2.3.2)

$$I_2 = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{4}} \left(\frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t}{\sqrt{3}} \right) + C,$$

dobijamo

$$K_2 = \frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) + C,$$

tj.

$$K_2 = -\frac{5x + 2}{x^2 + x + 1} - \frac{10}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Kako je

$$\int \frac{A_1}{x-1}\, dx = \log|x-1| + C, \qquad \int \frac{A_2}{(x-1)^2}\, dx = -\frac{2}{x-1} + C,$$

$$\int \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + x + 1}\, dx = -\frac{1}{2}\log(x^2 + x + 1) - \frac{7}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

najzad dobijamo

$$J = \frac{x(1-7x)}{x^3 - 1} + \frac{1}{2}\log \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} - \frac{17}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \qquad \triangle$$

Primer 3.1.4. Razmotrimo primer integracije prave racionalne funkcije $x \mapsto P(x)/Q(x)$, kada polinom Q ima samo proste realne nule $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Tada je

$$Q(x) = a_m \prod_{k=1}^{m} (x - \xi_k),$$

gde je a_m koeficijent uz najviši stepen u polinomu Q, a odgovarajuće rastavljanje (3.1.3) ima jednostavan oblik

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{x - \xi_k}. \tag{3.1.7}$$

Koeficijenti A_k se mogu jednostavno odrediti. Naime, ako (3.1.7) pomnožimo faktorom $x - \xi_i$ $(1 \le i \le m)$, dobijamo

$$(x - \xi_i)\frac{P(x)}{Q(x)} = A_i + (x - \xi_i) \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{m} \frac{A_k}{x - \xi_k}.$$

Kako je $\lim\limits_{x \to \xi_i} (x - \xi_i)\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(\xi_i)}{Q'(\xi_i)}$, iz prethodne jednakosti sleduje

$$A_i = \frac{P(\xi_i)}{Q'(\xi_i)} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Zamenom ovih vrednosti u (3.1.7) i integracijom dobijamo

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{x - \xi_i}\, dx &= \sum_{i=1}^{n} \int \frac{A_i}{x - \xi_i}\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{P(\xi_i)}{Q'(\xi_i)} \log|x - \xi_i| + C. \qquad \triangle \end{aligned}$$

3.2. Integracija iracionalnih funkcija

U ovom odeljku razmaraćemo integraciju nekih klasa iracionalnih funkcija koje se uvođenjem nove promenljive svode na racionalne funkcije. Takva transformacija podintegralne funkcije u racionalnu funkciju obično se naziva *racionalizacija integrala*. Na taj način dolazimo do integrala koji se može odrediti postupkom iz prethodnog odeljka.

Neka je podintegralna funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana na I pomoću

$$f(x) = R(x, y_1, \dots, y_n), \tag{3.2.1}$$

gde su R racionalna funkcija svojih argumenata i $y_i\colon I \to \mathbb{R}$ date iracionalne funkcije.

Neka je $g\colon J \to I$ racionalna funkcija za koju postoji inverzna funkcija.

Ako se svaka od funkcija y_i $(= y_i(x))$, pomoću $x = g(t)$, transformiše na racionalnu funkciju $g_i(t)$ $(= y_i(g(t)))$, tada je ostvarena racionalizacija integrala, jer je $t \mapsto R(g(t), g_1(t), \dots, g_n(t))$ racionalna funkcija. Primetimo da je $g'(t)$, takođe, racionalna funkcija. Tako imamo

$$\int f(x)\,dx = \int R(g(t), g_1(t), \dots, g_n(t))g'(t)\,dt.$$

Razmotrićemo posebno nekoliko slučajeva.

1. Integracija funkcija oblika $\boldsymbol{R\Big(x, \big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)^{r_1}, \dots, \big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)^{r_n}\Big)}$

Neka je $y_i = \big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)^{r_i}$, $r_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 1, \dots, n)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Slučaj kada je $ad - bc = 0$ je trivijalan jer se tada y_i svodi na konstantu. Stoga pretpostavimo da je $ad - bc \neq 0$.

Svedimo najpre racionalne brojeve $r_1, \dots, r_m$ na zajednički imenilac, tako da je

$$r_i = \frac{p_i}{m}, \qquad p_i \in \mathbb{Z} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Uvođenjem nove promenljive t pomoću

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d},$$

tj.

$$x = g(t) = \frac{dt^m - b}{a - ct^m},$$

imamo

$$y_i = \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_i} = t^{p_i}, \qquad g'(t) = \frac{m(ad-bc)}{(a-ct^m)^2}\, t^{m-1}.$$

Na taj način problem integracije funkcije f, određene pomoću (3.2.1), svodimo na integraciju racionalne funkcije

$$\int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_n}\right) \frac{m(ad-bc)}{(a-ct^m)^2}\, t^{m-1}\, dt.$$

Primetimo da integrali oblika

$$\int R\left(x, (ax+b)^{r_1}, \dots, (ax+b)^{r_n}\right) dx,$$
$$\int R\left(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_n}\right) dx,$$

takođe, pripadaju posmatranoj klasi integrala.

Primer 3.2.1. Odredimo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Ako stavimo $x = t^6,\ dx = 6t^5 dt$, dati integral se svodi na

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx &= 6\int \frac{t^3}{t+1}\, dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= 6\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \log|t+1|\right) + C.\end{aligned}$$

Vraćanjem na staru promenljivu $\left(t = x^{1/6}\right)$ dobijamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C. \quad \triangle$$

2. Integracija binomnog diferencijala

Izraz $x^r(a+bx^q)^p dx$, gde su $r, p, q \in \mathbb{Q}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, naziva se *binomni diferencijal*. Čebišev[42)] je dokazao da se integral

$$\int x^r (a+bx^q)^p\, dx \tag{3.2.2}$$

42) Pafnutiĭ L'vovič Čebišev (1821–1894), veliki ruski matematičar.

može izraziti u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija ako i samo ako je neki od brojeva

$$p, \quad \frac{r+1}{q}, \quad \frac{r+1}{q}+p$$

ceo broj. U svim drugim slučajevima takvo predstavljanje integrala (3.2.2) nije moguće.

U daljem razmatranju posebno ćemo se zadržati na pomenutim slučajevima:

1° Slučaj $p \in \mathbb{Z}$. Svedimo racionalne brojeve r i q na zajednički imenilac m, tj. $r = r_1/m$ i $q = q_1/m$, gde su r_1 i q_1 celi brojevi. Tada imamo da je

$$\int x^r (a+bx^q)^p\, dx = \int x^{r_1/m}\big(a+bx^{q_1/m}\big)^p\, dx.$$

Ako stavimo $x = t^m,\ dx = mt^{m-1}dt$, poslednji integral se svodi na integral racionalne funkcije, tj. na

$$m\int t^{r_1}\,(a+bt^{q_1})^p\, t^{m-1}\, dt.$$

2° Slučaj $(r+1)/q \in \mathbb{Z}$. Stavimo $x = t^{1/q},\ dx = (1/q)t^{1/q-1}dt$. Tada je

$$\begin{aligned}\int x^r (a+bx^q)^p\, dx &= \int t^{r/q}(a+bt)^p \frac{1}{q}\, t^{1/q-1}\, dt\\ &= \frac{1}{q}\int (a+bt)^p t^{(r+1)/q-1}\, dt.\end{aligned}$$

Neka je m imenilac razlomka p, tj. $p = s/m$ $(s \in \mathbb{Z})$. Tada se uvođenjem smene $a+bt = z^m$, poslednji integral transformiše na integral sa racionalnom funkcijom po z, tj. na

$$\frac{m}{qb}\int z^{s+m-1}\Big(\frac{z^m-a}{b}\Big)^l\, dz \qquad \Big(l = \frac{r+1}{q}-1\Big).$$

3° Slučaj $(r+1)/q + p \in \mathbb{Z}$. Kao i u prethodnom slučaju stavimo $x = t^{1/q}$. Tada je $dx = (1/q)t^{1/q-1}dt$ i

$$\int x^r (a+bx^q)^p\, dx = \frac{1}{q}\int \Big(\frac{a+bt}{t}\Big)^p t^{(r+1)/q+p-1}\, dt.$$

Uvođenje nove promenljive z pomoću $z^m = (a+bt)/t$, gde je m imenilac razlomka p (kao i u slučaju 2°), dovodi do racionalizacije polaznog integrala

$$-\frac{a^l m}{q}\int z^{s+m-1}\frac{1}{(z^m-b)^{l+1}}\,dz \qquad \Big(l=\frac{r+1}{q}+p\Big).$$

Primer 3.2.2. Odredimo integral

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx.$$

Ovde je $r=1/2$, $q=1/3$, $p=-2$, $a=b=1$. Kako je p ceo broj, imamo slučaj 1°. Smenom $x=t^6$, dati integral se svodi na

$$I=6\int\frac{t^8}{(1+t^2)^2}\,dt=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt,$$

tj.

$$I=6\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+3t-4\arctan t+\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt\right).$$

Kako je, na osnovu primera 2.3.2,

$$\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+\arctan t\right)+C,$$

posle povratka na staru promenljivu x imamo

$$I=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}-21\arctan\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+C. \qquad \triangle$$

3. Integracija funkcija oblika $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$

Integrali oblika

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \tag{3.2.3}$$

se obično racionališu pomoću tzv. *Eulerovih smena*. Postoje tri Eulerove smene. Koja će se od njih koristiti zavisi od izvesnih uslova koje ćemo sada analizirati:

Prva Eulerova smena. Neka je $a>0$. Ako stavimo

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t$$

i jednakost kvadriramo, dobijamo

$$bx + c = \pm 2\sqrt{a}\, xt + t^2,$$

odakle sleduje

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}\, t}, \qquad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\mp\sqrt{a}\, t^2 + bt \mp \sqrt{a}\, c}{b \mp 2\sqrt{a}\, t}$$

i

$$dx = 2\frac{\mp\sqrt{a}\, t^2 + bt \mp \sqrt{a}\, c}{(b \mp 2\sqrt{a}\, t)^2}\, dt.$$

Dakle, integral (3.2.3) se svodi na integraciju racionalne funkcije.

Druga Eulerova smena. Ako je $c > 0$ možemo staviti

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} + tx,$$

odakle dobijamo

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

Kako je

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\pm\sqrt{c}\, t^2 - bt \pm a\sqrt{c}}{a - t^2}$$

i

$$dx = 2\,\frac{\pm\sqrt{c}\, t^2 - bt \pm a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2}\, dt,$$

problem se, i u ovom slučaju, svodi na integraciju racionalne funkcije.

Treća Eulerova smena. Neka su nule α i β $(\alpha \neq \beta)$ kvadratnog trinoma realne. Tada se može koristiti smena

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha).$$

Kako je $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ imamo $x = (a\beta - \alpha t^2)/(a - t^2)$. Dakle,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\beta - \alpha)t}{a - t^2} \qquad \text{i} \qquad dx = \frac{2a(\beta - \alpha)t}{(a - t^2)^2}\, dt,$$

što znači da je izvršena racionalizacija integrala.

Primetimo da su za racionalizaciju svakog integrala oblika (3.2.2) dovoljne prva i treća Eulerova smena. Naime, ako su nule kvadratnog trinoma realne koristi se treća Eulerova smena, a ako su nule konjugovano-kompleksne tada kvadratni trinom ne menja znak, tj. ima znak koeficijenta a. U tom slučaju je dovoljno razmatrati samo slučaj kada je $a > 0$, koji se rešava, kao što smo videli, prvom Eulerovom smenom. U protivnom, kada je $a < 0$, kvadratni trinom je negativan za svako x, pa podintegralna funkcija nije definisana.

Primer 3.2.3. Neka je dat integral

$$I = \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx \qquad (x \neq -1).$$

Kako je $a = 1 > 0$, racionalizacija integrala se može sprovesti pomoću prve Eulerove smene. Primetimo da je ovde pogodno uzeti

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t.$$

Tada imamo

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \qquad dx = 2\,\frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2}\, dt$$

i

$$I = 2 \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2}\, dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{2t + 1} + \frac{C}{(2t + 1)^2} \right) dt.$$

Koeficijente A, B, C odredićemo metodom neodređenih koeficijenata. Dakle, iz identiteta

$$A(2t + 1)^2 + Bt(2t + 1) + Ct \equiv 2(t^2 + t + 1),$$

sleduje

$$A = 2, \quad 4A + B + C = 2, \quad 4A + 2B = 2,$$

odakle dobijamo $A = 2$, $B = -3$, $C = -3$. Prema tome,

$$I = 2 \log |t| - \frac{3}{2} \log |2t + 1| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t + 1} + C,$$

tj.

$$I = \frac{1}{2} \log \frac{t^4}{|2t + 1|^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t + 1} + C,$$

gde je $t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$. $\triangle$

Primer 3.2.4. Posmatrajmo integral

$$I = \int \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}}\, dx,$$

gde je $x < -2$ ili $x > 0$.

Kako je $x^2 + 2x = x(x+2)$, tj. $\alpha = 0$ i $\beta = -2$, uvodimo treću Eulerovu smenu $\sqrt{x(x+2)} = tx$, odakle je

$$x = \frac{2}{t^2 - 1} \qquad \text{i} \qquad dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}\, dt.$$

Tada se dati integral svodi na

$$I = -2 \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = -2 \arctan t + C,$$

tj.

$$I = -2 \arctan \sqrt{\frac{x+2}{x}} + C. \quad \triangle$$

Primer 3.2.5. Za određivanje integrala

$$I = \int \frac{\left(1 - \sqrt{x^2 + x + 1}\,\right)^2}{x^2 \sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$$

iskoristićemo drugu Eulerovu smenu ($c = 1 > 0$)

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 + tx.$$

Tada imamo

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2}, \quad dx = 2\frac{t^2 - t + 1}{(1-t^2)^2}\, dt,$$

tako da se dati integral svodi na

$$I = \int \left(\frac{1-t^2}{2t-1}\right)^2 \frac{t^2(2t-1)^2}{(1-t^2)^2} \cdot \frac{1-t^2}{t^2 - t + 1} \cdot 2\frac{t^2 - t + 1}{(1-t^2)^2}\, dt,$$

tj.

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{t^2}{1-t^2}\, dt = -2t + \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= \frac{2}{x}\left(1 - \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + \log \left| 2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C. \quad \triangle \end{aligned}$$

Za određivanje integrala oblika (3.2.3), umesto Eulerovih smena, mogu se koristiti i druge transformacije koje dovode do jednostavnijih integrala.

Primetimo najpre da se svaki integral oblika (3.2.3) može svesti na jedan od oblika

$$(a) \qquad \int R\left(z, \sqrt{1-z^2}\right) dz,$$

$$(b) \qquad \int R\left(z, \sqrt{1+z^2}\right) dz,$$

$$(c) \qquad \int R\left(z, \sqrt{z^2-1}\right) dz,$$

gde je R odgovarajuća racionalna funkcija od dva argumenta.

Integrali oblika (a), (b), (c) mogu se dalje transformisati pomoću trigonometrijskih ili hiperboličkih smena.

Sledeća tabela daje pregled smena.

Oblik integrala	(a)	(b)	(c)
Trigonometrijska smena	$z = \sin t$	$z = \tan t$	$z = 1/\cos t$
Hiperbolička smena	$z = \tanh t$	$z = \sinh t$	$z = \cosh t$

Integracija trigonometrijskih funkcija biće razmatrana u sledećem odeljku.

Primer 3.2.6. Neka je dat integral

$$I = \int \frac{\sqrt{12x^2 + 12x - 25}}{2x+1}\, dx.$$

Kako je $12x^2 + 12x - 25 = 3(2x+1)^2 - 28$, uvedimo smenu $2x + 1 = z\sqrt{28/3}$. Tada se dati integral svodi na

$$I = \sqrt{7} \int \frac{\sqrt{z^2-1}}{z}\, dz$$

tj. na oblik (c).

Uvođenjem trigonometrijske smene $z = 1/\cos t$ imamo

$$I = \sqrt{7} \int \cos t \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}\, \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt = \sqrt{7} \int \tan^2 t\, dt,$$

i na dalje,

$$I = \sqrt{7} \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt = \sqrt{7}(\tan t - t) + C.$$

Kako je $\cos t = 1/z$ i $z = \sqrt{3/28}(2x+1)$ imamo redom

$$
\begin{aligned}
I &= \sqrt{7}\left(\sqrt{z^2-1} - \arccos\frac{1}{z}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{12x^2+12x-25} - \sqrt{7}\arccos\frac{2\sqrt{21}}{3(2x+1)} + C. \quad \triangle
\end{aligned}
$$

Primer 3.2.7. Neka je

$$
I = \int \frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}\,dx.
$$

S obzirom da je $5+x-x^2 = \frac{21}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, uvedimo smenu $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}z$. Tada dobijamo

$$
I = \int \frac{1+\sqrt{21}z}{\sqrt{\frac{21}{4}(1-z^2)}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{1+\sqrt{21}z}{\sqrt{1-z^2}}\,dz.
$$

Kako je ovaj integral tipa (a) uvedimo smenu $z = \sin t$. Tako imamo

$$
I = \frac{1}{2}\int \frac{1+\sqrt{21}\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\sqrt{21}\sin t)\,dt,
$$

tj.

$$
I = \frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{21}}{2}\cos t + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}} - \sqrt{5+x-x^2} + C. \quad \triangle
$$

Primer 3.2.8. Posmatrajmo sada integral

$$
I = \int \frac{1}{(1+x^2)^{5/2}}\,dx,
$$

koji ima oblik (b). Korišćenjem, na primer, hiperboličke smene $x = \sinh t$, on se svodi na

$$
I = \int \frac{1}{\cosh^4 t}\,dt = \int (1-\tanh^2 t)\,d(\tanh t) = \tanh t - \frac{1}{3}(\tanh t)^3 + C,
$$

tj.

$$
I = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^3 + C.
$$

Primetimo da se za određivanje datog integrala može koristiti i trigonometrijska smena $x = \tan t$. $\triangle$

Na kraju ovog odeljka ukazaćemo kako se može jednostavnije izvesti integracija nekih specijalnih slučajeva integrala $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$.

1° Integrali oblika

$$\int \frac{1}{(kx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx \tag{3.2.4}$$

transformišu se, pomoću $t = 1/(kx+n)$, na oblik

$$-\frac{1}{k}\int \frac{1}{\sqrt{\alpha t^2+\beta t+\gamma}}\, dt,$$

gde su α, β, γ određeni pomoću a, b, c, k, n. Ovaj integral se jednostavno može svesti na jedan od poslednja tri integrala iz tablice integrala (odeljak 1.2).

Primer 3.2.9. Integral iz primera 3.2.4 je oblika (3.2.4) pa se smenom $t = 1/(x+1)$ svodi na

$$I = -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -\arcsin t + C,$$

tj.

$$I = -\arcsin \frac{1}{x+1} + C.$$

Primetimo da je dobijeni rezultat, na prvi pogled, različit od rezultata dobijenog u primeru 3.2.4. Međutim, imajući u vidu identitet

$$\arcsin t = 2\arctan\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - \frac{\pi}{2} \qquad (|t| < 1),$$

lako se pokazuje da se dobijeni rezultati slažu. $\triangle$

2° Integrali oblika

$$\int \frac{1}{(x-p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$$

se transformišu, pomoću $t = 1/(x-p)$, na oblik

$$-\int \frac{t^{n-1}}{\sqrt{\alpha t^2+\beta t+\gamma}}\, dt,$$

gde su α, β, γ određeni pomoću a, b, c, p, n. Ovaj oblik je generalizacija za 1°.

Primer 3.2.10. Integral

$$I = \int \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}\, dx,$$

smenom $t = 1/(x+1)$, se svodi na

$$I = -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int \frac{1-t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Korišćenjem rezultata iz primera 2.1.2, dobijamo

$$I = -\frac{1}{2}\arcsin t + \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + C,$$

tj.

$$I = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1} + \frac{\sqrt{x^2+2x}}{2(x+1)^2} + C. \quad \triangle$$

3° Integrali oblika

$$I_n = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx,$$

gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena mogu se naći metodom neodređenih koeficijenata. Naime, može se uočiti da je

$$I_n \equiv Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx,$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ čije koeficijente, kao i konstantu A, treba odrediti. Diferenciranjem prethodne jednakosti dobijamo

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \equiv Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}(x)\frac{ax+b/2}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

tj.

$$P_n(x) \equiv (ax^2+bx+c)Q'_{n-1}(x) + \left(ax + \frac{b}{2}\right)Q_{n-1}(x) + A,$$

odakle, metodom neodređenih koeficijenata, određujemo koeficijente polinoma Q_{n-1} i koeficijent A.

Primer 3.2.11. Posmatrajmo integral

$$I_2 = \int \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2-x+1}}\, dx.$$

Ovde je $n=2$ i $P_2(x) = x^2+3$. Neka je $Q_1(x) = \alpha x + \beta$. Tada imamo

$$x^2 + 3 \equiv (x^2 - x + 1)\alpha + \left(x - \frac{1}{2}\right)(\alpha x + \beta) + A,$$

tj.

$$2\alpha = 1, \qquad -\frac{3}{2}\alpha + \beta = 0, \qquad \alpha - \frac{1}{2}\beta + A = 3,$$

odakle nalazimo $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $A = 23/8$. Najzad, imamo

$$I_2 = \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1} + \frac{23}{8}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\, dx,$$

tj.

$$I_2 = \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1} + \frac{23}{8}\log\bigl(2x - 1 + 2\sqrt{x^2-x+1}\bigr) + C. \quad \triangle$$

3.3. Integracija trigonometrijskih funkcija

U ovom odeljku razmatraćemo integraciju trigonometrijskih funkcija oblika $x \mapsto R(\sin x, \cos x)$, gde je R data racionalna funkcija svojih argumenata. Dakle, imamo integral

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx. \tag{3.3.1}$$

Postoji univerzalna trigonometrijska smena kojom se može izvršiti racionalizacija integrala (3.3.1). Naime, ako stavimo

$$t = \tan\frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi), \tag{3.3.2}$$

imamo

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\arctan t, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Integral (3.3.1) se tada svodi na integral sa racionalnom funkcijom. Zaista,

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Primetimo da se univerzalna smena (3.3.2) može koristiti i na intervalima oblika $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$, gde je n ceo broj. Naravno, funkcija $x \mapsto \tan(x/2)$ nije definisana u tačkama $x = (2n-1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Primer 3.3.1. Odredimo integral

$$I = \int \frac{1}{2+\cos x}\,dx.$$

Na osnovu prethodnog imamo

$$I = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{3+t^2}\,dt,$$

tj.

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right) + C. \qquad \triangle$$

Iako je smena (3.3.2) univerzalna, jer uvek racionališe integral (3.3.1), nije celishodno upotrebljavati je uvek, s obzirom da je racionalisani integral često glomazan. U nekim slučajevima moguće je, upotrebom drugačije smene, na primer,

$$t = \sin x, \qquad t = \cos x, \qquad t = \tan x,$$

jednostavnije naći integral (3.3.1).

Primer 3.3.2. Neka je dat integral

$$I = \int \frac{1}{\sin^3 x \cos x}\, dx.$$

Smenom (3.3.2), ovaj integral se svodi na

$$I = \int \frac{1}{\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^3 \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^3}{t^3(1-t^2)}\, dt.$$

Međutim, ako stavimo $z = \tan x$, tj.

$$\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad dx = \frac{1}{1+z^2}\, dz,$$

dobijamo jednostavniji integral

$$I = \int \frac{1+z^2}{z^3}\, dz = -\frac{1}{2z^2} + \log|z| + C,$$

tj.

$$I = \log|\tan x| - \frac{1}{2\tan^2 x} + C. \quad \triangle$$

U daljem tekstu razmatraćemo nekoliko specijanih tipova trigonometrijskih integrala:

1. Integrali oblika $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$

Određivanje ovakvih integrala sprovodi se jednostavno korišćenjem formule

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right].$$

Takođe, korišćenjem formula

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right],$$
$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right]$$

omogućava nalaženje odgovarajućih integrala.

Na primer,

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \sin 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C.\end{aligned}$$

2. Integrali oblika $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Pretpostavimo, najpre, da su brojevi m i n celi. Tada je ovaj slučaj uključen u opšti slučaj koji se rešava promoću univerzalne smene (3.3.2).

Međutim, ako je jedan od brojeva neparan, na primer $m = 2k + 1$, tada je pogodnije koristiti smenu $t = \cos x$. Za slučaj $n = 2k + 1$, uveli bismo $t = \sin x$. Dakle, imamo

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x \, dx = - \int (1 - t^2)^k t^n \, dt,$$

što znači da se problem svodi na integraciju racionalne funkcije.

U slučaju kada su m i n neparni, tj. $m = 2k + 1$ i $n = 2i + 1$, pogodno je koristiti smenu $t = \cos 2x$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\int \sin^{2k+1} x \cos^{2i+1} x \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin^{2k} x \cos^{2i} x \sin 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1-t}{2} \right)^k \left(\frac{1+t}{2} \right)^i \, dt.\end{aligned}$$

Kada su m i n pozitivni i parni, tj. $m = 2k$ i $n = 2i$, pogodno je, najpre, transformisati integral na sledeći način

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2i} x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^i \, dx,$$

čime se snižavaju stepeni, a zatim dobijenu podintegralnu funkciju množenjem razviti po stepenima od $\cos 2x$. Neparni stepeni se integrale kako je prethodno pokazano, a parni se dalje transformišu na $\cos 4x$, itd.

Primer 3.3.3. Neka je $I_{24} = \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$. Tada redom imamo

$$
\begin{aligned}
I_{24} &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx-\frac{1}{2}\int (1-\sin^2 2x)\, d(\sin 2x)\right] \\
&= \frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C. \quad \triangle
\end{aligned}
$$

Na kraju primetimo da se, u slučaju kada su m i n racionalni brojevi, posmatrani integral svodi na integraciju binomnog diferencijala (videti odeljak 3.2). Zaista, uvođenjem smene $t = \sin x$, dobijamo

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int t^m (1-t^2)^{(n-1)/2} \, dt.$$

Prema tome, integracija u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija moguća je samo u slučajevima koji su razmatrani u odeljku 3.2 (Čebiševljev rezultat). tj. kada je bar jedan od brojeva $\frac{n-1}{2}$, $\frac{m+1}{2}$, $\frac{m+n}{2}$ ceo broj.

3.4. Napomene o integraciji u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija

U prethodnim odeljcima razmatrali smo integraciju nekih klasa elementarnih funkcija. Pri tome smo videli da se za svaku racionalnu funkciju može naći primitivna funkcija izražena u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija, ili kako kažemo kraće, svaka racionalna funkcija se može integraliti u konačnom obliku. Kada se radilo o iracionalnim funkcijama, ali i o transcendentnim funkcijama (od kojih smo uglavnom razmatrali trigonometrijske funkcije), integracija u konačnom obliku nije uvek bila moguća. Setimo se samo integracije binomnog diferencijala, koja je mogla da se sprovede u konačnom obliku samo za neke specijalne vrednosti izložilaca p, q, r. Uopšte uzev, samo se jedna uska klasa elementarnih funkcija može integraliti u konačnom obliku pomoću elementarnih funkcija. Navešćemo neke tipične primere elementarnih funkcija čija se primitivna funkcija ne može izraziti u konačnom obliku, a koje se veoma često javljaju u primenama. Takvi su, na primer, integrali

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{1}{\log x}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,dx, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx \qquad (0<k<1).$$

Poslednja dva integrala se nazivaju *eliptičkim integralima*. Njih je detaljno izučavao francuski matematičar Legendre.

Napomenimo da integral $\int e^{-x^2}\,dx$ igra značajnu ulogu u mnogim oblastima, a posebno u teoriji verovatnoće.

4. ODREĐENI INTEGRAL

4.1. Definicija određenog integrala

Neka je $x \mapsto f(x)$ ograničena funkcija na konačnom segmentu $[a,b]$. Uočimo podelu segmenta $[a,b]$ nizom deonih tačaka $\{x_k\}_{k=0}^n$ tako da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b, \tag{4.1.1}$$

$\sigma_k = [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ovakvu podelu, za koju je očigledno

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^n \sigma_k,$$

nazivamo *σ podela segmenta* $[a,b]$. Skup svih mogućih σ podela segmenta $[a,b]$ označićemo sa Σ.

Svakoj σ podeli segmenta $[a,b]$, odgovaraju brojevi

$$m_k = \inf_{x\in\sigma_k} f(x) \quad \text{i} \quad M_k = \sup_{x\in\sigma_k} f(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.1.2}$$

Razliku $M_k - m_k$ označavamo sa ω_k i nazivamo *oscilacija funkcije* f na podsegmentu σ_k. Pod oscilacijom funkcije f na segmentu $[a,b]$ podrazumevamo veličinu

$$\omega = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Definicija 4.1.1. Sume

$$\underline{S}(\sigma) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \qquad i \qquad \overline{S}(\sigma) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

nazivaju se *donja* i *gornja Darbouxova*[43] *suma*, respektivno, dok se vred-

[43] Gaston Darboux (1842–1917), francuski matematičar.

nosti

$$\sup_{\sigma\in\Sigma} \underline{S}(\sigma) = \underline{I} \qquad \text{i} \qquad \inf_{\sigma\in\Sigma} \overline{S}(\sigma) = \bar{I}$$

uzete preko svih mogućih podela $\sigma \in \Sigma$, nazivaju, redom, *donji* i *gornji Darbouxov integral*.

Definicija 4.1.2. Ako su za ograničenu funkciju f, na konačnom segmentu $[a, b]$, donji i gornji Darbouxov integral jednaki, kažemo da je *funkcija f integrabilna u Riemannovom smislu* ili da je funkcija f *$\mathcal{R}$-integrabilna funkcija* na segmentu $[a, b]$. Vrednost $I = \underline{I} = \bar{I}$ nazivamo *Riemannov integral* funkcije f ili *određeni integral* funkcije f, u oba slučaja na $[a, b]$, i označavamo ga sa $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Skup svih integrabilnih funkcija na $[a, b]$ u smislu prethodne definicije označavaćemo sa $\mathcal{R}[a, b]$, ili prosto sa $\mathcal{R}$, ako ne može doći do zabune o kom se segmentu integracije radi. Za tačke a i b kažemo da su, redom, *donja* i *gornja granica određenog integrala* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Kako za ograničenu funkciju na $[a, b]$ postoje brojevi m i M takvi da je

$$m \le f(x) \le M \qquad (x \in [a, b]),$$

zaključujemo da za proizvoljnu σ podelu imamo

$$m(b-a) \le \underline{S}(\sigma) \le \overline{S}(\sigma) \le M(b-a), \tag{4.1.2}$$

što navodi na pomisao da je svaka ograničena funkcija na $[a, b]$ $\mathcal{R}$-integrabilna funkcija.

Međutim, da sve ograničene funkcije na segmentu $[a, b]$ nisu integrabilne pokazuje sledeći jednostavan primer:

Primer 4.1.1. Neka je funkcija $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definisana pomoću

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{racionalan broj}, \\ 0, & x - \text{iracionalan broj}. \end{cases}$$

Očigledno, ovako definisana funkcija je ograničena $(0 \le f(x) \le 1,\ 0 \le x \le 1)$. Pri bilo kakvoj σ podeli segmenta $[0, 1]$, u svakom podsegmentu σ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ imaćemo i racionalne i iracionalne tačke, tako da će za svako k uvek biti $m_k = 0$, a $M_k = 1$. Kako su tada, nezavisno od podele σ, donja i gornja Darbouxova suma redom jednake $\underline{S}(\sigma) = 0$ i $\overline{S}(\sigma) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1$, nalazimo da su odgovarajući Darbouxovi integrali, redom, $\underline{I} = \underline{S}(\sigma) = 0$ i $\bar{I} = \overline{S}(\sigma) = 1$. Dakle, $\underline{I} \ne \bar{I}$, što znači da funkcija f nije $\mathcal{R}$-integrabilna. $\triangle$

U dosadašnjem izlaganju pretpostavljali smo da je donja granica integrala manja od gornje granice, tj. da je $a < b$. Moguće je, međutim, razmatrati i obrnut slučaj, tj. definisati integral $\int_b^a f(x)\,dx$. U tom slučaju, samo umesto σ podele segmenta $[a,b]$ $(a < b)$, date pomoću (4.1.1), treba uvesti tzv. inverznu podelu $\bar{\sigma}$, datu sa

$$b = \bar{x}_0 > \bar{x}_1 > \cdots > \bar{x}_{k-1} > \bar{x}_k > \cdots > \bar{x}_n = a,$$

gde su $\bar{\sigma}_k = [\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k]$, $\Delta\bar{x}_k = \bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Primetimo da je, u tom slučaju, $\Delta\bar{x}_k < 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Očigledno je da $\int_b^a f(x)\,dx$ postoji, ukoliko postoji $\int_a^b f(x)\,dx$, pa je tada

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.1.3}$$

Naravno, za $a = b$, po definiciji, uzimamo da je

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

U daljem tekstu, ukoliko nije drugačije naznačeno, smatraćemo uvek da je $a < b$.

4.2. Egzistencija Riemannovog integrala

Naglasimo da i dalje tretiramo klasu ograničenih funkcija na segmentu $[a,b]$.

U vezi sa proizvoljnom σ podelom segmenta $[a,b]$ uvedimo pojam tzv. *finije podele* σ^*, sa značenjem da svaki podsegment σ^* podele sadržan u nekom podsegmentu podele σ, tj. da su sve deone tačke u σ podeli istovremeno i deone tačke u σ^* podeli.

Za dve proizvoljne podele $\sigma^{(1)}$ i $\sigma^{(2)}$ segmenta $[a,b]$ uvek postoji finija podela. Jedna takva finija podela, tzv. *superpozicija podela* $\sigma^{(1)}$ i $\sigma^{(2)}$, je ona čiji skup deonih tačaka čine sve deone tačke iz $\sigma^{(1)}$ i $\sigma^{(2)}$ podele.

Pre nego što razmotrimo problem egzistencije Riemannovog integrala dokazaćemo dva pomoćna rezultata.

Lema 4.2.1. *Ako je σ^* finija podela od podele σ, tada za odgovarajuće Darbouxove sume važe nejednakosti*

$$\underline{S}(\sigma) \le \underline{S}(\sigma^*) \tag{4.2.1}$$

i

$$\overline{S}(\sigma^*) \leq \overline{S}(\sigma). \tag{4.2.2}$$

Dokaz. Da bismo dokazali nejednakost (4.2.1) dovoljno je dokazati samo slučaj kada podela σ^* sadrži samo jednu dodatnu tačku u odnosu na podelu σ. Slučaj više dodatnih tačaka se jednostavno dokazuje iteriranjem iste nejednakosti.

Neka je σ podela segmenta $[a, b]$ data pomoću deonih tačaka

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b.$$

Pretpostavimo da se dodatna tačka x^* u σ^* podeli nalazi između tačaka x_{k-1} i x_k, tj. pretpostavimo da je podela σ^* data pomoću tačaka:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x^* < x_k < \cdots < x_n = b.$$

Neka je, dalje,

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$m_{k0} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x^*} f(x), \quad m_{k1} = \inf_{x^* \leq x \leq x_k} f(x).$$

S obzirom da je $m_{k0} \geq m_k$ i $m_{k1} \geq m_k$, imamo

$$\begin{aligned}\underline{S}(\sigma^*) - \underline{S}(\sigma) &= m_{k0}(x^* - x_{k-1}) + m_{k1}(x_k - x^*) - m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= (m_{k0} - m_k)(x^* - x_{k-1}) + (m_{k1} - m_k)(x_k - x^*) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Dakle, važi (4.2.1). Nejednakost (4.2.2) se slično dokazuje. □

Napomena 4.2.1. Kako je $\max(m_{k0} - m_k, m_{k1} - m_k) \leq \omega$, gde je ω oscilacija funkcije f na $[a, b]$, za razliku $\underline{S}(\sigma^*) - \underline{S}(\sigma)$ može se izvesti sledeća nejednakost

$$\underline{S}(\sigma^*) - \underline{S}(\sigma) \leq \omega \Delta x_k.$$

U slučaju kada finija podela σ^* sadrži, na primer, p dodatnih tačaka u odnosu na podelu σ, odgovarajuća nejednakost postaje

$$\underline{S}(\sigma^*) - \underline{S}(\sigma) \leq p\omega\Delta,$$

gde je

$$\Delta = \max\left(\Delta x_{k_1}, \ldots, \Delta x_{k_p}\right),$$

a $k_1, \ldots, k_p$ su indeksi onih podsegmenata σ podele u kojima se nalaze dodatne deone tačke.

Za odgovarajuću razliku gornjih Darbouxovih suma, na isti način, može se izvesti nejednakost

$$\overline{S}(\sigma) - \overline{S}(\sigma^*) \leq p\omega\Delta.$$

Lema 4.2.2. *Za donji i gornji Darbouxov integral važi nejednakost* $\underline{I} \le \bar{I}$.

Dokaz. Neka su date dve podele $\sigma^{(1)}$ i $\sigma^{(2)}$ segmenta $[a,b]$, i neka je σ^* superpozicija ovih podela. Na osnovu (4.1.2) i leme 4.2.1 imamo

$$\underline{S}(\sigma^{(1)}) \le \underline{S}(\sigma^*) \le \overline{S}(\sigma^*) \le \overline{S}(\sigma^{(2)}), \tag{4.2.3}$$

tj.

$$\underline{S}(\sigma^{(1)}) \le \overline{S}(\sigma^{(2)}).$$

Dakle, uvek je donja Darbouxova suma manja od gornje Darbouxove sume bez obzira na izvršene podele segmenta.

Iz poslednje nejednakosti zaključujemo da je

$$\underline{I} = \sup_{\sigma^{(1)} \in \Sigma} \underline{S}(\sigma^{(1)}) \le \overline{S}(\sigma^{(2)}),$$

tj.

$$\underline{I} \le \inf_{\sigma^{(2)} \in \Sigma} \overline{S}(\sigma^{(2)}) = \bar{I},$$

gde je Σ skup svih mogućih podela segmenta $[a,b]$. □

Teorema 4.2.3. *Funkcija* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji podela* σ*, takva da je*

$$\overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) < \varepsilon\,. \tag{4.2.4}$$

Dokaz. Neka $f \in \mathcal{R}[a,b]$, tj. neka je $\underline{I} = \bar{I} = I = \int_a^b f(x)\,dx$. Tada, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje podele $\sigma^{(1)}$ i $\sigma^{(2)}$ takve da je

$$I - \underline{S}(\sigma^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{i} \qquad \overline{S}(\sigma^{(2)}) - I < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

odakle sleduje

$$\overline{S}(\sigma^{(2)}) - \underline{S}(\sigma^{(1)}) < \varepsilon\,. \tag{4.2.5}$$

Neka je sada σ^* superpozicija podela $\sigma^{(1)}$ i $\sigma^{(2)}$. Na osnovu nejednakosti (4.2.3) i (4.2.5), imamo da je

$$\overline{S}(\sigma^*) - \underline{S}(\sigma^*) \le \overline{S}(\sigma^{(2)}) - \underline{S}(\sigma^{(1)}) < \varepsilon\,,$$

čime smo ustanovili egzistenciju jedne podele za koju važi (4.2.4) pri proizvoljnom $\varepsilon > 0$.

Da bismo dokazali obrnuto tvrđenje pretpostavimo da postoji takva σ podela da (4.2.4) važi. Tada imamo

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) < \varepsilon,$$

što znači da je $\underline{I} = \bar{I}$, tj. $f \in \mathcal{R}[a, b]$. $\square$

Ocena (4.2.4) za razliku Darbouxovih suma igra značajnu ulogu pri utvrđivanju $\mathcal{R}$-integrabilnosti date funkcije f. Ovu razliku označavaćemo, ubuduće, sa $\Omega(\sigma; f)$, ili samo sa $\Omega(\sigma)$, ako ne može da dođe do zabune o kojoj se funkciji radi. Dakle,

$$\Omega(\sigma; f) = \overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k.$$

U dosadašnjem izlaganju, određeni integral ili $\mathcal{R}$-integral bio je definisan pomoću Darbouxovih suma. Moguće je, međutim, Riemannov integral razmatrati i kao graničnu vrednost sume u kojoj učestvuju vrednosti funkcije f. Naime, umesto m_k (ili M_k) u Darbouxovim sumama, uzmimo vrednosti funkcije f u proizvoljnim tačkama ξ_k podsegmenata $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ovako dobijena suma, tj. suma

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

poznata je kao *Riemannova suma*. Naravno, suma $S(\sigma)$, pored podele σ, zavisi i od izbora tačaka $\xi_1, \ldots, \xi_n$ u odgovarajućim podsegmentima podele σ. Primetimo da, zbog $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, važi

$$\underline{S}(\sigma) \leq S(\sigma) \leq \overline{S}(\sigma). \tag{4.2.6}$$

Neka je

$$h(\sigma) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k,$$

tzv. *dijametar podele* σ.

Ako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da za $h(\sigma) < \delta$, nezavisno od izbora tačaka ξ_k, važi

$$|S(\sigma) - I| < \varepsilon\,,$$

tj. ako postoji granična vrednost

$$\lim_{h(\sigma)\to 0} S(\sigma) = I\,,$$

onda ona predstavlja Riemannov integral.

Često se ovaj iskaz uzima za definiciju Riemannovog integrala. U daljem tekstu, dokazaćemo ekvivalenciju ovog iskaza sa uvedenom definicijom $\mathcal{R}$-integrabilnosti.

Teorema 4.2.4. *Ako postoji* $\lim\limits_{h(\sigma)\to 0} S(\sigma)$ *tada* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *i važi jednakost*

$$\lim_{h(\sigma)\to 0} S(\sigma) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.2.7}$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $\lim\limits_{h(\sigma)\to 0} S(\sigma) = A$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za $h(\sigma) < \delta$ važi

$$|S(\sigma) - A| < \frac{\varepsilon}{3},$$

tj.

$$A - \frac{\varepsilon}{3} < S(\sigma) < A + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pomerajući tačke ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$ duž odgovarajućih podsegmenata $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$, moguće ih je izabrati tako da $S(\sigma)$ bude donja ili gornja Darbouxova suma. Tada, na osnovu prethodnog, dobijamo

$$A - \frac{\varepsilon}{3} \le \underline{S}(\sigma) \le \overline{S}(\sigma) \le A + \frac{\varepsilon}{3},$$

tj.

$$\Omega(\sigma) = \overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) \le \frac{2}{3}\,\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Prema tome, na osnovu teoreme 4.2.3, zaključujemo da funkcija $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Najzad, iz $\underline{I} = \bar{I}$ i nejednakosti

$$A - \frac{\varepsilon}{3} \le \underline{S}(\sigma) \le \underline{I} \le \bar{I} \le \overline{S}(\sigma) \le A + \frac{\varepsilon}{3},$$

sleduje da je $\underline{I} = \bar{I} = I = A$, tj. (4.2.7). □

Sledeća teorema daje obrnuto tvrđenje.

Teorema 4.2.5. *Ako $f \in \mathcal{R}[a,b]$ tada je*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h(\sigma)\to 0} S(\sigma). \tag{4.2.8}$$

Dokaz. Kako za Riemannovu sumu $S(\sigma)$ važe nejednakosti (4.2.6), dokaz tvrđenja (4.2.8) izvešćemo tako što ćemo pokazati konvergenciju donje i gornje Darbouxove sume ka vrednosti integrala I, kada dijametar podele teži nuli.

Kako je za $\mathcal{R}$-integrabilnu funkciju f na $[a,b]$, $I = \underline{I} = \sup\limits_{\sigma\in\Sigma} \underline{S}(\sigma)$, zaključujemo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji podela σ', takva da je

$$\underline{S}(\sigma') > I - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.9}$$

Pretpostavimo da se unutar intervala (a,b) nalazi p deonih tačaka podele σ' i posmatrajmo proizvoljnu podelu σ, za koju je $h(\sigma) < \varepsilon/(2p\omega)$, gde je ω oscilacija funkcije f na $[a,b]$.

Da bismo ocenili razliku $I - \underline{S}(\sigma)$, uvedimo novu podelu σ^*, kao superpoziciju podela σ' i σ. Na osnovu leme 4.2.1 i nejednakosti (4.2.9), imamo $\underline{S}(\sigma^*) \ge \underline{S}(\sigma') > I - \varepsilon/2$.

S druge strane, na osnovu jedne nejednakosti iz napomene 4.2.1, zaključujemo da je $\underline{S}(\sigma^*) - \underline{S}(\sigma) \le p\omega h(\sigma) < \varepsilon/2$, jer je $\Delta \le h(\sigma) < \varepsilon/(2p\omega)$.

Kombinovanjem prethodnih nejednakosti dobijamo

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(\sigma^*) < \underline{S}(\sigma) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Najzad, kako je $\underline{S}(\sigma) \le I$, na osnovu prethodnog imamo da je $0 \le I - \underline{S}(\sigma) < \varepsilon$, što znači da postoji $\lim\limits_{h(\sigma)\to 0} \underline{S}(\sigma) = I$.

Na isti način, možemo dokazati da postoji granična vrednost gornje Darbouxove sume, kada $h(\sigma) \to 0$, i da je $\lim\limits_{h(\sigma)\to 0} \overline{S}(\sigma) = I$.

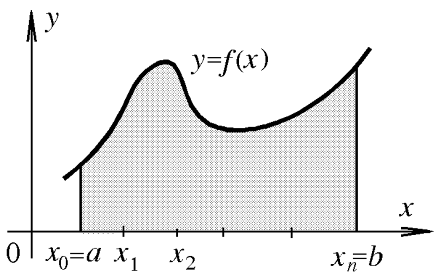
Prema tome, na osnovu (4.2.6), važi tvrđenje (4.2.8). $\square$

Na kraju ovog odeljka daćemo geometrijski smisao integralnih suma i Riemanovog integrala.

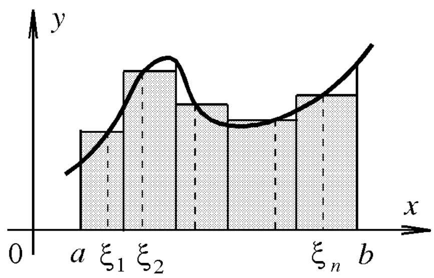
Neka je $x \mapsto f(x)$ data neprekidna nenegativna funkcija na $[a, b]$. Geometrijski smisao integralnih suma može se sagledati razmatranjem krivolinijskog trapeza, tj. figure ograničene krivom $y = f(x)$, pravama $x = a$ i $x = b$, i x-osom (videti sliku 4.2.1), uz izabranu σ podelu segmenta $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b.$$

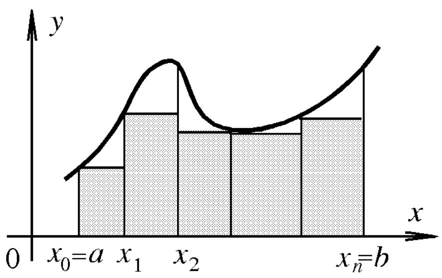
Za izabrani niz tačaka $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$, Riemannova suma geometrijski predstavlja površinu „stepenaste" figure date na sl. 4.2.2. Zapravo, to je zbir površina pravougaonika čije su osnovice i visine redom $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ i $f(\xi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.



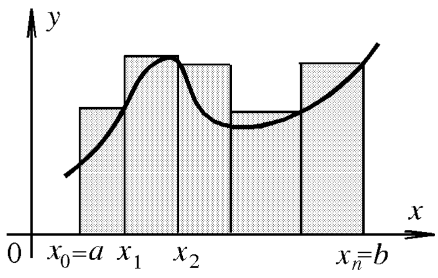
Sl. 4.2.1



Sl. 4.2.2



Sl. 4.2.3



Sl. 4.2.4

Takođe, Darbouxove sume geometrijski predstavljaju površine „stepenastih" figura, čiji pravougaonici imaju iste osnovice kao i kod Riemannove sume $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, ali su im visine različite. Tako kod donje Darbouxove sume, visine ovih pravougaonika su redom najmanje vrednosti funkcije f na podsegmentima $[x_{k-1}, x_k]$, tj. m_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (sl. 4.2.3). Naravno, kod gornje Darbouxove sume ove visine su redom najveće vrednosti funkcije f na odgovarajućim podsegmentima, tj. M_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (sl. 4.2.4).

Na osnovu geometrijske interpretacije integralnih suma i definicije Riemannovog integrala, jasno je da Riemannov integral neprekidne nenegativne funkcije f na $[a, b]$ geometrijski predstavlja površinu krivolinijskog trapeza predstavljenog na sl. 4.2.1.

4.3. Klase integrabilnih funkcija

U ovom odeljku razmotrićemo neke tipične klase integrabilnih funkcija.

Teorema 4.3.1. *Ako $f \in C[a, b]$, tada $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Dokaz. Pre svega neprekidna funkcija na $[a, b]$ je ograničena na tom segmentu. S druge strane, ona je, takođe, i ravnomerno neprekidna na $[a, b]$, tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za svako $x, z \in [a, b]$ važi implikacija

$$|x - z| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{b - a}\,. \tag{4.3.1}$$

Posmatrajmo, za izabranu podelu σ, razliku Darbouxovih suma $\overline{S}(\sigma)$ i $\underline{S}(\sigma)$, tj. razliku

$$\Omega(\sigma) = \overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k.$$

Kako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, postoje tačke ζ_k i η_k, u podsegmentima $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, takve da je $f(\zeta_k) = M_k$ i $f(\eta_k) = m_k$. Stoga je

$$\Omega(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \bigl(f(\zeta_k) - f(\eta_k)\bigr)\Delta x_k.$$

S druge strane, zbog ravnomerne neprekidnosti funkcije f, saglasno implikaciji (4.3.1), svaka razlika $f(\zeta_k) - f(\eta_k)$ može se učiniti manjom od $\varepsilon/(b - a)$ ako je $h(\sigma) < \delta$. Zbog toga je posmatrana razlika

$$\Omega(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \bigl(f(\zeta_k) - f(\eta_k)\bigr)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon,$$

odakle, na osnovu teoreme 4.2.3, zaključujemo da $f \in \mathcal{R}[a,b]$. $\square$

Primer 4.3.1. Posmatrajmo integral $I = \int_a^b x^2\,dx \quad (0 \le a < b < +\infty)$ i odgovarajuću Riemannovu sumu

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \, \Delta x_k. \tag{4.3.2}$$

Kako je $x \mapsto x^2$ neprekidna funkcija na $[a,b]$, dati integral egzistira i može se naći kao granična vrednost Riemannove sume (4.3.2), kada $h(\sigma) \to 0$, bez obzira na izbor podele σ i izbor tačaka ξ_k. U cilju ilustracije ovoga razmotrićemo dve različite podele: (a) ravnomernu podelu segmenta $[a,b]$, (b) geometrijsku podelu, tj. podelu segmenta $[a,b]$ u kojoj deone tačke čine geometrijsku progresiju.

(a) Neka su deone tačke u σ podeli ekvidistantne sa korakom h, tj. neka su $x_k = a + kh$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ i $h = (b-a)/n$. Tada je $h(\sigma) = \Delta x_k = h$.

Ako, na primer, izaberemo da su $\xi_k = x_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, imamo

$$S(\sigma) = \overline{S}(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 h = h \sum_{k=1}^{n} (a+kh)^2 = h \sum_{k=1}^{n} \left(a^2 + 2ahk + k^2h^2\right),$$

tj.

$$S(\sigma) = h\left[a^2 Z_n(0) + 2ahZ_n(1) + h^2 Z_n(2)\right],$$

gde je

$$Z_n(m) = \sum_{k=1}^{n} k^m. \tag{4.3.3}$$

Kako su

$$Z_n(0) = n, \qquad Z_n(1) = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad Z_n(2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

imamo

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1} Z_n(0) = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^{-2} Z_n(1) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^{-3} Z_n(2) = \frac{1}{3},$$

pa je

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} S(\sigma) &= \lim_{n\to+\infty} (b-a)\left[a^2 + 2a(b-a)\frac{1}{2} + (b-a)^2\frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{1}{3}(b-a)(b^2 + ab + a^2) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3). \tag{4.3.4}$$

Ako za tačke ξ_k izaberemo, na primer, sredine podsegmenata, tj.

$$\xi_k = \tfrac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) = a + \left(k - \tfrac{1}{2}\right)h,$$

odgovarajuća Riemannova suma postaje

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\sigma) &= h\sum_{k=1}^{n}\left[a + \left(k - \tfrac{1}{2}\right)h\right]^2\\ &= h\big\{a^2 Z_n(0) + 2ah\left(Z_n(1) - \tfrac{1}{2}Z_n(0)\right)\\ &\qquad + h^2\left(Z_n(2) - Z_n(1) + \tfrac{1}{4}Z_n(0)\right)\big\},\end{aligned}$$

odakle, prelaskom na graničnu vrednost, dobijamo isti rezultat (4.3.4).

(b) Uzmimo sada da su $x_k = aq^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gde je $q = (b/a)^{1/n}$. Primetimo da su $x_0 = a$, $x_n = b$, $\Delta x_k = aq^{k-1}(q-1)$ i $h(\sigma) = aq^{n-1}(q-1)$. Naravno, kada $n \to +\infty$, tada $q \to 1$ i $h(\sigma) \to 0$.

Ako izaberemo $\xi_k = x_{k-1} = aq^{k-1}$ $(k = 1, \ldots, n)$, odgovarajuća Riemannova suma postaje

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Delta x_k = a^3(q-1)\sum_{k=1}^{n}q^{3k-3} = a^3\frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} = \frac{b^3 - a^3}{q^2+q+1},$$

odakle, prelaskom na graničnu vrednost, opet dobijamo (4.3.4). △

Napomena 4.3.1. Zbirovi $Z_n(m)$, definisani pomoću (4.3.3), mogu se izraziti preko tzv. *Bernoullievih polinoma.* Nedavno je objavljeno nekoliko radova japanskih autora (T. Origuchi, H. Kiriyama, Y. Matsuoka) u časopisu *Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ.* (*Math. Phys.* & *Chem.*), No. **20**(1987), No. **21**(1989), No. **22**(1989), koji su odredili eksplicitne formule za $Z_n(m)$, kada je $m \le 99$. Navešćemo ovde odgovarajuće izraze za $m = 3, 4, 5, 6, 7$:

$$\begin{aligned}Z_n(3) &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,\\ Z_n(4) &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),\\ Z_n(5) &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),\\ Z_n(6) &= \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),\\ Z_n(7) &= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2).\end{aligned}$$

Teorema 4.3.2. *Ako je funkcija* $x \mapsto f(x)$ *monotona na segmentu* $[a,b]$, *tada* $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Dokaz. S obzirom da je funkcija f definisana na segmentu $[a,b]$, vrednosti $f(a)$ i $f(b)$ postoje, pa je funkcija f ograničena na $[a,b]$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je f neopadajuća na $[a,b]$, i saglasno teoremi 4.2.3, posmatrajmo razliku $\Omega(\sigma) = \overline{S}(\sigma) - \underline{S}(\sigma)$, za izabranu podelu σ. Kako je $m_k = f(x_{k-1})$ i $M_k = f(x_k)$, imamo da je

$$\Omega(\sigma) = \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k \le h(\sigma)\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})),$$

tj.

$$\Omega(\sigma) \le h(\sigma)(f(b) - f(a)),$$

gde je $h(\sigma)$ dijametar podele σ. Kako se za svako $\varepsilon > 0$ može izabrati podela σ, takva da je

$$h(\sigma)(f(b) - f(a)) < \varepsilon,$$

na osnovu teoreme 4.2.3, zaključujemo da $f \in \mathcal{R}[a,b]$. $\square$

Napomena 4.3.2. Monotona funkcija na $[a,b]$ može imati najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida (prve vrste).

Primer 4.3.2. Funkcija $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definisana pomoću

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

pripada klasi $\mathcal{R}[0,1]$. Zaista, f je monotono neopadajuća i ograničena funkcija na $[0,1]$. Prekidi ove funkcije su redom u tačkama $1/2$, $1/3$, $\dots$. $\triangle$

Napomena 4.3.3. Korišćenjem teorije redova, može se dokazati da je integral funkcije iz prethodnog primera jednak

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{\pi^2}{6} - 1\,.$$

Do sada smo dokazali da su klasa neprekidnih funkcija i klasa monotonih funkcija na $[a,b]$ $\mathcal{R}$-integrabilne na $[a,b]$. S obzirom da monotona funkcija može imati prekide i to konačan broj ili najviše prebrojivo mnogo, to se može postaviti pitanje koji je to najveći broj prekida koje može imati jedna ograničena funkcija na $[a,b]$, a da je pritom $\mathcal{R}$-integrabilna. Odgovor na ovo pitanje daje *Lebesgueova*[44] *teorema.* Pre nego što formulišemo ovu teoremu, uvešćemo neke neophodne pojmove.

[44] Henri Lui Lebesgue (1875–1941), francuski matematičar.

Definicija 4.3.1. Skup $E \subset \mathbb{R}$ ima Lebesgueovu meru nula ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan ili prebrojiv sistem prekrivajućih intervala za E, čija zbirna dužina nije veća od ε.

Za skup koji ima Lebesgueovu meru nula, kažemo da je *skup mere nula.*

Primer 4.3.3. Konačan skup tačaka $E = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}$ ima Lebesgueovu meru nula. Zaista, za svako $\varepsilon > 0$, svaku od tačaka skupa E možemo prekriti intervalom, čija je dužina manja od ε/m. Tada će dužina svih prekrivajućih intervala biti manja od ε. $\triangle$

Primer 4.3.4. Prebrojiv skup tačaka $E = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ ima Lebesgueovu meru nula. Za svako $\varepsilon > 0$, tačku x_k skupa E možemo prekriti intervalom, čija je dužina manja od $\varepsilon/2^k$. Tada će dužina svih prekrivajućih intervala biti manja od

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^k} + \cdots = \varepsilon. \qquad \triangle$$

Primer 4.3.5. Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ ima Lebesgueovu meru nula. $\triangle$

Primer 4.3.6. Nijedan segment na realnoj pravoj $[a, b]$ $(a < b)$ nije skup mere nula, jer zbirna dužina prekrivajućih intervala za sve tačke segmenta $[a, b]$ ne može biti manja od $b - a$. $\triangle$

Definicija 4.3.2. Ako je neko svojstvo ispunjeno u svim tačkama skupa $X \setminus E$, gde je E skup mere nula, kažemo da je to svojstvo ispunjeno *skoro svuda* na X, ili da važi u skoro svim tačkama skupa X.

Pojam skoro svuda je veoma važan u matematičkoj analizi. Može se, na primer, govoriti o neprekidnosti funkcije skoro svuda na $[a, b]$, ispunjenju jednakosti $f(x) = 0$ skoro svuda na $[a, b]$, itd.

Sada navodimo, bez dokaza, pomenutu Lebesgueovu teoremu:

Teorema 4.3.3. *Funkcija $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{R}$-integrabilna ako i samo ako je ograničena na $[a, b]$ i neprekidna skoro svuda na $[a, b]$.*

Dakle, u vezi sa prekidnim funkcijama, na osnovu Lebesgueove teoreme, možemo zaključiti da je svaka ograničena funkcija na $[a, b]$, koja ima konačno ili prebrojivo mnogo tačaka prekida, $\mathcal{R}$-integrabilna na $[a, b]$.

4.4. Osobine određenog integrala

Teorema 4.4.1. *Ako $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, tada imamo*

1° *$\lambda f \in R[a, b]$, gde je λ konstanta,*

2° *$f + g \in \mathcal{R}[a, b]$,*

3° *$|f| \in R[a, b]$,*

4° *$fg \in R[a, b]$,*

5° *$f^* \in R[c, d]$, gde je f^* restrikcija funkcije f sa $[a, b]$ na $[c, d] \subset [a, b]$.*

Dokaz. Neka je σ proizvoljna podela segmenta $[a, b]$ i neka su, redom, ξ_k proizvoljne tačke u podsegmentima $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Dokaz tvrđenja 1° i 2° može se izvesti na osnovu teoreme 4.2.4. Naime, dovoljno je uočiti da je

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda f(\xi_k) \Delta x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

i

$$\sum_{k=1}^{n} \big(f(\xi_k) + g(\xi_k)\big) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k,$$

a zatim preći na granične vrednosti kada $h(\sigma) \to 0$.

Za dokaz tvrđenja 3° primetimo da funkcija f ispunjava uslove Lebesgueove teoreme 4.3.3. Kako i funkcija $x \mapsto |f(x)|$ ispunjava ove uslove, tvrđenje 3° važi. Alternativno, dokaz ovog tvrđenja može se izvesti na osnovu teoreme 4.2.3, korišćenjem nejednakosti

$$\big|\, |M_k| - |m_k| \,\big| \leq M_k - m_k,$$

gde su m_k i M_k dati pomoću (4.1.2).

Pre nego što dokažemo tvrđenje 4°, za opšti slučaj, razmotrićemo specijalni slučaj kada je $g = f$, tj. dokazaćemo da $f^2 \in R[a, b]$, kada $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Kako je f $\mathcal{R}$-integrabilna funkcija na $[a, b]$, to je ona ograničena na $[a, b]$. Neka je, recimo, $|f(x)| \leq C < +\infty$ $(x \in [a, b])$. Tada, za $x, z \in A \subset [a, b]$, imamo

$$|f(x)^2 - f(z)^2| = |f(x) + f(z)| \cdot |f(x) - f(z)| \leq 2C|f(x) - f(z)|.$$

S druge strane, neka su m_k i M_k dati pomoću (4.1.2). Korišćenjem prethodne nejednakosti, u slučaju kada je $A = [x_{k-1}, x_k]$, nalazimo da je

$$\big|\, M_k^2 - m_k^2 \,\big| \leq 2C(M_k - m_k).$$

Tako, za razliku Darbouxovih suma funkcije $x \mapsto f(x)^2$, imamo sledeću ocenu

$$\Omega(\sigma; f^2) = \sum_{k=1}^{n} \big|\, M_k^2 - m_k^2 \,\big| \Delta x_k \leq 2C \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k = 2C\Omega(\sigma; f).$$

Kako $f \in \mathcal{R}[a,b]$, postoji podela σ takva da je za svako $\varepsilon > 0$, $\Omega(\sigma; f) < \varepsilon/(2C)$. Tada, na osnovu prethodnog i teoreme 4.2.3, zaključujemo da je funkcija $x \mapsto f(x)^2$ $\mathcal{R}$-integrabilna na $[a,b]$.

Za dokaz tvrđenja 4°, u opštem slučaju, dovoljno je uočiti jednakost

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}\left((f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2\right),$$

a zatim iskoristiti prethodno dokazana tvrđenja 1° i 2°.

Najzad, tvrđenje 5° sleduje iz Lebesgueove teoreme 4.3.3. □

Napomena 4.4.1. U daljem tekstu, uprošćenja radi, činjenicu da restrikcija $f^* \in R[c,d]$, označavaćemo jednostavno sa $f \in R[c,d]$.

Osobine 1° i 2°, iz prethodne teoreme, omogućavaju da se skup $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija na $[a,b]$ može tretirati kao linearni prostor nad poljem realnih brojeva (videti [15, glava II]), gde su unutrašnja i spoljašnja kompozicija uvedene na uobičajeni način:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad (f, g \in \mathcal{R}[a,b];\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

Ako Riemannov integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

posmatramo kao funkcionelu $I\colon \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}$, tada se može pokazati da je ova funkcionela linearna. Naime, važi sledeća teorema:

Teorema 4.4.2. *Ako $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada važi jednakost*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4.4.1}$$

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da je linearna kombinacija $\mathcal{R}$-integrabilnih funkcija f i g, takođe, $\mathcal{R}$-integrabilna funkcija, tj. da $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$. Za dokaz jednakosti (4.4.1), posmatrajmo Riemannovu sumu za integral na levoj strani ove jednakosti,

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))\Delta x_k.$$

Kako je

$$S(\sigma) = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k,$$

na osnovu $\mathcal{R}$-integrabilnosti funkcija f i g, zaključujemo da jednakost (4.4.1) važi. □

Teorema 4.4.3. *Neka je funkcija* f $\mathcal{R}$*-integrabilna na* $[a, b]$*. Tada, za svako* $c \in (a, b)$*, imamo da* $f \in \mathcal{R}[a, c]$ *i* $f \in \mathcal{R}[c, b]$*, pri čemu važi jednakost*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4.4.2}$$

Dokaz. $\mathcal{R}$-integrabilnost funkcije f, tačnije, $\mathcal{R}$-integrabilnost njenih restrikcija na podsegmentima $[a, c]$ i $[c, b]$ sleduje iz tvrđenja 5° u teoremi 4.4.1.

Za dokaz jednakosti (4.4.2), razmotrićemo Riemannovu sumu za funkciju f na $[a, b]$,

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{4.4.3}$$

Kako $f \in \mathcal{R}[a, b]$, možemo uzeti neku pogodnu podelu segmenta $[a, b]$. U ovom slučaju, pogodno je izabrati one podele σ, koje sadrže tačku c kao deonu tačku. Tada se, očigledno, za takvu podelu σ, sa pripadajućim tačkama ξ_k, može izvršiti dekompozicija na dve podele σ' i σ'', koje će funkcionisati na segmentima $[a, c]$ i $[c, b]$, respektivno. U tom slučaju, za dijametre ovih podela važi

$$\max\bigl(h(\sigma'),\, h(\sigma'')\bigr) = h(\sigma).$$

Ako sumu (4.4.3) rastavimo na dve sume, saglasno prethodnoj dekompoziciji podele σ, i pustimo da $h(\sigma) \to 0$, dobijamo (4.4.3). $\square$

Ako u prethodnoj teoremi pustimo da $c \to a$, iz jednakosti (4.4.2) dobijamo da je

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Teorema 4.4.3 ukazuje da Riemannov integral ima aditivno svojstvo i u odnosu na segment integracije. Naime, ako stavimo da je

$$\mathcal{J}([\alpha, \beta]) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \qquad ([\alpha, \beta] \subset [a, b]),$$

jednakost (4.4.2) se može predstaviti u obliku

$$\mathcal{J}([a, b]) = \mathcal{J}([a, c]) + \mathcal{J}([c, b]).$$

Imajući u vidu (4.1.3), može se dokazati da je, za svako $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$,

$$\mathcal{J}([\alpha, \beta]) + \mathcal{J}([\beta, \gamma]) + \mathcal{J}([\gamma, \alpha]) = 0.$$

Teorema 4.4.4. *Ako $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a \leq b)$ i $f(x) \leq g(x)$ za svako $x \in [a,b]$, tada je*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4.4.4}$$

Dokaz. Za $a = b$ tvrđenje je trivijalno. Ako je $a < b$ za dokaz nejednakosti (4.4.4) dovoljno je uočiti nejednakost koja se odnosi na Riemannove sume funkcija f i g,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k,$$

i preći na graničnu vrednost kada $h(\sigma) \to 0$. $\square$

Sledeći rezultat je posledica teoreme 4.4.4.

Posledica 4.4.5. *Ako $f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a \leq b)$ i $m \leq f(x) \leq M$ na $[a,b]$, tada je*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Ako je $m \geq 0$, imamo da je $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Teorema 4.4.6. *Ako $f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a \leq b)$, tada važe nejednakosti*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq M(b-a), \tag{4.4.5}$$

gde je $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Dokaz. Kako je $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ imamo

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b (-|f(x)|)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

što predstavlja prvu nejednakost u (4.4.5). S druge strane, na osnovu nejednakosti $|f(x)| \leq M$, imamo

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a),$$

što predstavlja drugu nejednakost u (4.4.5). $\square$

Može se dokazati da za neprekidne funkcije važi sledeće tvrđenje:

Teorema 4.4.7. *Ako $f \in C[a,b]$ tada važi implikacija*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \ \ (a \leq x \leq b). \tag{4.4.6}$$

U opštem slučaju, za $f \in \mathcal{R}[a,b]$, leva strana u (4.4.6) implicira $f(x) = 0$ skoro svuda na $[a,b]$.

Sledeće tvrđenje je poznato kao *prva teorema o srednjoj vrednosti integrala*.

Teorema 4.4.8. *Neka $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a \leq b)$,*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad i \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Ako je funkcija g nenegativna (nepozitivna) na $[a,b]$, tada postoji A $(\in [m,M])$ takvo da je

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = A \int_a^b g(x)\, dx. \tag{4.4.7}$$

Štaviše, ako $f \in C[a,b]$, postoji $\xi \in [a,b]$ takvo da je

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx. \tag{4.4.8}$$

Dokaz. Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da je $a < b$ i da je $g(x) \geq 0$. Tada je

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Kako $mg \in \mathcal{R}[a,b]$, $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ i $Mg \in \mathcal{R}[a,b]$, na osnovu teorema 4.4.4 i 4.4.1, dobijamo

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq M \int_a^b g(x)\, dx. \tag{4.4.9}$$

Ako je $\int_a^b g(x)\, dx = 0$, zaključujemo da jednakost (4.4.7) važi, jer je na osnovu (4.4.9), $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$.

Ako je $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, stavimo

$$A = A(f;g) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}. \tag{4.4.10}$$

Tada, na osnovu (4.4.9), zaključujemo da je $m \le A \le M$, čime je dokaz prvog dela teoreme završen.

Ako $f \in C[a,b]$, tada je $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ i $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, odakle zaključujemo da postoji bar jedna tačka $x = \xi \in [a,b]$ za koju je $f(\xi) = A$. Tako se (4.4.7), u ovom slučaju, svodi na (4.4.8). □

Definicija 4.4.1. Neka je $g(x) \ge 0$ na $[a,b]$ i $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Veličina $A(f;g)$, data pomoću (4.4.10), naziva se *težinska aritmetička integralna sredina* funkcije f na $[a,b]$. Za funkciju $x \mapsto g(x)$ koristi se naziv težinska funkcija.

Ako je težinska funkcija $g(x) \equiv 1$, iz teoreme 4.4.8 sleduje analogon Lagrangeove teoreme o srednjoj vrednosti funkcija (videti odeljak 1.11 u IV glavi):

Posledica 4.4.9. *Ako $f \in C[a,b]$, postoji $\xi \in [a,b]$ takvo da je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Primer 4.4.1. Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti integrala može se vršiti procena integrala. Posmatrajmo integral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx.$$

Ako stavimo $f(x) = 1/\sqrt{1+x}$, $g(x) = x^2$, uslovi teoreme 4.4.8 su zadovoljeni. Kako je, na osnovu primera 4.3.1, $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$ i

$$m = \inf_{x\in[0,1]} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad M = \sup_{x\in[0,1]} f(x) = 1,$$

važi sledeća procena

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx \le \frac{1}{3}. \quad \triangle$$

Sledeći rezultat, poznat kao *druga teorema o srednjoj vrednosti integrala*, navodimo bez dokaza.[45)]

[45)] Ovu teoremu dokazao je O. P. Bonnet (1819–1892), francuski matematičar i astronom.

Teorema 4.4.10. *Neka $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $a \le b$, i neka je $x \mapsto g(x)$ monotona funkcija na $[a,b]$. Tada postoji $\xi \in [a,b]$ takvo da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{4.4.11}$$

Ako je $g(a) > g(b) \ge 0$, tada se (4.4.11) može predstaviti u obliku

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx,$$

gde $\xi \in [a,b]$.

4.5. Integracija i diferenciranje

Sledeća teorema ukazuje da su integracija i diferenciranje u izvesnom smislu inverzne operacije.

Teorema 4.5.1. *Neka $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i neka je funkcija $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definisana pomoću*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in (a,b]), \qquad \Phi(a) = 0. \tag{4.5.1}$$

1° $\Phi \in C[a,b]$ *;*

2° *Ako je f neprekidna funkcija u tački $x \in [a,b]$, tada je funkcija Φ diferencijabilna u tački x i važi $\Phi'(x) = f(x)$.*

Dokaz. Neka x, $x+h \in [a,b]$. Tada je

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Kako $f \in \mathcal{R}[a,b]$, to je $|f(t)| \le M$ za svako $t \in [a,b]$, pa imamo

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \le M|h|,$$

odakle, pri $h \to 0$, sleduje $\lim\limits_{h\to 0} \Phi(x+h) = \Phi(x)$, što znači da $\Phi \in C[a,b]$.

Pretpostavimo sada da je funkcija f neprekidna u tački $x \in [a,b]$. Tada za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takvo da je $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, kad god je $|t - x| < \delta$ $(a \leq t \leq b)$.

Neka je $x + h \in [a,b]$ $(h \neq 0)$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\,dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\,\varepsilon\,|h| = \varepsilon,
\end{aligned}$$

kada je $|h| < \delta$, odakle sleduje $\Phi'(x) = f(x)$. $\square$

Važna posledica prethodne teoreme je sledeći rezultat:

Posledica 4.5.2. *Za svako $f \in C[a,b]$ postoji primitivna funkcija F, čiji je oblik*

$$F(x) = \Phi(x) + C \qquad (C = \text{const}),$$

gde je Φ dato sa (4.5.1).

Ovaj rezultat odgovara definiciji primitivne funkcije kako je to uvedeno u odeljku 1.1 (videti definiciju 1.1.1). Međutim, teorema 4.5.1 sugeriše da se pojam primitivne funkcije može uopštiti. U daljem radu pod primitivnom funkcijom podrazumevaćemo tzv. *uopštenu primitivnu funkciju*, tj. neprekidnu funkciju F, čiji je izvod integrabilna funkcija na $[a,b]$. Reprezentacija proizvoljne primitivne funkcije je

$$F(x) = \Phi(x) + C, \tag{4.5.2}$$

gde je Φ dato sa (4.5.1), a C je konstanta. Dakle, jednakost $F'(x) = f(x)$ se ne zahteva u svakoj tački $x \in [a,b]$, kao u definiciji 1.1.1, već se zahteva da važi skoro svuda na $[a,b]$, saglasno Lebesgueovoj teoremi.

Ako je $x \mapsto \varphi(x)$ diferencijabilna funkcija sa vrednostima u $[a,b]$, na osnovu prethodnog i pravila za diferenciranje složene funkcije, važi sledeća formula za diferenciranje integrala sa promenljivom granicom

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Slično, ako je promenljiva donja granica integrala, imamo

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{b} f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_{b}^{\psi(x)} f(t)\,dt = -f(\psi(x))\psi'(x),$$

gde je $x \mapsto \psi(x)$ diferencijabilna funkcija sa vrednostima u $[a, b]$.

U opštem slučaju, ako su $x \mapsto \varphi(x)$ i $x \mapsto \psi(x)$ diferencijabilne funkcije sa vrednostima u $[a, b]$, na osnovu prethodnog i jednakosti

$$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \int_{\psi(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{\varphi(x)} f(t)\,dt,$$

gde je c proizvoljno izabrana konstanta u (a, b), važi sledeća opšta formula za diferenciranje

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

Primer 4.5.1. Primenjujući L'Hospitalovu teoremu na graničnu vrednost,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt}{\sin^2 x}, \tag{4.5.3}$$

dobijamo

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x}{2\sin x\cos x} = 1.$$

Dakle, bez prethodnog izračunavanja integrala koji se pojavljuje u brojiocu granične vrednosti (4.5.3), uspeli smo da odredimo graničnu vrednost L. $\triangle$

4.6. Newton-Leibnitzova formula

Ovaj odeljak posvećujemo *Newton-Leibnitzovoj formuli*, koja predstavlja osnovnu formulu integralnog računa, povezujući Riemannov integral funkcije f sa njenom primitivnom funkcijom.

Teorema 4.6.1. *Ako funkcija $f \in \mathcal{R}[a, b]$ i ako je F bilo koja njena primitivna funkcija, tada važi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{4.6.1}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je F proizvoljna primitivna funkcija za f na $[a, b]$. Na osnovu (4.5.2), imamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C \qquad (C = \text{const}).$$

Stavljajući $x = a$ nalazimo da je $C = F(a)$, tj. da je za svako $x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a).$$

Najzad, za $x = b$ dobijamo (4.6.1). $\square$

Newton-Leibnitzova formula (4.6.1) zapisuje se često u obliku

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Kada je poznata primitivna funkcija za f, odnosno njen neodređeni integral, formula (4.6.1) omogućava nalaženje određenog integrala takve funkcije f, bez izračunavanja granične vrednosti Riemannove sume. Ipak, prevashodni značaj Newton-Leibnitzove formule je teorijski. Obično se za određivanje vrednosti Riemannovog integrala koriste tzv. kvadraturne formule, koje omogućavaju numeričko izračunavanje integrala. Naravno, u jednostavnim slučajevima, formula (4.6.1) može biti korisna.

Primer 4.6.1. Kako je $x \mapsto -\cos x$ primitivna funkcija za $x \mapsto f(x) = \sin x$ imamo

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x\,dx = (-\cos x)\,\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = -\cos\tfrac{\pi}{2} - \left(-\cos\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}. \qquad \triangle$$

Primer 4.6.2. Primetimo da formalna primena Newton-Leibnitzove formule na integral funkcije $x \mapsto f(x) = 1/x$ na $[-1, 1]$ daje pogrešan zaključak

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = (\log|x|)\,\Big|_{-1}^{1} = 0. \tag{4.6.2}$$

Naime, u ovom slučaju, funkcija f nije ograničena u okolini $x = 0$, pa zbog toga $f \notin \mathcal{R}[-1, 1]$, tj. integral na levoj strani u (4.6.2) ne postoji. $\triangle$

Primer 4.6.3. Posmatrajmo Riemannovu funkciju $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, definisanu pomoću

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & x = m/n, \\ 0, & x - \text{ iracionalan broj}, \end{cases}$$

gde su m i n ($n \geq 1$) uzajamno prosti celi brojevi. Ova funkcija je neprekidna na skupu svih iracionalnih tačaka segmenta $[0,1]$, a ima prekide u svim racionalnim tačkama ovog segmenta. S obzirom da je skup prekida prebrojiv, zaključujemo da je funkcija f neprekidna skoro svuda na segmentu $[0,1]$ i da $f \in \mathcal{R}[0,1]$. Kako je u svakoj iracionalnoj tački $f(x) = 0$, primitivna funkcija za f ima oblik $F(x) = C$, gde je C proizvoljna konstanta. Dakle, primenom Newton-Leibnitzove formule nalazimo

$$\int_0^1 f(x)\, dx = C - C = 0. \quad \triangle$$

U primerima koji slede, pokazaćemo da je, ponekad, zgodno znanje o određenom integralu primeniti na rešavanje zadataka koji, na prvi pogled, ne ukazuju na potrebu primene određenih integrala.

Primer 4.6.4. U odeljku 4.3 (primer 4.3.1) posmatrali smo granične vrednosti izraza $Z_n(m)/n^{m+1}$, za $m = 0, 1, 2$, kada $n \to +\infty$, pri čemu je $Z_n(m)$ bio zbir m-tih stepena prvih n prirodnih brojeva. Posmatrajmo sada slučaj kada je $m = p > 0$ realan broj, tj.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \qquad (p > 0). \tag{4.6.3}$$

Ako (4.6.3) interpretiramo kao graničnu vrednost Riemannove sume za funkciju $x \mapsto x^p$ na $[0,1]$ imamo

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x^p\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{p+1}\,.$$

Primetimo da je isti rezultat dobijen ranije primenom Stolzove teoreme (videti primer 1.3.8 u II glavi). $\triangle$

Primer 4.6.5. Slično kao u prethodnom primeru odredićemo graničnu vrednost niza

$$a_n = \left(\sqrt[n+1]{1\cdot n} \cdot \sqrt[n+2]{2\cdot n} \cdots \sqrt[n+n]{n\cdot n} \right)^{1/\log n}. \tag{4.6.4}$$

Logaritmovanjem (4.6.4) dobijamo

$$\log a_n = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\log(k\cdot n)}{n+k} = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{2\log n + \log \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}}\,,$$

tj.

$$\log a_n = 2S_n + \frac{1}{\log n} T_n,$$

gde su

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log \frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Lako je uočiti da je

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = (\log(1+x)) \Big|_0^1 = \log 2.$$

Ako na isti način protumačimo graničnu vrednost za T_n, dobijamo

$$T = \lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx. \tag{4.6.5}$$

Međutim, podintegralna funkcija $x \mapsto \log x/(1+x)$ nije ograničena u okolini $x = 0$, tako da ovaj integral ne postoji u Riemannovom smislu. U narednom odeljku definisaćemo jedno uopštenje Riemannovog integrala, koje omogućava egzistenciju integrala u (4.6.5) u tom smislu. U primeru 4.7.7 pokazaćemo da je $|T| < 1$.

Na osnovu prethodnog nalazimo

$$\lim_{n\to+\infty} \log a_n = 2 \lim_{n\to+\infty} S_n + \lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{\log n} = 2S = 2\log 2,$$

tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 4.$ $\triangle$

Korišćenjem Newton-Leibnitzove formule može se dokazati sledeći rezultat koji se odnosi na uvođenje nove promenljive:

Teorema 4.6.2. *Neka $f \in C[a,b]$ i neka je $g\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ neprekidno-diferencijabilna funkcija takva da je $g(\alpha) = a$ i $g(\beta) = b$. Tada važi*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\, dt. \tag{4.6.6}$$

Dokaz. Neka je $x \to F(x)$ primitivna funkcija za f na $[a,b]$ i $x = g(t)$. Tada, na osnovu diferenciranja složene funkcije, imamo

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = f(g(t)) \cdot g'(t),$$

odakle, integracijom na $[\alpha,\beta]$ i primenom Newton-Leibnitzove formule, sleduje

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\, dt = F(g(t)) \Big|_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)).$$

Kako je, s druge strane,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

i $g(\alpha) = a$ i $g(\beta) = b$, zaključujemo da (4.6.6) važi. $\square$

Prethodna teorema, sa dodatnim uslovom da je funkcija g strogo monotona na $[\alpha, \beta]$, može se uopštiti u smislu da važi za proizvoljnu integrabilnu funkciju f na $[a, b]$. Tako, za rastuću funkciju g, za koju je $g(\alpha) = a$ i $g(\beta) = b$, važi formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt,$$

na kojoj se zasniva tzv. metod uvođenja nove promenljive (odeljak 2.1).

Primer 4.6.6. Za određivanje integrala

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx,$$

najpre, stavimo $x = g(t) = \pi - t$. Funkcija g je monotono opadajuća, pa granicama integrala 0 i π odgovaraju nove granice π i 0, respektivno. Kako je $dx = -dt$, imamo

$$I = \int_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}(-dt) = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt - I.$$

Dakle, problem se svodi na određivanje jednostavnijeg integrala

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt.$$

Uvođenjem nove promenljive z, pomoću $z = \cos t$, dobijamo

$$I = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-1}{1 + z^2}\,dz. \tag{4.6.7}$$

Primetimo da je funkcija $z \mapsto \arccos z$ monotono opadajuća na $[-1, 1]$, da se granice integrala 0 i π preslikavaju na 1 i -1, respektivno, kao i da je $dz = -\sin t\,dt$.

Najzad, primenom Newton-Leibnitzove formule na integral u (4.6.7), dobijamo

$$I = -\frac{\pi}{2}\big(\arctan z\big)\Big|_1^{-1} = \frac{\pi^2}{4}. \quad \triangle$$

Na kraju ovog odeljka daćemo jednu primenu Newton-Leibnitzove formule, koja se odnosi na određivanje ostatka Taylorove formule u integralnom obliku. U odeljku 1.12, u četvrtoj glavi, izveden je ostatak Taylorove formule u Lagrangeovom obliku.

Teorema 4.6.3. *Ako* $f \in C^{n+1}[a,b]$, *za svako* $x \in [a,b]$, *važi*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{4.6.8}$$

gde je T_n *Taylorov polinom stepena* n *u tački* $x = a$, *tj.*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Dokaz. Za fiksirano $x \in (a,b]$, na segmentu $[a,x]$ posmatrajmo $n+1$ puta neprekidno-diferencijabilnu funkciju $t \mapsto f(t)$. Integracijom identiteta

$$\frac{d}{dt}\left(f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right) \equiv \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t),$$

na segmentu $[a,x]$, dobijamo

$$\int_a^x G'(t)\,dt = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{4.6.9}$$

gde smo stavili

$$G(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Kako je $G(x) = f(x)$ i $G(a) = T_n(x)$, primenom Newton-Leibnitzove formule na integral koji se pojavljuje na levoj strani u jednakosti (4.6.9), dobijamo (4.6.8). $\square$

Napomena 4.6.1. Primenom prve teoreme o srednjoj vrednosti integrala na integral u (4.6.8) dobija se ostatak Taylorove formule u Lagrangeovom obliku.

4.7. Nesvojstveni integrali

Kod definisanja Riemannovog integrala pretpostavili smo da je $x \mapsto f(x)$ ograničena funkcija na konačnom segmentu $[a,b]$ i samo takve funkcije (ali ne sve) dolazile su u obzir da budu $\mathcal{R}$-integrabilne. U ovom odeljku uopštavamo pojam $\mathcal{R}$-integrabilnosti, uvodeći tzv. nesvojstveni, uopšteni ili singularni integral. Naime, ako je interval integracije beskonačan ili ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neograničena u okolini jedne ili više tačaka u $[a,b]$, tada se odgovarajući integral naziva *nesvojstveni* (*uopšteni*, *singularni*) integral. Za pomenute tačke intervala integracije koristićemo termin singularne tačke. Simboli $+\infty$ i $-\infty$ uvek se tretiraju kao singularne tačke. Nesvojstveni integrali se definišu odgovarajućim graničnim procesima i kaže se da egzistiraju ako odgovarajuće granične vrednosti egzistiraju.

Posmatrajmo slučaj kada je tačka b singularna.

Definicija 4.7.1. Neka $f \in \mathcal{R}[a,\beta]$ $(a < \beta < b \le +\infty)$ i neka je $I(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx$. Ako postoji $\lim\limits_{\beta\to b-} I(\beta)$ tada se ova granična vrednost naziva nesvojstveni integral funkcije f na $[a,b)$ i označava sa $\int_a^b f(x)\,dx$. Takođe, kaže se da integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira.

U protivnom slučaju, ako granična vrednost $\lim\limits_{\beta\to b-} I(\beta)$ ne postoji (ili je beskonačna) kaže se da integral $\int_a^b f(x)\,dx$ divergira (ili divergira ka ∞).

Simetrično se definiše slučaj kada je tačka a singularna.

Definicija 4.7.2. Neka $f \in \mathcal{R}[\alpha,b]$ $(-\infty \le a < \alpha < b)$ i $I(\alpha) = \int_\alpha^b f(x)\,dx$. Ako postoji $\lim\limits_{\alpha\to a+} I(\alpha)$ tada se ova granična vrednost naziva nesvojstveni integral funkcije f na $(a,b]$ i označava sa $\int_a^b f(x)\,dx$. Takođe, kaže se da integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira.

U protivnom slučaju, ako granična vrednost $\lim\limits_{\alpha\to a+} I(\alpha)$ ne postoji (ili je beskonačna) kaže se da integral $\int_a^b f(x)\,dx$ divergira (ili divergira ka ∞).

Primetimo da u definiciji 4.7.1, tačka b može biti $+\infty$, a u definiciji 4.7.2, a može biti $-\infty$.

Primer 4.7.1. Posmatrajmo nesvojstveni integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, gde je p realan parametar.

Kako je

$$\int_1^\beta \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}(\beta^{1-p}-1) & (p \ne 1), \\ \log\beta & (p = 1), \end{cases}$$

granična vrednost

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}$$

postoji samo za $p > 1$, što znači da je

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad (p > 1).$$

Za $p \le 1$ dati integral divergira. $\triangle$

Primer 4.7.2. Razmotrimo ponovo funkciju $x \mapsto f(x) = 1/x^p$, ali sada na $(0,1]$. Za $p = 1$ imamo

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to0+} \int_\alpha^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to0+} \log x\,\Big|_\alpha^1 = -\lim_{\alpha\to0+} \log\alpha = +\infty,$$

što znači da je integral divergentan. Prethodna formula se obično kraće zapisuje u obliku

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \log x\,\Big|_0^1 = +\infty.$$

Za $p \neq 1$ imamo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\,\Big|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & (p<1), \\ +\infty & (p>1). \end{cases} \tag{4.7.1}$$

Primetimo da se (4.7.1) za $p \leq 0$ svodi na običan Riemannov integral.

Dakle, za $p < 1$ posmatrani nesvojstveni integral konvergira, dok je za $p \geq 1$ ovaj integral divergentan. $\triangle$

Pretpostavimo sada da je tačka $x = c$ $(a < c < b)$ singularna, tj. da funkcija $x \mapsto f(x)$ postaje neograničena kada je $x = c$.

Definicija 4.7.3. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ ograničena na $[a, b]$ sem u okolini tačke $c \in (a, b)$ i neka je $\mathcal{R}$-integrabilna na svakom podsegmentu iz $[a, b]$ koji ne sadrži tačku c. Ako postoje granične vrednosti

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx \quad \text{i} \quad \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx,$$

kada ε_1 i ε_2 nezavisno teže $0+$, zbir

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx \tag{4.7.2}$$

predstavlja vrednost nesvojstvenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$. Za integral kažemo da je konvergentan.

Napomena 4.7.1. Slično se definiše nesvojstveni integral u slučaju kada funkcija f ima više singularnih tačaka u (a, b).

Primer 4.7.3. Posmatrajmo integral $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$, gde je singularna tačka $x = 1$ unutar intervala integracije. Dakle, posmatraćemo granične vrednosti

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \quad \text{i} \quad \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int_{1+\varepsilon_2}^4 \frac{dx}{(x-1)^2}\,.$$

Kako se prva od njih se svodi na

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \frac{-1}{x-1}\,\Big|_0^{1-\varepsilon_1} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right),$$

a druga na

$$\lim_{\varepsilon_2\to 0+} \frac{-1}{x-1}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{4} = \lim_{\varepsilon_2\to 0+} \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{\varepsilon_2}\right),$$

zaključujemo da ove granične vrednosti ne postoje, tj. da dati nesvojstveni integral divergira.

Primer 4.7.4. Nesvojstveni integral $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$ je konvergentan. Njegova vrednost je

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon_1\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0+} \int_{1+\varepsilon_2}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon_1\to 0+} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big|_0^{1-\varepsilon_1} \lim_{\varepsilon_2\to 0+} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{4} \\ &= \lim_{\varepsilon_1\to 0+} \frac{3}{2}\Big((-\varepsilon_1)^{2/3}-1\Big) + \lim_{\varepsilon_2\to 0+} \frac{3}{2}\Big(9^{1/3}-\varepsilon_2^{2/3}\Big), \end{aligned}$$

tj.

$$I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \frac{3}{2}\big(\sqrt[3]{9}-1\big). \quad \triangle$$

U daljem tekstu razmatraćemo nesvojstvene integrale kod kojih je singularna samo jedna granica integrala (videti definicije 4.7.1 i 4.7.2). Napomenimo da mnoga svojstva Riemannovog integrala važe i za nesvojstvene integrale. Pomenućemo neke od tih osobina.

Teorema 4.7.1. *Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b)$ i F jedna njena primitivna funkcija, tada je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to b-} F(x) - F(a) & (b \ \ \textit{konačno}), \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} F(x) - F(a) & (b = +\infty). \end{cases} \tag{4.7.3}$$

Napomena 4.7.2. Jednakost (4.7.3) treba shvatiti u tom smislu da obe strane u jednakosti istovremeno imaju smisla, i da su tada one jednake, ili pak da ove veličine nemaju smisla, tj. da odgovarajuće granične vrednosti ne postoje.

Teorema 4.7.2. *Ako nesvojstveni integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergiraju, tada konvergira i nesvojstven integral za svaku linearnu kombinaciju $x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$ i važi*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teorema 4.7.3. *Ako nesvojstveni integrali* $\int_a^b f(x)\,dx$ *i* $\int_a^b g(x)\,dx$ *konvergiraju i ako za svako* $x \in [a,b)$ *važi* $f(x) \le g(x)$, *tada je*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teorema 4.7.4. *Ako su funkcije* $x \mapsto u = u(x)$ *i* $x \mapsto v = v(x)$ *neprekidno-diferencijabilne na* $[a,b)$, *tada važi formula parcijalne integracije*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

pri čemu ako od izraza $\int_a^b u\,dv$, $uv\,\Big|_a^b$, $\int_a^b v\,du$ *bilo koja dva imaju smisla (postoje konačne granične vrednosti), tada ima smisla i treći izraz.*

Teorema 4.7.5. *Neka je* f *neprekidna funkcija na* $[a,b)$ *i* $t \mapsto g(t)$ *neprekidno-diferencijabilna na* $[\alpha,\beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, *pri čemu je*

$$a = g(\alpha) \le g(t) < b = \lim_{t\to\beta} g(t), \qquad \alpha \le t < \beta,$$

tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Često se, uvođenjem nove promenljive, nesvojstveni integral može transformisati u običan Riemannov integral.

Primer 4.7.5. Nesvojstveni integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, uvođenjem promenljive t pomoću $x = \cos t$, $0 < t \le \pi/2$, svodi se na Riemannov integral. Zaista, imamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\pi/2}^0 \frac{-\sin t}{\sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}\,. \quad \triangle$$

Treba, međutim, napomenuti da se neka svojstva Riemannovog integrala ne mogu preneti na nesvojstvene integrale. Na primer, poznato je da je proizvod dve $\mathcal{R}$-integrabilne funkcije, takođe, $\mathcal{R}$-integrabilna funkcija (videti 4° u teoremi 4.4.1). Odgovarajuće tvrđenje za nesvojstvene integrale, međutim, nije uvek tačno, što pokazuje sledeći primer.

Primer 4.7.6. Neka je $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$. Nesvojstveni integral $\int_0^1 x^{-1/2}dx$ konvergira (videti primer 4.7.2 za $p = 1/2$), ali integral

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

divergira. $\triangle$

Primer 4.7.7. Posmatrajmo nesvojstveni integral iz primera 6.6.5,

$$T = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,dx.$$

Uvođenjem nove promenljive t pomoću $x = e^{-t}$ $(0 \le t < +\infty)$ imamo

$$|T| = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt < \int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = \Big[-(t+1)e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1.$$

Dakle, integral T je konvergentan i $|T| < 1$. $\triangle$

Sledeći rezultat daje kriterijum za konvergenciju nesvojstvenih integrala nenegativnih funkcija.

Teorema 4.7.6. *Neka su funkcije f i g nenegativne na $[a, b)$ i neka je $f(x) \le g(x)$ za svako $x \in [a, b)$. Tada*

(i) *ako integral $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergira, tada konvergira i $\int_a^b f(x)\,dx$;*

(ii) *ako integral $\int_a^b f(x)\,dx$ divergira, tada divergira i $\int_a^b g(x)\,dx$.*

U ovom tzv. *kriterijumu poređenja* za funkciju g kažemo da je *majoranta* funkcije f. U primenama, kao majorante često se uzimaju stepene funkcije.

Primer 4.7.8. Ispitajmo konvergenciju integrala

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx. \tag{4.7.4}$$

Izborom $g(x) = (1-x)^{-1/3}$ imamo da je

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^2}} \le g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} \qquad \big(x \in [0, 1)\big).$$

Kako integral $\int_0^1 g(x)\,dx$ konvergira,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = \int_0^1 3t\,dt = \frac{3}{2}\,,$$

na osnovu teoreme 4.7.6 zaključujemo da je i integral (4.7.4) konvergentan. $\triangle$

Ako funkcija f menja znak na intervalu integracije jedan važan pojam je *apsolutna konvergencija* integrala.

Definicija 4.7.4. Za nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ kažemo da je *apsolutno konvergentan* ako konvergira integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Sledeća teorema daje vezu između konvergencije nesvojstvenih integrala i apsolutne konvergencije.

Teorema 4.7.7. *Ako nesvojstveni integral apsolutno konvergira tada je on konvergentan.*

Na kraju ovog odeljka dajemo još jedan primer.

Primer 4.7.9. Pokazaćemo da integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{4.7.5}$$

egzistira.

Pre svega Riemannovi integrali

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \text{i} \qquad I(\beta) = \int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (1 < \beta < +\infty)$$

egzistiraju. Primenom parcijalne integracije na $I(\beta)$ dobijamo

$$I(\beta) = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\beta + \int_1^\beta \frac{\cos x}{x}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos\beta}{\beta} + \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Kako je

$$\left|\int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \le \int_1^\beta \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \le \int_1^\beta \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{b}\,,$$

zaključujemo da je

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

tj. da ovaj nesvojstveni integral egzistira. Kako je, s druge strane,

$$\int_0^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx$$

sleduje da (4.7.5) egzistira jer je

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Međutim, integral (4.7.5) nije apsolutno konvergentan. Da bismo ovo pokazali pretpostavimo da je n proizvoljan prirodan broj. Tada je

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi}\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx &= \int_0^{\pi}\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx + \int_\pi^{2\pi}\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx\\ &= \int_0^{\pi}\Big|\frac{\sin t}{t}\Big|\,dt + \int_0^{\pi}\Big|\frac{\sin t}{t+\pi}\Big|\,dt + \cdots + \int_0^{\pi}\Big|\frac{\sin t}{t+(n-1)\pi}\Big|\,dt\\ &= \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt + \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}\,dt + \cdots + \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+(n-1)\pi}\,dt.\end{aligned}$$

Kako je

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt > \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\pi+k\pi}\,dt = \frac{2}{(k+1)\pi} \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

imamo

$$\int_0^{n\pi}\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx > \frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

odakle zaključujemo da integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx$ divergira. Dakle, integral (4.7.5) nije apsolutno konvergentan. $\triangle$

4.8. Glavna vrednost nesvojstvenog integrala

U prethodnom odeljku razmatrali smo nesvojstvene integrale kao uopštenje Riemannovog integrala, vezujući njihovu egzistenciju sa egzistencijom odgovarajućih graničnih vrednosti. U slučajevima kada ove granične vrednosti ne postoje kao konačne, tj. kada nesvojstveni integrali ne egzistiraju, moguće je ponekad postojanje tzv. *glavne vrednosti* nesvojstvenih integrala.

Posmatrajmo najpre slučaj nesvojstvenog integrala sa jednom singularnom tačkom $c \in (a,b)$ (videti definiciju 4.7.3). Ako granične vrednosti u (4.7.2) ne postoje za $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, ali postoje za $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, tj. ako postoji

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right),$$

tada kažemo da nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ postoji u smislu *Cauchyeve glavne vrednosti* i to označavamo sa

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Slično, ako funkcija f nije ograničena samo u tačkama a i b, onda se, ukoliko postoji granična vrednost

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

definiše

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Ako integral $\int_a^b f(x)\,dx$ postoji kao nesvojstven, tada postoji i odgovarajući v.p. $\int_a^b f(x)\,dx$, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi.

Primer 4.8.1. Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ ne postoji kao Riemannov integral jer $|1/x|\to +\infty$, kada $x\to 0$. Takođe, ovaj integral ne postoji ni kao nesvojstven jer

$$\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x}=\bigl(\log|x|\bigr)\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\bigl(\log|x|\bigr)\Big|_{\varepsilon_2}^{1}=\log\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

nema graničnu vrednost kada ε_1 i ε_2 nezavisno teže nuli. Međutim, ako je $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ imamo

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx=0.\qquad\triangle$$

Primer 4.8.2. Odredićemo

$$I=\text{v.p.}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}\,.$$

Kako kvadratni trinom $x\mapsto x^2-3x+2$ ima realne nule $x_1=1$ i $x_2=2$, korišćenjem aditivnog svojstva integrala u odnosu na oblast integracije, dati integral se može napisati kao zbir tri integrala $I=I_1+I_2+I_3$, gde su

$$I_1=\text{v.p.}\int_0^{3/2}\frac{dx}{x^2-3x+2}\,,\qquad I_2=\text{v.p.}\int_{3/2}^{3}\frac{dx}{x^2-3x+2}\,,$$

i

$$I_3=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}\,.$$

Sada imamo

$$I_1=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_0^{1-\varepsilon}+\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{1+\varepsilon}^{3/2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}-\log 2\right)=\log\frac{1}{2}\,.$$

Slično,

$$I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|_{3/2}^{2-\varepsilon} + \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|_{2+\varepsilon}^{3}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \log 2\right) = \log\frac{1}{2}\,.$$

Najzad,

$$I_3 = \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|_{3}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| - \log\frac{1}{2} = \log 2,$$

pa je $I = -\log 2$. $\triangle$

5. PRIMENE ODREĐENOG INTEGRALA

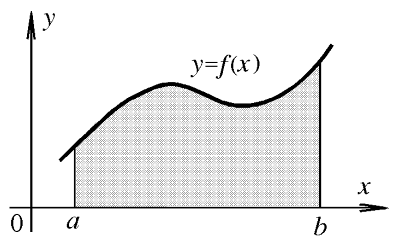
5.1. Površina ravne figure

Na kraju odeljka 4.2 dali smo geometrijsku interpretaciju Riemannovog integrala neprekidne nenegativne funkcije $x \mapsto f(x)$ na $[a,b]$. Dakle, površina krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $y = f(x)$, pravama $x = a$ i $x = b$, i x-osom (sl. 5.1.1), može se odrediti pomoću formule

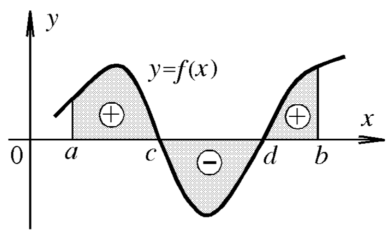
$$S = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{5.1.1}$$

Ukoliko je, međutim, funkcija f nepozitivna na $[a,b]$, integral (5.1.1) biće negativan, ali će po apsolutnoj vrednosti biti jednak površini odgovarajućeg krivolinijskog trapeza, tako da je

$$-S = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$



Sl. 5.1.1



Sl. 5.1.2

Najzad, ako funkcija f menja znak na $[a,b]$, na primer u tačkama c i d (videti sl. 5.1.2), tada imamo

$$S_1 - S_2 + S_3 = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

gde su

$$S_1 = \int_a^c f(x)\,dx\,,\quad S_2 = \int_c^d (-f(x))\,dx\,,\quad S_3 = \int_d^b f(x)\,dx\,.$$

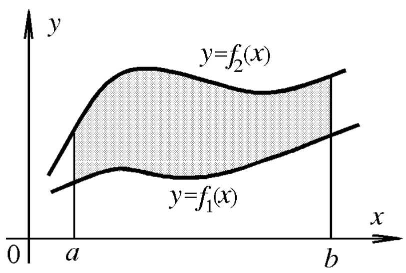
Međutim, ako želimo da odredimo zbir svih površina, bez obzira na algebarsku vrednost, tada treba uzeti

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx\,,$$

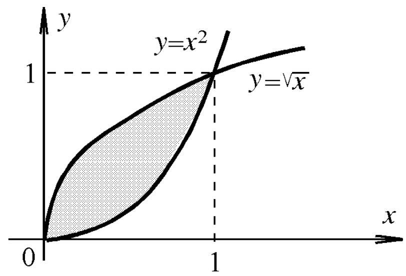
što se u slučaju primera sa sl. 5.1.2 svodi na $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Veličina površine ograničena krivim $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ i pravama $x = a$ i $x = b$, pri čemu je $f_1(x) \le f_2(x)$ na $[a,b]$ (videti sl. 5.1.3), određuje se pomoću

$$S = \int_a^b \bigl(f_2(x) - f_1(x)\bigr)\,dx\,.$$



Sl. 5.1.3



Sl. 5.1.4

Primer 5.1.1. Površina ograničena krivama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$, koje se seku u tačkama $(0,0)$ i $(1,1)$ (videti sl. 5.1.4), jednaka je

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\,. \quad \triangle$$

Primer 5.1.2. Odredićemo zajedničku površinu krugova $x^2 + y^2 \le 4$ i $x^2 + y^2 \le 4x$, čije presečne tačke A i B su redom $(1, \sqrt{3})$ i $(1, -\sqrt{3})$ (videti sl. 5.1.5).

Kako je tražena površina određena pomoću

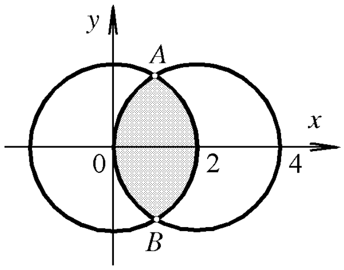
$$\Big\{(x, y) \mid 2 - \sqrt{4 - y^2} \le x \le \sqrt{4 - y^2},\ -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}\Big\},$$

uzimajući integraciju po y-osi, imamo

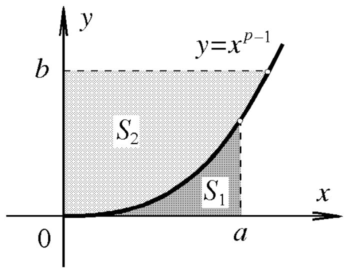
$$S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \Big[\sqrt{4 - y^2} - \Big(2 - \sqrt{4 - y^2}\Big)\Big]\, dy,$$

tj.

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\sqrt{3}} \Big(\sqrt{4 - y^2} - 1\Big)\, dy \\ &= 4 \Big(\frac{y}{2}\sqrt{4 - y^2} + 2 \arcsin \frac{y}{2} - y\Big) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}. \qquad \triangle \end{aligned}$$



Sl. 5.1.5



Sl. 5.1.6

Primer 5.1.3. Neka je $p > 1$ i $1/p + 1/q = 1$. Posmatrajmo krivu $y = x^{p-1}$ za $x > 0$ ili, što je isto, krivu $x = y^{q-1}$, $y > 0$ (videti sl. 5.1.6). Za proizvoljno $a, b > 0$ uočimo površine S_1 i S_2 date pomoću

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}\, dx = \frac{a^p}{p} \qquad \text{i} \qquad S_2 = \int_0^b y^{q-1}\, dy = \frac{b^q}{q}\,.$$

Geometrijski je jasno da zbir ovih površina ne može biti manji od površine pravougaonika sa stranicama a i b. Dakle, $S_1 + S_2 \ge ab$, tj.

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 0.$$

Ova nejednakost je dokazana ranije (videti teoremu 2.1.1 u I glavi). Jednakost nastupa ako i samo je $b = a^{p-1}$. $\triangle$

Neka je kriva $y = f(x)$ definisana parametarski pomoću

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta).$$

Neka je, dalje, $a = \varphi(\alpha)$ i $b = \varphi(\beta)$. Tada se, uvođenjem nove promenljive t pomoću $x = \varphi(t)$, površina odgovarajućeg krivolinijskog trapeza (sl. 5.1.1) može izraziti u obliku

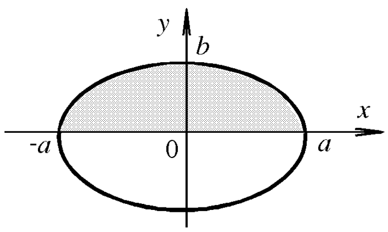
$$\text{(5.1.2)} \qquad S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta y\,\dot{x}\,dt\,.$$

Primer 5.1.4. Parametarske jednačine

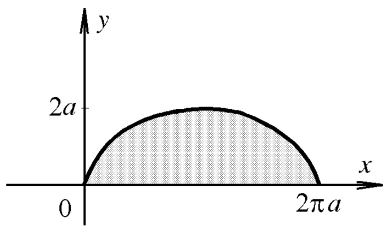
$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \qquad (a, b > 0, \quad 0 \le t \le 2\pi)$$

određuju elipsu sa poluosama a i b (sl. 5.1.7). Korišćenjem formule (5.1.2), odredimo najpre površinu gornje polovine elipse. Kada se x menja od $-a$ do $+a$, parametar t menja se od π do 0, pa imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,S &= \int_\pi^0 (b\sin t)(-a\sin t)\,dt = ab\int_0^\pi \sin^2 t\,dt\\ &= \frac{1}{2}\,ab\int_0^\pi (1-\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\,ab\Big(t - \frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}\,ab\pi\,.\end{aligned}$$



Sl. 5.1.7



Sl. 5.1.8

Dakle, površina elipse je $S = ab\pi$. Kada je $a = b = r$, elipsa se svodi na krug, čija je površina jednaka $r^2\pi$. $\triangle$

Primer 5.1.5. Odredimo sada površinu koju jedan luk cikloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (a > 0)$$

zaklapa sa x-osom (sl. 5.1.8).

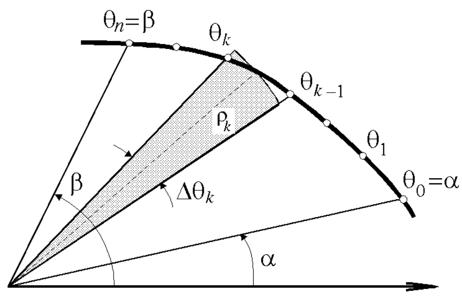
Kako je $\dot{x} = a(1-\cos t)\,dt$, imamo

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = 3\pi a^2. \quad \triangle$$

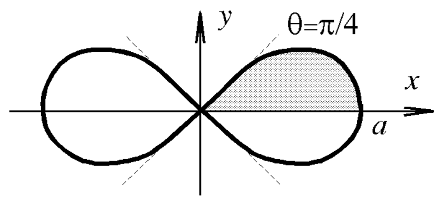
Na kraju ovog odeljka razmotrićemo problem određivanja površine krivolinijskog sektora (sl. 5.1.9), ograničenog krivom u polarnom koordinatnom sistemu,

$$\varrho = f(\theta) \qquad (\alpha \le \theta \le \beta),$$

i radijus-vektorima $\theta = \alpha$ i $\theta = \beta$. Za funkciju f pretpostavimo da je neprekidna na segmentu $[\alpha, \beta]$.



Sl. 5.1.9



Sl. 5.1.10

Uočimo, najpre, σ podelu segmenta $[\alpha, \beta]$ nizom deonih tačaka $\{\theta_k\}_{k=0}^n$ tako da je

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{k-1} < \theta_k < \cdots < \theta_n = \beta,$$

$\sigma_k = [\theta_{k-1}, \theta_k]$, $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Na svakom podsegmentu σ_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ izaberimo po jednu proizvoljnu tačku ξ_k $(\theta_{k-1} \le \xi_k \le \theta_k)$ i posmatrajmo sumu površina kružnih sektora poluprečnika $\varrho_k = f(\xi_k)$ i centralnog ugla $\Delta\theta_k$, tj.

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\varrho_k^2 \Delta\theta_k\,. \tag{5.1.3}$$

Suma (5.1.3) je očigledno Riemannova suma za funkciju $\theta \mapsto \frac{1}{2} f(\theta)^2$. Kako je f neprekidna funkcija, to postoji granična vrednost od $S(\sigma)$, kada $\max \Delta\theta_k \to 0$, i jednaka je površini krivolinijskog sektora. Dakle,

$$S = \lim_{\max \Delta\theta_k \to 0} S(\sigma) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \varrho^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f(\theta)^2 \, d\theta \,. \tag{5.1.4}$$

Primer 5.1.6. Izračunajmo površinu ograničenu krivom

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \qquad (a > 0), \tag{5.1.5}$$

koja je poznata kao lemniskata (sl. 5.1.10). Uvođenjem polarnih koordinata

$$x = \varrho \cos\theta, \quad y = \varrho \sin\theta \,,$$

(5.1.5) se svodi na

$$\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta \qquad \text{tj.} \qquad \varrho = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Primenom formule (5.1.4) dobijamo

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta = 2a^2 \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/4} = a^2. \quad \triangle$$

5.2. Dužina luka krive

Neka je u prostoru $\mathbb{R}^3$ data glatka kriva Γ pomoću parametarskih jednačina

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta). \tag{5.2.1}$$

Pretpostavimo da se kriva Γ ne preseca, tj. da ne postoji tačka na krivoj Γ koja je istovremeno slika dve različite vrednosti parametra $t \in [\alpha, \beta]$.

Pre nego što pređemo na određivanje dužine luka krive, razmotrićemo diferencijal dužine luka krive. Sa A i B označićemo početnu i krajnju tačku krive Γ, koje odgovarajuju vrednostima $t = \alpha$ i $t = \beta$, respektivno. Dakle, koordinate ovih tačaka su $A = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ i $B = (\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$.

Za dve proizvoljne tačke T_1 i T_2 krive Γ reći ćemo da je tačka T_1 ispred tačke T_2 na krivoj Γ, u oznaci $T_1 \prec T_2$, ako tačka T_1 odgovara manjoj vrednosti parametra t, tj. ako je $t_1 < t_2$, gde su $T_1 = (\varphi(t_1), \psi(t_1), \chi(t_1))$ i

$T_2 = (\varphi(t_2), \psi(t_2), \chi(t_2))$. Ovim se, u stvari, orijentiše kriva Γ u skladu sa porastom parametra t.

U smislu prethodne orijentacije krive, uočimo na krivoj Γ uređeni niz tačaka $\{T_k\}_{k=0}^{n}$ tako da je

$$A = T_0 \prec T_1 \prec \cdots \prec T_{k-1} \prec T_k \prec \cdots \prec T_n = B,$$

što odgovara uređenom nizu vrednosti parametra $\{t_k\}_{k=0}^{n}$ za koji je

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots < t_n = \beta.$$

Sa Δs_k označimo dužinu duži $\overline{T_{k-1}T_k}$, a sa S dužinu odgovarajuće poligonalne linije $T_0 T_1 \cdots T_n$ koja je upisana u Γ, tj.

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}\,, \tag{5.2.2}$$

gde su

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}), \quad \Delta y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}), \quad \Delta z_k = \chi(t_k) - \chi(t_{k-1})\,.$$

Definicija 5.2.1. Za krivu Γ kažemo da je *rektifikabilna* ako postoji $\sup\{S\}$ uzet preko svih mogućih poligonalnih linija upisanih u Γ.

Supremum iz ove definicije predstavlja *dužinu luka krive* Γ.

Teorema 5.2.1. *Ako funkcije $t \mapsto \varphi(t)$, $t \mapsto \psi(t)$, $t \mapsto \chi(t)$ imaju neprekidne izvode na $[\alpha, \beta]$, tada je kriva Γ, definisana pomoću parametarskih jednačina* (5.2.1)*, rektifikabilna.*

Dokaz. Pođimo od (5.2.2). Primenom Lagrangeove teoreme imamo

$$\Delta x_k = \varphi'(\xi_k)\Delta t_k, \quad \Delta y_k = \psi'(\eta_k)\Delta t_k, \quad \Delta z_k = \chi'(\zeta_k)\Delta t_k,$$

gde su ξ_k, η_k, $\zeta_k \in (t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tada se (5.2.2) može predstaviti u obliku

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\eta_k)^2 + \chi'(\zeta_k)^2}\,\Delta t_k\,. \tag{5.2.3}$$

Ako sa P, Q, R označimo redom najveće vrednosti modula izvoda $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$, tada za (5.2.3) važi sledeća nejednakost

$$S \le \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = (\beta - \alpha)\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\,, \tag{5.2.4}$$

što znači da postoji $\sup\{S\}$, jer je skup $\{S\}$ ograničen. $\square$

Označavajući sa p, q, r redom najmanje vrednosti modula izvoda $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$, moguće je dati ograničenje za S i sa donje strane

$$S \ge (\beta - \alpha)\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\,. \tag{5.2.5}$$

Kombinujući nejednakosti (5.2.4) i (5.2.5) nalazimo procenu za dužinu luka $L = l(\Gamma) = \sup\{S\}$ u obliku

$$(\beta - \alpha)\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \le L \le (\beta - \alpha)\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\,. \tag{5.2.6}$$

Deo luka krive Γ od početne tačke A do neke proizvoljne tačke $T \in \Gamma$, koja odgovara vrednosti parametra t, označimo sa $\overset{\frown}{AT}$, a odgovarajuću dužinu tog luka sa $s = l(\overset{\frown}{AT})$. Očigledno, s je funkcija parametra t.

Posmatrajmo sada priraštaj funkcije $t \mapsto s(t)$ u proizvoljnoj tački $t \in [\alpha, \beta]$, ako je Δt odgovarajući priraštaj parametra t. Dakle, na segmentu $[t, t + \Delta t]$ ocenimo

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)\,.$$

Ako sa p, q, r i P, Q, R označimo redom najmanje i najveće vrednosti modula izvoda $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ na $[t, t + \Delta t]$, korišćenjem (5.2.6), nalazimo

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \le \frac{\Delta s}{\Delta t} \le \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\,.$$

Imajući u vidu neprekidnost funkcija φ', ψ', χ', jednostavno dobijamo da je

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,.$$

Istu jednakost dobijamo i u slučaju kada uzmemo da je $\Delta t < 0$.

Ovim smo dokazali sledeće tvrđenje:

Teorema 5.2.2. *Ako funkcije $t \mapsto \varphi(t)$, $t \mapsto \psi(t)$, $t \mapsto \chi(t)$ imaju neprekidne izvode na $[\alpha, \beta]$, tada za svako $t \in (\alpha, \beta)$ važi*

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\,.$$

Kako je $s(\alpha) = 0$ i $s(\beta) = l(\Gamma) = L$, na osnovu prethodne teoreme i Newton-Leibnitzove formule zaključujemo da važi sledeći rezultat:

Teorema 5.2.3. *Ako funkcije $t \mapsto \varphi(t)$, $t \mapsto \psi(t)$, $t \mapsto \chi(t)$ imaju neprekidne izvode na $[\alpha, \beta]$, tada je dužina luka krive Γ, definisane pomoću* (5.2.1), *data sa*

$$L = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\, dt\,. \tag{5.2.7}$$

Primer 5.2.1. Neka je data kriva

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = abt \qquad (a, b > 0,\ \ 0 \le t \le 2\pi).$$

Kako je $dx = -a\sin t\, dt$, $dy = a\cos t\, dt$, $dz = ab\, dt$, korišćenjem formule (5.2.7), nalazimo

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2b^2}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + b^2}\, dt = 2\pi a\sqrt{1 + b^2}\,. \quad \triangle$$

Kada imamo slučaj krive u ravni Oxy, tj. kada je $z = 0$, formula (5.2.7) svodi se na oblik

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt\,. \tag{5.2.8}$$

Najzad, ako je takva kriva definisana jednačinom

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b),$$

gde je f neprekidno-diferencijabilna funkcija na $[a, b]$, stavljajući $t = x$ i $y = f(x)$, formula (5.2.8) postaje

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx\,. \tag{5.2.9}$$

Na kraju ovog odeljka razmotrićemo i slučaj određivanja dužine luka krive koja je zadata u polarnim koordinatama

$$\varrho = f(\theta) \qquad (\alpha \le \theta \le \beta). \tag{5.2.9}$$

Kako su $x = \varrho\cos\theta$ i $y = \varrho\sin\theta$, gde je ϱ dato pomoću (2.5.9), jednostavno se dobijaju parametarske jednačine krive

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta \qquad (\alpha \le \theta \le \beta).$$

Njihovim diferenciranjem nalazimo

$$\dot{x} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \quad \text{i} \quad \dot{y} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta,$$

odakle zaključujemo da je

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = f'(\theta)^2 + f(\theta)^2 = \varrho'^2 + \varrho^2.$$

Prema tome,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho'^2 + \varrho^2}\, d\theta\,. \tag{5.2.10}$$

Primer 5.2.2. Odredićemo dužinu luka kardioide definisane pomoću

$$\varrho = a(1 + \cos\theta) \qquad (a > 0,\ -\pi \le \theta \le \pi).$$

Kako je $\varrho' = -a\sin\theta$, primenom formule (5.2.10) nalazimo

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2\sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}\, d\theta = 2a\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta\,,$$

tj.

$$L = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\bigg|_0^\pi = 8a\,. \quad \triangle$$

5.3. Zapremina obrtnog tela

Razmotrimo najpre jedan opštiji slučaj.

Neka je dato proizvoljno telo $\mathcal{T}$ (sl. 5.3.1) i neka je poznata površina preseka ovog tela sa ravnima upravnim na izabranu osu x. Dakle, zahteva se poznavanje funkcije

$$S = S(x).$$

Primetimo da je $S(a) = S(b) = 0$.

Pod pretpostavkom da je funkcija $x \mapsto S(x)$ neprekidna na $[a, b]$, moguće je jednostavno odrediti zapreminu datog tela $\mathcal{T}$.

Uočimo proizvoljnu σ podelu segmenta $[a, b]$ nizom tačaka $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ tako da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\,. \tag{5.3.1}$$

Na svakom podsegmentu $[x_{k-1}, x_k]$ izaberimo po jednu proizvoljnu tačku ξ_k i u tim tačkama postavimo ravni normalne na x-osu. Odgovarajuće površine preseka ovih ravni sa datim telom $\mathcal{T}$ biće $S(\xi_k)$. Koristeći dobijene preseke kao osnove, formirajmo elementarne cilindre sa odgovarajućim visinama $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$. Na taj način dobili smo telo sastavljeno od n elementarnih cilindara čija je zapremina jednaka

$$V(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k\,, \tag{5.3.2}$$

gde $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Kako suma (5.3.2), očigledno, predstavlja Riemannovu sumu za neprekidnu funkciju $x \mapsto S(x)$ na $[a, b]$, može se formulisati sledeći rezultat:

Teorema 5.3.1. *Ako je funkcija $x \mapsto S(x)$ neprekidna na $[a, b]$ tada je zapremina tela $\mathcal{T}$ data sa*

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} V(\sigma) = \int_a^b S(x)\,dx\,. \tag{5.3.3}$$

Primer 5.3.1. Neka je data kružnica poluprečnika R

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{5.3.4}$$

i neka je normalno na ravan Oxy postavljen elastični kvadrat, čija dva suprotna temena leže na kružnici tako da je odgovarajuća dijagonala kvadrata paralelna sa y-osom. Izračunajmo zapreminu tela koje nastaje kada centar elastičnog kvadrata klizi duž x-ose.

Kako je površina preseka ovog tela sa ravnima upravnim na osu x jednaka površini kvadarata, to je

$$S(x) = \frac{1}{2}\, d^2 \,,$$

gde je, na osnovu (5.3.4), dijadonala kvadarata, kao funkcija od x, jednaka $d = d(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Dakle, $S(x) = 2(R^2 - x^2)$ pa je zapremina tela, saglasno (5.3.3),

$$V = \int_{-R}^{+R} 2(R^2 - x^2)\, dx = 4\Big(R^2 x - \frac{1}{3}x^3\Big)\Big|_0^R = \frac{8}{3}\, R^3 \,. \qquad \triangle$$

Posmatrajmo sada telo koje se dobija rotacijom krivolinijskog trapeza, ograničenog krivom $y = f(x)$, x-osom i pravama $x = a$, $x = b$, oko x-ose, pri čemu pretpostavljamo da je $x \mapsto f(x)$ neprekidna i nenegativna funkcija na $[a, b]$ (videti sl. 5.3.2).

Zapremina ovakvog tela izračunava se veoma jednostavno primenom formule (5.3.3), jer je $S(x)$ površina kruga sa poluprečnikom $r = y = f(x)$, tj. $S(x) = \pi f(x)^2$.

Dakle, kao dirktnu posledicu teoreme 5.3.1, imamo sledeći rezultat:

Teorema 5.3.2. *Neka je $x \mapsto f(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$. Zapremina tela dobijenog rotacijom krivolinijskog trapeza, ograničenog krivom $y = f(x)$, x-osom i pravama $x = a$, $x = b$, oko x-ose, data je pomoću*

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx \,. \tag{5.3.5}$$

Primer 5.3.2. Odredićemo zapreminu torusa koji se dobija rotacijom kruga

$$x^2 + (y - R)^2 \le r^2 \qquad (R > r)$$

oko x-ose.

Tražena zapremina torusa, na osnovu (5.3.5), jednaka je

$$V = \pi \int_{-r}^{+r} \Big(y_2^2 - y_1^2\Big)\, dx,$$

gde su

$$y_1 = R - \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{i} \qquad y_2 = R + \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Kako je

$$y_2^2 - y_1^2 = (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2R \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} = 4R\sqrt{r^2 - x^2}\,,$$

imamo

$$V = \pi \cdot 4R \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi R \cdot \frac{r^2\pi}{2} = 2Rr^2\pi^2\,. \quad \triangle$$

Razmotrimo sada rotaciju krivolinijskog trapeza T, ograničenog krivom $y = f(x)$, x-osom i pravama $x = a$, $x = b$, oko ose $x = c$, gde $c \notin (a, b)$ (videti sl. 5.3.3). Na taj način se dobija rotaciono telo čiju zapreminu V treba odrediti.

Uočimo proizvoljnu σ podelu segmenta $[a, b]$ datu pomoću (5.3.1) i na svakom podsegmentu $[x_{k-1}, x_k]$ izaberimo po jednu tačku ξ_k, $k = 1, \dots, n$. Rotacijom pravougaonika sa osnovicom $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ i visinom $f(\xi_k)$ oko ose $x = c$ dobijamo elementarno telo („prstenasti valjak“) čija je zapremina jednaka

$$\Delta V_k = \pi \Big| (x_k - c)^2 - (x_{k-1} - c)^2 \Big| f(\xi_k) = 2\pi \Big| \frac{x_k + x_{k-1}}{2} - c \Big| f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Zapremina svih n tako dobijenih elementarnih tela jednaka je

$$V(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \Big| \frac{x_k + x_{k-1}}{2} - c \Big| f(\xi_k) \Delta x_k. \tag{5.3.6}$$

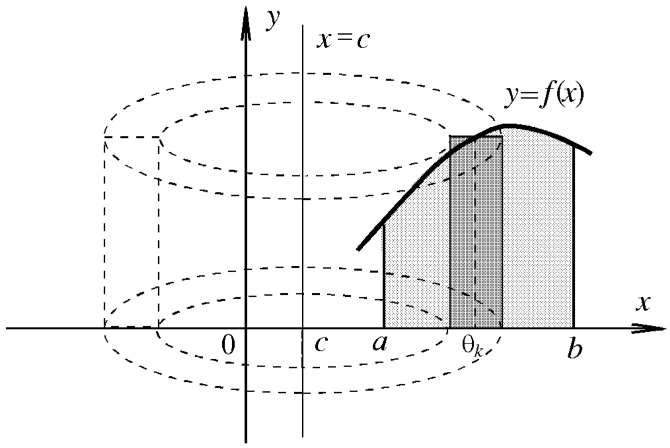
Uzimajući da je $\xi_k = (x_k + x_{k-1})/2$, (5.3.6) postaje Riemannova suma za neprekidnu funkciju $x \mapsto 2\pi|x - c| f(x)$ na $[a, b]$, tako da je zapremina dobijenog rotacionog tela

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} V(\sigma) = 2\pi \int_a^b |x - c| f(x)\, dx. \tag{5.3.7}$$

Za $c = 0$ dobijamo zapreminu tela koje se dobija rotacijom krivolinijskog trapeza T oko y-ose

$$V = 2\pi \int_a^b |x| f(x)\, dx.$$

Primer 5.3.3. Odredićemo zapreminu tela koje nastaje rotacijom parabole $y^2 = 8x$ oko ose $x = 2$ (videti sl. 5.3.4).



Sl. 5.3.3

Na osnovu (5.3.7) imamo

$$V = 2 \cdot 2\pi \int_0^2 \sqrt{8x}(2-x)\,dx = \frac{256\pi}{15}\,.$$

Do istog rezultata mogli smo doći i na osnovu teoreme 5.3.1, integracijom po y-osi. U tom slučaju, imamo da je

$$S(y) = \pi(2-x)^2 = \pi\left(2 - \frac{1}{8}y^2\right)^2,$$

pa je

$$V = 2\int_0^4 S(y)\,dy = 2\int_0^4 \pi\left(2-\frac{1}{8}y^2\right)^2 dy = \frac{256\pi}{15}\,. \quad \triangle$$

Primer 5.3.4. Neka je figura F ograničena parabolom $y = -x^2 + 3x + 6$ i pravom $y = x + 3$ (videti sl. 5.3.5). Odredićemo zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure F oko ose $x = -3$.

Tačke preseka date parabole i prave $y = x+3$ su $A(-1,2)$ i $B(3,6)$. Korišćenjem (5.3.7) imamo

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-1}^3 (x+3)\big[(-x^2+3x+6)-(x+3)\big]\,dx \\ &= 2\pi\int_{-1}^3 \big[-x^3 - x^2 + 9x + 9\big]\,dx = \frac{256\pi}{3}\,. \quad \triangle \end{aligned}$$

5.4. Površina obrtnog tela

Neka je data glatka kriva $y = f(x)$, gde je f neprekidno-diferencijabilna i nenegativna funkcija na $[a, b]$. Luk ove krive nad odsečkom $[a, b]$ pri rotaciji oko x-ose obrazuje rotacionu površ, čiju površinu P treba odrediti.

Kao i u odeljku 5.2, uočimo na krivoj $y = f(x)$ uređeni niz tačaka $\{T_k\}_{k=0}^{n}$ tako da je

$$A = T_0 \prec T_1 \prec \cdots \prec T_{k-1} \prec T_k \prec \cdots \prec T_n = B,$$

što odgovara uređenom nizu apscisa $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ za koji je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b. \tag{5.4.1}$$

Sa Δs_k označimo dužinu elementarne tetive $\overline{T_{k-1}T_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Rotacijom oko x-ose, tetiva $\overline{T_{k-1}T_k}$ opisuje omotač elementarne zarubljene kupe, čija je površina jednaka

$$\Delta P_k = 2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \, \Delta s_k,$$

gde su

$$y_k = f(x_k), \quad \Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \, \Delta x_k \,,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \qquad \Delta y_k = y_k - y_{k-1} \,.$$

Kako, na osnovu Lagrangeove teoreme, postoji $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ takvo da je

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k),$$

zaključujemo da je

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \, \Delta x_k$$

i

$$\Delta P_k = 2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \, \Delta x_k \,.$$

S druge strane, zbog neprekidnosti funkcije f, postoji $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ takvo da je $(y_{k-1} + y_k)/2 = f(\eta_k)$.

Sumiranjem ΔP_k, za $k = 1, 2, \ldots, n$, dobijamo

$$\tilde{P}(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \Delta P_k = 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k \,, \tag{5.4.2}$$

gde je σ podela data pomoću (5.4.1).

Nažalost, suma (5.4.2) ne predstavlja Riemannovu sumu za funkciju

$$x \mapsto \phi(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,,$$

jer se u sumi (5.4.2) pojavljuju po dve različite vrednosti ξ_k i η_k u svakom podsegmentu $[x_{k-1}, x_k]$. Međutim, neprekidnost funkcije[46] ϕ na $[a, b]$, obezbeđuje da je

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \tilde{P}(\sigma) = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} P(\sigma)\,, \tag{5.4.3}$$

gde je

$$P(\sigma) = 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\, \Delta x_k \,. \tag{5.4.4}$$

Imajući u vidu (5.4.3) i (5.4.4) može se formulisati sledeći rezultat:

Teorema 5.4.1. *Neka je $x \mapsto f(x)$ neprekidno-diferencijabilna nenegativna funkcija na $[a, b]$. Luk krive nad odsečkom $[a, b]$ pri rotaciji oko x-ose obrazuje rotacionu površ, čija je površina data sa*

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \,. \tag{5.4.5}$$

Primer 5.4.1. Odredićemo površinu torusa iz primera 5.3.2. Korišćenjem notacije koja je tamo uvedena i formule (5.4.5), imamo

$$P = 2\pi \int_{-r}^{+r} \left(y_1\sqrt{1 + y_1'^2} + y_2\sqrt{1 + y_2'^2} \right) dx \,.$$

[46] Ovo je posledica neprekidnosti funkcije f' na $[a, b]$.

Kako su $y_1' = x/\sqrt{r^2-x^2}$ i $y_2' = -x/\sqrt{r^2-x^2}$, imamo da je

$$\sqrt{1+y_1'^2} = \sqrt{1+y_2'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

pa je

$$P = 2\pi \int_{-r}^{+r} 2R \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx = 8\pi Rr \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = 4\pi^2 Rr\,. \qquad \triangle$$

6. ZADACI ZA VEŽBU

6.1. Odrediti integrale:

$1^\circ \quad \displaystyle\int \frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}\, dx, \qquad 2^\circ \quad \int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}\, dx,$

$3^\circ \quad \displaystyle\int \frac{1}{(x^4-1)^3}\, dx, \qquad 4^\circ \quad \int \frac{1}{x^6+1}\, dx, \qquad 5^\circ \quad \int \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx.$

Uputstvo. Podintegralne funkcije prethodno razložiti na parcijalne razlomke.

Rezultat. Tražene primitivne funkcije su:

$1^\circ \quad \displaystyle \frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$

$2^\circ \quad \displaystyle -\frac{1}{8}\,\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C \quad (x \ne \pm 1),$

$3^\circ \quad \displaystyle \frac{1}{32}\,\frac{7x^5-11x}{(x^4-1)^2} + \frac{21}{128}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{21}{64}\arctan x + C \quad (x \ne \pm 1),$

$4^\circ \quad \displaystyle \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{6}\arctan(x^3) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{x^2+\sqrt{3}\,x+1}{x^2-\sqrt{3}\,x+1} + C,$

$5^\circ \quad \displaystyle \arctan x + \frac{1}{3}\arctan(x^3) + C.$

6.2. Izračunati sledeće integrale:

$$1^\circ \quad \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\, dx, \qquad 2^\circ \quad \int \frac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\, dx,$$

Rezultat. Traženi integrali su:

$1^\circ \quad \displaystyle \log(x+\sqrt{x^2+2}) + \arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C,$

2° $\dfrac{2}{15}(x+2)(3x-4)\sqrt{x+2}-\dfrac{2}{15}(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1}+C,$

6.3. Izračunati integrale:

1° $\displaystyle\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx,$ 3° $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x-\sin a}\,dx \quad (\cos a\neq 0),$

2° $\displaystyle\int \sin^3 2x\cos^2 3x\,dx,$ 4° $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx \quad (-\pi<x<\pi).$

Rezultat. Odgovarajuće primitivne funkcije su:

1° $\dfrac{3}{2}\cos\dfrac{x}{6}-\dfrac{3}{10}\cos\dfrac{5x}{6}-\dfrac{3}{14}\cos\dfrac{7x}{6}+\dfrac{3}{32}\cos\dfrac{11x}{6}+C,$

2° $-\dfrac{3}{16}\cos 2x+\dfrac{3}{64}\cos 4x-\dfrac{3}{128}\cos 8x+\dfrac{1}{48}\cos 6x+\dfrac{1}{192}\cos 12x+C,$

3° $\dfrac{1}{\cos a}\cdot\log\left|\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\cos\dfrac{x+a}{2}}\right|+C,$

4° $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan\dfrac{3\tan\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$

6.4. Odrediti skup svih primitivnih funkcija funkcije

$$x\mapsto f(x)=\frac{1}{1-x}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,.$$

6.5. Izračunati integrale

$$1^\circ\quad \int\frac{1}{(a+b\cos x)^n}\,dx \qquad \text{i} \qquad 2^\circ\quad \int\frac{1}{(a+b\sin x)^n}\,dx\,.$$

6.6. Na osnovu definicije određenog integrala, dokazati sledeće jednakosti:

1° $\displaystyle\int_{-1}^{4}(1+x)\,dx=\frac{25}{2},$ 3° $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{a}-\frac{1}{b},$

2° $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx=\frac{b^4-a^4}{4},$ 4° $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=1.$

6.7. Dokazati jednakost

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k}\,. \tag{1}$$

Uputstvo. Posmatrajući sumu na levoj strani jednakosti (1), poslužiti se jednakostima

$$\frac{1}{k}=\int\limits_0^1 t^{k-1}\,dt=\int\limits_0^1 (1-x)^{k-1}\,dx.$$

6.8. Proveriti jednakosti:

$$I=\int\limits_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi\log 2}{8},$$

$$J=\int\limits_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right)dx=\frac{\pi^2}{8}\cdot$$

Uputstvo. 1° Uvesti smenu $x=\tan t$. 2° Uvesti smenu $x=\dfrac{\pi}{2}-t$.

6.9. Ako je n prirodan broj dokazati jednakosti

$$I_n=\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,\cos^n x\,dx=\frac{\pi}{2^n}\,,\qquad J_n=\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,\sin^n x\,dx=\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}\,.$$

Uputstvo. Odrediti prethodno odgovarajuće rekurentne relacije.

6.10. Odrediti integral:

$$I=\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx$$

Uputstvo. Za podintegralnu funkciju važi jednakost

$$\sqrt{x^3+x^4}=x^2(1+x^{-1})^{1/2}.$$

Rezultat. $I=\dfrac{8x^2+2x-3}{24}\sqrt{x+x^2}+\dfrac{1}{8}\log\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{x}+C.$

6.11. Ako su integrali

$$I=\int\limits_0^1\frac{\log t}{1-t^2}\,dt,\qquad I_1=\int\limits_0^1\frac{\log t}{1-t}\,dt\qquad\text{i}\qquad I_2=\int\limits_0^1\frac{\log t}{1+t}\,dt.$$

konvergentni integrali, odrediti njihove vrednosti.

Rezultat. Sva tri integrala konvergiraju, a njihove se vrednosti:

$$I=-\frac{\pi^2}{8}\,,\qquad I_1=-\frac{\pi^2}{6}\qquad\text{i}\qquad I_2=-\frac{\pi^2}{12}$$

lako dobijaju iz skupa jednakosti

$$I_1 + I_2 = 2I \qquad \text{i} \qquad I_1 - I_2 = \frac{1}{2}\, I_1.$$

6.12. Proveriti jednakosti:

$$1^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}, \qquad 3^\circ \quad \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x}\, dx = \pi\sqrt{2},$$

$$2^\circ \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1/2)^2}\, dx = \sqrt{\pi}, \qquad 4^\circ \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

6.13. Neka je $I(m,n) = \int_0^x t^m (1-t)^n dt)$. Odrediti a, b, c tako da važi rekurentna relacija

$$aI(m,n) + bI(m-1, n-1) = x^m (1-x)^n (cx - n),$$

a zatim izračunati integral $I = \int_0^x \sqrt[3]{\frac{t^5}{(1-t)^{11}}}\, dt.$

6.14. Metematičkom indukcijom ili na neki drugi način dokazati jednakost

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \pi \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

6.15. Dokazati jednakosti:

$$1^\circ \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{(1+x)^n} - \frac{1}{(1+x/a)^n}\right) dx = \log|a| \qquad (a \in \mathbb{R},\ a \neq 0),$$

$$2^\circ \quad \int_0^{\pi/2} (\cos x)^a \cos ax\, dx = \frac{\pi}{2^{a+1}} \qquad (a \in \mathbb{R},\ a > -1),$$

$$3^\circ \quad \int_0^{\pi} \log(\sin x)\, dx = -\pi \log 2.$$

6.16. Odrediti površinu S figure koju omeđuju:

1° Elipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad$ i $\quad a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$,

2° Parabole: $2(y-1)^2 = x \quad$ i $\quad (y-1)^2 = x - 1$,

3° Krive: $y = x$ i $y = x + \sin^2 x \quad (0 \le x \le \pi)$,

4° Krive: $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$ i $y = 0 \quad (0 \le y \le 1)$.

Rezultat. 1° $S = 4ab \arctan \dfrac{b}{a}$, 2° $S = \dfrac{4}{3}$, 3° $S = \dfrac{\pi}{2}$, 4° $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{\pi}$.

6.17. Odrediti dužine odgovarajućih lukova krivih određenih jednakostima:

1° $y^2 = 4x \quad (0 \le x \le 3)$,

2° $y = \log \cos x \quad \Big(0 \le x \le a < \dfrac{\pi}{2}\Big)$,

3° $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$

4° $\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{cases}$

5° $\varphi = \dfrac{1}{2}\Big(\rho + \dfrac{1}{\rho}\Big) \quad (1 \le \rho \le 3)$,

6° $\rho = \dfrac{2}{1 + \cos \varphi} \quad \Big(-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

Rezultat. Dužine odgovarajućih lukova su:

1° $s = 4\sqrt{3} + 2\log(\sqrt{3} + 2)$, 2° $s = \log \tan\Big(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a}{2}\Big)$, 3° $s = 2\pi^2 a$,

4° $s = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\big(1 + \sqrt{2}\big)$, 5° $s = 2 + \dfrac{1}{2}\log 3$, 6° $s = 2\big(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})\big)$.

6.18. Odrediti zapreminu V elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rezultat. $V = \dfrac{4\,abc\,\pi}{3}$.

6.19. Ako je S veličina površine i V veličina zapremine tela koje se dobija rotacijom kardioide

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \qquad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

oko polarne ose, dokazati da je $S = \dfrac{32a^2\pi}{5}$ i $V = \dfrac{8a^3\pi}{3}$.

6.20. Krive

$$y = f(x) = (x+1)(x-1)(x+2) \qquad \text{i} \qquad y = g(x) = -\frac{1}{4}\,(x^2 - x - 2)$$

određuju konačnu figuru u ravni Oxy. Odrediti površinu te figure.

VI GLAVA

Teorija redova

1. NUMERIČKI REDOVI

1.1. Osnovni pojmovi

Neka je dat niz $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u normiranom linearnom prostoru X. U takvom (metričkom) prostoru definisano je sabiranje elemenata i definisan je pojam granične vrednosti nizova (videti glavu II). Pojam (konačne) sume $S = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n$ može se uopštiti na slučaj kada imamo beskonačan broj sabiraka. Na taj način dobijamo tzv. *beskonačni red*, koji kraće zovemo *red*. Preciznije, imamo sledeću definiciju:

Definicija 1.1.1. Neka je $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dati niz u normiranom linearnom prostoru X i neka je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ novi niz definisan pomoću:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1, \\ S_2 &= u_1 + u_2, \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ \vdots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n. \end{aligned}$$

Uređeni par nizova $\big(\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big)$ naziva se *red* i označava kao

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots ,$$

ili, kraće,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n. \tag{1.1.1}$$

Elementi niza $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazivaju se *članovi reda* (1.1.1), a elementi niza $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *parcijalne sume* ovog reda. Član u_n se naziva *n-ti član* ili *opšti član* reda, dok je S_n njegova *n-ta parcijalna suma*.

Ako niz $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka S, tada kažemo da je red (1.1.1) *konvergentan* i da je S *suma reda*. U protivnom, ako niz $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergira, za red (1.1.1) kažemo da je *divergentan*.

Dakle, u slučaju konvergentnog reda simbol $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ označava ne samo taj red, već i njegovu sumu

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

U ovom poglavlju razmatraćemo uglavnom redove u prostoru realnih ili kompleksnih brojeva. Za takve redove kažemo da su *numerički* redovi. Ukoliko je opšti član reda (1.1.1) dat pomoću neke funkcije, na primer $u_n = u_n(x)$, definisane na segmentu $[a, b]$, kažemo da se radi o *funkcionalnom* redu. Moguće je razmatrati i matrične redove oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n$, gde je opšti član matrica određenog tipa $p \times q$.

Primer 1.1.1. U prostoru $X = \mathbb{R}$ posmatrajmo numerički red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots . \tag{1.1.2}$$

Kako je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,,$$

imamo

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}\,,$$

odakle zaključujemo da je red (1.1.2) konvergentan, s obzirom da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Dakle, suma reda je $S = 1$. $\triangle$

Primer 1.1.2. Za numerički red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$$

na isti način nalazimo parcijalnu sumu

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\,.$$

Ako je $\alpha > 0$ red je konvergentan i njegova suma je $S = 1$. $\triangle$

Primer 1.1.3. *Harmonijski* red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \tag{1.1.3}$$

je divergentan. Parcijalne sume ovog reda čine harmonijski niz koji je divergentan (videti primer 2.1.2, glava II). Daćemo ovde još jedan dokaz divergencije harmonijskog reda.

Na osnovu nejednakosti $(1 + 1/k)^k < e$ $(k \in \mathbb{N})$ (videti primer 1.3.13, glava II) imamo

$$\frac{1}{k} > \log\Bigl(1 + \frac{1}{k}\Bigr) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Zato za parcijalne sume harmonijskog reda važi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \log\Bigl(1 + \frac{1}{k}\Bigr) = \sum_{k=1}^{n} \bigl(\log(k+1) - \log k\bigr) = \log(n+1),$$

odakle zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, tj. da red (1.1.3) divergira. $\triangle$

Primer 1.1.4. Neka je opšti član reda $u_n = u_n(x) = x^n$. Takav red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \tag{1.1.4}$$

se naziva *geometrijski* red. Ovo je jedan od najprostijih funkcionalnih redova.

Opštije, mogu se razmatrati tzv. *stepeni* ili *potencijalni* redovi, čiji je opšti član dat pomoću $u_n = u_n(x) = a_n(x - a)^n$, gde je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dati numerički niz, a a data realna konstanta.

Parcijalna suma reda (1.1.4)je

$$S_n = S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \begin{cases} n & (x = 1), \\ (x - x^{n+1})/(1 - x) & (x \neq 1). \end{cases}$$

Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} x/(1-x) & (-1 < x < 1), \\ -\infty & (x > 1), \\ \text{ne postoji} & (x \leq -1), \end{cases}$$

zaključujemo da je red (1.1.4) konvergentan za $-1 < x < 1$, sa sumom $S = S(x) = x/(1 - x)$, a divergentan za $x \leq -1$ i $x \geq 1$. Kao što vidimo suma reda je, takođe, funkcija od x. $\triangle$

Definicija 1.1.2. Neka je red $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ konvergentan, čija je suma S i neka je S_n njegova n-ta parcijalna suma. Razlika

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \tag{1.1.5}$$

naziva se *ostatak* reda.

Na osnovu prethodnog, jasno je da svaku teoremu koja se odnosi na nizove (videti glavu II) možemo jednostavno preformulisati za redove, stavljajući $u_1 = S_1$, $u_2 = S_2 - S_1$, $u_3 = S_3 - S_2$, itd. Tako na primer, opšti Cauchyev kriterijum za konvergenciju realnih nizova ($X = \mathbb{R}$), dat teoremom 2.1.3, glava II, može se formulsati na sledeći način:

Teorema 1.1.1. *Red* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *konvergira ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji prirodan broj* n_0 *takav da da je*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} u_k \right| \le \varepsilon \qquad (m \ge n \ge n_0). \tag{1.1.6}$$

Nejednakost (1.1.6) sleduje iz nejednakosti $|S_m - S_{n-1}| < \varepsilon$ $(m \ge n \ge n_0)$, pri čemu je

$$\begin{aligned} S_m - S_{n-1} &= (S_m - S_{m-1}) + (S_{m-1} - S_{m-2}) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) \\ &= u_m + u_{m-1} + \cdots + u_n. \end{aligned}$$

U specijalnom slučaju, kada je $m = n$, nejednakost (1.1.6) se svodi na nejednakost

$$|u_n| < \varepsilon \qquad (n \le n_0),$$

što, u stvari, daje sledeći rezultat:

Teorema 1.1.2. *Ako je red* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *konvergentan, tada njegov opšti član teži nuli, tj.* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Obrnuto tvrđenje ne važi, što je evidentno iz primera 1.1.3. Dakle, uslov $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ je potreban, ali ne i dovoljan za konvergenciju reda.

Primer 1.1.5. Red $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ je divergentan. Njegov opšti član ne teži nuli. $\triangle$

Sledeća svojstva odnose se na konvergentne numeričke redove:

Teorema 1.1.3. *Ako je S suma konvergentnog reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ $(u_n \in \mathbb{C})$ *i* λ *proizvoljna kompleksna konstanta, tada je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$*, takođe, konvergentan i njegova suma je* λS.

Dokaz. Neka su $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ i $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda u_k$, tada je, očigledno, $S'_n = \lambda S_n$. Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, zaključujemo da postoji granična vrednost niza $\{S'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i da je ona jednaka λS. $\square$

Teorema 1.1.4. *Ako su redovi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ *konvergentni, tada je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$*, takođe, konvergentan i važi*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n. \tag{1.1.7}$$

Dokaz. Neka su U_n, V_n, S_n redom parcijalne sume redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$. Tada je $S_n = U_n + V_n$. Kako postoje granične vrednosti $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$, zaključujemo da postoji i granična vrednost $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ i da je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(U_n + V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n + \lim_{n\to+\infty} V_n,$$

što je ekvivalentno sa (1.1.7). $\square$

Sledeća teorema se odnosi na konvergenciju reda i konvergenciju njegovog ostatka.

Teorema 1.1.5. *Redovi*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \qquad i \qquad \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k \tag{1.1.8}$$

istovremeno konvergiraju ili divergiraju.

Drugim rečima, redovi (1.1.8) su ekvikonvergentni. Ako S_m predstavlja m-tu parcijalnu sumu reda $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$, tada $\sum\limits_{k=m+1}^{+\infty} u_k$ predstavlja odgovarajući ostatak R_m. Na osnovu (1.1.5), vidimo da u slučaju kada je red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$ konvergentan, važi

$$S = S_m + R_m,$$

gde je S njegova suma.

Za dokaz teoreme 1.1.5 dovoljno je primetiti da se parcijalne sume redova (1.1.8) razlikuju za konstantu. Naime, ako sa S_n i S'_n označimo n-te parcijalne sume redova koji se pojavljuju u (1.1.8), respektivno, tada imamo

$$S_{n+m} - S'_n = \sum_{k=1}^{n+m} u_k - \sum_{k=m+1}^{m+n} u_k = \sum_{k=1}^{m} u_k,$$

što znači da se parcijalne sume S_{n+m} i S'_n razlikuju za konstantni član koji je jednak konačnom zbiru prvih m članova reda $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Na osnovu ove teoreme možemo zaključiti da odbacivanje ili dodavanje konačnog broja članova ne utiče na konvergenciju reda.

1.2. Redovi sa nenegativnim članovima

Ovaj i sledeća dva odeljka posvećeni su redovima sa nenegativnim članovima. Dakle, razmatraćemo redove

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \tag{1.2.1}$$

kod kojih je

$$u_n \geq 0 \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.2.2}$$

S obzirom na osobinu (1.2.2), niz parcijalnih suma $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reda (1.2.1) je neopadajući, što znači da taj niz konvergira ka nekoj nenegativnoj vrednosti S ili, pak, određeno divergira ka $+\infty$. Prvi slučaj nastupa ako je niz parcijalnih suma ograničen sa gornje strane. Dakle, možemo zaključiti da je red sa nenegativnim članovima ili konvergentan ili da određeno divergira.

Napomena 1.2.1. Za redove sa nepozitivnim članovima važi isti zaključak. Oni su ili konvergentni, čija je suma nepozitivan broj, ili su određeno divergentni, kada niz parcijalnih suma divergira ka $-\infty$.

Posmatraćemo sada dva reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \tag{1.2.3}$$

i

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \tag{1.2.4}$$

sa nenegativnim članovima u_n i v_n za koje je $u_n = O(v_n)$. Ovo znači da postoji pozitivna konstanta C takva da je $u_n \le Cv_n$.

Teorema 1.2.1. *Neka su*

$$u_n \ge 0, \quad v_n \ge 0 \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{1.2.5}$$

i $u_n = O(v_n)$. *Ako je red* (1.2.4) *konvergentan, tada je konvergentan i red* (1.2.3), *a ako je red* (1.2.3) *divergentan, tada i red* (1.2.4) *divergira.*

Dokaz. Neka je $u_n = O(v_n)$, tj. $u_n \le Cv_n$ za neko $C > 0$. Sa $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ označimo parcijane sume redova (1.2.3) i (1.2.4), respektivno. Tada je

$$U_n \le CV_n \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.2.6}$$

Ako je red (1.2.4) konvergentan, tada je niz $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen, tj. $V_n \le M$. Na osnovu (1.2.6) imamo da je $U_n \le CM$, tj. da je i niz parcijalnih suma $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, takođe, ograničen. Kako je ovaj niz neopadajući, zaključujemo da je red (1.2.3) konvergentan.

Ako je, pak, red (1.2.3) divergentan, na osnovu (1.2.5) imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, što zajedno sa (1.2.6) daje $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$. Dakle, i red (1.2.4) je divergentan. $\square$

Pretpostavimo sada da je red (1.2.4) sa striktno pozitivnim članovima, tj. da je $v_n > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, i da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda. \tag{1.2.7}$$

Tada iz prethodne teoreme direktno sleduje:

Posledica 1.2.2. *Neka je* λ *određeno sa* (1.2.7).

(a) *Ako je red* (1.2.4) *konvergentan i* $0 \le \lambda < +\infty$, *tada je konvergentan i red* (1.2.3);

(b) *Ako je red* (1.2.4) *divergentan i* $0 < \lambda \le +\infty$, *tada je i red* (1.2.3) *divergentan.*

(c) *Ako je* λ *konačno, tada su redovi* (1.2.3) *i* (1.2.4) *ekvikonvergentni.*

Razmotrimo samo slučaj (c), tj. kada je λ konačno. Tada, iz (1.2.7) za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \lambda \right| < \varepsilon,$$

tj.

$$\lambda - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < \lambda + \varepsilon$$

za svako dovoljno veliko n ($n > n_0 = n_0(\varepsilon)$). S obzirom da možemo uzeti da je $\varepsilon < \lambda$, zaključujemo da važe nejednakosti

$$C_1 v_n < u_n < C_2 v_n \qquad (n > n_0),$$

gde su C_1 i C_2 pozitivne konstante ($C_1 = \lambda - \varepsilon$, $C_2 = \lambda + \varepsilon$). Ovo znači da je $u_n = O(v_n)$ i $v_n = O(u_n)$. Tvrđenje (c) sleduje tada iz teoreme 1.2.1. Dakle, redovi (1.2.3) i (1.2.4) su istovremeno konvergentni ili divergentni.

Primer 1.2.1. Za ispitivanje konvergencije tzv. *hiperharmonijskog* reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \qquad (\alpha > 0) \tag{1.2.8}$$

može se primeniti tvrđnje (c) iz posledice 1.2.2, pri čemu kao komparativni red uzimamo konvergentni red iz primera 1.1.2. Takođe, koristimo činjenicu da je $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, kada $x \to 0$ (videti formulu 9^0 iz primera 1.12.3, glava IV), pri čemu stavljamo $x = -1/(n+1)$. Kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}}{\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \Bigl(1 - \dfrac{1}{n+1}\Bigr)^\alpha} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \Bigl(1 - \dfrac{\alpha}{n+1}\Bigr) + o\Bigl(\dfrac{1}{n+1}\Bigr)} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\dfrac{\alpha}{n+1} + o\Bigl(\dfrac{1}{n+1}\Bigr)} = \frac{1}{\alpha},
\end{aligned}$$

zaključujemo da je i red (1.2.8) konvergentan za svako $\alpha > 0$. Ukoliko je $\alpha \le 0$ red je divergentan. $\triangle$

1.3. Kriterijumi za konvergenciju redova sa nenegativnim članovima

Za utvrđivanje konvergencije ili divergencije nekog reda mogu se koristiti neke osobine njegovog opšteg člana i na osnovu njih dobiti izvesna pravila koja se nazivaju *kriterijumi konvergencije*. U ovom odeljku upoznaćemo se sa nekim od tih kriterijuma.

Teorema 1.3.1. *Neka je dat red sa pozitivnim članovima*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \qquad u_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.3.1}$$

(a) *Ako postoje pozitivan broj* q $(0 < q < 1)$ *i prirodan broj* n_0 *takvi da je za svako* $n > n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q < 1, \tag{1.3.2}$$

tada je red (1.3.1) *konvergentan.*

(b) *Ako postoji prirodan broj* n_0 *takav da je za svako* $n > n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1,$$

tada je red (1.3.1) *divergentan.*

Dokaz. Neka je $0 < q < 1$. Na osnovu (1.3.2), tj.

$$u_{n_0+1} \le q u_{n_0}, \quad u_{n_0+2} \le q u_{n_0+1} \le q^2 u_{n_0}, \quad \dots,$$

zaključujemo da je $u_{n_0+k} \le q^k u_{n_0}$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Kako je red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n_0} q^k = u_{n_0} \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \frac{q}{1-q}\, u_{n_0}$$

konvergentan, na osnovu teoreme 1.2.1, imamo da je i red $\sum\limits_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n$ konvergentan. Kako se red (1.3.1) razlikuje od ovog reda samo za konačan broj članova (tačnije, n_0 prvih članova) zaključujemo da je i red (1.3.1) konvergentan.

Obrnuto, ako postoji n_0 takvo da za svako $n > n_0$ važi $u_{n+1}/u_n \geq 1$, tada imamo

$$u_{n_0+1} \geq u_{u_0}, \quad u_{n_0+2} \geq u_{n_0+1} \geq u_{n_0}, \quad \text{itd.}$$

Kako je $u_0 > 0$ može se zaključiti da opšti član reda ne teži nuli jer je ograničen pozitivnom konstantom sa donje strane. Zato red (1.3.1), u ovom slučaju, divergira. □

Ponekad je jednostavnije koristiti sledeću posledicu teoreme 1.3.1. Inače, tvrđenje teoreme 1.3.1 je poznato kao *D'Alembertov*[47] *kriterijum.*

Posledica 1.3.2. *Neka je za red sa pozitivnim članovima* (1.3.1)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d.$$

Ako je $d < 1$, red (1.3.1) *je konveregentan, a ako je $d > 1$ red je divergentan.*

Primer 1.3.1. Za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

što znači da je red konvergentan. Štaviše, i red sa opštim članom $u_n = x^n/n!$, gde je $x > 0$, je konvergentan jer je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0. \quad \triangle$$

Sledeća teorema daje tzv. *Cauchyev kriterijum* za konvergenciju redova.

Teorema 1.3.3. *Neka je dat red sa nenegativnim članovima*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \qquad u_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.3.3}$$

(a) *Ako postoje pozitivan broj q* $(0 < q < 1)$ *i prirodan broj n_0 takvi da je za svako $n > n_0$*

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1, \tag{1.3.4}$$

dati red je konvergentan.

---

[47] Jean le Rond D'Alembert (1717–1783), francuski filozof i matematičar.

(b) *Ako postoji prirodan broj* n_0 *takav da je za svako* $n > n_0$

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1,$$

tada dati red divergira.

Dokaz. Ako za $n > n_0$ važi (1.3.4), tada je $u_n \leq q^n$. Kako je za $0 < q < 1$, geometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ konvergentan, zaključujemo da je i dati red (1.3.3), takođe, konvergentan.

Međutim, ako je $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, tj. $u_n \geq 1$, za svako $n > n_0$, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$ sleduje divergencija datog reda (1.3.3). $\square$

Posledica 1.3.4. *Neka za red sa nenegativnim članovima* (1.3.3) *postoji granična vrednost*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = d.$$

Ako je $d < 1$*, red* (1.3.3) *je konvergentan, a ako je* $d > 1$ *red je divergentan.*

Primer 1.3.2. Za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^n}$ imamo $u_n = 1/n^n$. Kako je

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

dati red je konvergentan. $\triangle$

Primetimo da i Cauchyev i D'Alembertov kriterijum u slučaju $d = 1$ ne daju informaciju o konvergenciji ili divergenciji posmatranog reda. U stvari, tada red može biti konvergentan ili divergentan. Na primer, za redove

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

imamo da je oba slučaja

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1,$$

ali znamo da je prvi red divergentan, a drugi konvergentan.

Može se pokazati da je Cauchyev kriterijum nešto opštiji od D'Alembertovog kriterijuma. Naime, može se pokazati da iz jednakosti $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = d$

sleduje $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = d$, dok obrnuto ne mora da važi. Napomenimo, takođe, da se može izvesti opštiji Cauchyev kriterijum kod koga se ispituje veličina $d = \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

U daljem tekstu, bez dokaza, navodimo neke strožije kriterijume za konvergenciju redova sa pozitivnim članovima.

Teorema 1.3.5. *Da bi red sa pozitivnim članovima* (1.3.1) *bio konvergentan, potrebno je i dovoljno da postoje pozitivan niz* $\{\gamma_n\}$ *i konstanta* q *tako da je*

$$\gamma_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \gamma_{n+1} \geq q > 0. \tag{1.3.5}$$

Ovaj kriterijum je poznat kao *Kummerov*[48] *kriterijum.* Primetimo da u slučaju $\gamma_n = 1$, ovaj kriterijum daje D'Alembertov kriterijum. Ako stavimo $\gamma_n = n$, (1.3.5) se svodi na

$$n\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) \geq q > 0,$$

tj.

$$n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) \geq 1 + q > 1.$$

Tako dobijamo *Raabeov*[49] *kriterijum.*

Teorema 1.3.6. *Red sa pozitivnim članovima* (1.3.1) *je konvergentan ako postoje pozitivna konstanta* $r > 1$ *i prirodan broj* n_0 *tako da za* $n > n_0$ *važi*

$$n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) \geq r > 1.$$

U slučaju kada je dovoljno veliko n

$$n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) \leq 1$$

red je divergentan.

Na kraju ovog odeljka dajemo jedan jednostavan kriterijum, poznat kao *Cauchyev integralni* kriterijum, koji se dobija poređenjem reda i integrala. Posmatraćemo red čiji je opšti član dat kao funkcija od n, tj. $u_n = f(n)$.

---

48) Ernst Eduard Kummer (1810–1893), nemački matematičar.

49) Joseph Ludwig Raabe (1801–1859), švajcarski matematičar i fizičar.

Teorema 1.3.7. *Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana za svako $x \geq 1$ i neka je neprekidna, pozitivna i nerastuća na $[1, +\infty)$. Tada su red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \tag{1.3.6}$$

i nesvojstveni integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \tag{1.3.7}$$

ekvikonvergentni.

Dakle, red (1.3.6) konvergira ako i samo ako konvergira integral (1.3.7). U formulaciji teoreme 1.3.7, umesto integrala (1.3.7), može se uzeti integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx,$$

kada funkcija $x \mapsto f(x)$ ima navedeno svojstvo na $[a, +\infty)$.

Dokaz teoreme 1.3.7. Neka je $k \leq x \leq k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$. Na osnovu monotonosti funkcije $x \mapsto f(x)$ na $[1, +\infty)$ imamo

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k + 1),$$

odakle se integracijom (od k do $k + 1$) dobijaju nejednakosti

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \geq f(k + 1).$$

Sabiranjem ovih nejednakosti za $k = 1, \ldots, n$ nalazimo

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k + 1),$$

tj.

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq S_n, \tag{1.3.8}$$

gde je S_n parcijalna suma reda (1.3.6),

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Ako integral (1.3.7) konvergira, tada je za svako $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Ova nejednakost i prva nejednakost u (1.3.8) daju

$$S_{n+1} \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx,$$

što znači da je niz parcijalnih suma reda (1.3.6) ograničen odozgo. Dakle, red (1.3.6) je konvergentan.

Ako red (1.3.6) konvergira i ako je njegova suma S, tada je $S_n \le S$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu druge nejednakosti iz (1.3.8), zaključujemo tada da i nesvojstveni integral (1.3.7) konvergira.

Dakle, dokazali smo da red (1.3.6) konvergira ako i samo ako konvergira odgovarajući integral (1.3.7). $\square$

Primer 1.3.3. Za red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{1.3.9}$$

sa opštim članom $u_n = 1/n^p$, odgovarajuća funkcija je definisana sa

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \qquad (x \ge 1).$$

U primeru 4.7.1, glava V, analizirali smo nesvojstveni integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, gde je p realan parametar, i pokazali da integral postoji za $p > 1$, a da za $p \le 1$ dati integral divergira.

Dakle, red (1.3.9) konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \le 1$. Napomenimo da smo konvergenciju ovog reda pokazali, takođe, u primeru 1.2.1, kada smo imali $p = 1 + \alpha$ i $\alpha > 0$. $\triangle$

Primer 1.3.4. U slučaju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} \tag{1.3.10}$$

možemo razmatrati funkciju definisanu sa $f(x) = 1/(x\log x)$ na $[2,+\infty)$ i integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt,$$

koji je divergentan. Prema tome, red (1.3.10) divergira. △

1.4. Redovi sa članovima koji menjaju znak i alternativni redovi

U odeljcima 1.2 i 1.3 razmatrali smo redove sa nenegativnim (ili pozitivnim) članovima. Naš zadatak je sada proučavanje numeričkih redova sa članovima koji menjaju znak. Neka je takav red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n. \tag{1.4.1}$$

Pored ovog reda možemo razmatrati i red sa nenegativnim članovima $|u_n|$, tj.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|. \tag{1.4.2}$$

Sa S_n i A_n označimo njihove parcijalne sume, tj.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \text{i} \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|,$$

i primetimo da je

$$|S_n| = |u_1 + u_2 + \cdots + u_n| \le |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| = A_n.$$

Ovo znači da je red (1.4.1) uvek konvergentan kada konvergira red (1.4.2). Naravno, obrnuto ne važi, tj. kada je red (1.4.1) konvergentan, red (1.4.2) može biti konvergentan ili divergentan. Napomenimo da na ispitivanje konvergencije reda (1.4.2) možemo primenjivati kriterijume razmatrane u prethodnim odeljcima.

Definicija 1.4.1. Za red (1.4.1) kažemo da je *apsolutno konvergentan* ako je red (1.4.2) konvergentan.

Definicija 1.4.2. Za konvergenan red (1.4.1) kažemo da je *semikonvergentan* (*uslovno konvergentan*) ako je red (1.4.2) divergentan.

Napomenimo da na ispitivanje konvergencije reda (1.4.2) možemo primenjivati kriterijume razmatrane u prethodnim odeljcima (na primer, D'Alambertov kriterijum, Cauchyev kriterijum, itd.). Tada, u slučaju dokazane konvergencije reda (1.4.2), možemo zaključiti da red (1.4.1) konvergira i to apsolutno. Međutim, ako dokažemo da red (1.4.2) divergira, tada možemo zaključiti samo da red (1.4.1) ne konvergira apsolutno.

Primer 1.4.1. Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ je apsolutno konvergentan jer je red njegovih apsolutnih članova konvergentan (geometrijski red sa količnikom 1/2). Dakle, ovde imamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots = \frac{1}{3}$$

i

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1. \quad \triangle$$

Napomena 1.4.1. U narednom tekstu dokazaćemo da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergentan. Međutim, ovaj red nije apsolutno konvergentan jer je odgovarajući red njegovih apsolutnih članova divergentan (harmonijski red).

Definicija 1.4.3. Za realni numerički red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ kažemo da je *alternativan* ako je

$$u_n u_{n+1} < 0 \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Drugim rečima, članovi alternativnog reda naizmenično su pozitivni i negativni (ili obrnuto). Ne umanjujući opštost, možemo posmatrati samo slučaj kada je prvi član pozitivan, tj. $u_1 > 0$. Tada se alternativni red može predstaviti u obliku

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n, \qquad a_n > 0 \;\; (n \in \mathbb{N}). \tag{1.4.3}$$

Ovde smo uzeli da je $u_n = (-1)^{n-1} a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Za konvergenciju alternativnog reda (1.4.3) važi sledeći kriterijum, poznat kao *Leibnitzov kriterijum*:

Teorema 1.4.1. *Ako apsolutne vrednosti članova reda* (1.4.3) *monotono opadaju i teže nuli, tj.*

$$a_n > a_{n+1} > 0 \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{1.4.4}$$

i

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \tag{1.4.5}$$

alternativni red je konvergentan. U tom slučaju ostatak reda R_n je po apsolutnoj vrednosti manji od prvog zanemarenog člana i ima isti znak kao i taj član, tj.

$$R_n = S - S_n = \lambda(-1)^n a_{n+1} \qquad (0 < \lambda < 1),$$

gde su S i S_n suma reda i n-ta parcijalna suma, respektivno.

Dokaz. Za alternativni red (1.4.3) posmatrajmo, najpre, parcijalne sume parnog indeksa, tj.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k,$$

koje se mogu predstaviti u obliku

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Na osnovu uslova (1.4.4), zaključujemo da je $\{S_{2n}\}_{n=1}^{+\infty}$ pozitivan i monotono rastući niz. Kako je

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

vidimo da je ovaj niz i ograničen. Dakle, zaključujemo da je niz parcijalnih suma parnog indeksa konvergentan. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$.

S druge strane, imamo da je $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Kako je zbog uslova (1.4.5), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 0$, zaključujemo da i niz parcijalnih suma neparnog indeksa konvergira ka istoj vrednosti S, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = S.$$

Dakle, niz parcijalnih suma $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan, ili, što je ekvivalentno, alternativni red (1.4.3) je konvergentan.

Primetimo da za red (1.4.3) važe nejednakosti

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1} \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{1.4.6}$$

Prva nejednakost je očigledna, s obzirom da S predstavlja graničnu vrednost monotono rastućeg niza $\{S_{2n}\}_{n=1}^{+\infty}$. Da bismo dokazali drugu nejednakost u (1.4.6) dovoljno je primetiti da je

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) < S_{2n-1},$$

tj. da je niz $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{+\infty}$ monotono opadajući, čija je granica opet S.

Na osnovu nejednakosti (1.4.6) dobijamo

$$\begin{aligned} 0 \leq S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n}, \\ 0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}, \end{aligned}$$

tj. $R_n = S - S_n = \lambda(-1)^n a_{n+1}$, gde je $0 < \lambda < 1$. $\square$

Primer 1.4.2. Neka je dat red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,. \tag{1.4.7}$$

Prema Leibnitzovom kriterijumu red je konvergentan, a za ostatak R_n važi ocena $|R_n| < 1/(n+1)$. Kako su $S_1 = 1$ i $S_2 = 1/2$, uzimajući $n = 1$ u (1.4.6) dobijamo ocenu za sumu reda (1.4.7),

$$\frac{1}{2} < S < 1. \tag{1.4.8}$$

Bolja ocena može se dobiti uzimajući $n > 1$. Na primer, za $n = 2$ imamo $7/12 < S < 5/6$. $\triangle$

Sve osobine konačnih suma ne mogu se preneti na redove. Da bismo ovo pojasnili posmatrajmo opet red (1.4.7), tj.

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots, \tag{1.4.9}$$

i red

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \cdots .$$

Sabiranjem članova ova dva reda dobijamo red

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots, \tag{1.4.10}$$

koji se sastoji od istih članova kao i red (1.4.9), ali je njihov poredak nešto izmenjen. Naime, ovaj red se može dobiti iz reda (1.4.9) ako se redom uzimaju po dva pozitivna i jedan negativni član. Pogrešno bi bilo zaključiti da je $(3/2)S = S$, tj. $S = 0$, jer je to u suprotnosti sa našom ranijom ocenom (1.4.8). Korišćenjem teorije funkcionalnih redova pokazaćemo kasnije da je $S = \log 2$.

Napomena 1.4.2. Ako od članova reda (1.4.9) formiramo novi red na taj način što grupu od p sukcesivnih pozitivnih članova smenjuje grupa od q sukcesivnih negativnih članova, novi red je, takođe, konvergentan i njegova suma je

$$\log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{p}{q}\,.$$

Red (1.4.10) je specijalan slučaj kada je $p = 2$, $q = 1$.

Na kraju ovog odeljka napomenimo da zbir jednog pozitivnog konvergentnog reda ostaje nepromenjen ako se poredak njegovih članova izmeni proizvoljno. Ovo dalje znači da se i zbir apsolutno konvergentnog reda ne menja izmenom poretka njegovih članova. Međutim, kod semikonvergentnih redova zbir zavisi od poretka njegovih članova. Štaviše, važi sledeća *Riemannova teorema*, koju navodimo bez dokaza.

Teorema 1.4.2. *Ako je red* (1.4.1) *semikonvergentan, tada se premeštanjem njegovih članova može dobiti red čija suma ima proizvoljnu vrednost.*

Napomenimo na kraju da ako kod jednog semikonvergentnog reda izdvojimo samo pozitivne i samo negativne članove i od njih obrazujemo dva zasebna reda, tada su ti redovi divergentni.

2. FUNKCIONALNI REDOVI

2.1. Konvergencija funkcionalnih redova

Kao što je rečeno u odeljku 1.1, pod *funkcionalnim redom* podrazumevamo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \tag{2.1.1}$$

gde je opšti član reda definisan pomoću realne funkcije realne promenljive $u_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ili, opštije, pomoću kompleksne funkcije kompleksne promenljive $u_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dakle, pretpostavimo da je opšti član reda dat pomoću funkcije $u_n\colon X \to X$, gde je $X = \mathbb{R}$ ili $X = \mathbb{C}$. Tipični primeri funkcionalnih redova su

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-\alpha)^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{2.1.2}$$

Obično se ovim redovima pridodaje konstantni član a_0, tako da indeks sumiranja startuje sa $n = 0$. Drugi red u (2.1.2) se smenom $t = x - \alpha$ svodi na red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$.

Definicija 2.1.1. Za red (2.1.1) kažemo da je konvergentan u tački $x = x_0 \in X$, ako konvergira numerički red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$.

Skup tačaka $D \subset X$ u kojima red (2.1.1) konvergira naziva se *oblast konvergencije* funkcionalnog reda (2.1.1).

Primer 2.1.1. Funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$ razmatrali smo u primeru 1.1.4 i tom prilikom smo dokazali da je on konvergentan za $-1 < x < 1$. Dakle, ako se ovaj red posmatra na $\mathbb{R}$, oblast konvergencije reda je interval $(-1, 1)$. Jednostavno se može dokazati da je za odgovarajući kompleksni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z^n$ oblast konvergencije unutrašnjost jediničnog kruga, tj. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. $\triangle$

Definicija 2.1.2. Za red (2.1.1) kažemo da je *apsolutno konvergentan* na D ako za svako $x \in D$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$ konvergira.

Primer 2.1.2. Razmotrimo apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \tag{2.1.3}$$

gde je z kompleksni broj. Dakle, posmatraćemo red sa opštim članom $a_n = |z|^n/n!$ i primenićemo, na primer, D'Alembertov kriterijum. Tada, za svaku $z \in \mathbb{C}$, imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0,$$

što znači da je red (2.1.3) apsolutno konvergentan za svako $z \in \mathbb{C}$, tj. u celoj kompleksnoj ravni. $\triangle$

Kao i kod numeričkih redova definišimo parcijalnu sumu reda $S_n(x)$ i ostatak reda $R_n(x)$, pomoću

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad \text{i} \qquad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x),$$

respektivno.

Definicija 2.1.3. Funkcionalni red (2.1.1) je *konvergentan* na D ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 koji zavisi od ε i x, takav da je $|R_n(x)| < \varepsilon$ za svako $n > n_0 = n_0(\varepsilon, x)$.

Granica niza parcijalnih suma za $x \in D$ naziva se *suma funkcionalnog reda* i označava sa $S_n(x)$. Dakle, suma

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) \qquad (x \in D)$$

je funkcija definisana na skupu D.

Primer 2.1.3. Suma geometrijskog reda iz primera 2.1.1 je

$$S(x) = \frac{x}{1-x} \qquad (-1 < x < 1). \quad \triangle$$

Kao što ćemo kasnije videti, od interesa su redovi kod kojih broj n_0 iz definicije 2.1.3 ne zavisi od x, već samo od ε.

Primer 2.1.4. Razmotrimo funkcionalni red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots , \tag{2.1.4}$$

gde je x realan broj. Očigledno, za $x = 0$ svi članovi reda su jednaki nuli, pa je i njegova suma jednaka nuli. Dakle, za $x = 0$ red konvergira i $S(0) = 0$.

S druge strane, za svako $x \neq 0$, (2.1.4) predstavlja beskonačnu geometrijsku progresiju sa količnikom

$$q = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

pa se suma tog konvergentnog reda jednostavno nalazi

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Prema tome, red (2.1.4) je konvergentan za svako realno x i njegova suma je

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x = 0, \\ 1 + x^2, & \text{za } x \neq 0. \end{cases}$$

Primetimo da je suma reda prekidna funkcija u tački $x = 0$, $\triangle$

Na osnovu prethodnog primera može se zapaziti veoma važna činjenica da *neprekidnost članova konvergentnog funkcionalnog reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *ne povlači, u opštem slučaju, neprekidnost njegove sume* $S(x)$, tj. $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) \neq S(x_0)$, ili što je isto

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x). \tag{2.1.5}$$

Dakle, "prolaz limesa kroz sumu" nije moguć u opštem slučaju. U daljem tekstu nas će interesovati dovoljni uslovi koji obezbeđuju neprekidnost sume konvergentnog reda neprekidnih funkcija, tj. koji garantuju jednakost u (2.1.5).

2.2. Uniformna konvergencija funkcionalnih redova

Definicija 2.2.1. Funkcionalni red (2.1.1) *uniformno konvergira* na D ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$, nezavisan od x, takav da je $|R_n(x)| < \varepsilon$ za svako $n > n_0(\varepsilon)$ i svako $x \in D$.

Za uniformnu konvergenciju funkcionalnog reda na segmentu $[a, b]$ može se dati sledeća geometrijska interpretacija.

Pretpostavimo da je red (2.1.1) uniformno konvergentan na $[a, b]$. Tada se uslov

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

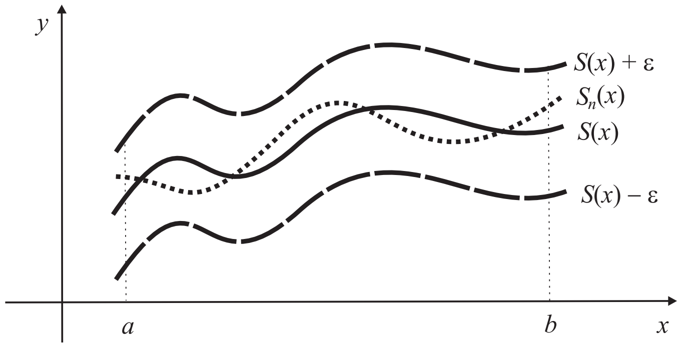
može izraziti u obliku

$$S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon,$$

što geometrijski znači da se za svako $n > n_0$ (zavisno samo od ε) parcijalne sume $S_n(x)$, tj. svi grafici krivih $y = S_n(x)$ nalaze u traci širine 2ε koja je opisana oko krive $y = S(x)$ za svako $x \in [a, b]$ (videti sliku 2.2.1).

Primer 2.2.1. Funkcionalni red

$$1 + (x - 1) + x(x - 1) + x^2(x - 1) + \cdots \qquad (0 \leq x \leq 1)$$



Sl. 2.2.1

konvergira na segmentu $[0,1]$. Zaista, na osnovu parcijalne sume

$$S_n(x) = 1 + (x-1) + (x^2 - x) + \cdots + (x^{n-1} - x^{n-2}) = x^{n-1}$$

zaključujemo da je

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1), \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$

Za ostatak $R_n(x)$ imamo

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \begin{cases} -x^{n-1} & (0 \le x < 1), \\ 0 & (x = 1). \end{cases}$$

Da bi uslov $|R_n(x)| = x^{n-1} < \varepsilon$ $(0 \le x < 1)$ bio ispunjen neophodno je da n zadovoljava nejednakost $n > 1 + \log\varepsilon/\log x$, što znači da se može uzeti

$$n_0(\varepsilon, x) = 1 + \left[\frac{\log\varepsilon}{\log x}\right].$$

Kako $\log x \to 0$, kada $x \to 1$, jasno je da nije moguće izabrati broj n_0 koji ne zavisi od x. Ovo znači da red nije uniformno konvergentan kada $x \in [0,1)$.

Međutim, ako posmatramo red na segmentu $[0,a]$, gde je $0 < a < 1$, tada se za $n_0(\varepsilon)$ može uzeti $n_0(\varepsilon) = 1 + [\log\varepsilon/\log a]$, što znači da je red uniformno konvergentan na segmentu $[0,a]$ $(0 < a < 1)$. $\triangle$

U prethodnom primeru može se primetiti da je suma reda prekidna funkcija u tački $x = 1$, iako su svi članovi reda neprekidne funkcije na $[0,1]$. Ovu činjenicu kod redova, koji ne konvergiraju uniformno na D, uočili smo još u prethodnom odeljku. Može se, međutim, kod takvih redova desiti slučaj da njihova suma bude neprekidna funkcija, što pokazuje sledeći primer.

Primer 2.2.2. Razmotrimo funkcionalni red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big[nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}\big]$$

na $[0,1]$. Njegova parcijalna suma je $S_n(x) = nxe^{-nx}$. Očigledno, $S_n(0) = 0$ i $S(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(0) = 0$. Za $0 < x \le 1$ imamo $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = 0$. Dakle, red je konvergentan za svako $x \in [0,1]$ i njegova suma $S(x) = 0$ je neprekidna funkcija na segmentu $[0,1]$. Može se, međutim, pokazati da red ne konvergira uniformno na $[0,1]$. Kako je $R_n(x) = -nxe^{-nx}$, uslov $|R_n(x)| = nxe^{-nx} < \varepsilon$ se, zaista, ne može ostvariti na $[0,1]$ za dovoljno veliko n. Na primer, za $x = 1/n$ ($\in [0,1]$) imamo $|R_n(x)| = 1/e$. $\triangle$

Sledeći jednostavan kriterijum, poznat kao Weierstrassov, daje dovoljne uslove za uniformnu konvergenciju funkcionalnog reda.

Teorema 2.2.1. *Neka je dat funkcionalni red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *čiji članovi za svako* $x \in D$ *zadovoljavaju nejednakost*

$$|u_n(x)| \le a_n \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{2.2.1}$$

Ako je numerički red sa nenegativnim članovima $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan, tada je funkcionalni red uniformno konvergentan na* D.

Dokaz. Primetimo najpre da je, zbog nejednakosti (2.2.1) i konvergencije numeričkog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, funkcionalni red apsolutno konvergentan na D. Samim tim on je konvergentan i u običnom smislu[50] na D.

Na osnovu nejednakosti (2.2.1), za ostatak $R_n(x)$ zaključujemo da važi

$$|R_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k. \tag{2.2.2}$$

Kako je numerički red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0(\varepsilon)$ takav da je $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon$, kad god je $n > n_0(\varepsilon)$. Imajući u

[50] U smislu definicije 2.1.1.

vidu ovu činjenicu, na osnovu (2.2.2) zaključujemo da je takođe i $|R_n(x)| < \varepsilon$ za svako $n > n_0(\varepsilon)$ ($n_0(\varepsilon)$ ne zavisi od x!), što znači da je dati funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ uniformno konvergentan na D. $\square$

Primer 2.2.3. Funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ je uniformno konvergentan na $[-1, 1]$ jer je

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big),$$

a majorantni numerički red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ je konvergentan.

Posmatrano na $\mathbb{C}$, dati funkcionalni red je uniformno konvergentan u jediničnom krugu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. $\triangle$

Primer 2.2.4. Funkcionalni redovi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^p} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$$

su uniformno konvergentni za svako $x \in \mathbb{R}$ ako je $p > 1$.

Opštije, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ su uniformno konvergentni za svako $x \in \mathbb{R}$ ako je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergentan. $\triangle$

Primer 2.2.5. Za funkcionalni red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

majorantni numerički red dobijamo nalaženjem ekstremuma funkcije $x \mapsto u_n(x) = nx/(1 + n^5 x^2)$.

Iz uslova $u_n'(x) = n(1 - n^5 x^2)/(1 + n^5 x^2)^2 = 0$ nalazimo tačke ekstremuma $x = \pm n^{-5/2}$, tako da je

$$|u_n(x)| \le \frac{n \cdot n^{-5/2}}{1 + n^5 \cdot n^{-5}} = \frac{1}{2n^{3/2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dakle, dati numerički red uniformno konvergira na $\mathbb{R}$. $\triangle$

Primer 2.2.6. Na osnovu Leibnitzovog kriterijuma red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2} \tag{2.2.3}$$

konvergira za svako $x \in \mathbb{R}$. Primena Weierstrassovog kriterijuma na ispitivanje uniformne konvergencije ovde nije moguća jer je majorantni numerički red divergentan. Zaista, nejednakost

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2} \right| \le \frac{1}{n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

dovodi do harmonijskog reda koji je divergentan.

Ipak, red (2.2.3) je uniformno konvergentan na $\mathbb{R}$, što znači da Weierstrassov kriterijum daje samo dovoljane, ali ne i potrebane uslove za uniformnu konvergenciju. Da bismo dokazali uniformnu konvergenciju reda (2.2.3), primetimo da za ostatak reda $R_n(x)$, na osnovu Leibnitzovog kriterijuma (videti teoremu 1.4.1), važi nejednakost

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n + 1 + x^2} \le \frac{1}{n + 1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

odakle zaključujemo da se za svako $\varepsilon > 0$, može ostvariti $|R_n(x)| < \varepsilon$ uzimajući $n > (1/\varepsilon) - 1$ (n_0 zavisi samo od ε). $\triangle$

2.3. Osobine uniformno konvergentnih redova na $[a, b]$

U prethodnim odeljcima videli smo da suma konvergentnog reda, čiji su svi članovi neprekidne funkcije, može, ali ne mora, biti neprekidna funkcija. Jedna od osnovnih osobina uniformno konvergentnih redova odnosi se na neprekidnost sume reda, tj. na važenje jednakosti u (2.1.5). S obzirom na izvesne restrikcije koje se moraju učiniti u odnosu na oblast D, u ovom odeljku se ograničavamo na slučaj kada je D segment $[a, b]$. Dakle, razmatraćemo funkcionalne redove oblika

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \tag{2.3.1}$$

čiji su članovi neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$, u oznaci $u_n \in C[a, b]$.

Teorema 2.3.1. *Ako* $u_n \in C[a, b]$ $(n = 1, 2, \dots)$ *i ako red* (2.3.1) *uniformno konvergira na* $[a, b]$, *tada je njegova suma* $x \mapsto S(x)$ *neprekidna funkcija na* $[a, b]$.

Dokaz. S obzirom na pretpostavku da je red (2.3.1) uniformno konvergentan na $[a, b]$, to za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$, takav da je

$$|R_n(x)| < \varepsilon \qquad \big(x \in [a, b]\big) \tag{2.3.2}$$

za svako $n > n_0$.

S druge strane, zbog neprekidnosti funkcija $x \mapsto u_k(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$, neprekidne su i parcijalne sume $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ na $[a, b]$. Štaviše, one su i ravnomerno (uniformno) neprekidne na tom segmentu (videti teoremu 2.7.1, glava III). Zato za svako $\varepsilon > 0$ postoji pozitivan broj $\delta = \delta(\varepsilon)$, takav da za svako $x, y \in [a, b]$ važi

$$|S_n(x) - S_n(y)| < \varepsilon,$$

kad god je $|x - y| < \delta$.

Neka je $S(x)$ suma reda (2.3.1). Tada, za $n > n_0$ i $|x - y| < \delta$, imamo

$$\begin{aligned} |S(x) - S(y)| &= |(S_n(x) + R_n(x)) - (S_n(y) + R_n(y))| \\ &\le |S_n(x) - S_n(y)| + |R_n(x)| + |R_n(y)| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

što znači da je $x \mapsto S(x)$ (ravnomerno) neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. □

Teorema 2.3.2. *Ako $u_n \in C[a, b]$ $(n = 1, 2, \dots)$ i ako red (2.3.1) uniformno konvergira na $[a, b]$, tada se red može integraliti član po član u granicama od α do β, gde je $a \le \alpha < \beta \le b$, tj.*

$$\int_\alpha^\beta \Bigl(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\Bigr) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \Bigl(\int_\alpha^\beta u_n(x)\, dx\Bigr). \tag{2.3.3}$$

Dokaz. Kako su $x \mapsto S_n(x)$ i $x \mapsto S(x)$ neprekidne funkcije na $[a, b]$ (videti prethodnu teoremu), to je i njihova razlika neprekidna funkcija pa postoji integral

$$\int_\alpha^\beta (S(x) - S_n(x)) dx = \int_\alpha^\beta R_n(x)\, dx,$$

gde je $a \le \alpha < \beta \le b$.

S druge strane, red (2.3.1) je uniformno konvergentan pa važi (2.3.2). Dakle, za $n > n_0(\varepsilon)$, imamo

$$\Bigl|\int_\alpha^\beta (S(x) - S_n(x)) dx\Bigr| \le \int_\alpha^\beta |R_n(x)|\, dx < \varepsilon(\beta - \alpha) \le \varepsilon(b - a), \tag{2.3.4}$$

tj.

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} S(x)\, dx - \int_{\alpha}^{\beta} S_n(x)\, dx \right| < \varepsilon(b-a),$$

što je ekvivalentno sa

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} S_n(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} S(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \Bigl(\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\Bigr) dx,$$

tj. (2.3.3). $\square$

Primer 2.3.1. S obzirom da red iz primera 2.2.2 nije uniformno konvergentan na $[0,1]$, on se ne može integraliti član po član.

Kako su, u ovom primeru, $S_n(x) = nxe^{-nx}$ i $S(x) = 0$, za $\alpha = 0$ i $\beta = 1$ imamo

$$\int_0^1 S_n(x)\, dx = \int_0^1 nxe^{-nx}\, dx = 1 - (n+1)e^{-n} \quad \text{i} \quad \int_0^1 S(x)\, dx = 0,$$

odakle zaključujemo da je, zaista,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \Bigl[1 - (n+1)e^{-n}\Bigr] = 1 \neq \int_0^1 S(x)\, dx = 0. \quad \triangle$$

Teorema 2.3.3. *Ako* $u_n \in C[a,b]$ $(n = 1, 2, \dots)$ *i ako red* (2.3.1) *uniformno konvergira na* $[a,b]$, *tada je, za svako* $c \in [a,b]$, *red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Bigl(\int_c^x u_n(t)\, dt\Bigr) \qquad (a \le x \le b) \tag{2.3.5}$$

takođe uniformno konvergentan na $[a,b]$ *i njegova suma je jednaka* $\int_c^x S(t)\, dt$, *gde je* $S(x)$ *suma reda* (2.3.1).

Dokaz. Na osnovu teoreme 2.3.1, suma reda (2.3.1) je neprekidna funkcija na $[a,b]$ i zato je integrabilna na $[c,x]$ $(c \le x)$ (ili $[x,c]$ ako je $x \le c$). Sa $S_n(x)$, $S(x)$ i $R_n(x)$ označimo parcijalnu sumu, sumu i ostatak reda (2.3.1), respektivno. Neka je $\sigma_n(x)$ parcijalna suma reda (2.3.5) i

$$\sigma(x) = \int_c^x S(t)\, dt.$$

Tada za svako $x \in [a,b]$ imamo

$$\begin{aligned}\Bigl|\sigma(x)-\sigma_n(x)\Bigr| &= \Bigl|\int_c^x S(t)\,dt - \int_c^x \Bigl(\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\Bigr)dt\Bigr| \\ &= \Bigl|\int_c^x S(t)\,dt - \int_c^x S_n(t)\,dt\Bigr| \\ &= \Bigl|\int_c^x (S(t)-S_n(t))\,dt\Bigr| \\ &\le \Bigl|\int_c^x |R_n(t)|\,dt\Bigr| .\end{aligned}$$

Kao i u dokazu teoreme 2.3.2, korišćenjem (2.3.2) i (2.3.4), dokazujemo da je za $n > n_0(\varepsilon)$ (broj $n_0(\varepsilon)$ egzistira i ne zavisi od x!)

$$|\sigma(x)-\sigma_n(x)| = \Bigl|\sigma(x) - \sum_{k=1}^{n}\int_c^x u_k(t)\,dt\Bigr| < (b-a)\varepsilon, \tag{2.3.6}$$

što je ekvivalentno sa

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_c^x u_k(t)\,dt = \sigma(x) = \int_c^x S(t)\,dt.$$

Red (2.3.5) konvergira uniformno ka $\sigma(x) = \int_c^x S(t)\,dt$. Zaista, za njegov ostatak $r_n(x)$ na $[a,b]$, na osnovu (2.3.6), važi nejednakost $|r_n(x)| < \varepsilon$ za svako $n > n_1 = n_1(\varepsilon) = n_0(\varepsilon/(b-a))$. $\square$

Sledeća teorema se odnosi na diferenciranje član po član funkcionalnih redova, čiji su članovi neprekidno-diferencijabilne funkcije na $[a,b]$, u oznaci $u_n \in C^1[a,b]$.

Teorema 2.3.4. *Neka $u_n \in C^1[a,b]$ $(n = 1,2,\dots)$ i neka je red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) \tag{2.3.7}$$

uniformno konvergentan na $[a,b]$. Ako red (2.3.1) konvergira za neko $c \in [a,b]$, tada on uniformno konvergira na segmentu $[a,b]$ i može se diferencirati član po član, tj.

$$\Bigl(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\Bigr)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x). \tag{2.3.8}$$

Dokaz. Neka $\sigma(x)$ označava sumu uniformno konvergentnog reda (2.3.7). Integracijom ovog reda član po član dobijamo

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} [u_n(x) - u_n(c)] \quad (x \in [a,b]). \tag{2.3.9}$$

Kako je red na desnoj strani (2.3.9) uniformno konvergentan (videti teoremu 2.3.3) i kako, po pretpostavci teoreme, numerički red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(c)$ konvergira, zaključujemo da da je zbir ova dva reda, tj. red (2.3.1), uniformno konvergentan. Stoga, (2.3.9) postaje

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(c),$$

tj.

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = S(x) - S(c),$$

gde je $S(x)$ suma reda (2.3.1). Iz poslednje jednakosti sleduje $S'(x) = \sigma(x)$, tj. (2.3.8). $\square$

Primer 2.3.2. Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ može se diferencirati član po član za svako $x \in \mathbb{R}$ jer je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ uniformno konvergentan na svakom segmentu realne prave.

Međutim, uniformno konvergentni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ ne može se diferencirati član po član za svako $x \in \mathbb{R}$ jer red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ nije uniformno konvergentan (na primer, za $x = 0$ prelazi u harmonijski red). $\triangle$

2.4. Stepeni redovi

Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dati niz kompleksnih brojeva i a dati kompleksan broj. Posmatraćemo funkcionalne redove kod kojih je opšti član $u_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dat pomoću $u_n(z) = a_n(z-a)^n$.

Definicija 2.4.1. Funkcionalni red oblika

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n, \tag{2.4.1}$$

gde je z kompleksna promenljiva, naziva se *stepeni* ili *potencijalni* red.

Ne umanjujući opštost dovoljno je posmatrati slučaj $a = 0$, tj. stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ jer se smenom $z - a = w$ red (2.4.1) svodi na ovaj oblik.

U našem izlaganju često ćemo tretirati realne stepene redove, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, kod kojih je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva, a $z = x$ realna promenljiva,

Teorema 2.4.1. 1° *Ako je red* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *konvergentan za* $z = c$ $(c \neq 0)$, *tada on apsolutno konvergira za svako* z *za koje je* $|z| < |c|$.

2° *Ako je red divergentan za* $z = d$, *tada je on divergentan i za svako* z *za koje je* $|z| > |d|$.

Dokaz. 1° Pretpostavimo da je red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n c^n$ konvergentan. Kako je tada $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n c^n = 0$ zaključujemo da postoji konstanta M takva da je $|a_n c^n| \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$. Tada za $c \neq 0$ imamo

$$|a_n z^n| = \left| a_n c^n \frac{z^n}{c^n} \right| = |a_n c^n| \cdot \left| \frac{z}{c} \right|^n \leq M q^n,$$

gde je $q = |z/c|$. Ako je $|z| < |c|$, zbog $0 \leq q < 1$i, imamo konvergenciju geometrijskog reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M q^n$, što povlači apsolutnu konvergenciju stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

2° Drugi deo teoreme koji se odnosi na divergenciju stepenog reda može dokazati pretpostavljajući suprotno, tj. da je red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ konvergentan za neko z za koje je $|z| > |d|$. U tom sučaju, na osnovu 1°, on bi morao biti konvergentan i u tački d, što je suprotnosti sa pretpostavkom da red divergira za $z = d$. Dakle, red je divergentan za svako z za koje je $|z| > |d|$. □

Prethodni rezultat je poznat kao *Abelov*[51] *stav.* Jedna posledica ovog stava je sledeće tvrđenje:

---

[51] Niels Henrik Abel (1802–1829), norveški matematičar.

Teorema 2.4.2. *Za svaki stepeni red*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{2.4.2}$$

postoji nenegativan broj R, $0 \le R \le +\infty$, sa osobinama:

1° *ako je $|z| < R$, red* (2.4.2) *je konvergentan;*

2° *ako je $|z| > R$, red* (2.4.2) *je divergentan.*

Definicija 2.4.2. Nenegativni broj R iz prethodne teoreme naziva se *poluprečnik konvergencije* reda (2.4.2).

Za $R > 0$ skup $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ naziva se *krug konvergencije* tog reda, dok se interval $(-R, R)$, u slučaju realnog reda, naziva *interval konvergencije* reda.

Za određivanje poluprečnika konvergencije stepenih redova mogu se koristiti D'Alembertov i Cauchyev kriterijum.

Dakle, za stepeni red (2.4.2) formirajmo graničnu vrednost količnika,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| . \tag{2.4.3}$$

Na osnovu D'Alembertovog kriterijuma, red (2.4.2) je konverentan ako je ova vrednost manja od jedinice (videti posledicu 1.3.2), tj. ako je

$$|z| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|},$$

a divergentan ako je vrednost (2.4.3) veća od jedinice. Prema tome, ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n|$, tada je poluprečnik konvergencije reda (2.4.2) dat sa

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|}, \tag{2.4.4}$$

pri čemu, ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = +\infty$, imamo da je $R = 0$, a ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0$, imamo da je $R = +\infty$.

Slično, korišćenjem Cauchyevog kriterijuma (videti posledicu 1.3.4) nalazimo poluprečnik konvergencije reda (2.4.2) u obliku

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.4.5}$$

sa istom konvencijom u slučajevima kada je granična vrednost na desnoj strani u (2.4.5) jednaka $+\infty$ ili 0. U slučajevima kada ova granična vrednost ne postoji, poluprečnik konvergencije reda (2.4.2) određuje se po tzv. *Cauchy-Hadamardovoj*[52] *formuli*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{2.4.6}$$

Primer 2.4.1. Za stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, na osnovu (2.4.4) nalazimo da je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1/(n+1)!}{1/n!}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}} = +\infty.$$

Ranije smo pokazali apsolutnu konvergenciju ovog reda u celoj kompleksnoj ravni (videti primer 2.1.2). △

Primer 2.4.2. Poluprečnik konvergencije reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n!z^n$ jednak je nuli, što znači da red konvergira samo za $z = 0$. Zaista, primena (2.4.4) daje

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{(n+1)!}{n!}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)} = 0. \quad \triangle$$

Primer 2.4.3. Geometrijski red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ konvergira za $|z| < 1$, a divergira za $|z| \geq 1$, tako da je $R = 1$. Naravno, ovo sleduje, takođe, iz formule (2.4.4) ili formule (2.4.5). △

Primer 2.4.4. Na osnovu (2.4.5) za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$ dobijamo

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/n}} = 1.$$

---

[52] Jacques Salomon Hadamard (1865–1963), francuski matematičar.

Red, dakle, konvergira za $|z| < 1$, a divergira za $|z| > 1$. Primetimo da za $z = 1$ red divergira jer se svodi na harmonijski red, ali za $z = -1$ on konvergira. Posmatrano samo na realnoj osi, oblast konvergencije reda je $[-1, 1)$. $\triangle$

Primer 2.4.5. Za stepeni red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{3}\right)^n z^n$$

nije moguće odrediti poluprečnik konvergencije primenom formula (2.4.4) i (2.4.5), s obzirom da zahtevane granične vrednosti ne postoje. Međutim, Cauchy-Hadamardova formula (2.4.6) daje $R = 3/4$ jer je

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{3}\right) = \frac{4}{3}. \quad \triangle$$

Primer 2.4.6. Direktna primena prethodnih formula za određivanje poluprečnika konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^{2n-1}}{2n-1}$ nije moguća. Međutim, ako primenimo D'Alembertov kriterijum za ispitivanje apsolutne konvergencije datog reda nalazimo

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{z^{2n+1}/(2n+1)}{z^{2n-1}/(2n-1)} \right| = |z|^2 \lim_{n \to +\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = |z|^2,$$

odakle zaključujemo da je red apsolutno konvergentan kada je $|z^2| < 1$, tj. kada je $|z| < 1$, dok apsolutno divergira kada je $|z| > 1$. Dakle, poluprečnik konvergencije je $R = 1$. $\triangle$

Sledeća teorema se odnosi na uniformnu konvergenciju stepenih redova.

Teorema 2.4.3. *Ako je R poluprečnik konvergencije stepenog reda* (2.4.2), *tada taj red konvergira uniformno na svakom krugu $K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$, gde je r fiksirani broj takav da je $0 < r < R$.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 2.4.2, red (2.4.2) konvergira u svakom krugu K_r $(0 < r < R)$. Ako $z \in K_r$, tada je $|a_n z^n| \le |a_n| r^n$. S obzirom na konvergenciju numeričkog reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$, na osnovu Weierstrassovog kriterijuma zaključujemo da je stepeni red (2.4.2) uniformno konvergentan u krugu K_r $(0 < r < R)$. $\square$

Za slučaj na realnoj pravoj možemo zaključiti sledeće: *Realni stepeni red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, sa poluprečnikom konvergencije R, uniformno konvergira na segmentu $[-r, r]$, gde je $0 < r < R$.* Osobine uniformnih redova na segmentu

$[a,b]$, dokazane u prethodnom odeljku, mogu se preneti na realne stepene redove na $[-r,r]$. Na primer, suma reda je neprekidna funkcija na $[-r,r]$, a integracija i diferenciranje član po član je moguće za svako $x \in [-r,r]$. Jednostavno se dokazuje da redovi dobijeni integracijom i diferenciranjem osnovnog stepenog reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ imaju isti poluprečnik konvergencije R. Zaista, kod redova dobijenih na ovaj način,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\, x^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

očuvava se poluprečnik konvergencije, što je posledica činjenice da je

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_{n-1}}{n}\right|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}\,.$$

Primer 2.4.7. Za geometrijski red konvergentan u intervalu $(-1,1)$ važi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots = \frac{1}{1+x}\,, \tag{2.4.7}$$

odakle integracijom dobijamo

$$\int_0^x \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\Bigr) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n x^n\, dx = \int_0^x \frac{1}{1+x}\, dx,$$

tj.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \log(1+x).$$

Primetimo, da je dobijeni red konvergentan i za $x = 1$, tako da je njegova oblast konvergencije $(-1,1]$. Za $x = 1$, dobijamo sumu alternativnog reda iz primera 1.4.2,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2. \qquad \triangle$$

Primer 2.4.8. Ako u (2.4.7), umesto x, stavimo x^2 imamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1+x^2} \qquad (-1 < x <), \tag{2.4.8}$$

odakle integracijom dobijamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \arctan x. \tag{2.4.9}$$

Za redove (2.4.8) i (2.4.9) kažemo da predstavljaju razvoje funkcija $x \mapsto 1/(1+x^2)$ i $x \mapsto \arctan x$, respektivno. Poluprečnik konvergencije ovih redova je $R = 1$.

Odgovarajući alternativni numerički red, koji se dobija iz (2.4.9) za $x = \pm 1$, na osnovu Leibnitzovog kriterijuma, je konvergentan. Zato (2.4.9) važi za $x \in [-1, 1]$. Za $x = 1$ imamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \qquad \triangle$$

Primetimo da je funkcija $x \mapsto 1/(1 + x^2)$, koja se pojavljuje u prethodnom primeru, definisana i beskonačno puta diferencijabilna na celoj realnoj pravoj. Na prvi pogled nije jasno zašto njen razvoj (2.4.8) konvergira samo za $|x| < 1$. Međutim, ovo postaje sasvim jasno ako se ova funkcija i njen razvoj posmatraju u kompleksnoj ravni. Tada se uočava da racionalna funkcija $z \mapsto 1/(1 + z^2)$ ima singularne tačke (singularitete) $z = \pm i$ u kojima funkcija nije definisana, a pri približavanju ovim tačkama vrednost funkcije teži beskonačnosti. Praktično, ove singularne tačke određuju granicu oblasti konvergencije.

2.5. Analitičke funkcije

Definicija 2.5.1. Za funkciju $z \mapsto f(z)$ kaže se da je *analitička* u tački a, ako postoji takvo $R > 0$, da se u krugu $|z - a| < R$ ona može predstaviti stepenim redom

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n \qquad \big(|z - a| < R\big). \tag{2.5.1}$$

Nije teško dokazati da zbir, razlika i proizvod analitičkih funkcija u tački predstavlja opet analitičku funkciju u istoj tački.

Ako je R poluprečnik konvergencije reda (2.5.1), tada za ostatak reda

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k (z-a)^k$$

važe ocene

$$R_n(z) = O\big((z-a)^{n+1}\big) \quad \text{i} \quad R_n(z) = o\big((z-a)^n\big),$$

kada $z \to a$. Korišćenjem ovoga, može se dokazati da je predstavljanje analitičke funkcije u tački u obliku (2.5.1) jedinstveno.

U daljem tekstu razmatraćemo uglavnom stepene redove sa realnim članovima[53)]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n. \tag{2.5.2}$$

Osobine koje budemo pri tome dokazivali mogu se preneti i na stepene redove u kompleksnoj oblasti, ali su nam za to potrebni koncepti integracije i diferenciranja funkcija kompleksne promenljive[54)].

Pretpostavimo da je $R > 0$ poluprečnik konvergencije reda (2.5.2). Tada, uzimajući z kao kompleksnu promenljivu, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ konvergira ako je $|z-a| < R$, a divergira ako je $|z-a| > R$. Na realnoj pravoj, red (2.5.2) konvergira u intervalu $(a-R, a+R)$.

Na osnovu rezultata iz prethodnih odeljaka zaključujemo da važi:

Teorema 2.5.1. *Neka je $R > 0$ poluprečnik konvergencije stepenog reda*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n. \tag{2.5.3}$$

1° *U intervalu $(a-R, a+R)$ funkcija $x \mapsto f(x)$ je proizvoljan broj puta diferencijabilna. Njeni izvodi se dobijaju diferenciranjem reda* (2.5.3)*;*

2° *Za svako $x \in (a-R, a+R)$ imamo*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n (x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

[53)] Ovde je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz realnih brojeva, a realni broj, a z realna promenljiva, označena sa x.

[54)] Ovo se izučava u *Teoriji funkcija kompleksne promenljive.*

Teorema 2.5.2. *Ako je $x \mapsto f(x)$ analitička funkcija u tački $x = a$, tj. ako se u okolini ove tačke ona može predstaviti pomoću reda* (2.5.3), *sa poluprečnikom $R > 0$, tada je*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n = 0, 1, \dots), \tag{2.5.4}$$

i važi jednakost

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Dokaz. Stavljajući $x = a$, iz (2.5.3) dobijamo $f(a) = a_0$. Ako sada diferenciramo obe starne u (2.5.3) i opet stavimo $x = a$ dobijamo $f'(a) = a_1$. Nastavljajući proces diferenciranja i stavljajući uvek $x = a$ nalazimo redom

$$f''(a) = 2!a_2,\ f'''(a) = 3!a_3,\ \dots,\ f^{(n)}(a) = n!a_n,\ \dots . \qquad \triangle$$

U odeljku 1.12, glava IV, izučavali smo Taylorovu formulu za diferencijabilne funkcije. Sledeća definicija se odnosi na Taylorov red:

Definicija 2.5.2. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana u okolini tačke $x = a$ i neka u toj okolini ima izvode proizvoljnog reda. Tada se stepeni red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n \tag{2.5.5}$$

naziva *Taylorov red* te funkcije u tački $x = a$.

Napomena 2.5.1. Za $a = 0$, (2.5.5) se naziva *Maclaurinov red*.

Na osnovu prethodnog možemo zaključiti da svaka analitička funkcija u tački $x = a$ ima izvode proizvoljnog reda u nekoj okolini te tačke i da je u toj okolini jednaka sumi svog Taylorovog reda. Ovde je analitičnost funkcije bitna činjenica. Naime, postoje funkcije koje nisu analitičke, ali su beskonačno puta diferencijabilne, i u tom slučaju nije moguća njihova reprezentacija pomoću Taylorovog reda (2.5.5). Takva je, na primer, funkcija definisana sa $f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$ i $f(0) = 0$.

Pitanje konvergencije Taylorovog reda može se razmatrati korišćenjem Taylorove formule za datu funkciju,

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

gde je Taylorov polinom dat sa

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

a $R(x)$ je ostatak Taylorove formule za koji važe reprezentacije date u teoremama 1.12.2–1.12.4, glava IV, i teoremi 4.6.3, glava V (integralni oblik ostatka).

Primetimo da se $T_n(x)$ poklapa sa parcijalnom sumom $S_n(x)$ Taylorovog reda (2.5.5). Da bismo obezbedili uslov

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) = f(x)$$

u nekoj okolini $U(a,\delta)$, tj. u intervalu $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, primetimo da je dovoljno da ostatak u Taylorovoj formuli teži nuli, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

Na osnovu analize ostatka zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.5.3. *Ako postoji pozitivna konstanta M takva da je za svako $x \in (a-\delta, a+\delta)$*

$$|f^{(n)}(x)| \le M \qquad (n = 0, 1, \dots), \tag{2.5.6}$$

tada se funkcija $x \mapsto f(x)$ može razviti na $(a-\delta, a+\delta)$ u Taylorov red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \qquad \big(|x-a| < \delta\big). \tag{2.5.7}$$

Dokaz. Razmotrimo ostatak Taylorove formule u Lagrangeovom obliku (teorema 1.12.3, glava IV)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

gde je $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$.

S obzirom na (2.5.6), za $x \in (a-\delta, a+\delta)$ imamo

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)||x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

i činjenice da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\delta^n/n!\big) = 0$, zaključujemo da $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, što znači da važi (2.5.7). $\square$

2.6. Razvoj nekih funkcija u Taylorov red

Na osnovu rezultata iz prethodnog odeljka, ovde razmatramo razvoje nekih osnovnih elementarnih funkcija u Taylorov red. Razvoje za funkcije $x \mapsto \log(1+x)$ i $x \mapsto \arctan x$ dali smo ranije kroz primere 2.4.7 i 2.4.8. Na kraju odeljka razmotrićemo nekoliko primera sa neelementarnim funkcijama.

1. Razvoj eksponencijalne funkcije

Za eksponencijalnu funkciju $x \mapsto f(x) = e^x$ imamo $f^{(n)}(x) = e^x$ $(n = 0, 1, \dots)$. Izaberimo $a = 0$ i proizvoljno fiksirano $\delta > 0$. Tada za svako $x \in (-\delta, \delta)$ i svako $n = 0, 1, \dots,$ imamo

$$0 < f^{(n)}(x) < e^{\delta},$$

što znači da su uslovi teoreme 2.5.3 zadovoljeni. Kako je $f^{(n)}(0) = 1$, odgovarajući razvoj eksponencijalne funkcije je

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \,. \tag{2.6.1}$$

Kako je δ proizvoljno, razvoj (2.6.1) važi za svako $x \in \mathbb{R}$.

Napomenimo da smo u primeru 1.1.2 ustanovili apsolutnu konvergenciju kompleksnog reda $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ za svako $z \in \mathbb{C}$, a u primeru 2.4.1 pokazali da je njegov poluprečnik konvergencije $R = +\infty$. Stoga, po analogiji sa (2.6.1), sumu ovog reda za kompleksno z možemo označiti sa e^z, tj. praktično definisati kompleksnu funkciju $z \mapsto e^z$ pomoću

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (z \in \mathbb{C}), \tag{2.6.2}$$

čija je restrikcija na realnu osu standardna eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$ $(x \in \mathbb{R})$. Nije teško pokazati da funkcija $z \mapsto e^z$, definisana sa (2.6.2), poseduje svojstvo

$$e^z e^w = e^{z+w} \qquad (z, w \in \mathbb{C}).$$

Stavljajući $\pm iz$, umesto z, u (2.6.2) dobijamo

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n z^n}{n!}\,, \qquad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{i^n z^n}{n!}\,.$$

Sabiranjem i oduzimanjem ovih razvoja nalazimo

$$e^{iz}+e^{-iz}=\sum_{n=0}^{+\infty}\big(1+(-1)^n\big)\frac{i^n z^n}{n!}$$

i

$$e^{iz}-e^{-iz}=\sum_{n=0}^{+\infty}\big(1-(-1)^n\big)\frac{i^n z^n}{n!}\,.$$

Kako je $i^{2k}=(-1)^k$, $k=0,1,\dots$, dobijamo interesantne razvoje

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\,,\\ \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.\end{aligned}\tag{2.6.3}$$

2. Razvoj hiperboličkih funkcija $\sinh x$ i $\cosh x$

Ako u (2.6.1) umesto x stavimo $-x$, dobijamo

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\,,$$

što zajedno sa (2.6.1) daje razvoje koji važe za svako $x\in\mathbb{R}$:

$$\sinh x=\frac{1}{2}\big(e^x-e^{-x}\big)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

$$\cosh x=\frac{1}{2}\big(e^x+e^{-x}\big)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Slično funkciji $z\mapsto e^z$, mogu se definisati funkcije $z\mapsto\sinh z$ i $z\mapsto\cosh z$ kada $z\in\mathbb{C}$.

3. Razvoj funkcija $\sin x$ i $\cos x$ i Eulerova formula

Kao i kod eksponencijalne funkcije, za funkciju $x\mapsto\sin x$ imamo

$$f^{(n)}(x)=\sin\Big(x+\frac{n\pi}{2}\Big)\qquad(n=0,1,\dots),$$

pa je $|f^{(n)}(x)| \le 1$ za svako n i svako $x \in \mathbb{R}$. Kako je $f^{(n)}(0) = \sin(n\pi/2)$, tj. $f^{(n)}(0) = 0$ $(n = 2k)$ i $f^{(n)}(0) = (-1)^k$ $(n = 2k+1)$, imamo Taylorov razvoj

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.6.4}$$

Slično, za funkciju $x \mapsto \cos x$ dobijamo

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.6.5}$$

Ekstenzija ovih funkcija na $\mathbb{C}$ moguća je pomoću redova

$$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{2.6.6}$$

Njihov poluprečnik konvergencije je opet $R = +\infty$.

Poređenjem sa (2.6.3) zaključujemo da važe formule

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right),$$

na osnovu kojih dobijamo važnu formulu

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}, \tag{2.6.7}$$

koja je poznata kao *Eulerova formula*.

Ako u (2.6.7) stavimo $z = x + iy$ može se odrediti moduo i argument kompleksnog broja e^z. Kako je $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ imamo $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$.

Interesantno je primetiti da je funkcija $z \mapsto e^z$ periodična sa osnovnim periodom $\omega = 2\pi i$. Zaista, za $z = x + iy$ imamo

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} &= e^x[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)], \\ &= e^x[\cos y + i \sin y] = e^{x+iy} = e^z. \end{aligned}$$

Najzad, primetimo da postoji duboka veza između trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija. Naime, ako u (2.6.6) stavimo iz, umesto z, dobijamo

$$\sin iz = i\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \cos iz = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,,$$

tj.

$$\sin iz = i\sinh z, \qquad \cos iz = \cosh z.$$

Na primer, $\cos i\pi = \cosh\pi = (e^{\pi}+e^{-\pi})/2 \approx 11.591953\ldots$.

4. Binomni red

Neka je $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Taylorov razvoj ove funkcije u tački $x=0$ dovodi do tzv. *binomnog reda*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \tag{2.6.8}$$

za koji jednostavno dobijamo poluprečnik konvergencije $R=1$. Ovo znači da razvoj (2.6.8) konvergira za $x \in (-1,1)$.

Interesantan slučaj imamo ako u (2.6.8) stavimo $\alpha = -1/2$ i ako x zamenimo sa $-x^2$. Kako je

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\,, \quad \binom{-1/2}{0} = 1,$$

(2.6.8) se svodi na

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^{2n}.$$

Integracijom dobijamo razvoj za funkciju $x \mapsto \arcsin x$

$$\arcsin x = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2}\,dt = x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,$$

koji konvergira za $x \in (-1,1)$.

5. Razvoj nekih neelementarnih funkcija

U odeljku 3.4, glava V, napomenuli smo da se mnogi integrali, koji se javljaju u primenama, ne mogu izraziti pomoću elementarnih funkcija u konačnom obliku. Ovde ćemo navesti razvoje nekoliko interesantnih neelementarnih funkcija koje se sreću u raznim primenama.

1. Jedan od takvih je integral $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, koji se sreće u mnogim primenama. Pokazaćemo kako se on pomoću redova može izraziti.

Ako u (2.6.1) stavimo $x = -t^2$, imamo

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{2n},$$

odakle, posle integracije, dobijamo

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Napomenimo da se u literaturi definiše tzv. *funkcija greške*

$$x \mapsto \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

koja teži jedinici kada $x \to +\infty$.

2. *Eksponencijalni integral*

$$E_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

se obično izražava pomoću reda

$$E_1(x) = -\gamma - \log x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{nn!}\,,$$

gde je $\gamma = 0.5772156649\ldots$ poznata Eulerova konstanta (videti primer 1.3.13, glava II).

3. *Integralni sinus* i *integralni kosinus* se definišu pomoću

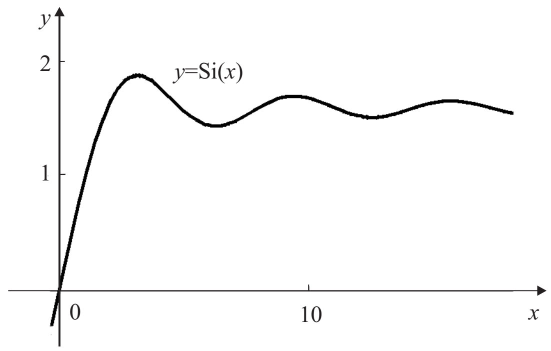
$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Ci}(x) = \gamma + \log x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\,dt,$$

respektivno. Na osnovu razvoja (2.6.4) i (2.6.5) jednostavno se dobijaju razvoji

$$\mathrm{Si}\,(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}\,,$$

$$\mathrm{Ci}\,(x) = \gamma + \log x + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k(2k)!}\,.$$

Grafik funkcije $x \mapsto \mathrm{Si}\,(x)$ prikazan je na slici 2.6.1.



Sl. 2.6.1

Za integralni sinus važi

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Si}\,(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \mathrm{Si}\,(-x) = -\mathrm{Si}\,(x).$$

Ova funkcija se sreće u mnogim primenama, posebno u telekomunikacijama.

3. TRIGONOMETRIJSKI REDOVI

3.1. Ortogonalnost trigonometrijskog sistema

Definicija 3.1.1. Funkcionalni red oblika

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{3.1.1}$$

naziva se *trigonometrijski red*.

Dakle, trigonometrijski red je baziran na trigonometrijskom sistemu funkcija

$$T = \{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots\}, \tag{3.1.2}$$

koje su 2π-periodične. Za razmatranje takvog sistema dovoljno je uzeti bilo koji segment dužine 2π, na primer, $[a, a+2\pi]$. Uobičajeno je da se uzima $a = -\pi$ ili $a = 0$. U daljem tekstu, opredeljujemo se za $a = -\pi$, tj. za simetrični segment $[-\pi, \pi]$.

Ako uvedemo skalarni proizvod (f, g), pomoću

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad (f, g \in T), \tag{3.1.3}$$

možemo dokazati da je T ortogonalan sistem, pri čemu koristimo trigonometrijske formule

$$\begin{aligned}
\sin nx \cos mx &= \frac{1}{2}\big[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\big],\\
\sin nx \sin mx &= \frac{1}{2}\big[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\big],\\
\cos nx \cos mx &= \frac{1}{2}\big[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\big].
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Teorema 3.1.1. *Dve različite funkcije iz trigonometrijskog sistema T su ortogonalne u odnosu na skalarni proizvod* (3.1.3)*, tj.*

$$(f,g) = 0 \qquad (f, g \in T,\ f \neq g).$$

Dokaz. Primetimo najpre da je

$$(1, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

$$(1, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \begin{cases} x\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi, & n = 0,\\[2mm] \dfrac{\sin nx}{n}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

tj. da je konstanta 1 (prva funkcija u sistemu T) ortogonalna na svaku od preostalih funkcija ovog sistema.

Dalje, korišćenjem formula (3.1.4), nalazimo

$$\begin{aligned}(\sin nx, \cos mx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x \, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x \, dx = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\cos nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m \neq 0, \\ 2\pi, & n = m = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\sin nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \\ &\quad = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m \neq 0, \\ 0, & n = m = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. $\square$

Napomena 3.1.1. Trigonometrijski sistem T je ortogonalan na bilo kom segmentu $[a, a+2\pi]$. Naime, zbog 2π-periodičnosti tih funkcija, u integralu (3.1.3) granice mogu biti a i $a+2\pi$, umesto $-\pi$ i π.

Na osnovu skalarnog proizvoda (3.1.3) možemo uvesti normu funkcije $f \in T$ pomoću $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$. Tako imamo

$$\|1\|^2 = 2\pi, \qquad \|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 = \pi \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.1.5}$$

3.2. Osobine trigonometrijskog reda i Fourierov red

Na osnovu nejednakosti

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n|$$

i Weierstrassovog kriterijuma zaključujemo da važi sledeći rezultat (videti, takođe, primer 2.2.4):

Teorema 3.2.1. *Ako su numerički redovi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ *konvergentni, tada je trigonometrijski red* (3.1.1) *uniformno i apsolutno konvergentan za svako* $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.2.2. *Neka je* $f(x)$ *suma uniformno konvergentnog reda* (3.1.1) *na segmentu* $[-\pi, \pi]$, *tj.*

$$f(x) = \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{3.2.1}$$

Tada se koeficijenti u (3.2.1) *mogu izraziti u obliku*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, \dots), \tag{3.2.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{3.2.3}$$

Dokaz. S obzirom na pretpostavku da red (3.2.1) konvergira uniformno na $[-\pi, \pi]$, a svaki njegov član je neprekidna funkcija na $[-\pi, \pi]$, na osnovu teoreme 2.3.1, zaključujemo da je njegova suma $f(x)$ neprekidna funkcija na $[-\pi, \pi]$ i da se red može integraliti član po član. Dakle,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\, a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \\
&= \frac{1}{2}\, a_0 \big(1, 1\big) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \big(1, \cos nx\big) + b_n \big(1, \sin nx\big) = \pi a_0,
\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili ortogonalnost dokazanu u prethodnom odeljku (videti teoremu 3.1.1 i formule za normu (3.1.5)). Ovim je dokazana formula za koeficijent a_0.

Ako sada red (3.2.1) pomnožimo sa $\cos kx$ $(k = 1, 2, \dots)$, dobijamo red

$$f(x) \cos kx = \frac{1}{2}\, a_0 \cos kx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx,$$

koji je, takođe, uniformno konvergentan na $[-\pi,\pi]$, s obzirom na ograničenost funkcije $\cos kx$ $(|\cos kx| \le 1)$. Integracijom ovog reda član po član i korišćenjem svojstva ortogonalnosti kao i u prethodnom slučaju, za $k = 1,2,\dots$, dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\big(\cos kx, \cos kx\big) = \pi a_k,$$

tj. (3.2.2). Slično, množenjem reda (3.2.1) sa $\sin kx$ $(k = 1,2,\dots)$ i integracijom dobijenog reda nalazimo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k\big(\sin kx, \sin kx\big) = \pi b_k,$$

tj. (3.2.3). □

Primetimo da integrali u (3.2.2) i (3.2.3) egzistiraju ne samo za funkcije neprekidne na $[-\pi,\pi]$, već i za neke šire klase nego što je klasa $C[-\pi,\pi]$. U našem daljem razmatranju, problem ćemo tretirati za tzv. klasu *apsolutno integrabilnih* funkcija na $[-\pi,\pi]$. To su funkcije za koje postoji integral $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$ kao Riemannov ili nesvojstven[55)].

Dakle, ako je funkcija f apsolutno integrabilna na $[-\pi,\pi]$, tada zbog

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\cos nx|\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx,$$
$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\sin nx|\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx,$$

integrali u (3.2.2) i (3.2.3) konvergiraju.

[55)] Precizno tretiranje problema zahteva poznavanje *Lebesgueovog integrala*. U našem slučaju, ograničavamo se na Rimannovu integrabilnost u običnom ili nesvojstvenom smislu (videti odeljak 4.7, glava V). Ako je funkcija integrabilna u Riemannovom smislu na nekom segmentu, tada je ona i apsolutno integrabilna na tom segmentu (videti teoremu 4.4.1, glava V). Ako se radi o nesvojstvenom integralu na (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, onda podrazumevamo da postoji konačan skup singularnih tačaka $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ $(a \le x_0 < x_1 < \dots < x_m \le b)$ i da je funkcija $|f|$ integrabilna u Riemannovom smislu na svakom segmentu $[\xi_k, \eta_k]$, $x_{k-1} < \xi_k < \eta_k < x_k$ $(k = 1,\dots,m)$, kao i da postoje granične vrednosti

$$\lim_{\substack{\xi_k \to x_{k-1}+\\ \eta_k \to x_k-}} \int_{\xi_k}^{\eta_k} |f(x)|\,dx \qquad (k = 1,\dots,m).$$

U slučaju $a = -\infty$ uzimamo da je $x_0 = -\infty$, dok za $b = +\infty$ imamo $x_m = +\infty$. U našem slučaju, tačke a i b su $\pm\pi$. Najzad, napomenimo da, u svakom slučaju, skup prekida funkcije f mora imati Lebesgueovu meru nula (videti odeljak 4.3, glava V), da bismo na osnovu apsolutne integrabilnosti funkcije imali obezbeđenu integrabilnost, tj. da iz egzistencije integrala $\int_a^b |f(x)|\,dx$ sleduje egzistencija integrala $\int_a^b f(x)\,dx$.

Definicija 3.2.1. Neka je funkcija f apsolutno integrabilna na $[-\pi, \pi]$ i neka su koeficijenti a_n i b_n određeni pomoću (3.2.2) i (3.2.3). Za trigonometrijski red (3.1.1) kažemo da je *Fourierov*[56] *red* funkcije f i pišemo

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{3.2.4}$$

Za brojeve a_n i b_n kažemo da su *Fourierovi koeficijenti* funkcije f.

Napomenimo da oznaka $\sim$ u (3.2.4) ne predstavlja asimptotsku jednakost. Ona jednostavno kazuje da funkciji f odgovara njen Fourierov red. Često se, međutim, kaže da (3.2.4) predstavlja *razvoj* (*razlaganje*) funkcije f u Fourierov red.

Posmatrano sa stanovišta prethodne definicije, teorema 3.2.2 kazuje da svaki uniformno konvergentni trigonometrijski red predstavlja Fourierov red svoje sume.

Parcijalnu sumu Fourierovog reda funkcije f zvaćemo *Fourierova suma* i označavaćemo je sa $S_n(x; f)$, ili kraće sa $S_n(x)$, kada ne može doći do zabune o kojoj se funkciji radi. Dakle,

$$\begin{aligned} S_n(x; f) &= \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \big(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx\big)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Big[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\Big]\, dt, \end{aligned}$$

tj.

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\, dt, \tag{3.2.5}$$

gde je D_n tzv. *Dirichletovo jezgro* definisano sa

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt.$$

---

[56] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), poznati francuski fizičar i matematičar.

Primetimo da je $D_n(0) = n + 1/2$ i $D_n(-t) = D_n(t)$. Korišćenjem ortogonalnosti sistema T jednostavno nalazimo

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \pi. \tag{3.2.6}$$

Za $t \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ može se pokazati da je

$$D_n(t) = \mathrm{Re}\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\Big\} = \frac{\sin\big(n+1/2\big)t}{2\sin(t/2)}\,. \tag{3.2.7}$$

U daljem izlaganju koristićemo se sledećom *Riemannovom teoremom* koju navodimo bez dokaza.

Teorema 3.2.3. *Ako je f apsolutno integrabilna funkcija na segmentu $[a,b]$, tada je*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Ako stavimo $a = -\pi$, $b = \pi$ i $\lambda = n$, teorema 3.2.3 kazuje da Fourierovi koeficijenti apsolutno integrabilne funkcije teže nuli kada $n \to +\infty$.

U slučaju kada je funkcija f parna ili neparna, njen Fourierov red dobija jednostavniji oblik. Na osnovu teoreme 3.2.2 zaključujemo:

1° Ako je f parna funkcija, tj. $f(-x) = f(x)$, imamo

$$b_n = 0, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, \ldots);$$

2° Ako je f neparna funkcija, tj. $f(-x) = -f(x)$, imamo

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3.3. Kompleksni oblik Fourierovog reda

Ako $\cos nx$ i $\sin nx$ zamenimo pomoću

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) \qquad \text{i} \qquad \sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right),$$

Fourierov red (3.2.4), pridružen jednoj apsolutno integrabilnoj funkciji f, dobija oblik

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2}\Big(e^{inx} + e^{-inx}\Big) + \frac{b_n}{2i}\Big(e^{inx} - e^{-inx}\Big),$$

tj.

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - ib_n}{2}\,e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}\,e^{-inx}. \tag{3.3.1}$$

Ako stavimo

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \bar{c}_n, \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}\,,$$

(3.3.1) može se predstaviti u kompleksnom obliku

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \tag{3.3.2}$$

gde je

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\big(\cos nx - i\sin nx\big)\,dx,$$

tj.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{3.3.3}$$

Dakle, koeficijenti u kompleksnom obliku Fourierovog reda (3.3.2) određuju se pomoću (3.3.3).

Primer 3.3.1. Neka je na $[-\pi, \pi]$ funkcija f definisana kao $f(x) = e^x$. Korišćenjem (3.3.3) imamo

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}\,, \end{aligned}$$

tj.

$$c_n = (-1)^n \frac{\sinh \pi}{\pi} \cdot \frac{1+in}{1+n^2} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Dakle, Fourierov red u kompleksnom obliku za datu funkciju je

$$e^x \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}\, e^{inx},$$

dok je standardni realni oblik

$$e^x \sim \frac{2\sinh \pi}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right). \qquad \triangle \tag{3.3.4}$$

3.4. Fourierov red na proizvoljnom segmentu

Razmotrimo najpre slučaj Fourierovog reda funkcije $t \mapsto f(t)$ koja je apsolutno integrabilna na segmentu $[-\ell, \ell]$. Smenom $x = \pi t/\ell$, segment $[-\ell, \ell]$ preslikava se na segment $[-\pi, \pi]$, tako da je moguće koristiti oblik Fourierovog reda (3.2.4). Na taj način dobijamo

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi t}{\ell}\,, \tag{3.4.1}$$

gde su Fourierovi koeficijenti dati sa

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{n\pi t}{\ell}\, dt \qquad (n = 0, 1, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\ell}\, dt \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Obično se u primenama u fizici i tehnici uzima $\ell = T/2$, gde je T period, a $\pi/\ell = 2\pi/T = \omega$ kružna učestanost. U tom slučaju prethodne formule postaju

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t\, dt \qquad (n = 0, 1, \dots), \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t\, dt \qquad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Fourierov red (3.4.1) dobija oblik

$$f(t) \sim \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t. \tag{3.4.3}$$

Ako uvedemo oznake

$$a_n = A_n \cos\varphi_n, \qquad b_n = A_n \sin\varphi_n,$$

gde su

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,, \qquad \tan\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}\,,$$

red (3.4.3) se svodi na

$$f(t) \sim \frac{1}{2}\,A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n). \tag{3.4.4}$$

Napomena 3.4.1. Razvijeni oblik za (3.4.4) je

$$f(t) \sim \frac{1}{2}\,A_0 + A_1\cos(\omega t - \varphi_1) + A_2\cos(2\omega t - \varphi_2) + A_3\cos(3\omega t - \varphi_3) + \cdots\,.$$

U primenama u elektrotehnici, konstantni član $A_0/2$ predstavlja tzv. *jednosmernu komponentu*, član $A_1\cos(\omega t - \varphi_1)$ je *prvi harmonik*, sa amplitudom A_1 i faznim pomakom $-\varphi_1$. Ostali članovi su tzv. *viši harmonici*. Za brojeve $n\omega$ kažemo da su *talasni brojevi*, a njihov skup čini tzv. *spektar*.

Primer 3.4.1. Neka je funkcija $t \mapsto f(t)$ definisana pomoću

$$f(t) = \begin{cases} A\cos\omega t, & \text{kada je} \quad \cos\omega t \ge 0, \\ 0, & \text{kada je} \quad \cos\omega t < 0, \end{cases}$$

gde su A i ω pozitivne konstante. Funkcija je periodična sa periodom $T = 2\ell = 2\pi/\omega$. Korišćenjem formula (3.4.2) nalazimo $b_n = 0$ i

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\pi/\omega} f(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{2\omega A}{\pi}\int_0^{\pi/(2\omega)} \cos\omega t\,\cos n\omega t\,dt \\ &= \frac{\omega A}{\pi}\int_0^{\pi/(2\omega)} [\cos(n-1)\omega t + \cos(n+1)\omega t]\,dt \\ &= \frac{\omega A}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{(n-1)\omega} + \frac{\sin(n+1)\omega t}{(n+1)\omega}\right]_0^{\pi/(2\omega)} \\ &= \frac{A}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1}\right] \qquad (n \ne 1). \end{aligned}$$

Za $n = 0$ dobijamo $a_0 = 2A/\pi$. Slučaj $n = 1$ mora se tretirati posebno, ili prelaskom na graničnu vrednost (kada $n \to 1$) u dobijenom izrazu za a_n. Dakle,

$$a_1 = \frac{A}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right] = \frac{A}{2}\,.$$

Najzad, za $n \geq 2$ dobijamo

$$a_n = \frac{-2A}{\pi(n^2-1)}\cos\frac{n\pi}{2}\,,$$

tj.

$$a_{2k} = \frac{2A(-1)^{k-1}}{\pi(4k^2-1)}\,, \qquad a_{2k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Dakle, Fourierov red date funkcije je

$$f(t) \sim \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\cos\omega t + \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}\cos 2k\omega t.$$

Ovo je važan primer koji nalazi primenu u elektronici kod pretvaranja (tzv. *ispravljanja*) naizmenične struje u jednosmernu. Značajno poboljšanje u "ispavljanju" može se dobiti tzv. *dvostranim ispravljanjem*, što je matematički ekvivalentno razvijanju funkcije $t \mapsto g(t) = A|\cos\omega t|$ u Fourierov red. Da bismo ovo pojasnili primetimo, najpre, da je $g(t) = f(t) + f(t - \pi/\omega)$ (videti sliku 3.4.1).

Kako je

$$\cos n\omega\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) = \cos(n\omega t - n\pi) = (-1)^n\cos n\omega t,$$

Fourierov razvoj za funkciju $t \mapsto f(t - \pi/\omega)$ biće

$$f(t - \pi/\omega) \sim \frac{A}{\pi} - \frac{A}{2}\cos\omega t + \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}\cos 2k\omega t,$$

odakle, sabiranjem sa razvojem za $t \mapsto f(t)$, dobijamo

$$g(t) \sim \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}\cos 2k\omega t.$$

Važno je primetiti da je, u ovom slučaju, *jednosmerna komponenta* dva puta veća nego kod tzv. *jednosmernog ispravljanja*, kao i to da ne postoji član u razvoju sa osnovnom učestanošću, tj. nema *prvog harmonika*. $\triangle$

U najopštijem slučaju kada je funkcija $x \mapsto f(x)$ apsolutno integrabilna na segmentu $[a, b]$, Fourierov red se može izraziti u obliku

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a}, \tag{3.4.5}$$

gde su koeficijenti a_n i b_n određeni pomoću

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \qquad (n = 0, 1, \dots), \\ b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \qquad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

3.5. Periodičko produženje funkcije i konvergencija Fourierovog reda

Pretpostavimo sada da je f apsolutno integrabilna funkcija na $[-\pi, \pi]$ i da je njen Fourierov red dat sa (3.2.4). Ako Fourierov red konvergira na nekom skupu, onda on očigledno konvergira ka nekoj (2π)-periodičnoj funkciji. Prirodno se može postaviti pitanje tzv. *periodičkog produženja* funkcije f sa periodom 2π. Ovo je, međutim, moguće samo ako je $f(-\pi) = f(\pi)$. Ako ovaj uslov nije ispunjen, (2π)-periodičko produženje funkcije f, u oznaci $\tilde{f}$, konstruiše se tako da za $x \in [-\pi, \pi)$ imamo

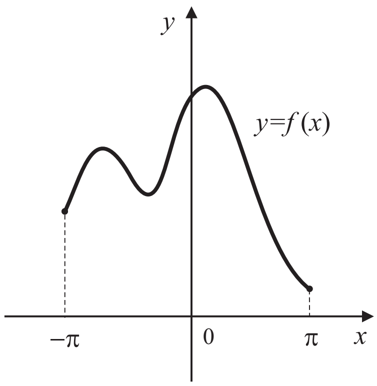
$$\tilde{f}(x + 2k\pi) = f(x) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{3.5.1}$$

Dakle, ukoliko je $f(-\pi) \neq f(\pi)$, na osnovu (3.5.1), za (2π)-periodičnu funkciju $\tilde{f}$ imamo $\tilde{f}(\pi) \neq f(\pi)$. Inače, Fourierovi redovi za f i $\tilde{f}$ se poklapaju, jer se Fourierovi koeficijenti izračunavaju pomoću (3.2.2) i (3.2.3).

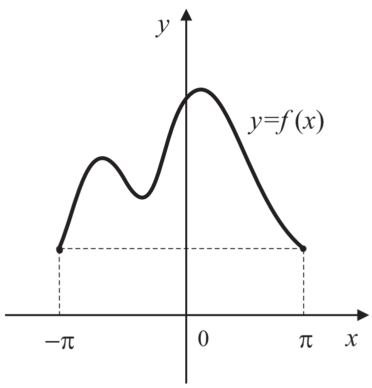
Pri ovakvom periodičkom produženju funkcije f sa poluintervala $[-\pi, \pi)$ na $\mathbb{R}$, može se desiti da funkcija $\tilde{f}$ nije neprekidna u tačkama $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\dots$, i u slučajevima kada je f neprekidna funkcija na krajevima segmenta, tj. u tačkama $\pm\pi$ (videti slike 3.5.1 i 3.5.3). Samo ako je pritom $f(-\pi) = f(\pi)$ (slika 3.5.2), periodična funkcija $\tilde{f}$ je neprekidna u tačkama $\pm\pi$ (slika 3.5.4).

Često se dobijena periodična funkcija $\tilde{f}$ označava istim simbolom f kao i originalna funkcija f.

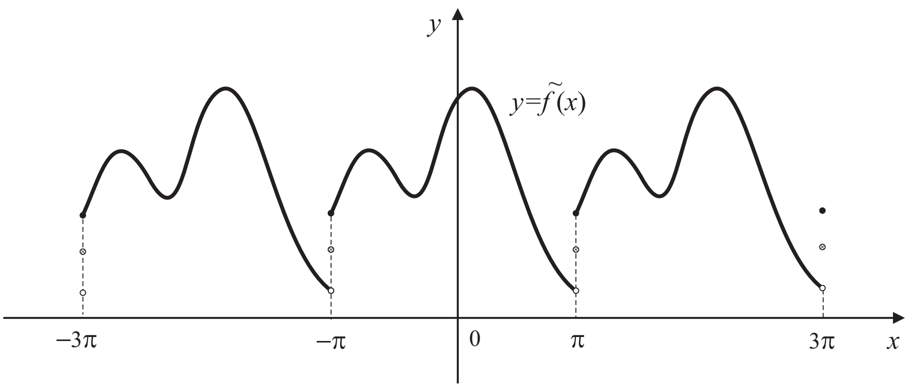
U daljem tekstu razmatramo problem konvergencije Fourierovog reda koji odgovara funkciji f koja je apsolutno integrabilna na segmentu $[-\pi, \pi]$.



Sl. 3.5.1



Sl. 3.5.2

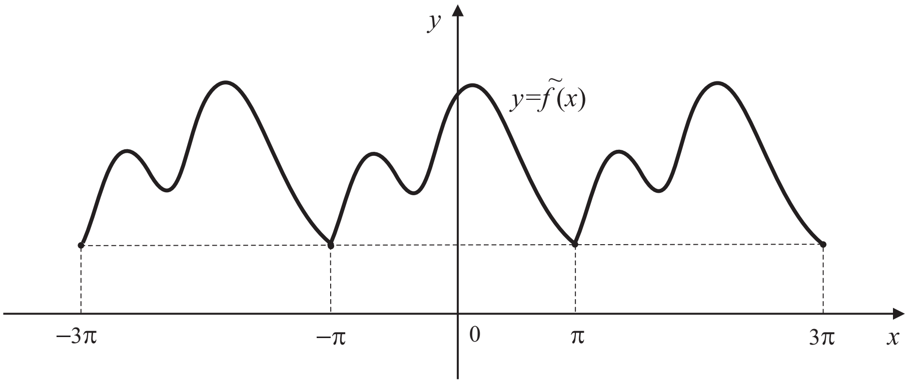


Sl. 3.5.3

Dakle, interesuje nas konvergencija niza parcijalnih suma $S_n(x; f)$. Korišćenje reprezentacije (3.2.5) i direktan prelazak na graničnu vrednost pod znakom integrala kada $n \to +\infty$ nije moguć, s obzirom da ne postoji granična vrednost $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n(t)$.

Periodički produžimo sada funkciju f sa poluintervala $[-\pi, \pi)$ na $\mathbb{R}$ i tu (2π)-periodičnu funkciju, koju ćemo koristiti u daljem radu, označimo opet sa f.

Teorema 3.5.1. *Neka je f apsolutno integrabilna (2π)-periodična funkcija.*



Sl. 3.5.4

Za Fourierovu sumu $S_n(x;f)$ *važe formule*

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)\,dt$$

i

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\big[f(x+t)+f(x-t)\big]\,dt. \tag{3.5.2}$$

Dokaz. Na osnovu (3.2.5) imamo

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(t)f(t+x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(t+x)\,dt,$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je podintegralna funkcija (2π)-periodična. Nadalje, korišćenjem osobine parnosti Dirichletovog jezgra $D_n(-t) = D_n(t)$, imamo redom

$$\begin{aligned}
S_n(x;f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x+t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(t)f(x+t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)f(x+t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(-t)f(x-t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)f(x+t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\big[f(x-t)+f(x+t)\big]\,dt. \quad \square
\end{aligned}$$

Da bismo ovaj rezultat mogli da primenimo na dokaz jednog važnog svojstva Fourierovih redova, izvešćemo najpre jedan zaključak o asimptotskom ponašanju sume $S_n(x; f)$. Izaberimo zato broj δ takav da je $0 < \delta < \pi$. Ako integral u (3.5.2) rastavimo na dva integrala, tako da integracija ide od 0 do δ u prvom, a od δ do 1 u drugom integralu, tada, na osnovu Riemannove teoreme 3.2.3, za drugi od njih možemo pokazati da teži nuli kada $n \to +\infty$, tj. da je

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin(t/2)}\sin(n+1/2)t\,dt = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Primetimo da za $D_n(t)$ iskorišćen izraz (3.2.7).

Zaista, na segmentu $[\delta, \pi]$ funkcija $t \mapsto \phi(t) = \bigl(2\sin(t/2)\bigr)^{-1}$ je ograničena $(1/2 \le \phi(t) \le \phi(\delta))$, a funkcija $t \mapsto f(x+t)+f(x-t)$ (x fiksni broj iz $[-\pi, \pi]$), po pretpostavci, je (2π)-periodična i apsolutno integrabilna. Proizvod ove dve funkcije je apsolutno integrabilna funkcija.

Dakle, za $\delta \in (0, \pi)$ i $x \in [-\pi, \pi]$, na osnovu prethodnog, dobijamo asimptotsku reprezentaciju Fourierove sume $S_n(x; f)$ u obliku

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)\bigl[f(x+t)+f(x-t)\bigr]\,dt + o(1) \quad (n \to +\infty),$$

odakle sleduje jedan važan rezultat poznat kao *princip lokalizacije*.

Teorema 3.5.2. *Neka je f apsolutno integrabilna (2π)-periodična funkcija. Egzistencija i granična vrednost niza Fourierovih suma $S_n(x; f)$ u proizvoljnoj tački $\xi \in [-\pi, \pi]$ zavisi samo od egzistencije i granične vrednosti integrala*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)\bigl[f(\xi+t)+f(\xi-t)\bigr]\,dt, \qquad \textit{kada} \quad n \to +\infty, \tag{3.5.3}$$

pri čemu je δ dovoljno mali pozitivan broj.

Primetimo da egzistencija i granična vrednost niza Fourierovih suma u tački ξ zavisi samo od lokalnih svojstava funkcije f iz δ-okoline ove tačke. Samo su, dakle, vrednosti funkcije f sa segmenta $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ uključene u integral koji se pojavljuje u (3.5.3).

Ako se dve funkcije f i g poklapaju u izvesnoj okolini tačke ξ, na osnovu principa lokalizacije, zaključujemo da granične vrednosti $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\xi; f)$ i

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\xi;g)$ istovremeno postoje ili ne postoje, i u potvrdnom slučaju one su jednake. Naravno, Fourierovi redovi ovih funkcija su, u opštem slučaju, različiti.

U daljem tekstu pretpostavljamo da je f apsolutno integrabilna (2π)-periodična funkcija, koja ima samo prekide prve vrste (videti odeljak 2.2, glava III), što znači da u svakoj tački $\xi \in \mathbb{R}$ postoje konačne jednostrane granične vrednosti

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi-0) \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi+0). \tag{3.5.4}$$

Za tačku ξ reći ćemo da je *regularna tačka funkcije* f, ako je vrednost funkcije u toj tački jednaka aritmetičkoj sredini jednostranih graničnih vrednosti (3.5.4), tj.

$$f(\xi) = \frac{f(\xi-0)+f(\xi+0)}{2}\,.$$

Primetimo da svaka tačka u kojoj je funkcija neprekidna predstavlja regularnu tačku za tu funkciju.

U odeljku 1.1, glava IV, definisali smo tzv. levi i desni izvod funkcije u tački, pretpostavljajući pritom neprekidnost funkcije u toj tački. Sada ćemo proširiti ove pojmove i na tačke prekida prve vrste, pomoću jednostanih graničnih vrednosti

$$f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi-0)}{x-\xi} \qquad \text{i} \qquad f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi+0)}{x-\xi}\,.$$

U slučaju kada je f neprekidna funkcija u tački ξ, tj. kada je $f(\xi-0) = f(\xi+0) = f(\xi)$, ova proširenja se, očigledno, svode na ranije definicije levog i desnog izvoda funkcije.

Za funkciju f i izabranu tačku ξ, definišimo funkciju $t \mapsto f^*_\xi(t)$ pomoću

$$f^*_\xi(t) = f(\xi+t) + f(\xi-t) - \big(f(\xi-0)+f(\xi+0)\big), \tag{3.5.5}$$

koja se u regularnoj tački svodi na $f^*_\xi(t) = f(\xi+t) + f(\xi-t) - 2f(\xi)$.

Sledeća teorema daje tzv. *Diniev*[57)] *kriterijum* za konvergenciju Fourierovog reda. U dokazu teoreme koristimo činjenicu da su integrali

$$\int_0^\delta \frac{|f^*_\xi(t)|}{t}\,dt \quad (0<\delta\le\pi) \qquad \text{i} \qquad \int_0^\pi \frac{|f^*_\xi(t)|}{2\sin(t/2)}\,dt \tag{3.5.6}$$

ekvikonvergentni.

---

57) Uliss Dini (1845–1918), italijanski matematičar.

Teorema 3.5.3. *Neka je f apsolutno integrabilna (2π)-periodična funkcija i neka je ξ tačka neprekidnosti ili tačka prekida prve vrste ove funkcije. Ako za neko δ iz intervala $(0,\pi)$, integral*

$$\int_0^\delta \frac{|f_\xi^*(t)|}{t}\,dt \tag{3.5.7}$$

konvergira, tada konvergira i Fourierov red tački ξ i važi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\xi,f) = S(\xi) = \frac{f(\xi-0)+f(\xi+0)}{2}\,. \tag{3.5.8}$$

Dokaz. Korišćenjem (3.5.2) i (3.2.7), kao i činjenice da je $\int_0^\pi D_n(t)\,dt = \pi/2$ (videti (3.2.6)), razliku

$$R_n(\xi;f) = S_n(\xi;f) - S(\xi) = S_n(\xi;f) - \frac{f(\xi-0)+f(\xi+0)}{2}$$

možemo da izrazimo na sledeći način:

$$\begin{aligned} R_n(\xi;f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\big[f(\xi+t)+f(\xi-t)\big]\,dt - S(\xi)\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\big[f(\xi+t)+f(\xi-t)-\big(f(\xi-0)+f(\xi+0)\big)\big]\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_\xi^*(t)}{2\sin(t/2)}\,\sin(n+1/2)t\,dt. \end{aligned}$$

S druge strane, ako integral (3.5.7) konvergira, tada konvergira i drugi integral u (3.5.6), a to znači da je funkcija $t\mapsto f_\xi^*(t)/(2\sin(t/2))$ apsolutno konvergentna na segmentu $[0,\pi]$. Najzad, primenom Riemannove teoreme 3.2.3, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(\xi;f) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_\xi^*(t)}{2\sin(t/2)}\,\sin(n+1/2)t\,dt = 0,$$

tj. da važi (3.5.8). □

Na osnovu prethodne teoreme, mogu se izvesti neki važni zaključci:

1° Ako su ispunjeni uslovi teoreme 3.5.3, tada u regularnim tačkama ξ funkcije f, Fourierov red konvergira ka $f(\xi)$.

2° Ako je f apsolutno integrabilna (2π)-periodična funkcija i ako u tački ξ postoje vrednosti $f(\xi-0)$, $f(\xi+0)$, $f'_-(\xi)$, $f'_+(\xi)$, tada Fourierov red u ovoj tački konvergira ka vrednosti $S(\xi)$, koja je definisana u (3.5.7). Da je ovo tačno, dovoljno je pokazati da je integral (3.5.7) konvergentan za neko $\delta > 0$. Primetimo, najpre, da je zbog egzistencije konačne granične vrednosti

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_\xi^*(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\Big[\frac{f(\xi+t)-f(\xi+0)}{t} - \frac{f(\xi-t)-f(\xi-0)}{-t}\Big] = f'_+(\xi) - f'_-(\xi),$$

funkcija $t \mapsto f_\xi^*(t)/t$ ograničena u nekoj okolini tačke $t=0$. Dakle, postoji δ $(0<\delta<\pi)$, takvo da je funkcija ograničena na segmentu $[0,\delta]$. Korišćenje ovog fakta omogućava kompletiranje dokaza.

3° Neka je funkcija f deo po deo neprekidno-diferencijabilna na segmentu $[-\pi,\pi]$[58]. Saglasno (3.5.1) možemo konstruisati (2π)-periodičko produženje funkcije f, u oznaci $\tilde f$. Tako produžena funkcija, očigledno, zadovoljava uslove iz 2° pa njen Fourierov red, koji se poklapa sa Fourierovim redom za f, konvergira u svakoj tački ξ ka $S(\xi)$, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\xi; f) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\xi;\tilde f) = S(\xi) = \frac{\tilde f(\xi-0)+\tilde f(\xi+0)}{2}\,. \tag{3.5.9}$$

Na osnovu (3.5.9) zaključujemo da u svakoj tački $\xi\in(-\pi,\pi)$, Fourierov red konvergira ka vrednosti $(f(\xi-0)+f(\xi+0))/2$ jer je $\tilde f(\xi\pm 0) = f(\xi\pm 0)$.

U tačkama $\xi=\pm\pi$, red konvergira ka vrednosti

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}\,. \tag{3.5.10}$$

Zaista, zbog periodičnosti funkcije $\tilde f$, imamo

$$\tilde f(-\pi-0) = \tilde f(\pi-0) = f(\pi-0), \qquad \tilde f(-\pi+0) = \tilde f(\pi+0) = f(-\pi+0),$$

pa se (3.5.9), za $\xi=\pm\pi$, svodi na (3.5.10).

---

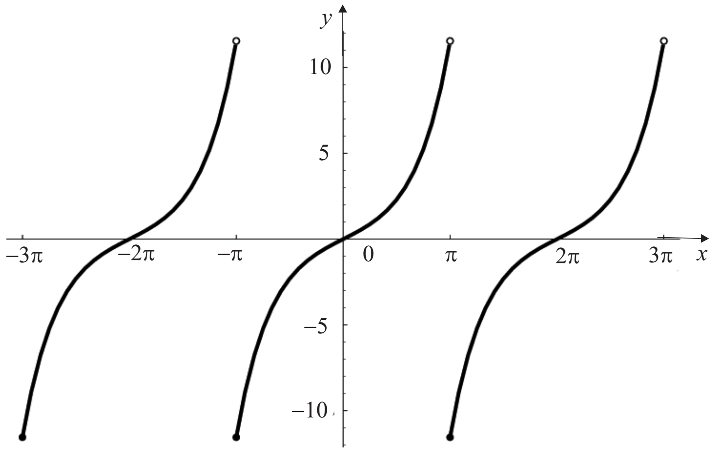
[58] Ovo znači da na segmentu $[-\pi,\pi]$ postoji niz tačaka $\{x_k\}_{k=0}^m$ $(-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \pi)$ na tako da se može definisati m funkcija $f_k\colon [x_{k-1},x_k]\to\mathbb{R}$ $(k=1,\dots,m)$, pomoću

$$f_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}+0), \quad f_k(x) = f(x) \ \ (x_{k-1}<x<x_k), \quad f_k(x_k) = f(x_k-0),$$

pri čemu je svaka od njih neprekidno-diferencijabilna na svom podsegmentu $[x_{k-1},x_k]$.

Napomena 3.5.1. U skladu sa (3.5.10), Fourierov red funkcije f (slika 3.5.1), odnosno periodične funkcije $\tilde{f}$ (slika 3.5.3), u tačkama $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\ldots$ konvergira ka vrednosti koja je označena sa ⊙ na grafiku na slici 3.5.3.

Primer 3.5.1. Na osnovu Fourierovog razvoja funkcije $x \mapsto e^x$ na segmentu $[-\pi, \pi]$, koji je dat pomoću (3.3.4) (videti primer 3.3.1) možemo dobiti razvoje za funkcije $x \mapsto \sinh x$ i $x \mapsto \cosh x$ na istom segmentu $[-\pi, \pi]$. Periodiǩa produženja ovih funkcija su prikazana na slikama 3.5.5 i 3.5.6, respektivno. Primetimo da periodičko produženje funkcije $x \mapsto \sinh x$ ima prekide u tačkama $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, itd.



Sl. 3.5.5

Korišćenjem (3.3.4) nalazimo

$$\sinh x = \frac{1}{2}\Big(e^x - e^{-x}\Big) = -\frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}\sin nx \qquad (-\pi < x < \pi).$$

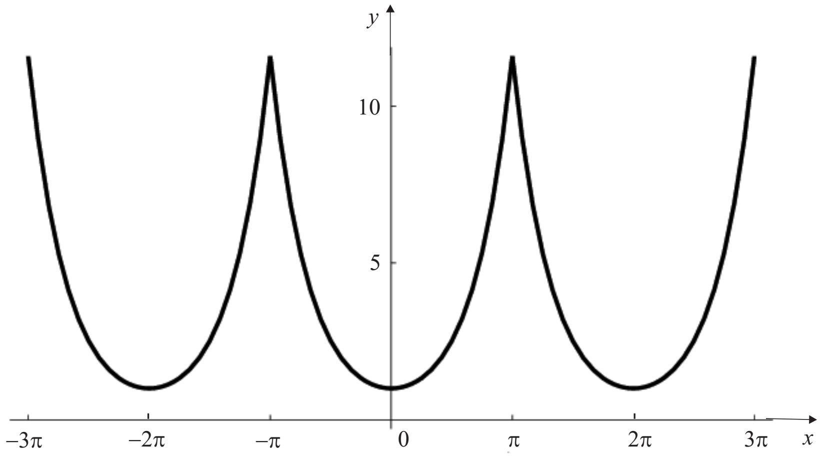
U tačkama $\pm\pi$, red konvergira ka vrednosti $(\sinh(-\pi) + \sinh\pi)\,/2 = 0$.

Slično, dobijamo

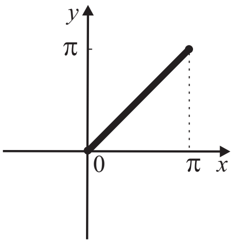
$$\cosh x = \frac{1}{2}\Big(e^x + e^{-x}\Big) = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx\right),$$

koji konvergira ka vrednosti $\cosh x$, za svako $x \in [-\pi, \pi]$. Primetimo, takođe, da je ovaj red uniformno konvergentan. △

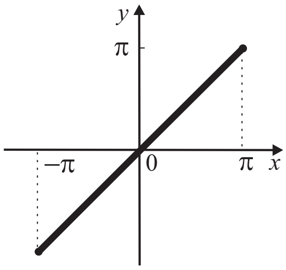
Primer 3.5.2. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana na segmentu $[0, \pi]$ pomoću $f(x) = x$ (videti sliku 3.5.7).



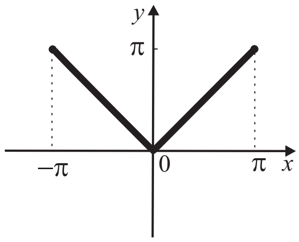
Sl. 3.5.6



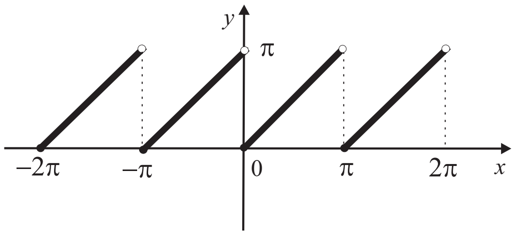
Sl. 3.5.7



Sl. 3.5.8



Sl. 3.5.9



Sl. 3.5.10

1° Periodičnim produženjem ove funkcije dobijamo funkciju sa periodom π (slika 3.5.10).

Korišćenjem formula (3.4.6) za Fourierove koeficijente na proizvoljnom segmentu, nalazimo

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi,\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\Big(x\sin 2nx + \frac{1}{2n}\cos 2nx\Big)\Big|_0^{\pi} = 0,\\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\Big(-x\cos 2nx + \frac{1}{2n}\sin 2nx\Big)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

Tako, Fourierov red (3.4.5) postaje

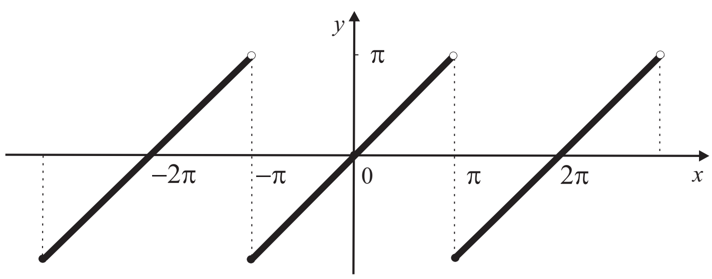
$$x \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin 2nx,$$

koji za $x \in (0,\pi)$ konvergira ka vrednosti x. U tačkama $x = 0$ i $x = \pi$, sve parcijalne sume ovog reda su jednake $\pi/2$.

Primetimo da se za $x = \pi/4$ dobijeni Fourierov red svodi na numerički red

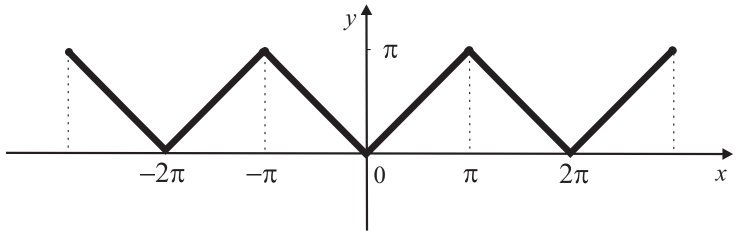
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

2° Data funkcija f može se periodički produžiti tako da je to produženje neparna, odnosno parna funkcija. Naime, funkciju f možemo najpre produžiti na segment $[-\pi, 0]$, tako da dobijemo neparnu (slika 3.5.8) ili parnu funkciju (slika 3.5.9), a zatim određujemo odgovarajuće (2π)-periodično produženje na $\mathbb{R}$.



Sl. 3.5.11

Na slici 3.5.11 prikazano je neparno, a na slici 3.5.12 parno produženje.



Sl. 3.5.12

a) U slučaju neparnog produženja, koeficijenti a_n su jednaki nuli, dok su koeficijenti b_n dati sa

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\Big(-x\cos nx + \frac{1}{n}\,\sin nx\Big)\Big|_0^{\pi},$$

tj.

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\Big(-\pi\cos n\pi\Big)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}\,(-1)^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Odgovarajući sinusni red konvergira ka x za svako $x \in (-\pi, \pi)$, tj.

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,\sin nx.$$

Za $x = \pm\pi$, red konvergira ka nuli. Primetimo da su tada sve parcijalne sume jednake nule.

b) Kod parnog produženja funkcije imamo

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\Big(x\sin nx + \frac{1}{n}\,\cos nx\Big)\Big|_0^{\pi}.$$

Ovo daje

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}\,\big((-1)^n - 1\big) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

tj.

$$a_{2k} = 0, \qquad a_{2k-1} = -\frac{4}{\pi(2k-1)^2} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Na taj način dobijamo kosinusni red za funkciju $x \mapsto |x|$ (slika 3.5.9)

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \qquad (-\pi \le x \le \pi).$$

Za $x = 0$ dobijamo numerički red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \triangle$$

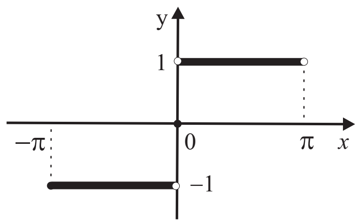
Napomenimo, na kraju, da se pomoću Fourierovih redova, specificirajući vrednost za x, mogu dobiti sume mnogih numeričkih redova.

3.6. Gibbsov efekat

Posmatrajmo funkciju f definisanu na $[-\pi, \pi]$ sa

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

čiji je grafik dat na slici 3.6.1. Primetimo da je $x = 0$ regularna tačka za funkciju f. Periodičko produženje ove funkcije u smislu (3.5.1) prikazano je na slici 3.6.2.



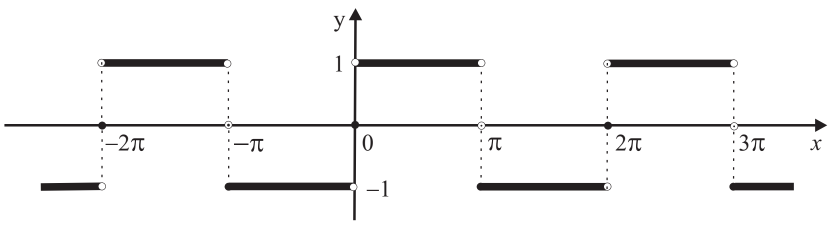
Sl. 3.6.1

Kako je funkcija f neparna, zaključujemo da su Fourierovi koeficijenti $a_n = 0$ $(n = 0, 1, \dots)$. Koeficijenti b_n dati su pomoću

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} \Big[1 - (-1)^n\Big],$$

odakle nalazimo

$$b_{2n} = 0, \qquad b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$



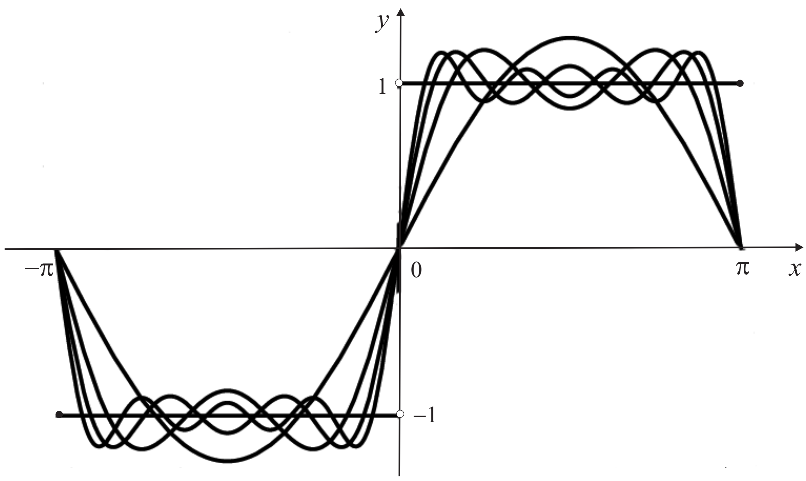
Sl. 3.6.2

Dakle, dobili smo Fourierov red

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\,. \tag{3.6.1}$$

Posmatrajmo sada parcijalne sume ovog reda

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$



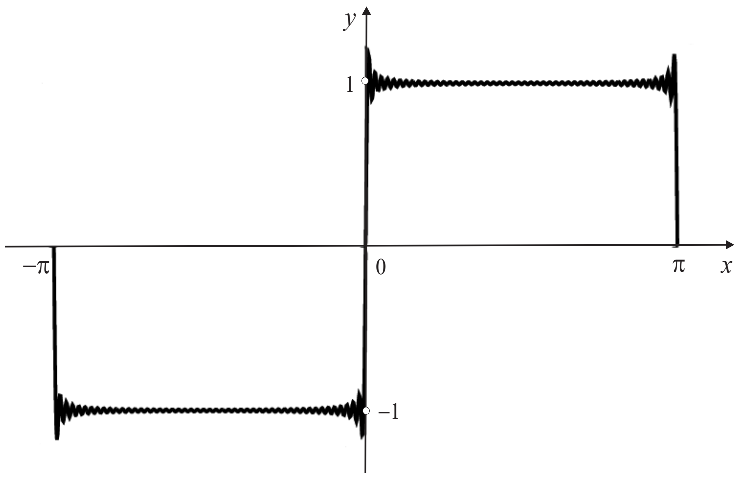
Sl. 3.6.3

Slika 3.6.3 prikazuje parcijalne sume $S_n(x)$ za $n = 1, 2, 3, 4$, dok je na slici 3.6.4 prikazana suma za $n = 50$. Primetimo da je u tačkama $x = k\pi$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, tj. u tačkama prekida funkcije $\tilde{f}$, svaka odgovarajuća Fourierova suma jednake nuli. Isto tako, za $-\pi < x < \pi$ red (3.6.1) konvergira ka funkciji $x \mapsto \operatorname{sgn} x$. U stvari, važi jednakost

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Međutim, sa slike 3.6.4 uočavamo još jednu neobičnost koju poseduju Fourierove sume u blizini tačke prekida funkcije f.



Sl. 3.6.4

Naime, interesantno je ponašanje Fourierove sume kada $x \to 0$ i kada $n \to +\infty$. Kao što smo uočili, za $x = 0$ imamo $S_n(0) = 0$ bez obzira na n. S druge starne, ako uzmemo veoma malu vrednost za x, ali fiksnu, tada pri $n \to +\infty$ Fourierova suma teži vrednosti $\operatorname{sgn} x$. Međutim, ovde je zanimljiv slučaj kada x i n nisu među sobom nezavisni. Tako, na primer, u slučaju kada je proizvod x i n konstantan, konkretno $nx = \pi/2$, i $n \to +\infty$ (samim tim $x \to 0$), Fourierova suma ima vrednost veću od jedinice, tj. "premašuje" svoju granicu.

Da bismo ovo pokazali diferencirajmo najpre Fourierovu sumu

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x\Big).$$

Tada dobijamo

$$S_n'(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x\Big).$$

Pretpostavljajući da je $\sin x \neq 0$, prethodna kosinusna suma se može jednostavno naći na sličan način kako je to učinjeno u odeljku 3.2 prilikom sumiranja Dirichletovog jezgra. Tako dobijamo

$$S_n'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,,$$

odakle sleduje

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt.$$

Iz jednačine $\sin 2nx = 0$ nalazimo tačke $k\pi/(2n)$, $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$, u kojima parcijalna suma $S_n(x)$ ima lokalne ekstremume. Nije teško zaključiti da je najveći maksimum u tački $\pi/(2n)$ i da je njegova vrednost

$$S_n\Big(\frac{\pi}{2n}\Big) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/(2n)} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\int_0^{\pi} \frac{\sin z}{\sin(z/(2n))}\,dz.$$

Za dovoljno veliko n možemo uzeti $\sin(z/(2n)) \approx z/(2n)$, tako da dobijamo

$$S_n\Big(\frac{\pi}{2n}\Big) \approx \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}\,(\pi) \approx \frac{2}{\pi}\cdot 1.851937 \approx 1.17898,$$

gde je funkcija $x \mapsto \mathrm{Si}\,(x)$ (integralni sinus) definisana na kraju odeljka 2.6.

Dakle, Fourierova suma $S_n(x)$, za $x = \pi/(2n)$, premašuje svoju granicu za 18%. Ovo praktično znači da se može dobiti bilo koja vrednost između -1.18 i 1.18 izborom pogodnog prilaza ka granici. Ovu pojavu prvi je uočio Gibbs[59)] i po njemu nosi ime *Gibbsov efekat*.

3.7. Fourierov integral

U prethodnim odeljcima razmatrali smo razvijanje (razlaganje) apsolutno integrabilnih periodičnih funkcija u Fourierov red. Pod izvesnim uslovima, sličan koncept može se uvesti i za neperiodične funkcije definisane na realnoj

[59)] Willard Gibbs (1839–1903), američki fizičar, mehaničar i matematičar.

pravoj, definišući na taj način, umesto Fourierovog reda, njegov neprekidni analogon, tzv. Fourierov integral.

Pretpostavimo da je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$, tj. da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty, \tag{3.7.1}$$

i da se na segmentu $[-\ell, \ell]$, $\ell = T/2$, može razviti u konvergentan Fourierov red

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x, \tag{3.7.2}$$

gde je $\omega = 2\pi/T = \pi/\ell$ (videti odeljak 3.4), a Fourierovi koeficijenti dati sa (3.4.2). Smenom ovih koeficijenata u (3.7.2) dobijamo

$$f(x) \sim \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos n\omega(t-x)\, dt,$$

tj.

$$f(x) \sim \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \omega_n(t-x)\, dt \right) \Delta\omega_n, \tag{3.7.3}$$

gde smo uveli tačke $\omega_n = n\omega = n\pi/\ell$ $(n = 1, 2, \dots)$ i stavili $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \omega = \pi/\ell$.

Posmatrajmo slučaj kada $\ell \to +\infty$. Primetimo da tada $\Delta\omega_n \to 0$. Zbog uslova integrabilnosti (3.7.1), prvi sabirak na desnoj strani u jednakosti (3.7.3) teži nuli. Drugi sabirak, međutim, predstavlja integralnu sumu funkcije $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definisane pomoću integrala

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(t-x)\, dt. \tag{3.7.4}$$

Pod uslovom da postoji granična vrednost ove integralne sume kada $\ell \to +\infty$, desna strana u (3.7.3) svodi se na integral

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} g(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega(t-x)\, dt, \tag{3.7.5}$$

koji je poznat kao *Fourierov integral*. Dakle, funkcija f je ovde predstavljena Fourierovim integralom. Za razliku od Fourierovog reda kod koga je spektar diskretan, ovde je spektar kontinualan (neprekidan) jer je ω neprekidna promenljiva. Potpuna analogija sa Fourierovim redom može se videti ako (3.7.5) napišemo u obliku

$$f(x) \sim \int_0^{+\infty} [a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]\, d\omega, \tag{3.7.6}$$

gde su

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt. \tag{3.7.7}$$

Kod parnih funkcija $b(\omega) = 0$, tako da (3.7.6) i (3.7.7) daju

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos\omega x\, d\omega \int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt.$$

Slično, kod neparnih funkcija imamo $a(\omega) = 0$ pa je

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin\omega x\, d\omega \int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt.$$

Slično teoremi 3.5.3 i odgovarajućih zaključaka 1°–3° izvedenih iz ove teoreme, može se dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 3.7.1. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deo po deo neprekidna funkcija na svakom konačnom segmentu, neka zadovoljava uslov apsolutne integrabilnosti na $\mathbb{R}$, i neka u tački $x \in \mathbb{R}$ postoje izvodi $f'_-(x)$ i $f'_+(x)$. Tada važi*

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\, dt. \tag{3.7.8}$$

Primer 3.7.1. Neka je funkcija f definisana pomoću $f(x) = e^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$ za $x \ge 0$ i $f(x) = 0$ za $x < 0$. Odgovarajući Fourierov integral je

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos\omega(t-x)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{\alpha^2 + \omega^2}\, d\omega.$$

Na osnovu (3.7.8), on je jednak $f(x)$ za $x \ne 0$ i $(f(0-0) + f(0+0))/2 = 1/2$ za $x = 0$. $\triangle$

Primer 3.7.2. Neka je funkcija f definisana pomoću

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 1/2, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

S obzirom da je funkcija parna, na osnovu (3.7.7) imamo

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega}{\omega}, \qquad b(\omega) = 0,$$

tako da je

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x \, d\omega.$$

Napomenimo da je u tačkama prekida $\xi = \pm 1$ zadovoljen uslov

$$\frac{1}{2}\big(f(\xi - 0) + f(\xi + 0)\big) = f(\xi). \quad \triangle$$

Kako je funkcija g u (3.7.4) parna, to se (3.7.5) može predstaviti i u obliku

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega (t - x) \, dt. \tag{3.7.9}$$

Ako umesto $\cos \omega(t - x)$ stavimo $\sin \omega(t - x)$, odgovarajući integral u smislu Cauchyeve glavne vrednosti (odeljak 4.8, glava V) biće jednak nuli, tj.

$$0 = \text{v.p.} \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega (t - x) \, dt. \tag{3.7.10}$$

Množenjem jednakosti (3.7.10) sa imaginarnom jedinicom i, a zatim oduzimanjem od (3.7.9), dobijamo *Fourierov integral u kompleksnom obliku*

$$f(x) \sim \text{v.p.} \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega(t - x)} \, dt,$$

tj.

$$f(x) \sim \text{v.p.} \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt. \tag{3.7.11}$$

3.8. Fourierova transformacija

U našem daljem razmatranju uvek ćemo pretpostavljati da je f neprekidna i apsolutno integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$ i da u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ ima konačne jednostrane izvode. U tom slučaju možemo pisati znak jednakosti u (3.7.11), tj.

$$f(x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt. \tag{3.8.1}$$

Ova jednakost omogućava definiciju tzv. Fourierove transformacije funkcije f.

Definicija 3.8.1. Za funkciju F, određenu sa

$$F(\omega) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt, \tag{3.8.2}$$

kaže se da je *Fourierova transformacija* funkcije f i označava se sa $\mathcal{F}[f]$ ili sa $\hat{f}$.

Takođe, na osnovu jednakosti (3.8.1) može se dati i definicija inverzne Fourierove transformacije:

Definicija 3.8.2. Za funkciju G, određenu sa

$$G(x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega, \tag{3.8.3}$$

kaže se da je *inverzna Fourierova transformacija* funkcije f i označava se sa $\mathcal{F}^{-1}[f]$.

Napomena 3.8.1. U transformacijama (3.8.2) i (3.8.3) često se koristi simetrični oblik, tj. uzima se ista konstanta $1/\sqrt{2\pi}$ ispred oba integrala.

U terminima Fourierove transformacije, jednakost (3.8.1) se može jednostavnije zapisati u obliku $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$. Štaviše, pod uslovima datim na početku ovog odeljka, jednostavno se dokazuje da važi

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\right] = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[f]\right] = f.$$

Napomena 3.8.2. U primenama u elektrotehnici, a posebno u telekomunikacijama, po pravilu za t se uzima vreme, dok je ω učestanost (frekvencija), i pri tome se kaže da se Fourierovom transformacijom funkcija $t \mapsto f(t)$ iz *vremenskog domena* preslikava u *frekventni domen*. U tom slučaju, $f(t) = 0$ za $t < 0$, pa je odgovarajući par transformacija dat pomoću

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt,$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \text{v.p. } \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega.$$

Takođe, umesto $F(\omega)$ često se piše $F(i\omega)$. Opravdanje za to leži u definisanju jedne opštije transformacije, tzv. *Laplaceove*[60] *transformacije* funkcije f, pomoću

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt, \tag{3.8.4}$$

gde je $s = \sigma + i\omega$ kompleksna promenljiva (*kompleksna učestanost*). Uzimajući s na imaginarnoj osi, $s = i\omega$ $(\sigma = 0)$, dolazi se do Fourierove transformacije $F(i\omega)$.

Imajući u vidu teoremu 4.4.2 (glava V) zaključujemo da su Fourierove transformacije (3.8.2) i (3.8.3) linearne. Na primer, ukoliko postoje Fourierove transformacije $\mathcal{F}[f]$ i $\mathcal{F}[g]$, tada važi $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g]$, gde su α i β proizvoljni skalari.

Primer 3.8.1. Neka je funkcija f definisana pomoću $f(x) = e^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$ za $x \ge 0$. Odredićemo Fourierovu transformaciju parnog i neparnog produženja ove funkcije.

1° Parno produženje date funkcije može se definisati kao $f_p(x) = e^{-\alpha|x|}$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Na osnovu (3.8.2) imamo

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-i\omega t}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}\,dt,$$

tj.

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha-i\omega)t}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t}\,dt = \frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\,.$$

Primena inverzne Fourierove transformacije (3.8.3) na dobijenu funkciju daje polaznu funkciju $x \mapsto f(x)$. Dakle, imamo

$$e^{-\alpha x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\,e^{i\omega x}\,d\omega \qquad (x \ge 0),$$

[60] Pierre Simon de Laplace (1749-1827), veliki francuski matematičar.

što se može izraziti i u obliku

$$e^{-\alpha x}=\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{2\alpha}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega\qquad(x\ge 0).$$

2° Isključujući tačku $x=0$ definišimo neparno produženje date funkcije pomoću

$$f_n(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x}, & x>0,\\ -e^{\alpha x}, & x<0.\end{cases}$$

Fourierova transformacije takve funkcije je

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{0}(-e^{\alpha t})e^{-i\omega t}\,dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}\,dt=\frac{-2i\omega}{\alpha^2+\omega^2}\,.$$

Najzad, primena inverzne transformacije daje

$$e^{-\alpha x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2i\omega}{\alpha^2+\omega^2}\,e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega\qquad(x>0).\qquad\triangle$$

Napomena 3.8.3. Koristeći se rezultatima iz prethodnog primera nalazimo vrednosti tzv. *Laplaceovih integrala*

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2\alpha}\,e^{-\alpha x}\quad(x\ge 0),\qquad\int_{0}^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}\,e^{-\alpha x}\quad(x>0).$$

3.9. *Z*-transformacija

Na kraju ove glave razmotrićemo ukratko jednu važnu transformaciju, koja se u poslednje vreme veoma mnogo sreće u primenama. Naime, u primenama se umesto funkcije $t\mapsto f(t)$ češće pojavljuje niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, čije su vrednosti $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \dots,$ određene u nekim vremenskim trenucima, na primer, za $t=0,\ T,\ 2T$, itd. Ne umanjujući opštost razmatranja, možemo uzeti normalizovani slučaj kada je $T=1$.

Da bismo omogućili primenu Laplaceove transformacije na ovaj slučaj, nizu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ možemo jednostavno pridružiti stepenastu funkciju $t\mapsto\tilde f(t)$ pomoću

$$\tilde f(t)=f_n\quad\text{kada}\quad n\le t<n+1\qquad(n=0,1,\dots).$$

Ako sada formalno primenimo transformaciju (3.8.4) na ovako konstruisanu funkciju $\tilde{f}$, dobijamo

$$\mathcal{L}[\tilde{f}(t)] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)e^{-st}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n e^{-st}\,dt,$$

tj.

$$\mathcal{L}[\tilde{f}(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \frac{e^{ns} - e^{-(n+1)s}}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{-ns}.$$

Kako je faktor $(1-e^{-s})/s$ uvek isti za svaki niz, to se prethodna transformacija može uprostiti i na taj način dolazimo do tzv. *diskretne Laplaceove transformacije*

$$\mathcal{DL}[f_n] = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{-ns}. \tag{3.9.1}$$

Uvođenjem nove kompleksne promenljive $z = e^s$, (3.9.1) se transformiše u red[61)]

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n}. \tag{3.9.2}$$

Definicija 3.9.1. Za funkciju $z \mapsto F^*(z)$, definisanu pomoću reda (3.9.2), kaže se da je *z-transformacija* niza $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i označava se sa $\mathcal{Z}[f_n]$.

Primer 3.9.1. Neka je dat eksponencijalni niz čiji su članovi $f_n = a^n$, gde je a skalar. Na osnovu (3.9.2) imamo

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad (|z| > |a|). \tag{3.9.3}$$

Jasno je da z-transformacija datog niza egzistira izvan kruga poluprečnika $R = |a|$ jer za takve vrednosti z red u (3.9.3) konvergira i njegova suma je $z/(z-a)$. Na primer, ako se radi o konstantnom nizu, gde je $f_n = 1$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$, tada je oblast egzistencije z-transformacije oblast izvan jediničnog kruga. △

[61)] Precizne formulacije ovakvih redova (po stepenima od $1/z$) razmatraju se u *Teoriji funkcija kompleksne promenljive*. Za razumevanje ovog odeljka dovoljno je znanje iz stepenih redova (odeljci 2.4, 2.5 i 2.6).

Na osnovu prethodnog primera vidimo da je za egzistenciju z-transformacije neophodna egzistencija nekog kruga konačnog poluprečnika $R \geq 0$, takvog da red (3.9.2) konvergira za svako z izvan toga kruga, tj. za $|z| > R$. Nije teško pokazati da je potreban i dovoljan uslov za egzistenciju takvog kruga konačnog poluprečnika R upravo egzistencija dve pozitivne konstante q i A takve da je $|f_n| < Aq^n$, tj. da je niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ograničen jednim eksponencijalnim nizom.

Primer 3.9.2. Neka je niz dat pomoću $f_n = a^n/n!$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Njegova z-transformacija je

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a/z)^n}{n!} = e^{a/z} \qquad (|z| > 0). \quad \triangle$$

Na osnovu definicije 3.9.1 zaključujemo da je z-transformacija linearna, tj. da važi sledeći rezultat:

Teorema 3.9.1. *Neka za nizove $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ postoje z-transformacije $F^*(z) = \mathcal{Z}[f_n]$ $(|z| > R_1)$ i $G^*(z) = \mathcal{Z}[g_n]$ $(|z| > R_2)$. Tada je, za proizvoljne skalare α i β,*

$$\mathcal{Z}[\alpha f_n + \beta g_n] = \alpha\mathcal{Z}[f_n] + \beta\mathcal{Z}[g_n] \qquad \bigl(|z| > R = \max(R_1, R_2)\bigr).$$

Diferenciranjem (3.9.2) dobijamo

$$\frac{dF^*(z)}{dz} = -\sum_{n=0}^{+\infty} n f_n z^{-n-1} \qquad (|z| > R),$$

odakle zaključujemo da važi sledeći rezultat:

Teorema 3.9.2. *Ako z-transformacija $F^*(z) = \mathcal{Z}[f_n]$ niza $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ postoji, tada izraz $-z\dfrac{d}{dx}F^*(z)$ predstavlja z-transformaciju niza $\{nf_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, tj. važi*

$$-z\,\frac{dF^*(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{+\infty} n f_n z^{-n} \qquad (|z| > R).$$

Primer 3.9.3. Na osnovu prethodne teoreme i primera 3.9.1 imamo

$$\mathcal{Z}[n] = \frac{z}{(z-1)^2}\,, \quad \mathcal{Z}[n^2] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\,, \quad \mathcal{Z}[na^{n-1}] = \frac{z}{(z-a)^2}\,.$$

Oblast konvergencije u prva dva slučaja je $|z| > 1$, a u trećem $|z| > |a|$. $\triangle$

Sledeće dve teoreme odnose se na granične vrednosti.

Teorema 3.9.3. *Ako z-transformacija $F^*(z) = \mathcal{Z}[f_n]$ niza $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ postoji, tada je*

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} F^*(z).$$

Slično se mogu odrediti i članovi niza f_1, f_2, itd. Na primer, s obzirom da je $z\big(F^*(z) - f_0\big) = f_1 + f_2 z^{-1} + f_3 z^{-2} + \cdots$, korišćenjem rezultata teoreme 3.9.3, zaključujemo da važi

$$f_1 = \lim_{z\to\infty} z\big(F^*(z) - f_0\big).$$

Teorema 3.9.4. *Ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, tada je*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{z\to1+0} (z-1)F^*(z).$$

Napomenimo da obrnuto tvrđenje nije tačno. Na primer, imamo

$$\mathcal{Z}[(-1)^n] = \frac{z}{z+1} \qquad \text{i} \qquad \lim_{z\to1+0}(z-1)\frac{z}{z+1} = 0,$$

ali $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ ne postoji.

Sledeći primer daje jednu ideju za određivanje inverzne z-transformacije, tj. niza $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ za datu funkciju $z \mapsto F^*(z)$.

Primer 3.9.4. Na osnovu primera 3.9.3 imamo

$$F^*(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n z^{-n} \qquad (|z| > 1). \tag{3.9.4}$$

Ako $F^*(z)$ predstavimo u obliku

$$F^*(z) = G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

tada razvoj funkcije $t \mapsto G(t)$ u Taylorov red (videti odeljke 2.5 i 2.6) omogućava direktno dobijanje razvoja (3.9.4), posle smene $t = z^{-1}$. U našem slučaju imamo

$$G(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!}\, t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n t^n \qquad (|t| < 1).$$

Smenom $t = z^{-1}$, prethodni razvoj se svodi na (3.9.4). $\triangle$

Dakle, neka je funkcija $t \mapsto G(t)$ definisana kao u prethodnom primeru pomoću $G(t) = F^*(1/t)$. Koeficijenti Taylorovog reda ove analitičke funkcije u tački $t = 0$ daju niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, tj. *inverznu z-transformaciju* funkcije $z \mapsto F^*(z)$,

$$f_n = \mathcal{Z}^{-1}[F^*(z)] = \frac{G^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, \dots). \tag{3.9.5}$$

Primer 3.9.5. Neka je $F^*(z) = \log((z+1)/z)$. Kako je

$$G(t) = F^*(1/t) = \log(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n \quad (|t| < 1),$$

zaključujemo da je

$$f_0 = 0, \quad f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (n \geq 1). \quad \triangle$$

Napomena 3.9.1. U mnogim tehničkim primenama[62] $z \mapsto F^*(z)$ je racionalna funkcija oblika

$$F^*(z) = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_n z^{-n}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_n z^{-n}}.$$

Deljenjem brojioca sa imeniocem može se dobiti

$$F^*(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots.$$

Takvo deljenje je poznato kao *sintetičko deljenje*.

Nije teško videti da važe jednakosti

$$\begin{aligned} p_0 &= f_0 q_0, \\ p_1 &= f_1 q_0 + f_0 q_1, \\ &\vdots \\ p_n &= f_n q_0 + f_{n-1} q_1 + \cdots + f_0 q_n. \end{aligned}$$

Napomena 3.9.2. Ako se izvrši dekompozicija $F^*(z)$ u obliku

$$F^*(z) = F_1^*(z) + F_2^*(z) + \cdots + F_m^*(z),$$

[62] Na primer, kod *diskretnih mreža* i *diskretnih sistema upravljanja* uspešno se koristi z-transformacija. Ove oblasti se izučavaju u okviru kurseva *Teorija električnih kola* i *Teorija automatskog upravljanja*.

gde su $z \mapsto F_k^*(z)$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ funkcije čije inverzne z-transformacije poznajemo, imamo

$$f_n = \mathcal{Z}^{-1}[F^*(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[F_1^*(z)] + \mathcal{Z}^{-1}[F_2^*(z)] + \cdots + \mathcal{Z}^{-1}[F_m^*(z)].$$

Ukoliko je $z \mapsto F^*(z)$ racionalna funkcija pogodan dekompozicioni metod je rastavljanje funkcije na parcijalne razlomke, odakle se direktno može naći inverzna z-transformacija.

4. ZADACI ZA VEŽBU

4.1. Primenom D'Alembertovog kriterijuma ispitati konvergenciju redova:

$$1^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad 2^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!\,n!}, \qquad 3^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,n!}{(2n)!}.$$

4.2. Primenom Cauchyevog kriterijuma ispitati konvergenciju redova:

$$1^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\Big)^{n^2}, \qquad 2^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n}{2n+1}\Big)^{n}, \qquad 3^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\arcsin\frac{1}{n}\Big)^{n}.$$

4.3. Primenom Cauchyevog integralnog kriterijuma ispitati konvergenciju redova:

$$1^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}, \qquad 2^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1+n}{1+n^2}\Big)^{2}, \qquad 3^\circ \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log\frac{n+1}{n-1}.$$

4.4. Primenom Raabeovog kriterijuma ispitati konvergenciju redova:

$$1^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^{3}, \qquad 2^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+2}}.$$

4.5. Ispitati konvergenciju alternativnih redova:

$$1^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\log(n+1)}, \qquad 2^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n}\frac{1}{n-\log n}.$$

4.6. Proveriti jednakosti:

$$1^\circ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a^{[n/2]}\, b^{[(n+1)/2]} = \frac{1+b}{1-ab} \qquad (|ab| < 1),$$

$$2^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$3^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\cos\frac{2n\pi}{3} = -\frac{2}{7},$$

4.7. Odrediti intervale konvergencije stepenih redova:

$$1^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \qquad 2^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} (x+1)^n, \qquad 3^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$$

4.8. Po stepenima od x, razviti u stepeni red sledeće funkcije:

$$1^\circ\ f(x) = \cos^2 x, \qquad 2^\circ\ g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad 3^\circ\ h(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,.$$

4.9. Svaku od periodičnih funkcija $x \mapsto f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ razviti u odgovarajući Fourierov red:

1° $f_1(x) = (x) = x - [x]$, 2° $f_2(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$,
3° $f_3(x) = x - |x|$, 4° $f_4(x) = \arcsin(\sin x)$.

4.10. Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ ima osobinu da je

$$f(x+\pi) = -f(x),$$

izučiti osobine Fourierovog reda funkcije f u intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rezultat. Važe jednakosti $a_{2n} = b_{2n} = 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

4.11. Neka je $x \mapsto f(x) = x(\pi - x)$ $(0 < x < \pi)$. Prethodno pogodno periodički produženu funkciju f, razviti u Fourierov red:

a) po sinusima, b) po kosinusima.

4.12. Funkciju $x \mapsto f(x) = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$ parno produžiti, a zatim je kao parnu i periodičnu funkciju razviti u odgovarajući Fourierov red.

Literatura

1. D. Adnađević i Z. Kadelburg: *Matematička analiza, I.* Naučna knjiga, Beograd 1990.
2. S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu.* Građevinska knjiga, Beograd 1968.
3. J. Dieudonné: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York 1969.
4. Г. М. Фихтенгольц: *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I.* Физматгиз, Москва 1962.
5. В. А. Ильин и Э. Г. Позняк: *Основы математического анализа, I.* Наука, Москва 1971.
6. В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов: *Математический анализ, I.* Изд. Московского университета, Москва 1985.
7. Л. Д. Кудрявцев: *Курс математического анализа, I.* Высшая школа, Москва 1981.
8. S. Kurepa: *Uvod u matematiku, Skupovi – strukture – brojevi.* Tehnička knjiga, Zagreb 1975.
9. И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда: *Математический анализ, I.* Вища школа, Киев 1983.
10. S. Mardešić: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, I dio, Brojevi – konvergencija – neprekidnost.* Školska knjiga, Zagreb 1988.
11. M. Marjanović: *Matematička analiza I.* Naučna knjiga, Beograd 1979.
12. D. Mihailović i R. R. Janić: *Elementi matematičke analize I.* Naučna knjiga, Beograd 1985.
13. P. M. Miličić: *Matematika I, Linearna algebra i analitička geometrija – realna analiza i numerička analiza.* Naučna knjiga, Beograd 1982.
14. G. V. Milovanović: *Numerička analiza, I deo.* Naučna knjiga, Beograd 1991.
15. G. V. Milovanović i R. Ž. Đorđević: *Linearna algebra.* Elektronski fakultet, Niš 2004.
16. D. S. Mitrinović i P. M. Vasić: *Analitičke nejednakosti.* Građevinska knjiga, Beograd 1970.

17. С. М. Никольский: *Курс математического анализа, I.* Наука, Москва 1975.

18. W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, New York 1976.

19. А. М. Тер-Крикоров и М. И. Шабунин: *Курс математического анализа.* Наука, Москва 1988.

20. В. А. Зорич: *Математический анализ, I.* Наука, Москва 1981.