Univerzitet u Sarajevu
Prirodno-matematički fakultet
Odsjek za matematiku

Zlatko Udovičić

SPLAJNOVI U NUMERIČKOJ INTEGRACIJI

doktorska disertacija

Sarajevo, 2010.

Ova disertacija je podnesena Naučno–nastavnom vijeću Prirodno–matematičkog fakulteta u Sarajevu u postupku sticanja naučnog stepena doktora matematičkih nauka.

Komisiju za ocjenu disertacije sačinjavali su :

Dr. Gradimir V. Milovanović, redovni profesor Fakulteta za kompjuterske nauke Univerziteta Megatrend u Beogradu, dopisni član SANU,

Dr. dr.h.c., Muharem Avdispahić, redovni profesor Prirodno–matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu i

Dr. Boško S. Jovanović, redovni profesor Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

Sadržaj

Uvod **ii**

1 Splajnovi proizvoljnog reda **1**
1.1 Izračunavanje koeficijenata kardinalnog B-splajna 2
1.1.1 Teorijska osnova 2
1.1.2 Algoritam za izračunavanje koeficijenata kardinalnog B-splajna 5
1.1.3 Numerički primjeri 6
1.2 Izračunavanje momenata kardinalnog B-splajna 8
1.3 Jednotačkasta kvadraturna formula sa splajnom 12
1.3.1 Glavni rezultat 12
1.3.2 Posljedice 15
1.3.3 Numerički primjeri 16
1.4 Numerička integracija pomoću kardinalnih B-splajnova 19
1.4.1 Konstrukcija metoda 20
1.4.2 Komentari i numerički primjeri 24

2 Splajnovi malog reda **27**
2.1 Jedna klasa kvadraturnih formula sa linearnim/kubnim B-splajnom kao težinskom funkcijom 27
2.1.1 Slučaj $w(x) = B_2(x)$ 29
2.1.2 Numerički primjer 31
2.1.3 Slučaj $w(x) = B_4(x)$ 32
2.1.4 Numerički primjer 33
2.2 Neke modifikacije trapeznog pravila 34
2.2.1 Klasične kvadraturne formule i kvadratni interpolacioni splajn 35
2.2.2 Slučaj $n = 2m$ 37
2.2.3 Slučaj $n = 2m + 1$ 39
2.2.4 Još jedna mogućnost izbora parametra a_0 40
2.2.5 Numerički primjeri 41

3 Vodič za korisnike programskog paketa *SNI.m* **46**

4 *Mathematica* kod programskog paketa *SNI.m* **59**

A Biografija kandidata **67**

B Summary **68**

Uvod

Određeni integral nesumnjivo predstavlja jedan od najznačajnijih objekata matematičke analize. Izračunavanje mnogih fizičkih veličina (površina, zapremina, dužina pređenog puta, moment inercije,...) svodi se upravo na problem izračunavanja određenog integrala zadane funkcije. Sa druge strane, poznato je da određeni integral, u opštem slučaju, nije moguće tačno izračunati, pa približno izračunavanje određenog integrala predstavlja jedan od važnih problema numeričke analize. O značaju ovog problema možda najbolje govori činjenica da se metodi za približno izračunavanje određenog integrala, koji se počinju razvijati još od Njutnovog vremena, i danas veoma intenzivno izučavaju i usavršavaju.

Veliki broj ovih metoda bazira se na jednakosti

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = Q[f,n] + R[f,n], \tag{1}$$

gdje je $Q[f,n] = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$ tzv. kvadraturna formula, a $R[f,n]$ greška (ostatak) kvadraturne formule[1]. Brojevi x_i, $1 \le i \le n$, nazivaju se čvorovi, a brojevi A_i, $1 \le i \le n$, (težinski) koeficijenti kvadraturne formule. Nametanjem različitih uslova za čvorove i koeficijente, dobijaju se različiti tipovi kvadraturnih formula. Jedan od najčešćih uslova je da čvorovi formule pripadaju intervalu integracije. Ukoliko granice intervala integracije pripadaju skupu čvorova dobijaju se formule zatvorenog tipa, a ukoliko skup čvorova ne sadrži granice integracije dobijaju se formule otvorenog tipa. Dvije najvažnije klase formula, koje se baziraju na jednakosti (1), su Njutn-Kotesove i Gausove kvadraturne formule. Prilikom konstrukcije ovih formula zahtijeva se da kvadraturna fomula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena.

Kod Njutn-Kotesovih formula čvorovi su unaprijed zadani, a koeficijenti se biraju tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena. Ovdje svakako, treba spomenuti i alternativni način konstrukcije zatvorenih formula Njutn-Kotesovog tipa. Naime, kroz unaprijed zadane čvorove se postavi interpolacioni polinom, a zatim se izračuna integral dobijenog polinoma. S obzirom da prilikom konstrukcije Njutn-Kotesovih formula figuriše n slobodnih parametara, ove kvadraturne formule su tačne za polinome stepena ne većeg od $n-1$, osim u nekim specijalnim slučajevima kada su tačne i za polinome stepena ne većeg od n.

[1] Ne umanjujući opštost, prilikom konstrukcije metoda pretpostavlja se da je $[-1,1]$ interval integracije.

Ukoliko se dozvoli da i čvorovi, i koeficijenti kvadraturne formule budu slobodni, tj. da se i čvorovi, i koeficijenti biraju tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena, dobijaju se Gausove kvadraturne formule. Dokazuje se da su čvorovi Gausove kvadraturne formule nule Ležandrovog polinoma odgovarajućeg stepena, a koeficijenti se i sada određuju tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena. Kako je sada slobodno $2n$ parametara, Gausove kvadraturne formule su tačne za sve polinome stepena ne većeg od $2n-1$.

Generalizacija Gausovih kvadraturnih formula dobija se uopštavanjem jednakosti (1)

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = Q[f,n,a,b] + R[f,n,a,b], \tag{2}$$

pri čemu je $w(\cdot)$ nenegativna (na intervalu (a,b)) težinska funkcija, a jedna ili obe granice intervala (a,b) mogu biti beskonačne. Kvadraturna formula $Q[f,n,a,b]$ je istog oblika kao i u (1), dok je $R[f,n,a,b]$ i sada greška formule. Čvorovi generalisane Gausove kvadraturne formule su nule polinoma stepena n koji je ortogonalan na sve polinome stepena manjeg od n u odnosu na skalarni proizvod

$$(f,g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx.$$

Kao i ranije, koeficijenti kvadraturne formule se određuju iz uslova da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena. Budući da opisani postupak određivanja čvorova i koeficijenata Gausovih kvadraturnih formula, u nekim slučajevima, pokazuje izrazitu numeričku nestabilnost u praksi se ovi parametri izračunavaju algoritmom koji su konstruisali Golub i Velš u poznatom radu [12].

Ukoliko je u (2) $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (prva Čebišovljeva težina), može se dokazati da su svi koeficijenti odgovarajuće kvadraturne formule međusobno jednaki i da iznose π/n. Na taj način se prirodno nameće problem konstrukcije tzv. Čebišovljevih kvadraturnih formula, tj. kvadraturnih formula oblika

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx A\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{3}$$

I u ovoj klasi formula, $w(\cdot)$ označava nenegativnu (na intervalu (a,b)) težinsku funkciju, dok granice intervala integracije (jedna ili obe) mogu biti beskonačne. Čebišovljeve kvadraturne formule imaju $n+1$ slobodnih parametara koji se određuju iz uslova da formula bude tačna za sve polinome stepena n. Slobodni koeficijent kvadraturne formule određuje se jednostavno iz uslova da formula bude tačna za sve polinome stepena nula i iznosi $\frac{1}{n}\int_a^b w(x)dx$, dok su čvorovi formule nule polinoma čija je kostrukcija opisana npr. u [1]. Interesantna je činjenica da Čebišovljeve kvadraturne formule ne postoje (u smislu da svi čvorovi formule, tj. nule odgovarajućeg polinoma, budu realni, različiti i da pripadaju intervalu integracije) za proizvoljnu težinsku funkciju. Bernštajn je dokazao da ove kvadraturne formule za $a=-1, b=1$ i $w(x)=1$ postoje samo u slučaju $n \in \{2,3,4,5,6,7,9\}$. Sa druge strane, u radovima [3], [22] i [38] su opisane čitave klase težinskih funkcija sa kojima je moguća konstrukcija ovih formula za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

Uopštavanja Njutn-Kotesovih i Gausovih kvadraturnih formula išla su u različitim pravcima. Npr. "kombinacijom ovih formula" dobijaju se formule kod kojih su neki čvorovi slobodni, a neki fiksirani. Specijalni slučajevi ovih formula su Radauove formule kod kojih je samo jedan čvor, jedan od krajeva intervala integracije, fiksiran ili Lobatove formule kod kojih su fiksirana oba kraja intervala integracije. Osim toga, interesantne su i formule kod kojih se javljaju višestruki čvorovi, pa osim vrijednosti funkcije u kvadraturnoj formuli figurišu i vrijednosti njenih izvoda. Dalje, danas se intenzivno izučava numerička integracija brzo oscilujućih funkcija, višedimenzionalna numerička integracija, numeričko izračunavanje glavne vrijednosti integrala, itd. Više detalja o problemu numeričke integracije može se naći npr. u [12], [18] ili [21]. U ovom kontekstu svakako treba preporučiti i pregledni članak [20].

Problem izračunavanja određenog integrala neizbježan je i prilikom konstrukcije srednjekvadratne aproksimacije zadane funkcije. Poznato je da su koeficijenti srednjekvadratne aproksimacije rješenje sistema linearnih jednačina čiji su koeficijenti skalarni proizvodi funkcije koja se aproksimira sa baznim funkcijama, a ovi skalarni proizvodi su upravo odgovarajući određeni integrali. Ovaj problem je, naravno, prisutan i prilikom konstrukcije malotalasne aproksimacije (koja je specijalan slučaj srednjekvadratne) zadane funkcije. Interesantna klasa kvadraturnih formula, korištena upravo prilikom konstrukcije malotalasne aproksimacije zadane funkcije, posmatrana je u radu [31]. Naime, posmatrana je kvadraturna formula oblika

$$\int_0^L \phi(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(d_i - \tau), \tag{4}$$

gdje je $\phi(\cdot)$ funkcija skaliranja (osnovna funkcija u teoriji malih talasa) čiji je nosač interval $[0, L]$, čvorovi d_i, $1 \leq i \leq n$, su diadske tačke (negativni stepeni broja dva) intervala $[0, L]$, dok su koeficijenti A_i, $1 \leq i \leq n$, i parametar τ slobodni. Kao i ranije, koeficijenti formule i slobodni parametar se biraju tako da formula bude tačna za polinome što je moguće većeg stepena. Pri tome se još zahtijeva da parametar τ bude takav da sve tačke u kojima se izračunava vrijednost funkcije $f(\cdot)$ pripadaju intervalu integracije. Može se dokazati da je parametar τ nula odgovarajućeg polinoma koja pripada intervalu $(0, 1)$, pri čemu egzistencija ove nule, a samim tim i egzistencija kvadraturne formule, zavisi od izbora funkcije skaliranja i broja čvorova u (4).

Za razliku od problema numeričke integracije, koji se izučava već više od dvije stotine godina, splajnovi se počnju razvijati tek sredinom prošlog vijeka. Prema [27], Isak Šonberg[2] je sredinom drugog svjetskog rata, koristeći nešto što je kasnije nazvao kardinalnom splajn interpolacijom i kardinalnim splajn izglađivanjem ("what later I called Cardinal Spline Interpolation and Cardinal Spline Smoothing"), znatno poboljšao dotadašnju tehniku izračunavanja trajektorije projektila. U istom izvoru se navodi da su kvadratni, odnosno splajnovi proizvoljnog reda, sa ravnomjerno raspoređenim čvorovima, korišteni i ranije u [26], odnosno u [24], ali za aproksimaciju Furijeovih koeficijenata periodične funkcije, ali ne i za aproksimaciju funkcija. Šezdesetih godina dvadesetog vijeka splajnovi postaju vrlo atraktivan alat u teoriji aproksimacija. Primjenjuju se prikom numeričkog rješavanja različitih vrsta jednačina i graničnih

[2]Isaka Šonberga često nazivaju ocem splajnova.

problema, prilikom kostrukcije splajn interpolacije i multirezolucijske aproksimacije, u kompjuterskoj geometriji, kao i prikikom rješavanja različitih problema u nauci i tehnici.

Koliko nam je poznato, postoji svega nekoliko rezultata koji dovode u vezu splajnove sa numeričkom integracijom. U radu [16] je posmatranu problem konstrukcije generalisanih Gausovih kvadratura sa pozitivnom funkcijom skaliranja kao težinom, pri čemu je osnovni alat u konstrukciji predstavljala dilataciona jednačina. Kardinalni B-splajn četvrtog reda je uzet za tipičan primjer težinske funkcije, a osnovni rezultat je činjenica da su koeficijenti odgovarajuće tročlane rekurentne relacije (ova relacija zauzima centralno mjesto prilkom konstrukcije generalisanih Gausovih kvadratura) racionalni brojevi. Osim toga, neočekivano interesantan rezultat je dobijen u [11] (vidjeti takođe [18]), gdje je dobijena veza između generalisanih Gausovih kvadratura i splajn aproksimacije koja "čuva" proizvoljan broj momenata funkcije koja se aproksimira. Preciznije, uspostavljena je veza između čvorova i koeficijenata aproksimacije sa čvorovima i koeficijentima odgovarajuće Gausove kvadraturne formule.

Ova disertacija predstavlja skorman doprinos teoriji numeričke integracije u slučaju kada se splajn pojavljuje pod znakom integrala. Prilikom njene izrade dobijeno je više rezultata, ali je nekoliko pitanja ostalo bez odgovora. Prije svega, treba istaći hipotezu da kvadraturne formule oblika (3), sa kardinalnim B-splajnom proizvoljnog reda kao težinskom funkcijom i sa više od tri čvora uopšte ne postoje. Ova hipoteza je eksperimentalno potvrđena na splajnovima reda manjeg od dvadeset i na formulama sa manje od dvadeset pet čvorova. Jedino odstupanje je uočeno u slučaju formule sa pet čvorova i splajnom drugog reda kao težinskom funkcijom. Numerički eksperimenti su rađeni i sa formulama oblika (4), gdje na žalost, nije uočena bilo kakva pravilnost koja bi dovela u vezu egzistenciju formule sa redom kardinalnog B-splajna i brojem čvorova. Sa druge strane, više problema je uspješno riješeno, a dobijeni rezultati se mogu podijeliti na dva načina.

Prva mogućnost je podjela rezultata na one u kojima je posmatran problem približnog izračunavanja integrala

$$\int_0^m \varphi_m(x) f(x)dx \tag{5}$$

(integrala kod kojih je kardinalni B-splajn reda m, $m \in \mathbb{N}$, težinska funkcija) i na one u kojima je posmatran klasičan problem numeričke integracije, tj. problem približnog izračunavanja integrala

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{6}$$

Za izlaganje rezultata u ovom radu odabrana je druga mogućnost podjele kojoj djelimično odgovara struktura rada. Naime, osim ovog uvodnog dijela i dodatka, rad ima još četiri glave.

U prvoj glavi su prezentirani rezultati koji se odnose na splajnove proizvoljnog reda. U prvom odjeljku ove glave je konstruisan algoritam za izračnunavanje koeficijenata polinoma kojima je po dijelovima jednak kardinalni B-splajn. U drugom odjeljku je opisano nekoliko načina za izračunavanje momenata kardinalnog B-splajna. U narednom odjeljku je dokazano da uopštena formula pravougaonika, primjenjena za približno izračunavanje integrala (5) na "kvaziravnomjernoj" mreži ima, uslovno govoreći, algebarski stepen tačnosti jednak $m-1$. U posljednjem, četvrtom odjeljku prve glave, pomoću kardinalnog B-splajna proizvoljnog reda, konstruisan je novi metod za približno izračunavanje integrala (6).

U drugoj glavi su izloženi rezultati koji se odnose na splajnove malog (drugog, trećeg i četvrtog) reda. U prvom odjeljku ove glave posmatrana je jedna posebna klasa kvadraturnih formula (tzv. "praktične" kvadraturne formule) sa centriranim B-splajnom drugog reda (krov funkcija), odnosno sa centriranim B-splajnom četvrtog reda (kubni B-splajn) kao težinskom funkcijom. Dokazano je da ove kvadraturne formule ne mogu imati algebarski stepen tačnosti koji je veći od pet. U drugom odjeljku su, pomoću kvadratnog interpolacionog splajna, reprodukovane Simpsonova i Ermitova kvadraturna formula i dobijena je čitava klasa novih kvadraturnih formula.

Programsku podršku nekih rezultata opisanih u prvoj i drugoj glavi predstavlja programski paket *SNI.m* ver. 1.0 koji je napisan u programskom okruženju *Mathematica* ver. 5.0. U paketu su razvijeni moduli koji omogućavaju manipulaciju sa kardinalnim B-splajnovima proizvoljnog reda, konstrukciju aproksimacije zadane funkcije u prostoru generisanom kardinalnim B-splajnom, kao i manipulaciju sa dobijenom aproksimacijom. Osim toga, razvijeni su i moduli koji predstavljaju programsku realizaciju nekih modifikacija trapeznog pravila. Svi numerički rezultati koji su dati u disertaciji dobijeni su upravo korištenjem ovog programskog paketa.

U trećoj glavi disertacije dat je Vodič za korisnike programskog paketa *SNI.m*. Vodič je napisan tako da potencijalnom korisniku, koji nije zainteresovan za detalje teorijskih rezultata, ipak omogući korištenje programskog paketa. U tom kontekstu, vodič predstavlja zasebnu cjelinu koju je moguće čitati nezavisno od ostalog teksta (ovo je razlog za navođenje posebnog spiska literature na kraju vodiča). U posljednjoj, četvrtoj glavi je dat *Mathematica* kod programskog paketa *SNI.m*. Najzad, u prvom, odnosno drugom, dijelu dodatka dati su biografija kandidata i sažetak na engleskom jeziku.

Za tehničku obradu disertacije korišten je program *MikTex* ver. 2.3, osim treće i četvrte glave za čiju je obradu korištena *Mathematica* ver. 5.0. Usaglašavanje dokumenata dobijenih primjenom dva različita programa donekle narušava estetsku formu disertacije. Vodič za korisnike, *Mathematica* kod programskog paketa *SNI.m*, kao i elektronska forma čitave disertacije nalaze se i na pratećem kompakt disku. Prvi dokument je u *.nb formatu (klasičan format *Mathematica* dokumenata), drugi u *.m formatu (klasičan format *Mathematica* paketa), dok je posljednji u *.pdf formatu.

Na kraju ovog uvodnog dijela treba reći i to da je dio izloženih rezulata prezentiran na više međunarondih konferencija i publikovan u časposima *Journal of Mathematical Analysis and Applications, Applied Mathematics Letters, Sarajevo Journal of Mathematics, Acta Universitatis Apulensis* i *General Mathematics*. Jedan rezultat je trenutno u postupku recenzije.

Glava 1

Splajnovi proizvoljnog reda

Slobodno govoreći, kardinalni B-splajn reda $m, m \in \mathbb{N}$, je funkcija sa sljedećim osobinama:

- nosač joj je interval $[0, m]$;
- pripada klasi $C^{m-2}[0, m], m \geq 2$;
- na svakom od intervala $[k, k+1], \quad 0 \leq k \leq m-1$, je polinom stepena $m-1$.

Formalizaciju prethodno rečenog, kao i još neke osobine kardinalnog B-splajna, daju definicija i teorema koje slijede.

Definicija 1. Kardinalni B-splajn prvog reda, u oznaci $\varphi_1(\cdot)$, je karakteristična funkcija intervala $[0, 1)$, tj.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima} \end{cases} .$$

Kardinalni B-splajn reda $m, m \in \mathbb{N}$, u oznaci $\varphi_m(\cdot)$, je

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &= (\varphi_{m-1} * \varphi_1)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m-1}(x-t)\varphi_1(t)dt \\ &= \int_0^1 \varphi_{m-1}(x-t)dt. \end{aligned}$$

Teorema 1. *Kardinalni B-splajn reda $m, m \in \mathbb{N}$, ima sljedeće osobine*

1. $\mathrm{supp}\varphi_m(\cdot) = [0, m]$;
2. $\varphi_m(\cdot) \in C^{m-2}[0, m], m \geq 2$;
3. *na svakom od intervala $[k, k+1], \quad 0 \leq k \leq m-1$, kardinalni B-splajn reda m je polinom stepena $m-1$;*
4. *za svako $t \in [0, m]$ važi*

$$\varphi_m(t) = \frac{t}{m-1}\varphi_{m-1}(t) + \frac{m-t}{m-1}\varphi_{m-1}(t-1), m \geq 2; \tag{1.1}$$

5. *za svako* $t \in [0, m]$ *važi*

$$\varphi_m'(t) = \varphi_{m-1}(t) - \varphi_{m-1}(t-1), m \geq 2; \tag{1.2}$$

6. *kardinalni B-splajn je simetričan na intervalu* $[0, m]$, *tj.*

$$(\forall t \in [0, m]) \quad \varphi_m(t) = \varphi_m(m-t);$$

7. *za svako* $a \in \mathbb{R}$ *važi*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi_m(i-a) = 1; \tag{1.3}$$

8. *Za svaku* m *puta diferencijabilnu funkciju* $g(\cdot)$ *važi*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_m(x) g^{(m)}(x) dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k); \tag{1.4}$$

9. *Kardinalni B-splajn zadovoljava tzv. dilatacionu jednačinu*

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \varphi_m(t) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \varphi_m(2t-k). \tag{1.5}$$

Dokaz teoreme, kao i više detalja o kardinalnim B-splajnovima može se naći npr. u [4] ili [5].

1.1 Izračunavanje koeficijenata kardinalnog B-splajna

Jedna od veoma važnih osobina kardinalnog B-splajna je činjenica da je kardinalni B-splajn po dijelovima polinomijalna funkcija. Poznavanje koeficijenata odgovarajućih polinoma može biti od značajne koristi u raznim situacijama. Međutim, koliko nam je poznato, ne postoji literatura u kojoj je opisan efikasan postupak za određivanje ovih koeficijenata. Prvi rezultat koji iznosimo upravo rješava ovaj problem.

1.1.1 Teorijska osnova

Jednakosti (1.1) i (1.2), nakon pojednostavljivanja, daju diferencijalnu jednačinu

$$(m-x)\varphi_m'(x) + (m-1)\varphi_m(x) = m\varphi_{m-1}(x).$$

Rješenje ove jednačine (koje je očigledno kardinalni B-splajn reda m) tražićemo u obliku polinoma, uz pretpostavku da su koeficijenti kardinalnog B-splajna reda $m-1$ poznati.

Dakle, neka je $x \in [k, k+1]$ i neka je $\varphi_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m,k)} x^i$. Tada je $\varphi_m'(x) = \sum_{i=0}^{m-2} (i+1) a_{i+1}^{(m,k)} x^i$, pa je

$$(m-x)\varphi_m'(x) + (m-1)\varphi_m(x) \quad = \quad (m-x) \sum_{i=0}^{m-2} (i+1) a_{i+1}^{(m,k)} x^i$$

$$
\begin{aligned}
&+(m-1)\sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m,k)} x^i \\
=&\sum_{i=0}^{m-2}\left[m(i+1)a_{i+1}^{m,k}+(m-i-1)a_i^{(m,k)}\right],
\end{aligned}
$$

dok je sa druge strane

$$
m\varphi_{m-1}(x)=m\sum_{i=0}^{m-2} a_i^{(m-1,k)} x^i.
$$

Nakon izjednačavanja odgovarajućih koeficijenata, dobijaju se relacije

$$
\frac{m(i+1)}{i+1-m}a_{i+1}^{(m,k)}-a_i^{(m,k)}=\frac{m}{i+1-m}a_i^{(m-1,k)}, \quad 0\le i\le m-2. \tag{1.6}
$$

Ove relacije predstavljaju sistem od $m-2$ linearne jednačine sa $m-1$ nepoznatih koeficijenata. Ovom sistemu se dodaje jednačina

$$
(m-1)\cdot k\cdot a_{m-1}^{(m,k)}+a_{m-2}^{(m,k)}=(m-1)\cdot k\cdot a_{m-1}^{(m,k-1)}+a_{m-2}^{(m,k-1)},
$$

koja se dobija iz uslova neprekidnosti $(m-2)$-og izvoda kardinalnog B-splajna u tački $x=k$. Posljednje dvije jednačine ovog sistema predstavljaju podsistem reda 2 i jedno rješenje ovog podsistema je

$$
a_{m-1}^{(m,k)}=\frac{1}{(m-1)(m-k)}\left[ma_{m-2}^{(m-1,k)}-k(m-1)a_{m-1}^{(m,k-1)}-a_{m-2}^{(m,k-1)}\right].
$$

Preostali koeficijenti se dobijaju iz relacija (1.6) na sljedeći način:

$$
a_i^{(m,k)}=\frac{m}{i+1-m}\left[(i+1)a_{i+1}^{(m,k)}-a_i^{(m-1,k)}\right], \quad m-2\ge i\ge 0.
$$

U slučaju $k=0$ nije moguće primjeniti opisani postupak, pa u ovom slučaju koristimo posebne relacije. Neka je dakle, $x\in[0,1]$. Iz činjenice da je 0 korijen polinoma $\sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m,0)}x^i$ višestrukosti $m-2$, neposredno slijedi da je

$$
a_i^{(m,0)}=0, \quad m-2\ge i\ge 0.
$$

Za određivanje koeficijenta $a_{m-1}^{(m,0)}$ koristimo relaciju (1.6) (koja važi u slučaju $k=0$) i dobijamo

$$
a_{m-1}^{(m,0)}=\frac{1}{m-1}a_{m-2}^{(m-1,0)}.
$$

Dobijene relacije koriste se za izračunavanje koeficijenata kardinalnog B-splajna "na lijevoj strani" intervala $[0,m]$. U cilju skraćivanja obima računanja, za izračunavanje koeficijenata "na desnoj strani" intervala $[0,m]$ koristićemo simetričnost kardinalnog B-splajna, odnosno simetričnost njegovih izvoda odgovarajućeg reda. Iz činjenice da je $\varphi_m(x)=\varphi_m(m-x)$, slijedi da je $\varphi_m^{(j)}(x)=(-1)^j\varphi_m^{(j)}(m-x)$, za sve $x\in[0,m]$ i sve $j\in\{0,1,\dots,m-1\}$.

Neka je sada $x \in [m-k-1, m-k]$. Tada je

$$\begin{aligned}
\varphi_m^{(j)}(x) &= \sum_{i=0}^{m-j-1} (i+1)(i+2)\dots(i+j)a_{i+j}^{(m,m-k-1)}x^i \\
&= (-1)^j \varphi_m^{(j)}(m-x) \\
&= (-1)^j \sum_{i=0}^{m-j-1} (i+1)(i+2)\dots(i+j)a_{i+j}^{(m,k)}(m-x)^i \\
&= (-1)^j \sum_{i=0}^{m-j-1} (i+1)(i+2)\dots(i+j) \\
&\quad \times a_{i+j}^{(m,k)} \sum_{\ell=0}^{i} \binom{i}{\ell} m^{i-\ell}(-1)^\ell x^\ell \\
&= (-1)^j \sum_{i=0}^{m-j-1} (i+1)(i+2)\dots(i+j)a_{i+j}^{(m,k)} \left[m^i + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Slobodni koeficijenti moraju biti jednaki, odakle slijedi da je

$$\begin{aligned}
a_j^{(m,m-k-1)} &= \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i=0}^{m-j-1} (i+1)(i+2)\dots(i+j)a_{i+j}^{(m,k)}m^i, \\
&\quad 0 \le j \le m-2.
\end{aligned}$$

Nije se teško uvjeriti da se posljednja relacija može proširiti i na slučaj $j = m-1$, pa se najstariji koeficijent izračunava po formuli

$$a_{m-1}^{(m,m-k-1)} = (-1)^{m-1}a_{m-1}^{(m,k)}.$$

Na osnovu prethodnog razmatranja može se formulisati sljedeći rezultat

Teorema 2. *Neka su* $m, k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le m-1$, $x \in [k, k+1]$ *i* $\varphi_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m,k)}x^i$. *Dalje, neka su koeficijenti kardinalnog B-splajna reda* $m-1$ *poznati. Koeficijenti kardinalnog B-splajna reda* m *zadovoljavaju sljedeće relacije:*

$$a_{m-1}^{(m,0)} = \frac{1}{m-1}a_{m-2}^{(m-1,0)}; \tag{1.7}$$

$$a_i^{(m,0)} = 0, \quad m-2 \ge i \ge 0. \tag{1.8}$$

- *ako je* m *neparno i* $1 \le k \le [m/2]$ *(*$[a]$ *označava najveći cijeli broj koji nije veći od realnog broja* a*), tj. ako je* m *parno i* $1 \le k \le m/2-1$*, onda je*

$$\begin{aligned}
a_{m-1}^{(m,k)} &= \frac{1}{(m-1)(m-k)}\Big[ma_{m-2}^{(m-1,k)} - k(m-1)a_{m-1}^{(m,k-1)} \\
&\quad -a_{m-2}^{(m,k-1)}\Big], \qquad (1.9) \\
a_i^{(m,k)} &= \frac{m}{i+1-m}\left[(i+1)a_{i+1}^{(m,k)} - a_i^{(m-1,k)}\right], \qquad (1.10) \\
&\quad m-2 \ge i \ge 0;
\end{aligned}$$

- *ako je m neparno i $[m/2]+1 \leq k \leq m-1$, tj. ako je m parno i $m/2 \leq k \leq m-1$, onda je*

$$a_{m-1}^{(m,m-k-1)} = (-1)^{m-1} a_{m-1}^{(m,k)}, \tag{1.11}$$

$$a_j^{(m,m-k-1)} = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i=0}^{m-j-1} (i+1)(i+2)\dots(i+j) a_{i+j}^{(m,k)} m^i,$$
$$0 \leq j \leq m-2. \tag{1.12}$$

Lako je provjeriti da se relacija (1.9), u slučju $k=0$, pod pretpostavkama $a_{m-1}^{(m,-1)} = 0$ i $a_{m-2}^{(m,-1)} = 0$, svodi na relaciju (1.7). Dalje, pod istim pretpostavkama, relacije (1.10) se svode na relacije (1.8).

1.1.2 Algoritam za izračunavanje koeficijenata kardinalnog B-splajna

Ulazni argument algoritma je red kardinalnog B-splajna, pozitivan cijeli broj M. Na izlazu se dobijaju koeficijenti kardinalnih B-splajnova reda $1, 2, \dots, M$. Izlazni koeficijenti su elementi trodimenzionog niza a, pri cemu je korištena oznaka $a(i,m,k) = a_i^{(m,k)}$. Algoritam je realizovan tako da se u istoj petlji izračunavaju koeficijenti polinoma koji su definisani na simetričnim intervalima. Naime, prvo se izračunavaju koeficijenti polinoma definisanih na intervalima $[0,1]$ i $[m-1,m]$. Zatim se (u istim petljama) izračunavaju koeficijenti polinoma definisanih na intervalima $[1,2]$ i $[m-2,m-1]$, $[2,3]$ i $[m-3,m-2]$, itd. Ukoliko je broj intervala neparan, u posljednjem se koraku izračunavaju koeficijenti polinoma definisanog na srednjem intervalu. Opisani postupak se ponavlja onoliko puta koliki je zadani red splajna M.

Algoritam 1.
Postaviti $a(0,1,0) = 1$.

for $m = 2$ **to** M **do**

  Postaviti $a(m-1,m,-1) = 0, a(m-2,m,-1) = 0$ *i* $g = \left[\frac{m}{2}\right] - 1$.

  for $k = 0$ **to** g **do**

    za izračunavanje koeficijenta $a(m-1,m,k)$ *koristiti jednakost (1.9).*
    za izračunavanje koeficijenta $a(m-1,m,m-k-1)$ *koristiti jednakost (1.11).*

    for $i = m-2$ **to** 0 **do**
      za izračunavanje koeficijenta $a(i,m,k)$ *koristiti jednakost (1.10).*
      za izračunavanje koeficijenta $a(i,m,m-k-1)$, *postaviti* $j = i$, *preimenovati indeks sume i koristiti jednakost (1.12).*

  ako je m **neparno**

    za izračunavanje koeficijenta $a(m-1,m,g+1)$ *postaviti* $k = g+1$ *i koristiti jednakost (1.9).*

    for $i = m-2$ **to** 0 **do**
      za izračunavanje koeficijenta $a(i,m,g+1)$ *postaviti* $k = g+1$ *i korisititi jednakost (1.10).*

1.1.3 Numerički primjeri

Primjenom opisanog algoritma izračunali smo koeficijente kardinalnih B-splajnova reda $2, 3, \dots, 7$. Odgovarajuće koeficijente dajemo u obliku matrice, budući da je na taj način potpuno određen kardinalni B-splajn reda m. Naime, proizvod

$$\begin{pmatrix} a_{m-1}^{(m,0)} & a_{m-2}^{(m,0)} & \dots & a_0^{(m,0)} \\ a_{m-1}^{(m,1)} & a_{m-2}^{(m,1)} & \dots & a_0^{(m,1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1}^{(m,m-1)} & a_{m-2}^{(m,m-1)} & \dots & a_0^{(m,m-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{m-1} \\ x^{m-2} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

jednak je koloni čije su komponente odgovarajući polinomi. Na intervalu $[0, 1]$ kardinalni B-splajn reda m jednak je prvom polinomu, na intervalu $[1, 2]$ drugom, itd... Na intervalu $[m-1, m]$ kardinalni B-splajn reda m jednak je posljednjem polinomu.

Primjer 1. Za kardinalni B-splajn reda 2 odgovarajuća matrica je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primjer 2. Za kardinalni B-splajn reda 3 odgovarajuća matrica je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Primjer 3. Za kardinalni B-splajn reda 4 odgovarajuća matrica je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 2 & -2 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -4 & 10 & \frac{-22}{3} \\ \frac{-1}{6} & 2 & -8 & \frac{32}{3} \end{pmatrix}.$$

Primjer 4. Za kardinalni B-splajn reda 5 odgovarajuća matrica je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-5}{4} & \frac{5}{6} & \frac{-5}{24} \\ \frac{1}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{35}{4} & \frac{-25}{2} & \frac{155}{24} \\ \frac{-1}{6} & \frac{5}{2} & \frac{-55}{4} & \frac{65}{2} & \frac{-655}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{-5}{6} & \frac{25}{4} & \frac{-125}{6} & \frac{625}{24} \end{pmatrix}.$$

Primjer 5. Za kardinalni B-splajn reda 6 odgovarajuća matrica je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{120} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{12} & -1 & \frac{9}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{39}{4} & \frac{-79}{20} \\ \frac{-1}{12} & \frac{3}{2} & \frac{-21}{2} & \frac{71}{2} & \frac{-231}{4} & \frac{731}{20} \\ \frac{1}{24} & -1 & \frac{19}{2} & \frac{-89}{2} & \frac{409}{4} & \frac{-1829}{20} \\ \frac{-1}{120} & \frac{1}{4} & -3 & 18 & -54 & \frac{324}{5} \end{pmatrix}.$$

Primjer 6. Za kardinalni B-splajn reda 7 odgovarajuća matrica je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{720} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{120} & \frac{7}{120} & \frac{-7}{48} & \frac{7}{36} & \frac{-7}{48} & \frac{7}{120} & \frac{-7}{720} \\ \frac{1}{48} & \frac{-7}{24} & \frac{77}{48} & \frac{-161}{36} & \frac{329}{48} & \frac{-133}{24} & \frac{1337}{720} \\ \frac{-1}{36} & \frac{7}{12} & \frac{-119}{24} & \frac{196}{9} & \frac{-1253}{24} & \frac{196}{3} & \frac{-12089}{360} \\ \frac{1}{48} & \frac{7}{12} & \frac{161}{24} & \frac{364}{9} & \frac{3227}{24} & \frac{-700}{3} & \frac{59591}{360} \\ \frac{-1}{120} & \frac{7}{24} & \frac{-203}{48} & \frac{1169}{36} & \frac{-6671}{48} & \frac{7525}{24} & \frac{-208943}{720} \\ \frac{1}{720} & \frac{-7}{120} & \frac{49}{48} & \frac{-343}{36} & \frac{2401}{48} & \frac{-16807}{120} & \frac{117649}{720} \end{pmatrix}.$$

1.2 Izračunavanje momenata kardinalnog B-splajna

Izračunavanje momenata zadane težinske funkcije ima esencijalni značaj prilikom konstrukcije ortogonalnih polinoma i kvadraturnih formula, kao i u drugim oblastima teorije aproksimacija. Sa druge strane, kardinalni B-splajn je veoma česta težinska funkcija. Ovdje iznosimo šest različitih metoda za izračunavanje momenata kardinalnog B-splajna. Prva tri metoda su jednostavne posljedice osnovnih osobina kardinalnog B-splajna. Njihov osnovni nedostatak je rekurzivno izračunavanje. Četvrti metod se može iskoristiti za izračunavanje prvih $m-1$ momenata ako je m parno, odnosno prvih m momenata ako je m neparno. Ovaj metod nije rekurzivan i koristi samo vrijednosti kardinalnog B-splajna u cjelobrojnim tačkama. Svakako, osnovni nedostatak ovog metoda je ograničen broj momenata koje je moguće izračunati. Peti metod pretpostavlja poznavanje koeficijenata polinoma kojima je po dijelovima jednak kardinalni B-splajn (algoritam za izračunavanje ovih koeficijenata je opisan u prethodnom odjeljku). Posljednji metod je takođe posljedica osnovnih osobina kardinalnog B-splajna i najjednostavniji je u praktičnim realizacijama.

Prvi metod. Koristeći dilatacionu jednačinu (1.5) dobija se

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_{n,m} &= \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\int_0^m \varphi_m(2t-k)t^n dt \\
&= \frac{1}{2^{m+n}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\int_0^m \varphi_m(x)(x+k)^n dx \\
&= \frac{1}{2^{m+n}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left[\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n}{\ell}k^{n-\ell}\mathbb{M}_{\ell,m}+\mathbb{M}_{n,m}\right] \\
&= \frac{1}{2^{m+n}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{m}{k}\binom{n}{\ell}k^{n-\ell}\mathbb{M}_{\ell,m}+\frac{1}{2^n}\mathbb{M}_{n,m}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mathbb{M}_{n,m} = \frac{1}{2^m(2^n-1)}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{m}{k}\binom{n}{\ell}k^{n-\ell}\mathbb{M}_{\ell,m} \tag{1.13}$$

Drugi metod. Iz jednakosti (1.1) dobija se

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_{n,m} &= \frac{1}{m-1}\int_0^m \left[\varphi_{m-1}(t)t+\varphi_{m-1}(t-1)(m-t)\right]t^n dt \\
&= \frac{1}{m-1}\int_0^{m-1}\varphi_{m-1}(x)x^{n+1}dx \\
&\quad +\frac{1}{m-1}\int_0^{m-1}\varphi_{m-1}(x)(m-1-x)(x+1)^n dx \\
&= \frac{1}{m-1}\mathbb{M}_{n+1,m-1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbb{M}_{k,m-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{m-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbb{M}_{k+1,m-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbb{M}_{k,m-1} - \frac{1}{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\mathbb{M}_{k+1,m-1} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} - \frac{1}{m-1}\binom{n}{k-1}\right]\mathbb{M}_{k,m-1}.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{M}_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbb{M}_{k,m-1} - \frac{1}{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\mathbb{M}_{k+1,m-1} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} - \frac{1}{m-1}\binom{n}{k-1}\right]\mathbb{M}_{k,m-1}.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Treći metod. Koristeći jednakost (1.2) i činjenicu $\varphi_m(0) = \varphi_m(m) = 0$, nakon parcijalne integracije se dobija

$$
\begin{aligned}
\mathbb{M}_{n,m} &= \frac{1}{n+1}\int_0^m \left[\varphi_{m-1}(t-1) - \varphi_{m-1}(t)\right] t^{n+1} dt \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\int_0^{m-1} \varphi_{m-1}(t)(t+1)^{n+1} dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{m-1} \varphi_{m-1}(t) t^{n+1} dt\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\mathbb{M}_{k,m-1}.
\end{aligned}
$$

Četvrti metod je, svakako, najznačajniji rezultat ovog odjeljka. Posljedica je jedne generalizacije jednakosti (1.3) koju opisuje teorema koja slijedi.

Teorema 3. *Za svako $a \in \mathbb{R}$ i svako $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, važi sljedeća jednakost*

$$
\mathbb{M}_{n,m} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi_m(i-a)(i-a)^n, \quad 0 \leq n \leq m-1. \tag{1.15}
$$

Dokaz: Tvrđenje se dokazuje indukcijom po $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Za $m = 2$ tvrđenje se provjerava neposredno.

Neka je

$$
\mathbb{M}_{n,m} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi_m(i-a)(i-a)^n,
$$

za svako $a \in \mathbb{R}$ i svako $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $0 \leq n \leq m-1$. Treba dokazati da je

$$
\mathbb{M}_{n,m+1} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi_{m+1}(i-a)(i-a)^n
$$

za svako $a \in \mathbb{R}$ i svako $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $0 \leq n \leq m$. Neka je $0 \leq n \leq m-1$. Koristeći jednakost (1.14) dobija se

$$
\begin{aligned}
\mathbb{M}_{n,m+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbb{M}_{k,m} - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\mathbb{M}_{k+1,m} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(i-a)^k \\
&\quad -\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(i-a)^{k+1} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)\Big\{m(i-a+1)^n \\
&\quad -(i-a)\Big[(i-a+1)^n-(i-a)^n\Big]\Big\} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(i-a)^{n+1} \\
&\quad +\frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(m-i+a)(i-a+1)^n \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(i-a)^{n+1} \\
&\quad +\frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a-1)(m+1-i+a)(i-a)^n \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Big[\varphi_m(i-a)(i-a) \\
&\quad +\varphi_m(i-a-1)(m+1-i+a)\Big](i-a)^n \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_{m+1}(i-a)(i-a)^n
\end{aligned}
$$

Ostaje da se tvrđenje dokaže za $n=m$. Ponovo koristeći jednakost (1.14) dobija se

$$
\begin{aligned}
\mathbb{M}_{m,m+1} &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathbb{M}_{k,m} - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\mathbb{M}_{k+1,m} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\mathbb{M}_{k,m} - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m}{k}\mathbb{M}_{k+1,m} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(i-a)^k \\
&\quad -\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m}{k}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(i-a)^{k+1} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)\Big\{m\Big[(i-a+1)^m-(i-a)^m\Big] \\
&\quad -(i-a)\Big[(i-a+1)^m-(i-a)^m-m(i-a)^{m-1}\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(i-a)^{m+1} \\
&\quad +\frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(m-i+a)(i-a+1)^m \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a)(i-a)^{m+1} \\
&\quad +\frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i-a-1)(m-i+1+a)(i-a)^m \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Big[\varphi_m(i-a)(i-a) \\
&\quad +\varphi_m(i-a-1)(m+1-i+a)\Big](i-a)^m \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_{m+1}(i-a)(i-a)^m,
\end{aligned}
$$

čime je dokaz završen. ▶

Specijalno, za $a=0$ dobija se da je

$$\mathbb{M}_{n,m} = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\varphi_m(i)i^n = \sum_{i=1}^{m-1}\varphi_m(i)i^n,$$

za svako $m\in\mathbb{N}$ i svako $n\in\mathbb{N}$ takvo da je $0\le n\le m-1$.

Dalje, kvadraturna formula

$$\int_0^m \varphi_m(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{m-1}\varphi_m(i)f(i).$$

može biti shvaćena kao formula Njutn-Kotesovog tipa sa čvorovima $1,2,\ldots,$ $m-1$, koeficijentima $\varphi_m(1),\varphi_m(2),\ldots,\varphi_m(m-1)$ i težinskom funkcijom $\varphi_m(\cdot)$ (sistem čvorova i koeficijenata može se proširiti sa čvorovima 0 i m, tj. sa koeficijentima $\varphi_m(0)$ i $\varphi_m(m)$). U skladu sa prethodnim, ova formula je tačna za svaki polinom stepena manjeg od m. Budući da je težinska funkcija parna u odnosu na sredinu intervala integracije $[0,m]$ i da su čvorovi simetrični u odnosu na sredinu istog intervala, ova formula je tačna i za sve polinome stepena m u slučaju kada je m neparno. Najzad, ako je a cijeli broj i m neparno, prema prethodnom, jednostavno je provjeriti da jednakost (1.15) važi i u slučaju $n=m$.

Peti metod. Koristeći oznake iz prethodnog odjeljka, tj. pretpostavljajući da je $\varphi_m(x)=\sum_{i=0}^{m-1}a_i^{(m,k)}x^i$ za $x\in[k,k+1]$, jednostavno se dobija da je

$$M_{n,m} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}\left[a_{i-1}^{(m,m-1)}m^i + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_{i-1}^{(m,k-1)} - a_{i-1}^{(m,k)}\right)k^i\right].$$

Šesti metod. Uvrštavanjem $g(x)=\dfrac{x^{m+n}}{(m+n)(m+n-1)\ldots(n+1)}$ u jednakost (1.4) dobija se da je

$$M_{n,m} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\frac{k^{m+n}}{(m+n)(m+n-1)\ldots(n+1)}.$$

1.3 Jednotačkasta kvadraturna formula sa splajnom

Prilikom izračunavanja koeficijenata malotalasne aproksimacije funkcije $f(\cdot)$ neizbježan je problem izračunavanja integrala

$$\int_0^L \varphi(x)f(x)dx,$$

gdje je $\varphi(\cdot)$ tzv. funkcija skaliranja, dok je interval $[0, L], L \in \mathbb{N}$, nosač funkcije skaliranja.

Budući da u opštem slučaju ne postoji analitički izraz za funkciju skaliranja, prethodni integral se mora izračunavati približno. Problem konstrukcije kvadraturnih formula za približno izračunavanje prethodnog integrala posmatrali su mnogi autori (npr. u radovima [9] i [16] su posmatrane Gausove kvadraturne formule, dok su u radovima [8], [15] i [31] posmatrane kvadraturne formule sa unaprijed zadanim čvorovima).

Budući da je kardinalni B-splajn tipičan primjer funkcije skaliranja, prirodno je posmatrati problem približnog izračunavanja integrala (5). Recimo i to da je problem konstrukcije Gausovih kvadraturnih formula sa kardinalnim B-splajnom kao težinskom funkcijom posmatran u radu [23]. Dalje, pošto kardinalni B-splajnovi imaju čitav niz specifičnih osobina, logično je očekivati da i neke klasične kvadraturne formule, primjenjene za približno izračunavanje integrala (5), takođe ispolje neke specifičnosti. U ovom odjeljku je, za približno izračunavanje integrala (5), korištena klasična uopštena formula pravougaonika. Dokazano je da je korištena formula, na "kvaziravnomjernoj" mreži, tačna u slučaju kada je $f(\cdot)$ polinom stepena ne većeg od $m-1$. U nekim specijalnim slučajevima, korištena formula je tačna i kada je $f(\cdot)$ polinom stepena ne većeg od m.

1.3.1 Glavni rezultat

Osnovna formula u ovom odjeljku je klasična jednotačkasta formula

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(X), \tag{1.16}$$

sa izabranom tačkom $X = (1-\lambda)a + \lambda b$, za neko $\lambda \in [0,1]$.

Neka su $x_1 < x_2 < \cdots < x_{p-1}$ proizvoljne tačke iz intervala $(0,1)$ i neka je na intervalu $[0, m]$ data podjela

$$\begin{array}{ccccc}
0, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_{p-1}, \\
1, & x_1+1, & x_2+1, & \ldots, & x_{p-1}+1, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m-1, & x_1+m-1, & x_2+m-1, & \ldots, & x_{p-1}+m-1, \\
m. & & & &
\end{array}$$

Ovakva vrsta podjele naziva se "kvaziravnomjerna" mreža. Dalje, neka su u svakom intervalu date podjele izabrane tačke $X_k + i$, $0 \le i \le m-1$, gdje je $X_k = (1-\lambda_k)x_k + \lambda_k x_{k+1}$, za neko $\lambda_k \in [0,1]$, $0 \le k \le p-1$, (prirodno, $x_0 = 0$ i $x_p = 1$).

Za približno izračunavanje integrala (5), na svakom intervalu uočene podjele koristi se formula (1.16), sa izabranim tačkama $X_k + i$, $0 \leq k \leq p-1$, $0 \leq i \leq m-1$. Nakon sumiranja se dobija da je

$$\int_0^m \varphi_m(x)f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)f(X_j+i). \tag{1.17}$$

Teorema 4. *Ako je* $f(x) = x^n$, $0 \leq n \leq m-1$, *onda je kvadraturna formula (1.17) tačna za svako* $m \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Tvrđenje se dokazuje indukcijom po m.

Za $m = 1$ tvrđenje se dokazuje neposredno. Jedino treba primjetiti da u slučaju $X_{p-1} = x_p = 1$, umjesto vrijednosti $\varphi_1(1) = 0$ treba koristiti vrijednost $\varphi_1(1) = 1$.

Neka je sada

$$\int_0^m \varphi_m(x)x^n dx = \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)(X_j+i)^n,$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $0 \leq n \leq m-1$. Treba dokazati da je

$$\int_0^{m+1} \varphi_{m+1}(x)x^n dx = \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m}\varphi_{m+1}(X_j+i)(X_j+i)^n,$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $0 \leq n \leq m$.

Neka je $0 \leq n \leq m-1$. Tada je

$$\begin{aligned}
\int_0^{m+1} \varphi_{m+1}(x)x^n dx &= \frac{1}{m}\int_0^{m+1}\left[\varphi_m(x)x + \varphi_m(x-1)(m+1-x)\right]x^n dx \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^m \varphi_m(x)x^k dx \\
&\quad -\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\int_0^m \varphi_m(x)x^{k+1}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)(X_j+i)^k \\
&\quad -\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i) \\
&\quad \cdot(X_j+i)^{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)\Bigg\{ m(X_j+i+1)^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -(X_j+i)\Big[(X_j+i+1)^n-(X_j+i)^n\Big]\Big\}\\
= \;& \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\left[\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)(X_j+i)^{n+1}\right.\\
& \left.+\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)(m-X_j-i)(X_j+i+1)^n\right]\\
= \;& \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\left[\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}\varphi_m(X_j+i)(X_j+i)^{n+1}\right.\\
& \left.+\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}\varphi_m(X_j+i-1)(m-X_j-i+1)(X_j+i)^n\right]\\
= \;& \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}\left[\varphi_m(X_j+i)(X_j+i)\right.\\
& \left.+\varphi_m(X_j+i-1)(m+1-X_j-i)\right](X_j+i)^n\\
= \;& \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m}\varphi_{m+1}(X_j+i)(X_j+i)^n.
\end{aligned}
$$

Ostaje još da se tvrđenje dokaže za $n=m$. Zaista,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{m+1}\varphi_{m+1}(x)x^m dx \;=\;& \frac{1}{m}\int_0^{m+1}\left[\varphi_m(x)x+\varphi_m(x-1)(m+1-x)\right]x^m dx\\
=\;& \frac{1}{m}\int_0^{m}\varphi_m(x)x^{m+1}dx+\int_0^{m}\varphi_m(x)(x+1)^m dx\\
& -\frac{1}{m}\int_0^{m}\varphi_m(x)x(x+1)^m dx\\
=\;& \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\int_0^{m}\varphi_m(x)x^k dx\\
& -\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m}{k}\int_0^{m}\varphi_m(x)x^{k+1}dx\\
=\;& \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)(X_j+i)^k\\
& -\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)\\
& \cdot(X_j+i)^{k+1}\\
=\;& \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)\Big\{m(X_j+i+1)^m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(X_j+i)\Big[(X_j+i+1)^m-(X_j+i)^m\Big]\Bigg\} \\
= \quad & \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\left[\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)(X_j+i)^{m+1}\right. \\
& \left.+\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X_j+i)(m-X_j-i)(X_j+i+1)^m\right] \\
= \quad & \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\left[\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}\varphi_m(X_j+i)(X_j+i)^{m+1}\right. \\
& \left.+\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}\varphi_m(X_j+i-1)(m-X_j-i+1)(X_j+i)^m\right] \\
= \quad & \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{m}\left[\varphi_m(X_j+i)(X_j+i)\right. \\
& \left.+\varphi_m(X_j+i-1)(m+1-X_j-i)\right](X_j+i)^m \\
= \quad & \sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)\sum_{i=0}^{m}\varphi_{m+1}(X_j+i)(X_j+i)^m,
\end{aligned}
$$

čime je tvđenje dokazano u potpunosti. ▶

1.3.2 Posljedice

Očigledno, formula (1.17) je tačna ako je funkcija $f(\cdot)$ neparna u odnosu na pravu $x=m/2$, a izabrane tačke X_k+i i čvorovi x_k+i simetrični u odnosu na sredinu intervala $[0,m]$. Ovo je posljedica činjenice da je kardinalni B-splajn parna funkcija u odnosu na pravu $x=m/2$. Specijalno, ako je m neparno, a čvorovi i izabrane tačke simetrični u odnosu na sredinu intervala $[0,m]$, formula (1.17) je tačna i za $f(x)=x^m$.

Dokazana teorema važi i u slučaju $p=1$ (tj. kvadraturna fomula bez umetnutih tačaka ima isti (uslovni) algebarski stepen tačnosti), ali je tačnost ovakvih kvadratura bolja ukoliko je p veće (vidjeti numeričke primjere na kraju odjeljka). Naime, u slučaju $p=1$ čvorovi mreže su tačke $x_k=k$, $0\le k\le m$, pri čemu je izabrana samo jedna tačka $X=X_0\in[0,1]$. Svakako, na svim mjestima u dokazu treba izostaviti član $\sum_{j=0}^{p-1}(x_{j+1}-x_j)$, a izabrane tačke zamijeniti sa X. Ovo znači da tačke $0,1,\ldots,m-1,m$ imaju esencijalni značaj u skupu čvorova (direktnom provjerom se dokazuje da teorema ne važi ukoliko se barem jedna od ovih tačaka izostavi iz sistema čvorova). Dakle, u slučaju $p=1$ formula (1.17) glasi

$$
\int_0^m \varphi_m(x)f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_m(X+i)f(X+i).
$$

Sa izborom $X=0$ ili $X=1$ posljednja formula postaje

$$
\int_0^m \varphi_m(x)f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{m-1}\varphi_m(i)f(i). \tag{1.18}
$$

Prema prethodnom, formula (1.18) je tačna ako je $f(\cdot)$ polinom stepena ne većeg od $m-1$ i m je parno, odnosno ako je $f(\cdot)$ polinom stepena ne većeg od m i m je neparno. Dakle, formula (1.18) omogućava direktno izračunavanje prvih $m-1$ (ako je m parno), tj. prvih m (ako je m neparno) momenata kardinalnog B-splajna

$$\mathbb{M}_n = \int_0^m \varphi_m(x)x^n dx = \sum_{i=1}^{m-1} \varphi_m(i)i^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2$$

(ova formula je dobijena i u prethodnom odjeljku). Treba naglasiti da sučaj $m = 1$ zahtijeva nešto detaljniju analizu koju ovdje izostavljamo. U svakom slučaju, ako je $m = 1$, posmatrani problem se svodi na približno izračunavanje integrala

$$\int_0^1 f(x)dx,$$

a ovaj integral nije predmet istraživanja.

Izborom $\lambda_0 = 0$, tj. $X_0 = 0$ i $\lambda_{p-1} = 1$, tj. $X_{p-1} = 1$ formula (1.17) postaje

$$\begin{aligned}\int_0^m \varphi_m(x)f(x)dx \quad &\approx \quad (1 + x_1 - x_{p-1}) \sum_{i=0}^{m} \varphi_m(i)f(i) \\ &+ \sum_{j=1}^{p-2}(x_{j+1} - x_j) \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_m(X_j + i)f(X_j + i).\end{aligned}$$

Specijalan slučaj posljednje formule je uopštena formula pravougaonika na skupu čvorova

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{1}{p}, & \dfrac{2}{p}, & \ldots, & \dfrac{p-1}{p}, \\ \dfrac{1}{p} + 1, & \dfrac{2}{p} + 1, & \ldots, & \dfrac{p-1}{p} + 1, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{p} + m - 1, & \dfrac{2}{p} + m - 1, & \ldots, & \dfrac{p-1}{p} + m - 1. \end{array}$$

Dakle, uopštena formula pravougaonika na prethodnom skupu čvorova je tačna ako je $f(x) = x^k$, $0 \leq k \leq m-1$. Ako je $f(x) = x^m$ i m je neparno, ova formula je takođe tačna. Na ovaj način, moguće je (samo formalno) iz skupa čvorova izostaviti tačke $0, 1, \ldots, m-1, m$.

1.3.3 Numerički primjeri

Na kraju ovog odjeljka navodimo nekoliko numeričkih primjera. U svakom primjeru su, pomoću uopštene formule centralnih pravougaonika, približno izračunati integrali

$$\int_0^m \varphi_m(x)f(x)dx, \tag{1.19}$$

za $m \in \{4, 6, 9\}$. Na izbor funkcije $f(\cdot)$ su uticali numerički primjeri dati u [9]. Kao što se i moglo očekivati, konvergencija je brža ukoliko je red kardinalnog B-splajna veći. U odgovarajućim tabelama date su relativne greške rezultata, pri čemu u svakoj tabeli prva kolona odgovara koraku integracije, dok se u preostalim kolonama navode odgovarajuće relativne greške. Kao i obično, brojevi u uglastim zagradama označavaju eksponent broja deset. Za tačno izračunavanje integrala (1.19) u svim primjerima je korištena formula (1.4).

Primjer 7. Neka je

$$f(x) = \sum_{i=0}^{s} \frac{x^i}{i!}, \text{ za } s \in \{3, 9, 15\}.$$

Tačne vrijednosti integrala (1.19) su:

$$\int_0^4 \varphi_4(x) f(x) dx = \begin{cases} 6.8\dot{3}, & s = 3, \\ 8.71331624780, & s = 9, \\ 8.71721106989, & s = 15, \end{cases}$$

$$\int_0^6 \varphi_6(x) f(x) dx = \begin{cases} 14, & s = 3, \\ 25.5896097884, & s = 9, \\ 25.7373596920, & s = 15 \end{cases}$$

i

$$\int_0^9 \varphi_9(x) f(x) dx = \begin{cases} 32.\overline{875}, & s = 3, \\ 123.803089038, & s = 9, \\ 130.529144206, & s = 15. \end{cases}$$

Treba napomenuti da su prethodni integrali racionalni brojevi, ali su navedene njihove približne vrijednosti zaokrugljenje na dvanaest sigurnih cifara.

U slučaju $s = 3$, tačne vrijednosti su dobijene već sa korakom $h = 1$. Relativne greške za $s = 9$ i $s = 15$ date su u tabeli koja slijedi.

	$s = 9$		$s = 15$		
h	$m = 4$	$m = 6$	$m = 4$	$m = 6$	$m = 9$
1/1	0.925[−3]	0.148[−4]	0.922[−3]	0.173[−4]	0.868[−7]
1/2	0.690[−4]	0.263[−6]	0.711[−4]	0.435[−6]	0.100[−9]
1/3	0.141[−4]	0.236[−7]	0.146[−4]	0.412[−7]	0.179[−11]
1/4	0.449[−5]	0.424[−8]	0.467[−5]	0.752[−8]	0.102[−12]
1/5	0.185[−5]	0.111[−8]	0.192[−5]	0.200[−8]	0.110[−13]
1/6	0.894[−6]	0.374[−9]	0.931[−6]	0.673[−9]	0.178[−14]
1/7	0.483[−6]	0.149[−9]	0.503[−6]	0.268[−9]	0.381[−15]
1/8	0.284[−6]	0.667[−10]	0.295[−6]	0.121[−9]	0.100[−15]
1/9	0.177[−6]	0.329[−10]	0.185[−6]	0.595[−10]	0.309[−16]
1/10	0.116[−6]	0.175[−10]	0.121[−6]	0.317[−10]	0.108[−16]

Vrijednosti $s = 9$ i $m = 9$ su izostavljene iz tabele, budući da su i u ovom slučaju tačne vrijednosti integrala dobijene već sa korakom $h = 1$.

Primjer 8. Neka je sada u (1.19) $f(x) = \exp(x)$. Vrijednosti integrala (1.19) (zaokrugljene na dvanaest sigurnih cifara) u ovom slučaju iznose

$$\int_0^m \varphi_m(x) f(x) dx = \begin{cases} 8.71721162014, & m = 4, \\ 25.7375014239, & m = 6, \\ 130.571855425, & m = 9. \end{cases}$$

Relativne greške približnog izračunavanja ovih integrala su date u sljedećoj tabeli.

h	$m=4$	$m=6$	$m=9$
1/1	0.922[−3]	0.172[−4]	0.116[−6]
1/2	0.711[−4]	0.436[−6]	0.163[−9]
1/3	0.146[−4]	0.414[−7]	0.302[−11]
1/4	0.467[−5]	0.756[−8]	0.174[−12]
1/5	0.192[−5]	0.201[−8]	0.189[−13]
1/6	0.931[−6]	0.676[−9]	0.306[−14]
1/7	0.503[−6]	0.269[−9]	0.658[−15]
1/8	0.296[−6]	0.121[−9]	0.173[−15]
1/9	0.185[−6]	0.599[−10]	0.535[−16]
1/10	0.121[−6]	0.319[−10]	0.187[−16]

Primjer 9. Na kraju navodimo tri oscilatorne funkcije. Dakle, neka je u (1.19)

$$f(x) = \cos \frac{s \cdot 2\pi \cdot x}{m} \quad \text{za } s \in \{3, 7, 11\}.$$

Tačne vrijednosti integrala (zaokrugljene na dvanaest sigurnih cifara) u slučaju $s = 3$ iznose

$$\int_0^m \varphi_m(x) f(x) dx = \begin{cases} -0.811139338642[-2], & m = 4, \\ -0.665703342909[-1], & m = 6, \\ \quad -0.180933141368, & m = 9, \end{cases}$$

dok su relativne greške približinog izračunavanja ovih integrala date u tabeli koja slijedi.

h	$m=4$	$m=6$	$m=9$
1/1	0.809[2]	0.100[1]	0.195[−2]
1/2	0.132	0.143[−2]	0.487[−6]
1/3	0.135[−1]	0.718[−4]	0.645[−8]
1/4	0.331[−2]	0.103[−4]	0.330[−9]
1/5	0.120[−2]	0.242[−5]	0.338[−10]
1/6	0.542[−3]	0.762[−6]	0.533[−11]
1/7	0.281[−3]	0.291[−6]	0.112[−11]
1/8	0.160[−3]	0.128[−6]	0.293[−12]
1/9	0.981[−4]	0.618[−7]	0.896[−13]
1/10	0.635[−4]	0.325[−7]	0.311[−13]

U slučaju $s = 7$ tačne vrijednosti (takođe zaokrugljene na dvanaest sigurnih cifara) integrala iznose

$$\int_0^m \varphi_m(x) f(x) dx = \begin{cases} -0.273645507830[-3], & m = 4, \\ -0.644525422258[-5], & m = 6, \\ -0.603335446629[-5], & m = 9, \end{cases}$$

dok su, kao i u prethodnom slučaju, relativne greške približinog izračunavanja ovih integrala date u tabeli koja slijedi.

h	$m = 4$	$m = 6$	$m = 9$
1/1	0.237[4]	0.118[6]	0.788[5]
1/2	0.240[4]	0.753[1]	0.171[−1]
1/3	0.383[1]	0.667[−1]	0.781[−4]
1/4	0.368	0.498[−2]	0.270[−5]
1/5	0.864[−1]	0.834[−3]	0.230[−6]
1/6	0.304[−1]	0.215[−3]	0.326[−7]
1/7	0.135[−1]	0.718[−4]	0.645[−8]
1/8	0.691[−2]	0.287[−4]	0.161[−8]
1/9	0.393[−2]	0.131[−4]	0.479[−9]
1/10	0.241[−2]	0.653[−5]	0.163[−9]

Najzad, u slučaju $s = 11$ tačne vrijednosti integrala (ponovo zaokrugljene na dvanaest sigurnih cifara) su

$$\int_0^m \varphi_m(x) f(x) dx = \begin{cases} -0.273645507830[-3], & m = 4, \\ -0.644525422258[-5], & m = 6, \\ -0.603335446629[-5], & m = 9, \end{cases}$$

a relativne greške izračunavanja ovog integrala date su u posljednjoj tabeli.

h	$m = 4$	$m = 6$	$m = 9$
1/1	0.144[5]	0.177[7]	0.461[7]
1/2	0.158[3]	0.177[7]	0.584[2]
1/3	0.146[5]	0.151[2]	0.343[−1]
1/4	0.234[2]	0.367	0.616[−3]
1/5	0.223[1]	0.379[−1]	0.384[−4]
1/6	0.514	0.738[−2]	0.458[−5]
1/7	0.178	0.206[−2]	0.812[−6]
1/8	0.776[−1]	0.727[−3]	0.189[−6]
1/9	0.393[−1]	0.301[−3]	0.534[−7]
1/10	0.221[−1]	0.141[−3]	0.175[−7]

Kao i u numeričkim primjerima iz [9], sa povećanjem frekvencije konvergencija se usporava.

1.4 Numerička integracija pomoću kardinalnih B-splajnova

Jedan od klasičnih problema matematičke analize je, svakako, izračunavanje integrala (6). Budući da, u opštem slučaju, ovaj integral nije moguće tačno izračunati, postoji veliki broj metoda za njegovo približno izračunavanje. Najčešće korištena ideja prilikom konstrukcije ovih metoda je aproksimacija funkcije $f(\cdot)$ nekom funkcijom $\widehat{f}(\cdot)$ takvom da je integral $\int_a^b \widehat{f}(x)dx$ jednostavan za izračunavanje. Rezultat koji slijedi je inspirisan nedavno objavljenim radom [14]. Naime, u tom radu je Dobiši funkcija skaliranja proizvoljnog reda korištena kao osnovna funkcija za aproksimaciju funkcije $f(\cdot)$. Kako je kardinalni B-splajn proizvoljnog reda takođe tipičan primjer funkcije skaliranja, prilikom dobijanja ovog rezulata, upravo je kardinalni B-splajn proizvoljnog reda korišten kao osnovna funkcija za aproksimaciju funkcije $f(\cdot)$.

Definicija 2. Za svako $m \in \mathbb{Z}$, prostor kardinalnih B-splajnova reda m, sa nizom čvorova iz $\mathbb{Z}$, u oznaci S_m, je kolekcija svih funkcija $f(\cdot) \in C^{m-2}$ takvih da je restrikcija funkcije $f(\cdot)$ na svaki interval $[k, k+1), k \in \mathbb{Z}$, polinom stepena ne većeg od $m-1$.

U skladu sa prethodnom definicijom, očigledno je da kolekcija

$$\left\{\varphi_m(\cdot - k)\Big|k \in \mathbb{Z}\right\}$$

obrazuje bazu prostora S_m. Ovo, svakako, znači da se svaka funkcija $f(\cdot) \in S_m$ može predstaviti kao linearna kombinacija

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_m(x-k).$$

Pri ovome ne treba voditi računa o konvergenciji reda na desnoj strani posljednje jednakosti, budući da su za svako $x \in \mathbb{R}$ svi članovi ovog reda, izuzev njih konačno mnogo, jednaki nuli.

U cilju dobijanja bolje aproksimacije, uvode se prostori $S_m^{(j)}, j \in \mathbb{N}$, (tzv. prostori sa finijom rezolucijom) sa bazom

$$\left\{\varphi_m^{(j,k)}(\cdot)\Big|k \in \mathbb{Z}\right\},$$

gdje je

$$\varphi_m^{(j,k)}(x) = 2^{j/2}\varphi_m(2^j x - k).$$

Dokazi ovih činjenica takođe se mogu naći u [4] ili [5].

Dalje, koristeći definiciju kardinalnog B-splajna prvog reda i jednakost (1.2), nakon pracijalne integracije, dobijaju se formule za rekurzivno izračunavanje skraćenih splajn momenata

$$\begin{aligned}
\mu_{n,1}^x &= \int_0^x \varphi_1(t)t^n dt = \begin{cases} \quad 0, & x<0 \\ \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, & x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{n+1} & x>1 \end{cases}, \\
\mu_{n,m}^x &= \int_0^x \varphi_m(t)t^n dt \\
&= \frac{x^{n+1}\varphi_m(x)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^x \varphi_{m-1}(t)t^{n+1}dt \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\int_0^{x-1} \varphi_{m-1}(t)(t+1)^{n+1}dt \\
&= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\varphi_m(x) - \mu_{n+1,m-1}^x + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\mu_{k,m-1}^{x-1}\right).
\end{aligned}$$

1.4.1 Konstrukcija metoda

Ne umanjujući opštost, ovdje će biti konstruisan metod za približno izračunavanje integrala

$$\int_0^m f(x)dx, \tag{1.20}$$

gdje je $m \in \mathbb{N}$ i $f(\cdot)$ je zadana, integrabilna funkcija.

Neka je $j \in \mathbb{N}$ fiksirano i neka je $\widehat{f}(\cdot)$ projekcija funkcije $f(\cdot)$ na prostor $S_m^{(j)}$. Dakle,

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_m^{(j,k)}(x).$$

Imajući na umu da je $\operatorname{supp} \varphi_m^{(j,k)}(\cdot) = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+m)], k \in \mathbb{Z}$, posljednja jednakost se, za $x \in [0, m]$, redukuje na

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=-m+1}^{2^j m-1} c_k \varphi_m^{(j,k)}(x) = 2^{j/2} \sum_{k=-m+1}^{2^j m-1} c_k \varphi_m(2^j x - k). \tag{1.21}$$

Sada u jednakosti (1.21) treba odrediti $(2^j+1)m-1$ nepoznatih koeficijenata $c_k, -m+1 \leq k \leq 2^j m - 1$. Za određivanje ovih koeficijenata koristi se tehnika slična tehnici korištenoj u [14].

Prvih $2^j m + 1$ linearnih jednačina se dobija iz interpolacionih uslova u diadskim tačkama (upravo su ovi uslovi korišteni u [14]), tj. iz uslova da važe sljedeće jednakosti

$$f\left(\frac{l}{2^j}\right) = \widehat{f}\left(\frac{l}{2^j}\right), \quad 0 \leq l \leq 2^j m.$$

U skladu sa definicijom funkcija $\varphi_m^{(j,k)}(\cdot)$ i jednakosti (1.21) dobija se

$$\begin{aligned}
\widehat{f}\left(\frac{\ell}{2^j}\right) &= 2^{j/2} \sum_{k=-m+1}^{2^j m-1} c_k \varphi_m(\ell - k) \\
&= 2^{j/2} \sum_{k=\ell-m+1}^{\ell-1} c_k \varphi_m(\ell - k) \\
&= 2^{j/2} \sum_{k=1}^{m-1} c_{k+\ell-m} \varphi_m(m-k) \\
&= 2^{j/2} \sum_{k=1}^{m-1} c_{k+\ell-m} \varphi_m(k), \quad 0 \leq \ell \leq 2^j m.
\end{aligned}$$

Preostaje još da se izabere dodatnih $m-2$ uslova za određivanje nepoznatih koeficijenata. Ove uslove, svakako, treba određivati u zavisnosti od konkretne situacije, tj. u zavisnosti od funkcije $f(\cdot)$. U numeričkim primjerima, koji su dati na kraju ovog odjeljka, dodatni uslovi su izabrani tako da neki cjelobrojni čvorovi imaju višestrukost dva. Naime, zahtijevano je da bude

$$f'(\ell) = \widehat{f}'(\ell), \quad 0 \leq \ell \leq \left[\frac{m}{2}\right] - 2 \wedge \left[\frac{m}{2}\right] + 2 \leq \ell \leq m,$$

pri čemu $[a]$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od broja $a \in \mathbb{R}$.

U skladu sa jednakostima (1.21) i (1.2), kao i sa definicijom funkcija $\varphi_m^{(j,k)}(\cdot)$ dobija se da je

$$\widehat{f}'(\ell) = 2^{3j/2} \sum_{k=-m+1}^{2^j m-1} c_k \left(\varphi_{m-1}(2^j \ell - k) - \varphi_{m-1}(2^j \ell - k - 1)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^{3j/2} \sum_{k=2^j\ell-m+1}^{2^j\ell-1} c_k \left(\varphi_{m-1}(2^j\ell-k)-\varphi_{m-1}(2^j\ell-k-1)\right)\\
&= 2^{3j/2} \sum_{k=0}^{m-2} c_{k+2^j\ell-m+1} \left(\varphi_{m-1}(m-1-k)\right.\\
&\quad \left.-\varphi_{m-1}(m-1-k-1)\right)\\
&= 2^{3j/2} \sum_{k=0}^{m-2} c_{k+2^j\ell-m+1} \left(\varphi_{m-1}(k)-\varphi_{m-1}(k+1)\right),\\
&\quad 0 \le \ell \le \left[\frac{m}{2}\right]-2 \wedge \left[\frac{m}{2}\right]+2 \le \ell \le m.
\end{aligned}
$$

Dakle, koeficijenti $c_k, -m+1 \le k \le 2^j m - 1$, su rješenje sistema linearnih jednačina

$$\Phi c = f,$$

gdje su

$$c = \begin{pmatrix} c_{-m+1} & c_{-m+2} & \dots & c_{2^j m-2} & c_{2^j m-1} \end{pmatrix}^T,$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix}^T,$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} f(0) & f\left(\frac{1}{2^j}\right) & \dots & f\left(\frac{2^j m}{2^j}\right) \end{pmatrix}^T$$

i

$$f_2 = \begin{pmatrix} f'(0) & \dots & f'\left(\left[\frac{m}{2}\right]-2\right) & f'\left(\left[\frac{m}{2}\right]+2\right) & \dots & f'(m) \end{pmatrix}^T.$$

Matrica Φ je oblika

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}.$$

Dalje, matrica Φ_1 ima $2^j m+1$ vrsta i $(2^j+1)m-1$ kolona. Prva vrsta ove matrice je

$$2^{j/2} \begin{pmatrix} \varphi_m(1) & \varphi_m(2) & \dots & \varphi_m(m-2) & \varphi_m(m-1) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dok se ostale vrste dobijaju rotacijom ove vrste u desno za ℓ, $1 \le \ell \le 2^j m$, pozicija. Matrica Φ_2 ima $m-2$ vrsta i $(2^j+1)m-1$ kolona. Prva vrsta ove matrice je

$$2^{3j/2} \begin{pmatrix} -\varphi_{m-1}(1) & -\Delta\varphi_{m-1}(1) & \dots & -\Delta\varphi_{m-1}(m-2) & & & \\ & & & \varphi_{m-1}(m-2) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$(\Delta\varphi_{m-1}(k) = \varphi_{m-1}(k+1) - \varphi_{m-1}(k))$, dok se ostale vrste dobijaju rotacijom ove vrste u desno za $2^j\ell$, $1 \le \ell \le \left[\frac{m}{2}\right]-2 \wedge \left[\frac{m}{2}\right]+2 \le \ell \le m$, pozicija.

Nakon određivanja koeficijenata c_k, treba izračunati

$$\int_0^m \widehat{f}(x)dx.$$

Za izračunavanje ovog integrala, sumu (1.21) treba podijeliti na tri dijela. Naime, neka je

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=-m+1}^{-1} c_k \varphi_m^{(j,k)}(x) + \sum_{k=0}^{(2^j-1)m} c_k \varphi_m^{(j,k)}(x) + \sum_{k=(2^j-1)m+1}^{2^j m-1} c_k \varphi_m^{(j,k)}(x),$$

tj. neka je

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x) &= 2^{j/2}\left(\sum_{k=-m+1}^{-1} c_k \varphi_m(2^j x-k) + \sum_{k=0}^{(2^j-1)m} c_k \varphi_m(2^j x-k)\right.\\ &\left.+ \sum_{k=(2^j-1)m+1}^{2^j m-1} c_k \varphi_m(2^j x-k)\right). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ako je $-m+1 \leq k \leq -1$ (prva suma na desnoj strani jednakosti (1.22)), tada je

$$\int_0^m \varphi_m(2^j x-k)dx = 2^{-j}\int_{-k}^m \varphi_m(x)dx = 2^{-j}\left(1-\mu_{0,m}^{-k}\right),$$

pa je

$$\begin{aligned} \int_0^m \sum_{k=-m+1}^{-1} c_k \varphi_m(2^j x-k)dx &= \sum_{k=-m+1}^{-1} c_k \int_{-k}^m \varphi_m(x)dx \\ &= 2^{-j}\sum_{k=-m+1}^{-1} c_k\left(1-\mu_{0,m}^{-k}\right). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Dalje, ako je $0 \leq k \leq (2^j-1)m$ (druga suma na desnoj strani jednakosti (1.22)), tada je

$$\int_0^m \varphi_m(2^j x-k)dx = 2^{-j}\int_0^m \varphi_m(x)dx = 2^{-j},$$

pa je

$$\int_0^m \sum_{k=0}^{(2^j-1)m} c_k \varphi_m(2^j x-k)dx = 2^{-j}\sum_{k=0}^{(2^j-1)m} c_k. \tag{1.24}$$

Najzad, ako je $(2^j-1)m+1 \leq k \leq 2^j m-1$ (posljednja suma na desnoj strani jednakosti (1.22)), tada je

$$\int_0^m \varphi_m(2^j x-k)dx = 2^{-j}\int_0^{2^j m-k} \varphi_m(x)dx = 2^{-j}\mu_{0,m}^{2^j m-k},$$

pa je

$$\begin{aligned} \int_0^m \sum_{k=(2^j-1)m+1}^{2^j m-1} c_k \varphi_m(2^j x-k)dx &= \sum_{k=(2^j-1)m+1}^{2^j m-1} c_k \int_0^{2^j m-k} \varphi_m(x)dx \\ &= 2^{-j}\sum_{k=(2^j-1)m+1}^{2^j m-1} c_k \mu_{0,m}^{2^j m-k}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Formula za približno izračunavanje integrala (1.20) dobija se iz jednakosti (1.22), (1.23), (1.24) i (1.25). Dakle,

$$\int_0^m f(x)dx \approx \int_0^m \widehat{f}(x)dx = 2^{-j/2}\left(\sum_{k=-m+1}^{-1} c_k\left(1-\mu_{0,m}^{-k}\right) + \sum_{k=0}^{(2^j-1)m} c_k + \sum_{k=(2^j-1)m+1}^{2^j m-1} c_k \mu_{0,m}^{2^j m-k}\right). \tag{1.26}$$

Na kraju ovog odjeljka recimo i to da je procjena greške izostavljena, budući da ova procjena zavisi od izbora dodatnih $m-2$ uslova za određivanje koeficijenata c_k.

1.4.2 Komentari i numerički primjeri

Osnovni nedostatak formule (1.26) je svakako činjenica da koeficijenti c_k zavise od podintegralne funkcije, a za izračunavanje ovih koeficijenata treba riješiti odgovarajući sistem linearnih jednačina. Međutim, ovaj nedostatak ima i formula konstruisana u radu [14]. Dalje, za realizaciju formule (1.26) potrebno je izračunati i skraćene splajn momente $\mu_{0,m}^k$, $1 \le k \le m-1$. Preciznije, zbog simetričnosti ($\mu_{0,m}^k = 1 - \mu_{0,m}^{m-k}$), potrebno je izračunati samo skraćene momente $\mu_{0,m}^k$, $1 \le k \le [m/2]$. Budući da ovi momenti ne zavise od podintegralne funkcije, ovo se ne može smatrati nedostatkom predložene formule.

Sa druge strane, formula (1.26) ima dvije osnovne prednosti u odnosu na formulu konstruisanu u [14]. Prvo, budući da je iz interpolacionih uslova pomoću kardinalnih B-splajnova reda m moguće reprodukovati polinome stepena ne većeg od $m-1$, formula (1.26) je tačna za sve polinome stepena ne većeg od $m-1$. Osim toga, kao što se može vidjeti iz numeričkih primjera koji slijede, formula (1.26) je značajno tačnija od formule konstruisane u [14].

Na izbor numeričkih primjera uticali primjeri dati u [14], kao i primjeri dati u [9]. U svakom od primjera, primjenom formule (1.26), približno je izračunat integral

$$\int_0^1 f(x)dx. \tag{1.27}$$

Kao osnovna funkcija za aproksimaciju funkcije $f(\cdot)$ korišten je kardinalni B-splajn reda $3, 5$ i 7. Naravno, linearnom smjenom je interval $[0,1]$ preslikan na odgovarajući interval integracije. Za svaki primjer, u odgovarajućoj tabeli, je data relativna greška rezultata. Vrste svake tabele odgovaraju nivou rezolucije (označen sa j), dok kolone odgovaraju redu kardinalnog B-splajna (označen sa m). Kao i obično, brojevi u uglastim zagradama označavaju eksponent broja deset.

Primjer 10. Kao i u prethodnom odjeljku, prvi primjer su parcijalne sume eksponencijalnog reda, tj uzima se da je u (1.27)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{s} \frac{x^i}{i!},$$

za $s \in \{3, 9, 15\}$. Naravno, za $s = 3$ i $m = 5$, odnosno $m = 7$, tačne vrijednosti integrala su dobijene već za $j = 0$.

	$s=3$	$s=9$		
j	$m=3$	$m=3$	$m=5$	$m=7$
0	$0.100[-3]$	$0.201[-3]$	$0.162[-7]$	$0.473[-11]$
1	0.000	$0.427[-5]$	$0.105[-9]$	$0.911[-14]$
2	0.000	$0.268[-6]$	$0.164[-11]$	$0.967[-15]$

	$s=15$		
j	$m=3$	$m=5$	$m=7$
0	$0.201[-3]$	$0.162[-7]$	$0.504[-11]$
1	$0.427[-5]$	$0.106[-9]$	$0.101[-13]$
2	$0.268[-6]$	$0.165[-11]$	$0.108[-14]$

Primjer 11. Neka je u (1.27) sada

$$f(x) = \exp(x).$$

j	$m=3$	$m=5$	$m=7$
0	$0.201[-3]$	$0.162[-7]$	$0.504[-11]$
1	$0.427[-5]$	$0.106[-9]$	$0.101[-13]$
2	$0.268[-6]$	$0.165[-11]$	$0.108[-14]$

Posljednja dva primjera su isti kao i prva dva primjera u [14].

Primjer 12. Dakle, neka je u (1.27)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}.$$

j	$m=3$	$m=5$	$m=7$
0	$0.446[-5]$	$0.342[-9]$	$0.238[-12]$
1	$0.383[-8]$	$0.219[-11]$	$0.906[-15]$
2	$0.253[-9]$	$0.341[-13]$	$0.938[-16]$

Primjer 13. Najzad, neka je u (1.27)

$$f(x) = \cos(x^2).$$

j	$m=3$	$m=5$	$m=7$
0	$0.173[-3]$	$0.230[-5]$	$0.148[-8]$
1	$0.145[-5]$	$0.191[-7]$	$0.928[-11]$
2	$0.337[-7]$	$0.295[-9]$	$0.168[-11]$

Iz navedenih primjera se može zaključiti da se tačnost konstruisane formule povećava sa porastom reda kardinalnog B-splajna i/ili sa profinjenjem nivoa rezolucije (što je i očekvano). Dalje, može se naslutiti da je ipak bolje povećavati red kardinalnog B-splajna, budući da se dimenzija odgovarajućeg sistema linearnih jednačina sporije povećava. Preciznije, npr. u slučaju $m = 5$ i $j = 2$ treba riješiti sistem linearnih jednačina reda 24, a ipak se u slučaju $m = 7$ i $j = 1$, kada treba riješiti sistem linearnih jednačina sa 20 nepoznatih, dobija veća tačnost. Štaviše, u slučaju $m = 7$ i $j = 0$ treba riješiti sistem linearnih jednačina sa 13 nepoznatih, a dobijena tačnost je neznatno lošija u odnosu na slučaj $m = 5$ i $j = 2$.

Najzad, treba naglasiti i to da su u svim primjerima, kao osnovne funkcije, korišteni kardinalni B-splajnovi koji imaju nosač iste dužine kao i Dobiši funkcije skaliranja koje su, kao osnovne funkcije, korištene u primjerima iz [14]. Rezultati koji su dobijeni u posljednja dva primjera ukazuju na to da je formula (1.26) znatno tačnija od formule konstruisane u pomenutom radu u smislu da je značajno veća tačnost dobijena na bitno grubljem nivou rezolucije.

Glava 2

Splajnovi malog reda

Poseban praktičan značaj imaju splajnovi malog reda. Prilikom rada sa splajnovima malog reda potreban obim računanja nije prevelik, dok su aproksimacije dobijene pomoću ovakvih splajnova u pravilu zadovoljavaće i jednostavne za manipulaciju. U ovom poglavlju su prezentirana tri rezultata koji se odnose upravo na splajnove malog reda.

2.1 Jedna klasa kvadraturnih formula sa linearnim/kubnim B-splajnom kao težinskom funkcijom

U ovom odjeljku se posmatra problem približnog izračunavanja integrala

$$\int_{-a}^{a} w(x)f(x)dx$$

primjenom jedne posebne klase tzv. "praktičnih" kvadraturnih formula (sa pet čvorova), pri čemu je $w(\cdot)$ centrirani B-splajn drugog, odnosno četvrtog reda, posmatran kao težinska funkcija. Centrirani B-splajn reda $m, m \in \mathbb{N}$, u oznaci $B_m(\cdot)$, nastaje odgovarajućom translacijom argumenta kardinalnog B-splajna tako da nosač centriranog B-splajna reda m bude interval $[-m/2, m/2]$. Dakle,

$$B_m(x) = \varphi_m\left(x + \frac{m}{2}\right).$$

U skladu sa prethodnim, jednostavno se dobijaju eksplicitni izrazi za centrirani B-splajn drugog (krov funkcija), odnosno četvrtog (kubni B-splajn) reda. Prema tome,

$$B_2(x) = h(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

tj.

$$B_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+2)^3, & x \in [-2,-1), \\ \frac{1}{6}(-3x^3 - 6x^2 + 4), & x \in [-1,0), \\ \frac{1}{6}(3x^3 - 6x^2 + 4), & x \in [0,1), \\ \frac{1}{6}(-x+2)^3, & x \in [1,2], \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Ovaj rezultat je inspirisan radovima [6] i [7] u kojima su, takođe, posmatrane "praktične" kvadraturne formule, ali bez težinske funkcije.

Kvadraturna formula

$$\int_{-a}^{a} w(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{5} A_i f(x_i) + R[f] \tag{2.1}$$

je "praktična" ako su zadovoljeni sljedeći uslovi:

1. koeficijenti A_k, $1 \le k \le 5$ zadovoljavaju uslove $A_1 = A_5$ i $A_2 = A_4$;
2. čvorovi x_k, $1 \le k \le 5$ su simetrični, racionalni brojevi iz intervala $[-a, a]$, tj. $x_1 = -r_1, x_2 = -r_2, x_3 = 0, x_4 = r_2$ i $x_5 = r_1$, za neke $r_1, r_2 \in (0, a] \cap \mathbb{Q}, r_2 < r_1$ (kao i obično, $\mathbb{Q}$ označava skup racionalnih brojeva).

Prema tome, "praktične" kvadraturne formule su oblika

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} w(x) f(x) dx &= A(f(-r_1) + f(r_1)) + B(f(-r_2) + f(r_2)) + Cf(0) \\ &\quad + R[f], \end{aligned} \tag{2.2}$$

za neke $r_1, r_2 \in (0, a] \cap \mathbb{Q}, r_2 < r_1$.

Kvadraturna formula (2.1) ima algebarski stepen tačnosti jednak $s, s \in \mathbb{N}$, ako i samo ako je $R[p] = 0$ kad god je $p(\cdot)$ polinom stepena ne većeg od s i postoji polinom $q(\cdot)$, stepena $s+1$, takav da je $R[q] \neq 0$.

Dvije leme koje slijede su dobro poznate činjenice iz numeričke integracije i njihovi dokazi se mogu naći npr. u [21].

Lema 1. *Kvadraturna formula* (2.1) *(tj.* (2.2)*) ima algebarski stepen tačnosti* $s, s \in \mathbb{N}$, *ako i samo ako je* $R[x^k] = 0$ *za sve* $k \in \{0, 1, \ldots, s\}$ *i* $R[x^{s+1}] \neq 0$.

Lema 2. *Ako je težinska funkcija* $w(\cdot)$ *parna, onda je kvadraturna formula* (2.2) *tačna za svaku neparnu funkciju* $f(\cdot)$ *(tj.* $R[f] = 0$ *za svaku neparnu funkciju* $f(\cdot)$*).*

Na osnovu prethodnih lema, zaključuje se da algebarski stepen tačnosti formule (2.2), ako je težinska funkcija $w(\cdot)$ parna, mora biti neparan.

Sada treba odrediti koeficijente A, B i C tako da kvadraturna formula (2.2) ima što je moguće veći algebarski stepen tačnosti, uz pretpostavku da je težinska funkcija $w(\cdot)$ parna. Za određivanje ovih koeficijenata koristi se standardni postupak. Pri tome je za momente korištena oznaka $m_k = \int_{-a}^{a} w(x) x^k dx, \quad k \in \{0, 2, 4\}$.

Iz uslova da formula (2.2) bude tačna u slučaju $f(x) = 1$, jednostavno se zaključuje da mora biti

$$C = m_0 - 2A - 2B.$$

Dalje, iz uslova da formula (2.2) bude tačna u slučaju $f(x) = x^2$ i $f(x) = x^4$, dobija se sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 2r_1^2 A + 2r_2^2 B &= m_2, \\ 2r_1^4 A + 2r_2^4 B &= m_4, \end{aligned}$$

sa nepoznatim koeficijentima A i B. Jedinstveno rješenje ovog sistema je

$$A = \frac{m_2 r_2^2 - m_4}{2r_1^2(r_2^2 - r_1^2)} \quad \text{i} \quad B = \frac{m_4 - m_2 r_1^2}{2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)}. \tag{2.3}$$

Dakle, sa ovakvim izborom koeficijenata A, B i C, kvadraturna formula (2.2) ima algebarski stepen tačnosti jednak pet. Prirodno je sada postaviti pitanje da li je moguće izabrati racionalne čvorove $r_1, r_2 \in (0, a]$, tako da kvadraturna formula (2.2) ima algebarski stepen tačnosti jednak šest, odnosno sedam. Negativan odgovor na ovo pitanje u slučaju $w(x) = 1$ dobijen je u radovima [6] i [7]. U daljem tekstu je dokazano da u slučaju $w(x) = B_2(x)$, odnosno $w(x) = B_4(x)$, postavljeno pitanje takođe ima negativan odgovor.

2.1.1 Slučaj $w(x) = B_2(x)$

Budući da je

$$\int_{-1}^{1} B_2(x) x^k dx = \int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, x^k dx = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \dfrac{1}{6}, & k = 2, \\ \dfrac{1}{15}, & k = 4, \end{cases}$$

u slučaju $w(x) = B_2(x)$ jednakosti (2.3) postaju

$$A = \frac{2 - 5r_2^2}{60r_1^2(r_1^2 - r_2^2)} \quad \text{i} \quad B = \frac{2 - 5r_1^2}{60r_2^2(r_2^2 - r_1^2)}. \tag{2.4}$$

Pri tome je (u formuli (2.2))

$$R[x^6] = \frac{1}{28} - \frac{2r_1^2 - 5r_1^2 r_2^2 + 2r_2^2}{30}.$$

Lema koja slijedi dokazuje da u ovom slučaju nije moguće odabrati racionalne čvorove r_1 i r_2 tako da kvadraturna formula (2.2) ima algebarski stepen tačnosti jednak šest, odnosno sedam.

Lema 3. *Ne postoje brojevi* $r_1, r_2 \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ *takvi da je*

$$\frac{2r_1^2 - 5r_1^2 r_2^2 + 2r_2^2}{30} = \frac{1}{28}. \tag{2.5}$$

Dokaz: Neka je, suprotno tvrđenju leme, $r_1 = a/b$ i $r_2 = c/d$, za neke $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ takve da je $(a, b) = 1$ i $(c, d) = 1$. Tada jednakost (2.5), nakon pojednostavljivanja, postaje

$$14(2a^2d^2 - 5a^2c^2 + 2b^2c^2) = 15b^2d^2, \tag{2.6}$$

odakle slijedi da je $b^2d^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 14)$, tj. $bd \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 14)$. Sada mogu nastupiti četiri slučaja.

Slučaj $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 14)$.

Uvrštavanjem $b = 14k$, za neko $k \in \mathbb{N}$, u (2.6), nakon pojednostavljivanja se dobija

$$a^2(2d^2 - 5c^2) = 14k^2(15d^2 - 28c^2).$$

Budući da je $(a, b) = 1$, mora biti $2d^2 - 5c^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 14)$, pa mora biti i $2d^2 - 5c^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$. Dalje, zbog $2d^2 - 5c^2 = 7d^2 - 5(c^2 + d^2)$, takođe mora biti $c^2 + d^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$, a direktnom provjerom se utvrđuje da je posljednja relacija nemoguća, osim u slučaju $c \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$ i $d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$, što zajedno sa pretpostavkom $(c, d) = 1$ daje kontradikciju.

Slučaj $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7) \wedge d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$.

Uvrštavanjem $b = 7k_1$ i $d = 2k_2$ za neke $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, u (2.6), nakon pojednostavljivanja se dobija

$$5a^2c^2 = 2(4a^2k_2^2 - 105k_1^2k_2^2 + 49c^2k_1^2),$$

a odavde slijedi da mora biti $a \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ (ne može biti $c \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ zbog $d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$). Dalje, stavljajući $a = 2\ell$ za neko $\ell \in \mathbb{N}$ posljednja jednakost postaje

$$2\ell^2(5c^2 - 8k_2^2) = 7(7k_1^2c^2 - 15k_1^2k_2^2).$$

Ne može biti $\ell \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$ (zbog $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7), a = 2\ell$ i $(a, b) = 1$), pa mora biti $5c^2 - 8k_2^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$. Ponovo se direktno provjerava da je posljednja relacija nemoguća, osim u slučaju $c \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$ i $k_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$. Ova činjenica, zajedno sa $d = 2k_2$ i $(c, d) = 1$ daje kontradikciju.

Slučajevi $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2) \wedge d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 7)$ i $d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 14)$, zbog simetričnosti jednakosti (2.6), se dokazuju analogno, što u potpunosti dokazuje tvrđenje. ▶

Neka su u formuli (2.2) koeficijenti A i B dati relacijama (2.4) i neka je $H_5(\cdot)$ Ermitov interpolacioni polinom koji interpolira funkciju $f(\cdot)$ u čvorovima $\pm r_1, \pm r_2$ i 0, pri čemu čvor 0 ima višestrukost dva. Tada je (vidjeti npr. [21], str. 55),

$$f(x) - H_5(x) = \frac{f^{(vi)}(\xi(x))}{6!} x^2(x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2),$$

pa je greška formule (2.2) data sa

$$\begin{aligned} R[f] &= \int_{-1}^{1} h(x) \frac{f^{(vi)}(\xi(x))}{6!} x^2(x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2) dx \\ &= \frac{1}{6 \cdot 6!} f^{(vi)}(\eta)(\eta^2 - r_1^2)(\eta^2 - r_2^2), \end{aligned}$$

za neko $\eta \in [-1, 1]$, uz pretpostavku $f(\cdot) \in C^6[-1, 1]$. Dalje, neka je

$$\Phi(\eta) = (\eta^2 - r_1^2)(\eta^2 - r_2^2).$$

Lako je provjeriti da je

$$\begin{aligned}\max_{\eta\in[-1,1]}|\Phi(\eta)| &= \max\left\{|\Phi(0)|, \left|\Phi(\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}})\right|, |\Phi(1)|\right\}\\ &= \max\left\{r_1^2r_2^2, \frac{(r_1^2-r_2^2)^2}{4}, (1-r_1^2)(1-r_2^2)\right\},\end{aligned}$$

pa se greška formule (2.2) procjenjuje na sljedeći način

$$|R[f]| \leq \frac{M_6}{6\cdot 6!}\max\left\{r_1^2r_2^2, \frac{(r_1^2-r_2^2)^2}{4}, (1-r_1^2)(1-r_2^2)\right\}, \tag{2.7}$$

gdje je $M_6 = \max_{x\in[-1,1]}\left|f^{(vi)}(x)\right|$.

2.1.2 Numerički primjer

Procjena (2.7) prirodno nameće problem minimizacije funkcije

$$F(r_1,r_2) = \max\left\{r_1^2r_2^2, \frac{(r_1^2-r_2^2)^2}{4}, (1-r_1^2)(1-r_2^2)\right\},$$

uz uslov $r_1, r_2 \in (0,1]\cap\mathbb{Q}, r_2 < r_1$. Očigledno je da za fiksirano $r_1 \in (0,1]\cap\mathbb{Q}$, funkcija $F(\cdot,\cdot)$ dostiže minimum u jednoj od presječnih tačaka krivih

$$r_1^2r_2^2, \quad \frac{(r_1^2-r_2^2)^2}{4} \quad \text{i} \quad (1-r_1^2)(1-r_2^2).$$

1. Krive $r_1^2r_2^2$ i $(r_1^2-r_2^2)^2/4$ (r_1 je fiksirano) sijeku se u tački $r_2 = \pm(1\pm\sqrt{2})r_1$, pa kako $r_2 \notin \mathbb{Q}$ ovaj slučaj se dalje ne razmatra.

2. Slično, krive $(r_1^2-r_2^2)^2/4$ i $(1-r_1^2)(1-r_2^2)$ (r_1 je fiksirano) sijeku se u tački $r_2 = \pm\sqrt{3r_1^2-2\pm2\sqrt{2}(r_1^2-1)}$ i ponovo se zbog $r_2 \notin \mathbb{Q}$ ovaj slučaj isključuje iz razmatranja.

3. Najzad, krive $r_1^2r_2^2$ i $(1-r_1^2)(1-r_2^2)$ (r_1 je i dalje fiksirano) sijeku se u tački $r_2 = \sqrt{1-r_1^2}$, pa se čvorovi r_1 i r_2 traže među "racionalnim tačkama" sa jediničnog kruga.

U tabeli koja slijedi date su neke dopustive vrijednosti čvorova r_1 i r_2 za koje funkcija $F(\cdot,\cdot)$ dostiže lokalne minimume. Odgovarajući racionalni brojevi su zaokrugljeni na šest sigurnih cifara.

r_1	r_2	$F(r_1,r_2)$
$\frac{4}{5} = 0.8$	$\frac{3}{5} = 0.6$	0.230400
$\frac{21}{29} = 0.724138$	$\frac{20}{29} = 0.689655$	0.249406
$\frac{55}{73} = 0.753425$	$\frac{48}{73} = 0.657534$	0.245424
$\frac{72}{97} = 0.742268$	$\frac{65}{97} = 0.670103$	0.247403

$\frac{377}{505} = 0.746535$	$\frac{336}{505} = 0.665347$	0.246715
$\frac{987}{1325} = 0.744906$	$\frac{884}{1325} = 0.667170$	0.246988
$\frac{1292}{1733} = 0.745528$	$\frac{1155}{1733} = 0.666474$	0.246885
$\frac{6765}{9077} = 0.745290$	$\frac{6052}{9077} = 0.666740$	0.246924

Najzad, pri bilo kojem izboru ponuđenih vrijednosti za čvorove r_1 i r_2, greška (2.7) se može procjeniti sa

$$|R[f]| \leq 0.6 \cdot 10^{-4} \cdot M_6.$$

2.1.3 Slučaj $w(x) = B_4(x)$

Sada je

$$\int_{-2}^{2} B_4(x) x^k dx = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{1}{3}, & k = 2, \\ \frac{3}{10}, & k = 4, \end{cases}$$

pa u ovom slučaju jednakosti (2.3) postaju

$$A = \frac{9 - 10r_2^2}{60r_1^2(r_1^2 - r_2^2)} \quad \text{i} \quad B = \frac{9 - 10r_1^2}{60r_2^2(r_2^2 - r_1^2)}. \tag{2.8}$$

Sada je (u formuli (2.2))

$$R[x^6] = \frac{17}{42} - \frac{9r_1^2 - 10r_1^2r_2^2 + 9r_2^2}{30}.$$

I u ovom slučaju se dokazuje da nije moguće odabrati racionalne čvorove r_1 i r_2 tako da kvadraturna formula (2.2) ima algebarski stepen tačnosti jednak šest, odnosno sedam.

Lema 4. *Ne postoje brojevi $r_1, r_2 \in (0, 2] \cap \mathbb{Q}$ takvi da je*

$$\frac{9r_1^2 - 10r_1^2r_2^2 + 9r_2^2}{30} = \frac{17}{42}. \tag{2.9}$$

Dokaz: Kao i u dokazu prethodne leme, pretpostavlja se, suprtono tvrđenju, da je $r_1 = a/b$ i $r_2 = c/d$, za neke $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ takve da je $(a, b) = 1$ i $(c, d) = 1$. Sada jednokst (2.9), nakon pojednostavljivanja, postaje

$$7(9a^2d^2 - 10a^2c^2 + 9b^2c^2) = 85b^2d^2, \tag{2.10}$$

odakle slijedi da je $b^2d^2 \equiv 0 (\text{mod } 7)$, odnosno $bd \equiv 0 (\text{mod } 7)$.

Neka je $b = 7k$ za neko $k \in \mathbb{N}$. Nakon pojednostavljivanja, jednakost (2.10) postaje

$$a^2(9d^2 - 10c^2) = 7k^2(85d^2 - 63c^2).$$

Ne može biti $a^2 \equiv 0(\text{mod } 7)$ (zbog $(a,b)=1$), pa mora biti $9d^2 - 10c^2 \equiv 0(\text{mod } 7)$. Dalje, budući da je $9d^2 - 10c^2 = 7(d^2 - 2c^2) + 2(d^2 + 2c^2)$, takođe mora biti $d^2 + 2c^2 \equiv 0(\text{mod } 7)$. Ponovo se direktnom provjerom dokazuje da je ova relacija nemoguća, osim u slučaju $c \equiv 0(\text{mod } 7)$ i $d \equiv 0(\text{mod } 7)$, što zajedno sa pretpostavkom $(c,d)=1$ daje kontradikciju.

Slučaj $d = 7k$, za neko $k \in \mathbb{N}$, se zbog simetričnosti relacije (2.10) dokazuje analogno, što u potpunosti dokazuje tvrđenje. ▶

Neka su sada u formuli (2.2) koeficijenti A i B dati relacijama (2.8) i neka je $H_5(\cdot)$ ponovo Ermitov interpolacioni polinom koji interpolira funkciju $f(\cdot)$ u čvorovima $\pm r_1, \pm r_2$ i 0, pri čemu čvor 0 ima višestrukost dva. I sada je

$$f(x) - H_5(x) = \frac{f^{(vi)}(\xi(x))}{6!} x^2(x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2),$$

pa je greška formule (2.2) data sa

$$\begin{aligned} R[f] &= \int_{-2}^{2} B(x) \frac{f^{(vi)}(\xi(x))}{6!} x^2(x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2)dx \\ &= \frac{1}{3 \cdot 6!} f^{(vi)}(\eta)(\eta^2 - r_1^2)(\eta^2 - r_2^2), \end{aligned}$$

za neko $\eta \in [-2,2]$, uz pretpostavku $f(\cdot) \in C^6[-2,2]$. Neka je sada

$$\Phi(\eta) = (\eta^2 - r_1^2)(\eta^2 - r_2^2).$$

Jednostavno je provjeriti da je

$$\begin{aligned} \max_{\eta \in [-2,2]} |\Phi(\eta)| &= \max \left\{ |\Phi(0)|, \left| \Phi\left(\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}\right) \right|, |\Phi(2)| \right\} \\ &= \max \left\{ r_1^2 r_2^2, \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{4}, (4 - r_1^2)(4 - r_2^2) \right\}, \end{aligned}$$

pa se greška formule (2.2) u ovom slučaju procjenjuje sa

$$|R[f]| \leq \frac{M_6}{3 \cdot 6!} \max \left\{ r_1^2 r_2^2, \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{4}, (4 - r_1^2)(4 - r_2^2) \right\}, \tag{2.11}$$

gdje je $M_6 = \max_{x \in [-2,2]} \left| f^{(vi)}(x) \right|$.

2.1.4 Numerički primjer

I sada procjena greške (2.11) prirodno nameće problem minimizacije funkcije

$$F(r_1, r_2) = \max \left\{ r_1^2 r_2^2, \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{4}, (4 - r_1^2)(4 - r_2^2) \right\},$$

uz uslov $r_1, r_2 \in (0,2] \cap \mathbb{Q}, r_2 < r_1$. Kao i u prethodnom slučaju, za fiksirano $r_1 \in (0,2] \cap \mathbb{Q}$, funkcija $F(\cdot,\cdot)$ svoj minimum dostiže u jednoj od presječnih tačaka krivih

$$r_1^2 r_2^2, \quad \frac{(r_1^2 - r_2^2)^2}{4} \quad \text{i} \quad (4 - r_1^2)(4 - r_2^2).$$

I sada se posmatraju tri slučaja od kojih se dva odbacuju.

1. Krive $r_1^2r_2^2$ i $(r_1^2-r_2^2)^2/4$ (r_1 je fiksirano) se sijeku u tački $r_2=\pm(1\pm\sqrt{2})r_1$, pa se, budući da $r_2\notin\mathbb{Q}$, ovaj slučaj odbacuje.

2. Dalje, krive $(r_1^2-r_2^2)^2/4$ i $(4-r_1^2)(4-r_2^2)$ (r_1 je fiksirano) sijeku se u tački $r_2=\pm\sqrt{3r_1^2-8\pm2\sqrt{2}(r_1^2-1)}$, pa se i ovaj slučaj dalje ne razmatra, zbog $r_2\notin\mathbb{Q}$.

3. Najzad, krive $r_1^2r_2^2$ i $(4-r_1^2)(4-r_2^2)$ (r_1 je i dalje fiksirano) sijeku se u tački $r_2=\sqrt{4-r_1^2}$, pa se čvorovi r_1 i r_2 traže među "racionalnim tačkama" na krugu sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom dva.

Ponovo se u tabeli koja slijedi navode neke dopustive vrijednosti za čvorove r_1 i r_2 u kojima funkcija $F(\cdot,\cdot)$ dostiže lokalne minimume, pri čemu su odgovarajući racionalni brojevi ponovo zaokrugljeni na šest sigurnih cifara.

r_1	r_2	$F(r_1,r_2)$
$\frac{8}{5}=1.60000$	$\frac{6}{5}=1.20000$	3.68640
$\frac{42}{29}=1.44828$	$\frac{40}{29}=1.37931$	3.99049
$\frac{110}{73}=1.50685$	$\frac{96}{73}=1.31507$	3.92678
$\frac{144}{97}=1.48454$	$\frac{130}{97}=1.34021$	3.95845
$\frac{754}{505}=1.49307$	$\frac{672}{505}=1.33069$	3.94744
$\frac{1974}{1325}=1.48981$	$\frac{1768}{1325}=1.33434$	3.95180
$\frac{2584}{1733}=1.49106$	$\frac{2310}{1733}=1.33295$	3.95016
$\frac{13530}{9077}=1.49058$	$\frac{12104}{9077}=1.33348$	3.95079

Sada se za bilo koji od ponuđenih izbora čvorova r_1 i r_2, greška (2.11) procjenjuje sa

$$|R[f]|\le 0.2\cdot10^{-2}\cdot M_6.$$

2.2 Neke modifikacije trapeznog pravila

U ovom odjeljku je, pomoću kvadratnog interpolacionog splajna, dobijena čitava klasa novih kvadraturnih formula. Sve formule su modifikacija klasičnog trapeznog pravila. Njihova osnovna karakteristika je da se odgovarajućim izborom slobodnog parametra tačnost trapeznog pravila povćava do $O(h^4)$. Osim toga, koristeći ovu nestandardnu tehniku, reprodukovane su Simpsonova i Ermitova kvadraturna formula.

2.2.1 Klasične kvadraturne formule i kvadratni interpolacioni splajn

Klasične kvadraturne formule se izučavaju već na osnovnim kursevima numeričke analize, a ovdje se navode samo radi uspostavljanja sistema označavanja.

Neka je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2m} = b$, pri čemu je $x_k = x_0 + kh$ i neka je $f_k = f(x_k), \quad 0 \le k \le 2m$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = Q_R[f,a,b,2m] + E_R[f,a,b,2m],$$

odnosno

$$\int_a^b f(x)dx = Q_S[f,a,b,2m] + E_S[f,a,b,2m],$$

gdje je

$$Q_R[f,a,b,2m] = 2h\sum_{k=1}^{m} f_{2k-1} \tag{2.12}$$

uopštena formula centralnih pravougaonika, dok je

$$Q_S[f,a,b,n] = \frac{h}{3}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{m-1} f_{2k} + 4\sum_{k=1}^{m} f_{2k-1} + f_{2m}\right) \tag{2.13}$$

uopštena Simpsonova formula. Greške ovih formula su date sa

$$E_R[f,a,b,2m] = \frac{(b-a)f''(\overline{\xi}_R)}{6}h^2, \tag{2.14}$$

za neko $\overline{\xi}_R \in [a,b]$, uz pretpostavku $f \in C^2[a,b]$ i

$$E_S[f,a,b,2m] = -\frac{(b-a)f^{(iv)}(\overline{\xi}_S)}{180}h^4, \tag{2.15}$$

za neko $\overline{\xi}_S \in [a,b]$, uz pretpostavku $f \in C^4[a,b]$. Dalje, ako je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = Q_T[f,a,b,n] + E_T[f,a,b,n],$$

pri čemu je

$$Q_T[f,a,b,n] = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} f_k + f_n\right)$$

uopštena trapezna formula. Greška ove formule je data sa

$$E_T[f,a,b,n] = -\frac{(b-a)f''(\overline{\xi}_T)}{12}h^2,$$

za neko $\overline{\xi}_T \in [a,b]$, uz pretpostavku $f \in C^2[a,b]$.

Budući da se kvadratni interpolacioni splajn obično ne obrađuje u klasičnoj literaturi, ovdje su prezentirani osnovni detalji njegove konstrukcije (u klasičnoj literaturi se najčešće obrađuje kubni interpolacioni splajn, vidjeti npr. [21] ili [28]).

Definicija 3. Neka je $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ zadana podjela intervala $[a,b]$. Funkcija $S_\Delta : [a,b] \to \mathbb{R}$, koja ima sljedeće osobine:

1. S_Δ je polinom drugog stepena na svakom podintervalu $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \le k \le n-1$ i
2. $S_\Delta \in C^1[a,b]$

naziva se kvadratni splajn u odnosu na podjelu Δ. Ako se prethodnoj definiciji dodaju interpolacioni uslovi

- $S_\Delta(x_k) = f(x_k)$, $0 \le k \le n$,

dobija se kvadratni interpolacioni splajn funkcije $f(\cdot)$, koji se obično označava sa $S_{\Delta,f}$.

Neka su zadane vrijednosti $f_k = f(x_k)$, $0 \le k \le n$. Iz prve osobine definicije 3, slijedi

$$x \in [x_k, x_{k+1}] \Rightarrow S_{\Delta,f}(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k = s_k(x), \quad 0 \le k \le n-1,$$

što znači da treba odrediti $3n$ nepoznatih koeficijenata. Za određivanje ovih koeficijenata $2n$ jednačina se dobija iz interpolacionih uslova, dok se još $n-1$ jednačina dobija iz druge osobine iste definicije. Prema tome, jedan parametar se može birati proizvoljno. Pomenute jednačine su

$$\begin{aligned} a_k x_k^2 + b_k x_k + c_k &= f_k, \quad 0 \le k \le n-1, && (2.16)\\ a_k x_{k+1}^2 + b_k x_{k+1} + c_k &= f_{k+1}, \quad 0 \le k \le n-1, && (2.17)\\ 2a_k x_{k+1} + b_k &= 2a_{k+1}x_{k+1} + b_{k+1}, \quad 0 \le k \le n-2. && (2.18) \end{aligned}$$

Oduzimanjem jednačine (2.16) od jednačine (2.17) dobija se da je

$$b_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} - a_k(x_{k+1} + x_k).$$

Iz posljednje jednačine i jednačine (2.18), nakon elementarnog računa, dobijaju se rekurentne relacije za izračunavanje koeficijenata a_k, $1 \le k \le n-1$. Dakle, koeficijenti kvadratnog interpolacionog splajna izračunavaju se rekurentno na sljedeći način

$$\begin{aligned} a_0 &- \text{proizvoljno},\\ a_{k+1} &= \frac{f_{k+2} - f_{k+1}}{(x_{k+2} - x_{k+1})^2} - \frac{f_{k+1} - f_k}{(x_{k+2} - x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)}\\ &\quad - a_k \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_{k+1}}, \quad 0 \le k \le n-2, \qquad (2.19)\\ b_k &= \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} - a_k(x_{k+1} + x_k), \quad 0 \le k \le n-1,\\ c_k &= f_k - a_k x_k^2 - b_k x_k, \quad 0 \le k \le n-1. \end{aligned}$$

Koristeći formule (2.19), ponovo nakon elementarnog računa, dobija se osnovna modifikacija trapeznog pravila

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} s_k(x)dx + E[f, x_k, x_{k+1}]\\ &= (x_{k+1} - x_k)\left[\frac{1}{2}(f_{k+1} + f_k) - \frac{a_k}{6}(x_{k+1} - x_k)^2\right]\\ &\quad + E[f, x_k, x_{k+1}]. \end{aligned}$$

Ako je podjela intervala $[a, b]$ ravnomjerna, tj. ako je $x_k = x_0 + kh$, $0 \leq k \leq n$, gdje je $x_0 = a$ i $h = (b-a)/n$, onda posljednja jednakost i prva relacija iz (2.19) postaju znatno jednostavnije

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1}) - \frac{h^3}{6}a_k + E[f, x_k, x_{k+1}], \quad 0 \leq k \leq n-1. \tag{2.20}$$

i

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}}{h^2} - a_{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + (-1)^k a_0, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Uopštena formula (2.20) je

$$\int_a^b f(x)dx = Q_T[f, a, b, n] - \frac{h^3}{6} \sum_{k=0}^{n-1} a_k + E[f, a, b, n] \tag{2.22}$$

2.2.2 Slučaj $n = 2m$

Simpsonova formula

Iz relacija (2.21) i (2.22) slijedi

$$\int_a^b f(x)dx = Q[f, a, b, 2m] + E[f, a, b, 2m],$$

gdje je

$$\begin{aligned} Q[f, a, b, 2m] &= \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m-1} f_k + f_{2m}\right) - \frac{h^3}{6}\sum_{k=0}^{2m-1} a_k \\ &= \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m-1} f_k + f_{2m}\right) \\ &\quad -\frac{h^3}{6}\sum_{k=1}^{m} \frac{f_{2k} - 2f_{2k-1} + f_{2k-2}}{h^2} \\ &= Q_S[f, a, b, 2m]. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Sada iz (2.15) slijedi da je

$$E[f, a, b, 2m] = E_S[f, a, b, 2m] = -\frac{(b-a)f^{(iv)}(\overline{\xi}_S)}{180}h^4,$$

za neko $\overline{\xi}_S \in [a, b]$, uz pretpostavku $f \in C^4[a, b]$.

Prva modifikacija

Uvrštavanjem jednakosti

$$\frac{f_{2k} - 2f_{2k-1} + f_{2k-2}}{h^2} = f''_{2k-1} + \frac{f^{(iv)}(\tau_k)}{12}h^2,$$

(za neko $\tau_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}]$, uz pretpostavku $f \in C^4[a,b]$) u (2.23), dobija se prva modifikacija trapeznog pravila

$$\int_a^b f(x)dx = Q_1[f,a,b,2m] + E_1[f,a,b,2m],$$

gdje je

$$Q_1[f,a,b,2m] = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m-1} f_k + f_{2m}\right) - \frac{h^3}{6}\sum_{k=1}^{m} f''_{2k-1} \tag{2.24}$$

i

$$\begin{aligned} E_1[f,a,b,2m] &= -\frac{(b-a)f^{(iv)}(\overline{\xi}_S)}{180}h^4 - \frac{h^3}{6}\sum_{k=1}^{m}\frac{h^2}{12}f^{(iv)}(\tau_k) \\ &= -\frac{(b-a)f^{(iv)}(\overline{\xi}_S)}{180}h^4 - \frac{(b-a)f^{(iv)}(\overline{\tau})}{144}h^4 \\ &= -\frac{(b-a)f^{(iv)}(\overline{\tau}_1)}{80}h^4, \end{aligned}$$

za neko $\overline{\tau}_1 \in [a,b]$.

Druga modifikacija

Formule (2.12) i (2.14) zajedno daju

$$f'_{2m} - f'_0 = \int_{x_0}^{x_{2m}} f''(x)dx = 2h\sum_{k=1}^{m} f''_{2k-1} + \frac{(b-a)f^{(iv)}(\overline{\xi}_R)}{6}h^2,$$

a iz ove jednakosti slijedi druga modifikacija trapeznog pravila (poznata Ermitova kvadraturna formula, vidjeti npr. [21], [25] ili [28]). Dakle,

$$\int_a^b f(x)dx = Q_2[f,a,b,2m] + E_2[f,a,b,2m],$$

gdje je

$$Q_2[f,a,b,2m] = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m-1} f_k + f_{2m}\right) - \frac{h^2}{12}(f'_{2m} - f'_0) \tag{2.25}$$

i

$$\begin{aligned} E_2[f,a,b,2m] &= \frac{(b-a)f^{(iv)}(\overline{\xi}_R)}{72}h^4 - \frac{(b-a)f^{(iv)}(\overline{\tau}_1)}{80}h^4 \\ &= \frac{b-a}{720}(10f^{(iv)}(\overline{\xi}_R) - 9f^{(iv)}(\overline{\tau}_1))h^4, \end{aligned} \tag{2.26}$$

za neko $\overline{\xi}_R, \overline{\tau}_1 \in [a,b]$.

Procjena greške (2.26) je znatno lošija, nego procjena koja je data npr. u [25], ali ove procjene postaju iste ako se pretpostavi da je $10f^{(iv)}(\overline{\xi}_R) - 9f^{(iv)}(\overline{\tau}_1) \in [m_4, M_4]$, gdje je $m_4 = \min_{x\in[a,b]} f^{(iv)}(x)$ i $M_4 = \max_{x\in[a,b]} f^{(iv)}(x)$.

Jednostavno je provjeriti da je algebarski stepen tačnosti formula (2.24) i (2.25) jednak tri.

2.2.3 Slučaj $n = 2m + 1$

Kombinacijom formula (2.13) i (2.20) se dobija

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_{2m+1}} f(x)dx \\ &= Q_T[f, x_0, x_1] - \frac{h^3}{6}a_0 + Q_S[f, x_1, b, 2m] \\ &\quad + E[f, a, b, 2m+1],\end{aligned} \tag{2.27}$$

gdje je $Q_T[f, x_0, x_1] = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$, dok se parametar a_0 može birati proizvoljno. U opštem slučaju, tačnost prethodne formule je $O(h^3)$, ali se ona, pogodnim izborom parametra a_0, može povećati do $O(h^4)$. Jedna od mogućnosti je izabrati parametar a_0 tako da bude jednak glavnom dijelu ostataka $E_T[f, x_0, x_1] = -\dfrac{f''(\xi_T)}{12}h^3$, $\xi_T \in [x_0, x_1]$.

Prva modifikacija

Za svako $\lambda \in [0, 1]$, postoji (barem jedno) $X \in [x_0, x_1]$ takvo da je $f''(X) = \lambda f_0'' + (1 - \lambda)f_1''$. Tada je

$$f''(\xi_T) = f''(X) + f'''(\theta)(\xi_T - X), \theta \in [\xi_T, X],$$

pa se izborom $a_0 = \dfrac{f''(X)}{2}$ dobija

$$\int_a^b f(x)dx = Q_1[f, a, b, 2m+1] + E_1[f, a, b, 2m+1],$$

gdje je

$$Q_1[f, a, b, 2m+1] = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3 f''(X)}{12} + Q_S[f, x_1, b, 2m] \tag{2.28}$$

i

$$E_1[f, a, b, 2m+1] = -\frac{f'''(\theta)}{12}(\xi_T - X)h^3 - \frac{(b - x_1)f^{(iv)}(\overline{\xi}_S)}{180}h^4,$$

za neke $\xi_T, X \in [x_0, x_1]$, $\theta \in [\xi_T, X]$, $\overline{\xi}_S \in [x_1, b]$.

Kombinacijom formula (2.24) i (2.28) dobija se

$$\int_a^b f(x)dx = \widetilde{Q}_1[f, a, b, 2m+1] + \widetilde{E}_1[f, a, b, 2m+1],$$

gdje je

$$\widetilde{Q}_1[f, a, b, 2m+1] = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m} f_k + f_{2m+1}\right) - \frac{h^3}{6}\left(\frac{f''(X)}{2} + \sum_{k=1}^{m} f_{2k}''\right) \tag{2.29}$$

i

$$\widetilde{E}_1[f, a, b, 2m+1] = -\frac{f'''(\theta)}{12}(\xi_T - X)h^3 - \frac{(b - x_1)f^{(iv)}(\overline{\tau}_1)}{80}h^4$$

za neke $\xi_T, X \in [x_0, x_1]$, $\theta \in [\xi_T, X]$, $\overline{\tau}_1 \in [x_1, b]$.

Druga modifikacija

Budući da je

$$f''(\xi_T) = \frac{f_1' - f_0'}{h} - \frac{(x_1 - \xi_T)^2 f'''(\theta_1) - (x_0 - \xi_T)^2 f'''(\theta_0)}{2h},$$

za neke $\theta_0 \in [x_0, \xi_T]$, $\theta_1 \in [\xi_T, x_1]$, izborom $a_0 = \dfrac{f_1' - f_0'}{2h}$ se dobija

$$\int_a^b f(x)dx = Q_2[f, a, b, 2m+1] + E_2[f, a, b, 2m+1],$$

gdje je

$$Q_2[f, a, b, 2m+1] = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^2}{12}(f_1' - f_0') + Q_S[f, x_1, b, 2m] \tag{2.30}$$

i

$$\begin{aligned} E_2[f, a, b, 2m+1] &= \frac{(x_1 - \xi_T)^2 f'''(\theta_1) - (x_0 - \xi_T)^2 f'''(\theta_0)}{24} h^2 \\ &\quad - \frac{(b - x_1) f^{(iv)}(\overline{\xi}_S)}{180} h^4, \end{aligned}$$

za neke $\theta_0 \in [x_0, \xi_T]$, $\theta_1 \in [\xi_T, x_1]$, $\overline{\xi}_S \in [x_1, b]$. Slično kao i prethodnom slučaju, formule (2.25) i (2.30) zajedno daju

$$\int_a^b f(x)dx = \widetilde{Q}_2[f, a, b, 2m+1] + \widetilde{E}_2[f, a, b, 2m+1],$$

gdje je

$$\widetilde{Q}_2[f, a, b, 2m+1] = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m} f_k + f_{2m+1}\right) - \frac{h^2}{12}(f_{2m+1}' - f_0') \tag{2.31}$$

(ponovo Ermitova kvadraturna formula) i

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_2[f, a, b, 2m+1] &= \frac{(x_1 - \xi_T)^2 f'''(\theta_1) - (x_0 - \xi_T)^2 f'''(\theta_0)}{24} h^2 - \\ &\quad - \frac{(b - x_1) h^4}{720} (10 f^{(iv)}(\overline{\xi}_R) - 9 f^{(iv)}(\overline{\tau}_1)), \end{aligned}$$

za neke $\theta_0 \in [x_0, \xi_T]$, $\theta_1 \in [\xi_T, x_1]$, $\overline{\xi}_R, \overline{\tau}_1 \in [x_1, b]$.

I sada je jednostavno provjeriti da je algebarski stepen tačnosti formula (2.28) i (2.29), u slučaju $X = (x_0 + x_1)/2$, odnosno formule (2.30) jednak tri.

2.2.4 Još jedna mogućnost izbora parametra a_0

Neposredno se provjerava da parametar a_0 nije moguće izabrati tako da formula (2.27) (bez posljednjeg člana) ima algebarski stepen tačnosti jednak tri. Ali, ako je $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, izborom

$$a_0 = B + 3A\left(x_0 + \frac{h}{2}\right), \tag{2.32}$$

formula (2.27) će biti tačna za polinom $P(\cdot)$.

Dalje, za svako $X \in [x_0, x_1]$ je

$$f(x) \approx f(X) + f'(X)(x-X) + \frac{1}{2}f''(X)(x-X)^2 + \frac{1}{6}f'''(X)(x-X)^3,$$

i u skladu sa (2.32), izborom

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[f''(X) + f'''(X)\left(x_0 + \frac{h}{2} - X\right)\right],$$

formula (2.27) (ponovo bez posljednjeg člana) će tačno integraliti "glavni dio" funkcije $f(\cdot)$. Dakle,

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{Q}_2[f,a,b,2m+1] + \overline{E}_2[f,a,b,2m+1].$$

U posljednjoj formuli je

$$\begin{aligned}\overline{Q}_2[f,a,b,2m+1] &= Q_T[f,x_0,x_1] - \frac{h^3}{12}\left[f''(X) + f'''(X)\left(x_0 + \frac{h}{2} - X\right)\right] \\ &\quad + Q_S[f,x_1,b,2m],\end{aligned} \tag{2.33}$$

pri čemu je red tačnosti i dalje $O(h^4)$, budući da je

$$f''(\xi_T) = f''(X) + f'''(X)(\xi_T - X) + \frac{1}{2}f^{(iv)}(\theta)(\xi_T - X)^2,$$

i najzad

$$\begin{aligned}\overline{E}_2[f,a,b,2m+1] &= -\frac{\left(\xi_T - x_0 - \frac{h}{2}\right)f'''(X) + \frac{1}{2}(\xi_T - X)^2 f^{(iv)}(\theta)}{12}h^3 \\ &\quad - \frac{(b-x_1)f^{(iv)}(\overline{\xi}_S)}{180}h^4.\end{aligned}$$

2.2.5 Numerički primjeri

I ovaj odjeljak završava sa numeričkim primjerima. Kao i u odjeljku 1.4.2 primjenom konstruisanih formula približno su izračunati integrali

$$\int_0^1 f(x)dx, \tag{2.34}$$

sa istim izborima podintegralne funkcije kao i u pomenutom odjeljku. U svakom primjeru relativne greške rezultata su date u dvije tabele (zavisno od parnosti broja čvorova). U prvoj koloni svake tabele dat je broj čvorova.

Rezultati dobijeni u slučaju kada je broj čvorova paran dati su u prvoj tabeli. Pri tome su u drugoj koloni dati rezultati dobijeni primjenom klasične trapezne formule, u trećoj rezultati dobijeni primjenom klasične Simpsonove formule, u četvrtoj rezultati dobijeni primjenom formule (2.24) i u posljednjoj rezultati dobijeni primjenom formule (2.25) (klasična Ermitova formula).

U drugoj tabeli su dati rezultati dobijeni u slučaju kada je broj čvorova neparan. Prilikom računanja, u formulama (2.28),(2.29) i (2.33) je uzeto $X =$

$(1-\lambda)x_0+\lambda x_1$ za $\lambda \in \{0, 1/2, 1\}$. Prema tome, u drugoj koloni ove tabele su date vrijednosti parametra λ, u trećoj su dati rezultati dobijeni primjenom formule (2.28), u četvrtoj rezultati dobijeni primjenom formule (2.29), u petoj rezultati dobijeni primjenom formule (2.30), u šestoj rezultati dobijeni primjenom formule (2.31) (ponovo klasična Ermitova formula) i u posljednjoj koloni su dati rezultati dobijeni primjenom formule (2.33).

Brojevi u uglastim zagradama, naravno, označavaju eksponent broja deset.

Primjer 14. Neka je i sada u (2.34) podintegralna funkcija parcijalni zbir eksponencijalnog reda, tj. neka je

$$f(x) = \sum_{i=0}^{s} \frac{x^i}{i!},$$

za $s \in \{3, 9, 15\}$.

U slučaju $s = 3$ dobijeni su sljedeći rezultati.

$n = 2m$

n	for. trapeza	for. Simpsona	for. (2.24)	for. (2.25)
2	0.183[−1]	0	0	0
4	0.457[−2]	0	0	0
6	0.203[−2]	0	0	0
8	0.114[−2]	0	0	0
10	0.732[−3]	0	0	0

Očekivano, u ovom slučaju posljednje tri formule daju tačan rezultat.

$n = 2m + 1$

n	λ	for. (2.28)	for. (2.29)	for. (2.30)	for. (2.31)	for. (2.33)
3	0	0.301[−3]	0.301[−3]			0
	1/2	0	0			0
	1	0.301[−3]	0.301[−3]	0	0	0
5	0	0.390[−4]	0.390[−4]			0
	1/2	0	0			0
	1	0.390[−4]	0.390[−4]	0	0	0
7	0	0.102[−4]	0.102[−4]			0
	1/2	0	0			0
	1	0.102[−4]	0.102[−4]	0	0	0
9	0	0.372[−5]	0.372[−5]			0
	1/2	0	0			0
	1	0.372[−5]	0.372[−5]	0	0	0
11	0	0.167[−5]	0.167[−5]			0
	1/2	0	0			0
	1	0.167[−5]	0.167[−5]	0	0	0

I u ovom slučaju odgovarajuće formule daju tačan rezultat.

U sljedeće dvije tabele dati su rezultati računanja u slučaju $s = 9$.

$n = 2m$

n	for. trapeza	for. Simpsona	for. (2.24)	for. (2.25)
2	0.208[−1]	0.337[−3]	0.757[−3]	0.863[−4]
4	0.520[−2]	0.215[−4]	0.484[−4]	0.542[−5]
6	0.231[−2]	0.427[−5]	0.961[−5]	0.107[−5]
8	0.130[−2]	0.135[−5]	0.305[−5]	0.339[−6]
10	0.833[−3]	0.555[−6]	0.125[−5]	0.139[−6]

$n = 2m + 1$

n	λ	for. (2.28)	for. (2.29)	for. (2.30)	for. (2.31)	for. (2.33)
3	0	0.384[−3]	0.449[−3]			0.844[−4]
	1/2	0.580[−4]	0.123[−3]			0.580[−4]
	1	0.327[−3]	0.262[−3]	0.482[−4]	0.171[−4]	0.910[−4]
5	0	0.489[−4]	0.586[−4]			0.101[−4]
	1/2	0.814[−5]	0.178[−4]			0.814[−5]
	1	0.370[−4]	0.273[−4]	0.742[−5]	0.222[−5]	0.104[−4]
7	0	0.127[−4]	0.153[−4]			0.255[−5]
	1/2	0.218[−5]	0.481[−5]			0.218[−5]
	1	0.907[−5]	0.644[−5]	0.205[−5]	0.578[−6]	0.259[−5]
9	0	0.461[−5]	0.559[−5]			0.914[−6]
	1/2	0.809[−6]	0.179[−5]			0.809[−6]
	1	0.321[−5]	0.222[−5]	0.773[−6]	0.212[−6]	0.922[−6]
11	0	0.206[−5]	0.251[−5]			0.404[−6]
	1/2	0.366[−6]	0.813[−6]			0.366[−6]
	1	0.141[−5]	0.960[−6]	0.353[−6]	0.948[−7]	0.407[−6]

U posljednje dvije tabele ovog primjera dati su rezultati računanja u slučaju $s = 15$.

$n = 2m$

n	for. trapeza	for. Simpsona	for. (2.24)	for. (2.25)
2	0.208[−1]	0.337[−3]	0.757[−3]	0.863[−4]
4	0.520[−2]	0.215[−4]	0.484[−4]	0.542[−5]
6	0.231[−2]	0.427[−5]	0.961[−5]	0.107[−5]
8	0.130[−2]	0.135[−5]	0.305[−5]	0.339[−6]
10	0.833[−3]	0.555[−6]	0.125[−5]	0.139[−6]

$n = 2m + 1$

n	λ	for. (2.28)	for. (2.29)	for. (2.30)	for. (2.31)	for. (2.33)
3	0	0.384[−3]	0.449[−3]			0.844[−4]
	1/2	0.580[−4]	0.123[−3]			0.580[−4]
	1	0.327[−3]	0.262[−3]	0.482[−4]	0.171[−4]	0.910[−4]
5	0	0.489[−4]	0.586[−4]			0.101[−4]
	1/2	0.814[−5]	0.178[−4]			0.814[−5]
	1	0.370[−4]	0.273[−4]	0.742[−5]	0.222[−5]	0.104[−4]
7	0	0.127[−4]	0.153[−4]			0.255[−5]
	1/2	0.218[−5]	0.481[−5]			0.218[−5]
	1	0.907[−5]	0.644[−5]	0.205[−5]	0.578[−6]	0.259[−5]
9	0	0.461[−5]	0.559[−5]			0.914[−6]
	1/2	0.809[−6]	0.179[−5]			0.809[−6]
	1	0.321[−5]	0.222[−5]	0.773[−6]	0.212[−6]	0.922[−6]
11	0	0.206[−5]	0.251[−5]			0.404[−6]
	1/2	0.366[−6]	0.814[−6]			0.366[−6]
	1	0.141[−5]	0.960[−6]	0.353[−6]	0.948[−7]	0.407[−6]

Primjer 15. Neka je dalje u (2.34)

$$f(x) = \exp(x).$$

U dvije tabele koje slijede dati su rezultati računanja.

$n = 2m$

n	for. trapeza	for. Simpsona	for. (2.24)	for. (2.25)
2	$0.208[-1]$	$0.337[-3]$	$0.757[-3]$	$0.863[-4]$
4	$0.520[-2]$	$0.215[-4]$	$0.484[-4]$	$0.542[-5]$
6	$0.231[-2]$	$0.427[-5]$	$0.961[-5]$	$0.107[-5]$
8	$0.130[-2]$	$0.135[-5]$	$0.305[-5]$	$0.339[-6]$
10	$0.833[-3]$	$0.555[-6]$	$0.125[-5]$	$0.139[-6]$

$n = 2m + 1$

n	λ	for. (2.28)	for. (2.29)	for. (2.30)	for. (2.31)	for. (2.33)
3	0	$0.384[-3]$	$0.449[-3]$			$0.844[-4]$
	1/2	$0.580[-4]$	$0.123[-3]$			$0.580[-4]$
	1	$0.327[-3]$	$0.262[-3]$	$0.482[-4]$	$0.171[-4]$	$0.910[-4]$
5	0	$0.489[-4]$	$0.586[-4]$			$0.101[-4]$
	1/2	$0.814[-5]$	$0.178[-4]$			$0.814[-5]$
	1	$0.370[-4]$	$0.273[-4]$	$0.742[-5]$	$0.222[-5]$	$0.104[-4]$
7	0	$0.127[-4]$	$0.153[-4]$			$0.255[-5]$
	1/2	$0.218[-5]$	$0.481[-5]$			$0.218[-5]$
	1	$0.907[-5]$	$0.644[-5]$	$0.205[-5]$	$0.578[-6]$	$0.259[-5]$
9	0	$0.461[-5]$	$0.559[-5]$			$0.914[-6]$
	1/2	$0.809[-6]$	$0.179[-5]$			$0.809[-6]$
	1	$0.321[-5]$	$0.222[-5]$	$0.773[-6]$	$0.212[-6]$	$0.922[-6]$
11	0	$0.206[-5]$	$0.251[-5]$			$0.404[-6]$
	1/2	$0.366[-6]$	$0.814[-6]$			$0.366[-6]$
	1	$0.141[-5]$	$0.960[-6]$	$0.353[-6]$	$0.948[-7]$	$0.407[-6]$

Primjer 16. U ovom primjeru je u (2.34)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13},$$

a rezultati računanja su dati u dvije tabele koje slijede.

$n = 2m$

n	for. trapeza	for. Simpsona	for. (2.24)	for. (2.25)
2	$0.148[-2]$	$0.982[-7]$	$0.184[-6]$	$0.727[-7]$
4	$0.369[-3]$	$0.175[-7]$	$0.388[-7]$	$0.506[-8]$
6	$0.164[-3]$	$0.383[-8]$	$0.858[-8]$	$0.102[-8]$
8	$0.923[-4]$	$0.125[-8]$	$0.281[-8]$	$0.324[-9]$
10	$0.591[-4]$	$0.521[-9]$	$0.117[-8]$	$0.133[-9]$

$n = 2m + 1$

n	λ	for. (2.28)	for. (2.29)	for. (2.30)	for. (2.31)	for. (2.33)
3	0	$0.137[-4]$	$0.135[-4]$			$0.154[-6]$
	1/2	$0.128[-6]$	$0.343[-6]$			$0.128[-6]$
	1	$0.144[-4]$	$0.146[-4]$	$0.204[-6]$	$0.156[-7]$	$0.375[-7]$
5	0	$0.176[-5]$	$0.174[-5]$			$0.802[-8]$
	1/2	$0.146[-7]$	$0.379[-7]$			$0.146[-7]$
	1	$0.183[-5]$	$0.186[-5]$	$0.214[-7]$	$0.210[-8]$	$0.327[-8]$
7	0	$0.458[-6]$	$0.453[-6]$			$0.813[-9]$
	1/2	$0.345[-8]$	$0.875[-8]$			$0.345[-8]$
	1	$0.473[-6]$	$0.478[-6]$	$0.478[-8]$	$0.551[-9]$	$0.219[-9]$
9	0	$0.167[-6]$	$0.166[-6]$			$0.435[-10]$
	1/2	$0.118[-8]$	$0.294[-8]$			$0.118[-8]$
	1	$0.172[-6]$	$0.174[-6]$	$0.157[-8]$	$0.203[-9]$	$0.835[-10]$
11	0	$0.749[-7]$	$0.742[-6]$			$0.521[-10]$
	1/2	$0.502[-9]$	$0.124[-8]$			$0.502[-9]$
	1	$0.768[-7]$	$0.775[-7]$	$0.646[-9]$	$0.910[-10]$	$0.894[-10]$

Primjer 17. I ovaj odjeljak završava izborom

$$f(x) = \cos(x^2),$$

u (2.34), a rezultati računanja su dati u dvije posljednje tabele.

$n = 2m$

n	for. trapeza	for. Simpsona	for. (2.24)	for. (2.25)
2	0.387[−1]	0.206[−2]	0.497[−2]	0.761[−4]
4	0.969[−2]	0.254[−4]	0.620[−4]	0.210[−7]
6	0.431[−2]	0.145[−5]	0.367[−5]	0.167[−6]
8	0.242[−2]	0.870[−7]	0.265[−6]	0.705[−7]
10	0.155[−2]	0.331[−7]	0.566[−7]	0.322[−7]

$n = 2m + 1$

n	λ	for. (2.28)	for. (2.29)	for. (2.30)	for. (2.31)	for. (2.33)
3	0	0.545[−3]	0.402[−3]			0.545[−3]
	1/2	0.239[−4]	0.167[−3]			0.239[−4]
	1	0.172[−2]	0.186[−2]	0.212[−3]	0.369[−5]	0.523[−3]
5	0	0.350[−4]	0.137[−4]			0.350[−4]
	1/2	0.920[−5]	0.305[−4]			0.920[−5]
	1	0.142[−3]	0.163[−3]	0.239[−4]	0.228[−6]	0.348[−4]
7	0	0.588[−5]	0.105[−5]			0.588[−5]
	1/2	0.235[−5]	0.718[−5]			0.235[−5]
	1	0.270[−4]	0.318[−4]	0.509[−5]	0.108[−6]	0.587[−5]
9	0	0.155[−5]	0.183[−7]			0.155[−5]
	1/2	0.787[−6]	0.232[−5]			0.787[−6]
	1	0.781[−5]	0.934[−5]	0.157[−5]	0.470[−7]	0.155[−5]
11	0	0.535[−6]	0.730[−7]			0.535[−6]
	1/2	0.323[−6]	0.931[−6]			0.323[−6]
	1	0.290[−5]	0.351[−5]	0.609[−6]	0.227[−7]	0.535[−6]

Glava 3

Vodič za korisnike programskog paketa *SNI.m*

Mathematica paket **SNI.m** *ver* 1.0

autor: **Zlatko Udovičić**

zzlatko@pmf.unsa.ba

Mathematica paket **SNI.m** je programska realizacija nekih rezultata autorove doktorske disertacije. U paketu su implementirani moduli koji omogućavaju manipulaciju sa kardinalnim B-splajnovima, konstrukciju aprokismacije zadane funkcije u prostoru generisanom kardinalnim B-splajnom i numeričku integraciju pomocu kardinalnih B-splajnova. Osim toga, u paket su implementirani moduli koji predstavljaju programsku realizaciju nekih modifikacija trapeznog pravila.

Učitavanje paketa realizuje se naredbom:

```
In[1]:= SetDirectory["Putanja"];
        << SNI10.m
```

Kardinalni B-splajnovi

Izračunavanje koeficijenata polinoma kojima su, po dijelovima, jednaki kardinalni B-splajnovi reda ne većeg od am realizuje se pozivom modula.

mKoeficijentiSplajna[am]	izračunavanje koficijenata polinoma koji obrazuju kardinalne B-splajnove reda ne većeg od am

Argument am je obavezan i mora biti cijeli broj veci od 1. Izvršavanjem ovog modula formira se trodimenzioni niz. Pri tome, prva komponenta elementa ovog niza predstavlja koeficijent polinoma, druga komponenta red odgovarajućeg kardinalnog B-splajna, a treća lijevi kraj intervala (sa cjelobrojnim krajevima) na kojem je je definisan polinom. Algoritam korišten za realizaciju ovog modula opisan je u radu [1].

Realizacijom naredbi

```
In[3]:= hK = mKoeficijentiSplajna[4];
        Table[Table[Table[hK[bk, bm, bi], {bk, bm - 1, 0, -1}], {bi, 0, bm - 1}], {bm, 2, 4}] // MatrixForm
```

Out[4]//MatrixForm=

$$\{\{1,\ 0\},\ \{-1,\ 2\}\}$$

$$\{\{\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0\},\ \{-1,\ 3,\ -(\tfrac{3}{2})\},\ \{\tfrac{1}{2},\ -3,\ \tfrac{9}{2}\}\}$$

$$\{\{\tfrac{1}{6},\ 0,\ 0,\ 0\},\ \{-(\tfrac{1}{2}),\ 2,\ -2,\ \tfrac{2}{3}\},\ \{\tfrac{1}{2},\ -4,\ 10,\ -(\tfrac{22}{3})\},\ \{-(\tfrac{1}{6}),\ 2,\ -8,\ \tfrac{32}{3}\}\}$$

dobijeni su koeficijenti kardinalnih B-splajnova reda 2, 3 i 4. Koristeći ovaj izlaz moguće je formirati eksplicitne izraze za kardinalne B-splajnove reda 2,3 i 4. Npr. eksplicitni izraz za kardinalni B-splajn trećeg reda glasi $\phi_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, \; 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, \; 1 \le x < 2 \\ \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2}, \; 2 \le x < 3 \end{cases}$.

Kardinalni B-splajn reda am u obliku dio po dio polinomijalne funkcije, dobija se pozivom modula

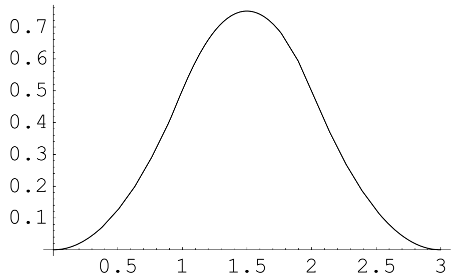
mSplajn[am,at]	formiranje eksplicitnog izraza za kardinalni B-splajn reda am

pri čemu argument am mora biti cijeli broj veci od 1, dok argument at mora biti realan broj. Oba argumanta su obavezna. Npr.

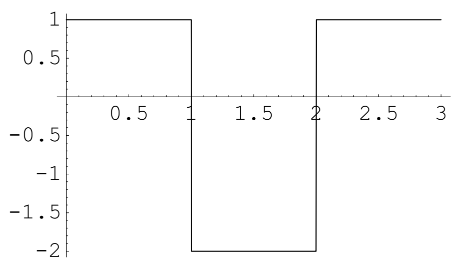
```
In[5]:= mSplajn[3, ax]

Out[5]=
                                               0       1       2
                                          0 ax    0 ax    1 ax
      Which[ax > 3 || ax <= 0, 0, ax > 0 && ax <= 1, ----- + ----- + -----, ax > 1 && ax <= 2,
                                            1       1       2

           0       1     2                            0       1       2
     -3 ax    3 ax    ax                         9 ax    3 ax    1 ax
     ------ + ----- - ---, ax > 2 && ax <= 3,  ----- - ----- + -----]
       2        1      1                          2       1       2
```

Sada je sa kardinalnim B-splajnom moguće manipulisati kao sa bilo kojom drugom funkcijom.

```
In[9]:= Plot[mSplajn[3,t],{t,0,3}];
        D[mSplajn[3,x],{x,3}]
        Plot[D[mSplajn[3,x],{x,2}]/.x->t,{t,0,3}];
```




```
Out[10]= Which[x > 3 || x <= 0, 0, x > 0 && x <= 1, 0, x > 1 && x <= 2, 0, x > 2 && x <= 3, 0]
```

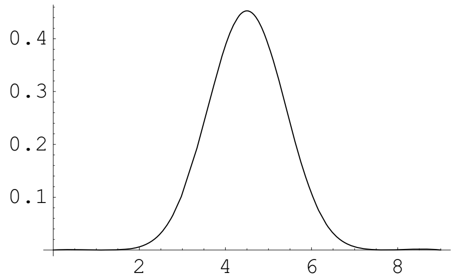


Ukoliko je red kardinalnog B-splajna unaprijed poznat, u cilju brzeg izvršavanja, bolje je preimenovati modul mSplajn.

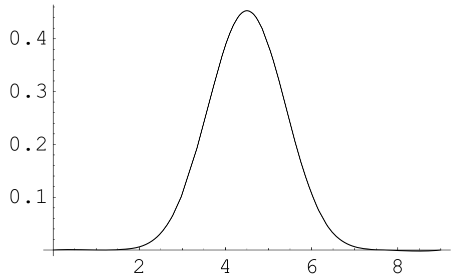
```
In[18]:= hm=9;
         mS[ax_]=mSplajn[hm,ax];
         Timing[mSplajn[hm,8]]
         Timing[mS[8]]
         Timing[Plot[mSplajn[hm,t],{t,0,hm},PlotRange->All]]
         Timing[Plot[mS[t],{t,0,hm},PlotRange->All]]
```

Out[20]= $\{0.06\ \text{Second},\ \frac{1}{40320}\}$

Out[21]= $\{0.\ \text{Second},\ \frac{1}{40320}\}$



Out[22]= {10.54 Second, -Graphics-}



Out[23]= {0.11 Second, -Graphics-}

U slučaju kardinalnih B-splajnova relativno velikog reda, zbog ograničene preciznosti, moguće je dobiti netačne rezultate.

```
In[24]:= mSplajn[19,18.2]
```

Out[24]= -0.0000636596

Zbog toga je bolje na poziciji drugog argumenta modula mSplajn korisiti racionalne brojeve.

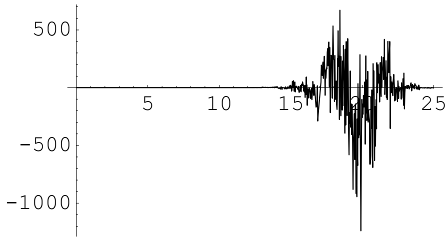
```
In[25]:= mSplajn[19,t]/.t->182/10
         N[%]
```

Out[25]= $\frac{1048576}{372667197704315185546875}$

Out[26]= $2.81371\ 10^{-18}$

Pomenuto odstupanje od tačnih rezultata još više dolazi do izražaja kada se crta grafik kardinalnog B-splajna relativno velikog reda.

```
In[35]:= hm=25;
         mS[ax_]=mSplajn[hm,ax];
         Plot[mS[t],{t,0,hm},PlotRange->All];
```

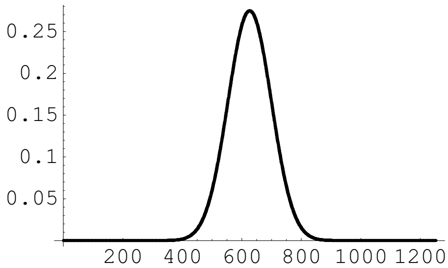


U cilju prevazilaženja ovih problema razvijen je modul mSplajnLV[am,ax].

mSplajnLV[am,ax]	izračunavanje vrijednosti kardinalnog B-splajna reda am u tačkama koje su zadane u listi ax

Argument am mora biti cijeli broj veci od 1, dok argument ax mora biti lista brojeva. Oba argumanta su obavezna.

```
In[38]:= hm=25;
         ListPlot[mSplajnLV[hm,Table[x,{x,0,hm,1/50}]],PlotRange->All];
```



Svakako, elementi liste ax trebaju biti racionalni brojevi.

Aproksimacija

Programski paket SNI.m omogućava konstrukciju aproksimacije zadane funkcije f(.), na intervalu [0,m], u prostoru generisanom kardinalnim B-splajnom reda m, na nivou rezolucije j. Dakle, moguće je konstruisati aproksimaciju oblika

$$f(x)\approx 2^{j/2} \sum_{k=-m+1}^{2^j m-1} c_k\, \phi_m(2^j x - k).$$

Detaljan opis konstrukcije ove aproksimacije može se naći u [2].

Za izračunavanje koeficijenata aproksimacije koristi se modul

mKoeficijentiAproksimacije[af,ax,am,aj,aprec]	izračunavanje koeficijenata aproksimacije funkcije af

dok se za dobijanje eksplicitnog izraza aproksimacije koristi modul

mSplajnAproksimacija[af,ax,am,aj,aprec]	formiranje eksplicitnog izraza splajn aproksimacije funkcije af

Argumenti af i ax su obavezni, dok su tri posljednja argumenta opcioni.

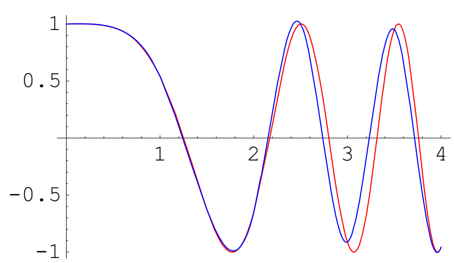
Argument	Podrazumjevana vrijednost	Komentar
af	nema	funkcija koja se aproksimira
ax	nema	argument funkcije af
am	4	red kardinalnog B-splajna (cijeli broj veci od 1)
aj	2	nivo rezolucije (nenegativan, cijeli broj)
aprec	6	tačnost sa kojom se rješava odgovarajuci sistem linearnih jednačina (dozvoljeno je da ova vrijednost bude ∞)

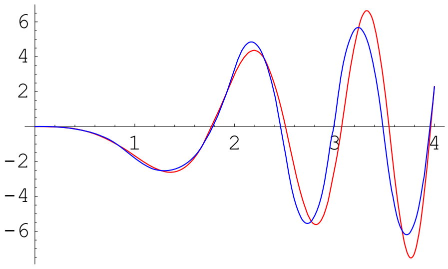
```
In[163]:=
    hf[ax_]=Cos[ax^2];
    hm=3;
    hj=0;
    hprec=6;
    Table[mKoeficijentiAproksimacije[hf[t],t,hm,hj,hprec][bk],{bk,-hm+1,2^hj*hm-1}]
    mSplajnAproksimacija[hf[t],t,hm,hj,hprec]

Out[167]=
    {-0.7131, 2.7131, -1.6325, 0.32523, -2.1475}

Out[168]=
    -2.1475 Which[-2 + t > 3 || -2 + t <= 0, 0, -2 + t > 0 && -2 + t <= 1,
                  0              1              2
        0 (-2 + t)     0 (-2 + t)     1 (-2 + t)
        ----------- + ----------- + -----------, -2 + t > 1 && -2 + t <= 2,
            1              1              2
                   0              1            2
        -3 (-2 + t)     3 (-2 + t)     (-2 + t)
        ------------ + ----------- - ---------, -2 + t > 2 && -2 + t <= 3,
             2              1            1
                  0              1              2
        9 (-2 + t)     3 (-2 + t)     1 (-2 + t)
        ----------- - ----------- + -----------] +
            2              1              2
      0.32523 Which[-1 + t > 3 || -1 + t <= 0, 0, -1 + t > 0 && -1 + t <= 1,
                  0              1              2
        0 (-1 + t)     0 (-1 + t)     1 (-1 + t)
        ----------- + ----------- + -----------, -1 + t > 1 && -1 + t <= 2,
            1              1              2
                   0              1            2
        -3 (-1 + t)     3 (-1 + t)     (-1 + t)
        ------------ + ----------- - ---------, -1 + t > 2 && -1 + t <= 3,
             2              1            1
                  0              1              2
```

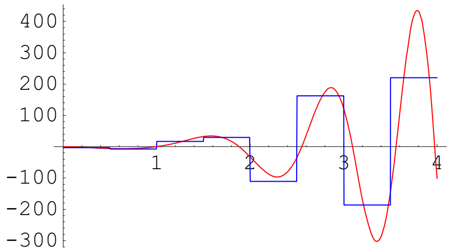
```
 9 (-1 + t)      3 (-1 + t)      1 (-1 + t)
 ----------  -  ----------  +  ----------] -
     2              1               2

                                                        0      1      2
                                                    0 t    0 t    1 t
1.6325 Which[t > 3 || t <= 0, 0, t > 0 && t <= 1, ---- + ---- + ----, t > 1 && t <= 2,
                                                     1      1      2

     0     1    2                     0     1     2
 -3 t   3 t    t                   9 t   3 t   1 t
 ----- + ---- - --, t > 2 && t <= 3, ---- - ---- + ----] +
   2      1     1                    2     1     2
2.7131 Which[1 + t > 3 || 1 + t <= 0, 0, 1 + t > 0 && 1 + t <= 1,
           0            1            2
 0 (1 + t)    0 (1 + t)    1 (1 + t)
 ---------- + ---------- + ----------, 1 + t > 1 && 1 + t <= 2,
     1            1            2
            0            1          2
 -3 (1 + t)    3 (1 + t)    (1 + t)
 ----------- + ---------- - --------, 1 + t > 2 && 1 + t <= 3,
      2            1           1
           0            1            2
 9 (1 + t)    3 (1 + t)    1 (1 + t)
 ---------- - ---------- + ----------] -
     2            1            2
0.7131 Which[2 + t > 3 || 2 + t <= 0, 0, 2 + t > 0 && 2 + t <= 1,
           0            1            2
 0 (2 + t)    0 (2 + t)    1 (2 + t)
 ---------- + ---------- + ----------, 2 + t > 1 && 2 + t <= 2,
     1            1            2
            0            1          2
 -3 (2 + t)    3 (2 + t)    (2 + t)
 ----------- + ---------- - --------, 2 + t > 2 && 2 + t <= 3,
      2            1           1
           0            1            2
 9 (2 + t)    3 (2 + t)    1 (2 + t)
 ---------- - ---------- + ----------]
     2            1            2
```

I sa dobijenom aproksimacijom je moguće manipulisati kao sa bilo kojom drugom funkcijom.

In[10]:=
```
hf[ax_]=Cos[ax^2];
hm=4;
hj=1;
hprec=6;
Plot[{hf[x],mSplajnAproksimacija[hf[t],t,hm,hj,hprec]/.t->x},{x,0,hm},PlotRange->All,PlotStyle
->{RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1]}];
Plot[{D[hf[t],{t,1}]/.t->x,D[mSplajnAproksimacija[hf[t],t,hm,hj,hprec],{t,1}]/.t->x},{x,0,hm},
PlotRange->All,PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1]}];
Plot[{D[hf[t],{t,3}]/.t->x,D[mSplajnAproksimacija[hf[t],t,hm,hj,hprec],{t,3}]/.t->x},{x,0,hm},
PlotRange->All,PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1]}];
```





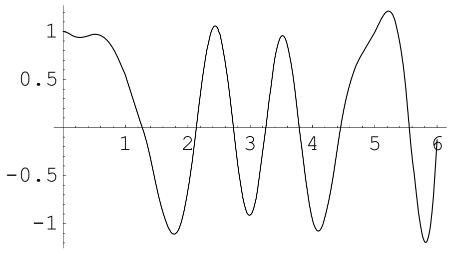


Ukoliko je red kardinalnog B-splajna unaprijed poznat, ponovo je bolje preimenovati modul mSplajnAproksimacija.

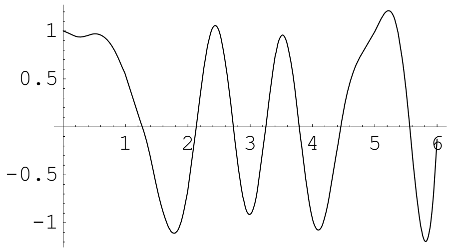
```
In[77]:= hf[ax_]=Cos[ax^2];
         hm=6;
         hj=1;
         hprec=6;
         mSA[ax_]=mSplajnAproksimacija[hf[ax],ax,hm,hj,hprec];
         Timing[mSplajnAproksimacija[hf[ax],ax,hm,hj,hprec]/.ax->5]
         Timing[mSA[ax]/.ax->5]
         Timing[Plot[mSplajnAproksimacija[hf[ax],ax,hm,hj,hprec]/.ax->t,{t,0,hm}]]
         Timing[Plot[mSA[ax]/.ax->t,{t,0,hm}]]
```

```
Out[82]= {0.05 Second, 0.991}
```

```
Out[83]= {0.06 Second, 0.991}
```




```
Out[84]= {12.52 Second, -Graphics-}
```



Out[85]= {3.02 Second, -Graphics-}

I sada je moguće da se, prilikom rada sa splajnovima relativno velikog reda, zbog ograničene preciznosti, dobiju netačni rezultati, pa je bolje vrijednosti aproksimacije računati u racionalnim brojevima.

U slučaju kada je vrijednost argumenta aprec jednaka ∞ moguće je dobiti simboličke vrijednosti koeficijenata aproksimacije, ali se time znatno povećava vrijeme izvršavanja.

In[185]:=

```
hf[ax_]=Cos[ax^2];
hm=5;
hj=2;
Timing[Table[mKoeficijentiAproksimacije[hf[t],t,hm,hj][bk],{bk,-hm+1,2^hj*hm-1}]][[1]]
Timing[Table[mKoeficijentiAproksimacije[hf[t],t,hm,hj,\[Infinity]][bk],{bk,-hm+1,2^hj*hm-1}]][[1
]]
```

Out[188]=

```
0.5 Second
```

Out[189]=

```
10.66 Second
```

Numerička integracija

U programskom paketu SNI.m razvijeno je nekoliko modula za približno izračunavanje integrala

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Integracija pomoću kardinalnih B-splajnova

Prvi modul je programska realizacija rezultata koji se bazira na ideji (koja je datljno obrađena u radu [2]) da se umjesto funkcije f(.) integrali njena aproksimacija u prostoru generisanom kardinalnim B-splajnom. Ovaj modul se realizuje naredbom

mICBS[af,{ax,adg,agg},am,aj,aprec]	približno izračunavanje integrala funkcije af na intervalu [adg,agg]

Posljednja tri argumenta ovog modula su opcioni, dok su prva dva (četiri) obavezni.

Argument	Podrazumjevana vrijednost	Komentar
af	nema	funkcija čiji se integral izračunava
ax	nema	argument funkcije af
adg	nema	donja granica intervala integracije
agg	nema	gornja granica intervala integracije
am	4	red kardinalnog B-splajna (cijeli broj veci od 1)
aj	2	nivo rezolucije (nenegativan cijeli broj)
aprec	6	tačnost sa kojom se rješava odgovarajući sistem linearnih jednačina (dozvoljeno je da ova vrijednost bude ∞)

In[190]:=

```
hf[ax_]=Cos[ax^2];
hm=6;
hj=2;
hprec=25;
mICBS[hf[t],{t,0,1},hm,hj,hprec]
```

Out[194]=

0.904524237926494691380537

Modul mICBS omogućava i dobijanje simboličkih rezultata.

In[195]:=

```
mICBS[x^4,{x,-2,1},5,0,\[Infinity]]
mICBS[x^4,{x,a,b},5,0]//Simplify
mICBS[x^4,{x,a,b},5,0,\[Infinity]]//Simplify
mICBS[f[t],{t,-1,1},4,0,\[Infinity]]//Simplify
mICBS[f[t],{t,-1,1},4,1,\[Infinity]]//Simplify
```

Out[195]=

$$\frac{33}{5}$$

Out[196]=

$$-0.200\ a^5 + 0.\ 10^{-2}\ a^4\ b + 0.\ 10^{-2}\ a^3\ b^2 + 0.\ 10^{-1}\ a^2\ b^3 + 0.\ 10^{-1}\ a\ b^4 + 0.2\ b^5$$

Out[197]=

$$\frac{-a^5 + b^5}{5}$$

Out[198]=

$$\frac{12\ f[-1] + 24\ f[-(\frac{1}{2})] + 24\ f[0] + 24\ f[\frac{1}{2}] + 12\ f[1] + f'[-1] - f'[1]}{48}$$

Out[199]=

$$\left(24\, f[-1] + 48\, f[-(\tfrac{3}{4})] + 48\, f[-(\tfrac{1}{2})] + 48\, f[-(\tfrac{1}{4})] + 48\, f[0] + 48\, f[\tfrac{1}{4}] + 48\, f[\tfrac{1}{2}] + 48\, f[\tfrac{3}{4}] + 24\, f[1] + f'[-1] - f'[1]\right) / 192$$

Neke modifikacije trapeznog pravila

U ovoj grupi je razvijeno još devet modula. Prvi modul je realizacija uopštenog trapeznog pravila i poziva se naredbom

mTrapezno[af,{ax,adg,agg},an]	realizacija uopštenog trapeznog pravila

Preostali moduli zavise od parnosti broja čvorova

Slučaj kada je broj čvorova paran

U ovom slučaju realizovane su tri kvadraturne formule, pri čemu se koriste standardne oznaku za ravnomjerno raspoređene čvorove.

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{m-1} f_{2k} + 4\sum_{k=1}^{m} f_{2k-1} + f_{2m}\right) \text{ (uopštena Simpsonova formula)}, \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m-1} f_k + f_{2m}\right) - \frac{h^3}{6}\sum_{k=1}^{m} f_k'' \qquad (2)$$

i formula

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m-1} f_k + f_{2m}\right) - \frac{h^2}{12}\left(f_{2m}' - f_0'\right) \text{ (Ermitova kvadraturna formula)}. \qquad (3)$$

Odgovarajući moduli se pozivaju naredbama

mSimpsonovo[af,{ax,adg,agg},an]	realizacija formule (1)
mPrvaModifikacijaNParno[af,{ax,adg,agg},an]	realizacija formule (2)
mDrugaModifikacijaNParno[af,{ax,adg,agg},an]	realizacija formule (3)

U četiri prethodna modula svi argumenti imaju isto značenje

Argument	Komentar
af	funkcija čiji se integral izracunava
ax	argument funkcije af
adg	donja granica intervala integracije
agg	gornja granica intervala integracije
an	broj čvorova

Svi argumenti, izuzev posljednjeg su obavezni. Argument an u modulu mTrapezno mora biti pozitivan, cijeli broj, dok u preostala tri modula argument an mora biti pozitivan, paran broj (podrazumjevana vrijednost je 2).

Slučaj kada je broj čvorova neparan

Ako je broj čvorova neparan, realizovano je pet kvadraturnih formula (i dalje se koriste standardne oznake za ravnomjerno raspoređene čvorove).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f_0+f_1) - \frac{h^3 f''(X)}{12} + \frac{h}{3}\left(f_1 + 2\sum_{k=1}^{m} f_{2k-1} + 4\sum_{k=1}^{m} f_{2k} + f_{2m+1}\right) \tag{4}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m} f_k + f_{2m+1}\right) - \frac{h^3}{6}\left(\frac{f''(X)}{2} + \sum_{k=1}^{m} f_{2k}''\right) \tag{5}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f_0+f_1) - \frac{h^2}{12}(f_1' - f_0') + \frac{h}{3}\left(f_1 + 2\sum_{k=1}^{m} f_{2k-1} + 4\sum_{k=1}^{m} f_{2k} + f_{2m+1}\right) \tag{6}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{k=1}^{2m} f_k + f_{2m+1}\right) - \frac{h^3}{12}(f_{2m+1}' - f_0') \tag{7}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f_0+f_1) - \frac{h^3}{12}\left(f''(X) + f^{(3)}(X)\left(x_0 + \frac{h}{2} - X\right)\right) + \frac{h}{3}\left(f_1 + 2\sum_{k=1}^{m} f_{2k-1} + 4\sum_{k=1}^{m} f_{2k} + f_{2m+1}\right) \tag{8}$$

U formulama (4), (5) i (8) X oznacava tačku između prva dva čvora. Odgovarajući moduli se pozivaju naredbama

mPrvaModifikacijaNNeparno1[af,{ax,adg,agg},an,al]	realizacija formule (4)
mPrvaModifikacijaNNeparno2[af,{ax,adg,agg},an,al]	realizacija formule (5)
mDrugaModifikacijaNNeparno1[af,{ax,adg,agg},an]	realizacija formule (6)
mDrugaModifikacijaNNeparno2[af,{ax,adg,agg},an]	realizacija formule (7)
mJosJednaModifikacijaNNeparno[af,{ax,adg,agg},an,al]	realizacija formule (8)

Argumenti af, ax, adg, agg i an imaju isto značenje kao u prethodna četiri modula. Argument an je opcioni i podrazumjevana vrijednost mu je 1. Argument al određuje poziciju međutačke X između prva dva čvora u obliku X=(1-al)x_0+alx_1. I ovaj argument je opcioni, a podrazumjevana vrijednost mu je $1/2$.

Izvršavanjem gornjih modula dobijaju se simbolicki rezultati (koje je, po potrebi, jednostavno prevesti u numeričke). Dalje, izvršavanjem niza nardebi koje slijede jednostavno se provjerava (dodjeljujući vrijednosti 0, 1, 2 i 3 promjenljivoj hs) da sve konstruisane formule, sa izborom tačke X=$(x_0+x_1)/2$, imaju algebarski stepen tacnosti jednak 3.

```
In[200]:=
    hs=3;
    mTrapezno[t^hs,{t,dg,gg}]//Simplify
    mSimpsonovo[t^hs,{t,dg,gg}]//Simplify
    mPrvaModifikacijaNParno[t^hs,{t,dg,gg}]//Simplify
```

```
mDrugaModifikacijaNParno[t^hs,{t,dg,gg}]//Simplify
mPrvaModifikacijaNNeparno1[t^hs,{t,dg,gg}]//Simplify
mPrvaModifikacijaNNeparno2[t^hs,{t,dg,gg}]//Simplify
mDrugaModifikacijaNNeparno1[t^hs,{t,dg,gg}]//Simplify
mDrugaModifikacijaNNeparno2[t^hs,{t,dg,gg}]//Simplify
mJosJednaModifikacijaNNeparno[t^hs,{t,dg,gg}]//Simplify
```

Out[201]=

$$\frac{(-dg + gg)\ (dg^3 + gg^3)}{2}$$

Out[202]=

$$\frac{-dg^4 + gg^4}{4}$$

Out[203]=

$$\frac{-dg^4 + gg^4}{4}$$

Out[204]=

$$\frac{-dg^4 + gg^4}{4}$$

Out[205]=

$$\frac{-dg^4 + gg^4}{4}$$

Out[206]=

$$\frac{-dg^4 + gg^4}{4}$$

Out[207]=

$$\frac{-dg^4 + gg^4}{4}$$

Out[208]=

$$\frac{-dg^4 + gg^4}{4}$$

Out[209]=

$$\frac{-dg^4 + gg^4}{4}$$

Detaljan opis realizovanih formula dat je u [3].

Literatura

[1] G. V. Milovanović, Z. Udovičić, Calculation of the moments of the cardinal B-spline, *Appl. Math. Lett.* 23 (2010), no. 11, 1346-1350

[2] Z. Udovičić, Numerical integration using cardinal B-splines, u postupku recenzije.

[3] Z. Udovičić, Some modifications of the trapezoidal rule, *Sarajevo J. Math..* 2(15) (2006), no. 2, 237-245.

Glava 4

Mathematica kod programskog paketa *SNI.m*

```
(*
  Verzija Mathematica - e : 5.0

                       Ime : SNI.m

                       Autor : Zlatko Udovicic

                      Istorija : Verzija 1.0 (februar, mart 2010)

                      Opis : Programska podrska nekih rezultata dobijenih u
                      doktorskoj disertaciji autora paketa.
  *)

BeginPackage["SNI`"];

mKoeficijentiSplajna::usage = "Modul mKoeficijentiSplajna[am] izdaje
trodimenzioni niz, pri cemu prva komponenta odgovara koeficijentu polinoma
kojem je jednak kardinalni B-splajn, druga komponenta odgovara redu splajna,
a treca lijevom kraju intervala na kojem je definisan polinom. Argument am
mora biti cijeli broj veci od 1.";

mSplajnLV::usage = "Modul mSplajnLV[am,at], pomocu modula mKoeficijenti splajna,
izracunava vrijednosti kardinalnog B-splajna reda am u tackama koje su zadane u
listi at. Argument am mora biti cijeli broj veci od 1, dok argument at mora biti
lista realnih brojeva.";

mKoeficijentiAproksimacije::usage = "Modul
mKoeficijentiAproksimacije[af,ax,am,aj,aprec] izracunava koeficijente
aproksimacije funkcije af argumenta ax, na intervalu [0,am], u prostoru
kardinalnog B-splajna reda am, na nivou rezolucije aj. Odgovarajuci sistem
linearnih jednacina rjesava se sa tacnoscu aprec. Argument af mora biti funkcija
argumenta ax, argument am mora biti cijeli broj veci od 1 i argument aj mora biti
nenegativan, cijeli broj.";

mSplajn::usage = "Modul mSplajn[am,at] izdaje kardinalni B-splajn kao dio po dio
polinomijalnu funkciju. Argument am mora biti cijeli broj veci od 1, dok argument
at mora biti realan broj.";

mICBS::usage = "Modul mICBS[af,{ax,adg,agg},am,aj,aprec] izracunava odredjeni
integral funkcije af u granicama od adg do agg, po promjenljivoj ax. Odgovarajuci
sistem linearnih jednacina rjesava se sa tacnoscu aprec. Argument am mora biti
cijeli broj veci od 1 i argument aj mora biti nenegativan, cijeli broj.";

mSplajnAproksimacija::usage = "Modul mSplajnAproksimacija[af,ax,am,aj,aprec] izdaje
aproksimaciju funkcije af[ax], na intervalu [0,am], u prostoru generisanim
kardinalnim B-splajnom reda am, sa nivoom rezolucije aj. Odgovarajuci sitem
linearnih jednacina rjesava se sa tacnoscu aprec. Argument am mora biti cijeli broj
veci od 1 i argument aj mora biti nenegativan, cijeli broj.";

mTrapezno::usage = "Modul mTrapezno[af,{ax,adg,agg},an] je realizacija uopstenog
trapeznog pravila. Priblizno se izracunava odredjeni integral funkcije af, ciji je
argument ax, na intervalu [adg,agg]. Argument an oznacava broj tacaka koje se
koriste za priblizno izracunavanje integrala i mora biti pozitivan, cijeli broj.";

mSimpsonovo::usage = "Modul mSimpsonovo[af,{ax,adg,agg},an] je realizacija
uopstenog Simpsonovog pravila. Priblizno se izracunava odredjeni integral
funkcije af, ciji je argument ax, na intervalu [adg,agg]. Argument an oznacava
broj tacaka koje se koriste za priblizno izracunavanje integrala i mora biti
pozitivan, paran broj.";

mPrvaModifikacijaNParno::usage = "Modul mPrvaModifikacijaNParno[af,{ax,adg,agg},an]
je jedna od modifikacija trapeznog pravila. Priblizno se izracunava odredjeni
```

```
integral funkcije af, ciji je argument ax, na intervalu [adg,agg]. Argument an
oznacava broj tacaka koje se koriste za priblizno izracunavanje integrala i mora
biti pozitivan, paran broj.";

mDrugaModifikacijaNParno::usage = "Modul
mDrugaModifikacijaNParno[af,{ax,adg,agg},an] je jedna od modifikacija trapeznog
pravila. Priblizno se izracunava odredjeni integral funkcije af, ciji je argument
ax, na intervalu [adg,agg]. Argument an oznacava broj tacaka koje se koriste za
priblizno izracunavanje integrala i mora biti pozitivan, paran broj.";

mPrvaModifikacijaNNeparno1::usage = "Modul
mPrvaModifikacijaNNeparno1[af,{ax,adg,agg},an,al] je jedna od modifikacija
trapeznog pravila. Priblizno se izracunava odredjeni integral funkcije af, ciji
je argument ax, na intervalu [adg,agg]. Argument an oznacava broj tacaka koje se
koriste za priblizno izracunavanje integrala i mora biti pozitivan, neparan broj.
Argument al odredjuje poziciju medjutacke izmedju prva dva cvora i mora biti realan
broj iz intervala [0,1].";

mPrvaModifikacijaNNeparno2::usage = "Modul
mPrvaModifikacijaNNeparno2[af,{ax,adg,agg},an,al] je jedna od modifikacija
trapeznog pravila. Priblizno se izracunava odredjeni integral funkcije af, ciji
je argument ax, na intervalu [adg,agg]. Argument an oznacava broj tacaka koje
se koriste za priblizno izracunavanje integrala i mora biti pozitivan, neparan
broj. Argument al odredjuje poziciju medjutacke izmedju prva dva cvora i mora
biti realan broj iz intervala [0,1].";

mDrugaModifikacijaNNeparno1::usage = "Modul
mDrugaModifikacijaNNeparno1[af,{ax,adg,agg},an] je jedna od modifikacija trapeznog
pravila. Priblizno se izracunava odredjeni integral funkcije af, ciji je argument
ax, na intervalu [adg,agg]. Argument an oznacava broj tacaka koje se koriste za
priblizno izracunavanje integrala i mora biti pozitivan, neparan broj.";

mDrugaModifikacijaNNeparno2::usage = "Modul
mDrugaModifikacijaNNeparno1[af,{ax,adg,agg},an] je jedna od modifikacija trapeznog
pravila. Priblizno se izracunava odredjeni integral funkcije af, ciji je argument
ax, na intervalu [adg,agg]. Argument an oznacava broj tacaka koje se koriste za
priblizno izracunavanje integrala i mora biti pozitivan, neparan broj.";

mJosJednaModifikacijaNNeparno::usage = "Modul
mJosJednaModifikacijaNNeparno[af,{ax,adg,agg},an,al] je jedna od modifikacija
trapeznog pravila. Priblizno se izracunava odredjeni integral funkcije af, ciji je
argument ax, na intervalu [adg,agg]. Argument an oznacava broj tacaka koje se
koriste za priblizno izracunavanje integrala i mora biti pozitivan, neparan broj.
Argument al odredjuje poziciju medjutacke izmedju prva dva cvora i mora biti realan
broj iz intervala [0,1].";

Begin["`Private`"];

Unprotect[mKoeficijentiSplajna,mSplajnLV,mKoeficijentiAproksimacije,mSplajn,mICBS,
mSplajnAproksimacija,mTrapezno,mSimpsonovo,mPrvaModifikacijaNParno,
mDrugaModifikacijaNParno,mPrvaModifikacijaNNeparno1,mPrvaModifikacijaNNeparno2,
mDrugaModifikacijaNNeparno1,mDrugaModifikacijaNNeparno2,
mJosJednaModifikacijaNNeparno];

 (*
  Modul mKoeficijentiSplajna koristi se za izracunavanje koeficijenata polinoma
  kojima su,   po dijelovima, jednaki kardinalni B-splajnovi reda 2, 3, ..., am.
  Argument modula am je cijeli broj veci od 1. Na izlazu se dobija trodimenzioni
  niz ia, pri cemu prva komponenta odgovara koeficijentu polinoma, druga redu
  kardinalnog B-splajna, a treca lijevom kraju intervala na kojem je definisan
  polinom.
*)
```

```
mKoeficijentiSplajna[am_ /; (IntegerQ[am] && am > 1)] :=
  Module[{ia, pbm, pbi, pbs, pbp, pmgk, pbk},
    ia[0, 1, 0] = 1;
    For[pbm = 2, pbm <= am,
      ia[pbm - 1, pbm, -1] = 0;
      ia[pbm - 2, pbm, -1] = 0;
      pmgk = IntegerPart[pbm/2] - 1;
      For[pbk = 0, pbk <= pmgk,
        ia[pbm - 1, pbm,
            pbk] = (pbm*ia[pbm - 2, pbm - 1, pbk] -
                pbk*(pbm - 1)*ia[pbm - 1, pbm, pbk - 1] -
                ia[pbm - 2, pbm, pbk - 1])/((pbm - 1)*(pbm - pbk));
        ia[pbm - 1, pbm, pbm - pbk - 1] = (-1)^(pbm - 1)*
            ia[pbm - 1, pbm, pbk];
        For[pbi = pbm - 2, pbi >= 0,
          ia[pbi, pbm, pbk] =
            pbm*((pbi + 1)*ia[pbi + 1, pbm, pbk] -
                    ia[pbi, pbm - 1, pbk])/(pbi + 1 - pbm);

          ia[pbi, pbm, pbm - pbk - 1] = (-1)^pbi*
              Sum[Product[pbs + pbp, {pbp, 1, pbi}]*ia[pbi + pbs, pbm, pbk]*
                    pbm^pbs, {pbs, 0, pbm - pbi - 1}]/pbi!;
          pbi--];
        pbk++];
      If[OddQ[pbm],
        ia[pbm - 1, pbm,
            pmgk + 1] = (pbm*
                  ia[pbm - 2, pbm - 1, pmgk + 1] - (pmgk + 1)*(pbm - 1)*
                  ia[pbm - 1, pbm, pmgk] -
                ia[pbm - 2, pbm, pmgk])/((pbm - 1)*(pbm - pmgk - 1));
        For[pbi = pbm - 2, pbi >= 0,
          ia[pbi, pbm, pmgk + 1] =
            pbm*((pbi + 1)*ia[pbi + 1, pbm, pmgk + 1] -
                    ia[pbi, pbm - 1, pmgk + 1])/(pbi + 1 - pbm); pbi--]];
      pbm++]; ia]

End[];

(*
Modul mSplajnLV[am,at], pomocu modula mKoeficijenti splajna, izracunava
vrijednosti kardinalnog B-splajna reda am u tackama koje su zadane u listi
at. Argument am mora biti cijeli broj veci od 1, dok argument at mora biti
lista realnih brojeva.
*)

mSplajnLV[am_/;(IntegerQ[am] && am>1),at_/;VectorQ[at]]:=Module[{pK,pbl,pbs},
pK=mKoeficijentiSplajna[am];
Table[If[(at[[pbl]]<=0 || at[[pbl]]>=am),0,
Sum[pK[pbs,am,IntegerPart[at[[pbl]]]]*at[[pbl]]^pbs,{pbs,0,am-1}]],{pbl,1,
Length[at]}]]

(*
Modul mKoeficijentiAproksimacije[af,ax,am,aj,aprec] izracunava koeficijente
aproksimacije funkcije af[ax], na intervalu [0,am], u prostoru kardinalnog
B-splajna reda am, na nivou rezolucije aj. Odgovarajuci sitem linearnih
jednacina rjesava se sa tacnoscu aprec. Argument af mora biti funkcija
argumenta ax, argument am mora biti cijeli broj veci od 1 i argument aj mora
biti nenegativan cijeli broj. Odgovarajuci koeficijenti se izdaju kao elementi
niza sa najmanjim indeksom -am+1 i najvecim indeksom 2^aj*am-1.
*)
```

```
mKoeficijentiAproksimacije[af_,ax_,am_:4,aj_:2,aprec_:6]:=Module[
{pKS,pMS,ppv,pdv,pbk,pbv,pSK,pKA,gKA},
ppv=2^(aj/2)*Join[mSplajnLV[am,Table[pbk,{pbk,am-1}]],Table[0,{2^aj*am}]];
pMS=Table[RotateRight[ppv,pbv],{pbv,0,2^aj*am}];
pdv=2^(3*aj/2)*Join[mSplajnLV[am-1,Table[pbk,{pbk,0,am-2}]]-mSplajnLV[am-1,
Table[pbk,{pbk,1,am-1}]],Table[0,{2^aj*am}]];
pMS=Join[pMS,Table[RotateRight[pdv,pbv*2^aj],{pbv,0,IntegerPart[am/2]-2}]];
pMS=Join[pMS,Table[RotateRight[pdv,pbv*2^aj],{pbv,IntegerPart[am/2]+2,am}]];
pSK=Table[af/.ax->pbv/2^aj,{pbv,0,2^aj*am}];
pSK=Join[pSK,Table[D[af,ax]/.ax->pbv,{pbv,0,IntegerPart[am/2]-2}]];
pSK=SetPrecision[Join[pSK,Table[D[af,ax]/.ax->pbv,{pbv,IntegerPart[am/2]+2,am}
]],aprec];
pKA=LinearSolve[pMS,pSK];
For[pbv=-am+1,pbv<=2^aj*am-1,gKA[pbv]=pKA[[pbv+am]];pbv++];
gKA
]/;(IntegerQ[am] && am>1 && IntegerQ[aj] && aj>=0)

(*
Modul mICBS[af,{ax,adg,agg},am,aj,aprec] izracunava odredjeni integral funkcije af.
Interval integracije je [adg,agg], a promjenljiva integracije je ax. U modulu je
relizovana konstrukcija kvadraturne formule opisana u Vodicu za korisnike, pri cemu
se skraceni splajn momenti racunaju nesto jednostavnije, tj. koristenjem modula
mKoeficijentiSplajna. Argumenti am, aj i aprec imaju isto znacenje kao i u modulu
mKoeficijentiSplajna.
*)

mICBS[af_,{ax_,adg_,agg_},am_:4,aj_:2,aprec_:6]:=Module[{pKA,pSSM,pKS,pbi,pbs,pt},

pKS=mKoeficijentiSplajna[am];
pKA=
mKoeficijentiAproksimacije[((agg-adg)/am)*af/.ax->((agg-adg)*pt/am+adg),
pt,am,aj,aprec];
pSSM[1]=Sum[pKS[pbs,am,0]/(pbs+1),{pbs,0,am-1}];
For[pbi=2,pbi<=IntegerPart[am/2],
pSSM[pbi]=pSSM[pbi-1]+Sum[pKS[pbs,am,pbi-1]*
(pbi^(pbs+1)-(pbi-1)^(pbs+1))/(pbs+1),{pbs,0,am-1}];pbi++];
For[pbi=IntegerPart[am/2]+1,pbi<=am-1,pSSM[pbi]=1-pSSM[am-pbi];pbi++];
2^(-aj/2)*(Sum[pKA[pbs]*(1-pSSM[-pbs]),{pbs,-am+1,-1}]+
Sum[pKA[pbs],{pbs,0,(2^aj-1)*am}]+
Sum[pKA[pbs]*pSSM[2^aj*am-pbs],{pbs,(2^aj-1)*am+1,2^aj*am-1}])
]/;(IntegerQ[am] && am>1 && IntegerQ[aj] && aj>=0)

(*
Modul mSplajn[am,at], pomcu Which naredbe, izdaje kardinalni B-splajn kao dio
po diopolinomijalnu funkciju. Argument am mora biti cijeli broj veci od 1, dok
argument at mora biti realan broj. Prilikom realizacije modula formirani su
odgovarajuci stringovi, koji su potom pretvoreni u izraz.
*)

mSplajn[am_/;(IntegerQ[am] && am>1),at_]:=Module[
{ps="",pbi,pbs,pKS=mKoeficijentiSplajna[am]},
ps=StringJoin["Which[(",ToString[at],">",ToString[am]," || ",ToString[at],"<=0),
0,"];
For[pbi=0,pbi<=am-2,
ps=StringJoin[ps," (",ToString[at],">",ToString[pbi]," && ",ToString[at],"<=",
ToString[pbi+1],"),"];
For[pbs=0,pbs<=am-2,ps=StringJoin[ps,"(",ToString[Numerator[pKS[pbs,am,pbi]]],")","
*",
ToString[at],"^",ToString[pbs],"/",ToString[Denominator[pKS[pbs,am,pbi]]],"+"];pbs+
+];
ps=StringJoin[ps,"(",ToString[Numerator[pKS[am-1,am,pbi]]],")","*",ToString[at],"^"
,
```

```
ToString[am-1],"/",ToString[Denominator[pKS[am-1,am,pbi]]],","];
pbi++];
ps=StringJoin[ps,"(",ToString[at],">",ToString[am-1]," && ",ToString[at],"<=",
ToString[am],"),"];
For[pbs=0,pbs<=am-2,ps=StringJoin[ps,"(",ToString[Numerator[pKS[pbs,am,am-1]]],
")","*",ToString[at],"^",ToString[pbs],"/",
ToString[Denominator[pKS[pbs,am,am-1]]],"+"];pbs++];
ps=StringJoin[ps,"(",ToString[Numerator[pKS[am-1,am,am-1]]],")","*",ToString[at],
"^",ToString[am-1],"/",ToString[Denominator[pKS[am-1,am,am-1]]]];
ps=StringJoin[ps,"]"];
ToExpression[ps]]

(*
Modul mSplajnAproksimacija[af,ax,am,aj,aprec], pomocu modula mSplajn i
mKoeficijentiAproksimacije izdaje dio po dio polinomijalnu formu splajn
aproksimacije (u prostoru kardinalnog B-splajna reda am, na nivou rezolucije aj)
funkcije af argumenta ax, na intervalu [0,am]. Argunenti am, aj, i aprec imaju
isto znacenje kao i u modulu mKoeficijentiAproksimacije.
*)

mSplajnAproksimacija[af_,ax_,am_:4,aj_:2,aprec_:6]:=Module[{pS,pax,pKS,pbk},
pS[pax_]=mSplajn[am,pax];
pKS=mKoeficijentiAproksimacije[af,ax,am,aj,aprec];
2^(aj/2)Sum[pKS[pbk]*pS[2^aj*ax-pbk],{pbk,-am+1,2^aj*am-1}]
]/;(IntegerQ[am] && am>1 && IntegerQ[aj] && aj>=0)

(*
Modul mTrapezno[af,{ax,adg,agg},an] je realizacija klasicnog trapeznog pravila.
Argument an (broj tacaka u kojima se izracunava vrijednost funkcije)
mora biti nenegativan, cijeli broj.
*)

mTrapezno[af_,{ax_,adg_,agg_},an_:1]:=Module[{pKorak=(agg-adg)/an},
    pKorak*((af/.ax→adg)+2*Sum[(af/.ax→(adg+bs*pKorak)),
    {bs,1,an-1}]+(af/.ax→agg))/2]/;(IntegerQ[an] && an>=1)

(*
Modul mSimpsonovo[af,{ax,adg,agg},an] je realizacija klasicnog Simpsonovog pravila.
Argument an (broj tacaka u kojima se izracunava vrijednost funkcije)
mora biti nenegativan, paran broj.
*)

mSimpsonovo[af_,{ax_,adg_,agg_},an_:2]:=Module[
      {pKorak=(agg-adg)/an},
      pKorak*((af/.ax→adg)+
              4*Sum[(af/.ax→(adg+(2*bs-1)*pKorak)),{bs,1,an/2}]+
              2*Sum[(af/.ax→(adg+2*bs*pKorak)),{bs,1,an/2-1}]+
              (af/.ax→agg))/3]/;(EvenQ[an] && an>=2)

(*
Moduli mPrvaModifikacijaNParno[af,{ax,adg,agg},an] i
mDrugaModifikacijaNParno[af,{ax,adg,agg},an] predstavljaju modifikacije
trapeznog pravila u slucaju kada je broj tacaka u kojima se izracunava vrijednost
funkcije paran. Argumenti af, ax, adg, agg i an imaju isto znacenje kao i u modulu
mTrapezno. Argument an mora biti nenegativan, paran broj.
*)

mPrvaModifikacijaNParno[af_,{ax_,adg_,agg_},an_:2]:=Module[
      {pKorak=(agg-adg)/an},
      mTrapezno[af,{ax,adg,agg},an]-
        pKorak^3*
          Sum[D[af,{ax,2}]/.ax→(adg+(2*bs-1)*pKorak),{bs,1,an/2}]/6
```

```
        ]/;EvenQ[an]

mDrugaModifikacijaNParno[af_,{ax_,adg_,agg_},an_:2]:=Module[
        {pKorak=(agg-adg)/an},
        mTrapezno[af,{ax,adg,agg},an]-
          pKorak^2*((D[af,{ax,1}]/.ax→agg)-(D[af,{ax,1}]/.ax→adg))/
              12
        ]/;EvenQ[an]

(*
Moduli mPrvaModifikacijaNNeparno1[af,{ax,adg,agg},an,al] i
mPrvaModifikacijaNNeparno2[af_,{ax,adg,agg},an,al] predstavljaju modifikacije
trapeznog pravila u slucaju kada je broj tacaka u kojima se izracunava vrijednost
funkcije neparan. Argumenti af, ax, adg, agg i an imaju isto znacenje kao i u
modulu mTrapezno. Argument an mora biti nenegativan, neparan broj. Argument al
odredjuje poziciju medjutacke izmedju prva dva cvora i mora biti realan broj iz
intervala [0,1].
*)

mPrvaModifikacijaNNeparno1[af_,{ax_,adg_,agg_},an_:3,al_:1/2]:=Module[
        {pKorak=(agg-adg)/an,pX},
        pX=(1-al)*adg+al*(adg+pKorak);
        mTrapezno[af,{ax,adg,adg+pKorak}]-
          pKorak^3*(D[af,{ax,2}]/.ax→pX)/12+
          mSimpsonovo[af,{ax,adg+pKorak,agg},an-1]
        ]/;(OddQ[an]&&(0≤al && al≤1))

mPrvaModifikacijaNNeparno2[af_,{ax_,adg_,agg_},an_:3,al_:1/2]:=Module[
        {pKorak=(agg-adg)/an,pX},
        pX=(1-al)*adg+al*(adg+pKorak);
        mTrapezno[af,{ax,adg,agg},an]-
          pKorak^3*((D[af,{ax,2}]/.ax→pX)/2+
                  Sum[D[af,{ax,2}]/.ax→(adg+2*bs*pKorak),{bs,
                      1,(an-1)/2}])/6
        ]/;(OddQ[an]&&(0≤al && al≤1))

(*
Moduli mDrugaModifikacijaNNeparno1[af,{ax,adg,agg},an] i
mDrugaModifikacijaNNeparno2[af_,{ax,adg,agg},an] predstavljaju modifikacije
trapeznog pravila u slucaju kada je broj tacaka u kojima se izracunava vrijednost
funkcije neparan. Argumenti af, ax, adg, agg i an imaju isto znacenje kao i u
modulu mTrapezno. Argument an mora biti nenegativan, neparan broj.
*)

mDrugaModifikacijaNNeparno1[af_,{ax_,adg_,agg_},an_:3]:=Module[
        {pKorak=(agg-adg)/an},
        mTrapezno[af,{ax,adg,adg+pKorak}]-
          pKorak^2*((D[af,{ax,1}]/.ax→(adg+pKorak))-(D[
                      af,{ax,1}]/.ax→adg))/12+
          mSimpsonovo[af,{ax,adg+pKorak,agg},an-1]
        ]/;OddQ[an]

mDrugaModifikacijaNNeparno2[af_,{ax_,adg_,agg_},an_:3]:=Module[
        {pKorak=(agg-adg)/an},
        mTrapezno[af,{ax,adg,agg},an]-
          pKorak^2*((D[af,{ax,1}]/.ax→agg)-(D[af,{ax,1}]/.ax→adg))/
              12
        ]/;OddQ[an]

(*
Modul mJosJednaModifikacijaNNeparno[af,{ax,adg,agg},an,al] predstavlja
modifikaciju trapeznog pravila u slucaju kada je broj tacaka u kojima se
```

```
izracunava vrijednost funkcije neparan. Argumenti af, ax, adg, agg i an
imaju isto znacenje kao i u modulu mTrapezno. Argument an mora biti nenegativan,
neparan broj. Argument al odredjuje poziciju medjutacke izmedju prva dva cvora i
mora biti realan broj iz intervala [0,1].
*)

mJosJednaModifikacijaNNeparno[af_,{ax_,adg_,agg_},an_:3,al_:1/2]:=Module[
      {pKorak=(agg-adg)/an,pX},
      pX=(1-al)*adg+al*(adg+pKorak);
      mTrapezno[af,{ax,adg,adg+pKorak}]-
        pKorak^3*((D[af,{ax,2}]/.ax→
                      pX)+(D[af,{ax,3}]/.ax→pX)*(adg+pKorak/2-pX))/12
        +mSimpsonovo[af,{ax,adg+pKorak,agg},an-1]
      ]/;(OddQ[an]&&(0≤al && al≤1))

Protect[mKoeficijentiSplajna,mSplajnLV,mSplajn,mICBS,mSplajnAproksimacija,
mTrapezno,mSimpsonovo,mPrvaModifikacijaNParno,mDrugaModifikacijaNParno,
mPrvaModifikacijaNNeparno1,mPrvaModifikacijaNNeparno2,mDrugaModifikacijaNNeparno1,
mDrugaModifikacijaNNeparno2,mJosJednaModifikacijaNNeparno];

EndPackage[]
```

Dodatak A

Biografija kandidata

Zlatko Udovičić je rođen 1971. godine u Mostaru gdje je završio osnovnu i srednju školu. Matematički fakultet u Beogradu je završio 1998. godine i stekao zvanje diplomirani matematičar, smjer Numerička matematika i optimizacija. Na istom fakultetu je 2005. godine, uspješnom odbranom magistarskog rada *Određivanje praga kompresije pri transformaciji ortonormiranim talasićima*, stekao zvanje magistar matematičkih nauka, smjer Numerička matematika i optimizacija.

Od 1999. godine zaposlen je kao asistent, a od 2007. godine kao viši asistent na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu. Od prvog izbora, pa do danas držao je ili još uvijek drži vježbe iz desetak predmeta (Numerička matematika, Numerička matematika i linearno programiranje, Uvod u numeričku matematiku, Uvod u matematiku, Uvod u matematičku logiku, Brojevi i polinomi, Uvod u računare, Metodika nastave matematike, Didaktika, Matematička analiza za fizičare, Linearna algebra za fizičare, Uvod u linearnu algebru za fizičare,...). Kao spoljni saradnik bio je angažovan na Mašinskom fakultetu u Sarajevu, a još uvijek ima uspješnu saradnju sa Građevinskim, Farmaceutskim i Poljoprivredno-prehrambenim fakultetom u Sarajevu, gdje drži vježbe iz opštih matematičkih predmeta. Do sada je objavio desetak stručnih radova i učestvovao na nekoliko konferencija iz Metodike nastave matematike i bio predavač po pozivu na Međunarodnoj konferenciji o nastavi matematike u maju 2009. godine u Novom Sadu.

Naučni rad Zlatka Udovičića obuhvata istraživanja u oblasti numeričke stabilnosti, primjeni teorije malih talasa, teoriji splajnova i teoriji numeričke integracije. Dio dosadašnjih rezultata je prezentirao na desetak međunarodnih konferencija i objavio u desetak naučnih radova. Zlatko Udovičić ima i veoma plodnu saradnju sa kolegama iz zemlje i inostranstva. Aktivan je učesnik projekta *Savremeni problemi harmonijske analize* čiji je voditelj prof. dr. Medo Pepić. U septembru 2006. godine boravio je na Grupi za numeričku i harmonijsku analizu Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beču, dok je u aprilu 2008. godine bio učesnik Škole intenzivnih kurseva u Novom Sadu.

Dodatak B

Summary

The dissertation examines the problem of approximate computation of integral

$$\int_0^m \varphi_m(x) f(x) dx \tag{B.1}$$

(integral in which cardinal B-spline order $m, m \in \mathbb{N}$ is a weight function), as well as the classical problem of numerical integration, that is, the problem of approximate computation of integral

$$\int_a^b f(x) dx \tag{B.2}$$

Understandably, methods for approximate computation of the second integral are obtained by using splines. Aside from the introductory chapter and appendices, there are four chapters.

The first chapter discusses cardinal B-splines of arbitrary order. Since cardinal B-spline is a piecewise polynomial function, the first section of the chapter provides effective algorithm for calculating coefficients of corresponding polynomials. Six methods for calculation of moments of cardinal B-spline of arbitrary order are given in the second section. The subsequent section proves that composite rectangular rule used for approximate computation of integral (B.1), on the quasi-uniform mesh, has, conditionally speaking, algebraic degree of exactness equal to $m - 1$. Some corollaries of this unexpected fact are also provided. In the fourth, and the last section of this chapter, by using cardinal B-spline of arbitrary order, a method for approximate computation of integral (B.2) is created.

The second chapter contains the results for splines of low order (second, third and fourth order). The first section of this chapter examines a special class of quadrature formula (the so called formulas of "practical type") with linear and cubic centered B-spline as a weight function. It has been proven that the algebraic degree of exactness of this formulas cannot be greater than five. In the second section, Simpson and Hermite quadrature rules are reproduced along with an entirely new class of quadrature formulas, all by using quadratic interpolating spline. Obtained formulas are an improvement of the composite trapezoidal rule.

Most of the results discussed in the second and the third chapter have already been presented at several international conferences and published in several academic journals.

Almost all the results are covered by numerical examples which justify their use in practice. Numerical computations are done by using programming package SNI.m ver 1.0, developed in Wolfram Mathematica 5.0.

The fourth chapter provides a help file for SNI.m package. The help file can be read independently and can be used by those not interested in theoretical details.

The last, fourth chapter, provides a Mathematica code of the SNI.m package.

Finally, appendices contain biographical data of the PhD candidate and the summary in English.

Bibliografija

[1] Berezin, I.S., Žitkov, N.P., *Numerička analiza numeričke metode*, Naučna knjiga, Beograd, 1963.

[2] de Boor, C., *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] Byrd, P., Stalla, L., Chebyshev quadrature rules for a new class of weight functions, *Math. Comp.* 42 (1984), no. 165, 173–181.

[4] Chui, C., *Wavelets: a mathematical tool for signal analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.

[5] Chui, C., *An introduction to wavelets*, Academic Press, Inc., Boston, San Diego, New York, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1992.

[6] Constantinescu, E., A certain class of quadratures, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.* No. 7 (2004), 109–116.

[7] Constantinescu, E., A certain class of quadratures, *Gen. Math.* 10 (2002), no. 1-2, 75–84.

[8] Delyon, B., Juditsky, A., On the computation of wavelet coefficients, *J. Approx. Theory* 88 (1997), no. 1, 47–79.

[9] Gautschi, W., Gori, L., Pitolli, F., Gauss quadrature for refinable weight functions, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 8 (2000), no. 3, 249–257.

[10] Gautschi, W., *Numerical analysis: an introduction*, Birkhäuser, Basel, 1997.

[11] Gautschi, W., Milovanović, G. Spline approximation to sperichally symmetric distributions, *Numer. Math.* 49 (1986), no. 2-3, 111–121.

[12] Golub, G.H., Welsch, J.H., Calculation of Gauss quadrature rules, *Math. Comp.* 23 (1969), 221–230.

[13] Gray, J. *Mastering Mathematica, programming methods and applications*, Academic Press, 1994.

[14] Hashish, H., Behiry, S.H., El-Shamy N.A., Numerical Integration Using Wavelets, *Appl. Math. Comput.* 211 (2009), no. 2, 480–487.

[15] Kwon S., Quadrature formulas for wavelet coefficients, *J. Korean Math. Soc.* 34 (1997), no. 4, 911–925.

[16] Laurie, D., de Villiers, J., Orthogonal polynomials and Gaussian quadrature for refinable weight functions, *Math. Comp.* 75 (2006), no. 256, 1891–1903 (electronic).

[17] Mallat, S., *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, 1998.

[18] Mastroianni, G., Milovanović, G., *Interpolation processes basic theory and applications*, Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[19] Milovanović, G., Udovičić, Z., Calculation of the moments of the cardinal B-spline, *Appl. Math. Lett.* 23 (2010), no. 11, 1346–1350.

[20] Milovanović, G., Quadrature processes—development and new directions, *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.* No. 33 (2008), 11-41.

[21] Milovanović, G., *Numerička analiza II deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1998.

[22] Peherstorfer, F., Weight functions which admit Tchebycheff quadrature, *Bull. Austral. Math. Soc.* 26 (1982), no. 1, 29–37.

[23] Phillips, J.L., Hanson, R.J., Gauss quadrature rules with B-spline weight functions, *Math. Comp.* 28 (1974), no. 126, loose microfiche suppl., A1–C4.

[24] Quade, L., Collatz, L., Zur Interpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen, *Proc. Preuss. Akad. Wiss. (Math.-Phys. Kl.)* 30 (1938), 338–429.

[25] Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F., *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, 2000.

[26] Runge, C. Über die darstellung willkürlicher funktionen and die interpolation zwischen äquidistanten ordinaten, *Z. Angew. Math. Phys.* 46 (1901), 224–243.

[27] Schoenberg, I.J., A brief account of my life and work, in *I.J. Schoenberg, Selected Papers* ed. C. de Boor, Volume I, 1–10, Birkhäuser, Boston, 1988.

[28] Stoer, J., *Numerische Mathematik 1*, Springer-Verlag, 1994.

[29] Strang, G., Nguyen, T., *Wavelets and filter banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.

[30] Sweldens, W., *Construction and application of wavelets in numerical analysis*, PhD Thesis, 1994.

[31] Sweldens, W., Piessens, R., Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions, *SIAM J. Numer. Anal.* 31 (1994) , no. 4, 1240–1264.

[32] Udovičić, Z., A certain class of quadratures with hat function as a weight function, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.* No 20 (2009), 251–257.

[33] Udovičić, Z., Calculation of the moments of the cardinal B-spline, *Sarajevo J. Math.* 5(18) (2009), no. 2, 291–297.

[34] Udovičić, Z., One point quadrature rule with cardinal B-spline, *J. Math. Anal. Appl.* 360 (2009), no. 2, 432–438.

[35] Udovičić, Z., Some modifications of the trapezoidal rule, *Sarajevo J. Math.* 2(15) (2006), no. 2, 237–245.

[36] Udovičić, Z., A certain class of quadratures with cubic B spline as a weight function, *Gen. Math.*, u štampi.

[37] Udovičić, Z., Numerical integration using cardinal B-splines, u postupku recenzije.

[38] Ullman, J.L., A class of weight functions that admit Tchebycheff quadrature, *Michigan Math. J.* 13 (1966), 417–423.

[39] Wolfram S., *Mathematica book*, Wolfram media, Cambridge university press, 1996.