Teorija izračunljivosti

Klase složenosti

Student:
Danijel Rujević

Profesor:
Zoran Ognjanović

Uvod

- Najčešće korištene mere složenosti se odnose na vreme i prostor.
- Ako je x ulazni podatak programa, njegova veličina se označava sa $|x|$.

Definicija 1

- Vreme izvršavanja izračunavanja Tjuringove mašine (TM) M koja kao ulaz dobija podatak *x* jednako je dužini niza konfiguracija koje predstavljaju to izračunavanje.

- Ukoliko je f unarna aritmetička f-ja i predstavlja pravu f-ju složenosti, onda važi:
- Neka deterministička TM M radi u vremenu $f(n)$ ako važi da za ulaz x vreme izračunavanja M nije veće od $f(|x|)$, identično važi i za nedeterminističku TM.
- Tada f predstavlja **vremensku granicu složenosti** za M.

- TIME($f(n)$) (može se označavati i sa DTIME($f(n)$)) je skup problema odlučivosti za koje postoje determinističke TM koje ih izračunavaju, a za koje je vremenska granica složenosti $f(n)$. Analogno važi NTIME($f(n)$) za nedeterminističke TM.

- Za prostornu složenost se koristi malo izmanjena TM koja sadrži još dve trake za ulaz i izlaz. Time se izbacuje prostor za smestanje ulaznih podataka i rezultata iz razmatranja prostorne složenosti. Ovakva TM sa $k+2$ rešave problem za vreme $O(f(n))$, dok bi TM sa k traka rešila za vreme $f(n)$.

Definicija 2

- Prostor izvršavanja izračunavanja TM M sa ulazom i izlazom koja kao ulaz dobija podatak x jednak je broju različitih ćelija traka, sem prve (ulazne) i poslednje (izlazne) trake, nad kojima se tokom izračunavanje nađu glave traka.

- Ukoliko je *f* unarna aritmetička f-ja i predstavlja pravu f-ju složenosti, onda važi:
- Neka deterministička TM M radi u prostoru $f(n)$ ako važi da za ulaz x prostor izračunavanja M nije veće od $f(|x|)$, identično važi i za nedeterminističku TM.
- Tada *f* predstavlja **prostornu granicu složenosti** za M.

- SPACE($f(n)$) (može se označavati i sa DSPACE($f(n)$)) je skup problema odlučivosti za koje postoje determinističke TM koje ih izračunavaju, a za koje je prostorna granica složenosti $f(n)$. Analogno važi NTIME($f(n)$) za nedeterminističke TM.

Definicija 3

- Klasa složenosti je skup problema sa zajedničkom vremenskom ili prostornom granicom.
- Primer: Skupovi problema TIME($f(n)$), NTIME($f(n)$), SPACE($f(n)$) i NSPACE($f(n)$) su neke klase složenosti.

- U definisanju klase složenosti se pretpostavlja da za granice složenosti f(n) važi:
- $f(n) \geq n$, ako je reč o vremenskoj složenosti i
- $f(n) \geq \log_2 n$, ako je reč o prostornoj složenosti.

Primer 1

- Problem trgovačkog putnika u kome se ispituje da li postoji put u grafu koji kroz svaki čvor prolazi tačno jednom i koji je kraći od neke unapred zadate konstante se nedeterministički lako rešava.

Nastavak

- Nedeterministička TM treba da izabere jednu permutaciju čvorova grafa i proveri dužinu odgovarajućeg puta. Iako je broj permutacija n čvorova jednak $n!$, nedeterministički postupak ima polinomijalnu vremensku granicu složenosti.

Definicija 4

- Neka je C neka klasa složenosti, njen komplement, u oznaci co-C je skup problema oblika $\{\overline{L} : L \in C\}$.
- Za sve determinističke klase složenosti važi C=co-C jer se komplement svakog problema iz klase C rešava istom TM koja dodatno menja završno stanje q_{da} u q_{ne} i obrnuto.

Nastavak

- Zato se kaže da su determinističke klase zatvorene za komplement.
- Međutim nije poznato da li isto važi i za nedeterminističke klase složenosti.

ODNOSI IZMEĐU KLASA SLOŽENOSTI

Teorema 1

- Neka je problem $L \in TIME(f(n))$. Tada je za proizvoljno $\varepsilon > 0, L \in TIME(\varepsilon f(n) + n + 2)$. Takođe za problem $L \in SPACE(f(n))$ i proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi $L \in SPACE(\varepsilon f(n) + 2)$
- Ova teorema nam kaže da se iz granice složenosti može eliminisati konstantni faktor kojim se množi najsloženiji deo f-je, odnosno red brzine rasta O($f(n)$) je u $f(n)$ jedino bitan.

Teorema 2
(teorema hijerarhije)

- Neka je *f*(*n*) prava funkcija složenosti. Tada važi:
- Ako je $f(n) \geq n$,onda je $TIME(f(n)) \subsetneq TIME((f(2n+1))^3)$
- Ako je $f(n) \geq n$,onda je $SPACE(f(n)) \subsetneq SPACE(f(n) \cdot \log_2 f(n))$
- Ova teorema nam kaže da dovoljnim povećanjem granice složenosti klase složenosti takođe šire.

- Često se umesto posebne f-je koja definiše granicu složenosti koristi familija te funkcije.
- $L=SPACE(O(\log_2 n))$, $NL=NSPACE(O(\log_2 n))$,
- $P=\cup_i TIME(n^i)$, $NP=\cup_i NTIME(n^i)$,
- $PSPACE=\cup_i SPACE(n^i)$,
- $NPSPACE=\cup_i NSPACE(n^i)$,
- $EXP=\cup_i TIME(2^{n^i})$, $NEXP=\cup_i NTIME(2^{n^i})$...

Teorema 3

Neke dokazane relacije:

$1. TIME(f(n)) \subset NTIME(f(n))$

$2. NTIME(f(n)) \subset TIME(2^{O(f(n))})$

$3. SPACE(f(n)) \subset NSPACE(f(n))$

$4. NTIME(f(n)) \subset SPACE(f(n))$

$5. NSPACE(f(n)) \subset TIME((2^{O(f(n))})$

$6. NSPACE(f(n)) \subset SPACE(O(f(n) \cdot f(n))), za\ f(n) \geq \log_2 n$

$7. PSPACE = NPSPACE$

$8. TIME(O(n)) \subsetneq NTIME(O(n))$

$9. P \subsetneq EXP$

$10. NL \subsetneq PSPACE$

$11. NL \subset P$

$12. PSPACE \subsetneq EXPSPACE$

$13. co - NSPACE(f(n)) = NSPACE(f(n)), za\ \ f(n) \geq \log_2 n$

$14. co - NL = NL, co - NPSPACE = NPSPACE$

U hijerarhiji klasa složenosti često se ne zna da li je neki stepen hijerarhije jednak nekom drugom stepenu, odnosno da li se stepeni poklapaju ili je jedan pravi podskup od drugog.

- Međutim čitav niz problema je i dalje ne rešen. Neki od najvažnijih su:
- $P=NP$
- $P=PSPACE$
- $L=NL$
- $EXP=NEXP$

- Prvi problem je najvažniji. Dokazom da postoji granica između praktično izračunljivih problema (koje smo dokazali) i onih za koje verujemo da su izračunljivi dobili bi da je $P \neq NP$

  što je u skladu sa dosadačnjim shvatanjima.

  Usuprotnom bi došlo do revolucije u razvoju algoritama.

  Iz dokaza da $P{=}NP$ sledi da je $EXP{=}NEXP$

- Posebno je interesantan deo hijerarhije:

$$L \subset NL \subset P \subset NP \subset PSPACE \subset EXP \subset NEXP$$

- U ovoj hijerarhiji ne znamo gde važi stiktna relacija podskupa, ali pošto važi $NL \neq PSPACE$ i $P \neq EXP$ znamo da je negde izmedju njih.