

Teorija izračunljivosti

Klase složenosti

Student:

Danijel Rujević

Profesor:

Zoran Ognjanović



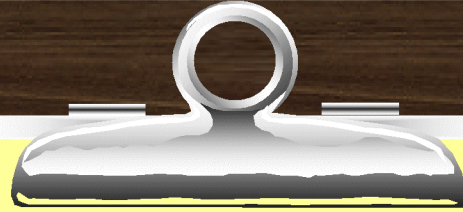
Uvod

- Najčešće korištene mere složenosti se odnose na vreme i prostor.
- Ako je x ulazni podatak programa, njegova veličina se označava sa $|x|$.

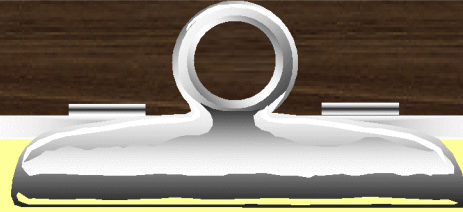


Definicija 1

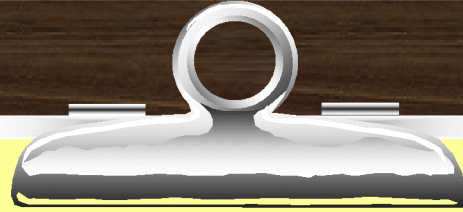
- Vreme izvršavanja izračunavanja Turingove mašine (TM) M koja kao ulaz dobija podatak x jednako je dužini niza konfiguracija koje predstavljaju to izračunavanje.



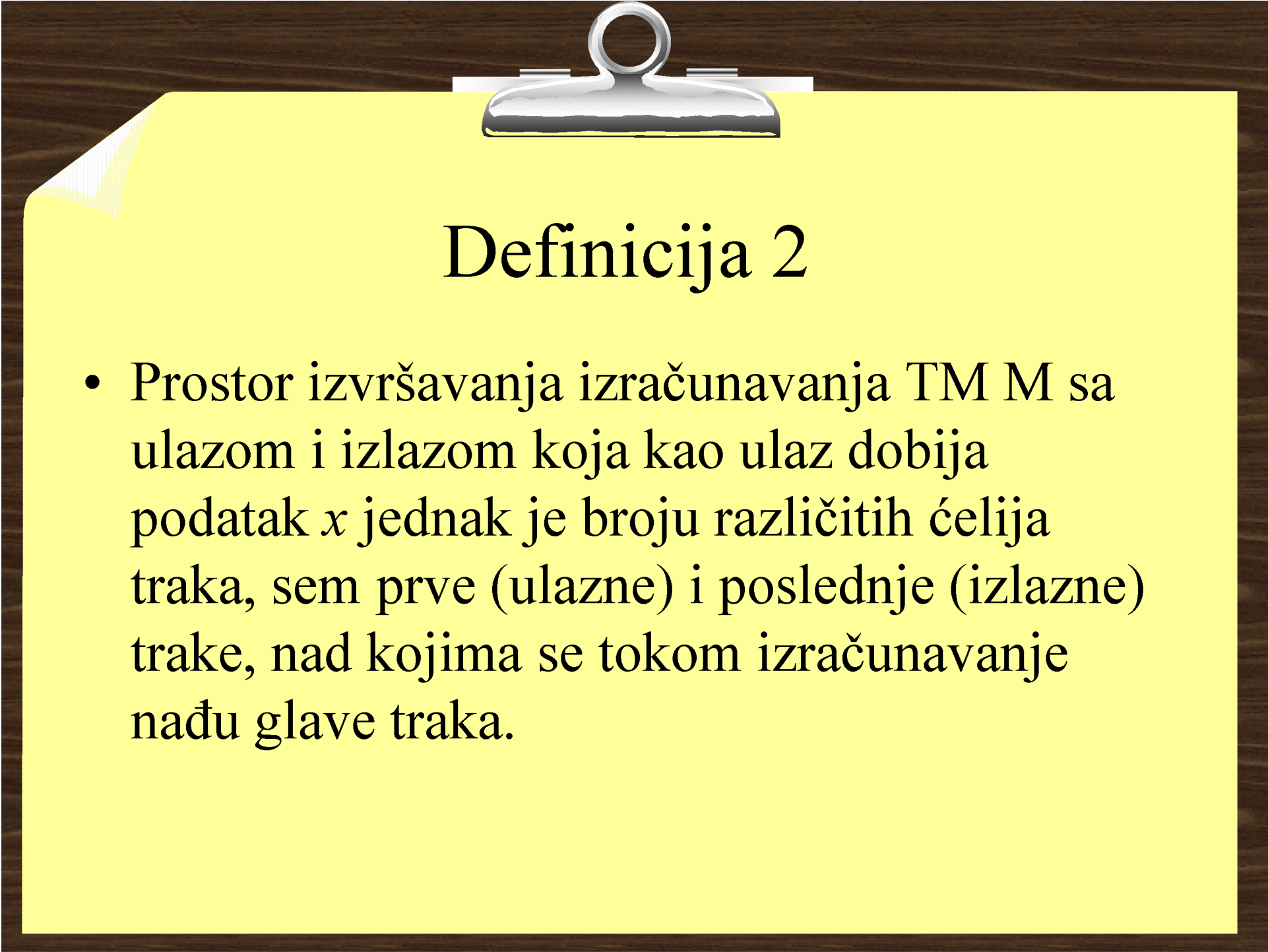
- Ukoliko je f unarna aritmetička f-ja i predstavlja pravu f-ju složenosti, onda važi:
- Neka deterministička TM M radi u vremenu $f(n)$ ako važi da za ulaz x vreme izračunavanja M nije veće od $f(|x|)$, identično važi i za nedeterminističku TM.
- Tada f predstavlja **vremensku granicu složenosti** za M .



- $\text{TIME}(f(n))$ (može se označavati i sa $\text{DTIME}(f(n))$) je skup problema odlučivosti za koje postoje determinističke TM koje ih izračunavaju, a za koje je vremenska granica složenosti $f(n)$. Analogno važi $\text{NTIME}(f(n))$ za nedeterminističke TM.

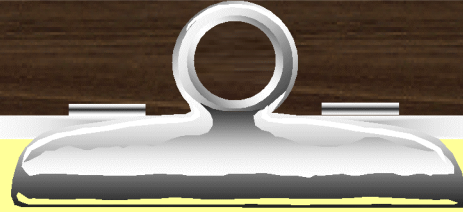


- Za prostornu složenost se koristi malo izmanjena TM koja sadrži još dve trake za ulaz i izlaz. Time se izbacuje prostor za smestanje ulaznih podataka i rezultata iz razmatranja prostorne složenosti. Ovakva TM sa $k+2$ rešave problem za vreme $O(f(n))$, dok bi TM sa k traka rešila za vreme $f(n)$.

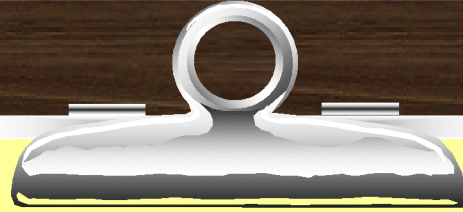


Definicija 2

- Prostor izvršavanja izračunavanja TM M sa ulazom i izlazom koja kao ulaz dobija podatak x jednak je broju različitih ćelija traka, sem prve (ulazne) i poslednje (izlazne) trake, nad kojima se tokom izračunavanja nađu glave traka.



- Ukoliko je f unarna aritmetička f-ja i predstavlja pravu f-ju složenosti, onda važi:
- Neka deterministička TM M radi u prostoru $f(n)$ ako važi da za ulaz x prostor izračunavanja M nije veće od $f(|x|)$, identično važi i za nedeterminističku TM.
- Tada f predstavlja **prostornu granicu složenosti** za M .

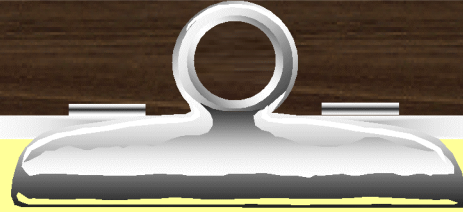


- $\text{SPACE}(f(n))$ (može se označavati i sa $\text{DSPACE}(f(n))$) je skup problema odlučivosti za koje postoje determinističke TM koje ih izračunavaju, a za koje je prostorna granica složenosti $f(n)$. Analogno važi $\text{NTIME}(f(n))$ za nedeterminističke TM.

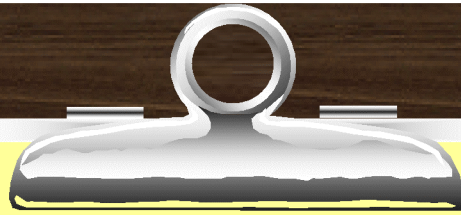


Definicija 3

- Klasa složenosti je skup problema sa zajedničkom vremenskom ili prostornom granicom.
- Primer: Skupovi problema $\text{TIME}(f(n))$, $\text{NTIME}(f(n))$, $\text{SPACE}(f(n))$ i $\text{NSPACE}(f(n))$ su neke klase složenosti.



- U definisanju klase složenosti se pretpostavlja da za granice složenosti $f(n)$ važi:
- $f(n) \geq n$, ako je reč o vremenskoj složenosti i
- $f(n) \geq \log_2 n$, ako je reč o prostornoj složenosti.



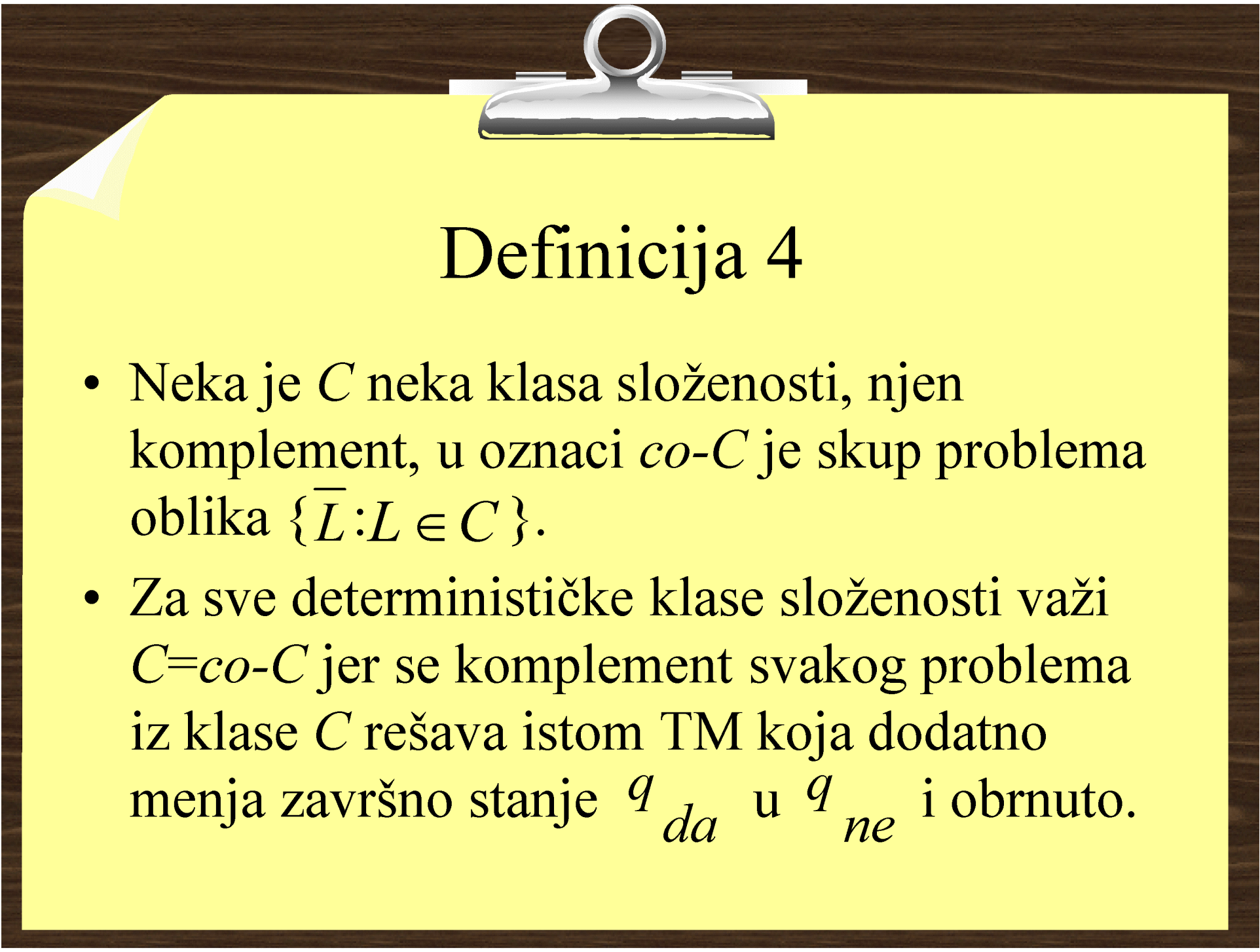
Primer 1

- Problem trgovačkog putnika u kome se ispituje da li postoji put u grafu koji kroz svaki čvor prolazi tačno jednom i koji je kraći od neke unapred zadate konstante se nedeterministički lako rešava.



Nastavak

- Nedeterministička TM treba da izabere jednu permutaciju čvorova grafa i proveriti dužinu odgovarajućeg puta. Iako je broj permutacija n čvorova jednak $n!$, nedeterministički postupak ima polinomijalnu vremensku granicu složenosti.



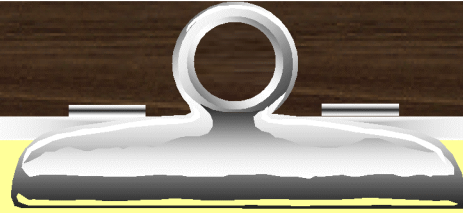
Definicija 4

- Neka je C neka klasa složenosti, njen komplement, u oznaci $co-C$ je skup problema oblika $\{\bar{L} : L \in C\}$.
- Za sve determinističke klase složenosti važi $C=co-C$ jer se komplement svakog problema iz klase C rešava istom TM koja dodatno menja završno stanje q_{da} u q_{ne} i obrnuto.



Nastavak

- Zato se kaže da su determinističke klase zatvorene za komplement.
- Međutim nije poznato da li isto važi i za nedeterminističke klase složenosti.



ODNOSI IZMEĐU KLASA SLOŽENOSTI



Teorema 1

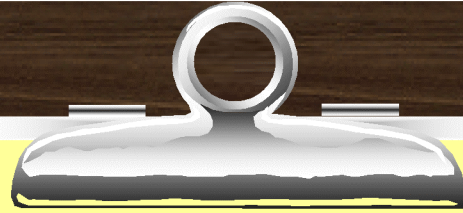
- Neka je problem $L \in TIME(f(n))$. Tada je za proizvoljno $\varepsilon > 0$, $L \in TIME(\varepsilon f(n) + n + 2)$. Takođe za problem $L \in SPACE(f(n))$ i proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi $L \in SPACE(\varepsilon f(n) + 2)$
- Ova teorema nam kaže da se iz granice složenosti može eliminisati konstantni faktor kojim se množi najsloženiji deo f -je, odnosno red brzine rasta $O(f(n))$ je u $f(n)$ jedino bitan.



Teorema 2

(teorema hijerarhije)

- Neka je $f(n)$ prava funkcija složenosti. Tada važi:
- Ako je $f(n) \geq n$, onda je $TIME(f(n)) \subsetneq TIME((f(2n+1))^3)$
- Ako je $f(n) \geq n$, onda je $SPACE(f(n)) \subsetneq SPACE(f(n) \cdot \log_2 f(n))$
- Ova teorema nam kaže da dovoljnim povećanjem granice složenosti klase složenosti takođe šire.



- Često se umesto posebne f-je koja definiše granicu složenosti koristi familija te funkcije.
- $L = SPACE(O(\log_2 n))$, $NL = NSPACE(O(\log_2 n))$,
- $P = U_i TIME(n^i)$, $NP = U_i NTIME(n^i)$,
- $PSPACE = U_i SPACE(n^i)$,
- $NPSPACE = U_i NSPACE(n^i)$,
- $EXP = U_i TIME(2^{n^i})$, $NEXP = U_i NTIME(2^{n^i})...$

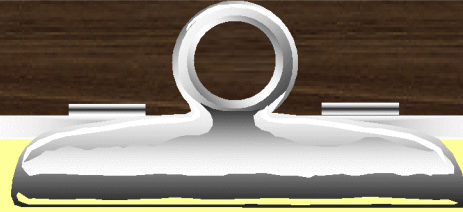


Teorema 3

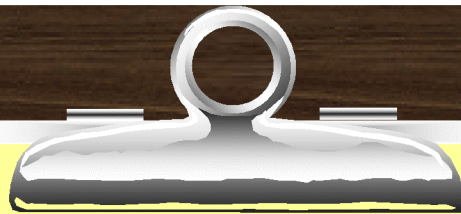
Neke dokazane relacije:

1. $TIME(f(n)) \subset NTIME(f(n))$
2. $NTIME(f(n)) \subset TIME(2^{O(f(n))})$
3. $SPACE(f(n)) \subset NSPACE(f(n))$
4. $NTIME(f(n)) \subset SPACE(f(n))$
5. $NSPACE(f(n)) \subset TIME(2^{O(f(n))})$
6. $NSPACE(f(n)) \subset SPACE(O(f(n) \cdot f(n)))$, za $f(n) \geq \log_2 n$
7. $PSPACE = NPSPACE$
8. $TIME(O(n)) \not\subseteq NTIME(O(n))$
9. $P \not\subseteq EXP$
10. $NL \not\subseteq PSPACE$
11. $NL \subset P$
12. $PSPACE \not\subseteq EXPSPACE$
13. $co - NSPACE(f(n)) = NSPACE(f(n))$, za $f(n) \geq \log_2 n$
14. $co - NL = NL$, $co - NPSPACE = NPSPACE$

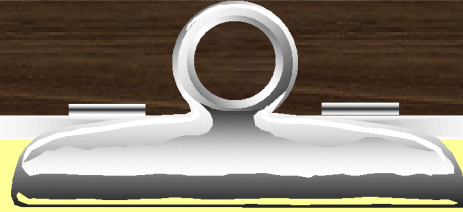
U hijerarhiji klasa složenosti često se ne zna da li je neki stepen hijerarhije jednak nekom drugom stepenu, odnosno da li se stepeni poklapaju ili je jedan pravi podskup od drugog.



- Međutim čitav niz problema je i dalje ne rešen. Neki od najvažnijih su:
- $P=NP$
- $P=PSPACE$
- $L=NL$
- $EXP=NEXP$



- Prvi problem je najvažniji. Dokazom da postoji granica između praktično izračunljivih problema (koje smo dokazali) i onih za koje verujemo da su izračunljivi dobili bi da je $P \neq NP$ što je u skladu sa dosadašnjim shvatanjima. Usuprotnom bi došlo do revolucije u razvoju algoritama.
Iz dokaza da $P=NP$ sledi da je $EXP=NEXP$



- Posebno je interesantan deo hijerarhije:

$$L \subset NL \subset P \subset NP \subset PSPACE \subset EXP \subset NEXP$$

- U ovoj hijerarhiji ne znamo gde važi striktna relacija podskupa, ali pošto važi

$NL \neq PSPACE$ i $P \neq EXP$ znamo da je negde izmedju njih.