Linearna algebra

SKRIPTA

Januar 2013.

Reč autora

Ovaj tekst je nastao od materijala sa kursa *Linearna algebra i analitička geometrija* za studente Odseka za informatiku, Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu koji sam držao od oktobra 2012. do januara 2013. Kao glavni propratni udžbenik uz ova skripta, studentima savetujem da koriste [2]. To je knjiga dostupna svima i ona uključuje materijal sa standardnog osnovnog kursa linearne algebre za studente univerziteta u SAD. Uz nju je, kao dodatak, priložena knjiga rešenja zadataka [3]. Za ovaj udžbenik sam se opredelio zbog laganog stila kao i bogatstva primera i zadataka za vežbu.

Neki delovi ovog teksta su nastali pod uticajem knjiga [1], [10] i [7]. Studentima savetujem da koriste udžbenike [6], [4], [5] kao i skripta [11].

Materijal je podeljen u trinaest delova po nedeljama kako su se odvijala predavanja (svake nedelje je održan jedan blok od tri časa). Ta podela nije najprirodnija po sadržaju ali je bila praktična zbog numeracije tvrđenja tokom celog kursa. To je i osnovni razlog zašto sam tu organizaciju zadržao i u skriptima.

Svi komentari su dobrodošli!

U Beogradu, 10. januar 2013.

Zoran Petrić
zpetric@mi.sanu.ac.rs

Zahvalnica

Velike zasluge za uspeh ovog kursa pripadaju asistentu Filipu Samardžiću koji je svojom energijom i zalaganjem pomogao studentima da savladaju gradivo. Zahvaljujem se i kolegi Marku Crnobrnji koji je pažljivo pročitao tekst i ukazao mi na grešku u formulaciji Male leme o zameni u prethodnoj verziji.

Posebno bih hteo da se zahvalim prof. Mirjani Borisavljević na dragocenim komentarima i savetima koji su mi pomogli u pripremi završne verzije ovog teksta.

SADRŽAJ

OSNOVNI POJMOVI I NOTACIJA

$\emptyset$	prazan skup
$\mathbf{N}$	skup prirodnih brojeva: $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{N}^+$	skup prirodnih brojeva većih od nule: $\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{Z}$	skup celih brojeva: $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbf{C}$	skup kompleksnih brojeva
V, W, U	vektorski prostori
$\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$	vektori
$\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$	niz vektora
$\mathcal{P}_n$	prostor polinoma stepena manjeg ili jednakog n
$[S]$	linearni omotač skupa vektora S
$U + W$	suma potprostora nekog prostora
$U \oplus W$	direktna suma potprostora nekog prostora
A, B, C	matrice
$A \rightsquigarrow B$	matrica A se vrsta-redukuje na matricu B
A^T	transponovana matrica
E_n	jedinična matrica tipa $n \times n$
A^{-1}	obostrani inverz za A
$0_{m \times n}$	nula matrica tipa $m \times n$
$\mathcal{M}_{m \times n}$	skup matrica nad $\mathbf{R}$ tipa $m \times n$
$\mathcal{M}_n$	skup kvadratnih matrica nad $\mathbf{R}$ tipa $n \times n$
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	konačan skup; $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$
$\|X\|$	broj elemenata konačnog skupa X
(x, y)	uređen par; $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)$
$X - Y$	razlika skupova X i Y: $\{x \mid x \in X, x \notin Y\}$
$X \times Y$	Dekartov proizvod skupova X i Y: $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$
$\rho \subseteq X \times X$ refleksivna	$(\forall x \in X)(x, x) \in \rho$
$\rho \subseteq X \times X$ simetrična	$(\forall x, y \in X)((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho)$
$\rho \subseteq X \times X$ tranzitivna	$(\forall x, y, z \in X)(((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow (x, z) \in \rho)$
$\rho \subseteq X \times X$ rel. ekvivalencije	refleksivna, simetrična i tranzitivna
$\mathbf{1}_X$	identitet na X: $(\forall x \in X)\mathbf{1}_X(x) = x$
$f\restriction_A$	ograničenje (restrikcija) funkcije na podskup domena
$f\colon X \to Y$ je **1-1**	$(\forall x_1, x_2 \in X)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
$f\colon X \to Y$ je **na**	$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)y = f(x)$
$f\colon X \to Y$ je bijekcija	**1-1** i **na**, tj. postoji $g\colon Y \to X$ tako da je $g \circ f = \mathbf{1}_X$ i $f \circ g = \mathbf{1}_Y$

§1. Prva nedelja

§1.1. Skup $\mathbf{R}^n$ i neke operacije

Glavnu ulogu u ovom kursu igraju vektorski prostori $\mathbf{R}^n$. Za početak definišemo skup

$$\mathbf{R}^n =_{df} \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}.$$

Opredelili smo se da elemente od $\mathbf{R}^n$ posmatramo kao kolone zbog nekih pogodnosti koje će nam taj pristup doneti. Naravno, naročito zbog problema zapisa, taj pristup ima i nekih mana. Elemente od $\mathbf{R}^n$ označavamo sa $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}, \ldots$

Sabiranje u $\mathbf{R}^n$ definišemo prirodno po komponentama, to jest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Množenje elemenata od $\mathbf{R}^n$ *skalarima* (elementima od $\mathbf{R}$) definišemo na sledeći način

$$r\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} rx_1 \\ \vdots \\ rx_n \end{pmatrix}.$$

Jasno je da ako su $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^n$ i $r \in \mathbf{R}$, onda su i $\vec{u} + \vec{v}, r\vec{u} \in \mathbf{R}^n$. To svojstvo skupa $\mathbf{R}^n$ nazivamo *zatvorenost za sabiranje i množenje skalarima.*

TVRĐENJE 1.1. *Sabiranje u $\mathbf{R}^n$ i množenje skalarima zadovoljavaju:*

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}),$$

$$\text{za } \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u},$$

$$\vec{u} + (-1)\vec{u} = \vec{0} = (-1)\vec{u} + \vec{u},$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u},$$

$$r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$$

$$(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$$

$$(rs)\vec{u} = r(s\vec{u})$$

$$1\vec{u} = \vec{u}.$$

DOKAZ. Direktno po definiciji koristeći odgovarajuća svojstva realnih brojeva. $\dashv$

§1.2. Sistemi linearnih jednačina

Definicija. Izraz oblika $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ za $n \geq 1$, gde su $a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi a $x_1, \ldots, x_n$ promenljive, se zove *linearna kombinacija* promenljivih $x_1, \ldots, x_n$.

Definicija. Jednačina oblika $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, gde je $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ linearna kombinacija a $b \in \mathbf{R}$ je *linearna jednačina* po promenljivim $x_1, \ldots, x_n$. Ona je *homogena* kada je $b = 0$. Kažemo da je $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ *partikularno rešenje* (ili samo rešenje) gornje jednačine kada je ispunjeno

$$a_1s_1 + \ldots + a_ns_n = b.$$

Opšte rešenje jednačine je skup svih njenih partikularnih rešenja.

Definicija. Niz od m ($m \geq 1$) linearnih jednačina po promenljivim $x_1, \ldots, x_n$ je *sistem* linearnih jednačina (najčešće ga označavamo sa σ) po promenljivim $x_1, \ldots, x_n$ koji zapisujemo u obliku

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \ldots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Kažemo da je $\vec{s} \in \mathbf{R}^n$ *partikularno rešenje* (ili samo rešenje) sistema kada je $\vec{s}$ partikularno rešenje svake jednačine u sistemu. *Opšte rešenje* sistema je skup svih njegovih partikularnih rešenja. *Rešiti* sistem jednačina znači odrediti njegovo opšte rešenje.

Napomena. *Ako je S_i za $1 \leq i \leq m$ opšte rešenje i-te jednačine gornjeg sistema, onda je $S_1 \cap \ldots \cap S_m$ opšte rešenje tog sistema.*

§1.3. Gausove operacije

Pod *Gausovim operacijama* podrazumevamo sledeće:

($\rho_i \leftrightarrow \rho_j$) za $i \neq j$, i-ta i j-ta jednačina zamene mesta;

($r\rho_i$) za $r \neq 0$, leva i desna strana i-te jednačine se pomnože sa r;

($r\rho_i + \rho_j$) za $i \neq j$, i-ta jednačina pomnožena sa r se doda j-toj.

Primer.

$$\begin{array}{rrrl} & & 3x_3 & = 9 \\ x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = 2 \\ \frac{1}{3}x_1 & +2x_2 & & = 3 \end{array} \xrightarrow{\rho_1 \leftrightarrow \rho_3} \begin{array}{rrrl} \frac{1}{3}x_1 & +2x_2 & & = 3 \\ x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = 2 \\ & & 3x_3 & = 9 \end{array}$$

$$\xrightarrow{3\rho_1} \begin{array}{rrrl} x_1 & +6x_2 & & = 9 \\ x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = 2 \\ & & 3x_3 & = 9 \end{array} \xrightarrow{-\rho_1 + \rho_2} \begin{array}{rrrl} x_1 & +6x_2 & & = 9 \\ & -x_2 & -2x_3 & = -7 \\ & & 3x_3 & = 9 \end{array}$$

Tvrđenje 1.2. *Ako se sistem σ' dobija od sistema σ primenom neke Gausove operacije, onda se i sistem σ dobija od sistema σ' primenom neke Gausove operacije.*

dokaz. Ako $\sigma \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} \sigma'$, onda $\sigma' \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} \sigma$. Ako $\sigma \xrightarrow{r\rho_i} \sigma'$, onda $\sigma' \xrightarrow{\frac{1}{r}\rho_i} \sigma$. Ako $\sigma \xrightarrow{r\rho_i + \rho_j} \sigma'$, onda $\sigma' \xrightarrow{-r\rho_i + \rho_j} \sigma$. ⊣

Tvrđenje 1.3. *Ako je sistem σ' dobijen od sistema σ primenom neke Gausove operacije, onda je svako rešenje sistema σ ujedno i rešenje sistema σ'.*

dokaz. Neka je $\vec{s} \in \mathbf{R}^n$ rešenje sistema σ. Dakle važi:

$$\begin{array}{llll} a_{11}s_1 + & \dots & +a_{1n}s_n & = b_1 \\ & \dots & & \\ a_{m1}s_1 + & \dots & +a_{mn}s_n & = b_m \end{array}$$

Ako $\sigma \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} \sigma'$, onda je očigledno $\vec{s}$ rešenje sistema σ'.

Pošto iz i-te jednakosti sledi da je $ra_{i1}s_1 + \ldots + ra_{in}s_n = rb_i$, imamo da ako $\sigma \xrightarrow{r\rho_i} \sigma'$, onda je $\vec{s}$ rešenje sistema σ'.

Pošto iz i-te i j-te jednakosti sledi da je

$$(ra_{i1} + a_{j1})s_1 + \ldots + (ra_{in} + a_{jn})s_n = rb_i + b_j,$$

imamo da ako $\sigma \xrightarrow{r\rho_i + \rho_j} \sigma'$, onda je $\vec{s}$ rešenje sistema σ'. ⊣

Definicija. Dva sistema su ekvivalentna kada imaju isto opšte rešenje.

Kao posledicu tvrđenja 1.2 i 1.3 imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.4 (Gausov metod). *Ako je sistem σ' dobijen od sistema σ konačnom primenom Gausovih operacija, onda su sistemi σ i σ' ekvivalentni.*

Definicija. Promenljiva x_i $(1 \leq i \leq n)$ je *vodeća* promenljiva u linearnoj jednačini $a_1x_1 + \ldots + a_ix_i + \ldots + a_nx_n = b$, kada je $a_i \neq 0$ a $a_1 = \ldots = a_{i-1} = 0$. Tada za a_i kažemo da je *pivot*.

Definicija. Sistem je u *stepenastoj* formi kada za svaku jednačinu koja ima vodeću promenljivu važi da je ta jednačina ili prva u sistemu ili i prethodna jednačina ima vodeću promenljivu levo od te promenljive.

Primer. Poslednji sistem u prethodnom primeru je u stepenastoj formi, dok svi koji mu prethode nisu.

Napomena 1.5. *Svaki sistem se u konačnom broju koraka (Gausovih operacija) može svesti na sistem u stepenastoj formi.*

§1.4. Predstavljanje opšteg rešenja

Ako sistem ima jedinstveno rešenje ili nema rešenja onda je predstavljanje opšteg rešenja jednostavno. Šta se dešava kada to nije slučaj?

Primer. Redukujemo dati sistem na stepenastu formu.

$$\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & -w & =1 \\ & y & -z & +w & =-1 \\ 3x & & +6z & -6w & =6 \\ & -y & +z & -w & =1 \end{array} \xrightarrow{-3\rho_1+\rho_3} \begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & -w & =1 \\ & y & -z & +w & =-1 \\ & -3y & +3z & -3w & =3 \\ & -y & +z & -w & =1 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\rho_2+\rho_4]{3\rho_2+\rho_3} \begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & -w & =1 \\ & y & -z & +w & =-1 \\ & & & 0 & =0 \\ & & & 0 & =0 \end{array}$$

Definicija. Promenljiva koja se ne pojavljuje kao vodeća u sistemu u stepenastoj formi je *slobodna* promenljiva.

U gornjem primeru, u poslednjem sistemu, z i w su slobodne promenljive. Opšte rešenje ovog sistema dobijamo metodom supstitucije unazad. Promenljive z i w mogu imati proizvoljne vrednosti. Dobijamo da je $y=-1+z-w$ a onda je $x=1-(-1+z-w)-z+w=2-2z+2w$. Znači opšte rešenje je:

$$S=\{\begin{pmatrix} 2-2z+2w \\ -1+z-w \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid z,w\in\mathbf{R}\}=\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z,w\in\mathbf{R}\}$$

i ova poslednja forma je ona u kojoj ćemo ga predstavljati.

Definicija. Za dati sistem (dole levo) kažemo da je sistem (dole desno) njemu *odgo-*

varajući homogen sistem.

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \dots & & \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \qquad \begin{array}{llll} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = 0 \\ & \dots & & \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = 0 \end{array}$$

TVRĐENJE 1.6. *Sistem linearnih jednačina kome je $\vec{p} \in \mathbf{R}^n$ jedno partikularno rešenje ima opšte rešenje oblika*

$$\{\vec{p} + \vec{h} \mid \vec{h} \text{ je rešenje odgovarajućeg homogenog sistema}\}.$$

DOKAZ. Prvo pokazujemo da je svako $\vec{s} \in \mathbf{R}^n$ koje je rešenje sistema moguće predstaviti u obliku $\vec{p} + \vec{h}$, gde je $\vec{h}$ neko rešenje odgovarajućeg homogenog sistema. Za to je dovoljno pokazati da je $\vec{s} - \vec{p}$ rešenje odgovarajućeg homogenog sistema.

Kad u i-toj jednačini odgovarajućeg homogenog sistema, koja glasi

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0,$$

zamenimo umesto svakog x_j razliku $s_j - p_j$ (j-tu komponentu vektora $\vec{s} - \vec{p}$) dobijamo tačnu jednakost, zato što je

$$\begin{aligned} a_{i1}(s_1 - p_1) + \ldots + a_{in}(s_n - p_n) &= a_{i1}s_1 + \ldots + a_{in}s_n - (a_{i1}p_1 + \ldots + a_{in}p_n) \\ &= b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Pošto to možemo uraditi za svaku jednačinu, dobijamo da je $\vec{s} - \vec{p}$ rešenje odgovarajućeg homogenog sistema.

Kao drugo, pokazujemo da je svaki element od $\mathbf{R}^n$ oblika $\vec{p} + \vec{h}$, gde je $\vec{h}$ rešenje odgovarajućeg homogenog sistema, rešenje polaznog sistema. Kad u i-toj jednačini polaznog sistema, koja glasi

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,$$

zamenimo umesto svakog x_j zbir $p_j + h_j$ (j-tu komponentu vektora $\vec{p} + \vec{h}$) dobijamo tačnu jednakost, zato što je

$$\begin{aligned} a_{i1}(p_1 + h_1) + \ldots + a_{in}(p_n + h_n) &= a_{i1}p_1 + \ldots + a_{in}p_n + a_{i1}h_1 + \ldots + a_{in}h_n \\ &= b_i + 0 = b_i. \end{aligned}$$

Pošto to možemo uraditi za svaku jednačinu, dobijamo da je $\vec{p} + \vec{h}$ rešenje polaznog sistema. $\dashv$

TVRĐENJE 1.7. *Za homogen sistem po n promenljivih važi:*

(1) $\vec{0} \in \mathbf{R}^n$ *je njegovo partikularno rešenje;*

(2) ako su $\vec{h}_1$ *i* $\vec{h}_2$ *njegova rešenja i* $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$*, onda je i* $c_1\vec{h}_1 + c_2\vec{h}_2$ *njegovo rešenje.*

DOKAZ. Direktno zamenom u proizvoljnoj jednačini homogenog sistema kao i u prethodnom dokazu. ⊣

POSLEDICA 1.8. *Svaki homogen sistem ima ili tačno jedno rešenje ili ih ima beskonačno mnogo.*

DOKAZ. Po tvrđenju 1.7 (1), homogen sistem ima bar jedno rešenje a to je $\vec{0}$. Ako je $\vec{h}$ rešenje različito od $\vec{0}$ onda je za svako $r \in \mathbf{R}$ i $r\vec{h}$ takođe rešenje tog sistema po tvrđenju 1.7 (2), pa sistem ima beskonačno mnogo rešenja. ⊣

POSLEDICA 1.9. *Svaki sistem linearnih jednačina ili nema rešenja ili ima tačno jedno rešenje ili ih ima beskonačno mnogo.*

DOKAZ. Direktno iz posledice 1.8 i tvrđenja 1.6. ⊣

§1.5. Matrice i skraćeni zapis Gausove metode

DEFINICIJA. *Matrica* A tipa $m \times n$ nad $\mathbf{R}$ je pravougaona tabela koja se sastoji od m vrsta i n kolona tako da se u preseku i-te vrste i j-te kolone nalazi $a_{ij} \in \mathbf{R}$. Ako je $m = n$, onda je matrica *kvadratna*. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je *matrica sistema*:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m, \end{array}$$

dok je

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ & & \dots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

proširena matrica tog sistema.

Gausove operacije iz prethodnog primera matrično zapisujemo kao:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 6 & -6 & 6\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3\rho_1+\rho_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 3 & -3 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\rho_2+\rho_4]{3\rho_2+\rho_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Definicija. *Vektor kolona* je matrica tipa $m \times 1$ i to je naš zapis za element od $\mathbf{R}^m$. *Vektor vrsta* je matrica tipa $1 \times n$. Svaka matrica je niz svojih vektor vrsta odnosno vektor kolona.

Skup svih matrica tipa $m \times n$ nad $\mathbf{R}$ označavamo sa $\mathcal{M}_{m\times n}$. Posebno, kada je $m = n$, onda $\mathcal{M}_{n\times n}$ skraćeno zapisujemo kao $\mathcal{M}_n$. Sabiranje u skupu $\mathcal{M}_{m\times n}$ definišemo po komponentama, to jest

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n}\\ & \dots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ & \dots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

dok množenje matrice skalarom definišemo kao

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} ra_{11} & \dots & ra_{1n}\\ & \dots & \\ ra_{m1} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}.$$

Treba primetiti da se ove definicije, za $n = 1$, slažu s odgovarajućim definicijama za $\mathbf{R}^m$ datim u sekciji 1.1. Neutral za ovako definisano sabiranje je *nula matrica* $0_{m\times n}$ čiji su svi članovi nule.

Gausove operacije s matricama definisane su kao i one sa sistemima u sekciji 1.3 s tim što je svugde reč „jednačina” zamenjena sa „vrsta”. Jasno je kako se po analogiji sa definicijama vezanim za sisteme mogu definisati *pivot* u matrici i matrica u *stepenastoj formi*.

§2. Druga nedelja

§2.1. Redukovana stepenasta forma

Primer. Posmatrajmo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & -2z & = -2 \\ & y & +3z & = 7 \\ x & & -z & = -1 \end{array}$$

i njegovo matrično svođenje na stepenastu formu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | -2 \\ 0 & 1 & 3 & | \ \ 7 \\ 1 & 0 & -1 & | -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\rho_1+\rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | -2 \\ 0 & 1 & 3 & | \ \ 7 \\ 0 & -1 & 1 & | \ \ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho_2+\rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | -2 \\ 0 & 1 & 3 & | \ \ 7 \\ 0 & 0 & 4 & | \ \ 8 \end{pmatrix}.$$

Međutim, mi možemo i da nastavimo s Gausovim operacijama:

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}\rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | -2 \\ 0 & 1 & 3 & | \ \ 7 \\ 0 & 0 & 1 & | \ \ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\rho_3+\rho_1]{-3\rho_3+\rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | \ 2 \\ 0 & 1 & 0 & | \ 1 \\ 0 & 0 & 1 & | \ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\rho_2+\rho_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | \ 1 \\ 0 & 1 & 0 & | \ 1 \\ 0 & 0 & 1 & | \ 2 \end{pmatrix}.$$

Iz poslednje matrice vidimo da je jedinstveno rešenje polaznog sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Definicija. Sistem linearnih jednačina je u *redukovanoj* stepenastoj formi kada je on u stepenastoj formi i još je svaki pivot jednak 1 i on je jedini ne-nula skalar u svojoj koloni. Analogno za matrice.

Napomena 2.1. *Svaki sistem (matrica) u stepenastoj formi se može konačnom primenom Gausovih operacija* $(r\rho_i)$ *i* $(r\rho_i + \rho_j)$ *svesti na redukovanu stepenastu formu. Tom prilikom pivoti ostaju na mestima gde su i bili.*

Primer. Rešiti sistem

$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +6x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 5 \\ & 3x_2 & +x_3 & +4x_4 & = 1 \\ & 3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 & | \ 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & | \ 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & | \ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\rho_2+\rho_3} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 & | \ 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & | \ 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | \ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}\rho_2 \\ -\frac{1}{2}\rho_3}]{\frac{1}{2}\rho_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 1 & | \ \ \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & | \ \ \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\rho_3+\rho_1]{-\frac{4}{3}\rho_3+\rho_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & | & \frac{9}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & | & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{-3\rho_2+\rho_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & | & -\frac{9}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & | & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -2\end{pmatrix}.$$

Iz poslednje matrice odmah vidimo da je opšte rešenje sistema

$$S=\{\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}x_3\\ 3-\frac{1}{3}x_3\\ x_3\\ -2\end{pmatrix}\mid x_3\in\mathbf{R}\}=\{\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\ 3\\ 0\\ -2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\mid x_3\in\mathbf{R}\}.$$

Definicija. Za matricu A kažemo da se (*vrsta*)-*redukuje* na matricu B (u oznaci $A\rightsquigarrow B$) kada postoji konačan (možda i prazan) niz Gausovih operacija koje matricu A prevode u matricu B.

Tvrđenje 2.2. *Relacija $\rightsquigarrow$ je relacija ekvivalencije na skupu matrica.*

dokaz. (*refleksivnost*) prazan niz operacija;

(*simetričnost*) posledica tvrđenja 1.2;

(*tranzitivnost*) nadovežemo nizove Gausovih operacija. ⊣

Definicija. Za matrice A i B za koje važi $A\rightsquigarrow B$ kažemo da su *vrsta-ekvivalentne*.

Teorema 2.3. *Svaka matrica je vrsta-ekvivalentna jedinstvenoj matrici u redukovanoj stepenastoj formi.*

dokaz. Po napomenama 1.5 i 2.1, svaka matrica je vrsta-ekvivalentna nekoj u redukovanoj stepenastoj formi. Da je ta forma jedinstvena pokazujemo indukcijom po broju n kolona u polaznoj matrici.

(**baza indukcije**) Ako je $n=1$ i A je nula matrica onda je ona u redukovanoj stepenastoj formi i svaka matrica vrsta-ekvivalentna sa A je takođe nula matrica. Ako A nije nula matrica, onda se ona ne može redukovati na nula matricu pa se mora svesti na jedinu ne-nula matricu tipa $m\times 1$ koja je u redukovanoj stepenastoj formi a to je matrica $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve matrice sa $n-1$ kolona. Neka je A matrica tipa $m\times n$ i neka su B i C dve različite matrice u redukovanoj stepenastoj formi koje su vrsta-ekvivalentne sa A. Neka je A' matrica koja se dobija od matrice A odbacivanjem poslednje kolone. Primetimo da svaki niz Gausovih operacija koji prevodi A u B takođe prevodi i A' u B' koja je nastala od B odbacivanjem poslednje kolone i koja je u redukovanoj stepenastoj formi. Isto važi i za A' i C', koja nastaje odbacivanjem poslednje kolone iz C. Po induktivnoj hipotezi imamo da je $B' = C'$. Znači B i C se razlikuju u poslednjoj koloni. Neka je ta razlika na mestu in. Posmatrajmo sledeće homogene sisteme čije su matrice redom A, B i C:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 \;+\ldots+ a_{1n}x_n \;= 0 \\ \quad\quad\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b_{11}x_1 \;+\ldots+ b_{1n}x_n \;= 0 \\ \quad\quad\ldots \\ b_{m1}x_1 + \ldots + b_{mn}x_n = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c_{11}x_1 \;+\ldots+ c_{1n}x_n \;= 0 \\ \quad\quad\ldots \\ c_{m1}x_1 + \ldots + c_{mn}x_n = 0 \end{array}.$$

Po teoremi 1.4, imamo da svi ovi sistemi imaju iste skupove rešenja. Neka je $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ proizvoljno partikularno rešenje. Pokazaćemo da s_n mora biti 0. Ograničavajući se na i-te jednačine u drugom i trećem sistemu imamo:

$$b_{i1}s_1 + \ldots + b_{in}s_n - (c_{i1}s_1 + \ldots + c_{in}s_n) = 0.$$

Odavde, pošto je $b_{i1} = c_{i1}, \ldots, b_{i(n-1)} = c_{i(n-1)}$ imamo da je $(b_{in} - c_{in})s_n = 0$, odakle sledi, pošto je $b_{in} - c_{in} \neq 0$, da je $s_n = 0$.

Znači u svakom partikularnom rešenju je $s_n = 0$ pa x_n mora biti i u drugom i u trećem sistemu vodeća promenljiva. Pošto su B i C u redukovanoj stepenastoj formi i pošto im se prvih $n-1$ kolona poklapaju, to pivoti u poslednjoj koloni moraju biti jedinice na istom mestu. Znači $B = C$. $\dashv$

§2.2. Vektorski prostori

Definicija. V je *vektorski prostor* nad poljem $\mathbf{R}$ kada je $\vec{0} \in V$ i za svako $\vec{u}, \vec{v} \in V$ i $r \in \mathbf{R}$ važi da je $-\vec{u} \in V$, $\vec{u} + \vec{v} \in V$ i $r\vec{u} \in V$ i pritom je zadovoljeno:

(1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,

(2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$,

(3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}$,

(4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,

to jest $(V, +, \vec{0})$ je komutativna grupa i

(5) $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$

(6) $(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$

(7) $(rs)\vec{u} = r(s\vec{u})$

(8) $1\vec{u} = \vec{u}$.

Pošto ćemo govoriti samo o vektorskim prostorima nad poljem $\mathbf{R}$, zvaćemo ih skraćeno samo *vektorski prostori*.

Primer. Po tvrđenju 1.1, uz $-\vec{u} =_{df} (-1)\vec{u}$, imamo da je $\mathbf{R}^n$ vektorski prostor. Analogno je $\mathcal{M}_{m\times n}$ vektorski prostor u odnosu na operacije definisane u 1.5.

Primer. Vektori u euklidskom prostoru čine jedan vektorski prostor u odnosu na geometrijski zadano sabiranje vektora i množenje vektora skalarima.

Primer 3. $P = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x+y+z=0\}$ je vektorski prostor u odnosu na operacije preuzete iz $\mathbf{R}^3$. Ovo će biti posledica tvrđenja 3.1 a zasad bi trebalo proveriti da P sadrži $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \in P$, da je P zatvoren za sabiranje i množenje skalarima kao i da su zadovoljena svojstva (1)-(8).

Primer. $\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbf{Z}\}$ nije vektorski prostor zato što nije zatvoren za množenje skalarima.

Primer. $\{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$ jeste vektorski prostor. To je *trivijalan* vektorski prostor.

Primer. $\mathcal{P}_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$, to jest skup polinoma s realnim koeficijentima stepena manjeg ili jednakog 3 u odnosu na standardno sabiranje polinoma i množenje polinoma realnim brojevima jeste vektorski prostor. Naslućuje se veza između $\mathcal{P}_3$ i $\mathbf{R}^4$ po kojoj bi npr. polinomu $1 + 2x^2 - x^3$ odgovarao $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$.

Primer 7. Neka je X proizvoljan skup i V vektorski prostor. Tada $V^X = \{f \mid f : X \to V\}$, u odnosu na sabiranje definisano sa $(f_1+f_2)(x) =_{df} f_1(x) + f_2(x)$ i množenje skalarima definisano sa $(rf)(x) =_{df} r(f(x))$, jeste vektorski prostor.

Specijalno, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{f \mid f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$ jeste vektorski prostor. Njegov element $f(n) = n^2 + 1$ odgovara beskonačnoj koloni

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Primer. Skup svih polinoma s realnim koeficijentima jeste vektorski prostor.

Tvrđenje 2.4. *U svakom vektorskom prostoru važi:*

$$(1)\ 0\vec{v} = \vec{0} \qquad (2)\ (-1)\vec{v} + \vec{v} = \vec{0} \qquad (3)\ r\vec{0} = \vec{0}.$$

dokaz. (1) $0\vec{v} = (0+0)\vec{v} \stackrel{5}{=} 0\vec{v} + 0\vec{v}$, a odavde dodavanjem $-0\vec{v}$ obema stranama, uz pomoć svojstava 1, 2 i 3 vektorskih prostora zaključujemo da je $\vec{0} = 0\vec{v}$.

(2) $(-1)\vec{v} + \vec{v} \stackrel{8}{=} (-1)\vec{v} + 1\vec{v} \stackrel{5}{=} (-1+1)\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0}$.

(3) $r\vec{0} = r(\vec{0} + \vec{0}) = r\vec{0} + r\vec{0}$, a odavde dodavanjem $-r\vec{0}$ obema stranama kao u (1) zaključujemo $\vec{0} = r\vec{0}$. ⊣

Iz dela (2) ovog tvrđenja sledi da je $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$, pa nije neophodno proveravati da je $-\vec{v} \in V$ za svako $\vec{v} \in V$ ako je već provereno da je $r\vec{v} \in V$ za svako $\vec{v} \in V$ i $r \in \mathbf{R}$.

Definicija. Izraz oblika $c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n$ za $n \geq 1$, gde su $c_1, \ldots, c_n$ skalari a $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vektori, se zove *linearna kombinacija* vektora $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ (videti odeljak 1.2).

Napomena 2.5. *Za m linearnih kombinacija vektora $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ imamo da je njihova linearna kombinacija*

$$d_1(c_{11}\vec{v}_1 + \ldots + c_{1n}\vec{v}_n) + \ldots + d_m(c_{m1}\vec{v}_1 + \ldots + c_{mn}\vec{v}_n)$$

jednaka linearnoj kombinaciji vektora $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$:

$$(d_1c_{11} + \ldots + d_mc_{m1})\vec{v}_1 + \ldots + (d_1c_{1n} + \ldots + d_mc_{mn})\vec{v}_n.$$

Tvrđenje 2.6. *Ako su matrice A i B vrsta-ekvivalentne, onda je svaka vrsta matrice B linearna kombinacija vrsta matrice A.*

dokaz. Primetimo da tvrđenje važi ako je B dobijeno od A primenom jedne Gausove operacije. Dokaz dalje izvodimo indukcijom pri čemu ovo koristimo kao bazu indukcije a u induktivnom koraku se oslanjamo na napomenu 2.5. ⊣

§3. Treća nedelja

§3.1. Potprostori i linearni omotači

Definicija. Neka je V vektorski prostor. Kažemo da je $U \subseteq V$ *potprostor* od V kada je sam U vektorski prostor u odnosu na nasleđene operacije iz V. To znači da je $\vec{0} \in U$, U je zatvoren za nasleđeno sabiranje i množenje skalarima i zadovoljena su svojstva 1-8 iz definicije vektorskog prostora.

Tvrđenje 3.1. *Za neprazan podskup U vektorskog prostora V sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) U je potprostor od V;

(2) U je zatvoren za linearne kombinacije parova vektora iz U, to jest za $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ i $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ važi da je $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 \in U$;

(3) U je zatvoren za linearne kombinacije proizvoljnog konačnog skupa vektora iz U, to jest za $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in U$ i $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ važi da je $c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n \in U$.

dokaz. U krugu (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3), samo je implikacija (2) $\Rightarrow$ (1) netrivijalna. Pretpostavka da je U neprazan znači da postoji $\vec{u} \in U$. Iz (2) dobijamo da je $0\vec{u} + 0\vec{u} \in U$, pa je po tvrđenju 2.4 (1) i $\vec{0} \in U$. Ako su $\vec{u}, \vec{v} \in U$, i $r \in \mathbf{R}$, onda su i $1\vec{u} + 1\vec{v}, r\vec{u} + 0\vec{u} \in U$, što znači da je U zatvoren za sabiranje i množenje skalarima (samim tim i za inverze u odnosu na sabiranje).

Svojstva 1-8 iz definicije vektorskog prostora važe i za U pošto su nasleđena iz V. $\dashv$

Primer 1. Skup rešenja homogenog sistema sa n promenljivih je potprostor od $\mathbf{R}^n$. Ovo sledi iz tvrđenja 1.7 i 3.1 (videti treći primer u sekciji 2.2).

Primer. Skup rešenja sistema linearnih jednačina sa n promenljivih ne mora biti potprostor od $\mathbf{R}^n$.

Primer. $\mathcal{P}_1$ (prostor polinoma stepena manjeg ili jednakog 1) je potprostor od $\mathcal{P}_3$.

Primer. $\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R}\}$ je potprostor od $\mathbf{R}^2$.

Primer. $\{\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{Z}\}$ nije potprostor od $\mathbf{R}^2$.

Definicija. *Linearni omotač* (*lineal*) nepraznog skupa vektora S nekog vektorskog prostora, u oznaci $[S]$ ili $\mathcal{L}(S)$ ili $span(S)$, je skup

$$\{c_1\vec{s}_1 + \ldots + c_n\vec{s}_n \mid n \in \mathbf{N}^+, c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}, \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n \in S\}.$$

Linearni omotač praznog skupa vektora nekog vektorskog prostora je trivijalan potprostor tog vektorskog prostora.

TVRĐENJE 3.2. *Linearni omotač proizvoljnog skupa vektora nekog vektorskog prostora je potprostor tog vektorskog prostora.*

DOKAZ. Neka je V vektorski prostor i neka je $S \subseteq V$. Ako je $S = \emptyset$ onda je po definiciji $[S]$ trivijalan potprostor od V.

Ako je S neprazan, onda koristimo tvrđenje 3.1. Neka su $\vec{u}, \vec{v} \in [S]$. Po definiciji linearnog omotača, $\vec{u} = a_1\vec{s}_1 + \ldots + a_k\vec{s}_k$ i $\vec{v} = b_1\vec{t}_1 + \ldots + b_l\vec{t}_l$ za $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_k, \vec{t}_1, \ldots, \vec{t}_l \in S$. Tada je

$$c\vec{u} + d\vec{v} = ca_1\vec{s}_1 + \ldots + ca_k\vec{s}_k + db_1\vec{t}_1 + \ldots + db_l\vec{t}_l \in [S]. \qquad \dashv$$

NAPOMENA 3.3. *Linearni omotač od $S \subseteq V$ je najmanji potprostor od V koji sadrži S.*

PRIMER. Lineal od $\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbf{R}^2$ je $\mathbf{R}^2$. To je zato što se za proizvoljno $x, y \in \mathbf{R}$, vektor $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ može dobiti kao linearna kombinacija

$$\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

PRIMER. Neka je $W = [\{3x - x^2, 2x\}] \subseteq \mathcal{P}_2$. Lako je proveriti da je $W \subseteq \{a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$. Da važi i obrnuta inkluzija sledi iz toga što se za svako $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, polinom $a_1x + a_2x^2$ može dobiti kao linearna kombinacija

$$-a_2(3x - x^2) + \frac{a_1 + 3a_2}{2}(2x).$$

TVRĐENJE 3.4. *Za $S, T \subseteq V$ važi*

(1) $S \subseteq [S]$;

(2) $S \subseteq T \Rightarrow [S] \subseteq [T]$;

(3) $[[S]] = [S]$.

DOKAZ. (1) Ako je $\vec{v} \in S$, onda zbog $\vec{v} = 1\vec{v}$ sledi da je $\vec{v} \in [S]$.

(2) Ako je $\vec{v} \in [S]$, onda je po definiciji $\vec{v} = c_1\vec{s}_1 + \ldots + c_n\vec{s}_n$ za $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n \in S$. Pošto je $S \subseteq T$, to je $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n \in T$, pa je po definiciji $\vec{v} \in [T]$.

(3) Po (1) je $S \subseteq [S]$, pa je po (2) $[S] \subseteq [[S]]$. Za obrnutu inkluziju, pretpostavimo da je $\vec{v} \in [[S]]$. Po definiciji imamo da je $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n$ za $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in [S]$. Pošto je po tvrđenju 3.2, $[S]$ potprostor od V, to je po tvrđenju 3.1 i $\vec{v} \in [S]$. $\dashv$

§3.2. Linearna nezavisnost

DEFINICIJA. Skup vektora S nekog vektorskog prostora je *linearno zavisan* kada postoji $\vec{v} \in S$ takav da je $\vec{v} \in [S - \{\vec{v}\}]$. U suprotnom je *linearno nezavisan.*

NAPOMENA 3.5. *Prazan skup vektora je trivijalno linearno nezavisan, dok je* $\{\vec{0}\}$ *linearno zavisan pošto je* $\vec{0} \in [\emptyset] = [\{\vec{0}\} - \{\vec{0}\}]$.

TVRĐENJE 3.6. *Skup vektora S nekog vektorskog prostora je linearno nezavisan akko za svaki konačan podskup $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq S$ važi:*

$$c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo suprotno, to jest za neki skup $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq S$ važi $c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ i $c_n \neq 0$ (analogno postupamo ako je bilo koje drugo $c_i \neq 0$). Tada, ako je $n = 1$ dobijamo da je $\vec{v}_n = \vec{0}$, a ako je $n > 1$, onda važi

$$\vec{v}_n = -\frac{c_1}{c_n}\vec{v}_1 - \ldots - \frac{c_{n-1}}{c_n}\vec{v}_{n-1}.$$

U oba slučaja sledi da je $\vec{v}_n \in [S - \{\vec{v}_n\}]$, što znači da je S linearno zavisan a to je suprotno pretpostavci.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo suprotno to jest za neko $\vec{v} \in S$ i neke $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in S - \{\vec{v}\}$ važi $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n$. Odavde zaključujemo da je

$$c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n + (-1)\vec{v} = \vec{0}$$

a to je suprotno pretpostavci zato što je skalar uz $\vec{v}$ jednak $-1 \neq 0$. $\dashv$

PRIMER. Skup $\{\begin{pmatrix}40\\45\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-50\\25\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbf{R}^2$ je linearno nezavisan zato što

$$c_1\begin{pmatrix}40\\45\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-50\\25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}40c_1 - 50c_2 = 0\\45c_1 + 25c_2 = 0\end{array} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

PRIMER. Skup $\{1 + x, 1 - x\} \subseteq \mathcal{P}_2$ je linearno nezavisan zato što

$$c_1(1 + x) + c_2(1 - x) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + (c_1 - c_2)x = 0 \Rightarrow \begin{array}{c}c_1 + c_2 = 0\\c_1 - c_2 = 0\end{array} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

PRIMER. Skup $\{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\18\\4\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbf{R}^2$ je linearno zavisan zato što je

$$\begin{pmatrix}4\\18\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\9\\2\end{pmatrix}, \text{ tj. } 0\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\9\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}4\\18\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Primer. Svaki podskup od V koji sadrži $\vec{0}$ je linearno zavisan zato što je $\vec{0} \in [S-\{\vec{0}\}]$ za svako $S \subseteq V$.

Tvrđenje 3.7. *Sve ne-nula vrste matrice u stepenastoj formi čine linearno nezavisan skup.*

dokaz. Neka je A matrica u stepenastoj formi i neka je k broj njenih ne-nula vrsta. Dokaz izvodimo indukcijom po $k \geq 0$.

(**baza indukcije**) Ako je $k = 0$, onda je skup ne-nula vrsta matrice A prazan pa je on po napomeni 3.5 linearno nezavisan.

(**induktivni korak**) Neka su $\rho_1, \ldots, \rho_k$ ne-nula vrste matrice A. Neka je l_i, $1 \leq i \leq k$, broj kolone u kojoj se nalazi pivot i-te vrste. Na primer, ako je $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, onda je $l_1 = 1$, $l_2 = 2$ i $l_3 = 4$. Pretpostavimo

$$c_1\rho_1 + \ldots + c_k\rho_k = (0 \ldots 0).$$

Ograničimo ovu jednakost na l_1-tu kolonu i dobijamo

$$c_1 a_{1l_1} + \ldots + c_k a_{kl_1} = 0$$

(u našem primeru dobijamo $c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0$). Pošto je matrica u stepenastoj formi imamo da je $a_{2l_1} = \ldots = a_{kl_1} = 0$, pa dobijamo $c_1 = 0$. Ako je $k = 1$ ovime je tvrđenje dokazano.

Ako je $k > 1$, onda iz matrice A izbacimo prvu vrstu i ostaje nam matrica A' u stepenastoj formi sa $k-1$ ne-nula vrsta. U našem primeru je $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Uz $c_1 = 0$ imamo da

$$c_1\rho_1 + \ldots + c_k\rho_k = (0 \ldots 0) \quad \Rightarrow \quad c_2\rho_2 + \ldots + c_k\rho_k = (0 \ldots 0),$$

pa pomoću induktivne hipoteze zaključujemo da je $c_2 = \ldots = c_k = 0$. $\dashv$

Lema 3.8. *Za $\vec{v} \in V$ i $S \subseteq V$ važi:*

(1) $[S] = [S \cup \{\vec{v}\}]$ akko $\vec{v} \in [S]$;

(2) ako je S linearno nezavisan i $\vec{v} \notin S$, onda je

$$S \cup \{\vec{v}\} \text{ linearno nezavisan akko } \vec{v} \notin [S].$$

dokaz. (1) ($\Rightarrow$) $\vec{v} \in [S \cup \{\vec{v}\}] = [S]$.

(1) ($\Leftarrow$) Iz $S \subseteq [S]$ (3.4 (1)) i $\{\vec{v}\} \subseteq [S]$ ($\vec{v} \in [S]$) zaključujemo $S \cup \{\vec{v}\} \subseteq [S]$. Po 3.4 (2) i (3) onda važi $[S \cup \{\vec{v}\}] \subseteq [[S]] = [S]$. Obrnutu inkluziju zaključujemo iz $S \subseteq S \cup \{\vec{v}\}$ pomoću 3.4 (2).

(2) ($\Rightarrow$) Iz toga što je $S \cup \{\vec{v}\}$ linearno nezavisan sledi da

$$\vec{v} \notin [(S \cup \{\vec{v}\}) - \{\vec{v}\}] = [S].$$

(2) ($\Leftarrow$) Neka je za $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq S \cup \{\vec{v}\}$, $c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$. Ako je $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq S$, onda zbog linearne nezavisnosti skupa S važi $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Ako je $\vec{v}_1 = \vec{v}$ (analogno postupamo kada je $\vec{v}_i = \vec{v}$), onda je $c_1 = 0$ zbog pretpostavke $\vec{v} \notin [S]$ pa je i $c_2 = \ldots = c_n = 0$ zbog linearne nezavisnosti skupa S. Znači u svakom slučaju je $c_1 = \ldots = c_n = 0$ pa je $S \cup \{\vec{v}\}$ linearno nezavisan po tvrđenju 3.6. $\dashv$

TVRĐENJE 3.9. *Za svaki konačan $S \subseteq V$ postoji $T \subseteq S$ takav da je T linearno nezavisan i $[T] = [S]$.*

DOKAZ. Indukcijom po broju $k \geq 0$ elemenata od S.

(**baza indukcije**) Ako je $k = 0$, onda je S prazan i po napomeni 3.5 je linearno nezavisan.

(**induktivni korak**) Neka je $k \geq 1$. Ako je S linearno nezavisan, onda za T uzmimo baš skup S. Ako je S linearno zavisan onda za neko $\vec{v} \in S$ važi $\vec{v} \in [S - \{\vec{v}\}]$. Po lemi 3.8 (1) dobijamo $[S - \{\vec{v}\}] = [(S - \{\vec{v}\}) \cup \{\vec{v}\}] = [S]$. Pošto $S - \{\vec{v}\}$ ima $k - 1$ element, na njega možemo primeniti induktivnu hipotezu i zaključiti da postoji $T \subseteq S - \{\vec{v}\} \subseteq S$ takav da je T linearno nezavisan i $[T] = [S - \{\vec{v}\}] = [S]$. $\dashv$

TVRĐENJE 3.10. *Skup $S = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subseteq V$ je linearno zavisan akko je $u_1 = \vec{0}$ ili je za neko $2 \leq i \leq n$, $\vec{u}_i \in [\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}\}]$.*

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Indukcijom po $n \geq 1$.

(**baza indukcije**) Ako je $n = 1$, onda je $\vec{u}_1 \in [\{\vec{u}_1\} - \{\vec{u}_1\}] = [\emptyset] = \{\vec{0}\}$, pa je $\vec{u}_1 = \vec{0}$.

(**induktivni korak**) Ako je $n > 1$ i ako je $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}\}$ linearno nezavisan, onda je po lemi 3.8 (2) $\vec{u}_n \in [\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}\}]$. Ako je $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}\}$ linearno zavisan, onda po induktivnoj hipotezi važi da je $\vec{u}_1 = \vec{0}$ ili je za neko $2 \leq i \leq n-1$, $\vec{u}_i \in [\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}\}]$.

($\Leftarrow$) Trivijalno. $\dashv$

TVRĐENJE 3.11. *Svaki podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan. Svaki nadskup linearno zavisnog skupa je linearno zavisan.*

DOKAZ. Dovoljno je pokazati drugo tvrđenje jer iz njega prvo sledi kontrapozicijom. Pretpostavimo da je S linearno zavisan i da je $S \subseteq T \subseteq V$. Po definiciji linearne zavisnosti postoji $\vec{v} \in S$ takav da je $\vec{v} \in [S - \{\vec{v}\}]$. Pošto je $\vec{v} \in S$ i $S \subseteq T$, to je $\vec{v} \in T$. Po tvrđenju 3.4 (2) imamo $[S - \{\vec{v}\}] \subseteq [T - \{\vec{v}\}]$, pa je $\vec{v} \in [T - \{\vec{v}\}]$. Dakle, T je linearno zavisan. $\dashv$

U dokazu sledećeg tvrđenja koristimo Cornovu lemu koja je u ZF teoriji skupova ekvivalentna aksiomi izbora (videti sekciju 14.3).

Cornova lema. *Ako je $(A, \leq)$ neprazan parcijalno uređen skup takav da svaki lanac (neprazan, linearno uređen podskup) u A ima gornju granicu u A (element iz A veći ili jednak od svakog elementa iz lanca), onda A sadrži maksimalan element (element od koga nema većih u A).*

Tvrđenje 3.12. *Za svaki linearno nezavisan $X \subseteq V$ postoji linearno nezavisan skup M takav da je $X \subseteq M$ i $[M] = V$.*

dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ skup svih linearno nezavisnih nadskupova od X. On je neprazan jer je $X \in \mathcal{A}$ i parcijalno je uređen inkluzijom $\subseteq$. Neka je $\mathcal{B}$ lanac u $\mathcal{A}$. Važi da je $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$ zato što je $X \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ i $\bigcup \mathcal{B}$ je linearno nezavisan jer se svaki njegov konačan podskup nalazi u nekom elementu iz $\mathcal{B}$—linearna zavisnost skupa $\bigcup \mathcal{B}$ bi značila linearnu zavisnost nekog elementa od $\mathcal{B}$. Za svako $B \in \mathcal{B}$ važi $B \subseteq \bigcup \mathcal{B}$, pa je $\bigcup \mathcal{B}$ gornja granica lanca $\mathcal{B}$.

Po Cornovoj lemi, $\mathcal{A}$ sadrži maksimalan element M. Iz $M \in \mathcal{A}$ sledi da je M linearno nezavisan i da je $X \subseteq M$. Još treba pokazati da je $[M] = V$. Pretpostavimo da je $\vec{u} \in V - [M]$. Po lemi 3.8 (2) skup $M \cup \{\vec{u}\}$ je linearno nezavisan što je suprotno tome da je M maksimalan linearno nezavisan nadskup od X. $\dashv$

§4. Četvrta nedelja

§4.1. Baza vektorskog prostora

U daljem tekstu sa $|X|$ označavamo broj elemenata konačnog skupa X. Za niz vektora $\mathcal{B} = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \rangle$ nekog vektorskog prostora, sa $\underline{\mathcal{B}}$ označavamo skup članova tog niza. Ukoliko je $\mathcal{B}$ konačan niz, onda je broj članova tog niza njegova *dužina*.

DEFINICIJA. Skup $S \subseteq V$ je *neuređena baza* za V kada je S linearno nezavisan i $[S] = V$. U slučaju kada je S konačan, njegovo proizvoljno uređenje u niz je *uređena baza* ili samo *baza* za V.

POSLEDICA TVRĐENJA 3.12. *Svaki vektorski prostor ima neuređenu bazu.*

DOKAZ. Neka je $X = \emptyset$ polazni linearno nezavisan skup. $\dashv$

PRIMER. $\mathcal{E}_2 = \langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rangle$ je baza za $\mathbf{R}^2$. To važi zato što je $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ linearno nezavisan ($c_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$) i $[\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}] = \mathbf{R}^2$ (za svako $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ je $x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$).

PRIMER. Na isti način se može pokazati da je $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle$ takođe baza za $\mathbf{R}^2$.

DEFINICIJA. $\mathcal{E}_n = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$ je *standardna* (*kanonska*) baza za $\mathbf{R}^n$.
Vektore u njoj označavamo redom sa $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

PRIMER 3. Neka je $V = \{u : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid u(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta,\ a, b \in \mathbf{R}\}$ i neka je sabiranje i množenje skalarima definisano kao u sedmom primeru iz sekcije 2.2. Pokažimo da je $\mathcal{B} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ baza za V. Iz $c_1\cos\theta + c_2\sin\theta = 0$ (ovo sa desne strane jednakosti je konstantna funkcija koja svako $\theta \in \mathbf{R}$ slika u 0), kad stavimo $\theta = 0$ sledi da je $c_1 = 0$, a kad stavimo $\theta = \frac{\pi}{2}$ sledi da je $c_2 = 0$, pa je $\{\cos\theta, \sin\theta\}$ linearno nezavisan. Po definiciji prostora V jasno je da je $[\{\cos\theta, \sin\theta\}] = V$, pa je $\langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ baza za V.

PRIMER. Vektorski prostor $\mathcal{P}_3$ ima između ostalih i sledeće baze: $\mathcal{B}_1 = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$, $\mathcal{B}_2 = \langle x^3, x^2, x, 1 \rangle$, $\mathcal{B}_3 = \langle 1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3 \rangle$.

PRIMER. Trivijalan prostor $\{\vec{0}\}$ ima samo jednu bazu i to je prazan niz vektora.

Primer 6. Prostor svih polinoma s realnim koeficijentima ima beskonačnu neuređenu bazu $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ i lako je pokazati da nema konačnu bazu jer bi u njoj postojao polinom najvećeg stepena pa se nijedan polinom stepena većeg od tog ne bi mogao dobiti kao linearna kombinacija polinoma iz baze.

Primer. Sistem $\begin{array}{rrrrl} x & +y & & -w & =0 \\ & & z & +w & =0 \end{array}$ ima opšte rešenje oblika

$$\{y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, w \in \mathbf{R}\}$$

i to je potprostor od $\mathbf{R}^4$ čija je baza $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Teorema 4.1. *Konačan niz $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ je baza vektorskog prostora V akko za svako $\vec{v} \in V$ postoji jedinstveno $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ tako da je $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$.*

dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\vec{v} \in V$. Pošto je $[\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n\}] = V$ to postoji $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ takav da je $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$. Ako bi postojao još jedan vektor $\vec{d} \in \mathbf{R}^n$ takav da je $\vec{v} = d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_n\vec{\beta}_n$, onda bi važilo

$$(c_1 - d_1)\vec{\beta}_1 + \ldots + (c_n - d_n)\vec{\beta}_n = \vec{0},$$

pa je $c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n$, zbog linearne nezavisnosti skupa $\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n\}$, to jest $\vec{c} = \vec{d}$.

($\Leftarrow$) Očigledno je $[\underline{\mathcal{B}}] = V$. Još treba pokazati da su $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n$ međusobno različiti i da je $\underline{\mathcal{B}}$ linearno nezavisan. Ako je $\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_j$ za $i < j$, onda je

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_i &= 0\vec{\beta}_1 + \ldots + 1\vec{\beta}_i + \ldots + 0\vec{\beta}_j + \ldots + 0\vec{\beta}_n \\ &= 0\vec{\beta}_1 + \ldots + 0\vec{\beta}_i + \ldots + 1\vec{\beta}_j + \ldots + 0\vec{\beta}_n, \end{aligned}$$

što je suprotno pretpostavci o jedinstvenosti. Pretpostavimo da je $c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n = \vec{0}$. S obzirom da je $0\vec{\beta}_1 + \ldots + 0\vec{\beta}_n = \vec{0}$, uz pretpostavku o jedinstvenosti, sledi da je $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Dakle, $\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n\}$ je linearno nezavisan. $\dashv$

Definicija. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ baza vektorskog prostora V. Neka je $\vec{v} \in V$ i $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$ (po teoremi 4.1, takav $\vec{c} \in \mathbf{R}^n$ je jedinstven). Kažemo da je $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ *reprezentacija* vektora $\vec{v}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ i pišemo

$$Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Primer. Neka je $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$, tj. $Rep_{\mathcal{E}_2}(\vec{v})=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{E}_2}$. Neka je $\mathcal{B}=\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\rangle$ baza za $\mathbf{R}^2$ (ovo se lako proverava). Da bismo odredili $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})$ dovoljno je odrediti skalare c_1 i c_2 takve da je

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

Rešavajući odgovarajući sistem jednačina dobijamo $c_1=3$ i $c_2=-\frac{1}{2}$, pa je $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})=\begin{pmatrix}3\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Primer. Neka su $\mathcal{B}_1=\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$ i $\mathcal{B}_2=\langle 1+x,1-x,x+x^2,x+x^3\rangle$ dve baze za $\mathcal{P}_3$ (u slučaju $\mathcal{B}_2$ ovo treba proveriti). Neka je $\vec{v}=x+x^2\in\mathcal{P}_3$. Tada je

$$Rep_{\mathcal{B}_1}(\vec{v})=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1},\quad Rep_{\mathcal{B}_2}(\vec{v})=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

§4.2. Dimenzija vektorskog prostora

Definicija. Vektorski prostor je *konačnodimenzionalan* kada ima konačnu neuređenu bazu.

Primer. Prostor $\mathbf{R}^n$ je konačnodimenzionalan jer ima bazu $\mathcal{E}_n$ dužine n.

Primer. Prostor svih polinoma s realnim koeficijentima nije konačnodimenzionalan (videti šesti primer u sekciji 4.1).

Napomena. *Nadalje posmatramo samo konačnodimenzionalne prostore.*

Mala lema o zameni. *Neka je $[T\cup S]=V$ i neka je $\vec{p}\in V$ takav da $\vec{p}\notin S$ i $S\cup\{\vec{p}\}$ je linearno nezavisan. Tada postoji $\vec{t}\in T$ takav da je*

$$[(T-\{\vec{t}\})\cup\{\vec{p}\}\cup S]=V.$$

dokaz. Iz $\vec{p}\in[T\cup S]$, $\vec{p}\notin S$ i $S\cup\{\vec{p}\}$ je linearno nezavisan sledi da postoji skup vektora $\{\vec{t},\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}\subseteq T\cup S$, $k\geq 0$, takvih da je $\vec{t}\in T$, $\vec{p}=c\vec{t}+c_1\vec{v}_1+\ldots+c_k\vec{v}_k$ i $c\neq 0$. Znači $\vec{t}=\frac{1}{c}\,\vec{p}-\frac{c_1}{c}\,\vec{v}_1-\ldots-\frac{c_k}{c}\,\vec{v}_k$, pa je $\vec{t}\in[(T-\{\vec{t}\})\cup\{\vec{p}\}\cup S]$. Dalje,

$$\begin{aligned}[(T-\{\vec{t}\})\cup\{\vec{p}\}\cup S] &= [(T-\{\vec{t}\})\cup\{\vec{p}\}\cup S\cup\{\vec{t}\}], \text{ po lemi 3.8 (1)}\\ &= [T\cup\{\vec{p}\}\cup S]\\ &= [T\cup S], \text{ po lemi 3.8 (1).}\end{aligned}$$ ⊣

VELIKA LEMA O ZAMENI. *Ako su T, S i P podskupovi vektorskog prostora V takvi da je P konačan, $P \cap S = \emptyset$, $[T \cup S] = V$ i $S \cup P$ je linearno nezavisan, onda postoji $T' \subseteq T$ takav da je $|T'| = |P|$ i $[(T - T') \cup P \cup S] = V$.*

DOKAZ. Indukcijom po broju $n = |P| \geq 0$.

(**baza indukcije**) Neka je $n = 0$ što znači da je $P = \emptyset$. Tada za $T' = P = \emptyset$ važi $[(T - T') \cup P \cup S] = [T \cup S] = V$.

(**induktivni korak**) Neka je $n > 0$ i neka je $\vec{p} \in P$. Pošto je $\vec{p} \in [T \cup S]$ i $S \cup \{\vec{p}\}$ je linearno nezavisan, to je po Maloj lemi o zameni $V = [T \cup S] = [(T - \{\vec{t}\}) \cup \{\vec{p}\} \cup S]$ za neko $\vec{t} \in T$. Sada možemo primeniti induktivnu hipotezu na $T_1 = T - \{\vec{t}\}$, $P_1 = P - \{\vec{p}\}$ i $S_1 = \{\vec{p}\} \cup S$ i dobijamo da za neko $T_1' \subseteq T_1$, takvo da je $|T_1'| = |P_1| = n - 1$, važi

$$\begin{aligned} V &= [(T_1 - T_1') \cup P_1 \cup S_1] = [((T - \{\vec{t}\}) - T_1') \cup (P - \{\vec{p}\}) \cup (\{\vec{p}\} \cup S)] \\ &= [(T - (T_1' \cup \{\vec{t}\})) \cup P \cup S] \\ &= [(T - T') \cup P \cup S], \text{ za } T' = T_1' \cup \{\vec{t}\} \text{ i } |T'| = n - 1 + 1 = n. \end{aligned}$$
⊣

LEMA 4.2. *Ako je T konačan podskup od V takav da je $[T] = V$ i ako je $P \subseteq V$ linearno nezavisan, onda je P konačan i nema više elemenata od T.*

DOKAZ. Po Velikoj lemi o zameni primenjenoj na T, $S = \emptyset$ i proizvoljan konačan $P' \subseteq P$, postoji $T' \subseteq T$ takav da je $|T'| = |P'|$ što znači da je $|P'| \leq |T|$. Dakle, svaki konačan podskup od P nema više elemenata od T, pa je P konačan i nema više elemenata od T. ⊣

TEOREMA 4.3. *U svakom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru sve baze su jednake dužine.*

DOKAZ. Dovoljno je pokazati da ako je $\mathcal{B}$ konačna neuređena baza i $\mathcal{B}'$ neka druga neuređena baza, onda je $\mathcal{B}'$ konačna i $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$. Ovo važi po lemi 4.2, pošto je $[\mathcal{B}] = V$ i $\mathcal{B}'$ je linearno nezavisan. ⊣

DEFINICIJA. *Dimenzija* konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V, u oznaci $dim(V)$, je dužina njegove proizvoljne baze.

LEMA 4.4. *Linearno nezavisan skup vektora iz n-dimenzionalnog vektorskog prostora ne može imati više od n elemenata.*

DOKAZ. Direktno iz leme 4.2. ⊣

TVRĐENJE 4.5. *Za svaki podskup T konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V za koji važi da je $[T] = V$, postoji $T' \subseteq T$ koji je neuređena baza za V.*

DOKAZ. Po lemi 4.4, ako je $dim(V) = n$, onda svaki linearno nezavisan podskup od T ima najviše n elemenata. Neka je P linearno nezavisan podskup od T za koji ne postoji linearno nezavisan podskup od T sa više elemenata. Znači za svako $\vec{t} \in (T - P)$ važi da je $P \cup \{\vec{t}\}$ linearno zavisan. Po lemi 3.8 (2) sledi da je $\vec{t} \in [P]$, pa zaključujemo da je $T \subseteq [P]$, odakle po tvrđenju 3.4 (2) i (3) dobijamo $V = [T] \subseteq [[P]] = [P]$. Iz $P \subseteq T$, po tvrđenju 3.4 (2) dobijamo $[P] \subseteq [T] = V$. Dakle, $[P] = V$, te je P neuređena baza za V. ⊣

Lema 4.6. *Ako je $dim(V) = n$ i $P \subseteq V$ linearno nezavisan takav da je $|P| = n$, onda je $[P] = V$.*

dokaz. Za proizvoljnu bazu $\mathcal{B}$ od V važi $|\underline{\mathcal{B}}| = n$ i $[\underline{\mathcal{B}}] = V$. Po Velikoj lemi o zameni primenjenoj na $T = \underline{\mathcal{B}}$, $S = \emptyset$ i P, dobijamo $[P] = V$. ⊣

Lema 4.7. *Ako je $dim(V) = n$ i $P \subseteq V$ takav da je $[P] = V$ i $|P| \leq n$, onda je P neuređena baza za V.*

dokaz. Po tvrđenju 4.5 postoji $P' \subseteq P$ koji je neuređena baza za V. Po teoremi 4.3 je $|P'| = n$ a pošto je $|P| \leq n$, to znači da je $P' = P$. ⊣

Tvrđenje 4.8. *Svaki linearno nezavisan skup vektora konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V može se dopuniti do neuređene baze za V vektorima iz neke neuređene baze za V.*

dokaz. Neka je P linearno nezavisan skup vektora iz V i neka je T neuređena baza za V. Po Velikoj lemi o zameni primenjenoj na T, $S = \emptyset$ i P, postoji $T' \subseteq T$ takav da je $|T'| = |P|$ i $[(T - T') \cup P] = V$. Pošto je $|(T - T') \cup P| \leq |T| = dim(V)$ to, po lemi 4.7, sledi da je $(T - T') \cup P$ neuređena baza za V. ⊣

Tvrđenje 4.9. *U n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, skup $P \subseteq V$, takav da je $|P| = n$, je linearno nezavisan akko $[P] = V$.*

dokaz. ($\Rightarrow$) Direktno iz leme 4.6.
($\Leftarrow$) Iz leme 4.7 dobijamo da je P neuređena baza za V, pa je linearno nezavisan. ⊣

Tvrđenje 4.10. *Ako je U potprostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V, onda je $dim(U) \leq dim(V)$. Ako je $dim(U) = dim(V)$, onda je $U = V$.*

dokaz. Po lemi 4.4 sledi da je $dim(U) \leq dim(V)$. Neka je $dim(U) = dim(V) = n$ i neka je P neuređena baza za U. Znači da je $[P] = U$, P je linearno nezavisan i $|P| = n$. Po tvrđenju 4.9, $[P] = V$, pa je $U = V$. ⊣

§5. Peta nedelja

§5.1. Vektorski prostori i linearni sistemi

Podsetiti se napomene 2.5 kao i tvrđenja 2.6 i 3.7.

DEFINICIJA. *Prostor vrsta* neke matrice je linearni omotač skupa svih vektor vrsta te matrice. Oznaka je $RS(A)$. *Vrsta-rang* matrice A je dimenzija prostora $RS(A)$.

PRIMER.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$RS(A) = [\{(2 \quad 3), (4 \quad 6)\}] = [\{(2 \quad 3)\}]$, jer je $(4 \quad 6) = 2(2 \quad 3)$.

LEMA 5.1. *Ako su dve matrice vrsta-ekvivalentne onda su im prostori vrsta jednaki pa su im samim tim i vrsta-rangovi jednaki.*

DOKAZ. Pretpostavimo $A \rightsquigarrow B$ (to jest A se vrsta-redukuje na B). Po tvrđenju 2.6 imamo da je svaka vrsta matrice B linearna kombinacija vrsta matrice A, pa je $RS(B) \subseteq RS(A)$ (ovde se koristi tvrđenje 3.4 (2) i (3)). Na isti način, pošto je relacija $\rightsquigarrow$ simetrična (tvrđenje 2.2), dobijamo $RS(A) \subseteq RS(B)$, pa je $RS(A) = RS(B)$. $\dashv$

Na osnovu leme 5.1 i tvrđenja 3.7 zaključujemo da Gausov postupak eliminiše zavisnost među vrstama ostavljajući linearni omotač nepromenjen. Na taj način se formira baza prostora vrsta neke matrice.

PRIMER.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2\rho_1+\rho_3]{-\rho_1+\rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{6\rho_2+\rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Znači $\langle (1 \quad 3 \quad 1), (0 \quad 1 \quad 0), (0 \quad 0 \quad 3) \rangle$ je baza za $RS(A)$.

DEFINICIJA. *Prostor kolona* neke matrice je linearni omotač skupa svih vektor kolona te matrice. Oznaka je $CS(A)$. *Kolona-rang* matrice A je dimenzija prostora $CS(A)$.

DEFINICIJA. Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *Transponovana matrica* matrice A je matrica $A^T \in \mathcal{M}_{n\times m}$ takva da se u preseku i-te vrste i j-te kolone matrice A^T nalazi element koji se nalazi u preseku i-te kolone i j-te vrste matrice A. Prostije, prva vrsta matrice A postaje prva kolona matrice A^T itd.

PRIMER.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Primer. Za matricu A iz prethodnog primera odrediti bazu za $CS(A)$. Prvo odredimo bazu za $RS(A^T)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-7\rho_1+\rho_3]{-3\rho_1+\rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & -6 & 2 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2\rho_2+\rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dakle, baza za $RS(A^T)$ je $\langle (1 \quad 2 \quad 0 \quad 4), (0 \, -3 \quad 1 \, -12) \rangle$, pa je baza za $CS(A)$:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} \rangle$$

Primetimo da Gausove operacije mogu da promene prostor kolona matrice. Na primer, za

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2\rho_1+\rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

važi

$$[\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \}] \neq [\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}]$$

ali ćemo pokazati da važi sledeće.

Lema 5.2. *Ako su dve matrice vrsta-ekvivalentne onda su im kolona-rangovi jednaki.*

dokaz. Pretpostavimo $A \rightsquigarrow B$. Po teoremi 1.3, sistemi

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 & \qquad & b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ \qquad \ldots & & \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 & & b_{m1}x_1 + \ldots + b_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

imaju isto opšte rešenje, što znači:

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

akko

$$c_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

pa je skup nekih kolona matrice A linearno nezavisan akko je skup odgovarajućih kolona matrice B linearno nezavisan, odakle sledi da su kolona-rangovi matrica A i B jednaki. $\dashv$

Primer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 16 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrica A je svedena na redukovanu stepenastu formu. Za bazu od $RS(A)$ možemo uzeti $\langle (1 \quad 3 \quad 0 \quad 2), (0 \quad 0 \quad 1 \quad 4) \rangle$.

Što se tiče prostora kolona neke matrice u redukovanoj stepenastoj formi, one kolone koje sadrže pivote su članovi standardne baze za $\mathbf{R}^3$. U redukovanoj matrici iz gornjeg primera, to su $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ (prva i treća kolona). One čine linearno nezavisan skup a sve ostale kolone su u linearnom omotaču tog skupa jer imaju nule u trećoj vrsti (svim vrstama različitim od prve i druge). Ovaj primer nas uvodi u sledeću teoremu.

Teorema 5.3. *Svaka matrica ima isti vrsta i kolona rang.*

dokaz. Po lemama 5.1 i 5.2, svođenje matrice na redukovanu stepenastu formu ne menja ni jedan od ovih rangova. Vrsta-rang dobijene matrice jednak je broju pivota u njoj a to je ujedno i broj kolona oblika $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots$ koje daju bazu za prostor kolona te matrice iz istog razloga kao u gornjem primeru. ⊣

Definicija. *Rang* matrice je njen vrsta odnosno kolona-rang, pošto su oni jednaki. Oznaka je $rank(A)$.

Teorema 5.4. *Za homogen sistem sa n promenljivih i sa matricom koeficijenata A sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $rank(A) = r$;

(2) *prostor rešenja ima dimenziju $n - r$.*

dokaz.

$$\begin{aligned} rank(A) = r \ &\text{akko sistem se svodi na stepenastu formu sa } r \text{ ne-nula vrsta,} \\ &\text{akko svedeni sistem ima } r \text{ pivota,} \\ &\text{akko svedeni sistem ima } n-r \text{ slobodnih promenljivih,} \\ &\text{akko prostor rešenja ima dimenziju } n-r. \end{aligned}$$

⊣

Kako pokazati poslednju ekvivalenciju će biti jasno iz sledećeg primera.

Primer. Posmatrajmo sledeći sistem u redukovanoj stepenastoj formi:

$$\begin{array}{ccccc} x & -\frac{1}{2}y & & +2u & = 0 \\ & & z & +u & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opšte rešenje čitamo direktno iz redukovane stepenaste forme.

$$S = \{y \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, u \in \mathbf{R}\}.$$

Vektori $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su linearno nezavisni jer prvi u drugoj vrsti ima jedinicu a drugi nulu (to je mesto koje odgovara promenljivoj y) i isto tako drugi u četvrtoj vrsti ima jedinicu a prvi nulu (to je mesto koje odgovara promenljivoj u) tako da je nemoguće napraviti njihovu netrivijalnu linearnu kombinaciju jednaku $\vec{0}$. Isto se dešava i u opštem slučaju.

§5.2. Neke operacije s potprostorima

U ovoj sekciji će biti reči o preseku, sumi i direktnoj sumi potprostora nekog vektorskog prostora.

Lema 5.5. *Ako su U i W potprostori nekog vektorskog prostora, onda je i $U \cap W$ takođe potprostor tog vektorskog prostora.*

dokaz. Po tvrđenju 3.1 dovoljno je proveriti da je $U \cap W$ neprazan i da je $U \cap W$ zatvoren za linearne kombinacije parova vektora. Iz $\vec{0} \in U$ i $\vec{0} \in W$ sledi $\vec{0} \in U \cap W$ pa je on neprazan.

Neka su $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U \cap W$ i $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Pošto je onda $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U$ i U je potprostor, zaključujemo $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \in U$. Na isti način zaključujemo $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \in W$, pa je $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \in U \cap W$. ⊣

Definicija. Za U i W potprostore nekog vektorskog prostora definišemo njihovu *sumu*:

$$U + W =_{df} [U \cup W].$$

Primer. $U, W \subseteq \mathbf{R}^3$, $U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R}\}$, $W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbf{R}\}$. Pošto je $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, onda važi:

$$\mathbf{R}^3 = [\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}] \subseteq [U \cup W] \subseteq \mathbf{R}^3$$

pa je $U + W = \mathbf{R}^3$.

LEMA 5.6. *Ako je* $[S] = U$ *i* $[T] = W$ *onda je* $[S \cup T] = U + W$.

DOKAZ. Iz $S \cup T \subseteq U \cup W$, po tvrđenju 3.4 (2) imamo $[S \cup T] \subseteq [U \cup W]$. Iz $S, T \subseteq S \cup T$, dvostrukom primenom tvrđenja 3.4 (2) imamo $U, W \subseteq [S \cup T]$ pa je i $U \cup W \subseteq [S \cup T]$. Odavde, po tvrđenju 3.4 (2) i (3), dobijamo $[U \cup W] \subseteq [S \cup T]$. Dakle, $[S \cup T] = [U \cup W] = U + W$. ⊣

TEOREMA 5.7 (GRASMANOVA FORMULA). *Za potprostore* U *i* W *konačnodimenzionalnog vektorskog prostora važi:*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

DOKAZ. Neka je $\langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r \rangle$ baza za $U \cap W$. Po tvrđenju 4.8 ta baza se može dopuniti do baze za U i do baze za W. Dakle, neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$ baza za U i neka je $\mathcal{C} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle$ baza za W. Dovoljno je da pokažemo da je $\mathcal{D} = \langle \vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r, \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle$ baza za $U + W$.

U $\mathcal{D}$ nema ponavljanja, inače bi moralo biti $\beta_i = \gamma_j$ za neke i i j. Taj vektor bi onda pripadao $U \cap W$ pa ni $\mathcal{B}$ ni $\mathcal{C}$ ne bi bili linearno nezavisni.

Kao posledicu leme 5.6 imamo $[\underline{\mathcal{D}}] = [\underline{\mathcal{B}} \cup \underline{\mathcal{C}}] = U + W$. Još treba pokazati da je $\underline{\mathcal{D}}$ linearno nezavisan. Pretpostavimo:

$$d_1\vec{\delta}_1 + \ldots + d_r\vec{\delta}_r + b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k + c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l = \vec{0}.$$

Neka je $\vec{v} = d_1\vec{\delta}_1 + \ldots + d_r\vec{\delta}_r + b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k \in U$. Iz gornje jednakosti dobijamo da je $\vec{v} = -(c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l) \in W$. Dakle, $\vec{v} \in U \cap W$ pa je $\vec{v} \in [\{\vec{\delta}_1, \ldots, \vec{\delta}_r\}]$. Po teoremi 4.1, zbog jedinstvenosti $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})$ dobijamo $b_1 = \ldots = b_k = 0$. Uz to, gornja jednakost postaje $d_1\vec{\delta}_1 + \ldots + d_r\vec{\delta}_r + c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l = \vec{0}$, što zbog linearne nezavisnosti od $\underline{\mathcal{C}}$ daje $d_1 = \ldots = d_r = c_1 = \ldots = c_l = 0$. ⊣

DEFINICIJA. *Konkatenacija* (*nadovezivanje*) nizova vektora:

$$\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle \frown \langle \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle =_{df} \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle.$$

LEMA 5.8. *Neka je* $V = U + W$ *i neka su* $\mathcal{B}$ *i* $\mathcal{C}$ *redom baze za* U *i* W. *Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(1) svaki $\vec{v} \in V$ *se može na jedinstven način predstaviti kao* $\vec{u} + \vec{w}$ *pri čemu je* $\vec{u} \in U$ *a* $\vec{w} \in W$;

(2) $\mathcal{B} \frown \mathcal{C}$ *je baza za* V;

(3) proizvoljni ne-nula vektori $\vec{u} \in U$ *i* $\vec{w} \in W$ *su različiti i skup* $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ *je linearno*

nezavisan;

(4) $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

DOKAZ. ((1) $\Rightarrow$ (2))

$\mathcal{B} \frown \mathcal{C}$ je niz bez ponavljanja jer bi inače postojao ne-nula vektor $\vec{v} \in \underline{\mathcal{B}} \cap \underline{\mathcal{C}}$ koga bismo mogli predstaviti kao $\vec{v} + \vec{0}$ i kao $\vec{0} + \vec{v}$, što je suprotno pretpostavci (1).

Kao posledicu leme 5.6 imamo da je $[\underline{\mathcal{B} \frown \mathcal{C}}] = [\underline{\mathcal{B}} \cup \underline{\mathcal{C}}] = U + W = V$. Još treba pokazati da je $\underline{\mathcal{B}} \cup \underline{\mathcal{C}}$ linearno nezavisan. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$ i $\mathcal{C} = \langle \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_l \rangle$. Pretpostavimo:

$$b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k + c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0}.$$

Po (1) imamo da je $b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k = \vec{0}$ i $c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l = \vec{0}$, odakle po linearnoj nezavisnosti skupova $\underline{\mathcal{B}}$ i $\underline{\mathcal{C}}$ sledi $b_1 = \ldots = b_k = c_1 = \ldots = c_l = 0$.

((2) $\Rightarrow$ (3)) Neka su $\vec{u} \in U$ i $\vec{w} \in W$ dva ne-nula vektora i neka je $\vec{u} = b_1\vec{\beta}_1 + \ldots + b_k\vec{\beta}_k$ a $\vec{w} = c_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + c_l\vec{\gamma}_l$. Zbog linearne nezavisnosti niza $\mathcal{B} \frown \mathcal{C}$, ako bi bilo $\vec{u} = \vec{w}$ onda bi to bili nula vektori što je suprotno pretpostavci. Pretpostavimo da je $r\vec{u} + s\vec{w} = \vec{0}$. Znači:

$$rb_1\vec{\beta}_1 + \ldots + rb_k\vec{\beta}_k + sc_1\vec{\gamma}_1 + \ldots + sc_l\vec{\gamma}_l = \vec{0},$$

pa zbog linearne nezavisnosti niza $\mathcal{B} \frown \mathcal{C}$ dobijamo $rb_1 = \ldots = rb_k = sc_1 = \ldots = sc_l = 0$. Iz $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$ sledi da je bar jedno b_i i bar jedno c_j različito od 0 pa je onda $r = s = 0$.

((3) $\Rightarrow$ (4)) Direktno.

((4) $\Rightarrow$ (1)) Pretpostavimo da za $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ i $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ važi $\vec{u}_1 + \vec{w}_1 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2$. Onda važi $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \in U \cap W$ pa po (4) važi $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 = \vec{0}$, tj. $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ i $\vec{w}_1 = \vec{w}_2$. ⊣

DEFINICIJA. Za potprostore U i W nekog vektorskog prostora V kažemo da su *nezavisni* (*komplementarni*) kada se svaki $\vec{v} \in U + W$ može na jedinstven način predstaviti kao $\vec{u} + \vec{w}$ pri čemu je $\vec{u} \in U$ a $\vec{w} \in W$.

DEFINICIJA. Vektorski prostor V je (*unutrašnja*) *direktna suma* svojih potprostora U i W kada su oni nezavisni i $V = U + W$. Oznaka je $V = U \oplus W$.

TVRĐENJE 5.9. *Za vektorski prostor V i njegove potprostore U i W važi:*

$$V = U \oplus W \quad \text{akko} \quad U \cap W = \{\vec{0}\} \text{ i } dim(V) = dim(U) + dim(W).$$

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Po lemi 5.8 sledi da je $U \cap W = \{\vec{0}\}$, pa je po teoremi 5.7, $dim(V) = dim(U + W) = dim(U) + dim(W) + 0$.

($\Leftarrow$) Po lemi 5.8, U i V su nezavisni. Po teoremi 5.7 imamo da je $dim(V) = dim(U) + dim(W) = dim(U + W)$ pa je po tvrđenju 4.10, $V = U + W$. ⊣

Primer. Neka je $M = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y - 2z = 0\}$, $N_1 = \{k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{R}\}$ i $N_2 = \{k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbf{R}\}$. Možemo pokazati da je $M \oplus N_1 = \mathbf{R}^3 = M \oplus N_2$. Prevedimo M u oblik $\{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbf{R}\}$. Dakle, $\mathcal{M} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $\mathcal{N}_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ i $\mathcal{N}_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$ su redom baze za M, N_1 i N_2. Pošto su $\mathcal{M} \frown \mathcal{N}_1$ i $\mathcal{M} \frown \mathcal{N}_2$ baze za $\mathbf{R}^3$, to su, po lemi 5.8, direktne sume $M \oplus N_1$ i $M \oplus N_2$ jednake prostoru $\mathbf{R}^3$.

U prvom primeru iz sekcije 3.1 je rečeno kako skup rešenja homogenog sistema sa n promenljivih predstavlja jedan potprostor od $\mathbf{R}^n$. Obrnuto, svakom potprostoru od $\mathbf{R}^n$ možemo pridružiti homogen sistem sa n promeljivih čiji je skup rešenja taj potprostor. Ovo pridruživanje ilustrujemo sledećim primerom.

Primer. Neka je U potprostor od $\mathbf{R}^3$ čija je baza $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pripada potprostoru U ako i samo ako je skup $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}$ linearno zavisan, odnosno ako i samo ako se matrica $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ Gausovim operacijama svodi na matricu u stepenastoj formi sa poslednjom nula vrstom.

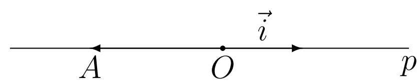
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{(-x)\rho_1 + \rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & y - 2x & z - x \end{pmatrix} \xrightarrow{(2x - y)\rho_2 + \rho_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x - y + z \end{pmatrix}$$

Dakle, U je skup rešenja homogene jednačine $x - y + z = 0$.

§6. Šesta nedelja

§6.1. Višestruka uloga $\mathbf{R}^n$

PRIMER. Posmatramo euklidsku pravu p na kojoj je fiksirana tačka O (koordinatni početak) i jedan jedinični vektor $\vec{i}$. Time smo fiksirali jedan koordinatni sistem prave p. Neka je A proizvoljna tačka prave p. Kažemo da je $\vec{u}^A = \overrightarrow{OA}$ *vektor položaja* tačke A.



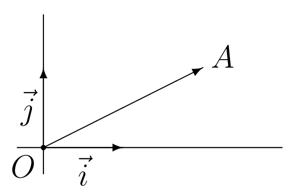
Posmatrajmo sledeća pridruživanja:

$$x \in \mathbf{R} \mapsto x\vec{i} \mapsto A \in p,$$

tako da je vektor položaja $\vec{u}^A$ tačke A jednak vektoru $x\vec{i}$. Ovo su bijekcije koje nam omogućavaju da element od $\mathbf{R}$ posmatramo na još dva načina:

1. kao geometrijski vektor na pravoj p (x je *komponenta* tog vektora u datom koordinatnom sistemu) i
2. kao tačku prave p (x je *koordinata* te tačke u datom koordinatnom sistemu).

PRIMER. Posmatramo euklidsku ravan α u kojoj je fiksirana tačka O (koordinatni početak) i dva jedinična, ortogonalna vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$. Kao i malopre, kažemo da je $\vec{u}^A = \overrightarrow{OA}$ vektor položaja tačke A.



Posmatrajmo sledeća pridruživanja:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mapsto x\vec{i} + y\vec{j} \mapsto A \in p,$$

tako da je vektor položaja $\vec{u}^A$ tačke A jednak linearnoj kombinaciji $x\vec{i} + y\vec{j}$. Ovo su takođe bijekcije koje nam omogućavaju da svaki element od $\mathbf{R}^2$ posmatramo na još dva načina, kao vektor u ravni čije su komponente (x, y), odnosno tačku $A(x, y)$ te ravni.

Ovo sve važi i za $\mathbf{R}^3$ i euklidski prostor. Po analogiji, pošto nemamo vizuelnu predstavu o tome šta bi bio euklidski n-dimenzionalni prostor za $n \geq 4$, smatramo elemente od $\mathbf{R}^n$ za vektore tog prostora odnosno tačke čiji su to vektori položaja.

§6.2. Skalarni proizvod i norma vektora u $\mathbf{R}^n$

Definicija. Za dva vektora $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ definišemo njihov *skalarni proizvod* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ kao realan broj $u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$.

Lako se vidi da ovako definisan skalarni proizvod zadovoljava sledeća svojstva:

(1) *linearnost*, to jest, $(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{w} = a(\vec{u} \cdot \vec{w}) + b(\vec{v} \cdot \vec{w})$,

(2) *komutativnost*, to jest, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,

(3) *pozitivna definisanost*, to jest, $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ i $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ akko $\vec{u} = \vec{0}$.

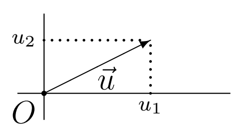
Vektorski prostor V s binarnom operacijom $\cdot : V \times V \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava svojstva (1), (2) i (3) je realni *unitarni* vektorski prostor.

Definicija. *Norma* vektora $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$, u oznaci $\|\vec{u}\|$, je

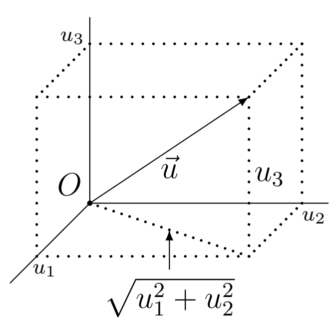
$$\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Za $n \leq 3$ se lako proveri da ako $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$ posmatramo kao geometrijski vektor, onda je njegov intenzitet (dužina) jednak $\|\vec{u}\|$ (to je ujedno i rastojanje tačke, čiji je to vektor položaja, od koordinatnog početka). Za $n = 1$ ($\vec{u} = (u_1)$), to sledi zbog toga što je po definiciji intenzitet geometrijskog vektora $u_1\vec{i}$ jednak $|u_1| = \sqrt{u_1^2} = \|\vec{u}\|$.

Za $n = 2$ to sledi po Pitagorinoj teoremi, zbog toga što je intenzitet geometrijskog vektora $u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ jednak $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \|\vec{u}\|$.



Za $n = 3$, dva puta primenjujući Pitagorinu teoremu zaključujemo isto.



Uopštavajući ovo na $\mathbf{R}^n$ definišemo intenzitet (dužinu) vektora $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$ kao $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$. *Rastojanje* između tačaka A i B je dužina vektora $\overrightarrow{AB} = \vec{u}^B - \vec{u}^A$, što je po prethodnom jednako

$$\|\vec{u}^B - \vec{u}^A\| = \sqrt{(u_1^B - u_1^A)^2 + \ldots + (u_n^B - u_n^A)^2}.$$

Osobine norme:

(i) $\|\vec{u}\| \geq 0$, $\|\vec{u}\| = 0$ akko $\vec{u} = \vec{0}$,

(ii) $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$ i još dve sledeće teoreme.

TEOREMA 6.1 (KOŠI-ŠVARC). $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.

DOKAZ. Ako je $\vec{u} = \vec{0}$ ili $\vec{v} = \vec{0}$, onda važi $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = 0$. Pretpostavimo $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, tada imamo:

$0 \leq (\|\vec{u}\|\vec{v} - \|\vec{v}\|\vec{u})\cdot(\|\vec{u}\|\vec{v} - \|\vec{v}\|\vec{u})$, po (3),

akko

$0 \leq \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$, po (1), (2) i def. norme,

akko

$2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\vec{u}\cdot\vec{v} \leq 2\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$,

akko

$\vec{u}\cdot\vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, zato što je $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\| > 0$ jer su $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$.

Analogno, polazeći od $0 \leq (\|\vec{u}\|\vec{v} + \|\vec{v}\|\vec{u})\cdot(\|\vec{u}\|\vec{v} + \|\vec{v}\|\vec{u})$, kao instance nejednakosti (3), dobijamo $-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leq \vec{u}\cdot\vec{v}$. Dakle važi $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$. ⊣

TEOREMA 6.2 (MINKOVSKI). $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

DOKAZ.

$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

akko

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$, kvadriranje i definicija norme,

akko

$\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$,

akko

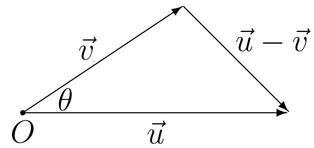
$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$, što važi po teoremi 6.1. ⊣

TVRĐENJE 6.3 (NEJEDNAKOST TROUGLA). $\|\overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{BA}\|$.

DOKAZ. Neka su $\vec{u}^A$, $\vec{u}^B$ i $\vec{u}^C$ redom vektori položaja tačaka A, B i C. Tada je $\overrightarrow{BC} = \vec{u}^C - \vec{u}^B$, $\overrightarrow{AC} = \vec{u}^C - \vec{u}^A$ i $\overrightarrow{BA} = \vec{u}^A - \vec{u}^B$, pa tražena nejednakost sledi iz teoreme 6.2 kada uzmemo da je $\vec{u} = \vec{u}^C - \vec{u}^A$ a $\vec{v} = \vec{u}^A - \vec{u}^B$. ⊣

TVRĐENJE 6.4 (UGAO IZMEĐU VEKTORA). *Za ugao* θ *između ne-nula vektora* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^n$ *važi* $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

DOKAZ.



Po kosinusnoj teoremi imamo
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$.
Po definiciji norme i svojstvima (1) i (2) skalarnog proizvoda, leva strana je jednaka
$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$.
Znači $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$. ⊣

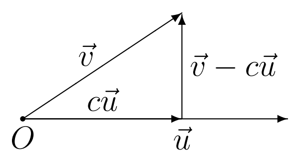
DEFINICIJA. Vektori $\vec{u},\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ su *ortogonalni* kada je $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Oznaka je $\vec{u}\perp\vec{v}$.

TVRĐENJE 6.5. *Ako je $\vec{u}\perp\vec{v}$, onda je $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.*

DOKAZ. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.

TVRĐENJE 6.6. *Za $\vec{u}\neq\vec{0}$, broj $c = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ je jedinstven skalar sa svojstvom $(\vec{v}-c\vec{u})\perp\vec{u}$.*

DOKAZ.



$$(\vec{v}-c\vec{u})\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u}-c\|\vec{u}\|^2=0 \Leftrightarrow c=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$ ⊣

Broj $c=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ je *Furijeov koeficijent* vektora $\vec{v}$ u odnosu na vektor $\vec{u}$.

DEFINICIJA. *Ortogonalna projekcija* vektora $\vec{v}$ na ne-nula vektor $\vec{u}$, u oznaci $proj(\vec{v},\vec{u})$, je vektor $c\vec{u}$, gde je c Furijeov koeficijent vektora $\vec{v}$ u odnosu na vektor $\vec{u}$.

TEOREMA 6.7. *Neka su $\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_k$ međusobno ortogonalni, ne-nula vektori u $\mathbf{R}^n$. Neka je $\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ i neka je $c_i=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|^2}$, za $1\leq i\leq k$. Tada za proizvoljnu k-torku $\langle a_1,\ldots,a_k\rangle$ realnih brojeva važi:*

$$\|\vec{v}-\sum_{i=1}^{k}c_i\vec{w}_i\| \leq \|\vec{v}-\sum_{i=1}^{k}a_i\vec{w}_i\|.$$

DOKAZ. Imamo da za svako $1\leq j\leq k$, važi

$$(\vec{v}-\sum_{i=1}^{k}c_i\vec{w}_i)\cdot\vec{w}_j = \vec{v}\cdot\vec{w}_j - c_j\|\vec{w}_j\|^2 = 0,$$

odakle sledi da je

$$(\vec{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i) \cdot \sum_{i=1}^{k}(c_i - a_i)\vec{w}_i = 0,$$

pa je

$$(\vec{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i) \perp \sum_{i=1}^{k}(c_i - a_i)\vec{w}_i.$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} \|\vec{v} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} a_i\vec{w}_i\|^2 &= \|\vec{v} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i + \textstyle\sum_{i=1}^{k}(c_i - a_i)\vec{w}_i\|^2 \\ &= \|\vec{v} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i\|^2 + \|\textstyle\sum_{i=1}^{k}(c_i - a_i)\vec{w}_i\|^2, \quad \text{po tv. 6.5} \\ &\geq \|\vec{v} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{w}_i\|^2. \end{aligned}$$ ⊣

Geometrijsku interpretaciju teoreme 6.7 ćete naći na kraju sekcije 7.2.

Definicija. Skup vektora $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ je *ortonormiran* kada su svi vektori u njemu međusobno ortogonalni i svaki ima normu 1, to jest

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq j \\ 1, & \text{za } i = j \end{cases}$$

Teorema 6.8 (Besel). *Neka je $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ ortonormiran skup vektora iz $\mathbf{R}^n$. Neka je $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ i neka je $c_i = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|^2}$, za $1 \leq i \leq k$. Tada važi:*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i^2 \leq \|\vec{v}\|^2.$$

dokaz.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\vec{v} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{u}_i) \cdot (\vec{v} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{u}_i) \\ &= \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{v} \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{u}_i) + (\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{u}_i) \cdot (\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i\vec{u}_i) \\ &= \|\vec{v}\|^2 - 2\textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i^2 + \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i^2, \quad \text{jer je } \vec{v} \cdot \vec{u}_i = c_i, \\ &= \|\vec{v}\|^2 - \textstyle\sum_{i=1}^{k} c_i^2. \end{aligned}$$ ⊣

Geometrijsku interpretaciju teoreme 6.8 ćete naći na kraju sekcije 7.2.

Prethodna tvrđenja važe u svakom realnom unitarnom prostoru u kome su norma i ortogonalnost vektora definisani pomoću skalarnog proizvoda na isti način kao kod $\mathbf{R}^n$.

§6.3. Ortogonalna projekcija vektora na pravu

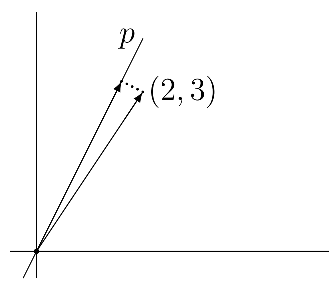
Podsetimo se da je ortogonalna projekcija vektora $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ na ne-nula vektor $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$ definisana kao

$$proj(\vec{v}, \vec{u}) =_{df} \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.$$

Definicija. *Ortogonalna projekcija* vektora $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ na linearni omotač ne-nula vektora $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$, za $n \in \{2, 3\}$, u oznaci $proj_{[\{\vec{u}\}]}(\vec{v})$ je definisana kao $proj(\vec{v}, \vec{u})$. Iz osobina skalarnog proizvoda i norme sledi da za svaki ne-nula vektor $\vec{u}$ i za svako $c \neq 0$, važi $proj(\vec{v}, \vec{u}) = proj(\vec{v}, c\vec{u})$, pa $proj_{[\{\vec{u}\}]}(\vec{v})$ zavisi od potprostora $[\{\vec{u}\}]$ a ne od izbora ne-nula vektora $\vec{u}$ u njemu.

Primer. $proj_{[\{\vec{e}_2\}]}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \dfrac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$

Primer. Odrediti orogonalnu projekciju vektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ na pravu $p\colon y = 2x$.



Prava p je $[\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}]$, pa imamo:

$$proj_{[\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}]}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}.$$

Primer. Drugi pogled na prethodni primer: šine su na pravoj zadatoj sa $y = 2x$ a vetar duva konstantnom brzinom zadatom vektorom $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Kojom brzinom će se kretati voz po tim šinama ako nema trenja?

§7. Sedma nedelja

§7.1. Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije

TEOREMA 7.1. *Ako su ne-nula vektori* $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \in \mathbf{R}^n$ *međusobno ortogonalni, onda je* $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ *linearno nezavisan.*

DOKAZ.

$$\begin{aligned} & c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_k\vec{w}_k = \vec{0} \quad / \cdot \vec{w}_i \\ & c_i(\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i) = 0 \\ & c_i = 0, \qquad\qquad\qquad \text{jer } \vec{w}_i \text{ nije nula vektor pa je } \vec{w}_i \cdot \vec{w}_i > 0. \end{aligned}$$

POSLEDICA 7.2. *Ako je* W *neki* k*-dimenzionalni potprostor od* $\mathbf{R}^n$ *i ako su ne-nula vektori* $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \in W$ *međusobno ortogonalni, onda je* $\langle \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \rangle$ *baza za* W*.*

DOKAZ. Direktno iz teoreme 7.1 i leme 4.6.

DEFINICIJA. *Ortogonalna baza* vektorskog prostora je baza tog prostora u kojoj su svi vektori međusobno ortogonalni.

TVRĐENJE 7.3. *Neka je* $\mathcal{B} = \langle \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k \rangle$ *ortogonalna baza za* W*. Ako je* $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$*, onda za svako* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *važi da je* c_i *Furijeov koeficijent vektora* $\vec{w}$ *u odnosu na vektor* $\vec{w}_i$*.*

DOKAZ.

$$\begin{aligned} & \vec{w} = c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_k\vec{w}_k \quad / \cdot \vec{w}_i \\ & \vec{w} \cdot \vec{w}_i = c_i(\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i). \end{aligned}$$ ⊣

PRIMER. $\langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \rangle$ je ortogonalna baza za $\mathbf{R}^n$.

PRIMER. $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ je neortogonalna baza za $\mathbf{R}^2$. Možemo je prevesti na ortogonalnu bazu $\mathcal{K} = \langle \vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2 \rangle$ na sledeći način.

Neka je $\vec{\kappa}_1$ prvi vektor baze $\mathcal{B}$, to jest $\vec{\kappa}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Neka je $\vec{\kappa}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - proj(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lako se proveri da su ne-nula vektori $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ međusobno ortogonalni (ovo je i posledica tvrđenja 6.6) pa je $\mathcal{K}$, po posledici 7.2, ortogonalna baza za $\mathbf{R}^2$.

Primer. $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \rangle$ je neortogonalna baza za $\mathbf{R}^3$. Možemo je prevesti na ortogonalnu bazu $\mathcal{K} = \langle \vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2, \vec{\kappa}_3 \rangle$ na sledeći način.

$$\vec{\kappa}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{\kappa}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - proj(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-2/3\\4/3\\-2/3\end{pmatrix},$$

$$\vec{\kappa}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} - proj(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) - proj(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2/3\\4/3\\-2/3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Teorema 7.4 (Gram-Šmitova ortogonalizacija). *Ako je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$, za $k \geq 1$, baza potprostora od $\mathbf{R}^n$, onda vektori $\vec{\kappa}_1 = \vec{\beta}_1$, $\vec{\kappa}_2 = \vec{\beta}_2 - proj(\vec{\beta}_2, \vec{\kappa}_1), \ldots,$ $\vec{\kappa}_k = \vec{\beta}_k - proj(\vec{\beta}_k, \vec{\kappa}_1) - \ldots - proj(\vec{\beta}_k, \vec{\kappa}_{k-1})$ daju ortogonalnu bazu tog potprostora.*

dokaz. Indukcijom po $k \geq 1$ ćemo pokazati da su $\vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k$ međusobno ortogonalni, ne-nula vektori iz $[\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k\}]$. Ovo je dovoljno da po posledici 7.2 zaključimo da je $\langle \vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k \rangle$ ortogonalna baza za $[\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k\}]$.

(**baza indukcije**) Neka je $k = 1$. Imamo da je $\vec{\kappa}_1 = \vec{\beta}_1$ pa sve očigledno važi.

(**induktivni korak**) Neka je $k > 1$. Po induktivnoj pretpostavci imamo da su $\vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_{k-1}$ međusobno ortogonalni, ne-nula vektori iz $[\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_{k-1}\}]$.

Ako je $\vec{\kappa}_k = \vec{0}$ onda je $\vec{\beta}_k \in [\{\vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_{k-1}\}] \subseteq [\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_{k-1}\}]$, što je suprotno pretpostavci da je $\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k\}$ linearno nezavisan.

Iz $\vec{\kappa}_k = \vec{\beta}_k - c_1\vec{\kappa}_1 - \ldots - c_k\vec{\kappa}_{k-1}$ i $\vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_{k-1} \in [\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_{k-1}\}]$ sledi da je $\vec{\kappa}_k \in [\{\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k\}]$.

Još treba proveriti da za svako $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ važi $\vec{\kappa}_k \perp \vec{\kappa}_i$.

$$\begin{aligned}\vec{\kappa}_k \cdot \vec{\kappa}_i &= \vec{\beta}_k \cdot \vec{\kappa}_i - c_i(\vec{\kappa}_i \cdot \vec{\kappa}_i) \\ &= \vec{\beta}_k \cdot \vec{\kappa}_i - \frac{\vec{\beta}_k \cdot \vec{\kappa}_i}{\vec{\kappa}_i \cdot \vec{\kappa}_i}(\vec{\kappa}_i \cdot \vec{\kappa}_i) = 0.\end{aligned}$$ ⊣

Definicija. Baza $\mathcal{B}$ je *ortonormirana* kada je $\underline{\mathcal{B}}$ ortonormiran skup vektora.

Tvrđenje 7.5. *Ako je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$ ortonormirana baza i $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_k\vec{\beta}_k$, onda je $\|\vec{v}\| = \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_k^2}$.*

dokaz. $\|\vec{v}\| = \sqrt{(c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_k\vec{\beta}_k) \cdot (c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_k\vec{\beta}_k)} = \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_k^2}.$ ⊣

Svaku ortogonalnu bazu prevodimo u ortonormiranu množeći svaki njen vektor recipročnom vrednošću norme tog vektora.

Primer. U prethodnom primeru dobili smo da je

$$\mathcal{K} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

ortogonalna baza za $\mathbf{R}^3$. Po gornjem uputstvu dobijamo da je

$$\mathcal{C} = \langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \rangle$$

ortonormirana baza za $\mathbf{R}^3$.

§7.2. Ortogonalna projekcija vektora na potprostor

Definicija. Neka je U potprostor od $\mathbf{R}^n$. Definišemo njegov *ortogonalni komplement* $U^\perp$ kao

$$U^\perp =_{df} \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n \mid \vec{v} \text{ je ortogonalan sa svakim vektorom iz } U\}.$$

Lema 7.6. *Ako je vektor ortogonalan sa svakim vektorom nekog skupa, onda je taj vektor ortogonalan i sa svakim vektorom iz linearnog omotača tog skupa. Obrat važi trivijalno.*

dokaz. Ako je $\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0, \ldots, \vec{v} \cdot \vec{u}_k = 0$, onda je i $\vec{v} \cdot (c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_k\vec{u}_k) = c_1(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) + \ldots + c_k(\vec{v} \cdot \vec{u}_k) = 0$. ⊣

Posledica 7.7. *Ako je svaki vektor skupa S ortogonalan sa svakim vektorom skupa T, onda je i svaki vektor iz $[S]$ ortogonalan sa svakim vektorom iz $[T]$.*

dokaz. Po lemi 7.6 dobijamo da je svaki vektor skupa S ortogonalan sa svakim vektorom iz $[T]$. Pošto je relacija ortogonalnosti simetrična, opet po lemi 7.6 zaključujemo da je svaki vektor iz $[T]$ ortogonalan sa svakim vektorom iz $[S]$. Još jednom iskoristiti simetričnost ortogonalnosti. ⊣

Primer. Odrediti ortogonalni komplement ravni

$$P = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 3x + 2y - z = 0\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Po lemi 7.6, $P^\perp = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3 \mid \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \;\wedge\; \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\}$. Dakle,

$$\begin{aligned} P^{\perp} &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 3z = 0 \quad \wedge \quad y + 2z = 0 \} \\ &= \{ \begin{pmatrix} -3z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R} \} = [\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \}]. \end{aligned}$$

TVRĐENJE 7.8. *Za potprostor U od $\mathbf{R}^n$ važi da je $U^{\perp}$ takođe potprostor od $\mathbf{R}^n$ i još važi $\mathbf{R}^n = U \oplus U^{\perp}$.*

DOKAZ. Prvo ćemo pokazati da je $U^{\perp}$ potprostor od $\mathbf{R}^n$. Pošto je $\vec{0}$ ortogonalan sa svakim vektorom iz U, to je $\vec{0} \in U^{\perp}$, pa je $U^{\perp}$ neprazan. Neka su $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in U^{\perp}$ i neka je $\vec{u}$ proizvoljan vektor iz U. Po lemi 7.6 imamo da je $\vec{u} \perp (c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2)$ pa zaključujemo da je $c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 \in U^{\perp}$. Po tvrđenju 3.1 sledi da je $U^{\perp}$ potprostor od $\mathbf{R}^n$.

Još treba pokazati da je $\mathbf{R}^n = U \oplus U^{\perp}$. Neka je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$ baza za U. Proširimo je po tvrđenju 4.8 do baze $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k, \vec{\beta}_{k+1}, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ za $\mathbf{R}^n$. Primenimo Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije i neka je

$$\langle \vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k, \vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n \rangle$$

dobijena ortogonalna baza za $\mathbf{R}^n$, pri čemu je $\langle \vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k \rangle$ ortogonalna baza za U. Pokažimo da je $\langle \vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n \rangle$ baza za $U^{\perp}$ a za to je po teoremi 7.1 dovoljno pokazati da je $[\{\vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n\}] = U^{\perp}$. Po posledici 7.7 imamo da je svaki vektor iz $[\{\vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n\}]$ ortogonalan sa svakim vektorom iz U. Dakle imamo $[\{\vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n\}] \subseteq U^{\perp}$. Sa druge strane, neka je $\vec{w}$ proizvoljan vektor iz $U^{\perp}$ i neka je

$$\vec{w} = c_1\vec{\kappa}_1 + \ldots + c_k\vec{\kappa}_k + c_{k+1}\vec{\kappa}_{k+1} + \ldots + c_n\vec{\kappa}_n$$

njegov razvoj u dobijenoj bazi od $\mathbf{R}^n$. Po tvrđenju 7.3 imamo da je $c_1 = \ldots = c_k = 0$, pa je $\vec{w} \in [\{\vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n\}]$. Dakle, $U^{\perp} \subseteq [\{\vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n\}]$, pa je $U^{\perp} = [\{\vec{\kappa}_{k+1}, \ldots, \vec{\kappa}_n\}]$. Po lemi 5.8 imamo da je $\mathbf{R}^n = U \oplus U^{\perp}$. ⊣

Neka je U potprostor od $\mathbf{R}^n$. Po tvrđenju 7.8 i lemi 5.8 imamo da za svako $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ postoje jedinstveni $\vec{u} \in U$ i $\vec{w} \in U^{\perp}$ takvi da je $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$.

DEFINICIJA. *Ortogonalna projekcija* vektora $\vec{v}$ na U, u oznaci $proj_U(\vec{v})$, je jedinstveni vektor $\vec{u} \in U$ takav da je $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ za neko $\vec{w} \in U^{\perp}$. Vektor $\vec{w} = \vec{v} - proj_U(\vec{v})$ je *ortogonalna dopuna* vektora $\vec{v}$ u odnosu na U. *Ugao između vektora i potprostora* je ugao između tog vektora i njegove ortogonalne projekcije na taj potprostor.

Postupak određivanja ortogonalne projekcije i ortogonalne dopune vektora $\vec{v}$ na potprostor U.

1. Odrediti ortogonalnu bazu $\langle \vec{\kappa}_1, \ldots, \vec{\kappa}_k \rangle$ za U.
2. Odrediti Furijeove koeficijente $c_i = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{\kappa}_i}{\vec{\kappa}_i \cdot \vec{\kappa}_i}$.

3. $proj_U(\vec{v}) = c_1\vec{\kappa}_1 + \ldots + c_k\vec{\kappa}_k$.
4. Ortogonalna dopuna vektora $\vec{v}$ u odnosu na U je vektor $\vec{v} - proj_U(\vec{v})$.

Sada možemo dati preformulacije teorema 6.7 i 6.8.

Teorema 6.7 (preformulacija). *Norma ortogonalne dopune vektora $\vec{v}$ u odnosu na U je manja ili jednaka od $\|\vec{v} - \vec{u}\|$ za proizvoljan vektor $\vec{u} \in U$. To jest, rastojanje tačke do njene ortogonalne projekcije na potprostor je manje ili jednako od rastojanja te tačke do bilo koje tačke tog potprostora.*

Teorema 6.8 (preformulacija). *Norma (dužina) ortogonalne projekcije vektora na potprostor manja je ili jednaka od norme (dužine) tog vektora.*

§8. Osma nedelja

§8.1. Linearna preslikavanja, izomorfizmi

Vektorski prostor $\mathbf{R}^3$ i vektorski prostor vektora u euklidskom prostoru smo izjednačili. Takođe skoro da ne razlikujemo prostor $\mathbf{R}^n$ i prostor $\mathbf{R}^n_v = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$. U primerima smo videli da na sličan način ,,poistovećujemo" prostore $\mathbf{R}^4$ i $\mathcal{P}_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in R\}$. U ovoj sekciji ćemo se baviti pojmom izomorfizma vektorskih prostora koji stoji iza ovih izjednačavanja.

Definicija. *Linearno preslikavanje (homomorfizam)* između vektorskih prostora V i W je preslikavanje $f \colon V \to W$ takvo da za svako $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ i $r \in \mathbf{R}$ važi:

$$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2) \quad \text{i} \quad f(r\vec{v}_1) = rf(\vec{v}_1),$$

to jest f čuva strukturu vektorskog prostora.

Tvrđenje 8.1. *Preslikavanje $f : V \to W$ je linearno ako za svako $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ i $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ važi $f(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = c_1 f(\vec{v}_1) + c_2 f(\vec{v}_2)$.*

dokaz. Za $c_1 = c_2 = 1$ dobijamo prvo svojstvo a za $c_1 = r$ i $c_2 = 0$ dobijamo drugo svojstvo. $\dashv$

Definicija. Linearno preslikavanje je *izomorfizam* kada je ono bijekcija (postoji preslikavanje koje mu je istovremeno i levi i desni inverz). Ako postoji izomorfizam između V i W onda kažemo da su oni *izomorfni* i pišemo $V \cong W$.

Primer 1. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \rangle$ baza vektorskog prostora V. U odeljku 4.1 smo videli da reprezentacija $Rep_{\mathcal{B}}$ dodeljuje svakom vektoru iz V tačno jedan vektor iz $\mathbf{R}^n$. Pokažimo da je $Rep_{\mathcal{B}}$ izomorfizam. Neka je $\vec{u} = c_1\vec{\beta}_1 + \dots + c_n\vec{\beta}_n$ i $\vec{v} = d_1\vec{\beta}_1 + \dots + d_n\vec{\beta}_n$. Tada je $a\vec{u} + b\vec{v} = (ac_1 + bd_1)\vec{\beta}_1 + \dots + (ac_n + bd_n)\vec{\beta}_n$, pa je

$$Rep_{\mathcal{B}}(a\vec{u} + b\vec{v}) = \begin{pmatrix} ac_1 + bd_1 \\ \vdots \\ ac_n + bd_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = a\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{u}) + b\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}),$$

što znači da je $Rep_{\mathcal{B}}$ homomorfizam. Lako se pokazuje da je preslikavanje iz $\mathbf{R}^n$ u V zadato sa

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto c_1\vec{\beta}_1 + \dots + c_n\vec{\beta}_n$$

njegov inverz.

Primer. Neka je $V = \{u : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid u(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta,\ \ a, b \in \mathbf{R}\}$. U trećem primeru iz sekcije 4.1 smo pokazali da je $\mathcal{B} = \langle\cos\theta, \sin\theta\rangle$ baza za V. Pokažimo da je $V \cong \mathbf{R}^2$. Definišimo $f\colon V \to \mathbf{R}^2$ sa

$$f(c_1\cos\theta + c_2\sin\theta) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

to jest $f = Rep_{\mathcal{B}}$. Po prethodnom primeru f je izomorfizam između V i $\mathbf{R}^2$.

Definicija. *Automorfizam* je izomorfizam vektorskog prostora sa samim sobom.

Primer. Neka je $f\colon \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$ zadato sa $f(p(x)) = p(x-1)$. Prvo ćemo pokazati da je f linearno preslikavanje.

$$\begin{aligned} f(p(x)+q(x)) &= a_0 + b_0 + (a_1+b_1)(x-1) + \ldots + (a_5+b_5)(x-1)^5 \\ &= a_0 + a_1(x-1) + \ldots + a_5(x-1)^5 + b_0 + b_1(x-1) + \ldots + b_5(x-1)^5 \\ &= f(p(x)) + f(q(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(rp(x)) &= ra_0 + ra_1(x-1) + \ldots + ra_5(x-1)^5 \\ &= r(a_0 + a_1(x-1) + \ldots + a_5(x-1)^5) \\ &= rf(p(x)). \end{aligned}$$

Ako $f^{-1} : \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$ zadamo sa $f^{-1}(p(x)) = p(x+1)$, onda se lako proveri da je $f^{-1} \circ f(p(x)) = p(x) = f \circ f^{-1}(p(x))$, pa je f bijekcija. Dakle, f je automorfizam.

Lema 8.2. *Linearno preslikavanje preslikava nula vektor u nula vektor.*

dokaz. $f(\vec{0}) = f(0\vec{v}) = 0f(\vec{v}) = \vec{0}$.

Lema 8.3. *Inverz izomorfizma je izomorfizam.*

dokaz. Po tvrđenju 8.1, dovoljno je pokazati da $f^{-1}\colon W \to V$ zadovoljava $f^{-1}(c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2) = c_1f^{-1}(\vec{w}_1) + c_2f^{-1}(\vec{w}_2)$. Pošto je f bijekcija, ovo je ekvivalentno sa $f(f^{-1}(c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2)) = f(c_1f^{-1}(\vec{w}_1) + c_2f^{-1}(\vec{w}_2))$, što je tačno jer se i leva i desna strana svode na $c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2$ (za desnu stranu koristimo tvrđenje 8.1). $\dashv$

Komentar. *Linearno preslikavanje $f\colon V \to W$ je izomorfizam akko postoji linearno preslikavanje $g\colon W \to V$ takvo da je $g \circ f = 1_V$ i $f \circ g = 1_W$.*

Lema 8.4. *Kompozicija linearnih preslikavanja je linearno preslikavanje.*

dokaz. Neka su $h\colon V \to U$ i $g\colon U \to W$ linearna preslikavanja. Tada važi:

$$\begin{aligned} g\circ h(c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2) &= g(h(c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2)) = g(c_1h(\vec{v}_1)+c_2h(\vec{v}_2)) \\ &= c_1g(h(\vec{v}_1))+c_2g(h(\vec{v}_2)) \\ &= c_1\, g\circ h(\vec{v}_1)+c_2\, g\circ h(\vec{v}_2). \end{aligned}$$ ⊣

Teorema 8.5. *Relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije.*

dokaz. Identično preslikavanje na vektorskom prostoru je izomorfizam pa je $\cong$ refleksivna. Koristeći lemu 8.3 pokazujemo da je relacija $\cong$ simetrična. Pošto je kompozicija bijekcija bijekcija i kompozicija linearnih preslikavanja je linearno preslikavanje, to je relacija $\cong$ i tranzitivna. ⊣

Teorema 8.6. *Vektorski prostori su izomorfni akko imaju istu dimenziju.*

dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\mathcal{B}=\langle\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_n\rangle$ baza za V. Neka je $f:V\to W$ izomorfizam. Pokazaćemo da je $f\mathcal{B}=\langle f(\vec{\beta}_1),\ldots,f(\vec{\beta}_n)\rangle$ baza za W. Pošto u $\mathcal{B}$ nema ponavljanja i f je **1-1** to ni u $f\mathcal{B}$ nema ponavljanja.

Pokažimo da je $[\underline{f\mathcal{B}}]=W$. Neka je $\vec{w}\in W$. Pošto je f **na** to postoji $\vec{v}\in V$ takav da $\vec{w}=f(\vec{v})$. Neka je $\vec{v}=c_1\vec{\beta}_1+\ldots+c_n\vec{\beta}_n$. Pošto je f linearno preslikavanje, imamo da je $\vec{w}=c_1f(\vec{\beta}_1)+\ldots+c_nf(\vec{\beta}_n)$.

Još treba da pokažemo da je $\underline{f\mathcal{B}}$ linearno nezavisan.

$$\begin{aligned} c_1f(\vec{\beta}_1)+\ldots+c_nf(\vec{\beta}_n)=\vec{0} \text{ akko } & f(c_1\vec{\beta}_1+\ldots+c_n\vec{\beta}_n)=f(\vec{0}),\ f \text{ linearno},\\ \text{akko } & c_1\vec{\beta}_1+\ldots+c_n\vec{\beta}_n=\vec{0},\ f \text{ je } \mathbf{1\text{-}1},\\ \text{akko } & c_1=\ldots=c_n=0,\ \underline{\mathcal{B}} \text{ je lin. nez.} \end{aligned}$$

Pošto je $f\mathcal{B}$ baza za W dužine n, to je $dim(W)=n=dim(V)$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da su prostori V i W dimenzije n. Po prvom primeru oba su izomorfna sa $\mathbf{R}^n$ pa su po teoremi 8.5 i međusobno izomorfni. ⊣

Napomena 8.7. *Svaki n-dimenzionalni vektorski prostor je izomorfan sa $\mathbf{R}^n$. Ako je $\mathcal{B}=\langle\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_n\rangle$ baza za V onda je $Rep_{\mathcal{B}}$ izomorfizam između V i $\mathbf{R}^n$.*

Tvrđenje 8.8. *Izomorfizam čuva linearnu nezavisnost.*

dokaz. Kao deo dokaza teoreme 8.6 u kome smo pokazali da je $\underline{f\mathcal{B}}$ linearno nezavisan. ⊣

Posledica 8.9. *Linearna nezavisnost skupa vektora se može proveriti kroz linearnu nezavisnost skupa njihovih reprezentacija u odnosu na proizvoljnu bazu.*

Primer. Neka je $U=[\{x^2+x^4, 2x^2+3x^4, -x^2-3x^4\}]$ potprostor od $\mathcal{P}_4$. Odrediti bazu za U.

Ako sa $\mathcal{B}$ označimo „standardnu” bazu $\langle 1, x, x^2, x^3, x^4\rangle$ za $\mathcal{P}_4$, onda je

$$Rep_{\mathcal{B}}(x^2+x^4) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, Rep_{\mathcal{B}}(2x^2+3x^4) = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, Rep_{\mathcal{B}}(-x^2-3x^4) = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\-3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Zatim primenimo tehniku iz sekcije 5.1

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\0&0&2&0&3\\0&0&-1&0&-3\end{pmatrix} \xrightarrow[\rho_1+\rho_3]{-2\rho_1+\rho_2} \xrightarrow{2\rho_2+\rho_3} \begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

i dobijemo da je $\langle x^2+x^4, x^4\rangle$ baza za U.

§8.2. Linearna preslikavanja (homomorfizmi)

Teorema 8.10. *Linearno preslikavanje je određeno svojim dejstvom na bazi: ako je $\langle \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n\rangle$ baza za V i $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ ne nužno različiti vektori iz W, onda postoji jedinstveno linearno preslikavanje $f\colon V \to W$ takvo da je $f(\vec{\beta}_i) = \vec{w}_i$.*

dokaz. Za $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$, definišimo $f(\vec{v}) =_{df} c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{w}_n$. Preslikavanje $f: V \to W$ je dobro definisano po teoremi 4.1 (svaki $\vec{v} \in V$ se na jedinstven način zapisuje kao linearna kombinacija vektora baze).

Pokažimo da je f linearno preslikavanje i za to koristimo tvrđenje 8.1. Neka je $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$ i $\vec{u} = d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_n\vec{\beta}_n$.

$$\begin{aligned}
f(a\vec{v}+b\vec{u}) &= f(a(c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n) + b(d_1\vec{\beta}_1 + \ldots + d_n\vec{\beta}_n))\\
&= f((ac_1+bd_1)\vec{\beta}_1 + \ldots + (ac_n+bd_n)\vec{\beta}_n)\\
&=_{df} (ac_1+bd_1)\vec{w}_1 + \ldots + (ac_n+bd_n)\vec{w}_n\\
&= a(c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{w}_n) + b(d_1\vec{w}_1 + \ldots + d_n\vec{w}_n)\\
&= af(\vec{v}) + bf(\vec{u}).
\end{aligned}$$

Još treba dokazati jedinstvenost. Ako je $g\colon V \to W$ linearno preslikavanje takvo da je $g(\vec{\beta}_i) = \vec{w}_i$, onda je

$$\begin{aligned}
g(\vec{v}) &= g(c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n)\\
&= c_1 g(\vec{\beta}_1) + \ldots + c_n g(\vec{\beta}_n)\\
&= c_1\vec{w}_1 + \ldots + c_n\vec{w}_n\\
&= f(\vec{v}).\ \text{Dakle, } f = g.
\end{aligned}$$

⊣

PRIMER. Neka je $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zadato sa $h(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Onda je

$$h(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}) = h(3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Najčešće ovakvo h zapisujemo kao $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix} -x-4y \\ x+4y \end{pmatrix}$.

Homomorfizmi se mogu linearno kombinovati. Na primer, neka su homomorfizmi $f, g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zadati sa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 2x \\ 3x-2y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{g}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 5x \end{pmatrix}.$$

Tada je linearna kombinacija $5f - 2g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zadata sa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 10x \\ 5x-10y \end{pmatrix}.$$

DEFINICIJA. Neka je $\mathcal{L}(V, W) =_{df} \{f \mid f\colon V \to W \text{ je linearno preslikavanje}\}$.

DEFINICIJA. Za $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ definišemo $f + g : V \to W$ i $rf : V \to W$ kao $(f + g)(\vec{v}) =_{df} f(\vec{v}) + g(\vec{v})$ odnosno $(rf)(\vec{v}) =_{df} rf(\vec{v})$ (videti sedmi primer u sekciji 2.2).

LEMA 8.11. *Ako su f i g u $\mathcal{L}(V, W)$, onda su $f + g$ i rf takođe u $\mathcal{L}(V, W)$.*

DOKAZ. Koristeći tvrđenje 8.1 pokazaćemo da su $f + g$ i rf linearna preslikavanja.

$$\begin{aligned}(f+g)(a\vec{v}+b\vec{u}) &= f(a\vec{v}+b\vec{u}) + g(a\vec{v}+b\vec{u}) \\ &= af(\vec{v}) + bf(\vec{u}) + ag(\vec{v}) + bg(\vec{u}) \\ &= a(f+g)(\vec{v}) + b(f+g)(\vec{u}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(rf)(a\vec{v}+b\vec{u}) &= rf(a\vec{v}+b\vec{u}) \\ &= raf(\vec{v}) + rbf(\vec{u}) \\ &= a(rf)(\vec{v}) + b(rf)(\vec{u}).\end{aligned}$$

⊣

TVRĐENJE 8.12. *$\mathcal{L}(V, W)$ je vektorski prostor; to je potprostor od W^V (prostora svih funkcija iz V u W; videti sedmi primer u sekciji 2.2).*

DOKAZ. Konstantna funkcija koja slika sve vektore iz V u $\vec{0}_W$ je homomorfizam pa je $\mathcal{L}(V, W)$ neprazan. Dakle, tvrđenje sledi po tvrđenju 3.1, uz pomoć leme 8.11. ⊣

§8.3. Slika i jezgro linearnog preslikavanja

LEMA 8.13. *Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje i neka je U potprostor od V. Tada je $h(U) = \{h(\vec{u}) \mid \vec{u} \in U\}$ potprostor od W. Specijalno $h(V)$ je potprostor od W.*

DOKAZ. U je neprazan pa je $h(U)$ takođe neprazan. Neka su $h(\vec{u}_1)$ i $h(\vec{u}_2)$ iz $h(U)$. Tada je

$$a_1 h(\vec{u}_1) + a_2 h(\vec{u}_2) = h(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2) \in h(U),$$

pa je $h(U)$, po tvrđenju 3.1, potprostor od W. $\dashv$

DEFINICIJA. *Slika* homomorfizma $h\colon V \to W$ u oznaci $Im(h)$ (oznaka u [2] je $\mathcal{R}(h)$) je potprostor $h(V) = \{h(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$ od W. Dimenzija od $Im(h)$ je *rang* od h u oznaci $rank(h)$.

PRIMER. Neka je $h = \frac{d}{dx}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ zadato sa $h(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$. Lako se proveri da je h linearno preslikavanje i da je $Im(h) = \{r + sx + tx^2 \mid r, s, t \in \mathbf{R}\} = \mathcal{P}_2$ (trivijalno, $Im(h) \subseteq \{r + sx + tx^2 \mid r, s, t \in \mathbf{R}\}$ a obrnuta inkluzija važi zato što je npr. $h(a_0 + rx + \frac{s}{2}x^2 + \frac{t}{3}x^3) = r + sx + tx^2$). Pošto je dimenzija od $\mathcal{P}_2$ jednaka 3 to je $rank(h) = 3$.

PRIMER. Neka je $h\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{P}_3$ zadato sa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{h}{\mapsto} (a + b + 2d) + cx^2 + cx^3.$$

Lako se proveri da je h linearno preslikavanje i da je $Im(h) = \{r + sx^2 + sx^3 \mid r, s \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}^2$ (trivijalno je da $Im(h) \subseteq \{r + sx^2 + sx^3 \mid r, s \in \mathbf{R}\}$ a obrnuta inkluzija važi zato što je npr.

$$\begin{pmatrix} \frac{r}{4} & \frac{r}{4} \\ s & \frac{r}{4} \end{pmatrix} \stackrel{h}{\mapsto} r + sx^2 + sx^3).$$

Pošto je $\langle 1, x^2 + x^3 \rangle$ baza za $Im(h)$, to je $rank(h) = 2$.

LEMA 8.14. *Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje i neka je U potprostor od W, onda je $h^{-1}(U) = \{\vec{v} \in V \mid h(\vec{v}) \in U\}$ potprostor od V.*

DOKAZ. Pošto je $h(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \in U$, to je $\vec{0}_V \in h^{-1}(U)$ pa je $h^{-1}(U)$ neprazan. Neka su $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ iz $h^{-1}(U)$. Tada je

$$h(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) = a_1 h(\vec{v}_1) + a_2 h(\vec{v}_2) \in U,$$

pa je i $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \in h^{-1}(U)$ te je $h^{-1}(U)$, po tvrđenju 3.1, potprostor od V. $\dashv$

DEFINICIJA. *Kernel* (*jezgro*) homomorfizma $h\colon V \to W$, u oznaci $Ker(h)$ (oznaka u [2] je $\mathcal{N}(h)$) je potprostor $h^{-1}(\{\vec{0}_W\}) = \{\vec{v} \in V \mid h(\vec{v}) = \vec{0}\}$. Dimenzija od $Ker(h)$ je *defekt* homomorfizma h.

Primer. U prethodnom primeru za $h\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{P}_3$ imamo da je

$$\begin{aligned} Ker(h) &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+2d=0, c=0\} = \{\begin{pmatrix} -b-2d & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b,d \in \mathbf{R}\} \\ &= \{b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b,d \in \mathbf{R}\}, \end{aligned}$$

pa je defekt od h jednak 2.

Teorema 8.15. *Za linearno preslikavanje $h\colon V \to W$ važi da je*

$$dim(V) = dim(Im(h)) + dim(Ker(h)).$$

dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k \rangle$ baza za $Ker(h)$. Po tvrđenju 4.8, $\mathcal{B}$ se može proširiti do baze $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_k, \vec{\beta}_{k+1}, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ za V. Tvrđenje će važiti ako pokažemo da je $\mathcal{D} = \langle h(\vec{\beta}_{k+1}), \ldots, h(\vec{\beta}_n) \rangle$ baza za $Im(h)$. Po lemi 5.8 imamo da je

$$(*) \qquad V = Ker(h) \oplus [\{\vec{\beta}_{k+1}, \ldots, \vec{\beta}_n\}].$$

Pokažimo prvo da u $\mathcal{D}$ nema ponavljanja. Ako je $h(\vec{\beta}_{k+i}) = h(\vec{\beta}_{k+j})$ onda je $\vec{\beta}_{k+i} - \vec{\beta}_{k+j} \in Ker(h)$ a zbog $(*)$ je $Ker(h) \cap [\{\vec{\beta}_{k+1}, \ldots, \vec{\beta}_n\}] = \vec{0}$ pa je $\vec{\beta}_{k+i} = \vec{\beta}_{k+j}$ što daje $i = j$ jer su svi $\vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n$ međusobno različiti.

Pokažimo da je $\underline{\mathcal{D}}$ linearno nezavisan. Ako je

$$c_{k+1}h(\vec{\beta}_{k+1}) + \ldots + c_n h(\vec{\beta}_n) = \vec{0},$$

onda je $c_{k+1}\vec{\beta}_{k+1} + \ldots + c_n\vec{\beta}_n \in Ker(h)$. Po uslovu $(*)$ zaključujemo da je $c_{k+1}\vec{\beta}_{k+1} + \ldots + c_n\vec{\beta}_n = \vec{0}$, pa je $c_{k+1} = \ldots = c_n = 0$.

Još treba pokazati da je $Im(h) \subseteq [\{h(\vec{\beta}_{k+1}), \ldots, h(\vec{\beta}_n)\}]$ (obrnuta inkluzija je trivijalna). Neka je $\vec{w} \in Im(h)$, što znači postoji $\vec{v} \in V$ takav da je $h(\vec{v}) = \vec{w}$. Neka je $\vec{v} = \vec{u} + c_{k+1}\vec{\beta}_{k+1} + \ldots + c_n\vec{\beta}_n$, gde je $\vec{u} \in Ker(h)$. Tada važi

$$\vec{w} = h(\vec{v}) = \vec{0} + c_{k+1}h(\vec{\beta}_{k+1}) + \ldots + c_n h(\vec{\beta}_n) \in [\{h(\vec{\beta}_{k+1}), \ldots, h(\vec{\beta}_n)\}]. \qquad \dashv$$

Primer. Neka je $h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ zadato sa $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$Im(h) = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbf{R}\} = \{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbf{R}\},$$

$$Ker(h) = \{\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R}\} = \{z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{R}\}.$$

POSLEDICA 8.16. *Rang linearnog preslikavanja je manji ili jednak od dimenzije domena. Jednakost važi u slučaju kad je defekt nula, to jest kad je jezgro trivijalno.*

TEOREMA 8.17. *Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

*(1) h je **1-1**;*

(2) $Ker(h) = \{\vec{0}\}$, to jest defekt je jednak nuli;

(3) $rank(h) = dim(V)$;

(4) ako je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ baza za V, onda je $\langle h(\vec{\beta}_1), \ldots, h(\vec{\beta}_n) \rangle$ baza za $Im(h)$.

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2) Ako je $h(\vec{v}) = \vec{0} = h(\vec{0})$, onda pošto je h **1-1** sledi da je $\vec{v} = \vec{0}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) $h(\vec{v}_1) = h(\vec{v}_2) \Rightarrow h(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Teorema 8.15.

(2) $\Rightarrow$ (4) Kao u dokazu teoreme 8.15.

(4) $\Rightarrow$ (2) Neka je $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ baza za V i neka je $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_n\vec{\beta}_n \in Ker(h)$. Znači $\vec{0} = h(\vec{v}) = c_1 h(\vec{\beta}_1) + \ldots + c_n h(\vec{\beta}_n)$, pa pošto je $\{h(\vec{\beta}_1), \ldots, h(\vec{\beta}_n)\}$ linearno nezavisan jer je $\langle h(\vec{\beta}_1), \ldots, h(\vec{\beta}_n) \rangle$ baza za $Im(h)$, dobijamo $c_1 = \ldots = c_n = 0$, što znači da je $\vec{v} = \vec{0}$. $\dashv$

§9. Deveta nedelja

§9.1. Reprezentacija linearnih preslikavanja

Po teoremi 8.10 znamo da je svako linearno preslikavanje određeno svojim dejstvom na izabranoj bazi domena.

Primer. Neka je $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zadato dejstvom na standardnoj bazi sa $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. Tada je za $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, $h(\vec{v})$ jednako

$$h(-1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = -1h(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + 5h(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = -1\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\-3\end{pmatrix}$$

Primetimo da kada od vektor kolona $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ formiramo matricu $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\3&0\end{pmatrix}$ i „pomnožimo” je sa $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ na sledeći način

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot(-1)+1\cdot 5\\1\cdot(-1)+2\cdot 5\\3\cdot(-1)+0\cdot 5\end{pmatrix}$$

dobijamo $h(\vec{v})$.

Definicija. Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje i neka su $\mathcal{B} = \langle\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n\rangle$ i $\mathcal{D} = \langle\vec{\delta}_1, \dots, \vec{\delta}_m\rangle$ redom baze za V i W. Neka je:

$$Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_1)) = \begin{pmatrix}h_{11}\\\vdots\\h_{m1}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}, \dots, Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_n)) = \begin{pmatrix}h_{1n}\\\vdots\\h_{mn}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}.$$

Tada matricu

$$\begin{pmatrix}h_{11}&\dots&h_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\h_{m1}&\dots&h_{mn}\end{pmatrix}$$

označavamo sa $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ i zovemo *matričnom reprezentacijom* za h u odnosu na baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$.

Napomena. *Broj kolona u matrici $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ je dimenzija domena dok je broj vrsta dimenzija kodomena.*

Definicija. Matricu tipa $m\times n$ množimo vektor kolonom $\vec{v}\in\mathbf{R}^n$ na sledeći način:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix} =_{df} \begin{pmatrix} a_{11}c_1+a_{12}c_2+ & \dots & +a_{1n}c_n\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+ & \dots & +a_{2n}c_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+ & \dots & +a_{mn}c_n\end{pmatrix}$$

Teorema 9.1. *Neka su h, V, W, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ kao u definiciji matrične reprezentacije za h i neka je $\vec{v}\in V$. Tada važi:*

$$Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{v})) = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}).$$

dokaz. Neka je

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h) = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ h_{m1} & \dots & h_{mn}\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Dakle imamo $h(\vec{\beta}_1) = h_{11}\vec{\delta}_1+\ldots+h_{m1}\vec{\delta}_m, \ldots, h(\vec{\beta}_n) = h_{1n}\vec{\delta}_1+\ldots+h_{mn}\vec{\delta}_m$ i $\vec{v} = c_1\vec{\beta}_1+\ldots+c_n\vec{\beta}_n$. Izračunajmo $h(\vec{v})$ koristeći linearnost od h.

$$\begin{aligned} h(\vec{v}) &= c_1h(\vec{\beta}_1)+\ldots+c_nh(\vec{\beta}_n)\\ &= c_1(h_{11}\vec{\delta}_1+\ldots+h_{m1}\vec{\delta}_m)+\ldots+c_n(h_{1n}\vec{\delta}_1+\ldots+h_{mn}\vec{\delta}_m)\\ &= (c_1h_{11}+\ldots+c_nh_{1n})\vec{\delta}_1+\ldots+(c_1h_{m1}+\ldots+c_nh_{mn})\vec{\delta}_m. \end{aligned}$$

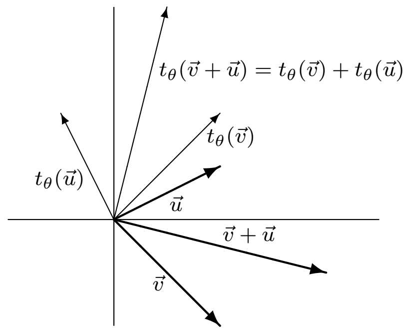
Znači imamo:

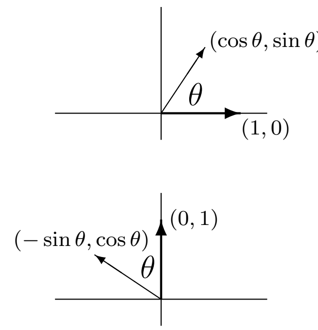
$$Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{v})) = \begin{pmatrix} h_{11}c_1+ & \dots & +h_{1n}c_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ h_{m1}c_1+ & \dots & +h_{mn}c_n\end{pmatrix} = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}).$$

$\dashv$

Primer 2. Neka je $t_\theta\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ rotacija oko koordinatnog početka za orijentisan ugao θ. Ovde $\mathbf{R}^2$ posmatramo kao prostor vektora u euklidskoj ravni. Da bismo pokazali da je t_θ linearno preslikavanje iskoristićemo to što je rotacija izometrija pa preslikava paralelogram u paralelogram i duž u podudarnu duž (videti donji levi ctrež na kome je θ pozitivno orijentisan prav ugao). Donji desni crteži nam daju:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \overset{t_\theta}{\longmapsto} \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \overset{t_\theta}{\longmapsto} \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$





Znači, $Rep_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}(t_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Tako npr. možemo da izračunamo $t_{30^\circ}(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix})$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \frac{3}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Primer. Neka su $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ i $\mathcal{D} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, redom baze za $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$. Neka je $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zadato sa

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{h}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{h}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da bismo odredili $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ moramo odrediti $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ i $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_3 \\ -2c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{1}{2} \\ c_3 = 1 \end{array}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 + c_3 \\ -2c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 0 \end{array}$$

Dakle, $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$ i $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$ pa je

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neka je $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$. Odredimo $Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{v}))$. Prvo ćemo odrediti $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})$.

$$c_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2c_1+c_2\\4c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l}c_1=1\\c_2=1\end{array}$$

Dakle, $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, pa je

$$Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{v}))=Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)\ Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v})=\begin{pmatrix}0&1\\-\frac{1}{2}&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$$

Primer. Neka je $l\colon \mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3$ linearno preslikavanje zadato sa

$$l(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x-2y+3t\\-3x+6y+2z-11t\\2x-4y+z+5t\end{pmatrix}$$

Hoćemo da odredimo matricu L koja reprezentuje l u odnosu na par standardnih (kanonskih) baza za $\mathbf{R}^4$ i $\mathbf{R}^3$. Imamo:

$$l(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix},\quad l(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix},\quad l(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\quad l(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}3\\-11\\5\end{pmatrix}.$$

Dakle, $L=\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\-3&6&2&-11\\2&-4&1&5\end{pmatrix}$. Primetite kako se L lako čita iz gornje definicije za l.

§9.2. Svaka matrica reprezentuje linearno preslikavanje

Neka je data matrica

$$H=\begin{pmatrix}h_{11}&\dots&h_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\h_{m1}&\dots&h_{mn}\end{pmatrix}$$

i neka je $\mathcal{B}=\langle\vec{\beta}_1,\dots,\vec{\beta}_n\rangle$ baza za n-dimenzionalni prostor V a $\mathcal{D}=\langle\vec{\delta}_1,\dots,\vec{\delta}_m\rangle$ baza za m-dimenzionalni prostor W. Po teoremi 8.10 postoji jedinstven homomorfizam $h\colon V\to W$ takav da za svako $1\leq i\leq n$ važi

$$\vec{\beta}_i\stackrel{h}{\mapsto}h_{1i}\vec{\delta}_1+\dots+h_{mi}\vec{\delta}_m.$$

Po definiciji matrične reprezentacije imamo da je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h) = H$. Znači H reprezentuje linearno preslikavanje h. Pošto je izbor baza $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ proizvoljan ova korespondencija između linearnih preslikavanja i matrica nije jednoznačna.

Primer. Neka je $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $V = W = \mathbf{R}^2$. Neka su $\mathcal{B}_1 = \mathcal{D}_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ jednake standardne baze za $\mathbf{R}^2$ a neka su $\mathcal{B}_2 = \mathcal{D}_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ jednake ali nestandardne (u smislu redosleda) baze za $\mathbf{R}^2$.

Linearno preslikavanje $h_1 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je reprezentovano sa H u odnosu na $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{D}_1$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \overset{h_1}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{D}_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linearno preslikavanje $h_2 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je reprezentovano sa H u odnosu na $\mathcal{B}_2$ i $\mathcal{D}_2$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \overset{h_2}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{D}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Intuitivno, h_1 odgovara prvoj a h_2 drugoj projekciji a zadaje ih ista matrica (u odnosu na različite parove baza).

Teorema 9.2. *Rang matrice jednak je rangu svakog preslikavanja koje ona reprezentuje.*

dokaz. Neka je $h \colon V \to W$ reprezentovano matricom

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix}$$

Tada je po definiciji rang od h jednak $dim(Im(h))$ što je po posledici 8.9 jednako broju linearno nezavisnih vektora u skupu

$$\{ \begin{pmatrix} h_{11} \\ \vdots \\ h_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} h_{1n} \\ \vdots \\ h_{mn} \end{pmatrix} \}$$

a to je dimenzija prostora kolona od H, što je po definiciji rang od H. ⊣

Tvrđenje 9.3. *Neka je $h \colon V \to W$ linearno preslikavanje reprezentovano matricom $H \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Tada je h* ***na*** *akko je $rank(H) = m$ i h je* ***1-1*** *akko je $rank(H) = n$.*

dokaz. (**na**) Imamo da je $dim(W) = m$. Po teoremi 9.2 je $dim(Im(h)) = rank(h) = rank(H)$. Dakle,

h je **na** akko $Im(h) = W$ akko (tvrđenje 4.10) $dim(Im(h)) = dim(W)$ akko $rank(H) = m$.

(**1-1**) Imamo da je $dim(V) = n$. Po teoremi 9.2 je $rank(h) = rank(H)$. Dakle,

h je **1-1** akko (teorema 8.17) $rank(h) = dim(V)$ akko $rank(H) = n$.

Definicija. *Nesingularno* linearno preslikavanje je sinonim za izomorfizam. Ukoliko nije nesingularno onda je linearno preslikavanje *singularno*.

Definicija. Matrica je *nesingularna* kada je kvadratna i kada je to matrica homogenog sistema s jedinstvenim rešenjem.

Definicija. *Glavnu dijagonalu* matrice iz $\mathcal{M}_n$ čine redom njeni elementi a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Napomena 9.4. *Matrica je nesingularna akko je njena redukovana stepenasta forma oblika*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

to jest na glavnoj dijagonali su sve jedinice a svi ostali elementi su nule (videti definiciju jedinične matrice u 10.1).

Napomena 9.5. *Matrica H je nesingularna akko za neko n je $H \in \mathcal{M}_n$ i $rank(H) = n$.*

Lema 9.6. *Matrica reprezentuje izomorfizam (nesingularno preslikavanje) akko je ona nesingularna.*

dokaz. Neka je H matrica koja reprezentuje h u odnosu na neki par baza. Imamo:

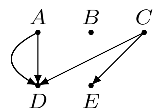
H je nesingularna akko za neko n je $H \in \mathcal{M}_n$ i $rank(H) = n$, nap. 9.5

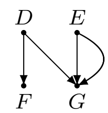
akko h je izomorfizam, tvrđenje 9.3. $\dashv$

Primer. Svako linearno preslikavanje reprezentovano matricom $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ je nesingularno zato što je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ redukovana stepenasta forma te matrice, dok je svako linearno preslikavanje reprezentovano matricom $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ singularno zato što je $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ redukovana stepenasta forma te druge matrice.

§9.3. Množenje matrica

Primer. Posmatrajmo sledeće usmerene grafove za koje možemo zamisliti da predstavljaju jednosmerne (direktne) puteve između mesta A, B, C i mesta D, E, odnosno između mesta D, E i mesta F, G.

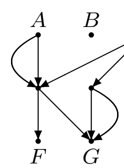


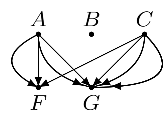


Ove grafove možemo iskodirati redom sledećim matricama:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 u prvoj koloni leve matrice čitamo kao ,,postoje dva puta od A do D u levom grafu" a 0 u prvoj koloni te matrice čitamo kao ,,ne postoji put između A i E u levom grafu", itd.). Ako sada posmatramo operaciju ,,nadovezivanja" grafova, to jest stavimo prvi graf iznad drugog i onda posmatramo sve usmerene puteve između mesta A, B, C i mesta F, G (slika levo), onda dobijamo sledeći rezultat (slika desno).





Koja operacija s matricama odgovara operaciji nadovezivanja grafova? Kad krenemo da prebrojavamo usmerene puteve u nadovezanim grafovima postaje jasno da sledeća matrična operacija (obratiti pažnju na redosled) odgovara nadovezivanju.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrica koju smo dobili kodira gornji desni graf. Ovu matričnu operaciju ćemo zvati *množenje* matrica.

Definicija. *Proizvod* matrica AB, gde je $A = (a_{ij})_{m\times r}$ i $B = (b_{ij})_{r\times n}$, je matrica $C = (c_{ij})_{m\times n}$ takva da je $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$.

Napomena 9.7. *Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times r}$ i $B = (\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n) \in \mathcal{M}_{r\times n}$, gde je $\vec{v}_i \in \mathbf{R}^r$. Tada važi $AB = (A\vec{v}_1 \ldots A\vec{v}_n)$, gde je $A\vec{v}_i$ proizvod matrice i vektor kolone definisan u 9.1.*

Primer. Neka je $H = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(h) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, $G = Rep_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i neka je $\vec{v}$ takvo da je $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Tada važi:

$$\begin{aligned}
Rep_{\mathcal{D}}(g \circ h(\vec{v})) &= Rep_{\mathcal{D}}(g(h(\vec{v})) = Rep_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) Rep_{\mathcal{C}}(h(\vec{v})), \text{ teorema 9.1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}, \text{ teorema 9.1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot (4x_1 + 6x_2 + 8x_3) + 1 \cdot (5x_1 + 7x_2 + 9x_3) \\ 0 \cdot (4x_1 + 6x_2 + 8x_3) + 1 \cdot (5x_1 + 7x_2 + 9x_3) \\ 1 \cdot (4x_1 + 6x_2 + 8x_3) + 0 \cdot (5x_1 + 7x_2 + 9x_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 \cdot 4 + 1 \cdot 5)x_1 + (1 \cdot 6 + 1 \cdot 7)x_2 + (1 \cdot 8 + 1 \cdot 9)x_3 \\ (0 \cdot 4 + 1 \cdot 5)x_1 + (0 \cdot 6 + 1 \cdot 7)x_2 + (0 \cdot 8 + 1 \cdot 9)x_3 \\ (1 \cdot 4 + 0 \cdot 5)x_1 + (1 \cdot 6 + 0 \cdot 7)x_2 + (1 \cdot 8 + 0 \cdot 9)x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 1 \cdot 8 + 1 \cdot 9 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 0 \cdot 8 + 1 \cdot 9 \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 6 + 0 \cdot 7 & 1 \cdot 8 + 0 \cdot 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= (GH)\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}).
\end{aligned}$$

TVRĐENJE 9.8. *Kompozicija linearnih preslikavanja je reprezentovana proizvodom reprezentacija tih preslikavanja.*

DOKAZ. Neka su $h : V \to U$ i $g : U \to W$ linearna preslikavanja i neka su $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \rangle$, $\mathcal{C} = \langle \vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_r \rangle$ i $\mathcal{D} = \langle \vec{\delta}_1, \dots, \vec{\delta}_m \rangle$ redom baze za V, U i W. Neka je $H = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(h)$ i $G = Rep_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)$. Tada za svako $1 \leq i \leq n$ važi:

$$\begin{aligned}
Rep_{\mathcal{D}}(g \circ h(\vec{\beta}_i)) = Rep_{\mathcal{D}}(g(h(\vec{\beta}_i))) &= Rep_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) Rep_{\mathcal{C}}(h(\vec{\beta}_i)) \\
&= G \begin{pmatrix} h_{1i} \\ \vdots \\ h_{ri} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Prema tome, po definiciji je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ h) = (G \begin{pmatrix} h_{11} \\ \vdots \\ h_{r1} \end{pmatrix} \dots G \begin{pmatrix} h_{1n} \\ \vdots \\ h_{rn} \end{pmatrix})$, što je po napomeni 9.7 jednako GH. ⊣

TVRĐENJE 9.9. *Zbir linearnih preslikavanja je reprezentovan zbirom reprezentacija tih preslikavanja.*

DOKAZ. Neka su $h, g \in \mathcal{L}(V, W)$ (videti definiciju u sekciji 8.2) i neka su redom $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_n \rangle$ i $\mathcal{D} = \langle \vec{\delta}_1, \dots, \vec{\delta}_m \rangle$ baze za V i W. Neka je $H = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ i $G = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g)$. Tada za svako $1 \leq i \leq n$ važi:

$$Rep_{\mathcal{D}}((h+g)(\vec{\beta}_i)) = Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_i) + g(\vec{\beta}_i)) = Rep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_i)) + Rep_{\mathcal{D}}(g(\vec{\beta}_i))$$

$$= \begin{pmatrix} h_{1i} \\ \vdots \\ h_{mi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1i} + g_{1i} \\ \vdots \\ h_{mi} + g_{mi} \end{pmatrix}$$

pa je onda po definiciji $Rep_{B,D}(h+g) = H + G$. ⊣

Tvrđenje 9.10. *Množenje matrica je asocijativno i distribuira se nad sabiranjem.*

dokaz. (**asocijativnost**) Neka su F, G i H matrice za koje je definisan proizvod $(HG)F$. Hoćemo da pokažemo da je $(HG)F = H(GF)$. Neka su $f : V \to U_1$, $g : U_1 \to U_2$ i $h : U_2 \to W$ linearna preslikavanja čije su reprezentacije u odnosu na neke fiksirane baze prostora V, U_1, U_2 i W redom matrice F, G i H. Po tvrđenju 9.8 $(HG)F$ reprezentuje linearno preslikavanje $(h \circ g) \circ f$ koje je zbog asocijativnosti kompozicije jednako $h \circ (g \circ f)$ koje je reprezentovano sa $H(GF)$ u odnosu na iste izabrane baze. Dakle, $(HG)F = H(GF)$.

(**distributivnost**) Neka su sada F, G i H matrice za koje je definisano $F(G+H)$. Hoćemo da pokažemo da je $F(G+H) = FG+FH$. Neka su $f : U \to W$ i $g, h : V \to U$ linearna preslikavanja čije su reprezentacije u odnosu na neke fiksirane baze prostora V, U i W redom matrice F, G i H. Po tvrđenjima 9.8-9 imamo da $F(G+H)$ reprezentuje $f \circ (g+h)$, dok $FG + FH$ reprezentuje $f \circ g + f \circ h$. Još treba pokazati da je $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.

$$\begin{aligned} (f \circ (g+h))(\vec{v}) &= f((g+h)(\vec{v})) = f(g(\vec{v}) + h(\vec{v})) \\ &= f(g(\vec{v})) + f(h(\vec{v})) = f \circ g(\vec{v}) + f \circ h(\vec{v}). \end{aligned}$$

Na isti način bismo pokazali i desnu distributivnost, to jest $(G+H)F = GF+HF$ (što nije samo posledica leve distributivnosti zbog nekomutativnosti množenja). ⊣

Napomena. *Množenje matrica nije komutativno.*

Tvrđenje 9.11. *Množenje matrica zadovoljava:*

(1) $(AB)^T = B^T A^T$;

(2) za $\vec{w} \in \mathbf{R}^m$, *proizvod matrica* $\vec{w}^T \vec{w}$ *jednak je* $\vec{w} \cdot \vec{w} = \|\vec{w}\|^2$.

(3) defekti linearnih preslikavanja reprezentovanih matricama $A^T A$ *i* A *su jednaki;*

(4) $rank(A^T A) = rank(A)$.

dokaz. (1) Direktno iz definicije zbog komutativnosti množenja u $\mathbf{R}$.

(2) Direktno iz definicije, proizvod matrica tipa $1 \times m$ i $m \times 1$ sa leve strane jednak je skalarnom proizvodu sa desne strane jednakosti.

(3) Neka je $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ i neka je $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$. Pokazaćemo da važi: $A^T A\vec{v} = \vec{0}$ akko $A\vec{v} = \vec{0}$ što znači da preslikavanja reprezentovana sa $A^T A$ i A imaju isto jezgro (kernel). Implikacija zdesna ulevo je trivijalna. Ako je $A^T A\vec{v} = \vec{0}$ onda je $\vec{v}^T A^T A\vec{v} = 0$ pa po

(1) i (2) važi da je $\vec{w} \cdot \vec{w} = 0$ za $\vec{w} = A\vec{v}$. Po nenegativnosti skalarnog proizvoda je onda $\vec{w} = A\vec{v} = \vec{0}$.

(4) Direktno iz (3) pomoću teorema 8.15 i 9.2. $\dashv$

Tvrđenje 9.12. *Proizvod skalara i linearnog preslikavanja je reprezentovan proizvodom tog istog skalara i reprezentacije tog preslikavanja.*

dokaz. Neka je $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje, $H = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ i neka je $c \in \mathbf{R}$. Za svako $\vec{\beta}_i \in \mathcal{B}$ je $Rep_{\mathcal{D}}(ch(\vec{\beta}_i)) = cRep_{\mathcal{D}}(h(\vec{\beta}_i))$ pa je po definiciji $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(ch) = cH$. $\dashv$

Tvrđenje 9.13. *Množenje matrica zadovoljava* $(cH)G = H(cG) = c(HG)$.

dokaz. Dovoljno je pokazati da linearna preslikavanja $g : V \to U$ i $h : U \to W$ zadovoljavaju $(ch) \circ g = h \circ (cg) = c(h \circ g)$ što je trivijalno. $\dashv$

§10. Deseta nedelja

§10.1. Elementarne redukcijske matrice

Definicija. *Jedinična* matrica E_n (ili I_n) je matrica iz $\mathcal{M}_n$ koja ima jedinice na glavnoj dijagonali a svi ostali elementi su joj nule.

Komentar. *Jedinična matrica je neutral za množenje.*

Primer.
$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\\ 1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\\ 1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & 3 & 8\\ -7 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & 3 & 8\\ -7 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Definicija. *Dijagonalna* matrica je kvadratna matrica koja ima sve nule van glavne dijagonale.

Primer.
$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & -1\\ -1 & 3 & 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 8 & -2\\ 1 & -3 & -4 & -4\end{pmatrix}$ (množenje sleva dijagonalnom matricom ,,rasteže" vrste te matrice),
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}$ (množenje zdesna dijagonalnom matricom ,,rasteže" kolone te matrice).

Definicija. *Permutacijska* matrica je kvadratna matrica koja u svakoj vrsti i u svakoj koloni ima tačno jednu jedinicu dok su joj svi ostali elementi nule.

Primer. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ je permutacijska matrica. Množenje sleva tom matricom ciklično permutuje vrste date matrice:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

Primetimo da za proizvoljnu matricu $A\in\mathcal{M}_{3\times l}$ važi:

$$E_3 \xrightarrow{\rho_2\leftrightarrow\rho_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A \xrightarrow{\rho_2\leftrightarrow\rho_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}A$$

$$E_3 \xrightarrow{3\rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A \xrightarrow{3\rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$E_3 \xrightarrow{2\rho_1 + \rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A \xrightarrow{2\rho_1 + \rho_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

Znači, ako hoćemo da primenimo neku Gausovu operaciju na $A \in \mathcal{M}_{n\times l}$, dovoljno je primeniti tu operaciju na E_n i dobijenom matricom pomnožiti sleva matricu A.

Definicija. *Elementarne redukcijske* matrice nastaju od jedinične matrice primenom jedne Gausove operacije.

$$E_n \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} P_{i,j} \qquad (i \neq j)$$

$$E_n \xrightarrow{k\rho_i} M_i(k) \quad (k \neq 0)$$

$$E_n \xrightarrow{k\rho_i + \rho_j} C_{i,j}(k) \quad (i \neq j)$$

Lema 10.1. *Za matricu $H \in \mathcal{M}_{n\times l}$ važi:*

(1) $H \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} P_{i,j}H$,

(2) $H \xrightarrow{k\rho_i} M_i(k)H$,

(3) $H \xrightarrow{k\rho_i + \rho_j} C_{i,j}(k)H$.

dokaz. Direktno sledi iz definicije množenja matrica. ⊣

Posledica 10.2. *Za svaku matricu H postoje elementarne redukcijske matrice $R_1, \ldots, R_m$ takve da je $R_m R_{m-1} \ldots R_1 H$ u redukovanoj stepenastoj formi.*

Napomena 10.3. *Za elementarne redukcijske matrice važi:*

$$P_{i,j}P_{i,j} = E_n,\ M_i(k)M_i(\tfrac{1}{k}) = E_n \text{ i } C_{i,j}(k)C_{i,j}(-k) = E_n.$$

§10.2. Inverzne matrice

Definicija. Matrica G je *obostrani inverz* kvadratne matrice H kada su proizvodi GH i HG jednaki jediničnoj matrici. Matricu G označavamo sa H^{-1} a za matricu H kažemo da je *invertibilna*.

Teorema 10.4. *Matrica je invertibilna akko reprezentuje izomorfizam.*

DOKAZ. Neka je H matrica i $h\colon V \to W$ linearno preslikavanje takvo da je $Rep_{B,D}(h) = H$. Tada važi:

$$\begin{aligned}
H \text{ je invertibilna akko postoji } H^{-1} \text{ takvo da } H^{-1}H = E_n = HH^{-1} \\
\text{akko postoji } h^{-1}\colon W \to V \text{ takvo da} \\
Rep_{D,B}(h^{-1}) = H^{-1} \text{ i } h^{-1} \circ h = \mathbf{1}_V \text{ i } h \circ h^{-1} = \mathbf{1}_W \\
\text{akko } h \text{ je izomorfizam.}
\end{aligned}$$
⊣

POSLEDICA 10.5. *Matrica je invertibilna akko je nesingularna.*

DOKAZ. Direktno iz teoreme 10.4 i leme 9.6. ⊣

LEMA 10.6. *Proizvod invertibilnih matrica je invertibilna matrica.*

DOKAZ. Ako su H^{-1} i G^{-1} obostrani inverzi za H i G istog tipa, onda je $G^{-1}H^{-1}$ (obratiti pažnju na redosled) obostrani inverz za HG. Na isti način sledi da je proizvod proizvoljnog broja invertibilnih matrica invertibilna matrica. ⊣

LEMA 10.7. *Matrica je invertibilna akko je jednaka proizvodu elementarnih redukcijskih matrica.*

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Neka je $H \in \mathcal{M}_n$ invertibilna matrica. Po posledici 10.5, H je nesingularna. Po napomeni 9.4, njena redukovana stepenasta forma je E_n. Po posledici 10.2, postoje elementarne redukcijske matrice $R_1, \dots, R_m$ takve da je $R_m R_{m-1} \dots R_1 H = E_n$. Po napomeni 10.3, $R_1, \dots, R_m$ su invertibilne i njihovi inverzi su elementarne redukcijske matrice pa važi $H = R_1^{-1} \dots R_m^{-1}$.

($\Leftarrow$) Neka je $H = R_1 \dots R_m$. Po napomeni 10.3, matrice $R_1, \dots, R_m$ su invertibilne pa je po lemi 10.6 i njihov proizvod invertibilan. ⊣

Prema prvom delu dokaza prethodne leme i lemi 10.1, obostrani inverz invertibilne matrice možemo odrediti sledećim postupkom: datu matricu svodimo na redukovanu stepenastu formu i paralelno iste operacije primenjujemo polazeći od jedinične matrice. Na kraju smo polaznu matricu sveli na jediničnu a jediničnu na inverznu polazne.

PRIMER.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\rho_1 \leftrightarrow \rho_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\rho_1 + \rho_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\rho_2 \leftrightarrow \rho_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-1\rho_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&3&-1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{-3\rho_2+\rho_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&-4&1&-3&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}\rho_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&1&-1\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}\end{array}\right)\xrightarrow[-1\rho_3+\rho_1]{-1\rho_3+\rho_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}\end{array}\right)$$

§10.3. Promena baze

Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ dve baze vektorskog prostora V. Cilj nam je da formiramo matricu koja kad pomnoži reprezentaciju proizvoljnog vektora u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ daje reprezentaciju tog istog vektora u odnosu na bazu $\mathcal{D}$.

Kao posledicu teoreme 9.1, za $\vec{v}\in V$ imamo

$$Rep_{\mathcal{D}}(\vec{v}) = Rep_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}_V(\vec{v})) = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\mathbf{1}_V)\, Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}).$$

Definicija. *Matrica promene baze* iz baze $\mathcal{B}$ u bazu $\mathcal{D}$ vektorskog prostora V je reprezentacija identičnog preslikavanja $\mathbf{1}_V\colon V\to V$ u odnosu na te baze

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\mathbf{1}_V) = (Rep_{\mathcal{D}}(\vec{\beta}_1)\cdots Rep_{\mathcal{D}}(\vec{\beta}_n))$$

Primer. Neka su $\mathcal{B} = \langle\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle$ i $\mathcal{D} = \langle\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$ baze za $\mathbf{R}^2$. Tada je $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$ i $Rep_{\mathcal{D}}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$.

Znači $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^2}) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, pa za vektor $\vec{v}\in\mathbf{R}^2$ takav da je $Rep_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, važi

$$Rep_{\mathcal{D}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+1\\\frac{3}{2}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}_{\mathcal{D}}.$$

Lema 10.8. *Matrica je matrica promene baze akko je nesingularna.*

dokaz. ($\Rightarrow$) Pošto je identično preslikavanje izomorfizam to matrica promene baze reprezentuje izomorfizam pa je po lemi 9.6 ona nesingularna.

($\Leftarrow$) Neka je $A\in\mathcal{M}_n$ nesingularna. Pokazaćemo da je to matrica promene baze iz $\mathcal{B} = \langle\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_n\rangle$ u standardnu bazu $\mathcal{E}_n$, gde su $\vec{\beta}_1,\ldots,\vec{\beta}_n$ kolone matrice A. Pošto je po napomeni 9.5, $rank(A) = n$ imamo da je $\underline{\mathcal{B}}$ linearno nezavisan pa je po tvrđenju 4.9, $[\underline{\mathcal{B}}] = \mathbf{R}^n$, te je $\mathcal{B}$ baza za $\mathbf{R}^n$. Pošto je

$$A = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{E}_n}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^n}),$$

to je po definiciji A matrica promene baze iz $\mathcal{B}$ u $\mathcal{E}_n$. $\dashv$

§10.4. Promena reprezentacije preslikavanja

Promena baze menja i reprezentaciju datog linearnog preslikavanja. Neka je $h \colon V \to W$ linearno preslikavanje i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dve baze za n-dimenzionalni prostor V a $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}'$ dve baze za W. Neka je $H = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)$ a $H' = Rep_{\mathcal{B}',\mathcal{D}'}(h)$. Zbog osnovnih svojstava identičnog preslikavanja važi $h \circ \mathbf{1}_V = \mathbf{1}_W \circ h$, pa je i reprezentacija leve i desne strane ove jednakosti, u odnosu na baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}'$, jednaka. To izražavamo kroz sledeći dijagram koji komutira

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[rr, "h", "H"'] \arrow[d, "Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathbf{1}_V)"', "\mathbf{1}_V"] & & W_{\mathcal{D}} \arrow[d, "Rep_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}(\mathbf{1}_W)"', "\mathbf{1}_W"] \\
V_{\mathcal{B}'} \arrow[rr, "h", "H'"'] & & W_{\mathcal{D}'}
\end{tikzcd}$$

odnosno kao matričnu jednakost $H' Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathbf{1}_V) = Rep_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}(\mathbf{1}_W) H$. Pošto je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathbf{1}_V) Rep_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathbf{1}_V) = Rep_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\mathbf{1}_V) = E_n$, možemo H' predstaviti kao:

$$H' = Rep_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}(\mathbf{1}_W) H Rep_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathbf{1}_V),$$

i to je način na koji dolazimo do matrice koja reprezentuje dato linearno preslikavanje u odnosu na novi par baza.

Primer. Neka je $t \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ zadano sa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{t}{\mapsto} \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}. \quad \text{Dakle,} \quad Rep_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neka je $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ nova baza za $\mathbf{R}^3$. Treba odrediti $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$.

Lako određujemo $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ i kao inverz te matrice dobijamo $Rep_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B}}(\mathbf{1}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Znači,

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Direktno do $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$ dolazimo na sledeći način:

$$t(\vec{\beta}_1) = t(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3} = -\vec{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$t(\vec{\beta}_2) = t(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3} = -\vec{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$t(\vec{\beta}_3) = t(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3} = 2\vec{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Odavde vidimo da će reprezentacija linearnog preslikavanja t biti dijagonalna u odnosu na bazu $\langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ kada za svako $\vec{\beta}_i$ važi $t(\vec{\beta}_i) = r_i \vec{\beta}_i$ za neko $r_i \in \mathbf{R}$.

Definicija. Matrice H i H' iz $\mathcal{M}_{m\times n}$ su *matrično ekvivalentne* kada postoje nesingularne matrice P i Q takve da je $H' = PHQ$.

Tvrđenje 10.9. *Matrično ekvivalentne matrice reprezentuju isto linearno preslikavanje u odnosu na odgovarajuće baze.*

dokaz. Ovo je posledica leme 10.8. ⊣

Tvrđenje 10.10. *Matrična ekvivalencija matrica je relacija ekvivalencije.*

dokaz. Za $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ važi $A = E_m A E_n$, pa je relacija refleksivna. Ako je $A = PBQ$, onda je $B = P^{-1}AQ^{-1}$, pa je relacija simetrična. Ako je $A = PBQ$ i $B = RCS$, onda je $A = (PR)C(SQ)$ i PR i SQ su nesingularne po lemi 10.6, pa je relacija tranzitivna. ⊣

Primetimo da je matrično ekvivalentna nula matrici samo ona sama jer je uvek

$$P 0_{m\times n} Q = 0_{m\times n}.$$

TVRĐENJE 10.11. *Vrsta ekvivalentne matrice su matrično ekvivalentne.*

DOKAZ. Ovo je posledica lema 10.1 i 10.7. ⊣

TEOREMA 10.12. *Svaka $m\times n$ matrica ranga k je matrično ekvivalentna $m\times n$ matrici oblika*

$$\begin{pmatrix} E_k & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}.$$

DOKAZ. Neka je $H \in \mathcal{M}_{m\times n}$ matrica ranga k. Neka je P proizvod elementarnih redukcijskih matrica koje množenjem sleva svode H (glumeći vrsta transformacije) na redukovanu stepenastu formu koja ima k pivota. Neka je Q proizvod elementarnih redukcijskih matrica koje množenjem zdesna svode PH (glumeći kolona transformacije) na matricu H' u traženoj formi. Matrice P i Q su nesingularne po lemi 10.7 i posledici 10.5. ⊣

POSLEDICA 10.13. *Dve matrice istog tipa su matrično ekvivalentne akko imaju isti rang.*

Kao posledicu tvrđenja 10.9 i teoreme 10.12 imamo da se svako linearno preslikavanje u odnosu na pogodno izabrane baze može posmatrati kao svojevrsna projekcija:

$$c_1\vec{\beta}_1 + \ldots + c_k\vec{\beta}_k + \ldots + c_n\vec{\beta}_n \mapsto c_1\vec{\delta}_1 + \ldots + c_k\vec{\delta}_k + \vec{0}.$$

Reprezentaciju u odnosu na takve baze ćemo zvati *idealnom*.

PRIMER. Neka linearno preslikavanje $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ ima reprezentaciju u odnosu na par kanonskih baza $\mathcal{E}_3$ i $\mathcal{E}_2$ datu matricom

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Odrediti baze $\mathcal{B} = \langle\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3\rangle$ od $\mathbf{R}^3$ i $\mathcal{D} = \langle\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2\rangle$ od $\mathbf{R}^2$ tako da h u odnosu na njih ima idealnu reprezentaciju.

Kao prvo ćemo odrediti matrice P i Q takve da proizvod $H' = PHQ$ bude u redukovanoj stepenastoj formi i u odnosu na vrste i u odnosu na kolone. Matricu P određujemo sledećim postupkom:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-\rho_1+\rho_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricu Q određujemo sledećim postupkom:

$$\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&0&2\\0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{-2\gamma_1+\gamma_3}\left(\begin{array}{ccc}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 1&0&0\\0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{-\gamma_2+\gamma_3}\left(\begin{array}{ccc}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\end{array}\right),$$

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Po dijagramu s početka odeljka imamo da je

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h)=Rep_{\mathcal{E}_2,\mathcal{D}}(\mathbf{1}_{R^2})\,Rep_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2}(h)\,Rep_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3}),$$

pa je

$$\begin{aligned}Q=Rep_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3})&=(Rep_{\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3}(\vec{\beta}_1))\;Rep_{\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3}(\vec{\beta}_2))\;Rep_{\mathcal{E}_3}(\mathbf{1}_{R^3}(\vec{\beta}_3)))\\&=(Rep_{\mathcal{E}_3}(\vec{\beta}_1)\;Rep_{\mathcal{E}_3}(\vec{\beta}_2)\;Rep_{\mathcal{E}_3}(\vec{\beta}_3))\\&=(\vec{\beta}_1\;\vec{\beta}_2\;\vec{\beta}_3).\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je

$$\vec{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\vec{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\vec{\beta}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Slično, $P^{-1}=Rep_{\mathcal{D},\mathcal{E}_2}(\mathbf{1}_{R^2})=(\vec{\delta}_1\;\vec{\delta}_2)$, pa kad izračunamo da je

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

dobijamo da je

$$\vec{\delta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad\vec{\delta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

§11. Jedanaesta nedelja

§11.1. Determinante, definicija i osnovna svojstva

U ovoj sekciji ćemo definisati funkciju koja preslikava skup svih kvadratnih matrica u skup $\mathbf{R}$.

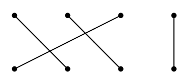
Bijekciju $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ nazivamo *permutacijom* skupa $\{1, \dots, n\}$. Permutaciju π možemo zadati matricom tipa $2 \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

iz koje možemo slobodno izostaviti prvu vrstu (koja se uvek može rekonstruisati) i prosto permutaciju π zadati vektor vrstom

$$\begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Na primer, $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ je pemutacija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ takva da je $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 1$ i $\pi(4) = 4$. Nju je najbolje ilustrovati dijagramom

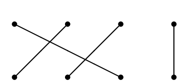


Skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ označavamo sa Π_n. Taj skup ima $n!$ elemenata.

Uređeni par $(\pi(i), \pi(j))$ čini *inverziju* u permutaciji π kada je $i < j$, a $\pi(i) > \pi(j)$. Na primer, u slučaju permutacije $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, imamo ukupno dve inverzije $(2, 1)$ i $(3, 1)$. Na gornjem dijagramu to se ogleda u postojanju dva ,,ukrštanja”. Za permutaciju kažemo da je *parna* kada ima paran broj inverzija i kažemo da je *neparna* kada ima neparan broj inverzija. Definišimo funkciju *sgn* na skupu permutacija kao

$$sgn(\pi) =_{df} \begin{cases} 1, & \text{ako je } \pi \text{ parna;} \\ -1, & \text{ako je } \pi \text{ neparna.} \end{cases}$$

Inverzna permutacija permutacije π iz gornjeg primera je $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ i tu imamo dve iverzije $(3, 1)$ i $(3, 2)$. Dijagram koji odgovara π^{-1} je



Napomena 11.1. $sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi)$.

dokaz. Pošto je dijagram koji odgovara permutaciji π^{-1} osnosimetričan dijagramu koji odgovara permutaciji π u odnosu na horizontalnu osu, to je broj ukrštanja u ovim dijagramima jednak. $\dashv$

NAPOMENA 11.2. *Ako permutacija π' nastaje od permutacije π zamenom mesta dva elementa onda je $sgn(\pi') = -sgn(\pi)$.*

DEFINICIJA. Neka je $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_n$. *Determinantu* matrice A u oznaci $det(A)$ ili samo $|A|$, definišemo kao realan broj

$$\sum_{\pi\in\Pi_n} sgn(\pi)\, a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)}.$$

PRIMER. Za $n = 2$ i $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ imamo da je $\Pi_2 = \{\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\}$, pri čemu prva permutacija nema inverzija pa je parna a druga ima jednu inverziju pa je neparna. Dakle imamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

TVRĐENJE 11.3. *$det(A^T) = det(A)$.*

DOKAZ. Pošto je $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)} = a_{\pi^{-1}(1)1}a_{\pi^{-1}(2)2}\dots a_{\pi^{-1}(n)n}$ i po napomeni 11.1 je $sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi)$, onda se može zaključiti da je $det(A^T) = det(A)$. $\dashv$

TVRĐENJE 11.4. *Determinanta menja znak kad dve vrste matrice zamene mesta. To jest*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

DOKAZ. Ovo je posledica napomene 11.2. $\dashv$

TVRĐENJE 11.5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \dots & a_{in}+a'_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

DOKAZ. Ovo sledi direktno iz definicije kao posledica distributivnosti množenja prema sabiranju pošto svaki sabirak u sumi koja definiše determinantu s leve strane jednakosti sadrži tačno jedan faktor oblika $a_{ij} + a'_{ij}$. $\dashv$

Tvrđenje 11.6.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dokaz. Ovo opet sledi direktno iz definicije kao posledica distributivnosti množenja prema sabiranju (koja se sada koristi u obrnutom smeru) pošto svaki sabirak u sumi koja definiše determinantu s leve strane jednakosti ima zajednički faktor k. ⊣

Definicija. Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je *donje-trougaona* kad su joj svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0. Ona je *gornje-trougaona* kad su joj svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki 0. *Trougaona* matrica je matrica koja je donje-trougaona ili gornje-trougaona.

Tvrđenje 11.7. *Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ trougaona, onda je $det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.*

dokaz. Svi ostali sabirci iz definicije determinante imaju bar jedan faktor 0. ⊣

Posledica 11.8. *Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ dijagonalna, onda je $det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.*

Tvrđenje 11.9. *Neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Tada važi:*

(1) ako A ima dve jednake vrste onda je $det(A) = 0$;

(2) ako A ima nula-vrstu onda je $det(A) = 0$.

dokaz. (1) Ako zamenimo mesta jednakim vrstama po tvrđenu 11.4 dobijamo $det(A) = -det(A)$, što daje $det(A) = 0$.

(2) Direktno iz tvrđenja 11.6. ⊣

Tvrđenje 11.10. *Neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Tada važi:*

(1) ako $A \xrightarrow{\rho_i \leftrightarrow \rho_j} B$ $(i \neq j)$ onda $det(B) = -det(A) = det(P_{i,j})\, det(A)$;

(2) ako $A \xrightarrow{k\rho_i} B$ onda $det(B) = k\, det(A) = det(M_i(k))\, det(A)$;

(3) ako $A \xrightarrow{k\rho_i + \rho_j} B$ $(i \neq j)$ onda $det(B) = det(A) = det(C_{i,j}(k))\, det(A)$.

dokaz. (1) Tvrđenje 11.4. (2) Tvrđenje 11.6. (3) Po tvrđenjima 11.5 i 11.6 dobijamo da je $det(B) = k\, det(A') + det(A)$, gde matrica A' ima dve iste vrste, pa je $det(A') = 0$, po tvrđenju 11.9 (1). ⊣

Napomena 11.11. *Po tvrđenju 11.3, sve ovo važi i kada umesto ,,vrste" stavimo ,,kolone".*

TVRĐENJE 11.12. *Neka je $H \in \mathcal{M}_n$ elementarna redukcijska matrica i neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Tada važi $det(HA) = det(H)\, det(A)$.*

DOKAZ. Ovo je posledica leme 10.1 i tvrđenja 11.10. ⊣

POSLEDICA 11.13. *Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ i neka je B rezultat primene Gausovih operacija na A. Tada važi: $det(A) = 0$ akko $det(B) = 0$.*

DOKAZ. Tvrđenje 11.10. ⊣

POSLEDICA 11.14. *Determinanta elementarne redukcijske matrice je različita od nule.*

DOKAZ. $det(P_{i,j}) = -1$, $det(M_i(k)) = k$ i $det(C_{i,j}(k)) = 1$. ⊣

TEOREMA 11.15. *Kvadratna matrica je invertibilna akko je njena determinanta različita od 0.*

DOKAZ. A je invertibilna

akko A je nesingularna, posledica 10.5,

akko red. step. forma od A je jedinična matrica, napomena 9.4,

akko $det(A) \neq 0$, posledica 11.8 i posledica 11.13. ⊣

TEOREMA 11.16 (BINE-KOŠI). $det(AB) = det(A)\, det(B)$.

DOKAZ. Neka su $A, B \in \mathcal{M}_n$. Ako A nije invertibilna onda je $rank(A) < n$ pa ni AB nije invertibilna jer je $rank(AB) \leq rank(A)$ $(Im(g \circ h) \subseteq Im(g))$. Po teoremi 11.15, obe strane gornje jednakosti su 0.

Ako je A invertibilna, onda je ona jednaka proizvodu elementarnih redukcijskih matrica i dovoljno je primeniti tvrđenje 11.12. ⊣

§11.2. Minori i kofaktori

U ovoj sekciji pretpostavljamo da je $n \geq 2$ i to nećemo dalje naglašavati.

DEFINICIJA. Za matricu $A \in \mathcal{M}_n$, definišemo matricu $M_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}$ kao matricu koja nastaje kada u A obrišemo i-tu vrstu i j-tu kolonu.

DEFINICIJA. *Minor* elementa a_{ij} matrice $A \in \mathcal{M}_n$ je broj $det(M_{ij})$.

DEFINICIJA. *Kofaktor* elementa a_{ij} matrice $A \in \mathcal{M}_n$, u oznaci A_{ij}, je $(-1)^{i+j}\, det(M_{ij})$.

TEOREMA 11.17 (LAPLASOV RAZVOJ DETERMINANTE). *Neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Tada za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ važi:*

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

DOKAZ. (skica) U sumi koja definiše $det(A)$ izvučemo zajednički faktor a_{i1} iz $(n-1)!$ sabiraka itd. ⊣

DEFINICIJA. *Adjungovana* matrica matrice $A \in \mathcal{M}_n$, u oznaci $adj(A)$ je matrica

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

TEOREMA 11.18 (LAPLAS). *Za $A \in \mathcal{M}_n$ važi:*

$$A\, adj(A) = adj(A)\, A = det(A)\, E_n.$$

DOKAZ. Po teoremi 11.17 imamo da su svi elementi na glavnoj dijagonali i prvog i drugog proizvoda jednaki $det(A)$. Svi ostali elementi van glavne dijagonale su 0 zato što predstavljaju determinante matrica s dve iste vrste odnosno dve iste kolone. Na primer, na mestu 12 u levom proizvodu se nalazi $a_{11}A_{21} + \dots + a_{1n}A_{2n}$ a to je, po teoremi 11.17, determinanta matrice koja nastaje od A kada joj se druga vrsta zameni prvom. Pošto je to determinanta matrice koja ima istu prvu i drugu vrstu, ona je jednaka nuli. ⊣

POSLEDICA 11.19. *Za $A \in \mathcal{M}_n$ takvu da je $det(A) \neq 0$ važi:*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\, adj(A).$$

DOKAZ. Samo treba primetiti da je $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ i primeniti teoremu 11.18. ⊣

TVRĐENJE 11.20. *Za matricu $A \in \mathcal{M}_n$ važi: A je nesingularna akko $adj(A)$ je nesingularna.*

DOKAZ. Pomoću teorema 11.18 i 11.16 dobijamo da je $det(A)\, det(adj(A)) = (det(A))^n$. Dakle, ako je matrica A nesingularna onda je $det(A) \neq 0$ pa je i $det(adj(A)) \neq 0$, što znači da je $adj(A)$ nesingularna.

Ako je $adj(A)$ nesingularna, onda je A matrično ekvivalentna sa $adj(A)\, A$. Ako pretpostavimo da je A singularna onda po teoremi 11.18 imamo da je $adj(A)\, A = det(A)\, E_n = 0_{n\times n}$. Pošto je matrično ekvivalentna nula matrici samo nula matrica, dobijamo da je A nula matrica. Odatle sledi da je i $adj(A)$ nula matrica, što je suprotno pretpostavci da je $adj(A)$ nesingularna. Dakle, A je nesingularna. ⊣

Posledica 11.21. *Za matricu $A \in \mathcal{M}_n$ važi: $det(adj(A)) = (det(A))^{n-1}$.*

dokaz. Ako je $det(A) = 0$ onda je po tvrđenju 11.20 i $det(adj(A)) = 0$ pa tvrđenje važi. Ako je $det(A) \neq 0$, onda je dovoljno podeliti $det(A)\, det(adj(A)) = (det(A))^n$ sa $det(A)$. ⊣

§11.3. Kramerova teorema

Neka je dat sistem n linearnih jednačina sa n promenljivih:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{n1}x_1+ & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array}$$

Matrično, ovaj sistem možemo zapisati kao:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

odnosno

$$AX = B.$$

Neka je $\Delta = det(A)$, a Δ_i neka je determinanta matrice nastale zamenom i-te kolone matrice A kolonom B, to jest

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1\ a_{12} \dots\ a_{1n} \\ \vdots \\ b_n\ a_{n2} \dots\ a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}\ b_1 \dots\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ b_n \dots\ a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n-1}\ b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn-1}\ b_n \end{vmatrix}.$$

Teorema 11.22 (Kramer). *(1) Gorenavedeni sistem ima jedinstveno rešenje akko je $\Delta \neq 0$; u tom slučaju je:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

(2) Ako je $\Delta = 0$ i za neko $1 \leq i \leq n$ je $\Delta_i \neq 0$, onda gorenavedeni sistem nema rešenja.

dokaz. (1) Pretpostavimo da je $\Delta \neq 0$. Tada je

$$AX = B \Leftrightarrow \Delta X = adj(A)\, B$$

a pošto je $adj(A)\, B = \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$, dobijamo jedinstveno rešenje koje je navedeno.

Ako je je $\Delta = 0$, onda je matrica A singularna i $rank(A) = r < n$. Po teoremi 5.4, dimenzija prostora rešenja odgovarajućeg homogenog sistema je $n - r$, pa po tvrđenju 1.6 ako polazni sistem ima partikularno rešenje, ono ne može biti jedinstveno.

(2) Pretpostavimo da je $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ rešenje sistema, to jest, važi $A\vec{v} = B$. Odavde sledi da važi $adj(A)\, A\vec{v} = adj(A)\, B$, pa je $\Delta\vec{v} = adj(A)\, B$. Pošto je $\Delta = 0$, dobijamo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\Delta_i \neq 0$ za neko $1 \leq i \leq n$. $\dashv$

U slučaju kada je $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$, Kramerova teorema nam daje samo da ukoliko sistem ima rešenja, ima ih beskonačno mnogo. Ovo se posebno odnosi na homogen sistem n jednačina sa n promenljivih koji uvek ima trivijalno rešenje te onda znamo da $\Delta = 0$ povlači postojanje beskonačno mnogo rešenja.

§12. Dvanaesta nedelja

§12.1. Linearni operatori i sličnost matrica

Poslednja dva odeljka su posvećena linearnim preslikavanjima koja preslikavaju vektorski prostor u samog sebe. Takva linearna preslikavanja nazivamo *endomorfizmima* ili *linearnim operatorima*. Označimo sa $\mathcal{L}(V)$ skup svih linearnih operatora na vektorskom prostoru V ($\mathcal{L}(V,V)$ u notaciji uvedenoj u 8.2). Po tvrđenju 8.12, to je vektorski prostor (potprostor od V^V) i još je $\mathcal{L}(V)$ zatvoren za kompoziciju preslikavanja.

Na osnovu dokaza tvrđenja 9.10 i 9.13 imamo

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$
$$(h+g) \circ f = (h \circ f) + (g \circ f), \quad h \circ (g+f) = (h \circ g) + (h \circ f),$$

pa je $(\mathcal{L}(V), +, \circ, -, 0_{n\times n}, E_n)$ prsten sa jedinicom u kome još važi

$$(ch) \circ g = h \circ (cg) = c(h \circ g).$$

Ovo znači da $\mathcal{L}(V)$ ima strukturu $\mathbf{R}$-*algebre*. Isto tako i $\mathcal{M}_n$ ima strukturu $\mathbf{R}$-algebre. Neka je $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom sa realnim koeficijentima. Za $h \in \mathcal{L}(V)$ definišemo $p(h)$, to jest $a_n h^n + \ldots + a_1 h + a_0 \in \mathcal{L}(V)$ kao

$$a_n \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{n} + \ldots + a_1 h + a_0 \mathbf{1}_V.$$

Analogno, za $H \in \mathcal{M}_n$ definišemo $p(H)$, to jest $a_n H^n + \ldots + a_1 H + a_0 \in \mathcal{M}_n$ kao

$$a_n \underbrace{H \ldots H}_{n} + \ldots + a_1 H + a_0 E_n.$$

Iz gorenavedenih jednakosti i komutativnosti množenja polinoma dobijamo:

Tvrđenje 12.0. *Ako je $p(x) = q(x) \cdot r(x)$, onda je*

$$p(h) = q(h) \circ r(h) = r(h) \circ q(h) \quad i \quad p(H) = q(H)r(H) = r(H)q(H).$$

U sekciji 10.4 smo definisali kada su dve matrice matrično ekvivalentne. Sad ćemo definisati relaciju na $\mathcal{M}_n$ koja predstavlja profinjenje relacije matrične ekvivalencije.

Definicija. Matrice H i H' su *slične* kada postoji nesingularna matrica P takva da je $H' = P^{-1}HP$. Matrica P je *matrica prelaza*.

Tvrđenje 12.1. *Sličnost matrica je relacija ekvivalencije.*

DOKAZ. (refleksivnost) $H = E_n H E_n$; (simetričnost) ako je $H' = P^{-1}HP$, onda je $H = PH'P^{-1}$; (tranzitivnost) ako je $H' = P^{-1}HP$ i $H'' = Q^{-1}H'Q$, onda je $H'' = (PQ)^{-1}HPQ$. ⊣

PRIMER. Nula matrici je slična samo ona sama jer je $P^{-1}0_{n\times n}P = 0_{n\times n}$. Takođe, jediničnoj matrici je slična samo ona sama jer je $P^{-1}E_nP = E_n$. Ako su dve matrice slične onda su one i matrično ekvivalentne. Obrat ne važi.

TVRĐENJE 12.2. *Ako su matrice $H, G \in \mathcal{M}_n$ slične, onda:*

(1) $det(H) = det(G)$,

(2) za proizvoljan polinom $p(x)$, matrice $p(H)$ i $p(G)$ su takođe slične sa istom matricom prelaza kao i H i G.

DOKAZ. Neka je $H = P^{-1}GP$. Tada je uz pomoć teoreme 11.16

$$\begin{aligned} det(H) &= det(P^{-1})\cdot det(G)\cdot det(P) = det(P^{-1})\cdot det(P)\cdot det(G) = det(E_n)\cdot det(G) \\ &= det(G) \end{aligned}$$

i još je zbog distributivnosti i zato što je $H^k = (P^{-1}GP)^k = P^{-1}G^kP$,

$$P^{-1}(a_mG^m + \ldots + a_1G + a_0E_n)P = a_mH^m + \ldots + a_1H + a_0E_n.$$ ⊣

§12.2. Dijagonalizabilnost

U primeru iz sekcije 10.4 smo videli da je reprezentacija $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$, linearnog operatora $t\colon V \to V$ dijagonalna kada za svako $\vec{\beta}_i \in \mathcal{B}$ postoji $\lambda_i \in \mathbf{R}$, tako da važi $t(\vec{\beta}_i) = \lambda_i\vec{\beta}_i$.

DEFINICIJA. Linearni operator $t\colon V \to V$ je *dijagonalizabilan* kada postoji baza $\mathcal{B}$ za V takva da je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$ dijagonalna matrica. Matrica je *dijagonalizabilna* kada postoji dijagonalna matrica koja joj je slična.

PRIMER. Može se pokazati da postoje matrice koje nisu dijagonalizabilne. Na primer, matrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nije dijagonalizabilna jer bi dijagonalna matrica D slična matrici A bila ne-nula matrica po gornjem primeru. Po tvrđenju 12.2, matrice $A^2 = 0_{2\times 2}$ i D^2 bi bile slične što je nemoguće jer D^2 ne bi bila nula matrica.

TVRĐENJE 12.3. *Linearni operator $t\colon V \to V$ je dijagonalizabilan akko postoji baza $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \ldots, \vec{\beta}_n \rangle$ za V i skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tako da za svako $1 \leq i \leq n$ važi $t(\vec{\beta}_i) = \lambda_i\vec{\beta}_i$.*

DOKAZ. Direktno po definiciji reprezentacije linearnog preslikavanja imamo da je

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$ akko za svako $1 \leq i \leq n$ važi $t(\vec{\beta}_i) = \lambda_i\vec{\beta}_i$. ⊣

Primer 2. Ako hoćemo da dijagonalizujemo matricu $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ poći ćemo od toga da je $T = Rep_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}(t)$ za linearno preslikavanje $t\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Treba da odredimo bazu $\mathcal{B} = \langle \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2 \rangle$ za $\mathbf{R}^2$ i skalare λ_1 i λ_2 takve da je $t(\vec{\beta}_1) = \lambda_1 \vec{\beta}_1$ i $t(\vec{\beta}_2) = \lambda_2 \vec{\beta}_2$, to jest

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\beta}_1 = \lambda_1 \vec{\beta}_1, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\beta}_2 = \lambda_2 \vec{\beta}_2.$$

Posmatrajmo jednačinu po nepoznatim x, b_1 i b_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

za koju treba odrediti dva rešenja takva da $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ iz prvog rešenja i $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ iz drugog rešenja budu linearno nezavisni. Gornja jednačina nam daje nelinearan sistem

$$\begin{aligned} (3-x)b_1 + \quad 2b_2 &= 0 \\ (1-x)b_2 &= 0 \end{aligned}$$

koji možemo posmatrati kao linearni sistem s parametrom x po b_1 i b_2. Po Kramerovoj teoremi on ima netrivijalno rešenje akko je $\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0$, što je ekvivalentno sa $x = 3$ ili $x = 1$. Za $x = 3$ imamo da je skup rešenja gornjeg sistema oblika

$$\{\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b_1 \in \mathbf{R}\} = \{b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b_1 \in \mathbf{R}\},$$

dok je za $x = 1$ skup rešenja gornjeg sistema oblika

$$\{\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \mid b_2 \in \mathbf{R}\} = \{b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid b_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Pošto su vektori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linearno nezavisni imamo da je $\mathcal{B} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ baza za $\mathbf{R}^2$ i

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§12.3. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori

Definicija. Ako za linearni operator $t\colon V \to V$, ne-nula vektor $\vec{v} \in V$ i skalar λ važi da je $t(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, onda kažemo da je $\vec{v}$ *sopstveni vektor* koji odgovara *sopstvenoj vrednosti* λ operatora t.

Definicija. Ako za matricu $T \in \mathcal{M}_n$, ne-nula vektor $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ i skalar λ važi da je $T\vec{v} = \lambda \vec{v}$, onda kažemo da je $\vec{v}$ *sopstveni vektor* koji odgovara *sopstvenoj vrednosti* λ matrice T.

NAPOMENA 12.4. *Ako je λ sopstvena vrednost za linearni operator, onda je λ sopstvena vrednost za bilo koju reprezentaciju, u odnosu na par istih baza, tog operatora. Znači slične matrice imaju iste sopstvene vrednosti. Međutim, to ne znači da slične matrice imaju iste sopstvene vektore.*

DEFINICIJA. *Karakteristični polinom* matrice $T \in \mathcal{M}_n$ je $det(T - xE_n)$ posmatrana kao polinom po promenljivoj x. *Karakteristična jednačina* te matrice je

$$det(T - xE_n) = 0.$$

Karakteristični polinom linearnog operatora je karakteristični polinom bilo koje njegove reprezentacije, u odnosu na par istih baza.

NAPOMENA 12.5. *Skalar λ je sopstvena vrednost matrice akko je λ nula karakterističnog polinoma te matrice.*

DOKAZ. Ovo važi zbog toga što je λ nula karakterističnog polinoma matrice T akko jednačina $T\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ima netrivijalno rešenje po $\vec{v}$. ⊣

TVRĐENJE 12.6. *Slične matrice imaju iste karakteristične polinome.*

DOKAZ. U osnovi, ovo se može pokazati pomoću tvrđenja 12.2. Za direktan dokaz pretpostavimo da je $T = P^{-1}T'P$. Tada važi:

$$\begin{aligned}
det(T - xE_n) &= det(P^{-1}T'P - xE_n) = det(P^{-1}T'P - xP^{-1}E_nP) \\
&= det(P^{-1}T'P - P^{-1}(xE_n)P) = det(P^{-1}(T' - xE_n)P) \\
&= det(P^{-1})\, det(T' - xE_n)\, det(P) \\
&= det(E_n)\, det(T' - xE_n) = det(T' - xE_n).
\end{aligned}$$ ⊣

DEFINICIJA. *Sopstveni prostor* linearnog operatora $t : V \to V$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ je skup $V_\lambda = \{\vec{v} \in V \mid t(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$. Na isti način definišemo *sopstveni prostor* matrice $T \in \mathcal{M}_n$ kao potskup od $\mathbf{R}^n$.

TVRĐENJE 12.7. *Sopstveni prostor je potprostor od V.*

DOKAZ. Neka je λ sopstvena vrednost linearnog operatora $t : V \to V$. Pošto je $t(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda\vec{0}$, to je $\vec{0} \in V_\lambda$, pa je V_λ neprazan. Još treba proveriti da je zatvoren za linearne kombinacije dva vektora. Neka su $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_\lambda$, što znači da je $t(\vec{v}_1) = \lambda\vec{v}_1$ i $t(\vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_2$ i neka su $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Tada je

$$\begin{aligned}
t(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) &= c_1t(\vec{v}_1) + c_2t(\vec{v}_2) = c_1\lambda\vec{v}_1 + c_2\lambda\vec{v}_2 \\
&= \lambda(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2),
\end{aligned}$$

pa je znači i $(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2)$ u V_λ. Dakle, po tvrđenju 3.1, V_λ je potprostor od V. $\dashv$

Primer. U drugom primeru iz sekcije 12.2, sopstveni prostor koji odgovara sopstvenoj vrednosti 3 je sledeći potprostor od $\mathbf{R}^2$

$$\{\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b_1 \in \mathbf{R}\} = \{b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid b_1 \in \mathbf{R}\},$$

dok je sopstveni prostor koji odgovara sopstvenoj vrednosti 1 sledeći potprostor od $\mathbf{R}^2$

$$\{\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \mid b_2 \in \mathbf{R}\} = \{b_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid b_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Definicija. Dimenzija prostora V_λ je *geometrijska višestrukost* sopstvene vrednosti λ dok je njena *algebarska višestrukost*, višestrukost korena λ karakterističnog polinoma.

Definicija. *Trag* matrice $A \in \mathcal{M}_n$ je suma njenih elemenata na glavnoj dijagonali $tr(A) =_{df} a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Napomena 12.8. *Karakteristični polinom matrice $A \in \mathcal{M}_2$ je uvek oblika $x^2 - tr(A)x + det(A)$.*

dokaz. Proverom direktno iz definicije karakterističnog polinoma. $\dashv$

Dosta lako se pokazuje da je koeficijent uz x^{n-1} karakterističnog polinoma matrice $A \in \mathcal{M}_n$ uvek $(-1)^{n-1}tr(A)$, što po tvrđenju 12.6 znači da slične matrice imaju isti trag.

Teorema 12.9. *Ako su $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ linearnog operatora t, onda je $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ linearno nezavisan skup.*

dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po k. Za $k = 1$, pošto je $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, to je $\{\vec{v}_1\}$ linearno nezavisan.

Pretpostavimo da je $k \geq 2$ i da je $c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_{k-1}\vec{v}_{k-1} + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$. S jedne strane pomnožimo tu jednakost sa λ_k a s druge strane primenimo t na ovu jednakost i dobijamo

$$c_1\lambda_k\vec{v}_1 + \ldots + c_{k-1}\lambda_k\vec{v}_{k-1} + c_k\lambda_k\vec{v}_k = \vec{0},$$

$$c_1\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + c_{k-1}\lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1} + c_k\lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

Kad od prve jednakosti oduzmemo drugu dobijamo

$$c_1(\lambda_k - \lambda_1)\vec{v}_1 + \ldots + c_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\vec{v}_{k-1} = \vec{0},$$

odakle, po indukcijskoj pretpostavci, dobijamo da je

$$c_1(\lambda_k - \lambda_1) = \ldots = c_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0.$$

Pošto je $\lambda_k \neq \lambda_i$ za $1 \leq i \leq k-1$, sledi da je $c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$. Iz polazne jednakosti dobijamo $c_k\vec{v}_k = \vec{0}$, pa pošto je $\vec{v}_k \neq \vec{0}$, to je i $c_k = 0$. ⊣

Posledica 12.10. *Ako matrica iz $\mathcal{M}_n$ ima n različitih sopstvenih vrednosti onda je ona dijagonalizabilna.*

dokaz. Direktno iz teoreme 12.9 i tvrđenja 12.3. ⊣

§12.4. Homogene linearne diferencne jednačine

Ovde će biti dat primer primene linearne algebre koji se uz male modifikacije više puta sreće u matematici. Krenućemo od Fibonačijevog niza $(F_n)_{n\in N}$ koji je zadat uslovima $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ i $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$. Cilj je da se *eksplicitno* zada niz $(F_n)_{n\in N}$, to jest odredi izraz koji zadaje funkciju $F\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ takvu da je $F(n) = F_n$.

Posmatrajmo skup U svih realnih nizova $(x_n)_{n\in N}$ koji zadovoljavaju uslov

$$(*) \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

Svaki takav niz je potpuno određen parom (x_0, x_1), to jest za svaki par realnih brojeva postoji tačno jedan niz koji počinje tim parom i koji zadovoljava gornji uslov.

Neka je $V = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ prostor svih realnih nizova (videti sedmi primer u sekciji 2.2). Taj prostor je beskonačnodimenzionalan. Lako se proverava da je sa

$$L(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

zadat linearan operator $L\colon V \to V$. Ako sa $\phi(x)$ označimo polinom $x^2 - x - 1$, onda

$$\phi(L)(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_2 - x_1 - x_0, x_3 - x_2 - x_1, x_4 - x_3 - x_2, \ldots).$$

To znači da $\phi(L)$ primenjen na niz koji zadovoljava $(*)$ daje nula niz i obrnuto, svaki niz koji se slika u nula niz pomoću $\phi(L)$ zadovoljava $(*)$. Dakle, U je $Ker(\phi(L))$, pa samim tim i potprostor od V. Pokazaćemo da je U dvodimenzionalan i eksplicitno ćemo odrediti dva niza $(\beta^1_n)_{n\in N}$ i $(\beta^2_n)_{n\in N}$ od kojih se može formirati njegova baza. Pošto Fibonačijev niz $(F_n)_{n\in N}$ pripada prostoru U, za svako n će važiti da je $F_n = c_1\beta^1_n + c_2\beta^2_n$, a skalare c_1 i c_2 ćemo odrediti iz uslova $F_0 = 0$ i $F(1) = 1$. Sve ovo ćemo uraditi za opšti slučaj.

Neka je $\phi(x)$ polinom $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1x + a_0$ za $k \geq 1$. Neka je $U = Ker(\phi(L))$ potprostor od V. Kao i u gornjem primeru, jasno je da je U skup svih realnih nizova $(x_n)_{n\in N}$ koji zadovoljavaju uslov

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0.$$

Taj uslov se zove *homogena linearna diferencna jednačina sa konstantnim koeficijentima* stepena k.

Lako se proverava da je sa

$$\iota(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots) = (x_0, \ldots, x_{k-1})$$

zadato linearno preslikavanje $\iota \colon U \to \mathbf{R}^k$ koje je **1-1** i **na** zato što je svaki niz $(x_n)_{n \in N}$ iz U potpuno određen k-torkom $(x_0, \ldots, x_{k-1})$. Dakle, $U \cong \mathbf{R}^k$, pa je $dim(U) = k$.

Ako je $k = 1$, onda naša diferencna jednačina glasi $x_{n+1} + a_0 x_n = 0$ i skup U njenih rešenja je skup *geometrijskih nizova* oblika $x_n = (-a_0)^n x_0$. Baza prostora U je tada jednočlana i data je recimo realnim nizom β takvim da je $\beta_0 = 1$ i za svako $n \geq 1$ je $\beta_n = (-a_0)^n$.

Pretpostavimo da se polinom $\phi(x)$, za međusobno različite $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $k \geq 2$, faktoriše kao

$$(x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k).$$

Tada po tvrđenju 12.0 za proizvoljnu permutaciju π skupa $\{1, \ldots, k\}$ važi da je

$$\phi(L) = (L - \lambda_{\pi(1)}) \circ \ldots \circ (L - \lambda_{\pi(k)}),$$

pa je za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$, prostor $Ker(L - \lambda_i)$ potprostor od $Ker(\phi(L)) = U$.

Kao i u slučaju $k = 1$, svaki prostor $Ker(L - \lambda_i)$ je jednodimenzionalan i predstavlja skup rešenja diferencne jednačine $x_{n+1} - \lambda_i x_n = 0$. Njegova baza je data nizom β^i takvim da je $\beta^i_0 = 1$ i za svako $n \geq 1$ je $\beta^i_n = (\lambda_i)^n$. Pokažimo da je skup $\{\beta^1, \ldots, \beta^k\}$ linearno nezavisan.

Po tvrđenju 8.8 i lemi 8.3, dovoljno je proveriti da je skup $\{\iota(\beta^1), \ldots, \iota(\beta^k)\} \subseteq \mathbf{R}^k$ linearno nezavisan. Posmatrajmo matricu $A \in \mathcal{M}_k$ čije su vrste vektori $\iota(\beta^1), \ldots, \iota(\beta^k)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{k-1} \\ & & \ldots & \\ 1 & \lambda_k & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

Po teoremi 11.15 i posledici 10.5 $det(A) \neq 0$ garantuje linearnu nezavisnost skupa $\{\iota(\beta^1), \ldots, \iota(\beta^k)\}$. Determinanta $det(A)$ je *Vandermondova* determinanta i jednaka je

$$\prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Ovo pokazujemo indukcijom po $k \geq 2$.

(**baza indukcije**) Ako je $k = 2$, onda je $det(A) = \lambda_2 - \lambda_1$.

(**induktivni korak**) Ako je $k > 2$, onda primenimo $k - 1$ kolona transformacija $-\lambda_1 \gamma_{k-1} + \gamma_k$, $-\lambda_1 \gamma_{k-2} + \gamma_{k-1}$ i tako dalje do poslednje $-\lambda_1 \gamma_1 + \gamma_2$ i tako dobijamo matricu

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \ldots & (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{k-2} \\ & & \ldots & \\ 1 & \lambda_k - \lambda_1 & \ldots & (\lambda_k - \lambda_1)\lambda_k^{k-2} \end{pmatrix}$$

takvu da je $det(A) = det(A')$. Kada izvučemo zajedničke faktore iz vrsta i razvijemo determinantu po prvoj vrsti dobijamo da je

$$det(A') = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - \lambda_1) \cdot det(A'')$$

gde je

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{k-2} \\ 1 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_3^{k-2} \\ & & \ldots & \\ 1 & \lambda_k & \ldots & \lambda_k^{k-2} \end{pmatrix}$$

Po induktivnoj hipotezi

$$det(A'') = \prod_{2 \le i < j \le k} (\lambda_j - \lambda_i),$$

pa $det(A)$ ima traženu formu.

Iz toga što su svi λ_i međusobno različiti, zaključujemo da je $det(A) \neq 0$, pa skup $\{\beta^1, \ldots, \beta^k\}$ daje bazu za U. Prema tome, svaki niz iz U se može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija elemenata tog skupa. Skalare u toj linearnoj kombinaciji koji određuju jedno partikularno rešenje dobijamo iz datih k početnih uslova.

Vratimo se na Fibonačijev niz. Polinom $\phi(x) = x^2 - x - 1$ se faktoriše kao

$$(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2})(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}).$$

Prema prethodnom razmatranju dobijamo da nizovi β^1 i β^2 zadati sa

$$\beta_n^1 = (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})^n \quad \text{i} \quad \beta_n^2 = (\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^n$$

čine bazu za U. Prema tome Fibonačijev niz F je linearna kombinacija nizova β^1 i β^2

$$F_n = c_1 \beta_n^1 + c_2 \beta_n^2.$$

Konstante $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ i $c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ nalazimo iz uslova

$$0 = F_0 = c_1 \beta_0^1 + c_2 \beta_0^2 = c_1 + c_2 \quad \text{i} \quad 1 = F_1 = c_1 \beta_1^1 + c_2 \beta_1^2 = c_1 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Dakle,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})^n).$$

§13. Trinaesta nedelja

§13.1. Minimalan polinom

Ako je $\mathcal{B}$ baza za n-dimenzionalni prostor V, $t \in \mathcal{L}(V)$, $T = Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$ matrica i $p(x)$ neki polinom, onda je po tvrđenjima 9.8-9 i 9.12

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p(t)) = p(T) = a_m T^m + \ldots + a_1 T + a_0 E_n.$$

Pošto je dimenzija prostora $\mathcal{M}_n$ jednaka n^2 sledi da je $\{E_n, T, T^2, \ldots, T^{n^2}\}$ linearno zavisan skup pa postoji netrivijalan polinom $p(x) \in \mathcal{P}_{n^2}$ takav da je $p(T) = 0_{n\times n}$. Odavde zaključujemo da je $p(t)$ *nula preslikavanje* (svaki vektor iz V slika u $\vec{0}$).

Definicija. *Minimalan* polinom endomorfizma $t\colon V \to V$ je polinom $m(x)$ najmanjeg stepena, čiji je vodeći koeficijent 1, takav da je $m(t)$ nula preslikavanje. *Minimalan* polinom matrice $T \in \mathcal{M}_n$ je polinom $m(x)$ najmanjeg stepena, čiji je vodeći koeficijent 1, takav da je $m(T)$ nula matrica.

Tvrđenje 13.1. *Svaka matrica iz $\mathcal{M}_n$ ima jedinstven minimalan polinom. Slične matrice imaju isti minimalan polinom.*

dokaz. Po gornjim komentarima, za svaku matricu $T \in \mathcal{M}_n$ postoji netrivijalan polinom $p(x) \in \mathcal{P}_{n^2}$ takav da je $p(T)$ nula matrica. Neka je $p(x)$ netrivijalan polinom najmanjeg stepena takav da je $p(T)$ nula matrica. Ako $p(x)$ pomnožimo recipročnom vrednošću vodećeg koeficijenta dobićemo polinom čiji je vodeći koeficijent jednak 1 i on je po definiciji minimalan polinom matrice T.

Ako bi postojala dva minimalna polinoma $m_1(x)$ i $m_2(x)$ stepena k, onda je njihova razlika $r(x) = m_1(x) - m_2(x)$ polinom u $\mathcal{P}_{k-1}$ takav da je $r(T)$ nula matrica pa $r(x)$ mora biti trivijalan polinom, što znači da je $m_1(x) = m_2(x)$.

Po tvrđenju 12.2, slične matrice imaju isti minimalan polinom. $\dashv$

Posledica 13.2. *Svaki linearan operator ima jedinstven minimalan polinom.*

Primer. Neka je $t\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ rotacija ravni za ugao $\frac{\pi}{6} = 30°$ (videti drugi primer u sekciji 9.1). Tada je t reprezentovano u odnosu na par standardnih baza matricom

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Kako je $T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, lako vidimo da je $T^2 - \sqrt{3}T + E_2$ nula matrica, pa je $m(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 1$ minimalan polinom za T, pošto su T i E_2 linearno nezavisni.

Tvrđenje 13.3. *Ako se polinom $p(x)$ faktoriše kao $c(x-\lambda_1)^{q_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)^{q_k}$, onda za endomorfizam $t\colon V\to V$ važi da je*

$$p(t) = c(t-\lambda_1)^{q_1}\circ\ldots\circ(t-\lambda_k)^{q_k}.$$

dokaz. Direktno iz tvrđenja 12.0. ⊣

Kao posledicu možemo zaključiti da ako se minimalan polinom $m(x)$ linearnog preslikavanja $t\colon V\to V$, za netrivijalan prostor V, faktoriše kao

$$m(x) = (x-\lambda_1)^{q_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)^{q_k},$$

onda se, pošto $m(t)$ slika svaki vektor iz V u $\vec{0}$, bar jedan ne-nula vektor iz V slika sa nekim $t-\lambda_i$ u $\vec{0}$, što znači da je bar jedno λ_i sopstvena vrednost preslikavanja t. Cilj nam je da pokažemo da će sve sopstvene vrednosti za t biti koreni minimalnog polinoma za t i da će minimalan polinom za t deliti karakteristični polinom za t.

Teorema 13.4 (Kejli-Hamilton). *Ako se karakteristični polinom linearnog operatora t faktoriše kao*

$$c(x-\lambda_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)^{p_k},$$

onda se minimalan polinom za t faktoriše kao

$$(x-\lambda_1)^{q_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)^{q_k},$$

gde je $1\le q_i\le p_i$ za svako $1\le i\le k$.

Da bismo dokazali ovu teoremu primetimo sledeće. Ako imamo neku matricu tipa $n\times n$, čiji su elementi polinomi iz $\mathcal{P}_m$, onda je možemo izraziti kao polinom iz $\mathcal{P}_m$ čiji su koeficijenti iz $\mathcal{M}_n$ (matrice tipa $n\times n$ nad $\mathbf{R}$). Na primer,

$$\begin{pmatrix} x^2+2x-3 & 2x^2-1 \\ 3x+2 & x^2-3 \end{pmatrix} = x^2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dokaz teoreme 13.4 ćemo izvesti pomoću sledeće tri leme.

Lema 13.5. *Ako je $p(x)$ karakteristični polinom kvadratne matrice T, onda je $p(T)$ nula matrica.*

dokaz. Neka je $p(x) = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$ i neka je A matrica $T - xE_n$, čija je determinanta jednaka $p(x)$.

$$A = \begin{pmatrix} t_{11}-x & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22}-x & \ldots & t_{2n} \\ & & \ldots & \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn}-x \end{pmatrix}.$$

Primetimo da je svaki kofaktor A_{ij} polinom iz $\mathcal{P}_{n-1}$, pa je po gornjem komentaru matricu $adj(A)$ moguće zapisati kao $x^{n-1}C_{n-1} + \ldots + xC_1 + C_0$, gde su sve matrice C_i iz $\mathcal{M}_n$. Dakle imamo:

$$p(x)E_n = det(A)E_n = adj(A)\,A = (x^{n-1}C_{n-1} + \ldots + xC_1 + C_0)(T - xE_n),$$

odnosno

$$\begin{aligned} p(x)E_n &= x^{n-1}C_{n-1}T - x^nC_{n-1} + \ldots + xC_1T - x^2C_1 + C_0T - xC_0 \\ &= -x^nC_{n-1} + x^{n-1}(C_{n-1}T - C_{n-2}) + \ldots + x(C_1T - C_0) + C_0T. \end{aligned}$$

Kad levu i desnu stranu izjednačimo po stepenima promenljive x dobijamo:

$$\begin{aligned} p_nE_n &= -C_{n-1} \\ p_{n-1}E_n &= C_{n-1}T - C_{n-2} \\ &\ldots \\ p_1E_n &= C_1T - C_0 \\ p_0E_n &= C_0T. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednakost zdesna sa T^n, drugu zdesna sa T^{n-1} i tako dalje, do pretposlednje koju množimo zdesna sa T. Kada saberemo leve strane dobijamo $p(T)$ a desne strane se ponište i daju nula matricu. $\dashv$

Lema 13.6. *Ako je $m(x)$ minimalan polinom kvadratne matrice T i $p(x)$ polinom takav da je $p(T)$ nula matrica, onda $m(x)$ deli $p(x)$.*

dokaz. Po algoritmu deljenja polinoma postoje polinomi $q(x)$ i $r(x)$ takvi da je $p(x) = q(x)m(x)+r(x)$ i još je stepen polinoma $r(x)$ striktno manji od stepena polinoma $m(x)$. Kad x zamenimo sa T dobijamo $0 = p(T) = q(T)m(T) + r(T) = 0 + r(T) = r(T)$. Pošto je $m(x)$ minimalan polinom matrice T a $r(x)$ je manjeg stepena od $m(x)$, to je $r(x) = 0$. Dakle, $p(x) = q(x)m(x)$. $\dashv$

Lemma 13.7. *Ako je λ sopstvena vrednost kvadratne matrice T i $p(x)$ polinom takav da je $p(T)$ nula matrica, onda je $p(\lambda) = 0$.*

dokaz. Neka je $\vec{v}$ sopstveni vektor matrice T koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Onda je $\vec{v}$ sopstveni vektor matrice T^2 koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ^2 zato što je

$$T^2\vec{v} = T(T\vec{v}) = T\lambda\vec{v} = \lambda T\vec{v} = \lambda^2\vec{v}.$$

Indukcijom možemo zaključiti za svako $k \in \mathbf{N}$ da je $\vec{v}$ sopstveni vektor matrice T^k koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ^k. Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= p(T)\vec{v} = (p_mT^m + p_{m-1}T^{m-1} + \ldots + p_0)\vec{v} \\ &= p_mT^m\vec{v} + p_{m-1}T^{m-1}\vec{v} + \ldots + p_0\vec{v} \\ &= p_m\lambda^m\vec{v} + p_{m-1}\lambda^{m-1}\vec{v} + \ldots + p_0\vec{v} = p(\lambda)\vec{v}, \end{aligned}$$

gde je $p(x) = p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \ldots + p_0$. Odavde sledi da je $p(\lambda) = 0$, pošto je $\vec{v}$ ne-nula vektor. $\dashv$

Teorema 13.4 je posledica lema 13.5-7. Po lemama 13.5-6 dobijamo da je karakteristični polinom deljiv minimalnim polinomom matrice, pa odatle imamo $q_i \leq p_i$ za svako $1 \leq i \leq k$ u formulaciji teoreme. Iz leme 13.7 sledi da je svaka sopstvena vrednost λ neke matrice koren minimalnog polinoma $m(x)$ te matrice, pa je po Bezuovoj teoremi, $m(x)$ deljiv sa $x - \lambda$. Odatle dobijamo ono $1 \leq q_i$ za svako $1 \leq i \leq k$ u formulaciji teoreme.

Primer. Odrediti minimalan polinom matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Karakteristični polinom matrice A je $det(A - xE_3) = (2-x)(3-x)^2$ pa je ili $(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ ili $(x-2)(x-3)^2 = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$ minimalan polinom matrice A. Pošto je $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -5 \\ 5 & 14 & 5 \\ -5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, lako vidimo da je $A^2 - 5A + 6E_3$ nula matrica, pa je $x^2 - 5x + 6$ minimalan polinom za A.

§13.2. Nilpotentnost

Ograničenje (*restrikcija*) preslikavanja t na podskup S od V označavamo sa $t\restriction_S$. Lako se vidi da je ograničenje linearnog preslikavanja na potprostor domena takođe linearno preslikavanje.

Definicija. Linearni operator $t\colon V \to V$ je *nilpotentan* kada postoji $k \geq 1$ takvo da je t^k nula preslikavanje. Matrica A je *nilpotentna* kada postoji $k \geq 1$ takvo da je A^k nula matrica. U oba slučaja, najmanje takvo k se zove *indeks nilpotencije*.

Definicija. Neka je $t : V \to V$ linearan operator i $\vec{v} \in V$ takav da su svi vektori $\vec{v}$, $t(\vec{v}), \ldots,$ $t^{k-1}(\vec{v})$ različiti od $\vec{0}$, dok je $t^k(\vec{v}) = \vec{0}$. Kažemo da je $\langle \vec{v}, t(\vec{v}), \ldots, t^{k-1}(\vec{v}) \rangle$ jedan *t-niz* generisan vektorom $\vec{v}$. Za bazu od V kažemo da je *baza t-nizova* kada je ona nastala nadovezivanjem t-nizova.

Tvrđenje 13.8. *Neka je $t\colon V \to V$ nilpotentan i neka je $\mathcal{B}$ baza t-nizova za V. Tada je dužina najdužeg t-niza u $\mathcal{B}$ jednaka indeksu nilpotencije od t.*

dokaz. Neka je k indeks nilpotencije od t. Jasno je da nijedan od t-nizova koji čine bazu ne može biti duži od k. Pretpostavimo da su svi kraći od k. Pošto je indeks nilpotencije jednak k to postoji $\vec{v} \in V$ takav da je $t^{k-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$. Kad razvijemo $\vec{v}$ po bazi $\mathcal{B}$ i primenimo t^{k-1}, dobićemo da je ne-nula vektor jednak nula vektoru, što je nemoguće. $\dashv$

Napomena 13.9. *Ako V ima bazu t-nizova, gde je $t : V \to V$ linearan operator, onda je u odnosu na tu bazu, t reprezentovan matricom koja ima sve nule osim što ima negde jedinice odmah ispod glavne dijagonale. Ukoliko bismo unutar t-nizova obrnuli redosled, dobili bismo reprezentaciju od t koja bi imala sve nule osim nekih jedinica odmah* iznad *glavne dijagonale. U literaturi se to češće uzima za normalnu formu a mi smo zadržali onu datu u* [2].

Primer. Neka je $\mathcal{B} = \langle \vec{v}, t(\vec{v}), t^2(\vec{v}), \vec{w}, t(\vec{w}) \rangle$ baza za V. Tada je

$$Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 13.10. *Za svaki nilpotentan $t \colon V \to V$ postoji baza t-nizova za V.*

dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po indeksu nilpotencije k preslikavanja t.

(**baza indukcije**) Ako je $k = 1$, onda je t jedno nula preslikavanje i svaka baza je jedna baza t-nizova (svi su jednočlani).

(**induktivni korak**) Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svaki operator čiji je indeks nilpotencije manji od k. Posmatrajmo ograničenje $t\restriction_{Im(t)} \colon Im(t) \to Im(t)$ čiji je indeks nilpotencije jednak $k-1$. Po induktivnoj pretpostavci $Im(t)$ ima bazu t-nizova i neka je ona sledećeg oblika (uzimamo konkretan primer da se ne bismo mučili s indeksima)

$$\mathcal{B} = \langle \vec{v}, t(\vec{v}), t^2(\vec{v}),\ \vec{w}, t(\vec{w}) \rangle.$$

Vidimo da poslednji članovi t-nizova $t^2(\vec{v})$ i $t(\vec{w})$ pripadaju $Ker(t)$. Možemo pokazati da je $\langle t^2(\vec{v}), t(\vec{w}) \rangle$ jedna baza za $Im(t) \cap Ker(t)$. Ako je $\vec{u} \in Im(t) \cap Ker(t)$, onda je

$$\vec{u} = a\vec{v} + a_1 t(\vec{v}) + a_2 t^2(\vec{v}) + b\vec{w} + b_1 t(\vec{w})$$

pa kad primenimo t dobijamo $\vec{0} = at(\vec{v}) + a_1 t^2(\vec{v}) + \vec{0} + bt(\vec{w}) + \vec{0}$. Odavde, zbog linearne nezavisnosti vektora baze $\mathcal{B}$, dobijamo da je $a = a_1 = b = 0$ pa se $\vec{u}$ nalazi u linearnom omotaču skupa $\{t^2(\vec{v}), t(\vec{w})\}$ koji je linearno nezavisan pa je neuređena baza za $Im(t) \cap Ker(t)$.

Po tvrđenju 4.8, postoje $\vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_l$ takvi da je $\langle t^2(\vec{v}), t(\vec{w}), \vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_l \rangle$ baza za $Ker(t)$. Možemo pokazati da je $\langle \vec{v}, t(\vec{v}), \vec{w}, t^2(\vec{v}), t(\vec{w}), \vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_l \rangle$ baza za $Im(t) + Ker(t)$. Jasno je da ti vektori razapinju $Im(t) + Ker(t)$ i ima ih $5 + l$. Po teoremi 5.7, dimenzija prostora $Im(t) + Ker(t)$ je $5 + 2 + l - 2 = 5 + l$, pa po lemi 4.7 ovi vektori daju bazu za $Im(t) + Ker(t)$.

Pošto su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ u $Im(t)$, to postoje $\vec{v}_0$ i $\vec{w}_0$ takvi da je $\vec{v} = t(\vec{v}_0)$ i $\vec{w} = t(\vec{w}_0)$. Pokazaćemo da je skup

$$S = \{\vec{v}_0, t(\vec{v}_0), t^2(\vec{v}_0), t^3(\vec{v}_0),\ \vec{w}_0, t(\vec{w}_0), t^2(\vec{w}_0),\ \vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_l\}$$

linearno nezavisan.

Pretpostavimo da je

$$a_0\vec{v}_0 + a_1t(\vec{v}_0) + a_2t^2(\vec{v}_0) + a_3t^3(\vec{v}_0) + b_0\vec{w}_0 + b_1t(\vec{w}_0) + b_2t^2(\vec{w}_0) + c_1\vec{\nu}_1 + \ldots + c_l\vec{\nu}_l = \vec{0}$$

i primenimo t. Dobijamo da je

$$a_0t(\vec{v}_0) + a_1t^2(\vec{v}_0) + a_2t^3(\vec{v}_0) + b_0t(\vec{w}_0) + b_1t^2(\vec{w}_0) = \vec{0}$$

pa je zbog linearne nezavisnosti vektora baze $\mathcal{B}$, $a_0 = a_1 = a_2 = b_0 = b_1 = 0$. Uz to, iz gornje jednakosti, zbog linearne nezavisnosti vektora u bazi za $Ker(t)$, dobijamo $a_3 = b_2 = c_1 = \ldots = c_l = 0$, pa je S linearno nezavisan.

Po teoremi 8.15 imamo

$$dim(V) = dim(Im(t)) + dim(Ker(t)) = 5 + 2 + l$$

koliko elemenata ima i skup S, pa po tvrđenju 4.9 on razapinje V. Znači

$$\langle \vec{v}_0, t(\vec{v}_0), t^2(\vec{v}_0), t^3(\vec{v}_0),\ \vec{w}_0, t(\vec{w}_0), t^2(\vec{w}_0),\ \vec{\nu}_1, \ldots, \vec{\nu}_l \rangle$$

je baza za V i ona je nastala nadovezivanjem $2 + l$, t-nizova. $\dashv$

POSLEDICA 13.11. *Svaka nilpotentna matrica je slična matrici koja ima sve nule osim nekih jedinica odmah ispod glavne dijagonale.*

Nadalje ćemo prećutno iz polja $\mathbf{R}$ preći u njegovo proširenje, polje kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ iz razloga *algebarske zatvorenosti*. Naime, u polju $\mathbf{C}$ svaki polinom stepena većeg od 0 ima koren, što znači da se može predstaviti u obliku proizvoda polinoma stepena 1.

TVRĐENJE 13.12. *Linearan operator $t\colon V \to V$, za netrivijalan vektorski prostor V, je nilpotentan akko je 0 jedina njegova sopstvena vrednost.*

DOKAZ. ($\Rightarrow$) To što se nalazimo u polju $\mathbf{C}$ i što je V netrivijalan nam garantuje da postoji sopstvena vrednost za t. Iz toga što postoji $k \geq 1$ takvo da je t^k nula preslikavanje, to jest t je „koren” polinoma $p(x) = x^k$, po lemi 13.7 sledi da je svaka sopstvena vrednost preslikavanja t koren polinoma x^k a to mora biti 0.

($\Leftarrow$) Ako je $0 \in \mathbf{C}$ jedina sopstvena vrednost za t, onda se, po napomeni 12.5, karakteristični polinom za t faktoriše kao cx^n gde je $n \geq 1$ dimenzija prostora V. Po lemi 13.5, imamo da je t^k nula preslikavanje, pa je po definiciji, t nilpotentan. $\dashv$

POSLEDICA 13.13. *Linearan operator $t - \lambda\colon V \to V$, za netrivijalan vektorski prostor V, je nilpotentan akko je λ jedina sopstvena vrednost za t.*

DOKAZ. Nula je jedina sopstvena vrednost za $t - \lambda$ akko λ je jedina sopstvena vrednost za t, zato što $(t - \lambda)(\vec{v}) = c\vec{v} \Leftrightarrow t(\vec{v}) = (\lambda + c)\vec{v}$. $\dashv$

TVRĐENJE 13.14. *Ako su matrice $T - \lambda E_n$ i S slične, onda su i matrice T i $S + \lambda E_n$ slične uz istu matricu prelaza.*

DOKAZ. Direktno iz 12.2(2) uz polinom $p(x) = x + \lambda$. $\dashv$

NAPOMENA 13.15. *Ako je $\lambda \in \mathbf{C}$ jedina sopstvena vrednost matrice $T \in \mathcal{M}_n$, onda je ona slična matrici koja na glavnoj dijagonali ima λ i sve ostale nule osim nekih jedinica odmah ispod glavne dijagonale.*

DOKAZ. Po posledici 13.13, matrica $T - \lambda E_n$ je nilpotentna pa je po posledici 13.11 ona slična matrici koja ima sve nule osim nekih jedinica odmah ispod glavne dijagonale. Po tvrđenju 13.14, matrica T je slična zbiru takve matrice i dijagonalne matrice λE_n. $\dashv$

§13.3. Žordanova normalna forma

NAPOMENA 13.16. *Neka je $t\colon V \to V$ linearan operator. Primetimo da je $Im(t^{k+1}) = Im(t\restriction_{Im(t^k)})$ i podsetimo se da je $Ker(t^k) = \{\vec{v} \in V \mid t^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$.*

TVRĐENJE 13.17. *Za linearan operator $t\colon V \to V$ važi:*

$$\begin{array}{ccccccc} V & \supseteq & Im(t) & \supseteq & Im(t^2) & \supseteq & \dots \\ \{\vec{0}\} & \subseteq & Ker(t) & \subseteq & Ker(t^2) & \subseteq & \dots \end{array}$$

DOKAZ. Ako je $\vec{w} \in Im(t^{k+1})$, onda postoji $\vec{v} \in V$ takav da je $\vec{w} = t^{k+1}(\vec{v}) = t^k(t(\vec{v}))$. Pošto je $\vec{u} = t(\vec{v}) \in V$ i $\vec{w} = t^k(\vec{u})$, to je $\vec{w} \in Im(t^k)$. Znači $Im(t^k) \supseteq Im(t^{k+1})$.

Ako je $\vec{v} \in Ker(t^k)$, onda je $t^{k+1}(\vec{v}) = t(t^k(\vec{v})) = t(\vec{0}) = \vec{0}$, pa je $\vec{v} \in Ker(t^{k+1})$. Znači $Ker(t^k) \subseteq Ker(t^{k+1})$. $\dashv$

LEMA 13.18. *Ako je $Im(t^k) = Im(t^{k+1})$, onda je $Im(t^{k+1}) = Im(t^{k+2})$.*

DOKAZ. Po napomeni 13.16 imamo $Im(t^{k+2}) = Im(t\restriction_{Im(t^{k+1})}) = Im(t\restriction_{Im(t^k)}) = Im(t^{k+1})$. $\dashv$

LEMA 13.19. *Ako je $Ker(t^k) = Ker(t^{k+1})$, onda je $Ker(t^{k+1}) = Ker(t^{k+2})$.*

DOKAZ. Po tvrđenju 13.17, dovoljno je pokazati $Ker(t^{k+2}) \subseteq Ker(t^{k+1})$. Neka je $\vec{v} \in Ker(t^{k+2})$, što znači da je $t^{k+2}(\vec{v}) = \vec{0}$. Za vektor $\vec{u} = t(\vec{v})$ važi da je u $Ker(t^{k+1})$ pa je zbog pretpostavke leme on i u $Ker(t^k)$. Znači da je $t^k(\vec{u}) = \vec{0}$, pa je onda i $t^{k+1}(\vec{v}) = \vec{0}$. Dakle, $\vec{v} \in Ker(t^{k+1})$. $\dashv$

Nadalje fiksiramo n kao dimenziju vektorskog prostora V nad poljem $\mathbf{C}$. Kao posledicu tvrđenja 13.17 i lema 13.18-19, pošto je dimenzija pravog potprostora strogo manja od dimenzije prostora, imamo sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 13.20. *Za linearan operator* $t\colon V \to V$ *važi:*

$$\begin{array}{ccccccc} Im(t^n) & = & Im(t^{n+1}) & = & Im(t^{n+2}) & = \dots \\ Ker(t^n) & = & Ker(t^{n+1}) & = & Ker(t^{n+2}) & = \dots \end{array}$$

Tvrđenje 13.21. *Linearan operator* $t\restriction_{Ker(t^n)}\colon Ker(t^n) \to Ker(t^n)$ *je nilpotentan, a* $t\restriction_{Im(t^n)}\colon Im(t^n) \to Im(t^n)$ *je* ***1-1***.

dokaz. Prvi deo sledi direktno po definiciji nilpotentnosti. Za drugi deo, po napomeni 13.16 i tvrđenju 13.20 je $Im(t\restriction_{Im(t^n)}) = Im(t^{n+1}) = Im(t^n)$. Dakle, $rank(t\restriction_{Im(t^n)}) = dim(Im(t\restriction_{Im(t^n)})) = dim(Im(t^n))$. Po teoremi 8.17, preslikavanje $t\restriction_{Im(t^n)}$ je **1-1**. ⊣

Tvrđenje 13.22. *Za linearan operator* $t\colon V \to V$ *važi:*

(1) $dim(V) = dim(Ker(t^n)) + dim(Im(t^n))$,

(2) $Ker(t^n) \cap Im(t^n) = \{\vec{0}\}$,

to jest, po tvrđenju 5.9, $V = Ker(t^n) \oplus Im(t^n)$.

dokaz. Deo (1) je teorema 8.15 za preslikavanje $t^n : V \to V$. Za dokaz dela (2) pretpostavimo da je $\vec{v} \neq \vec{0}$ u $Im(t^n)$. Iz tvrđenja 13.21 zaključujemo da je $t(\vec{v}) \neq \vec{0}$ i dalje za svako k imamo $t^k(\vec{v}) \neq \vec{0}$. Znači da $\vec{v}$ nije u $Ker(t^n)$. ⊣

U sekciji 5.2 smo definisali kada je vektorski prostor direktna suma dva svoja potprostora. Sada ćemo definisati uopštenje tog pojma sa 2 na k ($k \geq 1$) potprostora.

Definicija. Vektorski prostor V je *direktna suma* svojih potprostora $W_1, \dots, W_k$ ($k \geq 1$) kada za svako $\vec{v} \in V$ postoji jedinstvena k-torka $\langle \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k \rangle$, pri čemu je $\vec{w}_i \in W_i$, takva da je $\vec{v} = \vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_k$. Oznaka je $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$.

Sledeće tvrđenje sledi iz definicija.

Lema 13.23. *Vektorski prostor* V *je direktna suma svojih potprostora* $W_1, \dots, W_k$ *za* $k > 1$ *akko je* V *direktna suma (u smislu definicije iz sekcije 5.2) svojih potprostora* W_1 *i* $W_2 \oplus \dots \oplus W_k$.

Sada ćemo dokazati nekoliko tvrđenja koja će nas dovesti do glavnog rezultata ove sekcije a to je normalna forma kvadratne matrice nad $\mathbf{C}$.

Definicija. Neka je $t\colon V \to V$ linearan operator i W potprostor od V takav da za svako $\vec{w} \in W$ važi $t(\vec{w}) \in W$. Za takav potprostor kažemo da je t *invarijantan*.

Napomena 13.24. *Za linearan operator* $t\colon V \to V$ *i proizvoljno* $k \geq 0$, *potprostori* $Im(t^k)$ *i* $Ker(t^k)$ *od* V *su* t *invarijantni.*

Tvrđenje 13.25. *Ako je potprostor t invarijantan, onda je on i $p(t)$ invarijantan za proizvoljan polinom $p(x)$.*

dokaz. Neka je W neki t invarijantan potprostor od V i $\vec{w} \in W$. Tada je $p_0\vec{w}, p_1 t(\vec{w}), \ldots, p_m t^m(\vec{w}) \in W$, pa je i $p(t)\vec{w} \in W$. ⊣

Po napomeni 13.24 i tvrđenju 13.25, za linearan operator $t\colon V \to V$ i svako λ, λ' i m, prostori $Ker(t-\lambda)^n$ i $Im(t-\lambda)^n$ su $(t-\lambda')^m$ invarijantni što ćemo nadalje koristiti bez posebnog napominjanja. Sledeće tvrđenje je posledica definicija t invarijantnih potprostora i matrične reprezentacije linearnih preslikavanja.

Tvrđenje 13.26. *Neka je $V = U \oplus W$ i neka je $\mathcal{B}$ baza za V dobijena nadovezivanjem baza $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ za U odnosno W. Neka je $t\colon V \to V$ linearan operator takav da su U i W, t invarijantni. Tada je $Rep_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(t)$ matrica*

$$\begin{pmatrix} Rep_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(t\restriction_U) & 0 \\ 0 & Rep_{\mathcal{D},\mathcal{D}}(t\restriction_W) \end{pmatrix}$$

Lema 13.27. *Ako je T matrica oblika $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, gde su S i R kvadratne matrice, onda je $det(T) = det(S)\,det(R)$.*

dokaz. Ako su matrice S i R reda k odnosno m, onda je

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Primenimo teoremu 11.16 i pomoću teoreme 11.17 vidimo da je

$$det\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix} = det(S) \quad \text{i} \quad det\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = det(R).$$

⊣

Lema 13.28. *Ako je λ sopstvena vrednost za t, onda je λ jedina sopstvena vrednost za $t\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$.*

dokaz. Pošto je λ sopstvena vrednost za t, prostor $Ker(t-\lambda)^n$ je netrivijalan. Preslikavanje $(t-\lambda)\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$ je po tvrđenju 13.21 nilpotentno, pa je po posledici 13.13, λ jedina sopstvena vrednost za $t\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$. ⊣

Lema 13.29. *Ako je λ sopstvena vrednost za t i $\lambda' \neq \lambda$, onda je $(t-\lambda')\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$ jedno* ***1-1*** *preslikavanje.*

dokaz. Po lemi 13.28, λ' nije sopstvena vrednost za $t\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$, pa za svaki ne-nula vektor $\vec{v}$ iz $Ker(t-\lambda)^n$ važi $(t-\lambda')(\vec{v}) \neq \vec{0}$. ⊣

Lema 13.30. *Ako je λ sopstvena vrednost za $t\colon V \to V$ i $\lambda' \neq \lambda$, onda je*

$$Ker(t\restriction_{Im(t-\lambda)^n} - \lambda')^n = Ker(t-\lambda')^n.$$

dokaz. Imamo da $\vec{v} \in Ker(t\restriction_{Im(t-\lambda)^n} - \lambda')^n$ akko $\vec{v} \in Im(t-\lambda)^n$ i $\vec{v} \in Ker(t-\lambda')^n$, pa je dovoljno pokazati da $\vec{v} \in Ker(t-\lambda')^n$ povlači $\vec{v} \in Im(t-\lambda)^n$. Po tvrđenju 13.22, prostor V je jednak $Ker(t-\lambda)^n \oplus Im(t-\lambda)^n$, pa za $\vec{v} \in Ker(t-\lambda')^n$ postoje $\vec{w}_1 \in Ker(t-\lambda)^n$ i $\vec{w}_2 \in Im(t-\lambda)^n$ takvi da je $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$.

Kad primenimo $(t-\lambda')^n$ na levu i desnu stranu ove jednakosti dobijamo $\vec{0} = \vec{w}_1' + \vec{w}_2'$, pri čemu je $\vec{w}_1' = (t-\lambda')^n(\vec{w}_1) \in Ker(t-\lambda)^n$ i $\vec{w}_2' = (t-\lambda')^n(\vec{w}_2) \in Im(t-\lambda)^n$ jer su ti prostori $(t-\lambda')^n$ invarijantni. Zbog nezavisnosti ovih prostora sledi da je $\vec{w}_1' = \vec{w}_2' = \vec{0}$.

Po lemi 13.29, preslikavanje $(t-\lambda')\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$ je **1-1**, pa je i $(t-\lambda')^n\restriction_{Ker(t-\lambda)^n}$, kao kompozicija **1-1** preslikavanja, takođe **1-1**. Odavde zaključujemo da je $\vec{w}_1 = \vec{0}$, pa je $\vec{v} = \vec{w}_2 \in Im(t-\lambda)^n$. ⊣

Teorema 13.31. *Ako je karakteristični polinom linearnog operatora $t\colon V \to V$ oblika $(x-\lambda_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{p_k}$, gde je $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$, onda je*

$$V = Ker(t-\lambda_1)^n \oplus \ldots \oplus Ker(t-\lambda_k)^n,$$

pri čemu je $dim(Ker(t-\lambda_i)^n) = p_i$.

dokaz. Indukcijom po k ($k \geq 1$).

(**baza indukcije**) Ako je $k = 1$, onda je $p_1 = n = dim(V)$ i po posledici 13.13, preslikavanje $t - \lambda_1$ je nilpotentno pa je $V = Ker(t-\lambda_1)^n$.

(**induktivni korak**) Ako je $k > 1$, onda je po tvrđenju 13.22,

$$V = Ker(t-\lambda_1)^n \oplus Im(t-\lambda_1)^n.$$

Po tvrđenju 13.26, t se može reprezentovati matricom T oblika $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, gde su S i R reprezentacije ograničenja $t\restriction_{Ker(t-\lambda_1)^n}$ i $t\restriction_{Im(t-\lambda_1)^n}$. Karakteristični polinom preslikavanja t jednak je karakterističnom polinomu matrice T koji je po lemi 13.27 jednak proizvodu karakterističnih polinoma matrica S i R. Pošto je $(t-\lambda_1)\restriction_{Ker(t-\lambda_1)^n}$ nilpotentno, to je po posledici 13.13, λ_1 jedina sopstvena vrednost za $t\restriction_{Ker(t-\lambda_1)^n}$, to jest za matricu S. Po tvrđenju 13.21, $(t-\lambda_1)\restriction_{Im(t-\lambda_1)^n}$ je **1-1** preslikavanje pa mu 0 ne može biti sopstvena vrednost, inače bi ono neki ne-nula vektor preslikavalo u $\vec{0}$. To znači da λ_1 ne može biti sopstvena vrednost za $t\restriction_{Im(t-\lambda_1)^n}$, to jest za matricu R. Dakle, $(x-\lambda_1)^{p_1}$ je karakteristični polinom za S pa je $dim(Ker(t-\lambda_1)^n) = p_1$ i $(x-\lambda_2)^{p_2} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{p_k}$ je karakteristični polinom za $t\restriction_{Im(t-\lambda_1)^n}$. Po induktivnoj pretpostavci, uz lemu 13.30, $Im(t-\lambda_1)^n$ je jednak

$$Ker(t-\lambda_2)^n \oplus \ldots \oplus Ker(t-\lambda_k)^n,$$

pri čemu je $dim(Ker(t-\lambda_i)^n) = p_i$. Po lemi 13.23, tvrđenje sledi. $\dashv$

TEOREMA 13.32. *Svaka kvadratna matrica nad* $\mathbf{C}$ *je slična zbiru dijagonalne matrice i matrice koja ima sve nule osim nekih jedinica odmah ispod glavne dijagonale.*

DOKAZ. Neka je $t : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ linearno preslikavanje reprezentovano kvadratnom matricom T u odnosu na standardnu bazu. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sve sopstvene vrednosti preslikavanja t. Po teoremi 13.31, prostor $\mathbf{C}^n$ je jednak

$$Ker(t-\lambda_1)^n \oplus \ldots \oplus Ker(t-\lambda_k)^n.$$

U odnosu na bazu za $\mathbf{C}^n$ nastalu nadovezivanjem baza $\mathcal{B}_i$ za $Ker(t-\lambda_i)^n$, kao i u tvrđenju 13.26, preslikavanje t je reprezentovano matricom T' oblika

$$\begin{pmatrix} T'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T'_k \end{pmatrix}$$

gde je $T'_i = Rep_{\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_i}(t\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n})$. Po lemi 13.28, λ_i je jedina sopstvena vrednost za T'_i pa je po napomeni 13.15, T'_i slična matrici u traženoj formi. Odavde zaključujemo da je T', pa samim tim i T slična matrici u traženoj formi. $\dashv$

DEFINICIJA. Gorenavedena forma matrice se zove *Žordanova normalna forma*. Kao što smo rekli u napomeni 13.9, u literaturi se češće nailazi na formu oblika zbira dijagonalne matrice i matrice koja ima sve nule osim nekih jedinica odmah *iznad* glavne dijagonale.

LEMA 13.33. *Neka su* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{C}$ *sve sopstvene vrednosti linearnog operatora* $t \colon V \to V$. *Tada za svako* $\vec{v} \in V$ *je* $((t-\lambda_1)^{q_1} \circ \ldots \circ (t-\lambda_k)^{q_k})(\vec{v}) = \vec{0}$ *akko za svako* $1 \leq i \leq k$ *i svaki* $\vec{v}_i \in Ker(t-\lambda_i)^n$ *je* $(t-\lambda_i)^{q_i}(\vec{v}_i) = \vec{0}$.

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Neka je $\vec{v}_i \in Ker(t-\lambda_i)^n$. Kao posledicu tvrđenja 13.3 imamo da kompozicija $(t-\lambda_1)^{q_1} \circ \ldots \circ (t-\lambda_k)^{q_k}$ komutira pa iz pretpostavke sledi da je $((t-\lambda_1)^{q_1} \circ \ldots \circ (t-\lambda_i)^{q_i})(\vec{v}_i) = \vec{0}$. Po lemi 13.29 za $i \neq j$ preslikavanja $(t-\lambda_j)^{q_j}$ su **1-1** u $Ker(t-\lambda_i)^n$, pa mora biti $(t-\lambda_i)^{q_i}(\vec{v}_i) = \vec{0}$.

($\Leftarrow$) Neka je $\vec{v} \in V$. Po teoremi 13.31, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_k$ za $\vec{v}_i \in Ker(t-\lambda_i)^n$. Za svako $1 \leq i \leq k$ je $((t-\lambda_1)^{q_1} \circ \ldots \circ (t-\lambda_k)^{q_k})(\vec{v}_i) = \vec{0}$, pa tvrđenje sledi. $\dashv$

POSLEDICA 13.34. *Polinom* $(x-\lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k)^{q_k}$, *gde je* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *za* $i \neq j$, *je minimalan polinom linearnog preslikavanja* $t : V \to V$ *akko je za svako* $1 \leq i \leq k$, *polinom* $(x-\lambda_i)^{q_i}$ *minimalan za* $t\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n}$.

TEOREMA 13.35. *Minimalan polinom kvadratne matrice je oblika*

$$(x-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_k),$$

gde je $\lambda_i \neq \lambda_j$ *za* $i \neq j$*, akko je matrica dijagonalizabilna.*

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Neka je $t : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ linearno preslikavanje reprezentovano datom kvadratnom matricom T u odnosu na standardnu bazu. Po posledici 13.34, za svako $1 \leq i \leq k$, minimalan polinom za $t\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n}$ je $x - \lambda_i$, pa je $(t - \lambda_i)\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n}$ nula preslikavanje i $t\restriction_{Ker(t-\lambda_i)^n}$ je reprezentovano matricom $\lambda_i E_{p_i}$.

($\Leftarrow$) Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{C}$ sve sopstvene vrednosti za T. To su onda elementi glavne dijagonale dijagonalne matrice T' slične matrici T. Lako se proveri da je $(T' - \lambda_1 E_{p_1}) \cdot \ldots \cdot (T' - \lambda_k E_{p_k})$ nula matrica (proizvod dijagonalnih matrica takvih da za svako mesto na dijagonali postoji bar jedna u prozvodu koja na tom mestu ima 0). Uz pomoć teoreme 13.4, zaključujemo da je $p(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k)$ minimalan polinom za T' pa je po tvrđenju 13.1 to i minimalan polinom za T. $\dashv$

§14. Dodatak

§14.1. Skupovi

O skupovima ovde govorimo neformalno, koristeći običan jezik. Zainteresovanim za aksiomatsku teoriju skupova sugerišemo da pogledaju [8] i [9].

Da je x u skupu X (x je *element* od X) označavamo sa $x \in X$. Skraćenica za ,,nije $x \in X$" je $x \notin X$. Skraćenica za ,,$x_1 \in X$ i $x_2 \in X$" je $x_1, x_2 \in X$. Kažemo da je X *podskup* od Y (u oznaci $X \subseteq Y$) kada je svaki element skupa X ujedno i element skupa Y. Skupovi X i Y su jednaki (u oznaci $X = Y$) kada je $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$. Skup je *konačan* kad ima konačno mnogo elemenata; inače je *beskonačan*. Skup svih elemenata (nekog skupa) koji imaju svojstvo P označavamo sa $\{x \mid x \text{ ima svojstvo } P\}$.

PRIMERI: 1. $\emptyset$, *prazan* skup, 2. $\{1, 2, 3\}$, tročlani skup,

3. $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, skup *prirodnih* brojeva,

4. $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$, *partitivni* skup od X, konkretno
$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Za proizvoljne skupove X i Y definišemo:

presek	$X \cap Y =_{df} \{x \mid x \in X \text{ i } x \in Y\}$
uniju	$X \cup Y =_{df} \{x \mid x \in X \text{ ili } x \in Y\}$
razliku	$X - Y =_{df} \{x \mid x \in X \text{ i } x \notin Y\}$
simetričnu razliku	$X \triangle Y =_{df} (X - Y) \cup (Y - X)$

Ukoliko se nalazimo u *univerzumu* U i pričamo o skupovima iz $\mathcal{P}(U)$, onda imamo i

komplement $\quad X^c =_{df} U - X$

Uređeni par elemenata a i b, u oznaci (a, b), je skup $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Osnovno što sledi iz ove definicije je da

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{akko} \quad a = c \text{ i } b = d.$$

Dekartov proizvod skupova X i Y, u oznaci $X \times Y$, je skup $\{(x, y) \mid x \in X \text{ i } y \in Y\}$. Na primer,

$$\{1, 2\} \times \{1, m, n\} = \{(1, 1), (1, m), (1, n), (2, 1), (2, m), (2, n)\}.$$

§14.2. Relacije

Literatura

[1] G. Birkhoff and S. Mac Lane, ***A Survey of Modern Algebra***, (4th edition) Macmillan Publishing Co., Inc., 1977

[2] J. Hefferon, ***Linear Algebra***, http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra

[3] ——, ***Answers to Exercises***, http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra

[4] G. Kalajdžić, ***Linearna algebra i geometrija***, Zavod za udžbenike, 2011

[5] ——, ***Linearna algebra***, Zavod za udžbenike, 2011

[6] A. Lipkovski, ***Linearna algebra i analitička geometrija***, Zavod za udžbenike, 2007

[7] S. Lipschutz, ***Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra***, (2nd edition) McGraw-Hill, 1991

[8] A. Perović, B. Veličković i A. Jovanović, ***Teorija skupova***, Matematički fakultet, Beograd, 2007

[9] Z. Petrović i Ž. Mijajlović, ***Matematička logika-elementi teorije skupova***, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012

[10] G. Strang, ***Linear Algebra and its Applications***, (3rd edition) Thomson Learning Inc., 1988

[11] P. Tanović, ***Linearna Algebra i Analitička Geometrija***, http://alas.matf.bg.ac.rs/ mi10103/predavanja/ laag/skripta 2.pdf, 2011

Indeks