ЈЕДНАКОСТИ ИЗВОЂЕЊА У КАТЕГОРИЈАЛНОЈ ТЕОРИЈИ ДОКАЗА

З. Петрић

докторска теза

Ментор професор Коста Дошен

Зори, Јовану и Енесу

за дар, подршку и подстрек

да откријем раскош математике

Увод

Као поднаслов овог рада најправедније би било да стоји "Кохеренција и теорија доказа". То је оно што најверније описује резултате у њему јер су овде равноправно заступљена примена метода теорије доказа у питањима кохерентности неких категорија, са једне стране, и то шта кохеренција и везани појмови представљају у категоријалној теорији доказа, са друге стране. Да није техничких потешкоћа, то би био и наслов тезе.

Само значење појма кохеренције није окамењено. Углавном, она говори о комутативности неких класа дијаграма састављених од морфизама неких категорија. Први резултати, са почетка шездесетих, се тичу асоцијативности тензорског производа, и настали су везано са истраживањима у алгебарској топологији. Ми ћемо се чврсто држати значења кохеренције какаво је формирано у [9] и остављамо [13] као право место где се може наћи више различитих приступа овоме појму.

Претпостављено је да је читалац упознат са основним појмовима теорије категорија као што су сам појам категорије, функтора, природне трансформације, адјункције... Уколико се негде и појави нешто што превазилази ове оквире, то неће бити од пресудног значаја за праћење даљег текста, и [12] ће представљати основно место у коме се може информисати о датом појму. Такође, као добар уџбеник категоријалне теорије доказа може послужити [10].

Основа чију би надградњу требао да представља овај рад су радови [11], [6] и [9], па би њихово познавање читаоцу олакшало праћење овога што следи, јер је јасно истакнута паралела одређених целина са њима.

Логике које су овде категоријално посматране припадају класи супструктуралних, наиме оне у својој Генцен-формулацији испуштају нека од структуралних правила. О супструктуралним логикама можете прочитати више у уводном чланку из [14]. Под супструктуралним категоријама о којима ћемо говорити у прве две главе, подразумеваћемо моноидалне, симетричне моноидалне, релевантне, афине и картезијанске категорије које редом одговарају најужем фрагменту асоцијативног Ламбек рачуна, линеарне, релевантне, BCK и интуиционистичке логике, довољном да опише структурална правила.

Што се нотације тиче, овде ће нам променљиве за категорије бити велика латинична писана слова, објекте ћемо означавати великим, а морфизме (стрелице) малим латиничним словима. Уколико је f, морфизам из A у B, онда ћемо то означавати са $f : A \vdash B$ а не као што је уобичајено са $f : A \rightarrow B$. Основно је што су категорије којима се бавимо "логичке" и оваква нотација истиче њихову паралелу са Генценовим секвентним системима, а поред тога, навикли смо да стрелицом означавамо импликацију, па је зато задржавамо у резерви. Све врсте природних трансформација ће бити означене малим грчким словима. Уколико је $\mathcal{A}$ нека категорија, са $\mathcal{A}^{op}$ ће бити означена категорија чији су објекти исти као код $\mathcal{A}$, док су морфизми обрнути, тј. уколико је f био типа $A \vdash B$ у $\mathcal{A}$ онда је он типа $B \vdash A$ у $\mathcal{A}^{op}$.

Са $\mathcal{G}rph$ ће на више места бити означена категорија чије ћемо објекте звати *графови*, који се састоје из скупа *врхова* и скупа *ивица*, при чему су дефинисане две функције, *dom* и *cod* из скупа ивица у скуп врхова. Морфизми ове категорије би пресликавали врхове и ивице једног графа, редом у врхове и ивице другог графа, и при томе комутирали са функцијама *dom* и *cod*. Категорија $\mathcal{S}et$ када је будемо спомињали, ће представљати категорију *малих* скупова, тј. оних који припадају унапред изабраном довољно великом *универзуму* U.

Рад је организован у три главе. У првој се бавимо кохеренцијом у супструктуралним категоријама, друга је посвећена последицама резултата добијених у првој глави, док трећа представља разматрање питања кохеренције у картезијанским затвореним категоријама и у неком обиму подразумева познавање резултата из прве главе.

1 Кохеренција у супструктуралним категоријама

У овој глави биће показана кохеренција у релевантним, афиним (BCK) и картезијанским категоријама што би представљало наставак Маклејнових резултата о кохеренцији у моноидалним и симетричним моноидалним категоријама.

1.1 Супструктуралне категорије

Маклејн је у [11] показао да моноидалне и симетричне-моноидалне категорије имају својство кохеренције, с тим што је потпуна дефиниција појма дата тек у [9]. Прихватајући ту дефиницију, коју ћемо у даљем тексту поновити, а не често коришћену реченицу да кохеренција значи да у категорији "неки" дијаграми комутирају, показаћемо да исто својство важи и у другим категоријама са множењем; у њих Маклејн сврстава моноидалне и симетричне-моноидалне категорије, које можемо добити ширењем ових новим природним трансформацијама.

Категорије које ћемо уводити приказиваћемо у једнакосној аксиоматизацији и језик који ћемо користити биће онај који је формиран у [2] мада се од читаоца не захтева познавање садржаја и главних резултата тог чланка. Мотивација за увођење такве нотације и напуштање оне која се појављује у литератури, јесте дубока веза тих појмова са комбинаторима ламбда рачуна. Ради лакшег сналажења читалаца даћемо и поређење са нотацијом из [11] као и из осталих чланака који се баве сличном проблематиком.

Под *категоријом са множењем* подразумевамо категорију $\mathcal{A}$ заједно са бифунктором $\cdot : \mathcal{A}{\times}\mathcal{A}{\to}\mathcal{A}$ и специјалним објектом I (могли смо независно посматрати случај када I није присутан у категорији али ћемо се задовољити тиме да само истакнемо случајеве када суштинске разлике постоје, у супротном бисмо превише компликовали општу слику).

То да је $\mathcal{A}$ категорија са множењем може се изразити на следећи начин. Дате су нам две класе $Ob(\mathcal{A})$ (објекти од $\mathcal{A}$), $\mathrm{I}{\in}Ob(\mathcal{A})$, $Mor(\mathcal{A})$ (морфизми од $\mathcal{A}$) и два пресликавања $dom, cod : Mor(\mathcal{A}){\to}Ob(\mathcal{A})$, с тим што уколико је за $f{\in}Mor(\mathcal{A})$, $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$ то скраћено означавамо са $f : A{\vdash}B$ и кажемо да је f типа $A{\vdash}B$. На објектима је задата бинарна операција $\cdot$ (множење). За сваки објекат A из $\mathcal{A}$ постоји специјална стрелица $\mathbf{1}_A : A{\vdash}A$. На морфизмима је такође задата бинарна операција множења $\cdot$ (задржавамо исту ознаку), с тим што важи:

$$\frac{f : A{\vdash}B \qquad g : C{\vdash}D}{f{\cdot}g : A{\cdot}C{\vdash}B{\cdot}D}$$

(Ово читамо као: "Ако је f типа $A{\vdash}B$ и g типа $C{\vdash}D$ онда је $f{\cdot}g$ типа $A{\cdot}C{\vdash}B{\cdot}D$.")

На морфизмима је још задата парцијална бинарна операција композиције, с тим што важи:

$$\frac{f : A \vdash B \qquad g : B \vdash C}{gf : A \vdash C}$$

Поред овога на морфизмима морају важити следеће једнакости:

категоријалне једнакости

$(cat\mathbf{1})$	$f\mathbf{1}_A = f = \mathbf{1}_B f$ за свако $f : A \vdash B$
$(cat\mathbf{2})$	$h(gf) = (hg)f$ за све f, g, h из $Mor(\mathcal{A})$

функторијалне једнакости

$(\cdot)$	$(g_1 f_1) \cdot (g_2 f_2) = (g_1 \cdot g_2)(f_1 \cdot f_2)$
$(\cdot\mathbf{1})$	$\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cdot B}$

Категорија са множењем је *моноидална* уколико још поседује специјалне стрелице:

$$\boldsymbol{\sigma}_A : \mathrm{I} \cdot A \vdash A \qquad \boldsymbol{\delta}_A : A \cdot \mathrm{I} \vdash A$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i_A : A \vdash \mathrm{I} \cdot A \qquad \boldsymbol{\delta}^i_A : A \vdash A \cdot \mathrm{I}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} : A \cdot (B \cdot C) \vdash (A \cdot B) \cdot C \qquad \overleftarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} : (A \cdot B) \cdot C \vdash A \cdot (B \cdot C)$$

за све њене објекте A, B и C, и уколико још важе додатне једнакости:

$\boldsymbol{\sigma\delta}$-*једнакости*

$(\boldsymbol{\sigma})$	За $f : A \vdash B$,	$f\boldsymbol{\sigma}_A = \boldsymbol{\sigma}_B(\mathbf{1}_\mathrm{I} \cdot f)$.
$(\boldsymbol{\delta})$	За $f : A \vdash B$,	$f\boldsymbol{\delta}_A = \boldsymbol{\delta}_B(f \cdot \mathbf{1}_\mathrm{I})$.
$(\boldsymbol{\sigma\sigma}^i)$	$\boldsymbol{\sigma}_A \boldsymbol{\sigma}^i_A = \mathbf{1}_A$,	$\boldsymbol{\sigma}^i_A \boldsymbol{\sigma}_A = \mathbf{1}_{\mathrm{I} \cdot A}$
$(\boldsymbol{\delta\delta}^i)$	$\boldsymbol{\delta}_A \boldsymbol{\delta}^i_A = \mathbf{1}_A$,	$\boldsymbol{\delta}^i_A \boldsymbol{\delta}_A = \mathbf{1}_{A \cdot \mathrm{I}}$
$(\boldsymbol{\sigma\delta})$	$\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{I} = \boldsymbol{\delta}_\mathrm{I}$	

b-*једнакости*

(**b**) За $f : A \vdash D$, $g : B \vdash E$ и $h : C \vdash F$, $((f \cdot g) \cdot h)\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} = \overrightarrow{\mathbf{b}}_{D,E,F}(f \cdot (g \cdot h))$.

(**bb**) $\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} \overleftarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} = \mathbf{1}_{(A \cdot B) \cdot C}$, $\qquad \overleftarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} \overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} = \mathbf{1}_{A \cdot (B \cdot C)}$

$(\boldsymbol{\sigma\delta}\mathbf{b})$ $(\boldsymbol{\delta}_A \cdot \mathbf{1}_B)\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,\mathrm{I},B} = \mathbf{1}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B$

(**b**5) $\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A \cdot B,C,D} \overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C \cdot D} = (\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} \cdot \mathbf{1}_D)\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B \cdot C,D}(\mathbf{1}_A \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}_{B,C,D})$

У [11] је множење означено као $\otimes$ (тензор), специјални објект (код нас I) је означен са K, стрелица $\boldsymbol{\sigma}_A : \mathrm{I} \cdot A \vdash A$ је означена као $e(A) : K \otimes A \rightarrow A$, стрелице $\boldsymbol{\sigma}^i, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta}^i$ нису специфициране већ изведене, стрелица $\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} : A \cdot (B \cdot C) \vdash (A \cdot B) \cdot C$ је означена као $a(A, B, C) : A \otimes (B \otimes C) \rightarrow (A \otimes B) \otimes C$ док је стрелица $\overleftarrow{\mathbf{b}}$ изведена као a^{-1}. У осталој литератури множење је и даље најчешће означено као тензор, специјални објекат је најчешће означен са I, стрелица $\boldsymbol{\delta}_A : A \cdot \mathrm{I} \vdash A$ се узима за примитивну и најчешће означава са $b_A : A \otimes \mathrm{I} \rightarrow A$. За примитивну такође узимају стрелицу

$\overleftarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} : (A{\cdot}B){\cdot}C \vdash A{\cdot}(B{\cdot}C)$ и означавају је са $a_{A,B,C} : (A\otimes B)\otimes C \to A\otimes(B\otimes C)$. Разлог зашто смо се определили за симбол $\vdash$ а не за $\to$ код показивања типа морфизма је објашњен у уводу.

Значи категорија са множењем $\mathcal{A}$ је моноидална уколико су парови функтора $F : \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ $(F(A) = \mathrm{I}{\cdot}A,\ F(f) = \mathbf{1}_{\mathrm{I}}{\cdot}f)$ и $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}\to\mathcal{A}$, $G : \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ $(G(A) = A{\cdot}\mathrm{I},\ G(f) = f{\cdot}\mathbf{1}_{\mathrm{I}})$ и $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}\to\mathcal{A}$, $H : \mathcal{A}^3\to\mathcal{A}$ $(H(A,B,C) = A{\cdot}(B{\cdot}C)$, $H(f,g,h) = f{\cdot}(g{\cdot}h))$ и $J : \mathcal{A}^3\to\mathcal{A}$ $(J(A,B,C) = (A{\cdot}B){\cdot}C,\ J(f,g,h) = (f{\cdot}g){\cdot}h)$ природно изоморфни и уколико важи да још неки дијаграми које граде компоненте тих природних изоморфизама комутирају (($\boldsymbol{\sigma\delta}$),($\boldsymbol{\sigma\delta}\mathbf{b}$),($\mathbf{b}5$)).

Моноидална категорија је *симетрична моноидална* уколико има специјалну стрелицу

$$\mathbf{c}_{A,B} : A{\cdot}B \vdash B{\cdot}A$$

за сваки пар објеката A и B те категорије и уколико још важе:

c-*једнакости*

($\mathbf{c}$)	За $f : A\vdash C$ и $g : B\vdash D$, $(g{\cdot}f)\mathbf{c}_{A,B} = \mathbf{c}_{C,D}(f{\cdot}g)$
($\mathbf{cc}$)	$\mathbf{c}_{B,A}\mathbf{c}_{A,B} = \mathbf{1}_{A\cdot B}$
($\boldsymbol{\sigma\delta}\mathbf{c}$)	$\boldsymbol{\sigma}_A\mathbf{c}_{A,\mathrm{I}} = \boldsymbol{\delta}_A$
($\mathbf{bc}6$)	$\overrightarrow{\mathbf{b}}_{C,A,B}\mathbf{c}_{A\cdot B,C}\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} = (\mathbf{c}_{A,C}{\cdot}\mathbf{1}_B)\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,C,B}(\mathbf{1}_A{\cdot}\mathbf{c}_{B,C})$

Сва срећа, у [11] као и у већини остале литературе, примитивна стрелица типа $A{\cdot}B\vdash B{\cdot}A$ је означена као и код нас са $\mathbf{c}_{A,B}$.

Другим речима, моноидална категорија $\mathcal{A}$ је симетрична-моноидална уколико су функтори $F : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ ($F(A,B) = A{\cdot}B,\ F(f,g) = f{\cdot}g$) и $G : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ ($G(A,B) = B{\cdot}A,\ G(f,g) = g{\cdot}f$) природно изоморфни и уколико још дијаграми који одговарају једнакостима ($\boldsymbol{\sigma\delta}\mathbf{c}$) и ($\mathbf{bc}6$) комутирају.

Симетрична моноидална категорија је *релевантна* уколико има специјалну стрелицу

$$\mathbf{w}_A : A \vdash A{\cdot}A$$

за сваки објекат A те категорије, и уколико још важе:

w-*једнакости*

($\mathbf{w}$)	За $f : A\vdash B$, $(f{\cdot}f)\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_B f$.
($\boldsymbol{\sigma\delta}\mathbf{w}$)	$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{I}}\mathbf{w}_{\mathrm{I}} = \mathbf{1}_{\mathrm{I}}$
($\mathbf{bw}$)	$\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,A,A}(\mathbf{1}_A{\cdot}\mathbf{w}_A)\mathbf{w}_A = (\mathbf{w}_A{\cdot}\mathbf{1}_A)\mathbf{w}_A$
($\mathbf{cw}$)	$\mathbf{c}_{A,A}\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_A$
($\mathbf{bcw}8$)	$\mathbf{c}^m_{A,B,A,B}\mathbf{w}_{A\cdot B} = \mathbf{w}_A{\cdot}\mathbf{w}_B$, где је $\mathbf{c}^m_{A,B,C,D} =^{df} \overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,C,B\cdot D}(\mathbf{1}_A{\cdot}(\overleftarrow{\mathbf{b}}_{C,B,D}(\mathbf{c}_{B,C}{\cdot}\mathbf{1}_D)\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B,C,D}))\overleftarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C\cdot D}$

Стрелица типа $A\vdash A{\cdot}A$ је у [12] као и у [16] и [8] означена са δ.

Значи релевантну категорију смо добили уводећи природну трансформацију између функтора $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ и $H : \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ $(H(A) = A{\cdot}A$,

$H(f) = f{\cdot}f$) и још захтевајући да дијаграми који одговарају једнакостима ($\boldsymbol{\sigma\delta}\mathbf{w}$), ($\mathbf{bw}$), ($\mathbf{cw}$) и ($\mathbf{bcw}8$) комутирају.

Симетрична моноидална категорија је *афина* (BCK) уколико има специјалну стрелицу

$$\mathbf{k}_A : A \vdash \mathrm{I}$$

за сваки објекат A те категорије и уколико још важе:

$\mathbf{k}$-*једнакости*
($\mathbf{k}$) За $f : A \vdash B$, $\mathbf{k}_A = \mathbf{k}_B f$
($\mathbf{1k}$) $\mathbf{k}_\mathrm{I} = \mathbf{1}_\mathrm{I}$

Стрелица типа $A \vdash \mathrm{I}$ је често означена у литератури (видети [10]) као $\bigcirc_A$ (у том случају је специјални објект означен са $\top$).

Значи симетрична моноидална категорија $\mathcal{A}$ је афина уколико постоји природна трансформација између функтора $\mathbf{1}_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ и $I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ($I(A) = \mathrm{I}$, $I(f) = \mathbf{1}_\mathrm{I}$ и још је компонента те трансформације која одговара објекту I из $\mathcal{A}$ једнака јединичној стрелици. Ово се све може изједначити са захтевом да је I терминални објекат категорије $\mathcal{A}$.

Уколико је симетрична моноидална категорија уједно релевантна и афина (мисли се на истом језику) и уколико су у њој још задовољене једнакости

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{kw}) \quad \boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{k}_A{\cdot}\mathbf{1}_A)\mathbf{w}_A = \mathbf{1}_A, \qquad (\boldsymbol{\delta}\mathbf{kw}) \quad \boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A{\cdot}\mathbf{k}_A)\mathbf{w}_A = \mathbf{1}_A$$

онда за њу кажемо да је *картезијанска.*
Овакву аксиоматизацију картезијанске категорије ћемо звати *структурно-једнакосном.*

Уколико од почетка не бисмо захтевали постојање објекта I у категорији онда би поред основних стрелица $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^i$, $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\delta}^i$ нестале и једнакости које их укључују а основне стрелице $\mathbf{k}_A : A \vdash \mathrm{I}$ биле би замењене стрелицама $\overrightarrow{\mathbf{k}}_{A,B} : A{\cdot}B \vdash B$, $\overleftarrow{\mathbf{k}}_{A,B} : A{\cdot}B \vdash A$ и уместо једнакости које укључују $\mathbf{k}$-стрелице прихватили бисмо једнакости:

($\mathbf{k}^*$) За $f : A \vdash C$ и $g : B \vdash D$
$g\overrightarrow{\mathbf{k}}_{A,B} = \overrightarrow{\mathbf{k}}_{C,D}(f{\cdot}g)$ $\qquad f\overleftarrow{\mathbf{k}}_{A,B} = \overleftarrow{\mathbf{k}}_{C,D}(f{\cdot}g)$
($\mathbf{bk}^*$) $(\overleftarrow{\mathbf{k}}_{A,B}{\cdot}\mathbf{1}_C)\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} = \mathbf{1}_A{\cdot}\overrightarrow{\mathbf{k}}_{B,C}$
($\mathbf{ck}^*$) $\overrightarrow{\mathbf{k}}_{B,A}\mathbf{c}_{A,B} = \overleftarrow{\mathbf{k}}_{A,B}$
($\mathbf{kw}^*$) $\overrightarrow{\mathbf{k}}_{A,A}\mathbf{w}_A = \mathbf{1}_A$ $\qquad \overleftarrow{\mathbf{k}}_{A,A}\mathbf{w}_A = \mathbf{1}_A$

Сви резултати који следе везани су за категорију са објектом I али би се једноставно могли прерадити тако да важе и у "сиромашнијим" ситуацијама, тј. без I .

На овај начин смо, поступно пењући се, прешли пут од моноидалних до картезијанских категорија. То је и основни разлог зашто смо последње баш овако дефинисали. Свакако, чешће коришћена једнакосна аксиоматизација је она коју ћемо звати *стандардном* и која се може наћи у ([10], стр.52). Она полази од примитивних стрелица $\mathbf{1}_A : A \vdash A$, $\boldsymbol{\pi}_{A,B} : A{\cdot}B \vdash A$, $\boldsymbol{\pi}'_{A,B} : A{\cdot}B \vdash B$ и $\mathbf{k}_A : A \vdash \mathrm{I}$ за све објекте A и B дате категорије, с тим што је нотација овде нешто измењена. Операције над морфизмима су композиција и такође парцијална бинарна операција $\langle\ \ ,\ \ \rangle$, с тим што важи:

$$\frac{f : C \vdash A \qquad g : C \vdash B}{\langle f, g\rangle : C \vdash A{\cdot}B}$$

Једнакости су поред категоријалних ($cat\mathbf{1}$) и ($cat\mathbf{2}$) следеће:

(E2) $f = \mathbf{k}_A$, за свако $f : A \vdash \mathrm{I}$.
(E3a.) $\boldsymbol{\pi}_{A,B}\langle f, g\rangle = f$, за $f : C \vdash A$ и $g : C \vdash B$.
(E3b.) $\boldsymbol{\pi}'_{A,B}\langle f, g\rangle = g$, за $f : C \vdash A$ и $g : C \vdash B$.
(E3c.) $\langle \boldsymbol{\pi}_{A,B} h, \boldsymbol{\pi}'_{A,B} h\rangle = h$, за $h : C \vdash A{\cdot}B$.

Показаћемо да су структурна и стандардна једнакосна аксиоматизација картезијанских категорија екстензионално еквивалентне, тј. да је у питању само избор језика чиме ћемо се касније и послужити.

Нека је дакле $(\mathcal{A}, \mathrm{I}, \mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{w}, \mathbf{k}, \cdot, \mathit{comp.})$ структурно уведена картезијанска категорија. Дефинишимо у њој

$$\boldsymbol{\pi}_{A,B} =^{df} \boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A{\cdot}\mathbf{k}_B), \qquad \boldsymbol{\pi}'_{A,B} =^{df} \boldsymbol{\sigma}_B(\mathbf{k}_A{\cdot}\mathbf{1}_B).$$

И за $f : C \vdash A$ и $g : C \vdash B$

$$\langle f, g\rangle =^{df} (f{\cdot}g)\mathbf{w}_C.$$

Тада није проблем показати да у њој важе једнакости (E2)–(E3c.).

Обрнуто, ако је $(\mathcal{A}, \mathrm{I}, \mathbf{1}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}', \mathbf{k}, \langle\ \ ,\ \ \rangle, \mathit{comp.})$ стандардно уведена картезијанска категорија, онда можемо дефинисати:

$$\boldsymbol{\sigma}_A =_{df} \boldsymbol{\pi}'_{\mathrm{I},A}, \qquad \boldsymbol{\sigma}^i_A =_{df} \langle \mathbf{k}_A, \mathbf{1}_A\rangle,$$

$$\boldsymbol{\delta}_A =_{df} \boldsymbol{\pi}_{A,\mathrm{I}}, \qquad \boldsymbol{\delta}^i_A =_{df} \langle \mathbf{1}_A, \mathbf{k}_A\rangle,$$

$$\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} =^{df} \langle\langle \boldsymbol{\pi}_{A,B\cdot C}, \boldsymbol{\pi}_{B,C}\boldsymbol{\pi}'_{A,B\cdot C}\rangle, \boldsymbol{\pi}'_{B,C}\boldsymbol{\pi}'_{A,B\cdot C}\rangle$$

$$\overleftarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} =^{df} \langle \boldsymbol{\pi}_{A,B}\boldsymbol{\pi}_{A\cdot B,C}, \langle \boldsymbol{\pi}'_{A,B}\boldsymbol{\pi}_{A\cdot B,C}, \boldsymbol{\pi}'_{A\cdot B,C}\rangle\rangle,$$

$$\mathbf{c}_{A,B} =^{df} \langle \boldsymbol{\pi}'_{A,B}, \boldsymbol{\pi}_{A,B}\rangle, \qquad \mathbf{w}_A =^{df} \langle \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_A\rangle.$$

И за $f : A \vdash C$ и $g : B \vdash D$

$$f{\cdot}g =^{df} \langle f\boldsymbol{\pi}_{A,B}, g\boldsymbol{\pi}'_{A,B}\rangle.$$

Сада је лако показати да у њој важе функторијалне, $\boldsymbol{\sigma\delta}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{k}$-једнакости, као и ($\boldsymbol{\sigma}\mathbf{kw}$) и ($\boldsymbol{\delta}\mathbf{kw}$).

За екстензионалну еквивалентност потребно је показати да ћемо се двоструким ”преводом” вратити на исте појмове, односно, треба показати да у структурној аксиоматизацији важе једнакости:

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \boldsymbol{\sigma}_A(\mathbf{k}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{1}_A), \qquad \boldsymbol{\sigma}^i_A = (\mathbf{k}_A\cdot\mathbf{1}_A)\mathbf{w}_A$$

$$\boldsymbol{\delta}_A = \boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{k}_{\mathrm{I}}), \qquad \boldsymbol{\delta}^i_A = (\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{k}_A)\mathbf{w}_A$$

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} & = & (((\boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{k}_{B\cdot C}))\cdot(\boldsymbol{\delta}_B(\mathbf{1}_B\cdot\mathbf{k}_C)\boldsymbol{\sigma}_{B\cdot C}(\mathbf{k}_A\cdot\mathbf{1}_{B\cdot C})))\mathbf{w}_{A\cdot(B\cdot C)})\cdot \\
 & & (\boldsymbol{\sigma}_C(\mathbf{k}_B\cdot\mathbf{1}_C)\boldsymbol{\sigma}_{B\cdot C}(\mathbf{k}_A\cdot\mathbf{1}_{B\cdot C})))\mathbf{w}_{A\cdot(B\cdot C)} \\
\overleftarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} & = & ((\boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{k}_B)\boldsymbol{\delta}_{A\cdot B}(\mathbf{1}_{A\cdot B}\cdot\mathbf{k}_C))\cdot(((\boldsymbol{\sigma}_B(\mathbf{k}_A\cdot\mathbf{1}_B)\boldsymbol{\delta}_{A\cdot B}(\mathbf{1}_{A\cdot B}\cdot\mathbf{k}_C))\cdot \\
 & & (\boldsymbol{\sigma}_C(\mathbf{k}_{A\cdot B}\cdot\mathbf{1}_C)))\mathbf{w}_{(A\cdot B)\cdot C}))\mathbf{w}_{(A\cdot B)\cdot C} \\
\mathbf{c}_{A,B} & = & ((\boldsymbol{\sigma}_B(\mathbf{k}_A\cdot\mathbf{1}_B))\cdot(\boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{k}_B)))\mathbf{w}_{A\cdot B} \\
\mathbf{w}_A & = & (\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{1}_A)\mathbf{w}_A \\
f\cdot g & = & ((f\boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A\cdot\mathbf{k}_B))\cdot(g\boldsymbol{\sigma}_B(\mathbf{k}_A\cdot\mathbf{1}_B)))\mathbf{w}_{A\cdot B}, \quad f : A\vdash C, \quad g : B\vdash D
\end{array}$$

а у стандардној:

$$\boldsymbol{\pi}_{A,B} = \boldsymbol{\pi}_{A,\mathrm{I}}\langle\mathbf{1}_A\boldsymbol{\pi}_{A,B}, \mathbf{k}_B\boldsymbol{\pi}'_{A,B}\rangle, \quad \boldsymbol{\pi}'_{A,B} = \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{I},B}\langle\mathbf{k}_A\boldsymbol{\pi}_{A,B}, \mathbf{1}_B\boldsymbol{\pi}'_{A,B}\rangle$$

$$\langle f, g\rangle = \langle f\boldsymbol{\pi}_{C,C}, g\boldsymbol{\pi}'_{C,C}\rangle\langle\mathbf{1}_C, \mathbf{1}_C\rangle, \quad f : C\vdash A, \quad g : C\vdash B.$$

Поједине од наведених једнакости се теже показују (нпр. оне које се тичу **b**-стрелица), с тим што се посао знатно упрошћава уколико се послужимо неким последицама ставова о кохеренцији у симетричним моноидалним категоријама. Сличном техником ћемо се послужити када будемо показивали кохеренцију у релевантним категоријама па је можда најбоље да се читалац тада врати на овакве једнакости и, вежбе ради, покаже их.

1.2 Г-природне трансформације и трансформацијски графови

Приступ појму природне трансформације ће овде бити нешто измењен у односу на уобичајени. Читалац ће препознати утицај [6] и основни разлог за трансформацију овог појма биће могућност његове карактеризације придруженим графом у неким посебним случајевима. Комплетно проширење појма биће дато у трећој глави и оно ће бити спој овога што следи и приступа из [6]. Због једноставности овога што ћемо изложити и довољности да то опише ситуације у наведеним категоријама са множењем, сматрамо вредним да се исприча у новом духу оно што се могло извући из дефиниција и тврђења треће главе.

Дакле, нека је $\mathcal{A}$ произвољна категорија и $F : \mathcal{A}^m\to\mathcal{A}$, $G : \mathcal{A}^n\to\mathcal{A}$ два функтора. Означимо са X_F m-торку $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ а са Y_G n-торку

$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, при чему их схватамо синтаксно те су самим тим оне и дисјунктне. Скуп $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, чије елементе називамо *врховима*, заједно са скупом неких неуређених парова тих врхова, које називамо *ивицама*, чине *трансформацијски граф* Γ, уколико сваку ивицу (посматрану као пар) можемо уредити тако да добијени скуп уређених ивица представља функцију из Y_G у X_F. Другим речима важи:

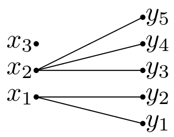
1. Свака ивица је типа $\{x_i, y_j\}$ за неке $1{\le}i{\le}m$, $1{\le}j{\le}n$.

2. Сваки врх из Y_G припада некој ивици.

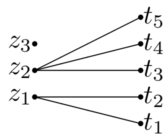
3. Два врха из X_F не могу припадати истој компоненти повезаности у Γ.

(Два врха v_1, v_2 припадају истој компоненти повезаности уколико постоји низ ивица од којих сваке две узастопне имају заједнички врх и v_1 припада првој у низу а v_2 последњој.)

Једнакост трансформацијских графова посматрамо до на имена низова којима припадају њихови врхови. Тако су нпр. трансформацијски графови Φ и Ψ

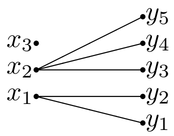


Φ

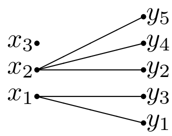


Ψ

једнаки, док су Γ и Δ



Γ



Δ

различити.

Надаље ћемо трансформацијске графове звати просто графови јер ћемо само о њима говорити. Једини изузетак биће ситуација када будемо причали о слободној категорији неког типа конструисаној над графом у класичном смислу, што ћемо посебно истаћи.

Нека су компоненте повезаности графа Γ нумерисане, и нека их, пртпоставимо има k. Нека је π функција која сваком врху додељује број његове компоненте повезаности. Посматрајмо скуп морфизама

$$\alpha{=}\{\alpha(A_1, \ldots, A_k){:}F(A_{\pi(x_1)}, \ldots, A_{\pi(x_m)}){\vdash}G(A_{\pi(y_1)}, \ldots, A_{\pi(y_n)})|A_1, \ldots, A_k{\in}\mathcal{A}\}$$

Уколико за свако $1{\le}i{\le}k$, за све $A_1, \ldots, A_i, A_i', A_{i+1}, \ldots, A_k$ и свако $f: A_i{\vdash}A_i'$ из $\mathcal{A}$, следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd}
F(A_{\pi(x_1)},\ldots,A_{\pi(x_m)}) \arrow[r, mapsto, "\alpha(A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_k)"] \arrow[d, mapsto, "F(h_{\pi(x_1)},\ldots,h_{\pi(x_m)})"] & G(A_{\pi(y_1)},\ldots,A_{\pi(y_n)}) \arrow[d, mapsto, "F(h_{\pi(y_1)},\ldots,h_{\pi(y_n)})"'] \\
F(A^*_{\pi(x_1)},\ldots,A^*_{\pi(x_m)}) \arrow[r, mapsto, "\alpha(A_1,\ldots,A'_i,\ldots,A_k)"] & G(A^*_{\pi(y_1)},\ldots,A^*_{\pi(y_n)})
\end{tikzcd}$$

где је:

$$h_i{\equiv}f, \qquad A^*_i{\equiv}A'_i$$

а за $j{\neq}i$

$$h_j{\equiv}\mathbf{1}_{A_j}, \qquad A^*_j{\equiv}A_j,$$

онда за α кажемо да је *г-природна* (г од граф) *трансформација* између функтора F и G са графом Γ, у ознаци $\alpha : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G$.

Уколико је $\alpha : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G$ за F, G и Γ као горе, онда тај исти скуп можемо посматрати као природну трансформацију, у класичном смислу, између функтора $F', G' : \mathcal{A}^k{\rightarrow}\mathcal{A}$ где је

$$F'(A_1,\ldots,A_k) =^{df} F(A_{\pi(x_1)},\ldots,A_{\pi(x_m)}),$$

$$F'(f_1,\ldots,f_k) =^{df} F(f_{\pi(x_1)},\ldots,f_{\pi(x_m)}),$$

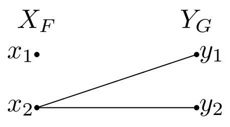
$$G'(A_1,\ldots,A_k) =^{df} G(A_{\pi(y_1)},\ldots,A_{\pi(y_n)}),$$

$$G'(f_1,\ldots,f_k) =^{df} G(f_{\pi(y_1)},\ldots,f_{\pi(y_n)}).$$

Пример 1   Посматрајмо скуп

$$\alpha = \{\alpha(A,B) = \mathbf{k}_A{\cdot}\mathbf{w}_B : A{\cdot}B{\vdash}\mathrm{I}{\cdot}(B{\cdot}B) | A,B{\in}\mathcal{A}\},$$

где је $\mathcal{A}$ нека картезијанска категорија. Нека је $F : \mathcal{A}^2{\rightarrow}\mathcal{A}$ функтор задат на следећи начин: за сваки пар објеката $(A,B){\in}\mathcal{A}^2$, $F(A,B) = A{\cdot}B$ и за сваки пар морфизама $(f,g){\in}\mathcal{A}^2$, $F(f,g) = f{\cdot}g$. Нека је $G : \mathcal{A}^2{\rightarrow}\mathcal{A}$ функтор задат на следећи начин: за сваки пар објеката $(A,B){\in}\mathcal{A}^2$, $G(A,B) = \mathrm{I}{\cdot}(A{\cdot}B)$ и за сваки пар морфизама $(f,g){\in}\mathcal{A}^2$, $G(f,g) = \mathbf{1}_{\mathrm{I}}{\cdot}(f{\cdot}g)$. Уређени пар (x_1,x_2) чини X_F, а (y_1,y_2) је Y_G. Граф Γ има поред врхова x_1,x_2,y_1,y_2 и ивице које повезују врхове x_2,y_1 и x_2,y_2 (види слику) и он очигледно задовољава услове из дефиниције трансформацијског графа.



Γ

Врх x_1 припада првој компоненти повезаности графа Γ а врхови x_2, y_1, y_2 другој.

У картезијанској категорији $\mathcal{A}$ за све њене објекте A, A', B, B' и морфизме $f : A \vdash A'$ и $g : B \vdash B'$ следећи дијаграми комутирају:

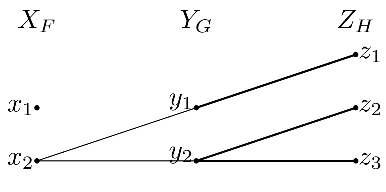
$$
\begin{tikzcd}
A \cdot B \arrow[r, "\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{w}_B"] \arrow[d, "f \cdot \mathbf{1}_B"'] & \mathrm{I} \cdot (B \cdot B) \arrow[d, "\mathbf{1}_{\mathrm{I}} \cdot (\mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_B)"] \\
A' \cdot B \arrow[r, "\mathbf{k}_{A'} \cdot \mathbf{w}_B"'] & \mathrm{I} \cdot (B \cdot B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \cdot B \arrow[r, "\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{w}_B"] \arrow[d, "\mathbf{1}_A \cdot g"'] & \mathrm{I} \cdot (B \cdot B) \arrow[d, "\mathbf{1}_{\mathrm{I}} \cdot (g \cdot g)"] \\
A \cdot B' \arrow[r, "\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{w}_{B'}"'] & \mathrm{I} \cdot (B' \cdot B')
\end{tikzcd}
$$

па је онда α г-природна трансформација између F и G са графом Γ. У класичном смислу α би представљала природну трансформацију између функтора $F : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ ($F(A,B) = A \cdot B$, $F(f,g) = f \cdot g$) и $G : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ ($G(A,B) = \mathrm{I} \cdot (B \cdot B)$, $G(f,g) = \mathbf{1}_{\mathrm{I}} \cdot (g \cdot g)$).

Оно што нас посебно даље интересује је како би се компоновале г-природне трансформације и да ли ће добијена композиција бити увек г-природна.

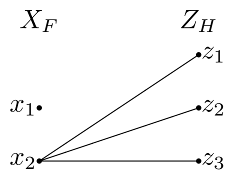
Нека су, дакле, $F : \mathcal{A}^m \rightarrow \mathcal{A}$, $G : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ и $H : \mathcal{A}^l \rightarrow \mathcal{A}$ функтори, Φ граф са врховима из $X_F = (x_1, \ldots, x_m)$ и $Y_G = (y_1, \ldots, y_n)$ чији је број компоненти повезаности k_Φ, и Ψ граф са врховима из Y_G и $Z_H = (z_1, \ldots, z_l)$ чији је број компоненти повезаности k_Ψ. Означимо са $\Phi + \Psi$ скуп врхова $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_l\}$ и скуп који представља дисјунктну унију скупова ивица графова Φ и Ψ (ово није трансформацијски граф, види слику) и назовимо то *амалгамацијом* графова Φ и Ψ преко Y_G.

Пример 2 Нека су $F : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$, $G : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ и $H : \mathcal{A}^3 \rightarrow \mathcal{A}$ функтори. Нека су графови Φ (танак) и Ψ (масан) представљени дијаграмом:



Дефинишимо $\Psi * \Phi$ као скуп врхова $\{x_1, \ldots x_m, z_1, \ldots, z_l\}$ и скуп ивица $\{\{x_i, z_j\} | x_i$ *у* z_j *припадају истој компоненти повезаности у* $\Phi + \Psi\}$. Очигледно је $\Psi * \Phi$ трансформацијски граф уколико су Φ и Ψ такви (композиција функција је функција).

У нашем примеру граф $\Psi * \Phi$ се представља дијаграмом:



Нумеришимо компоненте повезаности од $\Phi + \Psi$ (претпоставимо да их има k) и нека је нумерација компоненти повезаности од $\Psi{*}\Phi$ природно прати (особине трансформацијских графова нам гарантују да $\Psi{*}\Phi$ има исто k компоненти повезаности).

Нека су $\alpha : F \xrightarrow[\Phi]{\bullet} G$ и $\beta : G \xrightarrow[\Psi]{\bullet} H$, дефинишимо њихову композицију као

$$\beta\alpha =^{df} \{\beta\alpha(A_1,\ldots,A_k){\equiv}\beta(C_1,\ldots,C_{k_\Psi})\alpha(B_1,\ldots,B_{k_\Phi})|(A_1,\ldots,A_k){\in}\mathcal{A}^k\}$$

где је $B_i{\equiv}C_j{\equiv}A_h$ уколико сви врхови i-те компоненте повезаности од Φ и j-те компоненте повезаности од Ψ припадају h-тој компоненти повезаности у $\Phi{+}\Psi$ (два врха која припадају истој компоненти повезаности у Φ припадају истој компоненти повезаности и у $\Phi + \Psi$ што важи и за врхове из Ψ).

Сасвим је лако показати (као и у случају природности комозиције обичних природних трансформација, односно последица је примене резултата из треће главе на једноставне случајеве) да је тада и $\beta\alpha$ г-природна трансформација са графом $\Psi{*}\Phi$.

Овако дефинисане операције $*$ и композиција г-природних трансформација су асоцијативне, и уз још очигледне јединичне графове и г-природне трансформације имамо да трансформацијски графови у односу на $*$ као композицију представљају морфизме категорије чији су објекти коначни низови, а г-природне трансформације морфизме категорије функтора типа $\mathcal{A}^n{\vdash}\mathcal{A}$ $(n{\in}N)$ неке категорије $\mathcal{A}$. Поред овога прва категорија има картезијанску структуру наслеђену од $\langle Set^{op}, koproizvod\rangle$ а за другу ћемо показати, нешто касније, да ће бити истог типа као сама категорија $\mathcal{A}$.

1.3 Канонске трансформације у супструктуралним категоријама

Категорија $\mathcal{A}$ о којој будемо говорили у овом делу је произвољна супструктурална категорија у којој су примитивне стрелице специфициране. Ознака $\mathcal{A}^n$ је стандардна замена за производ

$$\underbrace{\mathcal{A}{\times}\mathcal{A}{\times}\ldots{\times}\mathcal{A}}_{n-\text{пута}}$$

с тим што $\mathcal{A}^0$ представља тривијалну категорију (један објекат и један морфизам).

Нека је $\mathcal{F}$ скуп терма добијених од симбола $\Box$ и I, помоћу бинарне операције $\cdot$. Елементе скупа $\mathcal{F}$ називамо *формама функтора*.

Природно дефинишемо пресликавање које формама додељује функторе типа $\mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ за неко $n \geq 0$.

1. Терму $\Box$ додељујемо функтор $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

2. Терму I додељујемо функтор $I : \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}$ који јединoм објекту из $\mathcal{A}^0$ додељује објекат I из $\mathcal{A}$.

3. Уколико је терму $\boldsymbol{F}$ придружен функтор $F : \mathcal{A}^m \to \mathcal{A}$ а терму $\boldsymbol{G}$ функтор $G : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ онда је терму $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}$ придружен функтор $H : \mathcal{A}^{m+n} \to \mathcal{A}$ такав да је за сваку $m+n$-торку $(A_1, \ldots, A_{m+n})$ објеката из $\mathcal{A}$, $H(A_1, \ldots, A_{m+n}) =^{df} F(A_1, \ldots, A_m) \cdot G(A_{m+1}, \ldots, A_{m+n})$, и за сваку $m+n$-торку $(f_1, \ldots, f_{m+n})$ морфизама из $\mathcal{A}$, $H(f_1, \ldots, f_{m+n}) =^{df} F(f_1, \ldots, f_m) \cdot G(f_{m+1}, \ldots, f_{m+n})$.

У зависности од категорије $\mathcal{A}$, две различите форме могу задавати исти функтор. У тривијалној категорији се на пример сви терми из $\mathcal{F}$ истог типа сликају у само један функтор. У случају слободних супструктуралних категорија о којима ћемо ускоро говорити наведена коресподенција ће бити $1-1$. Убудуће, када кажемо да је функтор $F : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ из $\mathcal{F}$ то значи да је он слика неке форме из $\mathcal{F}$ и често ћемо га изједначавати са неком формом од које потиче.

Пример 3 Нека је $\mathcal{A}$ нека категорија са множењем. Тада је функтор $(\Box \cdot \mathrm{I}) \cdot \Box : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ дефинисан на објектима као $((\Box \cdot \mathrm{I}) \cdot \Box)(A, B) = (A \cdot \mathrm{I}) \cdot B$, а на морфизмима као $((\Box \cdot \mathrm{I}) \cdot \Box)(f, g) = (f \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{I}}) \cdot g$.

Функтори из $\mathcal{F}$ ће нам представљати домене и кодомене канонских трансформација које ћемо сада дефинисати.

$\mathcal{D}\{$. Нека су $F : \mathcal{A}^m \to \mathcal{A}$, $G : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ и $H : \mathcal{A}^l \to \mathcal{A}$ функтори из $\mathcal{F}$.

а) Означимо са $\mathbf{1}_F$ скуп морфизама $\{\mathbf{1}_{F(A_1, \ldots, A_m)} | (A_1, \ldots, A_m) \in \mathcal{A}^m\}$ и нека је X_F m-торка $(x_1, \ldots, x_m)$ а Y_F m-торка $(y_1, \ldots, y_m)$, уколико је $m = 0$ онда је $X_F = Y_F = \emptyset$. Означимо са Γ трансформацијски граф који као пресликавање из Y_F у X_F задовољава $\Gamma(y_i) = x_i$ за $1 \leq i \leq m$. Лако се види да $\mathbf{1}_F$ представља г-природну трансформацију из F у F са графом Γ.

Уколико је $\mathcal{A}$ моноидална

б) Означимо са $\boldsymbol{\sigma}_F$ скуп морфизама $\{\boldsymbol{\sigma}_{F(A_1, \ldots, A_m)} | (A_1, \ldots, A_m) \in \mathcal{A}^m\}$ и нека је $X_{\mathrm{I} \cdot F}$ m-торка $(x_1, \ldots, x_m)$ а Y_F и Γ као малопре. Тада је $\boldsymbol{\sigma}_F$:

$\mathrm{I}{\cdot}F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} F$.

в) Означимо са $\boldsymbol{\sigma}^i_F$ скуп морфизама $\{\boldsymbol{\sigma}^i_{F(A_1,\ldots,A_m)} | (A_1,\ldots,A_m) \in \mathcal{A}^m\}$ и нека је $Y_{\mathrm{I}\cdot F}$ m-торка $(y_1,\ldots,y_m)$ а X_F и Γ као под *а)*. Тада је $\boldsymbol{\sigma}^i_F$: $F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} \mathrm{I}{\cdot}F$.

г) Означимо са $\boldsymbol{\delta}_F$ скуп морфизама $\{\boldsymbol{\delta}_{F(A_1,\ldots,A_m)} | (A_1,\ldots,A_m) \in \mathcal{A}^m\}$ и нека је $X_{F\cdot\mathrm{I}}$ m-торка $(x_1,\ldots,x_m)$ а Y_F и Γ као под *а)*. Тада је $\boldsymbol{\delta}_F$: $F{\cdot}\mathrm{I} \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} F$.

д) Означимо са $\boldsymbol{\delta}^i_F$ скуп морфизама $\{\boldsymbol{\delta}^i_{F(A_1,\ldots,A_m)} | (A_1,\ldots,A_m) \in \mathcal{A}^m\}$ и нека је $Y_{F\cdot\mathrm{I}}$ m-торка $(y_1,\ldots,y_m)$ а X_F и Γ као под *а)*. Тада је $\boldsymbol{\delta}^i_F$: $F{\cdot}\mathrm{I} \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} F$.

ђ) Означимо са $\overrightarrow{\mathbf{b}}_{F,G,H}$ скуп морфизама
$\{\overrightarrow{\mathbf{b}}_{F(A_1,\ldots,A_m),G(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}),H(A_{m+n+1},\ldots,A_{m+n+l})} | (A_1,\ldots,A_{m+n+l}) \in \mathcal{A}^{m+n+l}\}$.
Нека је $X_{F\cdot(G\cdot H)} = (x_1,\ldots,x_{m+n+l})$ а $Y_{(F\cdot G)\cdot H} = (y_1,\ldots,y_{m+n+l})$. Граф Γ као пресликавање из $Y_{(F\cdot G)\cdot H}$ у $X_{F\cdot(G\cdot H)}$ нека задовољава $\Gamma(y_i) = x_i$ за $1 \leq i \leq m+n+l$. Тада је $\overrightarrow{\mathbf{b}}_{F,G,H} : F{\cdot}(G{\cdot}H) \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} (F{\cdot}G){\cdot}H$.

е) Означимо са $\overleftarrow{\mathbf{b}}_{F,G,H}$ скуп морфизама
$\{\overleftarrow{\mathbf{b}}_{F(A_1,\ldots,A_m),G(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}),H(A_{m+n+1},\ldots,A_{m+n+l})} | (A_1,\ldots,A_{m+n+l}) \in \mathcal{A}^{m+n+l}\}$.
Нека је $X_{(F\cdot G)\cdot H} = (x_1,\ldots,x_{m+n+l})$ а $Y_{F\cdot(G\cdot H)} = (y_1,\ldots,y_{m+n+l})$. Граф Γ као пресликавање из $Y_{(F\cdot G)\cdot H}$ у $X_{F\cdot(G\cdot H)}$ нека задовољава $\Gamma(y_i) = x_i$ за $1 \leq i \leq m+n+l$. Тада је $\overleftarrow{\mathbf{b}}_{F,G,H} : (F{\cdot}G){\cdot}H \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} F{\cdot}(G{\cdot}H)$.

Уколико је $\mathcal{A}$ симетрична моноидална
ж) Означимо са $\mathbf{c}_{F,G}$ скуп морфизама
$\{\mathbf{c}_{F(A_1,\ldots,A_m),G(A_{m+1},\ldots,A_{m+n})} | (A_1,\ldots,A_{m+n}) \in \mathcal{A}^{m+n}\}$.
Нека је $X_{F\cdot G} = (x_1,\ldots,x_{m+n})$ а $Y_{G\cdot F} = (y_1,\ldots,y_{m+n})$. Граф Γ као пресликавање из $Y_{G\cdot F}$ у $X_{F\cdot G}$ нека задовољава $\Gamma(y_{m+i}) = x_i$ за $1 \leq i \leq n$ и $\Gamma(y_j) = x_{n+j}$ за $1 \leq j \leq m$. Тада је $\mathbf{c}_{F,G} : F{\cdot}G \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G{\cdot}F$.

з) Уколико је $\mathcal{A}$ релевантна, означимо са $\mathbf{w}_F$ скуп морфизама $\{\mathbf{w}_{F(A_1,\ldots,A_m)} \mid (A_1,\ldots,A_m) \in \mathcal{A}^m\}$. Нека је $X_F = (x_1,\ldots,x_m)$ а $Y_{F\cdot F} = (y_1,\ldots,y_{2m})$. Граф Γ као пресликавање из $Y_{F\cdot F}$ у X_F нека задовољава $\Gamma(y_i) = \Gamma(y_{m+i}) = x_i$ за $1 \leq i \leq m$. Тада је $\mathbf{w}_F : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} F{\cdot}F$.

и) Уколико је $\mathcal{A}$ афина, означимо са $\mathbf{k}_F$ скуп морфизама $\{\mathbf{k}_{F(A_1,\ldots,A_m)} | (A_1,\ldots,A_m) \in \mathcal{A}^m\}$. Нека је $X_F = (x_1,\ldots,x_m)$ а $Y_I = \emptyset$. Нека је Γ са врховима из X_F без ивица (једино пресликавање из из Y_I у X_F. Тада је $\mathbf{k}_F : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} I$.

Горе наведене г-природне трансформације које поседује категорија $\mathcal{A}$ чине класу *основних канонских трансформација* категорије $\mathcal{A}$.

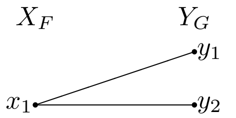
Нека су сада $F_1 : \mathcal{A}^m \to \mathcal{A}$, $F_2 : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$, $G_1 : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}$, $G_2 : \mathcal{A}^l \to \mathcal{A}$ из $\mathcal{F}$, и $\alpha : F_1 \xrightarrow[\Phi]{\bullet} G_1$ и $\beta : F_2 \xrightarrow[\Psi]{\bullet} G_2$. Означимо са $\alpha \cdot \beta$ скуп $\{f \cdot g | f \in \alpha,\ g \in \beta\}$ и нека је $X_{F_1 \cdot F_2} = (x_1, \ldots, x_{m+n})$ а $Y_{G_1 \cdot G_2} = (y_1, \ldots, y_{k+l})$. Нека граф Γ као пресликавање из $Y_{G_1 \cdot G_2}$ у $X_{F_1 \cdot F_2}$ задовољава следеће: Ако је за $1 \leq i \leq k$ $\Phi(y_i) = x_j$ $(1 \leq j \leq m)$ онда је $\Gamma(y_i) = x_j$. Ако је за $1 \leq j \leq l$ $\Psi(y_j) = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ онда је $\Gamma(y_{k+j}) = x_{m+i}$. И обрнуто. (Другим речима граф Γ представља дисјунктну унију копија графова Φ и Ψ.)

Тада је $\alpha \cdot \beta : F_1 \cdot F_2 \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G_1 \cdot G_2$. Ово се, због функторијалности множења, лако показује. Означимо Γ као $\Phi \cdot \Psi$.

Пример 4 Вратимо се на пример 1. Трансформација $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\mathbf{1}_\mathcal{A}} = \{\mathbf{k}_A |\ A \in \mathcal{A}\}$ има граф

$$\begin{array}{ccc} X_F & \qquad & Y_G = \emptyset \\ & & \\ \dot{x}_1 & & \end{array}$$

Трансформација $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\mathbf{1}_\mathcal{A}} = \{\mathbf{w}_A |\ A \in \mathcal{A}\}$ има граф



Производ ове две трансформације је г-природна трансформација из примера 1. чији је граф производ ова два.

$\mathcal{D}\{$ *канонске трансформације* у $\mathcal{A}$

1. Основне канонске трансформације из $\mathcal{A}$ су канонске трансформације (оне су г-природне).

2. Ако су $\alpha : F_1 \xrightarrow[\Phi]{\bullet} G_1$ и $\beta : F_2 \xrightarrow[\Psi]{\bullet} G_2$ канонске трансформације у $\mathcal{A}$, онда је и $\alpha \cdot \beta : F_1 \cdot F_2 \xrightarrow[\Phi \cdot \Psi]{\bullet} G_1 \cdot G_2$ канонска трансформација.

3. Ако су $\alpha : F \xrightarrow[\Phi]{\bullet} G$ и $\beta : G \xrightarrow[\Psi]{\bullet} H$ канонске трансформације у $\mathcal{A}$, онда је и $\beta\alpha : F \xrightarrow[\Psi * \Phi]{\bullet} H$ канонска трансформација.

Приметимо да из дефиниције следи да сваку канонску трансформацију задаје неки терм добијен од $\mathbf{1}_F$, $\boldsymbol{\sigma}_G, \ldots$ помоћу бинарних операција $\cdot$ и композиције. Наравно, два различита терма могу задавати

исту канонску трансформацију. Исто као и у случају функтора из $\mathcal{F}$ често ћемо трансформацију поистовећивати са неким термом који је задаје, и то ће бити јасно наглашено.
Ако је $\mathcal{A}$, на пример, картезијанска категорија онда можемо посматрати моноидалне канонске трансформације у $\mathcal{A}$, то су оне код којих класу основних чине трансформације *а)—е)*, симетричне моноидалне трансформације су оне код којих класу основних чине трансформације *а)—ж)*, итд. Уколико категорију наведемо као моноидалну онда када кажемо да је α њена канонска трансформација подразумевамо да је α моноидална канонска трансформација мада сама категорија може бити, на пример, и картезијанска са канонским трансформацијама које нису моноидалне.

Сви појмови уведени до сада служе нам да преформулишемо Маклејнове резултате из [11] који сада гласе:

Ако је $\mathcal{A}$ моноидална или симетрична моноидална категорија, функтори F и G из $\mathcal{F}$ и $\alpha, \beta : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G$ две канонске трансформације у $\mathcal{A}$, онда је $\alpha = \beta$ (тј. једнак је скуп морфизама α скупу морфизама β).

Ово својство категорије $\mathcal{A}$ називаћемо *кохеренцијом.* То би било у потпуној сагласности са дефиницијом датом у [9].

1.4 Категорије **Mon, SyMon, Rel, Aff, Cart**

Једнакосна презентација супструктуралних категорија нам омогућује да у сваком типу издвојимо слободну категорију генерисану неким скупом, односно уколико са $\mathcal{M}$ означимо категорију чији су објекти супструктуралне категорије једног типа а морфизми функтори који чувају структуру тог типа, онда функтор $U : \mathcal{M} \to \mathcal{G}\nabla_{\surd}\langle$ који заборавља категоријалну структуру има леви адјункт, слободан функтор $F : \mathcal{G}\nabla_{\surd}\langle \to \mathcal{M}$ и слика произвољног скупа (посматраног као дискретан граф) помоћу F ће бити слободна категорија $\mathcal{M}$-типа генерисана над тим скупом. Наравно, та категорија има особину да се свако пресликавање њених генератора у објекте неке категорије $\mathcal{A}$ из $\mathcal{M}$ може на јединствен начин продужити до $\mathcal{M}$-морфизма из те слободне категорије у $\mathcal{A}$.

Сама конструкција ових слободних категорија ће код нас бити алгебарска. Сваки пут полазимо од једног те истог бесконачног скупа слова P, који сматрамо линеарно уређеним, као скупом генератора. Категорија **Mon** би била слободна моноидална категорија генерисана над P, **SyMon** је слободна симетрична моноидална генерисана над P, **Rel** је слободна релевантна генерисана над P, **Aff** је слободна афина генерисана над P и **Cart** је слободна картезијанска категорија генерисана над P.

Скуп објеката ће у свим случајевима бити скуп $\mathcal{O}$ терма слободно генерисаних над $P\cup\{\mathrm{I}\}$ помоћу бинарне операције $\cdot$.

Примитивни морфизам-терми су у случају **Mon**

$$\mathbf{1}_A : A\vdash A$$

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{\sigma}_A : \mathrm{I}\cdot A\vdash A & \qquad \boldsymbol{\sigma}^i_A : A\vdash \mathrm{I}\cdot A \\ \boldsymbol{\delta}_A : A\cdot \mathrm{I}\vdash A & \qquad \boldsymbol{\delta}^i_A : A\vdash A\cdot \mathrm{I} \\ \overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} : A\cdot(B\cdot C)\vdash(A\cdot B)\cdot C & \qquad \overleftarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} : (A\cdot B)\cdot C\vdash A\cdot(B\cdot C) \end{array}$$

за све $A,B,C\in\mathcal{O}$. У случају **SyMon** треба још додати примитивне морфизам-терме

$$\mathbf{c}_{A,B} : A\cdot B\vdash B\cdot A$$

за све $A,B\in\mathcal{O}$. Уколико на **SyMon** примитивне морфизам-терме додамо још терме

$$\mathbf{w}_A : A\vdash A\cdot A$$

за свако $A\in\mathcal{O}$, добијамо *примитивне* **Rel** *морфизам-терме.* Уколико на **SyMon** примитивне морфизам-терме додамо још терме

$$\mathbf{k}_A : A\vdash \mathrm{I}$$

за све $A\in\mathcal{O}$, добијамо *примитивне* **Aff** *морфизам-терме.* Унија **Rel** и **Aff** примитивних морфизам терма представља **Cart** *примитивне морфизам-терме.*

Морфизам-терми неке од наведених слободних категорија су изграђени од примитивних морфизам-терма те категорије помоћу бинарних операцијских симбола $\cdot$ и композиције.

Морфизми категорије **Mon** ће бити класе еквиваленције **Mon** морфизам-терма посечених по моноидалним једнакостима. Скуп објеката $\mathcal{O}$ и **Mon** морфизми чине слободну моноидалну категорију генерисану над P. Аналогно за остале наведене категорије.

О односу ових категорија у смислу релације бити поткатегорија моћи ћемо рећи, како ствари стоје, тек нешто касније.

Нека је даље $\mathcal{C}$ једна од ових слободнох категорија. Посматрајмо следеће придруживање које сваком морфизам-терму из $\mathcal{C}$ додељује неку канонску трансформацију.

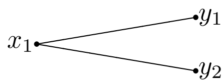
1. Ако је $f : A\vdash B$ примитиван морфизам-терм онда је он неког од облика $\mathbf{1}_{F(p_1,\ldots,p_m)}$ или $\boldsymbol{\sigma}_{F(p_1,\ldots,p_m)}$ или $\boldsymbol{\sigma}^i_{F(p_1,\ldots,p_m)}$, итд. за неко $F\in\mathcal{F}$ и нека, не нужно различита, слова $p_1,\ldots,p_m$. Доделимо тада том морфизам-терму канонску трансформацију $\mathbf{1}_F : F\xrightarrow[\Gamma]{\bullet}F$ односно $\boldsymbol{\sigma}_F : \mathrm{I}\cdot F\xrightarrow[\Phi]{\bullet}F$ односно $\boldsymbol{\sigma}^i_F : F\xrightarrow[\Psi]{\bullet}\mathrm{I}\cdot F$, итд., где је

граф Γ једнак графу из дефиниције основних канонских трансформација под *а)*, граф Φ је једнак графу из исте дефиниције под *б)*, граф Ψ је једнак графу из исте дефиниције под *в)* итд.

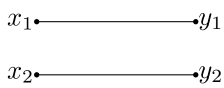
2. Ако је f облика $f_1 \cdot f_2$ односно $f_2 f_1$ и ако су морфизам-термима f_1 и f_2 придружене трансформације α_1 и α_2, онда морфизам терму f придружујемо канонску трансформацију $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ односно $\alpha_2 \alpha_1$.

Следећи пример ће нам послужити као илустрација овог придруживања.

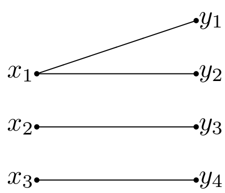
Пример 5 Нека је $F \equiv \overleftarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p\cdot q}(\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_{p\cdot q})$ **Cart** морфизам-терм. Тада подтерму $\mathbf{w}_p$ придружујемо канонску трансформацију $\mathbf{w}_\square : \square \xrightarrow[\Phi]{\bullet} \square\cdot\square$, где је граф Φ:



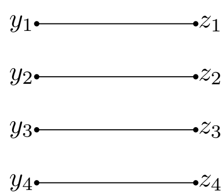
Подтерму $\mathbf{1}_{p\cdot q}$ придружујемо канонску трансформацију $\mathbf{1}_{\square\cdot\square} : \square\cdot\square \xrightarrow[\Psi]{\bullet} \square\cdot\square$, где је граф Ψ:



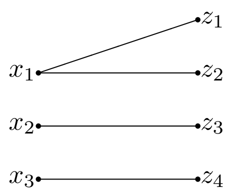
Подтерму $\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_{p\cdot q}$ придружујемо канонску трансформацију $\mathbf{w}_\square \cdot \mathbf{1}_{\square\cdot\square}$: $\square\cdot(\square\cdot\square) \xrightarrow[\Phi\cdot\Psi]{\bullet} (\square\cdot\square)\cdot(\square\cdot\square)$, где је граф Φ·Ψ:



Подтерму $\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p\cdot q}$ придружујемо канонску трансформацију $\overleftarrow{\mathbf{b}}_{\square,\square,\square\cdot\square}$: $(\square\cdot\square)\cdot(\square\cdot\square) \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} \square\cdot(\square\cdot(\square\cdot\square))$, где је граф Γ:



На крају самом терму f додељујемо канонску трансформацију
$\overleftarrow{\mathbf{b}}_{\square,\square,\square\cdot\square}(\mathbf{w}_{\square}\cdot\mathbf{1}_{\square\cdot\square}) : \square\cdot(\square\cdot\square) \xrightarrow[\Gamma*(\Phi\cdot\Psi)]{\bullet} \square\cdot(\square\cdot(\square\cdot\square))$, где је граф $\Gamma*(\Phi\cdot\Psi)$:



Нека је $f : A \vdash B$ морфизам-терм и $\alpha : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G$ придружена канонска трансформација у $\mathcal{C}$. За j-то појављивање слова (с лева) у B кажемо да је *наследник* i-тог појављивања (с лева) слова у A ако за y_j из Y_G и x_i из X_F важи $\Gamma(y_j) = x_i$. Приметимо да је наследник појављивања неког слова у A појављивање истог тог слова у B. На овај начин можемо посматрати граф Γ као везе између појављивања слова у A и њихових наследника у B. Такође приметимо да појављивање слова у A може имати празан скуп наследника, односно може их бити више. Ако је $f : A \vdash B$ **SyMon** морфизам-терм онда је скуп наследника сваког појављивања слова у A једночлан.

Због слободе скупа објеката, уколико за A и B из $\mathcal{C}$ постоји морфизам типа $A \vdash B$ у канонској трансформацији α из $\mathcal{C}$ онда је он једини тог типа у α.

Нека је α терм канонске трансформације типа $F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G$ из $\mathcal{C}$. Нека Γ има k компоненти повезаности и нека су $p_1, p_2, \ldots, p_k$ различита слова из P. Морфизам-терм

$$\alpha(p_1, \ldots, p_k) : F(p_{\pi(x_1)}, \ldots, p_{\pi(x_m)}) \vdash G(p_{\pi(y_1)}, \ldots, p_{\pi(y_n)})$$

називамо *представником* трансформације α.

Лема 1 *Нека је $\mathcal{A}$ произвољна супструктурална категорија и $\mathcal{C}$ једна од поменутих слободних категорија истог типа као $\mathcal{A}$. Нека су F и G из $\mathcal{F}$ као горе и $\alpha : F \xrightarrow[\Phi]{\bullet} G$ и $\beta : F \xrightarrow[\Psi]{\bullet} G$ у $\mathcal{A}$. Означимо са $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ канонске трансформације у $\mathcal{C}$ задате истим термима који задају α и β. Нека је морфизам-терм $f : A \vdash B$ представник трансформације $\boldsymbol{\alpha}$ а $g : A \vdash B$ представник трансформације $\boldsymbol{\beta}$. Ако је $f = g$ у $\mathcal{C}$ онда је и $\alpha = \beta$ у $\mathcal{A}$.*

доказ. Једнакост домена и кодомена морфизам-терма f и g нам говори да су графови Φ и Ψ једнаки. Нека је $f' = \alpha(A_1, \ldots, A_k)$ морфизам у $\mathcal{A}$. Слободно можемо претпоставити да је $f \equiv \boldsymbol{\alpha}(p_1, \ldots, p_k)$ и $g \equiv \boldsymbol{\beta}(p_1, \ldots, p_k)$ за нека различита слова $p_1, \ldots, p_k$. Због слободе категорије $\mathcal{C}$ постоји функтор $U : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ који чува структуру датог типа и који продужује пресликавање генератора $p_1 \mapsto A_1$, $p_2 \mapsto A_2, \ldots, p_k \mapsto A_k$, а остали произвољно. По претпоставци је $f = g$ па је и

$$\alpha \ni f' = \alpha(A_1, \ldots, A_k) = U(f) = U(g) = \beta(A_1, \ldots, A_k) \in \beta.$$

Овако можемо закључити да је $\alpha \subset \beta$. На исти начин показујемо $\beta \subset \alpha$.

q.e.d.

1.5 Кохеренција у релевантним, афиним и картезијанским категоријама

На крају 1.3 смо дефинисали шта значи да је нека моноидална односно симетрична моноидална категорија кохерентна. Сада ћемо ту дефиницију проширити на остале типове супструктуралних категорија.
$\mathcal{D}\{$ Нека је $\mathcal{A}$ супструктурална категорија одређеног типа. Ако за произвољне функторе F и G из $\mathcal{F}$ и произвољне две канонске трансформације $\alpha, \beta : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G$ из $\mathcal{A}$ важи $\alpha = \beta$ онда за категорију $\mathcal{A}$ кажемо да је *кохерентна* (има својство кохеренције) категорија датог типа.

Оно што ћемо показати у овом одељку јесте да је произвољна супструктурална категорија кохерентна. За доказ тога послужићемо се следећом лемом.

Лема 2 *Нека је $\mathcal{C}$ нека од наведених слободних категорија. Ако за произвољна два морфизам-терма $f, g : A \vdash B$ из $\mathcal{C}$, таква да су сва слова у A различита, следи $f = g$ онда кохеренција важи у свакој категорији тог типа.*

доказ. Нека је $\mathcal{A}$ произвољна супструктурална категорија истог типа као $\mathcal{C}$. Нека су $F, G \in \mathcal{F}$ и $\alpha, \beta : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G$ у $\mathcal{A}$. Нека су $f \equiv \boldsymbol{\alpha}(p_1, \ldots, p_k) : A \vdash B$ и $g \equiv \boldsymbol{\beta}(p_1, \ldots, p_k) : A \vdash B$ представници од $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ (канонске трансформације у $\mathcal{C}$ задате истим термима као α и β). По дефиницији трансформацијски граф Γ нема два врха из X_F у истој компоненти повезаности, па су онда и сва слова у A различита. По претпоставци је онда $f = g$, па је по леми 1, $\alpha = \beta$ у $\mathcal{A}$.

q.e.d.

Појмови које ћемо сада увести ће нам бити корисни приликом доказивања лема које се тичу кохеренције.
$\mathcal{D}\{$ *Производ-терме* категорије $\mathcal{C}$ (нека од наведених слободних) дефинишемо рекурзивно на следећи начин:

1. За све објекте Q, S, R из $\mathcal{C}$ следећи морфизам-терми (уколико постоје у $\mathcal{C}$) су производ-терми и називају се *карактеристике*

$$\boldsymbol{\sigma}_Q, \boldsymbol{\sigma}^i_Q, \boldsymbol{\delta}_Q, \boldsymbol{\delta}^i_Q, \overrightarrow{\mathbf{b}}_{Q,S,R}, \overleftarrow{\mathbf{b}}_{Q,S,R}, \mathbf{c}_{Q,S}, \mathbf{w}_Q, \mathbf{k}_Q.$$

2. За сваки објекат Q из $\mathcal{C}$ терм $\mathbf{1}_Q$ је производ-терм.

3. Ако је f производ-терм, онда су и $\mathbf{1}_Q{\cdot}f$ и $f{\cdot}\mathbf{1}_Q$ такође производ-терми за сваки објекат Q из $\mathcal{C}$.

Уколико производ-терм има карактеристику онда ћемо га звати *структурним производом* и у зависности од ње то ће бити $\boldsymbol{\sigma}$-производ, $\boldsymbol{\delta}$-производ, $\mathbf{b}$-производ итд.
$\mathcal{D}\{$ Означимо са $\mathcal{PF}$ скуп терма добијених од слова из P, симбола $\Box$ и I помоћу бинарне операције $\cdot$. На пример терм

$$(\Box{\cdot}p){\cdot}((\mathrm{I}{\cdot}\Box){\cdot}q)$$

је у $\mathcal{PF}$. На исти начин као и у случају израза из $\mathcal{F}$, сада можемо дефинисати пресликавање које сваком изразу из $\mathcal{PF}$ додељује функтор (са параметрима) типа $\mathcal{C}^n{\rightarrow}\mathcal{C}$, за неко $n{\geq}0$, где је $\mathcal{C}$ једна од наведених слободних категорија.

1. Терму $\Box$ додељујемо функтор $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}:\mathcal{C}{\rightarrow}\mathcal{C}$.

2. Терму I додељујемо константан функтор $I:\mathcal{C}^0{\rightarrow}\mathcal{C}$ који једином објекту из $\mathcal{C}^0$ додељује објекат I из $\mathcal{C}$.

3. Терму p, где је p неко слово из P, додељујемо константан функтор $p:\mathcal{C}^0{\rightarrow}\mathcal{C}$ који једином објекту из $\mathcal{C}^0$ додељује објекат p из $\mathcal{C}$.

4. Уколико је терму $\boldsymbol{F}$ придружен функтор $F:\mathcal{C}^m{\rightarrow}\mathcal{C}$ а терму $\boldsymbol{G}$ функтор $G:\mathcal{C}^n{\rightarrow}\mathcal{C}$ онда је терму $\boldsymbol{F}{\cdot}\boldsymbol{G}$ придружен функтор $H:\mathcal{C}^{m+n}{\rightarrow}\mathcal{C}$ такав да је за сваку $m+n$-торку $(A_1,\ldots,A_{m+n})$ објеката из $\mathcal{C}$, $H(A_1,\ldots,A_{m+n}) =^{df} F(A_1,\ldots,A_m){\cdot}G(A_{m+1},\ldots,A_{m+n})$, и за сваку $m{+}n$-торку $(f_1,\ldots,f_{m+n})$ морфизама из $\mathcal{C}$, $H(f_1,\ldots,f_{m+n}) =^{df} F(f_1,\ldots,f_m){\cdot}G(f_{m+1},\ldots,f_{m+n})$.

На пример, наведеном изразу $(\Box{\cdot}p){\cdot}((\mathrm{I}{\cdot}\Box){\cdot}q)$ одговара функтор типа $\mathcal{C}^2{\rightarrow}\mathcal{C}$ који слика пар објеката (A,B) у $(A{\cdot}p){\cdot}((\mathrm{I}{\cdot}B){\cdot}q)$, а пар морфизама (f,g) у $(f{\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}((\mathbf{1}_\mathrm{I}{\cdot}g){\cdot}\mathbf{1}_q)$.
У овом случају пресликавање је 1—1 и када кажемо да је неки функтор $F:\mathcal{C}^m{\rightarrow}\mathcal{C}$ из $\mathcal{PF}$, то значи да у $\mathcal{PF}$ постоји израз чија је он слика.

$\mathcal{D}f$ За $\mathbf{w}$-производ-терм кажемо да је *словни* уколико је индекс његове карактеристике слово.

$\mathcal{D}f$ Словни $\mathbf{w}$-производ се назива *левим* уколико, у њему, карактеристици $\mathbf{w}_p$ не претходи (с лева) ни једна јединица са словом p у индексу. На пример $(\mathbf{1}_{q\cdot r}{\cdot}\mathbf{w}_p){\cdot}\mathbf{1}_p$ је леви словни $\mathbf{w}$-производ, док $(\mathbf{1}_{p\cdot r}{\cdot}\mathbf{w}_p){\cdot}\mathbf{1}_p$ није леви.

$\mathcal{D}f$ За $\mathbf{c}$-производ кажемо да је *атомски* уколико је индекс његове карактеристике пар атома (слово или I).

$\mathcal{D}f$ За атомски **c**-производ кажемо да је *диференциран* уколико му карактеристика није облика $\mathbf{c}_{p,p}$ за неко слово p.

$\mathcal{D}f$ За **k**-производ кажемо да је *словни* уколико је индекс његове карактеристике слово.

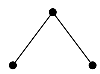
$\mathcal{D}f$ За композицију словних **w**-производа (**k**-производа) кажемо да је *уређена* уколико у њој $\mathbf{w}_p$-производ ($\mathbf{k}_p$-производ) претходи (с десна) $\mathbf{w}_q$-производу ($\mathbf{k}_q$-производу) само ако слово p претходи слову q у унапред задатом поретку на P.

1.5.1 Кохеренција у релевантним категоријама

На почетку овог одељка ћемо показати лему која сама носи дух кохеренције у категоријама које бисмо могли назвати **bw** и на коју ћемо се више пута позивати.

Лема 3 *Нека је F из $\mathcal{F}$ и нека је $f : p \vdash F(p, \ldots, p)$,* **Rel** *морфизам-терм који представља композицију словних* **w***-производа. Тада је f једнак терму облика композиције hg где је g композиција левих словних* **w***-производа а h је композиција* **b***-производа.*

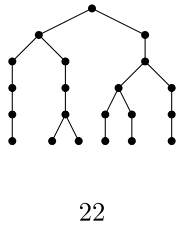
доказ. Ради једноставнијег праћења, придружимо терму f, рекурзивно, дрво на следећи начин:
Уколико је $f \equiv \mathbf{w}_p$, придружено дрво је



Уколико је f облика $G(\mathbf{w}_p)\, f_1$, где је G из $\mathcal{PF}$, и у форми од G, $i-1$ слова p претходи(с лева) симболу $\Box$, онда дрво које одговара терму f добијамо од дрвета придруженог терму f_1 настављајући i-ти(с лева) лист рачвањем а све остале продужујући простим сегментом.
Ако је f на пример терм

$$((\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{w}_p) \cdot \mathbf{1}_{(p \cdot p) \cdot p})(\mathbf{1}_{p \cdot p} \cdot (\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_p))(\mathbf{1}_{p \cdot p} \cdot \mathbf{w}_p)(\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_p)\mathbf{w}_p$$

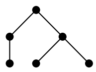
онда је њему придружено дрво



Означимо са Λ скуп чворова оваквог дрвета у којима имамо рачвање. Нека k_λ представља број десних грана рачвања кроз које се пролази на путу од чвора λ до корена. Мера сложености дрвета ће бити број n који дефинишемо на следећи начин:

$$n =^{df} \sum_{\lambda \in \Lambda} k_\lambda$$

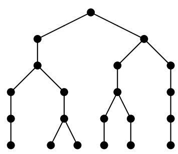
У нашем примеру је $n = 3$. Доказ ћемо даље изводити индукцијом по n. Уколико је $n = 0$, терм f је сам композиција левих словних $\mathbf{w}$-производа. Уколико је $n > 0$ и дрво од f нема поддрво облика



онда користећи само функторијалност множења можемо добити терм једнак терму f чије дрво има такво поддрво и код кога је n непромењено. У случају горе наведеног примера то би био нпр. терм

$$((\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{w}_p) \cdot \mathbf{1}_{(p \cdot p) \cdot p})(\mathbf{1}_{p \cdot p} \cdot (\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_p))(\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_{p \cdot p})(\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{w}_p)\mathbf{w}_p,$$

и његово дрво би било

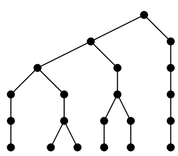


$n = 3$

Користећи једнакост ($\mathbf{bw}$) и природност $\mathbf{b}$-производа трансформишемо овај терм у облик $h_1 f_1$ где је f_1 композиција словних $\mathbf{w}$-производа са n-ом мањим за један, а h_1 је $\mathbf{b}$-производ. У нашем примеру то би био терм

$$\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p \cdot (p \cdot p), p \cdot p, p}(((\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{w}_p) \cdot \mathbf{1}_{p \cdot p}) \cdot \mathbf{1}_p)((\mathbf{1}_{p \cdot p} \cdot \mathbf{w}_p) \cdot \mathbf{1}_p)((\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_p) \cdot \mathbf{1}_p)(\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_p)\mathbf{w}_p,$$

чијем почетном делу одговара дрво



$n = 2$

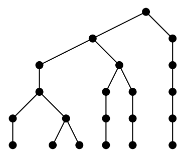
По индукцијској хипотези терм f_1 је једнак терму облика $h_2 g$ у жељеној форми, па је онда и $f = h_1 h_2 g$ такав.

q.e.d.

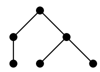
У нашем примеру горе наведени терм бисмо прво трансформисали у

$$\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p\cdot(p\cdot p),p\cdot p,p}(((\mathbf{1}_p\cdot\mathbf{w}_p)\cdot\mathbf{1}_{p\cdot p})\cdot\mathbf{1}_p)((\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_{p\cdot p})\cdot\mathbf{1}_p)((\mathbf{1}_p\cdot\mathbf{w}_p)\cdot\mathbf{1}_p)(\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_p)\mathbf{w}_p,$$

чијем почетном делу одговара дрво облика



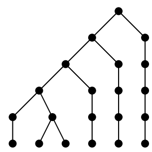
$n = 2$

(све ово у циљу да би се појавило поддрво облика )

а затим уз помоћ (**bw**) и (**b**) тај терм трансформишемо у

$$\begin{aligned}&\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p\cdot(p\cdot p),p\cdot p,p}(\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p\cdot(p\cdot p),p,p}\cdot\mathbf{1}_p)\\&\quad((((\mathbf{1}_p\cdot\mathbf{w}_p)\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)((\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)((\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)(\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_p)\mathbf{w}_p,\end{aligned}$$

чијем почетном делу одговара дрво облика

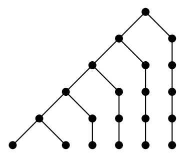


$n = 1$

а затим, такође уз помоћ (**bw**) и (**b**) тај терм трансформишемо у

$$\begin{aligned}&\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p\cdot(p\cdot p),p\cdot p,p}(\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p\cdot(p\cdot p),p,p}\cdot\mathbf{1}_p)(((\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p}\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)\\&\quad((((\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)((\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)((\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_p)\cdot\mathbf{1}_p)(\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_p)\mathbf{w}_p,\end{aligned}$$

који има жељену форму и чијем почетном делу одговара дрво:



$n = 0$

Последица *Нека је* $F : \mathbf{Rel}^k \to \mathbf{Rel}$ *из* $\mathcal{F}$ *и нека је* $f : p \vdash F(p, \ldots, p)$, **Rel** *морфизам-терм који представља композицију словних* **w***-производа. Тада за свако* $1 \leq i \leq k-1$ *постоји њему једнак морфизам терм облика*

$$v((\mathbf{1}_{\underbrace{(p\cdot p)\cdot\ldots\cdot p}_{i-1}}\cdot\mathbf{w}_p)\cdot\mathbf{1}_{\underbrace{(p\cdot p)\cdot\ldots\cdot p}_{k-i-1}})u$$

где је $u : p \vdash ((p \cdot p) \cdot \ldots \cdot p) \cdot ((p \cdot p) \cdot \ldots \cdot p)$ *композиција словних* $\mathbf{w}$*-производа, а* v *је композиција* $\mathbf{b}$*-производа.*

доказ. По претходном тврђењу постоји терм облика композиције $h_1 g$ једнак терму f, где је g композиција левих словних $\mathbf{w}$-производа, а h_1 је композиција $\mathbf{b}$-производа. Нека је терм $u : p \vdash ((p \cdot p) \cdot \ldots \cdot p) \cdot ((p \cdot p) \cdot \ldots \cdot p)$ композиција словних $\mathbf{w}$-производа (такав увек постоји). По претходном тврђењу постоји терм облика $h_2 g$ једнак терму $((\mathbf{1}_{(p \cdot p) \cdot \ldots \cdot p} \cdot \mathbf{w}_p) \cdot \mathbf{1}_{(p \cdot p) \cdot \ldots \cdot p}) u$, где је g исто као малопре, а h_2 је нека композиција $\mathbf{b}$-производа. Тада је

$$f = h_1 g = h_1 h_2^{-1} h_2 g = h_1 h_2^{-1} ((\mathbf{1}_{(p \cdot p) \cdot \ldots \cdot p} \cdot \mathbf{w}_p) \cdot \mathbf{1}_{(p \cdot p) \cdot \ldots \cdot p}) u,$$

где је са h_2^{-1} означена композиција $\mathbf{b}$-производа која представља инверз од h_2 (једнакости ($\mathbf{bb}$)).

q.e.d.

Вратимо се сада главном тврђењу овог одељка које би требало да гласи:

Теорема 1 *Свака релевантна категорија има својство кохеренције.*

У доказу ове теореме главну улогу ће играти следећа лема која говори о репрезентацији морфизама из $\mathbf{Rel}$.

Лема 4 *Нека је* $h : A \vdash B$ *морфизам-терм из* $\mathbf{Rel}$ *и нека су сва слова у* A *међусобно различита, онда је* h *једнак морфизам-терму облика композиције* $h'' h'$ *где је* h' *уређена композиција словних левих* $\mathbf{w}$*-производа, а* h'' *је композиција не* $\mathbf{w}$*-производа у којима су* $\mathbf{c}$*-производи атомски диференцирани.*

доказ. Трансформацију терма h извешћемо у неколико корака. Ради лакшег праћења, паралелно ћемо посматрати шта се дешава у сваком од тих корака уколико нам је полазни морфизам-терм био

$$(\mathbf{1}_q \cdot (\mathbf{w}_{p \cdot p} \mathbf{w}_p)) \mathbf{c}_{p,q}.$$

1° Терм h је једнак терму који представља композицију производ терма. Ово следи из функторијалности множења. У нашем примеру може се показати да је

$$h = (\mathbf{1}_q \cdot \mathbf{w}_{p \cdot p})(\mathbf{1}_q \cdot \mathbf{w}_p) \mathbf{c}_{p,q}$$

2° Користећи ($\mathbf{bcw}8$) и ($\boldsymbol{\sigma\delta}\mathbf{w}$) може се показати да је претходно добијени терм, па онда и h, једнак терму код кога су сви $\mathbf{w}$-производи словни. У нашем случају

$$h = t(\mathbf{1}_q \cdot (\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_{p \cdot p}))(\mathbf{1}_q \cdot (\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{w}_p))(\mathbf{1}_q \cdot \mathbf{w}_p) \mathbf{c}_{p,q}$$

где је

$t \equiv (\mathbf{1}_q \cdot \overleftarrow{\mathbf{b}}_{p\cdot p,p,p})(\mathbf{1}_q \cdot (\overrightarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p} \cdot \mathbf{1}_p))(\mathbf{1}_q \cdot ((\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{c}_{p,p}) \cdot \mathbf{1}_p))(\mathbf{1}_q \cdot (\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p} \cdot \mathbf{1}_p))(\mathbf{1}_q \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} p\cdot p, p, p)$

3° По функторијалности множења и природности $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\delta}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$-производа, словне $\mathbf{w}$-производе можемо померати удесно тако да добијамо терм чији почетак (с десна) чине словни $\mathbf{w}$-производи а завршни део је композиција не $\mathbf{w}$-производа. Код нас је то терм

$$t\mathbf{c}_{(p\cdot p)\cdot(p\cdot p),q}((\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_{p\cdot p}) \cdot \mathbf{1}_q)((\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{w}_p) \cdot \mathbf{1}_q)(\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_q)$$

4° Користећи (**bc**6) претходни терм је једнак терму код кога су $\mathbf{c}$-производи из завршног дела атомизовани. У нашем примеру та атомизација није суштинска јер њена примена на једини неатомски $\mathbf{c}$-производ $\mathbf{c}_{(p\cdot p)\cdot(p\cdot p),q}$ из претходног терма ствара само диференциране атомске $\mathbf{c}$-производе (видети следећу тачку) па ћемо добијени терм записати у скраћеном облику довољном за даљу анализу.

$$h = t_2(\mathbf{1}_q \cdot ((\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{c}_{p,p}) \cdot \mathbf{1}_p))t_1((\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_{p\cdot p}) \cdot \mathbf{1}_q)((\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{w}_p) \cdot \mathbf{1}_q)(\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{1}_q),$$

$$\text{где је } t_2 \equiv (\mathbf{1}_q \cdot \overleftarrow{\mathbf{b}}_{p\cdot p,p,p})(\mathbf{1}_q \cdot (\overrightarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p} \cdot \mathbf{1}_p)),$$

$$\text{а } t_1 \equiv (\mathbf{1}_q \cdot (\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p} \cdot \mathbf{1}_p))(\mathbf{1}_q \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} p\cdot p, p, p)(\mathbf{c}_{(p\cdot p)\cdot(p\cdot p),q})^*$$

($*$ значи развијени облик композиције са атомским $\mathbf{c}$-производима.)

5° Претпоставимо да је завршни део (композиција не $\mathbf{w}$-производа) претходног терма у форми $t_2 F(\mathbf{c}_{p,p})t_1$, где је $F : \mathbf{Rel} \to \mathbf{Rel}$ из $\mathcal{PF}$ а сви $\mathbf{c}$-производи у t_1 су атомски диференцирани. Нека је $F(\mathbf{c}_{p,p})t_1$ типа $G(p,p) \vdash F(p\cdot p)$ за неко $G : \mathbf{Rel}^2 \to \mathbf{Rel}$ из $\mathcal{PF}$, при чему лево p из $G(p,p)$ има за наследника десно p из $F(p\cdot p)$ и десно p из $G(p,p)$ има за наследника лево p из $F(p\cdot p)$. Због претпоставке да су сва слова у A различита, да су сви $\mathbf{c}$-производи у t_1 атомски диференцирани и да почетни део терма чине само атомски $\mathbf{w}$-производи, то се два истакнута слова p у $G(p,p)$ појављују узастопно (не нужно у облику $(p\cdot p)$).
Користећи функторијалност множења, можемо почетни део (композицију $\mathbf{w}$-производа) уредити тако да се сви $\mathbf{w}_p$-производи нађу на његовом левом крају. Сада можемо искористити последицу леме 3 са почетка овог одељка и показати да је овако трансформисани почетни део једнак терму облика $i_2 H(\mathbf{w}_p)i_1$, где је i_1 композиција словних $\mathbf{w}$-производа, $H : \mathbf{Rel} \to \mathbf{Rel}$ је из $\mathcal{PF}$, а i_2 је композиција $\mathbf{b}$-производа, и при томе важи да је терм $i_2 H(\mathbf{w}_p)$ типа $H(p) \vdash G(p,p)$ са десним p-овима као наследницима левог. (Претпоставимо да су истакнути (p,p) у $G(p,p)$, i-то и i плус прво појављивање слова p и само применимо поменуту последицу.)
У нашем примеру је

$$h = t_2(\mathbf{1}_q \cdot ((\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{c}_{p,p}) \cdot \mathbf{1}_p))t_1 i_2(((\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{w}_p) \cdot \mathbf{1}_p) \cdot \mathbf{1}_q)i_1$$

где је $i_1{\equiv}((\mathbf{w}_p{\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)(\mathbf{w}_p{\cdot}\mathbf{1}_q)$ а $i_2{\equiv}(\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p\cdot p,p,p}{\cdot}\mathbf{1}_q)((\overrightarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p}{\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)$
и $F{\equiv}(q{\cdot}(p{\cdot}\Box)){\cdot}p)$, $G{\equiv}((p{\cdot}\Box){\cdot}(\Box{\cdot}p)){\cdot}q$, $H{\equiv}((p{\cdot}\Box){\cdot}p){\cdot}q$.

Посматрајмо сада терме $F(\mathbf{c}_{p,p})t_1i_2$ и $t_1i_2H(\mathbf{c}_{p,p})$. Они су истог типа. Означимо са α и β канонске трансформације у **SyMon** које су придружене овим термима. Очигледно је да α и β имају исте графове (граф од $H(\mathbf{c}_{p,p})$ "комутира" у композицији са графом од t_1i_2 и претвара се у граф од $F(\mathbf{c}_{p,p})$) па је онда по резултатима о кохеренцији у симетричним моноидалним категоријама и $\alpha = \beta$, па се, по наведеном својству да канонска трансформација у слободној категорији садржи само једну стрелицу неког типа, може закључити да је $F(\mathbf{c}_{p,p})t_1i_2 = t_1i_2H(\mathbf{c}_{p,p})$ у **SyMon**, па пошто све **SyMon**-једнакости важе и у **Rel**, то су они једнаки и у **Rel**.
Дакле закључујемо да је полазни терм једнак терму облика $t_2t_1i_2H(\mathbf{c}_{p,p})$ $H(\mathbf{w}_p)i_1$. Сада можемо искористити једнакост $(\mathbf{cw})$ и добити терм $t_2t_1i_2H(\mathbf{w}_p)i_1$ једнак претходном. Поновимо да је i_1 композиција словних $\mathbf{w}$-производа, i_2 је композиција $\mathbf{b}$-производа, t_1 је композиција не $\mathbf{w}$-производа са атомским, диференцираним $\mathbf{c}$-производима и t_2 је композиција не $\mathbf{w}$-производа са атомским $\mathbf{c}$-производима. Понављајући ову процедуру можемо елиминисати све недиференциране $\mathbf{c}$-производе из t_2 и тако добити терм, чији почетни део чине словни $\mathbf{w}$-производи а завршни део је композиција не $\mathbf{w}$-производа са атомским, диференцираним $\mathbf{c}$-производима, једнак почетном терму h.
У нашем примеру ова процедура одговара следећим корацима

$$\begin{aligned}&t_2(\mathbf{1}_q{\cdot}((\mathbf{1}_p{\cdot}\mathbf{c}_{p,p}){\cdot}\mathbf{1}_p))t_1i_2(((\mathbf{1}_p{\cdot}\mathbf{w}_p){\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)i_1 =\\ &\quad t_2t_1i_2(((\mathbf{1}_p{\cdot}\mathbf{c}_{p,p}){\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)(((\mathbf{1}_p{\cdot}\mathbf{w}_p){\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)i_1 =\\ &\quad t_2t_1i_2(((\mathbf{1}_p{\cdot}\mathbf{w}_p){\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)i_1\end{aligned}$$

Овде је $t_2{\equiv}(\mathbf{1}_q{\cdot}\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p\cdot p,p,p})(\mathbf{1}_q{\cdot}(\overrightarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p}{\cdot}\mathbf{1}_p))$ па не садржи недиференциране $\mathbf{c}$-производе и тиме је процедура елиминисања недиференцираних $\mathbf{c}$-производа у нашем примеру завршена.

6° Из леме 3, уз још функторијалност множења следи да је почетни део терма из пртходне тачке једнак терму чији је почетни део уређена композиција словних левих $\mathbf{w}$-производа, а завршни део је композиција $\mathbf{b}$-производа. На овај начин показујемо да је терм h једнак терму у жељеној форми.

q.e.d.

У примеру који смо дали је

$$\begin{aligned}&(((\mathbf{1}_p{\cdot}\mathbf{w}_p){\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)i_1{\equiv}\\ &\quad(((\mathbf{1}_p{\cdot}\mathbf{w}_p){\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)((\mathbf{w}_p{\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)(\mathbf{w}_p{\cdot}\mathbf{1}_q) =\\ &\quad((\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p,p,p}{\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)(((\mathbf{w}_p{\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)((\mathbf{w}_p{\cdot}\mathbf{1}_p){\cdot}\mathbf{1}_q)(\mathbf{w}_p{\cdot}\mathbf{1}_q).\end{aligned}$$

Лема 5 *Нека су $f, g : A \vdash B$ морфизам терми из* **Rel** *и нека су сва слова у A различита, онда је $f = g$ у* **Rel**.

доказ. По леми 4, $f = f''f'$ и $g = g''g'$, где су f', f'', g', g'' у жељеној форми. Кодомен B потпуно одређује терм f' односно g' (број појављивања сваког слова у њему) па су онда f' и g' идентични терми, претпоставимо типа $A \vdash A'$. Тада су терми f'' и g'' истог типа $A' \vdash B$. Нека су α и β редом њима придружене канонске трансформације у **SyMon**. Графове Γ_α Γ_β можемо посматрати као везе између појављивања слова у A' и њихових наследника у B. Пошто ивице у њима повезују иста слова и пошто су сви **c**-производи у f'' и g'' атомски диференцирани, то оне повезују прво(с лева) појављивање једног слова у A' са првим појављивањем тог истог слова у B, друго појављивање тог слова у A' са другим појављивањем тог слова у B итд. Одавде се види да Γ_α и Γ_β морају бити исти графови па су онда и α и β једнаке канонске трансформације у **SyMon**, по кохеренцији у симетричним моноидалним категоријама. Као и малопре, онда закључујемо да су терми f'' и g'' једнаки у **SyMon** па онда и у **Rel**. Све заједно нам даје $f = g$ у **Rel**.

q.e.d.

Теорема 1 сада следи из леме 2 помоћу леме 5.

1.5.2 Кохеренција у афиним категоријама

Слично као и у случају релевантних категорија, главну улогу у доказу кохеренције ће одиграти лема која говори о репрезентацији морфизама из **Aff**.

Лема 6 *Нека је $h : A \vdash B$ морфизам-терм из* **Aff**, *тада је h једнак морфизам-терму чији је почетни део уређена композиција словних* **k**-*производа, а завршни део је композиција не* **k**-*производа.*

доказ. Аналогно доказу леме 4, трансформацију терма h ћемо извести у неколико корака.

1° Терм h је једнак терму који представља композицију производ терма. Ово је последица функторијалности множења.

2° Једнакости (**k**) и (**1k**) нам дају $\mathbf{k}_{A \cdot B} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{I}}(\mathbf{1}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{k}_B)(\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{1}_B)$ и одатле закључујемо да је претходни терм, па онда и h, једнак композицији производ-терма у којима су **k**-производи атомски.

3° Користећи (**1k**), претходни терм је једнак композицији производ-терма у којима су сви **k**-производи словни.

4° Користећи природност $\boldsymbol{\sigma}$,$\boldsymbol{\delta}$,**b**,**c**-производа и функторијалност множења, словне **k**-производе можемо померати удесно тако да добијемо терм чији почетак (с десна) чине словни **k**-производи и који је једнак терму h.

5° У добијеном терму, користећи функторијалност множења, можемо уредити почетни део тако да он буде уређена композиција словних **k**-производа.
Овиме смо нашли терм у жељеној форми једнак терму h.

q.e.d.

Лема 7 *Нека су $f, g : A \vdash B$ морфизам-терми из* **Aff** *и нека су сва слова у A различита, тада је $f = g$ у* **Aff**.

доказ. На основу леме 6, постоје терми f', f'', g', g'' тако да је $f = f''f'$ и $g = g''g'$ и f' и g' су уређене композиције словних **k**-производа, а f'' и g'' су **SyMon**-терми. Објекти A и B односно слова која се налазе у A а не налазе у B потпуно одређују терме f' и g' те они морају бити идентични, претпоставимо типа $A \vdash A'$. Дакле морфизам-терми f'' и g'' су типа $A' \vdash B$, и пошто су сва слова у A различита онда су сва слова у A' и у B различита. Нека су α и β канонске трансформације у **SyMon** редом додељене тим термима. Ако Γ_α и Γ_β посматрамо као графове који повезују појављивања слова у A' са њиховим наследницима у B, и пошто ивице у таквом графу повезују појављивања истих слова, онда је очигледно $\Gamma_\alpha = \Gamma_\beta$ и по кохеренцији у симетричним моноидалним категоријама имамо да је $\alpha = \beta$. Аналогно претходној ситуацији то повлачи да је $f'' = g''$ у **SyMon** па онда и у **Aff**. На основу свега имамо да је $f = f''f' = g''g' = g$.

q.e.d.

На основу леме 2 и леме 7 важи:

Теорема 2 *Свака афина категорија има својство кохеренције.*

1.5.3 Кохеренција у картезијанским категоријама

Можда ван очекивања, доказ за кохеренцију у картезијанским категоријама неће представљати некакву комбинацију претходна два, већ ћемо уз помоћ стандардне једнакосне аксиоматизације картезијанских категорија избећи сву сложеност коју би нам претходни прилаз донео.

Означимо са $\mathcal{P}$ скуп превода морфизам-терма из **Cart** на стандардни језик.

$\mathcal{D}f$ *Дистрибуирани морфизам-терми* чине најмањи скуп морфизам-терма из $\mathcal{P}$ који задовољава следеће услове:

1. За све објекте A, B, C, D, E из **Cart** терм $\mathbf{1}_A$ као и добро формиране композиције од $\boldsymbol{\pi}_{A,B}, \boldsymbol{\pi}'_{C,D}, \mathbf{k}_E$ су у скупу и такве називамо *компа.*

2. Ако су терми $f : C \vdash A$ и $g : C \vdash B$ у скупу дистрибуираних онда је и $\langle f, g\rangle$ у том скупу.

Појам који сада желимо да дефинишемо у потпуности одговара појму нормалне форме доказа у природној дедукцији.

$\mathcal{D}f$ Дистрибуиран морфизам-терм је *атомски* уколико свака компа у њему има атомски кодомен.

Лема 8 *Сваки морфизам-терм из $\mathcal{P}$ је једнак неком атомском дистрибуираном.*

доказ. Прво ћемо показати индукцијом по сложености терма f из $\mathcal{P}$ да је он једнак неком дистрибуираном морфизам-терму.

1°(*база индукције*) Ако је f примитиван морфизам-терм $\mathbf{1}_A$ или $\boldsymbol{\pi}_{A,B}$ или $\boldsymbol{\pi}'_{A,B}$ или $\mathbf{k}_A$, онда је по дефиницији он сам компа па значи и дистрибуиран терм.

2°(*индукцијски корак*) *а)* Претпоставимо да је f у форми $\langle g, h\rangle$. Пошто су g и h ниже комплексности то су по индуктивној хипотези они једнаки дистрибуираним термима g' и h' па је онда и f једнак дистрибуираном терму $\langle g', h'\rangle$.
б) Уколико претпоставимо да је f у форми hg онда су по индукцијској хипотези терми g и h једнаки дистрибуираним термима g_1 и h_1. Новом идукцијом по сложености терма $h_1 g_1$ доказујемо да је он једнак дистрибуираном морфизам-терму.

1. (*база унутрашње индукције*) Терм који представља композицију примитивних морфизам-терма једнак је компи.

2. (*унутрашњи индукцијски корак*) Посматрајмо једина три могућа случаја

   i) Морфизамтерми g_1 и h_1 су компе па је онда и сам $h_1 g_1$ компа, па је значи f једнак дистрибуираном терму.

   ii) Ако је h_1 у форми $\langle j, l\rangle$ онда је $f = \langle j, l\rangle g_1 = \langle j g_1, l g_1\rangle$ и сада по унутрашњој индукцијској хипотези $j g_1$ и $l g_1$ су једнаки неким дистрибуираним, па је онда и f једнак неком дистрибуираном терму.

   iii) Ако је h_1 компа и g_1 је у форми $\langle j, l\rangle$, онда ако је $h_1 \equiv \mathbf{1}$ имамо да је f једнако дистрибуираном терму g_1. Ако је $h_1 \equiv h_2 \boldsymbol{\pi}$

онда је $f = h_2\boldsymbol{\pi}\langle j,l\rangle = h_2 j$, и $h_2 j$ је једнак неком дистрибуираном по унутрашњој индукцијској хипотези. Случај $h_1 \equiv h_2\boldsymbol{\pi}'$ је аналоган претходном. (Приметимо да не водимо рачуна о заградама при компоновању морфизам-терма.) Ако је $h_1 \equiv h_2\mathbf{k}$ онда је $f = h_2\mathbf{k}\langle j,l\rangle = h_2\mathbf{k}$, а овај је компа, значи дистрибуиран.

Овиме је унутрашња индукција завршена а са њом и главна. На основу тога имамо да је произвољан терм из $\mathcal{P}$ једнак неком дистрибуираном. Користећи једнакост $h = \langle \boldsymbol{\pi}_{A,B}h, \boldsymbol{\pi}'_{A,B}h\rangle$ за $h : C \vdash A \cdot B$, можемо за сваку компу из f_1 наћи дистрибуирани морфизам-терм њој једнак, у коме свака компа има кодомен ниже комплексности од комплексности кодомена полазне компе. На тај начин, индуктивно, се можемо ослободити неатомских компи, па је онда f_1 а тиме и f једнак неком атомском дистрибуираном морфизам-терму.

q.e.d.

Лема 9 *Ако су $f, g : A \vdash B$ два морфизам-терма из $\mathcal{P}$ и сва слова у A су различита, а B је атом (слово или* I*), онда је $f = g$.*

доказ. Ако је $B \equiv \mathrm{I}$ онда је због терминалности I у **Cart** $f = g$. Нека је зато $B \equiv q$. По леми 8, морфизам-терми f и g су једнаки дистрибуираним морфизам-термима f_1 и g_1, а због атомичности кодомена ти терми су компе. Пошто је $B \not\equiv \mathrm{I}$ то ни један од њих не може почињати (с десна) са $\mathbf{k}$ (не постоји **Cart** морфизам-терм типа $\mathrm{I} \vdash q$ за неко слово q). Даље доказ изводимо индукцијом по сложености домена A.

1°(*база индукције*) Ако је A атомски објекат онда је $f_1 \equiv g_1 \equiv \mathbf{1}_q$.

2°(*индукцијски корак*) Нека је $A \equiv A_1 \cdot A_2$. Пошто у **Cart** не постоји морфизам типа $A \vdash q$ а да се q не појављује у A, то се q мора појављивати у A_1 или у A_2. По претпоставци се слово не понавља у A па се q онда појављује или у A_1 или у A_2. Претпоставимо да се q појављује у A_1. Из истог разлога као малопре тада мора бити $f_1 \equiv f_2\boldsymbol{\pi}$ и $g_1 \equiv g_2\boldsymbol{\pi}$ за неке компе $f_2, g_2 : A_1 \vdash q$. По индукцијској претпоставци је онда $f_2 = g_2$ па је дакле и $f = f_1 = f_2\boldsymbol{\pi} = g_2\boldsymbol{\pi} = g_1 = g$. Аналогно показујемо случај када се q појављује само у A_2.

q.e.d.

Лема 10 *Нека су $f, g : A \vdash B$ два морфизам-терма из $\mathcal{P}$ и нека су сва слова у A међусобно различита, онда је $f = g$.*

доказ. По леми 8, f и g су једнаки атомским дистрибуираним термима f_1 и g_1. Даље доказ изводимо индукцијом по сложености кодомена B. Ако је B атом онда нам претходна лема даје $f = g$. Ако B

није атом, онда ни f_1 ни g_1 нису компе јер су по претпоставци атомски дистрибуирани, па је онда $f_1{\equiv}\langle i,j\rangle$, $g_1{\equiv}\langle l,h\rangle$ и $B = B_1{\cdot}B_2$. Терми $i,l : A{\vdash}B_1$ и $j,h : A{\vdash}B_2$ су атомски дистрибуирани и B_1 и B_2 су мање комплексности од B па је онда по индукцијској хипотези $i = l$ и $j = h$, а самим тим и $f = g$.

q.e.d.

Недавно сам у [17], стр. 207, теорема 8.2.3. нашао краћи доказ за лему 10, са истом основном идејом али без увођења дистрибуиране атомске форме.

Последица *Нека су $f,g : A{\vdash}B$ морфизам терми из* **Cart** *и нека су сва слова у* A *међусобно различита, онда је $f = g$ у* **Cart**.

доказ. Нека су $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ из $\mathcal{P}$ преводи морфизам-терма f и g на стандардан језик. По леми 10, они су једнаки и онда због екстензионалне еквивалентности стандардне и структурне аксиоматизације показане на почетку, следи да је $f = g$ у **Cart**.

q.e.d.

На основу ове последице и леме 2 важи:

Теорема 3 *Свака картезијанска категорија има својство кохеренције.*

2 Неке последице кохерентности супструктуралних категорија

Кохерентност коју смо показали у претходној глави нам говори, у извесном смислу, о тривијалности категорија **Rel**, **Aff** и **Cart**. Наравно, то нису предуређења као што је нпр. случај са категоријом **Mon**, али леме 5, 7 и 10 из претходне главе говоре у том правцу. Оне се могу искористити у питањима да ли неки дијаграм који полази из објекта у коме се слова не понављају, комутира у некој од наведених слободних супструктуралних категорија, и дају увек позитиван одговор. Ставови о кохеренцији се могу искористити у виду следеће последице:

Нека је $\mathcal{C}$ једна од наведених слободних категорија и нека је:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

неки дијаграм у њој. Довољан услов да он комутира јесте да канонске трансформације придружене термима f и g имају исте графове

Уз својство слободе категорије $\mathcal{C}$, горе наведена последица има значајну практичну примену, јер рачун са морфизам-термима пребацује на прост рачун са трансформацијским графовима.

Пример 1 Вратимо се на једнакост

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B,C} \quad = \quad & (((\boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A{\cdot}\mathbf{k}_{B\cdot C}))\cdot(\boldsymbol{\delta}_B(\mathbf{1}_B{\cdot}\mathbf{k}_C)\boldsymbol{\sigma}_{B\cdot C}(\mathbf{k}_A{\cdot}\mathbf{1}_{B\cdot C})))\mathbf{w}_{A\cdot(B\cdot C)})\cdot \\ & (\boldsymbol{\sigma}_C(\mathbf{k}_B{\cdot}\mathbf{1}_C)\boldsymbol{\sigma}_{B\cdot C}(\mathbf{k}_A{\cdot}\mathbf{1}_{B\cdot C})))\mathbf{w}_{A\cdot(B\cdot C)}\end{aligned}$$

коју је требало показати у првој глави да би се утврдила екстензионална еквивалентност стандардне и структурне једнакосне аксиоматизације картезијанских категорија. Наравно, тада нам је била позната само кохеренција у симетричним моноидалним категоријама. У једном тренутку ће нам се појавити терми као нпр.

$$((\boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{I}}))\cdot(\boldsymbol{\delta}_B\boldsymbol{\sigma}_{B\cdot\mathrm{I}}))\mathbf{c}^m_{A,\mathrm{I},\mathrm{I}\cdot\mathrm{I},B\cdot\mathrm{I}}(\mathbf{1}_{A\cdot\mathrm{I}}\mathbf{c}^m_{\mathrm{I},B,\mathrm{I},\mathrm{I}})(\boldsymbol{\delta}^i_A\cdot(\boldsymbol{\sigma}^i_B\cdot\boldsymbol{\delta}^i_{\mathrm{I}}))$$

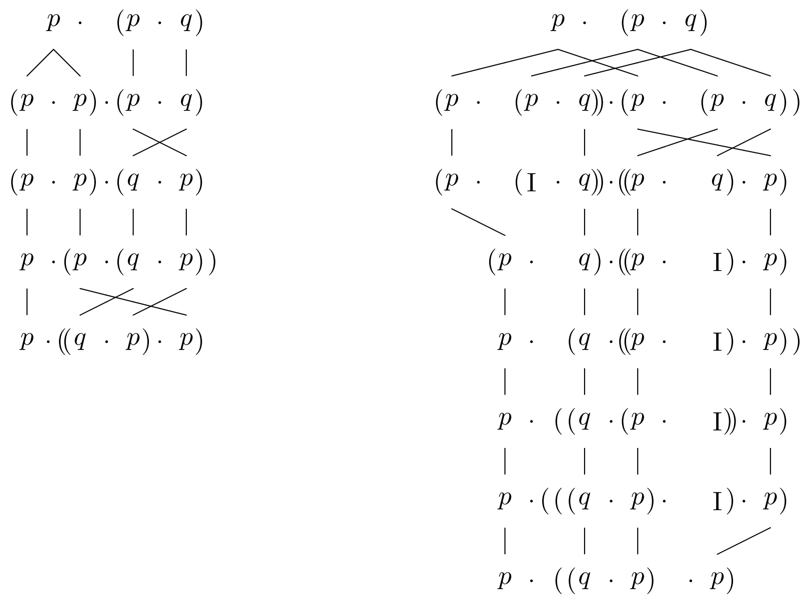
које треба упростити. Тип овог терма је $A{\cdot}(B{\cdot}\mathrm{I}){\vdash}A{\cdot}B$. Посматрајмо зато **SyMon** терм:

$$((\boldsymbol{\delta}_p(\mathbf{1}_p{\cdot}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{I}}))\cdot(\boldsymbol{\delta}_q\boldsymbol{\sigma}_{q\cdot\mathrm{I}}))\mathbf{c}^m_{p,\mathrm{I},\mathrm{I}\cdot\mathrm{I},q\cdot\mathrm{I}}(\mathbf{1}_{p\cdot\mathrm{I}}\mathbf{c}^m_{\mathrm{I},q,\mathrm{I},\mathrm{I}})(\boldsymbol{\delta}^i_p\cdot(\boldsymbol{\sigma}^i_q\cdot\boldsymbol{\delta}^i_{\mathrm{I}})) : p{\cdot}(q{\cdot}\mathrm{I}){\vdash}p{\cdot}q.$$

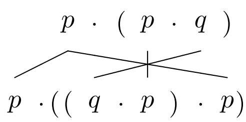
Пошто су сва слова у његовом домену резличита, то је значи довољно наћи простији **SyMon** терм истог типа. У овом случају, терм $\mathbf{1}_p{\cdot}\boldsymbol{\delta}_q$ се сам намеће, па су по поменутој последици кохеренције у **SyMon** ова два терма једнака у **SyMon**, па онда и у **Cart**. Због слободе категорије **Cart** следи да је у произвољној картезијанској категорији

$$((\boldsymbol{\delta}_A(\mathbf{1}_A\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{I}}))\cdot(\boldsymbol{\delta}_B\boldsymbol{\sigma}_{B\cdot\mathrm{I}}))\mathbf{c}^m_{A,\mathrm{I},\mathrm{I}\cdot\mathrm{I},B\cdot\mathrm{I}}(\mathbf{1}_{A\cdot\mathrm{I}}\mathbf{c}^m_{\mathrm{I},B,\mathrm{I},\mathrm{I}})(\boldsymbol{\delta}^i_A\cdot(\boldsymbol{\sigma}^i_B\cdot\boldsymbol{\delta}^i_{\mathrm{I}})) = \mathbf{1}_A\cdot\boldsymbol{\delta}_B.$$

Пример 2 Посматрајмо **Cart** терме $(\mathbf{1}_p\cdot\mathbf{c}_{p,q\cdot p})\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p,p,q\cdot p}(\mathbf{1}_{p\cdot p}\cdot\mathbf{c}_{p,q})(\mathbf{w}_p\cdot\mathbf{1}_{p\cdot q})$ и $(\mathbf{1}_p\cdot(((\boldsymbol{\delta}_{q\cdot p}\overrightarrow{\mathbf{b}}_{q,p,\mathrm{I}})\cdot\mathbf{1}_p)\overrightarrow{\mathbf{b}}_{q,p\cdot\mathrm{I},p}))\overleftarrow{\mathbf{b}}_{p,q,(p\cdot\mathrm{I})\cdot p}((\mathbf{1}_p\cdot\boldsymbol{\sigma}_q)\cdot((\mathbf{1}_p\cdot\mathbf{k}_q)\cdot\mathbf{1}_p))((\mathbf{1}_p\cdot(\mathbf{k}_p\cdot\mathbf{1}_q))\cdot\mathbf{c}_{p,p\cdot q})\mathbf{w}_{p\cdot(p\cdot q)}$. Њима придружене канонске трансформације имају исте графове. То можемо директно проверити посматрањем веза појављивања слова и њихових наследника, пратећи грађу ових терма.



У оба случаја графови се своде на следеће везе између појављивања слова и њихових наследника:

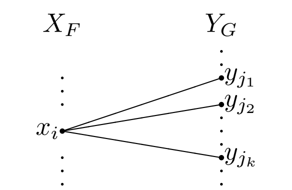


Пошто су ови терми истог типа, можемо закључити да су они једнаки у **Cart**.

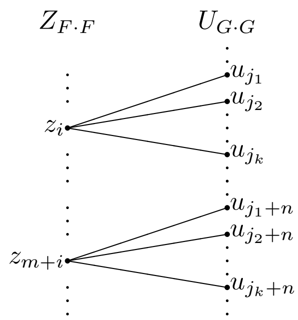
Сада ћемо показати да важи и обрат претходне последице, што нам говори следећа лема.

Лема 1 *Уколико су f и g два једнака морфизам-терма у $\mathcal{C}$, онда њима придружене канонске трансформације имају једнаке графове (због кохеренције су онда и саме трансформације једнаке).*

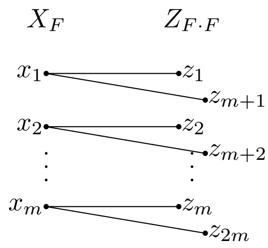
доказ. Све што треба проверити јесте да левим и десним странама једнакости ($cat\mathbf{1}$), ($cat\mathbf{2}$),...,($\boldsymbol{\sigma}\mathbf{kw}$) одговарају једнаки графови. Сви случајеви се слично показују и овде ћемо узети за пример једнакост ($\mathbf{w}$) $\quad \mathbf{w}_B f = (f{\cdot}f)\mathbf{w}_A$ за $f : A \vdash B$ из $\mathcal{C}$.
Претпоставимо да је $\alpha : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet} G$ канонска трансформација придружена терму f, где су $F : \mathcal{C}^m \rightarrow \mathcal{C}$ и $G : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}$ из $\mathcal{F}$. Нека је Γ представљен следећим дијаграмом:



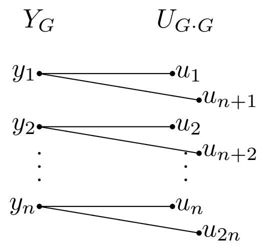
Морфизам-терму $f{\cdot}f$ ће тада одговарати канонска трансформација $\alpha{\cdot}\alpha : F{\cdot}F \xrightarrow[\Gamma\cdot\Gamma]{\bullet} G{\cdot}G$, где је граф $\Gamma{\cdot}\Gamma$ представљен следећим дијаграмом:



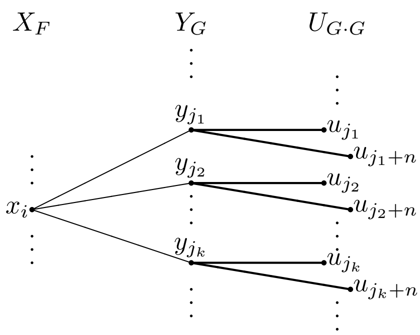
Морфизам терму $\mathbf{w}_A$ одговара канонска трансформација $\mathbf{w}_F : F \xrightarrow[\Phi]{\bullet} F{\cdot}F$, где се Φ може представити као:



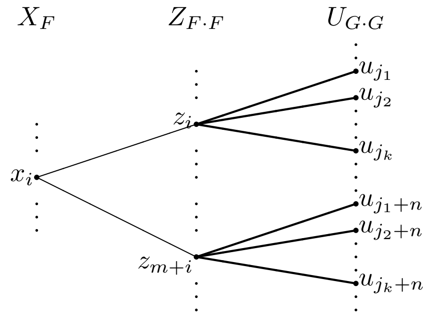
Морфизам терму $\mathbf{w}_B$ одговара канонска трансформација $\mathbf{w}_G : G \xrightarrow[\Psi]{\bullet} G{\cdot}G$ где је Ψ описан као:



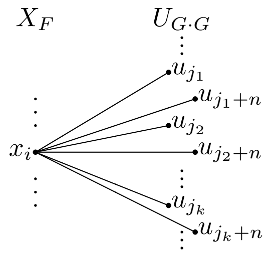
Тада је $\Gamma + \Psi$ дат дијаграмом:



Амалгамација графова Φ и $\Gamma{\cdot}\Gamma$ преко $Z_{F.F}$ се представља дијаграмом:



Сада је јасно да су графови $\Psi * \Gamma$ и $(\Gamma \cdot \Gamma) * \Phi$ једнаки и да су представљени дијаграмом:



Сви остали случајеви су слични.

q.e.d.

Једнакост (**w**) смо намерно изабрали јер ће она касније правити одступања у случају затворених категорија.

Исти овакав доказ би нам могао послужити да покажемо да је за супструктуралну категорију $\mathcal{A}$ неког типа, категорија чији су објекти функтори из $\mathcal{F}$, а морфизми, канонске трансформације из $\mathcal{A}$, такође супструктурална категорија истог типа. Та категорија, уз ону чији су објекти терми из $\mathcal{F}$ а морфизми трансформацијски графови, заузима централно место у [9]. Ми смо овде избегли тај пут јер мислимо да је рад са слободним категоријам далеко приступачнији за праћење.

2.1 Однос категорија **Mon**, **SyMon**, **Rel**, **Aff** и **Cart**

Све слободне категорије уведене у претходној глави су генерисане истим скупом слова P и већ је речено да све имају исти скуп објеката. Такође, из дефиниције морфизам-терма, следи да су сви морфизам-терми из **Mon** такође морфизам-терми у **SyMon**, **Rel**, **Aff** и **Cart**, сви морфизам-терми из **SyMon** су и у **Rel**, **Aff** и **Cart**, и сви морфизам-терми из **Rel** и **Aff** су у **Cart**. Значи сви морфизам-терми задовољавају следећу хијерархију:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Cart}\text{-терми} & \\
\mathbf{Rel}\text{-терми} \arrow[ur] & & \mathbf{Aff}\text{-терми} \arrow[ul] \\
& \mathbf{SyMon}\text{-терми} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \mathbf{Mon}\text{-терми} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

где стрелице представљају инклузију. Циљ овог одељка је да покажемо да и саме категорије задовољавају ту хијерархију у односу на релацију бити поткатегорија. Оно што смо већ више пута користили у претходној глави је да једнакост два терма у "нижој" категорији повлачи њихову једнакост у "вишој". Да бисмо остварили наш циљ, треба још да покажемо да важи и обрат овог тврђења.

Лема 2 *Нека су $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ неке од наведених слободних категорија и нека је у горњем дијаграму категорија $\mathcal{C}$ испод категорије $\mathcal{D}$. Ако за $\mathcal{C}$ морфизам-терме f и g важи $f = g$ у $\mathcal{D}$, онда су они једнаки и у $\mathcal{C}$.*

доказ. Нека је $\alpha : F \xrightarrow[\Phi]{\bullet} G$ канонска трансформација у $\mathcal{D}$ придружена терму f, а $\beta : F \xrightarrow[\Psi]{\bullet} G$ канонска трансформација у $\mathcal{D}$ придружена терму g. По леми 1 је онда $\Phi = \Psi$. Канонска трансформација $\boldsymbol{\alpha}$ у $\mathcal{C}$ придружена терму f ће такође имати граф Φ (видети дефиницију придруживања канонских трансформација морфизам-термима из $\mathcal{C}$), а трансформација $\boldsymbol{\beta}$ из $\mathcal{C}$ придружена терму g ће имати граф Ψ. Пошто су Φ и Ψ једнаки графови, то су онда по кохерентности категорије $\mathcal{C}$ и трансформације $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ једнаке. Пошто у свакој постоји само по један морфизам неког типа (више пута коришћено у првој глави) онда су и морфизам-терми f и g једнаки у $\mathcal{C}$.

q.e.d.

Из ове леме и претходно наведеног следи:

Теорема 1 *Категорија* **Mon** *је поткатегорија од* **SyMon**, **Rel**, **Aff**, *и* **Cart**. *Категорија* **SyMon** *је поткатегорија од* **Rel**, **Aff** *и* **Cart**. *Категорије* **Rel** *и* **Aff** *су поткатегорије од* **Cart**.

Иако ово тврђење можда изгледа читаоцу тривијално, оно има снагу наведених ставова о кохеренцији, јер би његов независан доказ омогућавао да кохеренцију у свим супструктуралним категоријама закључимо из најједноставнијег случаја категорије **Cart**.

2.2 Картезијански изоморфизми су симетрични моноидални

У овом делу биће показани резултати из [3] и при томе ће бити коришћена техника и резултати претходне главе. Тиме би директан доказ дат у [3] био разбијен на део који се тиче само кохеренције у **Cart** и **SyMon**, и део који се углавном служи особинама изоморфних објеката тих категорија.

Део наслова [3] "Једно оправдање линеарне логике" крије основну логичку мотивацију главног резултата тог чланка. Наиме, циљ је да се на језику категоријалне теорије доказа опише одбацивање неких правила извођења која важе у Генценовом рачуну секвената за интуиционистичку логику и која се не појављују (у пуном обиму) у одговарајућем рачуну за линеарну логику. Свакако, веома уочљиво својство линеарне логике је одбацивање Генценових структурних правила контракције и слабљења. То су правила која се у секвентним системима односе на везник ","(зарез) са леве стране секвента, а то је симбол који се не појављује у формулама логике, па ће према томе наша даља прича бити потпуно ослобођена свих логичких везника који се јављају у конкретној логици, и категоријалним језиком говорити само о структурним правилима. Значи операција множења у **Cart** и **SyMon** замењује везник "," из рачуна секвената, мада ће свакако бити јасно да множење у **SyMon** можемо схватити као фузију $\otimes$ у одговарајућем фрагменту линеарне логике, док множење у **Cart** одговара интуиционистичкој конјункцији $\wedge$. Ово намерно истичемо да се неко не би забринуо да смо у обзир узели само зрнце ових логика, те да је тиме овакво оправдање линеарне логике неубедљиво.

У приступу из прве главе формулација картезијанских категорија не подразумева операције над стрелицама које би одговарале правилима контракције и слабљења, већ су они дати колекцијама стрелица $\{\mathbf{w}_A \mid A{\in}\mathcal{A}\}$ и $\{\mathbf{k}_A \mid A{\in}\mathcal{A}\}$. Могуће је преформулисати дефиницију картезијанских категорија у том смислу али се овде нећемо тиме бавити. У случају да смо се определили за формулацију са опреацијама контракције и слабљења, ово што следи би далеко више личило на Генценову елиминацију сечења, с тиме што би се овде паралелно елиминисала два структурна правила из доказа који категоријално одговарају изоморфизмима. Директан доказ, а нарочито **k**-*Permutation Lemma* ([3], стр.16) имају препознатљив стил заступљен у доказу за елиминацију сечења. Овде ће то бити мање уочљиво јер су докази кохеренција, које ћемо сада користити, прикрили много тога што говори о пермутацији

структурних правила.
Оно што желимо да покажемо је да одбацивање стрелица из **Cart** које нису изоморфизми, ствара категорију **SyMon**, односно, пецизније речено, за сваки морфизам-терм који представља изоморфизам у **Cart** постоји њему једнак (у **Cart**) **SyMon** морфизам-терм. слободно се може рећи да је ово и очекиван резултат јер се већ из формулације ових категорија види да сви примитивни морфизам-терми у **SyMon** представљају изоморфизме, а пошто композиција и множење чувају то својство, онда и сви **SyMon** морфизам-терми представљају изоморфизме. Категорију **Cart** смо добили додавањем колекција **w** и **k** стрелица које саме не представљају изоморфизме, али оно што чини проблем нетривијалним је постојање **Cart** морфизам-терма који укључују примитивне **w** и **k** и који представљају изоморфизме у **Cart**. Такав је нпр. терм $(\boldsymbol{\sigma}_q \cdot \boldsymbol{\delta}_p)((\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{1}_q) \cdot (\mathbf{1}_p \cdot \mathbf{k}_q))\mathbf{w}_{p \cdot q}$. Ми ћемо показати да за сваки овакав терм постоји неки који не укључује **w** и **k** примитивне, њему једнак. У наведеном примеру то би био терм $\mathbf{c}_{p,q}$ (једнакост следи директно из тога што су они истог типа и што су сва слова у домену различита). То би говорило о конзервативности контракције и слабљења у односу на изоморфизме категорије **SyMon**.

Појам изоморфности објеката је посебно интересантан са становишта категоријалне теорије доказа јер он представља допринос теорије категорија логици. Наиме, уколико објекте наших категорија посматрамо као формуле логике, онда изоморфност две формуле представља јаче својство од стандардне еквиваленције тих формула. Уколико за пример узмемо формуле A и $A \wedge A$ у интуиционистичкој логици (у **Cart** би то били објекти A и $A \cdot A$), оне међусобно повлаче једна другу, али нису изоморфне. Различитост им је у томе што број различитих доказа (морфизама) типова $A \vdash B$ и $A \wedge A \vdash B$ не мора бити исти. Ово илуструје значај појма изоморфности са становишта теорије доказа. Изоморфност формула A и B говори о могућности бијекције скупа доказа у којима учествује A као премиса или закључак, на скуп доказа у којима је она замењена формулом B. Значи, са становишта теорије доказа, изоморфне формуле можемо сматрати једнаким, док смо са становишта логике то већ могли рећи за еквивалентне.
Још треба истаћи да је доказ у [3] нешто општији јер је рађен у нешто измењеном језику, тако да се може одмах прилагодити и на случај када објекат I није специфициран у нашим категоријама.

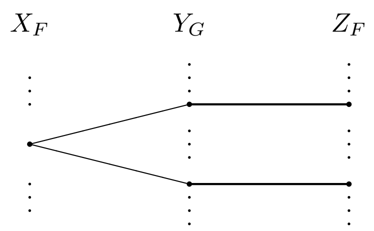
2.2.1 Доказ главног тврђења и последице

Следећа лема нам говори о особинама трансформацијских графова придружених термима који представљају изоморфизме у **Cart**.

Лема 3 *Ако терм $f : A \vdash B$ представља изоморфизам у* **Cart** *и ако је*

$\alpha : F \xrightarrow[\Phi]{\bullet} G$ *њему придружена канонска трансформација, онда граф* Φ *посматран као функција из* Y_G *у* X_F *представља бијекцију, тј. свакој компоненти повезаности у* Φ *припада тачно један врх из* X_F *и један врх из* Y_G.

доказ. Нека је β канонска трансформација придружена терму $g : B \vdash A$ који представља инверз за f. Из дефиниције придруживања следи да је β типа $G \xrightarrow[\Psi]{\bullet} F$, за неки граф Ψ, и да терм gf има придружену канонску трансформацију $\beta\alpha : F \xrightarrow[\Psi * \Phi]{\bullet} F$. Пошто је $gf = \mathbf{1}_A$, то на основу леме 1 имамо да је граф $\Psi{*}\Phi$ једнак графу канонске трансформације $\mathbf{1}_F$ (видети дефиницију $\mathbf{1}_F$). Уколико претпоставимо да је неки врх из X_F синглтон у Φ, онда је он синглтон и у $\Phi + \Psi$, па је такав и у $\Psi{*}\Phi$ што је немогуће, јер једнакост графова $\Psi{*}\Phi$ и Γ_{1_F} говори да је за свако $1 \leq i \leq m$, i-ти врх из X_F повезан ивицом из $\Psi{*}\Phi$ са i-тим врхом из Z_F, па ту синглтона уопште и нема. Аналогно овоме можемо показати да ни један врх из Y_G није синглтон у Ψ. Уколико претпоставимо да су два врха из Y_G у истој компоненти повезаности у Φ (види слику, Φ је танак а Ψ је масан),



онда због особина трансформацијских графова и чињенице да ни један врх из Y_G није синглтон у Ψ следио да су два врха из Z_F у истој компоненти повезаности у $\Phi{+}\Psi$ па онда и у $\Psi{*}\Phi$ што је, због једнакости овог графа са графом од $\mathbf{1}_F$, немогуће. Дакле сваки врх из X_F је повезан са неким врхом из Y_G ивицом из Φ и никоја два врха из Y_G не припадају истој компоненти повезаности у Φ.

q.e.d.

Лема 4 *Нека је* A *објекат из* **Cart** *у коме су сва слова различита, и нека су* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *сва слова која се појављују у њему. Тада постоји* **SyMon** *морфизам-терм типа* $A \vdash (((p_1 \cdot p_2) \cdot p_3) \cdot \ldots) \cdot p_n$.

доказ. (скица) У првом кораку, помоћу $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\delta}$ производа, поскидамо све I-ове из A. У другом кораку, помоћу **b** и **c** производа, испермутујемо слова у очишћеном A тако да се она с лева појављују у редоследу $p_1, p_2, \ldots, p_n$. У трећем кораку помоћу **b**-производа преасоцирамо заграде улево.

q.e.d.

Лема 5 *Ако је $f : A \vdash B$ морфизам-терм у* **Cart** *и $\alpha : F \xrightarrow[\Phi]{\bullet} G$ њему придружена канонска трансформација таква да граф Φ посматран као пресликавање врхова из Y_G у X_F представља бијекцију, онда је F једнак у* **Cart** *неком* **SyMon** *морфизам-терму.*

доказ. Претпоставимо да Φ има n компоненти повезаности. По претпоставци о Φ, тада функтори F и G из $\mathcal{F}$ морају бити типа $\mathbf{Cart}^n \to \mathbf{Cart}$. Нека је $h \equiv \alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ представник канонске трансформације α. Слободно можемо претпоставити (у питању је само нумерација компоненти повезаности у Φ) да је h типа $F(p_1, \ldots, p_n) \vdash G(p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$, за неку пермутацију i скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пошто је h представник, то су сва слова $p_1, \ldots, p_n$ различита, па објекти $F(p_1, \ldots, p_n)$ и $G(p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ задовољавају услове претходне леме, те постоје **SyMon** морфизам-терми типа $F(p_1, \ldots, p_n) \vdash (p_1 \cdot p_2) \cdot \ldots \cdot p_n$ и $G(p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}) \vdash (p_1 \cdot p_2) \cdot \ldots \cdot p_n$. Пошто сваки **SyMon**-терм има инверзан (такође **SyMon**) терм, то постоји **SyMon**-терм типа $F(p_1, \ldots, p_n) \vdash G(p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$. Нека је $\beta : F \xrightarrow[\Psi]{\bullet} G$ канонска трансформација у **Cart** придружена том терму. Графови Φ и Ψ су једнаки јер су потпуно одређени пермутацијом i. По ставу о кохеренцији у **Cart**, канонске трансформације α и β су једнаке, па је онда морфизам који одговара терму f могуће представити неким **SyMon** термом, јер је то могуће урадити са сваким морфизмом из β.

q.e.d.

Теорема 2 *Ако је $f : A \vdash B$ морфизам-терм у* **Cart** *који представља изоморфизам, онда је он једнак у* **Cart** *неком* **SyMon** *морфизам-терму.*

доказ. Директно из лема 3 и 5.

q.e.d.

Претходна теорема одговара главном резултату из [3]. Што се тиче споредног резултата који даје одлучивост питања да ли неки **Cart** морфизам-терм представља изоморфизам, овде бисмо га могли формулисати у виду следеће последице лема 3 и 5.

Последица *Морфизам-терм представља изоморфизам акко канонска трансформација која му одговара има граф који посматран као пресликавање из Y_G у X_F, представља бијекцију.*

доказ.

($\Rightarrow$) директно из леме 3.
($\Leftarrow$) из леме 5 и својства да сви **SyMon**-терми представљају изо-

морфизме.

q.e.d.

Као што смо већ показали, категорија **SyMon** је поткатегорија од **Cart**, па онда можемо слободно преформулисати теорему 2 тако да она сада гласи

Морфизам из **Cart** *је изоморфизам акко је он морфизам у* **SyMon**.

С обзиром да се **SyMon** састоји од самих изоморфизама, то је та категорија групоид у смислу Бранта (Brandt), па теорема 2 каже да је **SyMon** највећи групоид од свих поткатегорија од **Cart**.

3 Картезијанске затворене категорије и кохеренција

У овој глави ћемо се бавити кохеренцијом у картезијанским затвореним категоријама, трудећи се да дамо дефиницију тог појма, која би природно ширила оно што смо звали кохеренцијом у првој глави. То би требало да представља наставак Келијевих и Маклејнових резултата из [9] као и резултата на које се они ту позивају. Питања шта су то канонске трансформације у картезијанским затвореним категоријама и како схватити њихову природност биће централна у овој глави.

3.1 Картезијанске затворене категорије

Нека је $\mathcal{A}$ картезијанска категорија са специфицираним основним морфизмима по структурно-једнакосној аксиоматизацији датој у првој глави. За њу кажемо да је *картезијанска затворена категорија* уколико задовољава следеће:
На објектима је задата бинарна операција $\rightarrow$ (импликација). На морфизмима је такође задата бинарна операција са истом ознаком $\rightarrow$, при чему важи:

$$\frac{f : A \vdash B \qquad g : C \vdash D}{f \rightarrow g : B \rightarrow C \vdash A \rightarrow D}$$

За све објекте A и B категорије $\mathcal{A}$ она треба да поседује специјалне стрелице:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{A,B} : (A \rightarrow B) \cdot A \vdash B \qquad \boldsymbol{\eta}_{A,B} : B \vdash A \rightarrow (B \cdot A)$$

и при томе треба да важе додатне једнакости:

функторијалност импликације

$(\rightarrow)$	$(g_1 f_1) \rightarrow (g_2 f_2) = (f_1 \rightarrow g_2)(g_1 \rightarrow f_2)$
$(\rightarrow \mathbf{1})$	$\mathbf{1}_A \rightarrow \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \rightarrow B}$

$\boldsymbol{\epsilon\eta}$*-једнакости*

$(\boldsymbol{\epsilon})$	За $f : A \vdash B$	$f \boldsymbol{\epsilon}_{C,A} = \boldsymbol{\epsilon}_{C,B}((\mathbf{1}_C \rightarrow f) \cdot \mathbf{1}_C)$.
$(\boldsymbol{\eta})$	За $f : A \vdash B$	$(\mathbf{1}_C \rightarrow (\mathbf{1}_C \cdot f)) \boldsymbol{\eta}_{C,A} = \boldsymbol{\eta}_{C,B} f$.
$(\boldsymbol{\epsilon}')$	За $f : A \vdash B$	$\boldsymbol{\epsilon}_{B,C}((\mathbf{1}_B \rightarrow \mathbf{1}_C) \cdot f) = \boldsymbol{\epsilon}_{A,C}((f \rightarrow \mathbf{1}_C) \cdot \mathbf{1}_A)$.
$(\boldsymbol{\eta}')$	За $f : A \vdash B$	$(f \rightarrow (\mathbf{1}_C \cdot \mathbf{1}_B)) \boldsymbol{\eta}_{B,C} = (\mathbf{1}_A \rightarrow (\mathbf{1}_C \cdot f)) \boldsymbol{\eta}_{A,C}$.
(UFU)		$(\mathbf{1}_A \rightarrow \boldsymbol{\epsilon}_{A,B}) \boldsymbol{\eta}_{A,A \rightarrow B} = \mathbf{1}_{A \rightarrow B}$
(FUF)		$\boldsymbol{\epsilon}_{A,B \cdot A}(\boldsymbol{\eta}_{A,B} \cdot \mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{B \cdot A}$

Другим речима картезијанска категорија $\mathcal{A}$ је затворена уколико у њој за сваки објекат A функтор $F_A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ($F_A(B) = B \cdot A$, $F_A(f) = f \cdot \mathbf{1}_A$) има десни адјункт $G_A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ($G_A(B) = A \rightarrow B$, $G_A(f) = \mathbf{1}_A \rightarrow f$), при чему је јединица те адјункције $\eta_A(B)$ специфицирана као $\boldsymbol{\eta}_{A,B}$, а којединица $\epsilon_A(B)$ је специфицирана као $\boldsymbol{\epsilon}_{A,B}$.

Аналогно овоме бисмо посматрали затворење произвољне симетричне моноидалне категорије.

3.2 Уопштење рачуна функтора на нелинеарне случајеве

Улога овог одељка је да генерализује појам природне трансформације до те мере да се њиме може обухватити оно што ћемо касније звати канонским трансформацијама у картезијанским затвореним категоријама. Тиме би он у даљем раду имао улогу коју је [6] одиграо за [9]. Наравно, све се то може посматрати много општије, па се надамо да би корист од резултата овде добијених могла бити и много шира.

У [6] аутори генерализују појам природне трансформације, чиме успевају да покрију нпр. природност (по оба аргумента) фамилије стрелица

$$\{\boldsymbol{\epsilon}_{A,B} : (A{\rightarrow}B){\cdot}A{\vdash}B \mid A,B{\in}\mathcal{A}\}$$

неке затворене категорије $\mathcal{A}$, јер по дефиницији у њој следећи дијаграми комутирају:

$$\begin{tikzcd}
(A{\rightarrow}B){\cdot}A \arrow[r, "\boldsymbol{\epsilon}_{A,B}"] \arrow[d, "(\mathbf{1}_A{\rightarrow}f){\cdot}\mathbf{1}_A"] & B \arrow[d, "f"] \\
(A{\rightarrow}B'){\cdot}A \arrow[r, "\boldsymbol{\epsilon}_{A,B'}"'] & B'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(A'{\rightarrow}B){\cdot}A \arrow[r, "(\mathbf{1}_{A'}{\rightarrow}\mathbf{1}_B){\cdot}g"] \arrow[d, "(g{\rightarrow}\mathbf{1}_B){\cdot}\mathbf{1}_A"] & (A'{\rightarrow}B){\cdot}A' \arrow[d, "\boldsymbol{\epsilon}_{A',B}"] \\
(A{\rightarrow}B){\cdot}A \arrow[r, "\boldsymbol{\epsilon}_{A,B}"'] & B
\end{tikzcd}$$

за $f : B{\vdash}B'$ и $g : A{\vdash}A'$.
Међутим, основни резултат из [6], одговор на питање када је композиција тако уведених природних трансформација природна, није могуће применити на колекције стрелица

$$\{\mathbf{w}_{(D\rightarrow B)\cdot A} : (D{\rightarrow}B){\cdot}A{\vdash}((D{\rightarrow}B){\cdot}A){\cdot}((D{\rightarrow}B){\cdot}A) \mid A,B,D{\in}\mathcal{A}\},$$
$$\{\mathbf{1}_{(E\rightarrow F)\cdot C}{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{A,B} : ((E{\rightarrow}F){\cdot}C){\cdot}((A{\rightarrow}B){\cdot}A){\vdash}((E{\rightarrow}F){\cdot}C){\cdot}B \mid A,B,C,E,F{\in}\mathcal{A}\}$$

и њихову "композицију"

$$\{(\mathbf{1}_{(A\rightarrow B)\cdot A}{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{A,B})\mathbf{w}_{(A\rightarrow B)\cdot A} : (A{\rightarrow}B){\cdot}A{\vdash}((A{\rightarrow}B){\cdot}A){\cdot}B \mid A,B{\in}\mathcal{A}\}$$

из неке картезијанске затворене категорије $\mathcal{A}$.
Због овога, проширење појма природности, какво нам треба, неће ићи само преко г-природности из прве главе и природности уведене у [6], већ ће представљати извесно раширење појма *дијагоналне природности* који су увели Дибик и Стрит у [5], у који се потпуно може утопити као што се г-природност утапала у обичну.

За разлику од [6] даље ће се појављивати функтори са више аргумената, само једне категорије. Уопштење је потпуно тривијално, а компликује запис.

Нека је $\mathcal{A}$ произвољна категорија. Нека је X_T уређена m-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а Y_S уређена n-торка $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $m\geq 0$, $n\geq 0$, и l нека пресликава скуп $\{x_1, \ldots, y_n\}$ у $\{-1, 1\}$. Нека је G неки коначан (неуређен) скуп. *Ди-трансформацијски граф* Γ ће чинити скуп $\{x_1, x_2, \ldots, y_n\} \cup G$ чије елементе називамо *врховима* и скуп неких неуређених парова тих врхова, које називамо *ивицама*, уколико су испуњени следећи услови:

1. Сваки врх се налази на некој ивици (нема синглтона као код трансформацијских графова).

2. Никоја два врха из G нису спојена ивицом.

3. Ако су x_i и x_j (y_i и y_j) повезани ивицом у Γ, онда је $l(x_i) = -l(x_j)$ $(l(y_i) = -l(y_j))$.

4. Ако су x_i и y_j повезани ивицом у Γ, онда је $l(x_i) = l(y_j)$.

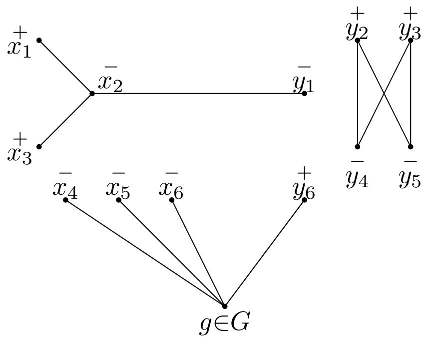
5. Уколико компонента повезаности у Γ (исто значење као код трансформацијског графа) садржи врхове различитог знака из X_T (Y_S), или врхове из X_T и из Y_S истог знака, онда она не садржи врхове из G.

6. Уколико компонента повезаности у Γ садржи врх из G, онда је он једини из G у њој, и сви остали врхови те компоненте повезаности су повезани ивицом са њим.

7. У једној компоненти повезаности је сваки позитиван врх из X_T (Y_S) повезан са сваким негативним врхом из X_T (Y_S) те компоненте повезаности, и са сваким позитивним врхом из Y_S (X_T) те компоненте повезаности. Такође је сваки негативан врх из X_T једне компоненте повезаности, везан ивицом са сваким негативним врхом из Y_S те компоненте повезаности.

Као и у случају трансформацијских графова, једнакост на ди-трансформацијским ћемо посматрати до на имена низова његових врхова. Такође ћемо их називати, просто, графови кад год не постоји могућност замене са објектима категорије $\mathcal{G}rph$.

Пример 1   Следећи дијаграм илуструје ди-трансформацијски граф са три компоненте повезаности и једним врхом из G.



Посматрајмо сада функторе

$$T : \mathcal{A}^{l(x_1)} \times \mathcal{A}^{l(x_2)} \times \ldots \times \mathcal{A}^{l(x_m)} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$S : \mathcal{A}^{l(y_1)} \times \mathcal{A}^{l(y_2)} \times \ldots \times \mathcal{A}^{l(x_n)} \rightarrow \mathcal{A},$$

где је $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$, а $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{op}$.
Претпоставимо да граф Γ има само једну компоненту повезаности. Нека је за свако $A \in \mathcal{A}$ дефинисан морфизам $\alpha(A) : T(A^m) \vdash S(A^n)$. Тада за скуп

$$\alpha = \{\alpha(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

кажемо да је *г-ди-природна трансформација* из T у S, у ознаци $\alpha : T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} S$, уколико за све A, C и $f : A \vdash C$ из $\mathcal{A}$, следећи дијаграм комутира:

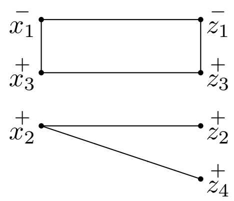
$$\begin{tikzcd}
 & T(C,C) \arrow[r, "\alpha(C)"] & S(C,C) \arrow[dr, "S(\mathbf{1}_C, f)"] & \\
T(A,C) \arrow[ur, "T(f, \mathbf{1}_C)"] \arrow[dr, "T(\mathbf{1}_A, f)"'] & & & S(C,A) \\
 & T(A,A) \arrow[r, "\alpha(A)"'] & S(A,A) \arrow[ur, "S(f, \mathbf{1}_A)"'] &
\end{tikzcd}$$

где $T(u,v)$ настаје од $T(x_1, \ldots, x_m)$ када свако позитивно x_i заменимо симболом u, а свако негативно x_j симболом v. Аналогно за $S(u,v)$.

У случају када граф Γ има k $(k > 1)$ компоненти повезаности, претпоставимо да је за сваку k-торку $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ објеката из $\mathcal{A}$, дефинисан морфизам $\alpha(A_1, \ldots, A_k) : T(A_{\pi(x_1)}, \ldots, A_{\pi(x_m)}) \vdash S(A_{\pi(y_1)}, \ldots, A_{\pi(y_n)})$, где је π функција која додељује сваком врху из Γ број његове компоненте повезаности. Означимо са α скуп морфизама

$\{\alpha(A_1,\ldots,A_k) \mid A_1,\ldots,A_k{\in}\mathcal{A}\}$. За α кажемо да је *г-ди-природна трансформација* из T у S ($\alpha : T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} S$) уколико је по претходном она г-ди-природна по свакој компоненти повезаности (аргументу). Односно, уколико за сваку $k-1$-торку објеката $(A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_k)$ из $\mathcal{A}$ означимо са $\alpha_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_k}$ скуп морфизама $\{\alpha(A_1,\ldots,A_{i-1},A,A_{i+1},\ldots,A_k) \mid A{\in}\mathcal{A}\}$, са $T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_k}$ и $S_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_k}$, функторе који настају од T и S параметризацијом свих аргумената осим оних који припадају i-тој компоненти повезаности у Γ, и са Γ_i, i-ту компоненту повезаности од Γ, онда је $\alpha : T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} S$ уколико је за свако i и сваку $k-1$-торку објеката $(A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_k)$ из $\mathcal{A}$, скуп $\alpha_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_k}$ г-ди-природна трансформација из $T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_k}$ у $S_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_k}$ са графом Γ_i.

Пример 2 Нека је $\mathcal{A}$ нека картезијанска затворена категорија и нека су $T : \mathcal{A}^{op}{\times}\mathcal{A}{\times}\mathcal{A}{\to}\mathcal{A}$ и $R : \mathcal{A}^{op}{\times}\mathcal{A}{\times}\mathcal{A}{\times}\mathcal{A}{\to}\mathcal{A}$ два функтора задата на објектима као $T(A,B,C) = (A{\to}B){\cdot}C$ и $R(A,B,C,D) = ((A{\to}B){\cdot}C){\cdot}D$, и аналогно на морфизмима. Нека је граф Γ дат следећим дијаграмом:



Уколико са α означимо скуп морфизама са стр.2

$$\{\alpha(A,B) = (\mathbf{1}_{(A\to B)\cdot A}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{A,B})\mathbf{w}_{(A\to B)\cdot A} : (A{\to}B){\cdot}A{\vdash}((A{\to}B){\cdot}A){\cdot}B \mid A,B{\in}\mathcal{A}\}$$

Онда је $\alpha : T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} R$, јер у $\mathcal{A}$ за све A,B,C и $f : A{\vdash}C$ следећи дијаграми комутирају

$$\begin{tikzcd}
 & (C{\to}B){\cdot}C \arrow[r, "\alpha(C,B)"] & ((C{\to}B){\cdot}C){\cdot}B \arrow[dr, "((f\to\mathbf{1}_B)\cdot\mathbf{1}_C)\cdot\mathbf{1}_B"] & \\
(C{\to}B){\cdot}A \arrow[ur, "(\mathbf{1}_C\to\mathbf{1}_B)\cdot f"] \arrow[dr, "(f\to\mathbf{1}_B)\cdot\mathbf{1}_A"'] & & & ((A{\to}B){\cdot}C){\cdot}B \\
 & (A{\to}B){\cdot}A \arrow[r, "\alpha(A,B)"'] & ((A{\to}B){\cdot}A){\cdot}B \arrow[ur, "((\mathbf{1}_A\to\mathbf{1}_B)\cdot f)\cdot\mathbf{1}_B"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (B\rightarrow C)\cdot B \arrow[rr, mapsto, "\alpha(B,C)"] & & ((B\rightarrow C)\cdot B)\cdot C \arrow[dr, mapsto, "((\mathbf{1}_B\rightarrow\mathbf{1}_C)\cdot\mathbf{1}_B)\cdot\mathbf{1}_C"] & \\
(B\rightarrow A)\cdot B \arrow[ur, mapsto, "(\mathbf{1}_B\rightarrow f)\cdot\mathbf{1}_B"] \arrow[dr, mapsto, "(\mathbf{1}_B\rightarrow\mathbf{1}_A)\cdot\mathbf{1}_B"'] & & & & ((B\rightarrow C)\cdot B)\cdot C \\
 & (B\rightarrow A)\cdot B \arrow[rr, mapsto, "\alpha(B,A)"'] & & ((B\rightarrow A)\cdot B)\cdot A \arrow[ur, mapsto, "((\mathbf{1}_B\rightarrow f)\cdot\mathbf{1}_B)\cdot f"'] &
\end{tikzcd}$$

Из дефиниције г-ди-природности је јасно да уколико је $\alpha : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} G$ за Γ са једном компонентом повезаности, онда тај исти скуп морфизама можемо посматрати као дијагонално-природну трансформацију, у смислу [5], између функтора $F', G' : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$, где $F'(u,v)$ настаје од $F(x_1,\ldots,x_m)$ када свако позитивно x_i заменимо симболом u, а свако негативно x_j симболом v. Аналогно за $G(u,v)$. Више компоненти повезаности графа Γ значи дијагоналну природност по више аргумената модификованих функтора F' и G'.

Основно што у овом одељку желимо да испитамо је како ће се овако дефинисане г-ди-природне трансформације компоновати, и када ће композиција бити опет г-ди-природна. Посматрајмо стога функторе:

$$T : \mathcal{A}^{l(x_1)} \times \mathcal{A}^{l(x_2)} \times \ldots \times \mathcal{A}^{l(x_m)} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$S : \mathcal{A}^{l(y_1)} \times \mathcal{A}^{l(y_2)} \times \ldots \times \mathcal{A}^{l(x_n)} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$R : \mathcal{A}^{l(z_1)} \times \mathcal{A}^{l(z_2)} \times \ldots \times \mathcal{A}^{l(z_p)} \rightarrow \mathcal{A},$$

$m,n,p \geq 0$, и г-ди природне трансформације

$$\alpha = \{\alpha(A_1,\ldots,A_{k_\alpha}) \mid A_1,\ldots,A_{k_\alpha} \in \mathcal{A}\} : T \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} S \ ,$$

$$\beta = \{\beta(B_1,\ldots,B_{k_\beta}) \mid B_1,\ldots,B_{k_\beta} \in \mathcal{A}\} : S \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} R \ ,$$

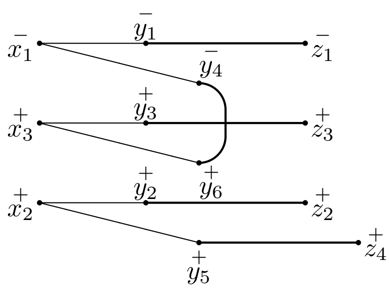
Дефинишимо као и у првој глави *амалгамацију* графова Φ и Ψ преко Y_S, у ознаци $\Phi + \Psi$, као скуп врхова $\{x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_p\} \cup G_\Phi \cup G_\Psi$ и скуп који представља дисјунктну унију скупова ивица графова Φ и Ψ. Претпоставимо да амалгамација $\Phi + \Psi$ има само једну компоненту повезаности (уопштење ће бити тривијално). Дефинишимо граф Γ на следећи начин: Ако су сви врхови из X_T једног знака, а сви врхови из Z_R супротног (ово укључује случај када их и нема), онда је G синглтон и граф Γ има за скуп врхова $\{x_1,\ldots,x_m,z_1,\ldots,z_p\} \cup G$ и сви врхови x_i, z_j су спојени ивицом из Γ са јединим врхом из G. У свим осталим случајевима Γ има скуп врхова $\{x_1,\ldots,x_m,z_1,\ldots,z_p\}$ и сваки позитиван врх из X_T је спојен ивицом у Γ са сваким негативним врхом из X_T и сваким позитивним врхом из Z_R, с ваки негативан врх из Z_R је спојен са сваким позитивним врхом из Z_R и сваким негативним врхом из X_T. Граф Γ ћемо звати композицијом графова Φ и Ψ и означаваћемо га као $\Psi{*}\Phi$. Он је очигледно ди-трансформацијски граф.

Означимо са A^k за неки објекат A из $\mathcal{A}$, k-торку $(A, A, \ldots, A)$. Дефинишимо *композицију* трансформација α и β, у ознаци $\beta\alpha$ као следећи скуп:

$$\beta\alpha =^{df} \{\beta(A^{k_\beta})\alpha(A^{k_\alpha}) \mid A{\in}\mathcal{A}\}.$$

Основно питање за нас ће бити: Када је $\beta\alpha : T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} R$?

Пример 3 Вратимо се на претходни пример и скупове морфизама са стране 2. Нека су:
$T : \mathcal{A}^{op}{\times}\mathcal{A}^2{\to}\mathcal{A}$ $(T(A, B, C) = (A{\to}B){\cdot}C,\ T(f, g, h) = (f{\to}g){\cdot}h)$,
$S : \mathcal{A}^{op}{\times}\mathcal{A}^2{\times}\mathcal{A}^{op}{\times}\mathcal{A}^2{\to}\mathcal{A}$ $(S(A, B, C, D, E, F) = ((A{\to}B){\cdot}C){\cdot}((D{\to}E){\cdot}F))$,
$R : \mathcal{A}^{op}{\times}\mathcal{A}^3{\to}\mathcal{A}$ $(R(A, B, C, D) = ((A{\to}B){\cdot}C){\cdot}D)$
три функтора. Нека је амалгамација $\Phi + \Psi$ задата дијаграмом

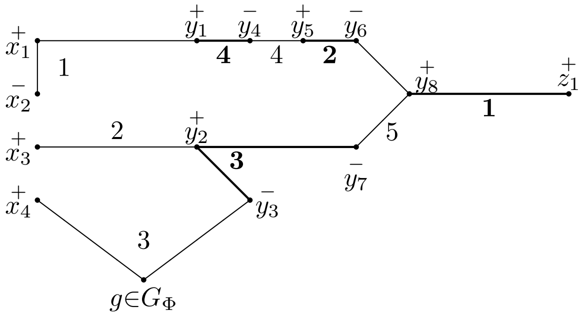


где је граф Φ танак, а Ψ масан.
Означимо са β скуп морфизама
$\{\mathbf{w}_{(D\to B)\cdot A} : (D{\to}B){\cdot}A{\vdash}((D{\to}B){\cdot}A){\cdot}((D{\to}B){\cdot}A) \mid A, B, D{\in}\mathcal{A}\}$,
а са γ скуп морфизама
$\{\mathbf{1}_{(E\to F)\cdot C}{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{A,B} : ((E{\to}F){\cdot}C){\cdot}((A{\to}B){\cdot}A){\vdash}((E{\to}F){\cdot}C){\cdot}B \mid A, B, C, E, F{\in}\mathcal{A}\}$.
Лако је проверити да је $\beta : T \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} S$ и $\gamma : S \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} R$. Њихова композиција је $\alpha : T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} R$ из претходног примера и граф Γ је једнак $\Psi{*}\Phi$.

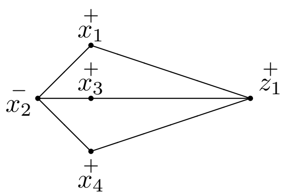
Свакако, одмах се намећу питања колико на природност композиције утиче сама категорија $\mathcal{A}$, односно да ли је композиција г-ди-природних трансформација увек г-ди-природна, као у случају обичне природности. Следећи пример, иако заморан због своје дужине, може послужити као добра илустрација свега што ће следити у овом одељку.

Пример 4 Нека су дати функтори
$T : \mathcal{A}{\times}\mathcal{A}^{op}{\times}\mathcal{A}^2{\to}\mathcal{A}$

$S : \mathcal{A}^2{\times}(\mathcal{A}^{op})^2{\times}\mathcal{A}{\times}(\mathcal{A}^{op})^2{\times}\mathcal{A}{\to}\mathcal{A}$
$R : \mathcal{A}{\to}\mathcal{A}$,
и г-ди-природне трансформације $\alpha : T \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} S$ и $\beta : S \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} R$, такве да је амалгамација графова $\Phi + \Psi$ представљена дијаграмом:



где је Φ танак, а Ψ масан и компоненте повезаности су нумерисане одговарајућим бројевима.
Граф $\Gamma = \Psi{*}\Phi$ има једну компоненту повезаности и представљен је дијаграмом:



Да бисмо показали да је $\beta\alpha : T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} R$, довољно је показати да за све A, C, $f : A{\vdash}C$ из $\mathcal{A}$ важи једнакост:

$$L{\equiv}R(\mathbf{1}_C)\,\beta\alpha(C)\,T(f, \mathbf{1}_C, f^2) = R(f)\,\beta\alpha(A)\,T(\mathbf{1}_A, f, \mathbf{1}_A^2){\equiv}D$$

где је $(f, \mathbf{1}_C, f^2)$ замена за четворку $(f, \mathbf{1}_C, f, f)$ итд.
Ово ћемо показати "путујући" кроз амалгамацију $\Phi + \Psi$, на следећи начин:

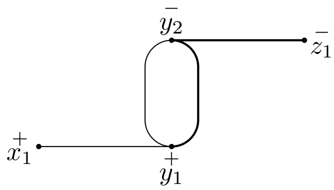
$$\begin{aligned}
& (\textit{по дефиницији } \beta\alpha) \\
L\ & = R(\mathbf{1}_C)\beta(C^4)\alpha(C^5)T(f, \mathbf{1}_C, f^2) \\
& (\textit{функторијалност } T) \\
& = R(\mathbf{1}_C)\beta(C^4)\alpha(C^5)T(f, \mathbf{1}_C^3)T(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_C, f^2) \\
& (\textit{природност } \alpha \textit{ по } 1) \\
& = R(\mathbf{1}_C)\beta(C^4)S(f, \mathbf{1}_C^7)\alpha(A, C^4)T(\mathbf{1}_A, f, \mathbf{1}_C^2)T(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_C, f^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\textit{природност } \beta \textit{ по } \mathbf{4} \textit{ и функторијалност } T)\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C^3,A)S(\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C^2,f,\mathbf{1}_C^4)\alpha(A,C^4)T(\mathbf{1}_A,f^3)\\
&(\textit{природност } \alpha \textit{ по } 4)\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C^3,A)S(\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C^2,\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_C^3)\alpha(A,C^2,A,C)T(\mathbf{1}_A,f^3)\\
&(\textit{природност } \beta \textit{ по } \mathbf{2})\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C,A,C,A)S(\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C^2,\mathbf{1}_A^2,f,\mathbf{1}_C^2)\alpha(A,C^2,A,C)T(\mathbf{1}_A,f^3)\\
&(\textit{функторијалност } T \textit{ и } S)\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C,A,C,A)S(\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C^2,\mathbf{1}_A^2,f,\mathbf{1}_C^2)\alpha(A,C^2,A,C)T(\mathbf{1}_A^2,f,\mathbf{1}_C)\\
&\quad T(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_A,f)\\
&(\textit{природност } \alpha \textit{ по } 2)\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C,A,C,A)S(\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C^2,\mathbf{1}_A^2,f,\mathbf{1}_C^2)S(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_C,\mathbf{1}_A^2,\mathbf{1}_C^3)\\
&\quad \alpha(A^2,C,A,C)T(\mathbf{1}_A^3,\mathbf{1}_C)T(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_A,f)\\
&(\textit{функторијалност } S \textit{ и } T)\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C,A,C,A)S(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_C,\mathbf{1}_A^3,\mathbf{1}_C^2)S(\mathbf{1}_A^2,\mathbf{1}_C,\mathbf{1}_A^2,f,\mathbf{1}_C^2)\\
&\quad \alpha(A^2,C,A,C)T(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_A,f)\\
&(\textit{природност } \beta \textit{ по } \mathbf{3})\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C,A^3)S(\mathbf{1}_A^2,f,\mathbf{1}_A^3,f,\mathbf{1}_C)S(\mathbf{1}_A^2,\mathbf{1}_C,\mathbf{1}_A^2,f,\mathbf{1}_C^2)\alpha(A^2,C,A,C)\\
&\quad T(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_A,f)\\
&(\textit{функторијалност } T \textit{ и } S)\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C,A^3)S(\mathbf{1}_A^5,f^2,\mathbf{1}_C)S(\mathbf{1}_A^2,f,\mathbf{1}_A^2,\mathbf{1}_C^3)\alpha(A^2,C,A,C)\\
&\quad T(\mathbf{1}_A^3,f)T(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_A^2)\\
&(\textit{природност } \alpha \textit{ по } 3)\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C,A^3)S(\mathbf{1}_A^5,f^2,\mathbf{1}_C)S(\mathbf{1}_A^5,\mathbf{1}_C^3)\alpha(A^4,C)T(\mathbf{1}_A^4)T(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_A^2)\\
&(\textit{функторијалност } T \textit{ и } S)\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C,A^3)S(\mathbf{1}_A^5,f^2,\mathbf{1}_C)\alpha(A^4,C)T(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_A^2)\\
&(\textit{природност } \alpha \textit{ по } 5)\\
&= R(\mathbf{1}_C)\beta(C,A^3)S(\mathbf{1}_A^7,f)\alpha(A^5)T(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_A^2)\\
&(\textit{природност } \beta \textit{ по } \mathbf{1} \textit{ и функторијалност } S)\\
&= R(f)\beta(A^4)\alpha(A^5)T(\mathbf{1}_A,f,\mathbf{1}_A^2)\\
&(\textit{дефиниција } \beta\alpha)\\
&= D
\end{aligned}
$$

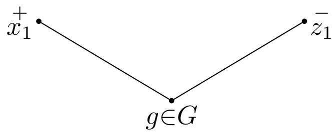
После овог примера лако бисмо могли помислити да ће случај са г-ди-природним трансформацијама бити аналоган случају класичних природних трансформација, тј. да ће њихова композиција бити увек г-ди-природна. Следећи пример ће показати да не можемо баш увек реаговати као у претходном.

Пример 5 Нека су дати функтори
$T : \mathcal{A}\to\mathcal{A}$
$S : \mathcal{A}\times\mathcal{A}^{op}\to\mathcal{A}$
$R : \mathcal{A}^{op}\to\mathcal{A}$,

и г-ди-природне трансформације $\alpha : T \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} S$ и $\beta : S \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} R$, такве да је амалгамација графова $\Phi + \Psi$ представљена дијаграмом:



где је Φ танак, а Ψ масан и сваки има само по једну компоненту повезаности.
Граф $\Gamma = \Psi{*}\Phi$ има једну компоненту повезаности и представљен је дијаграмом:



Да бисмо показали да је $\beta\alpha : T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} R$, неопходно је показати да за све A, C, $f : A{\vdash}C$ из $\mathcal{A}$ важи једнакост:

$$R(f)\,\beta\alpha(C)\,T(f) = \beta\alpha(A),$$

односно због дефиниције $\beta\alpha$

$$R(f)\,\beta(C)\alpha(C)\,T(f) = \beta(A)\alpha(A)$$

Без неких посебних особина категорије $\mathcal{A}$, ми се овде не можемо ни покренути по амалгамацији $\Phi+\Psi$ као што смо то чинили у претходном примеру. Ускоро ћемо ово и строго показати.

Као што су нам претходна два примера показала, амалгамација $\Phi+\Psi$ је била одлучујућа за показивање природности композиције $\beta\alpha$. Сада ћемо покушати да геометријски опишемо изглед амалгамација које нам гарантују природност композиције г-ди-природних трансформација. Сматраћемо да $\Phi{+}\Psi$ увек има само једну компоненту повезаности јер уопштење представља само вишеструко понављање тог случаја.

$\mathcal{D}f$ Нека су Φ и Ψ ди-трансформацијски графови са врховима из $X_T = (x_1,\ldots,x_m)$, G_Φ, $Y_S = (y_1,\ldots,y_n)$, G_Ψ и $Z_R = (z_1,\ldots,z_p)$. Кажемо да $\Phi+\Psi$ *обезбеђује ди-природност*, уколико за произвољну категорију $\mathcal{A}$, произвољне функторе $T : \mathcal{A}^{l(x_1)}{\times}\mathcal{A}^{l(x_2)}{\times}\ldots{\times}\mathcal{A}^{l(x_m)}{\to}\mathcal{A}$, $S : \mathcal{A}^{l(y_1)}{\times}\mathcal{A}^{l(y_2)}{\times}\ldots{\times}\mathcal{A}^{l(x_n)}{\to}\mathcal{A}$, $R : \mathcal{A}^{l(z_1)}{\times}\mathcal{A}^{l(z_2)}{\times}\ldots{\times}\mathcal{A}^{l(z_p)}{\to}\mathcal{A}$ и произвољне г-ди-природне трансформације $\alpha : T \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} S$ и $\beta : S \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} R$, скуп морфизама $\beta\alpha$ представља г-ди-природну трансформацију између T и R са графом $\Psi{*}\Phi$.

Ради лакшег доказивања главног резултата овог одељка, показаћемо следећу лему која даје алтернативну дефиницију да $\Phi + \Psi$ обезбеђује ди-природност. Означимо са $\mathcal{K}$ класу категорија $\langle \mathcal{A}, F, G, H, \gamma, \delta \rangle$, при чему је $\gamma : F \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} G$, а $\delta : G \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} H$. Пошто се $\mathcal{K}$ може једнакосно представити (један пример једнакосне аксиоматизације ћемо нешто касније и видети) то за сваки граф (не ди-трансформацијски већ објекат категорије $\mathcal{G}rph$) постоји слободна $\mathcal{K}$-категорија генерисана над тим графом. Нека је $\langle \mathcal{C}, T, S, R, \alpha, \beta \rangle$ слободна $\mathcal{K}$-категорија генерисана над графом $\mathcal{G}$ који има само два врха A и C и једну стрелицу између њих:

$$A \overset{f}{\vdash} C.$$

Лема 1 *Нека су дати Φ и Ψ као у претходној дефиницији. Тада $\Phi + \Psi$ обезбеђује ди-природност акко у категорији $\mathcal{C}$ следећи дијаграм комутира:*

$$\begin{tikzcd}
 & T(C,C) \arrow[rr, "\beta(C^{k_\beta})\alpha(C^{k_\alpha})"] & & R(C,C) \arrow[dr, "R(\mathbf{1}_C, f)"] & \\
T(A,C) \arrow[ur, "T(f,\mathbf{1}_C)"] \arrow[dr, "T(\mathbf{1}_A, f)"'] & & & & R(C,A) \\
 & T(A,A) \arrow[rr, "\beta(A^{k_\beta})\alpha(A^{k_\alpha})"'] & & R(A,A) \arrow[ur, "R(f,\mathbf{1}_A)"'] &
\end{tikzcd}$$

где су A и C генератори скупа објеката категорије $\mathcal{C}$, f је генератор морфизама и $T(u,v)$ настаје од $T(x_1, \ldots, x_m)$ када свако позитивно x_i заменимо симболом u, а свако негативно x_j симболом v, итд.

доказ.
$(\Rightarrow)$ Директно из дефиниције.

$(\Leftarrow)$ Нека је $\mathcal{A}$ произвољна категорија, и $\gamma : F \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} G$ и $\delta : G \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} H$ две г-ди-природне трансформације у њој. Нека су B_1 и B_2 произвољни објекти и $t : B_1 \vdash B_2$ произвољан морфизам у $\mathcal{A}$. Због слободе категорије $\mathcal{C}$, морфизам категорије $\mathcal{G}rph$, $\phi : \mathcal{G} \rightarrow U(\mathcal{A})$, где је U функтор који заборавља структуру категорије, који је дефинисан на генераторима као $\phi(A) = B_1$, $\phi(C) = B_2$, $\phi(f) = t$, се на јединствен начин шири у $\mathcal{K}$-функтор $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. Значи у $\mathcal{A}$ ће следећи дијаграм комутирати

$$\begin{tikzcd}
& F(B_2,B_2) \arrow[r, "\delta(B_2^{k_\delta})\gamma(B_2^{k_\gamma})"] & H(B_2,B_2) \arrow[dr, "H(\mathbf{1}_{B_2},t)"] & \\
F(B_1,B_2) \arrow[ur, "F(t,\mathbf{1}_{B_2})"] \arrow[dr, "F(\mathbf{1}_{B_1},t)"'] & & & H(B_2,B_1) \\
& F(B_1,B_1) \arrow[r, "\delta(B_1^{k_\delta})\gamma(B_1^{k_\gamma})"'] & H(B_1,B_1) \arrow[ur, "H(t,\mathbf{1}_{B_1})"'] &
\end{tikzcd}$$

па пошто су B_1, B_2 и $t : B_1 \vdash B_2$ произвољни у $\mathcal{A}$, то ће $\delta\gamma$ бити г-ди-природна трансформација из F у H са графом $\Psi * \Phi$. Пошто су још $\mathcal{A}$, γ и δ произвољно изабрани, то значи да $\Phi + \Psi$ обезбеђује ди-природност.

q.e.d.

Категорију $\mathcal{C}$ можемо посматрати синтаксно, на следећи начин. Њени објекти су слободно генерисани над скупом $\{A, C\}$ помоћу m-арне операције T, n-арне операције S и p-арне операције R. Категорија $\mathcal{C}$ има следеће *примитивне морфизам-терме*:

$$\begin{gathered}
f : A \vdash C \\
\mathbf{1}_D : D \vdash D \\
\alpha(E_1, \ldots, E_{k_\alpha}) : T(E_{\pi(x_1)}, E_{\pi(x_2)}, \ldots, E_{\pi(x_m)}) \vdash S(E_{\pi(y_1)}, E_{\pi(y_2)}, \ldots E_{\pi(y_n)}) \\
\beta(H_1, \ldots, H_{k_\beta}) : S(H_{\pi'(y_1)}, H_{\pi'(y_2)}, \ldots, H_{\pi'(y_n)}) \vdash R(H_{\pi'(z_1)}, H_{\pi'(z_2)}, \ldots H_{\pi'(z_p)}),
\end{gathered}$$

за све њене објекте $D, E_1, \ldots, E_{k_\alpha}, H_1, \ldots, H_{k_\beta}$, где $\pi(x_i)$ представља број компоненте повезаности у Φ којој припада врх x_i, а $\pi'(y_j)$ је број компоненте повезаности у Ψ којој припада y_j.

Морфизам-терме категорије $\mathcal{C}$ дефинишемо индуктивно на следећи начин.

1. Примитивни морфизам-терми су морфизам-терми.

2. Ако су $g : D \vdash E$ и $h : E \vdash F$ морфизам-терми, онда је и $hg : D \vdash F$ морфизам-терм.

3. Ако су $g_i : B_i \vdash B'_i$, $1 \leq i \leq m$ и $l(x_i) = 1$, морфизам-терми и $g_j : B'_j \vdash B_j$, $1 \leq j \leq m$ и $l(x_j) = -1$, морфизам-терми, онда је и $T(g_1, \ldots, g_m) : T(B_1, \ldots, B_m) \vdash T(B'_1, \ldots, B'_m)$, морфизам-терм.

4. Ако су $h_i : B_i \vdash B'_i$, $1 \leq i \leq n$ и $l(y_i) = 1$, морфизам-терми и $h_j : B'_j \vdash B_j$, $1 \leq j \leq n$ и $l(y_j) = -1$, морфизам-терми, онда је и $S(h_1, \ldots, h_n) : S(B_1, \ldots, B_n) \vdash S(B'_1, \ldots, B'_n)$, морфизам-терм.

5. Ако су $t_i : B_i \vdash B'_i$, $1 \leq i \leq p$ и $l(z_i) = 1$, морфизам-терми и $t_j : B'_j \vdash B_j$, $1 \leq j \leq p$ и $l(z_j) = -1$, морфизам-терми, онда је морфизам-терм и $R(t_1, \ldots, t_p) : R(B_1, \ldots, B_p) \vdash R(B'_1, \ldots, B'_p)$.

Морфизме категорије $\mathcal{C}$ добијамо као класе еквиваленције морфизам-терма по конгруенцији $=$, задатој следећим једнакостима:

категоријалне једнакости
($cat\mathbf{1}$) $\quad f\mathbf{1}_A = f = \mathbf{1}_B f$ за свако $f : A \vdash B$
($cat\mathbf{2}$) $\quad h(gf) = (hg)f$ за све морфизам-терме f, g, h из $\mathcal{C}$

функторијалност T
($\boldsymbol{T}$) За $g_i : B_i \vdash B'_i$, $h_i : B'_i \vdash B''_i$, $1 \leq i \leq m$, $l(x_i) = 1$
$g_j : B'_j \vdash B_j, h_j : B''_j \vdash B'_j, 1 \leq j \leq m, l(x_j) = -1$
$T(h_1, \ldots, h_m)\, T(g_1, \ldots, g_m) = T(\ldots, h_i g_i, \ldots, g_j h_j, \ldots)$
($\boldsymbol{T1}$) $T(\mathbf{1}_{D_1}, \ldots, \mathbf{1}_{D_m}) = \mathbf{1}_{T(D_1, \ldots, D_m)}$

функторијалност S
($\boldsymbol{S}$) За $g_i : B_i \vdash B'_i$, $h_i : B'_i \vdash B''_i$, $1 \leq i \leq n$, $l(y_i) = 1$
$g_j : B'_j \vdash B_j, h_j : B''_j \vdash B'_j, 1 \leq j \leq n, l(y_j) = -1$
$S(h_1, \ldots, h_n)\, S(g_1, \ldots, g_n) = S(\ldots, h_i g_i, \ldots, g_j h_j, \ldots)$
($\boldsymbol{S1}$) $S(\mathbf{1}_{D_1}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}) = \mathbf{1}_{S(D_1, \ldots, D_n)}$

функторијалност R
($\boldsymbol{R}$) За $g_i : B_i \vdash B'_i$, $h_i : B'_i \vdash B''_i$, $1 \leq i \leq p$, $l(z_i) = 1$
$g_j : B'_j \vdash B_j, h_j : B''_j \vdash B'_j, 1 \leq j \leq p, l(z_j) = -1$
$R(h_1, \ldots, h_p)\, R(g_1, \ldots, g_p) = R(\ldots, h_i g_i, \ldots, g_j h_j, \ldots)$
($\boldsymbol{R1}$) $R(\mathbf{1}_{D_1}, \ldots, \mathbf{1}_{D_p}) = \mathbf{1}_{R(D_1, \ldots, D_p)}$

г-ди-природност α
(α) За свако i, $1 \leq i \leq k_\alpha$, све објекте $E_1, \ldots, E_i, E'_i, \ldots, E_{k_\alpha}$ из $\mathcal{C}$ и све морфизам-терме $t_i : E_i \vdash E'_i$:

$$S(h_1, \ldots h_n)\ \alpha(E_1, \ldots, E_{i-1}, E'_i, E_{i+1}, \ldots, E_{k_\alpha})\ T(g_1, \ldots, g_m) =$$
$$S(h'_1, \ldots h'_n)\ \alpha(E_1, \ldots, E_{i-1}, E_i, E_{i+1}, \ldots, E_{k_\alpha})\ T(g'_1, \ldots, g'_m),$$

где је $h_k \equiv h'_k \equiv \mathbf{1}_{E_{\pi(y_k)}}$ за $\pi(y_k) \neq i$
$g_k \equiv g'_k \equiv \mathbf{1}_{E_{\pi(x_k)}}$ за $\pi(x_k) \neq i$
$h_k \equiv \mathbf{1}_{E'_i}$ за $\pi(y_k) = i$ и $l(y_k) = 1$
$h'_k \equiv t_i$ за $\pi(y_k) = i$ и $l(y_k) = 1$
$h_k \equiv t_i$ за $\pi(y_k) = i$ и $l(y_k) = -1$
$h'_k \equiv \mathbf{1}_{E_i}$ за $\pi(y_k) = i$ и $l(y_k) = -1$
$g_k \equiv t_i$ за $\pi(x_k) = i$ и $l(x_k) = 1$
$g'_k \equiv \mathbf{1}_{E_i}$ за $\pi(x_k) = i$ и $l(x_k) = 1$
$g_k \equiv \mathbf{1}_{E'_i}$ за $\pi(x_k) = i$ и $l(x_k) = -1$
$g'_k \equiv t_i$ за $\pi(x_k) = i$ и $l(x_k) = -1$

г-ди-природност β
(β) За свако j, $1\leq j\leq k_\beta$, све објекте $H_1,\ldots,H_j,H'_j,\ldots,H_{k_\alpha}$ из $\mathcal{C}$ и све морфизам-терме $t_j : H_j\vdash H'_j$:

$$\begin{aligned}&R(h_1,\ldots h_p)\ \beta(H_1,\ldots,H_{j-1},H'_j,H_{j+1},\ldots,H_{k_\beta})\ S(g_1,\ldots,g_n) =\\ &\qquad R(h'_1,\ldots h'_p)\ \beta(H_1,\ldots,H_{j-1},H_j,H_{j+1},\ldots,H_{k_\beta})\ S(g'_1,\ldots,g'_n),\end{aligned}$$

где је
$h_k\equiv h'_k\equiv\mathbf{1}_{H_{\pi'(z_k)}}$ за $\pi'(z_k)\neq j$
$g_k\equiv g'_k\equiv\mathbf{1}_{E_{\pi'(y_k)}}$ за $\pi'(y_k)\neq j$
$h_k\equiv\mathbf{1}_{H'_j}$ за $\pi'(z_k)=j$ и $l(z_k)=1$
$h'_k\equiv t_{ji}$ за $\pi'(z_k)=j$ и $l(z_k)=1$
$h_k\equiv t_j$ за $\pi'(z_k)=i$ и $l(y_z)=-1$
$h'_k\equiv\mathbf{1}_{H_j}$ за $\pi'(z_k)=i$ и $l(z_k)=-1$
$g_k\equiv t_j$ за $\pi'(y_k)=i$ и $l(y_k)=1$
$g'_k\equiv\mathbf{1}_{H_j}$ за $\pi'(y_k)=j$ и $l(y_k)=1$
$g_k\equiv\mathbf{1}_{H'_j}$ за $\pi'(y_k)=j$ и $l(y_k)=-1$
$g'_k\equiv t_j$ за $\pi'(y_k)=j$ и $l(y_k)=-1$

Надаље ћемо се прилично бавити синтаксним објектима и да бисмо себи олакшали запис, уведимо следеће скраћенице. Ознака $[f]$ значи да се морфизам-терм f може појављивати на датом месту, али и не мора. Ознака 1_B значи композицију k, $k\geq 0$, морфизам-терма $\mathbf{1}_B$. Једнакост морфизам-терма посматрамо до на асоцијативност композиције, те је $(cat\mathbf{2})$ сувишна.
Следећа лема говори о једној, за нас веома битној, особини категорије $\mathcal{C}$.

Лема 2 *Ако је* $t : B\vdash D$ *морфизам-терм из* $\mathcal{C}$ *и* $B\in\{A,C\}$, *онда је и* $D\in\{A,C\}$ *и* $t\equiv 1_C[f]1_A$. *Специјално, ако је* $B\equiv C$, *онда је и* $D\equiv C$ *и* $t\equiv 1_C$.

доказ. Индукцијом по сложености терма t

1° Ако је t примитиван морфизам-терм, онда t не може бити облика $\alpha(E_1,\ldots,E_{k_\alpha})$ или $\beta(H_1,\ldots,H_{k_\beta})$, јер због слободе скупа објеката од $\mathcal{C}$

$$T(E_{\pi(x_1)},\ldots,E_{\pi(x_m)})\neq A, C\neq S(H_{\pi'(y_1)},\ldots,H_{\pi'(y_n)}),$$

па је $t\equiv\mathbf{1}_A$ или $t\equiv f$. У оба случаја тврђење важи.

2° Ако је t сложени морфизам-терм, онда због слободе скупа објеката од $\mathcal{C}$, t не може бити облика $T(t_1,\ldots,t_m)$ или $S(t_1,\ldots,t_n)$ или $R(t_1,\ldots,t_p)$. Значи t је облика композиције t_2t_1 и $t_1 : B\vdash D_1$, $t_2 : D_1\vdash D$. По индукцијској претпоставци, пошто је t_1 мање сложености од t, важи $D_1\in\{A,C\}$ и $t_1\equiv 1_C[f]1_A$, па је онда опет по индукцијској претпоставци, пошто је t_2 мање сложености од t, и $D\in\{A,C\}$ и $t_2\equiv 1_C[f]1_A$. Из овога следи да је онда и $t{\equiv}1_C[f]1_A1_C[f]1_A$. Пошто су објекти A и C различити, то је због добре дефинисаности морфизам-терма t, он идентичан неком облика $1_C[f]1_A$. Други део тврђења следи из првог због добре дефинисаности морфизам-терма t.

q.e.d.

На исти начин бисмо показали следећу лему.

Лема 3 *Ако је $t : B{\vdash}D$ морфизам терм из $\mathcal{C}$ и $D{\in}\{A,C\}$, онда је и $B{\in}\{A,C\}$, и $t{\equiv}1_C[f]1_A$. Специјално, ако је $D{\equiv}A$, онда је и $B{\equiv}A$ и $t{\equiv}1_A$.*

Нека је $\boldsymbol{R}$ скраћена ознака за композицију k, $k{\geq}0$, морфизам-терма облика $1\,R(1_C[f]1_A,\ldots,1_C[f]1_A)\,1$, и нека $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ имају аналоган смисао. Означимо са $\mathcal{M}$ скуп морфизам-терма из $\mathcal{C}$ облика

$$\boldsymbol{R}\,\beta(H_1,\ldots,H_{k_\beta})\,\boldsymbol{S}\,\alpha(E_1,\ldots,E_{k_\alpha})\,\boldsymbol{T},$$

где је $H_1,\ldots,H_{k_\beta},E_1,\ldots,E_{k_\alpha}{\in}\{A,C\}$.

Лема 4 *$\mathcal{M}$ је затворен за једнакост.*

доказ. Супституција једнаких по једнакостима ($cat\mathbf{1}$), ($\boldsymbol{T}$), ($\boldsymbol{T}\mathbf{1}$), ($\boldsymbol{S}$), ($\boldsymbol{S}\mathbf{1}$), ($\boldsymbol{R}$) и ($\boldsymbol{R}\mathbf{1}$) не мења форму терма из $\mathcal{M}$. Једина "опасност" су једнакости за г-ди-природност α када i-та компонента повезаности од Φ не садржи негативне врхове из X_T и позитивне врхове из Y_S, или ако не садржи позитивне врхове из X_T и негативне врхове из Y_S, јер се тада као аргумент од S или T може појавити произвољан морфизам-терм g типа $D{\vdash}E_i$ или $E_i{\vdash}D$, и као аргумент од α објекат D. Исти проблем настаје и када j-та компонента повезаности од Ψ не садржи негативне врхове из Y_S и позитивне врхове из Z_R, или ако не садржи позитивне врхове из X_S и негативне врхове из Z_R, јер се тада као аргумент од S или R може појавити произвољан морфизам-терм g типа $D{\vdash}H_j$ или $H_j{\vdash}D$, и као аргумент од β објекат D. Међутим, како су $H_i,E_j{\in}\{A,C\}$, то по претходним лемама мора бити и $D{\in}\{A,C\}$ и $g{\equiv}1_C[f]1_A$, тако да и после супституције терм остаје у $\mathcal{M}$.

q.e.d.

Пример 6 Нека графови Φ и Ψ буду као у примеру 4. Посматрајмо морфизам-терм

$$S(\mathbf{1}^5_A,\mathbf{1}^3_C)\,\alpha(A^4,C)\,T(\mathbf{1}^4_A).$$

Он је очигледно подтерм неког морфизам-терма из $\mathcal{M}$, и једнак је, због природности α по трећој компоненти повезаности графа Φ, морфизам-терму

$$S(\mathbf{1}^2_A,g,\mathbf{1}^2_A,\mathbf{1}^3_C)\,\alpha(A^2,D,A,C)\,T(\mathbf{1}^3_A,g),$$

за произвољан морфизам-терм $g : A \vdash D$ из $\mathcal{C}$. Леме 2 и 3 нам гарантују да је тада D идентичан са A или C и да ће после супституције терм остати у $\mathcal{M}$.

Означимо са (nat) једнакост

$$R(\mathbf{1}_C, f)\beta(C^{k_\beta})\alpha(C^{k_\alpha})T(f, \mathbf{1}_C) = R(f, \mathbf{1}_A)\beta(A^{k_\beta})\alpha(A^{k_\alpha})T(\mathbf{1}_A, f),$$

која значи комутирање дијаграма из леме 1. Лева и десна страна ове једнакости припадају скупу $\mathcal{M}$, па ћемо одлучивост предиката $P(\Phi, \Psi) \equiv (\Phi + \Psi$ *обезбеђује ди-природност*), који је по леми 1 еквивалентан са (nat), показати уводећи релацију редукције на $\mathcal{M}$, сагласну са једнакошћу, која ће нам дати јединствену нормалну форму морфизам-терма из $\mathcal{M}$.

I KF-*редукција* (K-категоријална, F-функторијална)
Посматрајмо следећу редукцију $\rightsquigarrow$ на подтермима елемената од $\mathcal{M}$.

а) $g\mathbf{1} \rightsquigarrow g, \quad \mathbf{1}g \rightsquigarrow g$

б) $F(h_1, \ldots, h_{k_F})F(g_1, \ldots, g_{k_F}) \rightsquigarrow F(\ldots, h_i g_i, \ldots, g_j h_j, \ldots)$

$$F \in \{T, S, R\} \quad k_F \equiv \begin{cases} m & ; F \equiv T \\ n & ; F \equiv S \\ p & ; F \equiv R \end{cases} \qquad \begin{array}{l} l(q_i^F) = 1 \\ l(q_j^F) = -1 \end{array} \qquad q_i^F \equiv \begin{cases} x_i & ; F \equiv T \\ y_i & ; F \equiv S \\ z_i & ; F \equiv R \end{cases}$$

в) $F(\mathbf{1}_{D_1}, \ldots, \mathbf{1}_{D_{k_F}}) \rightsquigarrow \mathbf{1}_{F(D_1, \ldots, D_{k_F})}$

Лема 5 *KF-редукција има Черч-Росер својство (CR) и својство строге нормализације (SN)*

доказ. Код сва три типа KF редукције, контрактум је мање комплексности од редекса, па отуда својство строге нормализације.

Због својства (SN), приликом показивања (CR), ромбове можемо затварати у више од једног корака. Једини интересантан случај је

$$\begin{tikzcd}
& F(h_1,\ldots,h_{k_F})F(\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1}) \arrow[dl, "б)"'] \arrow[dr, "в)"] & \\
F(h_1\mathbf{1},\ldots,h_{k_F}\mathbf{1}) \arrow[dr, "k_f\text{-пута } a)"'] & & F(h_1,\ldots,h_{k_F})\mathbf{1} \arrow[dl, "a)"] \\
& F(h_1,\ldots,h_{k_F}) &
\end{tikzcd}$$

и њему аналоган за $F(\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1})F(g_1,\ldots,g_{k_F})$. Сви остали случајеви гранања "комутирају".

q.e.d.

На основу претходне леме, имамо да сваки морфизам-терм из $\mathcal{M}$ има јединствену KF-нормалну форму. Означимо са $\mathcal{M}_0$ скуп KF-нормалних форми елемената из $\mathcal{M}$. Сваки морфизам-терм из $\mathcal{M}_0$ има облик

$$[R(t_1,\ldots,t_p)]\,\beta(H_1,\ldots,H_{k_\beta})\,[S(h_1,\ldots,h_n)]\,\alpha(E_1,\ldots,E_{k_\beta})\,[T(g_1,\ldots,g_m)],$$

где је $t_i{\in}\{\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C,f\}$ и $R(t_1,\ldots,t_p)$ се појављује у терму само ако је бар један од $t_i{\equiv}f$. Аналогно за остале.

II *DN-редукција* (DN-динатуралност)
Ову редукцију дефинишемо на термима из $\mathcal{M}_0$ (не на њиховим подтермима, тј. нема супституције због могућег кварења KF-нормалне форме). Уведимо неке ознаке које ће нам олакшати запис. Означимо са Φ_i, i-ту компоненту повезаности графа Φ. Нека Φ_i^+ представља њене позитивне врхове, а Φ_i^- негативне. Аналогна значења нека имају Ψ_j, Ψ_j^+ и Ψ_j^-.

За свако i, $1{\le}i{\le}k_\alpha$, дефинишемо следећу редукцију:

α_i) Нека је $\bar{E}$, k_α-торка елемената из $\{A,C\}$, при чему је $E_i{\equiv}C$ и нека је $\bar{H}$, произвољна k_β-торка елемената из $\{A,C\}$. Нека је $\bar{r}$, p-торка морфизам-терма, а $\bar{s}$, n-торка морфизам-терма из $\{\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C,f\}$, при чему је $s_j{\equiv}f$ ако је $y_j{\in}\Phi_i^-$. Нека је $\bar{t}$, m-торка морфизам-терма из $\{\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C,f\}$, при чему је $t_j{\equiv}f$ ако је $x_j{\in}\Phi_i^+$. Тада је морфизам-терм из $\mathcal{M}_0$

$$[R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})]$$

редекс редукције α_i, а контрактум је морфизам-терм

$$[R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s'})]\alpha(\bar{E'})[T(\bar{t'})],$$

где је $E'_i{\equiv}A$, за $j{\neq}i$ је $E'_j{\equiv}E_j$
за $y_j{\notin}\Phi_i$ је $s'_j{\equiv}s_j$, за $y_j{\in}\Phi_i^+$ је $s'_j{\equiv}f$ за $y_j{\in}\Phi_i^-$ је $s'_j{\equiv}\mathbf{1}_A$
за $x_j{\notin}\Phi_i$ је $t'_j{\equiv}t_j$, за $x_j{\in}\Phi_i^-$ је $t'_j{\equiv}f$ за $x_j{\in}\Phi_i^+$ је $t'_j{\equiv}\mathbf{1}_A$

За морфизам-терме у угластим заградама важи да се појављују у горњим термима само ако је бар један од аргумената идентичан са f.

Приметимо да је и контрактум у $\mathcal{M}_0$ и да због добре дефинисаности морфизам-терма, KF-нормалности и лема 2 и 3, имамо да за $y_j{\in}\Phi_i^+$ и $x_k{\in}\Phi_i^-$ важи $s_j{\equiv}\mathbf{1}_C{\equiv}t_k$.

Пример 7 Нека су Φ и Ψ као у примеру 4. Тада је

$$R(\mathbf{1}_C)\,\beta(C^4)\,\alpha(C^5)\,T(f,\mathbf{1}_C,f^2){\leadsto}R(\mathbf{1}_C)\,\beta(C^4)\,S(f,\mathbf{1}_C^7)\,\alpha(A,C^4)\,T(\mathbf{1}_A,f^3)$$

пример једне α_1-редукције.

За свако i, $1{\leq}i{\leq}k_\beta$, дефинишемо следећу редукцију:

β_i) Нека је $\bar{E}$ произвољна k_α-торка елемената из $\{A,C\}$ и нека је $\bar{H}$, k_β-торка елемената из $\{A,C\}$, при чему је $H_i{\equiv}C$. Нека је $\bar{r}$, p-торка морфизам-терма из $\{\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C,f\}$, при чему је $r_j{\equiv}f$ за $z_j{\in}\Psi_i^-$, а $\bar{s}$, n-торка морфизам-терма из $\{\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C,f\}$, при чему је $s_j{\equiv}f$ ако је $y_j{\in}\Psi_i^+$. Нека је $\bar{t}$, произвољна m-торка морфизам-терма из $\{\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_C,f\}$. Тада је морфизам-терм из $\mathcal{M}_0$

$$[R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})]$$

редекс редукције β_i, а контрактум је морфизам-терм

$$[R(\bar{r'})]\beta(\bar{H}')[S(\bar{s'})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})],$$

где је $H'_i{\equiv}A$, за $j{\neq}i$ је $H'_j{\equiv}H_j$
за $z_j{\notin}\Psi_i$ је $r'_j{\equiv}r_j$, за $z_j{\in}\Psi_i^+$ је $r'_j{\equiv}f$ за $z_j{\in}\Psi_i^-$ је $r'_j{\equiv}\mathbf{1}_A$
за $y_j{\notin}\Psi_i$ је $s'_j{\equiv}s_j$, за $y_j{\in}\Psi_i^-$ је $s'_j{\equiv}f$ за $y_j{\in}\Psi_i^+$ је $s'_j{\equiv}\mathbf{1}_A$

Коментари би били аналогни онима после α_i.

Лема 6 *DN нормализација има (SN) и (CR) својства.*

доказ. Својство строге нормализације следи из тога што у сваком редукцијском кораку, број C-ова у аргументима од α и β опада.
Две различите α-редукције односно β-редукције, када се примене на исти терм из $\mathcal{M}^0$, врше промене у различитим аргументима (компоненте повезаности графова су дисјунктне), па се ромбови затварају у једном редукцијском кораку. Ако на терм из $\mathcal{M}^0$ применимо α_i-редукцију и β_k-редукцију, онда не постоји $y_j{\in}Y_S$ такав да је $y_j{\in}\Phi_i$ и

$y_j{\in}\Psi_k$, јер ако је $l(y_j)=1$ онда $y_j{\in}\Phi_i^+$ повлачи $h_j{\equiv}\mathbf{1}_C$, а $y_j{\in}\Psi_k^+$ повлачи $h_j{\equiv}f$, што је контрадикција. Ако је, пак, $l(y_j)=-1$ онда $y_j{\in}\Phi_i^-$ повлачи $h_j{\equiv}f$, а $y_j{\in}\Psi_k^-$ повлачи $h_j{\equiv}\mathbf{1}_C$, што је опет немогуће. Значи редукције α_i и β_k раде на дисјунктним скуповима аргумената од T,S,R,α и β, па се ромб опет затвара у једном кораку.

q.e.d.

Као што је уобичајено, претходне леме ће нам помоћи да покажемо одлучивост питања једнакости терма неког скупа, што ће бити исказано у следећој теореми.

Теорема 1 *Једнакост у $\mathcal{M}$ је одлучива.*

доказ. Нека су t_1 и t_2 морфизам-терми из $\mathcal{M}$ и нека је $t_1=t_2$ добијено у једном кораку из једнакости $(cat\mathbf{1})$, $(\boldsymbol{T}),\ldots$.
Тада је $DN(KF(t_1)){\equiv}DN(KF(t_2))$, јер ако је примењена нека једнакост од $(cat\mathbf{1}),\ldots,(\boldsymbol{R}\mathbf{1})$, онда се терми могу добити један од другог у једном KF кораку, па је већ $KF(t_1){\equiv}KF(t_2)$. Ако је примењена ди-природност по i-тој компоненти од Φ, онда се $KF(t_1)$ своди, у једном DN-редукцијском кораку, на $KF(t_2)$, или обрнуто. Одавде закључујемо да за произвољне $t_1=t_2$ важи $DN(KF(t_1)){\equiv}DN(KF(t_2))$.
Уколико је, обрнуто, $DN(KF(t_1)){\equiv}DN(KF(t_2))$, онда је $t_1=t_2$ јер све редукције имају својство да је редекс једнак контрактуму. Редукције KF су добијене директно из једнакости $(cat\mathbf{1}),\ldots,(\boldsymbol{R}\mathbf{1})$, а α и β редукције су настале из комбинације једнакости за г-ди-природност, функторијалност и $(cat\mathbf{1})$.

q.e.d.

Последица *Предикат $P(\Phi,\Psi)$ је одлучив.*

Приметимо да су лева и десна страна следеће једнакости

$$(nat')\quad [R(\mathbf{1}_C,f)]\beta(C^{k_\beta})\alpha(C^{k_\alpha})[T(f,\mathbf{1}_C)]=[R(f,\mathbf{1}_A)]\beta(A^{k_\beta})\alpha(A^{k_\alpha})[T(\mathbf{1}_A,f)]\ ,$$

која настаје из (nat), у KF-нормалној форми. Шта више, десна страна је у DN-нормалној форми, па је онда

$$P(\Phi,\Psi)\Leftrightarrow DN(LS(nat')){\equiv}DS(nat')\ ,$$

где LS представља леву, а DS десну страну једнакости.

Сада ћемо видети која су геометријска својства амалгамације $\Phi+\Psi$ неопходна и довољна за $P(\Phi,\Psi)$. Означимо са $\mu_\Phi(x_i)$ аргументе од T и S који одговарају скупу свих врхова из X_T који припадају истој компоненти повезаности у Φ као и x_i, и који су истог знака као и x_i, и свих врхова из Y_S супротног знака од x_i те компоненте повезаности од

Φ. Означимо са $\mu'_\Phi(x_i)$ скуп аргумената од T и S који припадају истој компоненти повезаности у Φ као и x_i, који одговарају скупу врхова из X_T супротног знака од x_i и који одговарају скупу врхова из Y_S истог знака као и x_i. По аналогији уводимо ознаке $\mu_\Phi(y_i)$, $\mu'_\Phi(y_i)$, $\mu_\Psi(y_i)$, $\mu'_\Psi(y_i)$, $\mu_\Psi(z_i)$, $\mu'_\Psi(z_i)$.

Лема 7 *Нека је $l(y_i)=1$. Нека се*

$$[R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})],$$

где је $s_i \equiv \mathbf{1}_C$, низом DN-редукција своди на

$$[R(\bar{r'})]\beta(\bar{H'})[S(\bar{s'})]\alpha(\bar{E'})[T(\bar{t'})],$$

где је $s'_i \equiv f$. Онда у том низу постоји редукцијски корак код кога су у редексу сви аргументи у $\mu'_\Phi(y_i)$ идентични са f, а i-ти аргумент од S је $\mathbf{1}_C$.

доказ. Претпоставимо супротно. Нека је

$$[R(\bar{r^0})]\beta(\bar{H^0})[S(\bar{s^0})]\alpha(\bar{E^0})[T(\bar{t^0})]\rightsquigarrow[R(\bar{r^1})]\beta(\bar{H^1})[S(\bar{s^1})]\alpha(\bar{E^1})[T(\bar{t^1})]\rightsquigarrow\dots$$
$$\dots\rightsquigarrow[R(\bar{r^k})]\beta(\bar{H^k})[S(\bar{s^k})]\alpha(\bar{E^k})[T(\bar{t^k})],$$

при чему је $s_i^0 \equiv \mathbf{1}_C$, а $s_i^k \equiv f$, најкраћи низ DN редукција за који тврђење не важи. Тада s_i^1 не може бити $\mathbf{1}_C$ јер бисмо онда имали краћи низ редукција за који тврђење не важи. Такође, s_i^1 не може бити f, јер једини редукцијски корак који то омогућава захтева да су у $[R(\bar{r^0})]\beta(\bar{H^0})[S(\bar{s^0})]\alpha(\bar{E^0})[T(\bar{t^0})]$ сви аргументи из $\mu'_\Phi(y_i)$ идентични са f, што је супротно претпоставци да тврђење не важи за горњи редукцијски низ. Морфизам-терм s_i^1 не може бити ни $\mathbf{1}_A$ јер не постоји редукцијски корак који директно преводи $\mathbf{1}_C$ у $\mathbf{1}_A$. Дакле, тврђење важи.

q.e.d.

Лема 8 *Нека је $l(y_i)=1$. Нека се*

$$[R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})],$$

где је $s_i \in \{f, \mathbf{1}_C\}$, низом DN-редукција своди на

$$[R(\bar{r'})]\beta(\bar{H'})[S(\bar{s'})]\alpha(\bar{E'})[T(\bar{t'})],$$

где је $s'_i \equiv \mathbf{1}_A$. Тада у том низу постоји редукцијски корак код кога су у редексу сви аргументи у $\mu_\Psi(y_i)$ идентични са f, а у контрактуму са $\mathbf{1}_A$ и у контрактуму су сви аргументи из $\mu'_\Psi(y_i)$ идентични са f.

доказ. Нека је, као и малопре,

$$[R(\bar{r^0})]\beta(\bar{H^0})[S(\bar{s^0})]\alpha(\bar{E^0})[T(\bar{t^0})]\rightsquigarrow[R(\bar{r^1})]\beta(\bar{H^1})[S(\bar{s^1})]\alpha(\bar{E^1})[T(\bar{t^1})]\rightsquigarrow\ldots$$

$$\ldots\rightsquigarrow[R(\bar{r^k})]\beta(\bar{H^k})[S(\bar{s^k})]\alpha(\bar{E^k})[T(\bar{t^k})],$$

при чему је $s_i^0\in\{f,\mathbf{1}_C\}$, а $s_i^k\equiv\mathbf{1}_A$, најкраћи низ DN редукција за који тврђење не важи. Тада s_i^1 не може бити ни f ни $\mathbf{1}_C$ јер бисмо одмах имали краћи низ редукција за који тврђење не важи. Такође, s_i^1 не може бити $\mathbf{1}_A$, јер једини редукцијски корак који то омогућава захтева да су у $[R(\bar{r^0})]\beta(\bar{H^0})[S(\bar{s^0})]\alpha(\bar{E^0})[T(\bar{t^0})]$ сви аргументи из $\mu_\Psi(y_i)$ идентични са f, а у $[R(\bar{r^1})]\beta(\bar{H^1})[S(\bar{s^1})]\alpha(\bar{E^1})[T(\bar{t^1})]$ сви аргументи из $\mu_\Psi(y_i)$ идентични са $\mathbf{1}_A$, и сви аргументи из $\mu'_\Psi(y_i)$ идентични са f, што је супротно претпоставци да тврђење не важи за горњи редукцијски низ.

q.e.d.

Потпуно аналогно можемо показати следеће две леме.

Лема 9 *Нека је $l(y_i)=-1$. Нека се*

$$[R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})],$$

где је $s_i\equiv\mathbf{1}_C$, низом DN-редукција своди на

$$[R(\bar{r'})]\beta(\bar{H'})[S(\bar{s'})]\alpha(\bar{E'})[T(\bar{t'})],$$

где је $s'_i\equiv f$. Онда у том низу постоји редукцијски корак код кога су у редексу сви аргументи у $\mu'_\Psi(y_i)$ идентични са f, а i-ти аргумент од S је $\mathbf{1}_C$.

Лема 10 *Нека је $l(y_i)=-1$. Нека се*

$$[R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})],$$

где је $s_i\in\{f,\mathbf{1}_C\}$, низом DN-редукција своди на

$$[R(\bar{r'})]\beta(\bar{H'})[S(\bar{s'})]\alpha(\bar{E'})[T(\bar{t'})],$$

где је $s'_i\equiv\mathbf{1}_A$. Тада у том низу постоји редукцијски корак код кога су у редексу сви аргументи у $\mu_\Phi(y_i)$ идентични са f, а у контрактуму са $\mathbf{1}_A$ и у контрактуму су сви аргументи из $\mu'_\Phi(y_i)$ идентични са f.

Слична тврђења би се могла формулисати и у односу на врхове из X_T, односно Z_R.

$\mathcal{D}f$ Низ врхова $v_1,v_2,\ldots,v_k$ и низ ивица $l_1,l_2,\ldots,l_{k-1}$, таквих да ивица

l_1 из Φ (Ψ) спаја врхове v_1 и v_2, ивица l_2 из Ψ (Φ) спаја врхове v_2 и v_3 итд. зваћемо *наизменични ланац* у $\Phi+\Psi$. Уколико је $v_1 \equiv v_k$ онда је то *наизменична петља* (приметимо да због особина ди-трансформацијских графова тада l_1 и l_{k-1} не припадају истом графу, па је назив до краја оправдан).

Лема 11 *Неопходан услов за $P(\Phi, \Psi)$ је да у $\Phi+\Psi$ нема наизменичних петљи.*

доказ. Из особина ди-трансформацијских графова следи да сви врхови у наизменичној петљи морају бити из Y_S и да их је паран број. Петпоставимо да важи $P(\Phi, \Psi)$ и да у $\Phi+\Psi$ постоји наизменична петља коју чине два врха y_i, $l(y_i)=1$ и y_j, $l(y_j)=-1$, и ивице l_1 из Φ и l_2 из Ψ. Случај када је петља дужа се аналогно показује. По претпоставци $P(\Phi, \Psi)$, из последице теореме 1 следи да се терм

$$\tau_1 \equiv [R(\mathbf{1}_C, f)]\beta(C^{k_\beta})\alpha(C^{k_\alpha})[T(f, \mathbf{1}_C)]$$

низом DN-редукција своди на терм

$$\tau_2 \equiv [R(f, \mathbf{1}_A)]\beta(A^{k_\beta})\alpha(A^{k_\alpha})[T(\mathbf{1}_A, f)].$$

По леми 8, ова редукција мора имати облик

$$\tau_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow [R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})] \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \tau_2,$$

где је назначено $s_i \equiv f$. Означимо терм у средини са τ_3. Сада по леми 7, ова редукција мора имати облик

$$\tau_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow [R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})] \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \tau_3 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \tau_2,$$

где је назначено $s_j \equiv f$. Означимо истакнути терм између τ_1 и τ_3 са τ_4. По леми 9, ова редукција мора имати облик

$$\tau_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow [R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})] \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \tau_4 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \tau_3 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \tau_2,$$

где је назначено $s_i \equiv f$ итд. Одавде видимо да ова редукција не може бити коначна што је супротно претпоставци да постоји.

q.e.d.

Лема 12 *Довољан услов за $P(\Phi, \Psi)$ је да у $\Phi+\Psi$ нема наизменичних петљи.*

доказ. Уведимо парцијално уређење на врховима из X_T, Y_S и Z_R на следећи начин.

- Ако су x_i и x_j спојени ивицом из Φ и ако је $l(x_i)=1$ а $l(x_j)=-1$, онда је $x_i < x_j$.

- Ако су x_i и y_j спојени ивицом из Φ и ако је $l(x_i) = l(y_j) = 1$, онда је $x_i < y_j$.
- Ако су x_i и y_j спојени ивицом из Φ и ако је $l(x_i) = l(y_j) = -1$, онда је $y_j < x_i$.
- Ако су y_i и y_j спојени ивицом из Φ и ако је $l(y_i) = -1$ а $l(y_j) = 1$, онда је $y_i < y_j$.
- Ако су y_i и y_j спојени ивицом из Ψ и ако је $l(y_i) = 1$ а $l(y_j) = -1$, онда је $y_i < y_j$.
- Ако су y_i и z_j спојени ивицом из Ψ и ако је $l(y_i) = l(z_j) = 1$, онда је $y_i < z_j$
- Ако су y_i и z_j спојени ивицом из Ψ и ако је $l(x_i) = l(y_j) = -1$, онда је $z_j < y_i$.
- Ако су z_i и z_j спојени ивицом из Ψ, и ако је $l(z_i) = -1$ а $l(z_j) = 1$, онда је $z_i < z_j$.

Пример 8 Нека је $\Phi + \Psi$ као у примеру 4. Тада у њему можемо посматрати следеће ланце:

$$\begin{gathered} x_1 < x_2 \\ x_1 < y_1 < y_4 < y_5 < y_6 < y_8 < z_1 \\ x_3 < y_2 < y_7 < y_8 < z_1 \\ x_3 < y_2 < y_3 \\ x_4 \end{gathered}$$

Поредак $\leq$ је рефлексивно и транзитивно затворење горе уведене релације $<$. Због одсуства наизменичних петљи у $\Phi + \Psi$, релација $\leq$ је релација поретка на врховима из X_T, Y_S и Z_R.

Претпоставимо да се $[R(\mathbf{1}_C, f)]\beta(C^{k_\beta})\alpha(C^{k_\alpha})[T(f, \mathbf{1}_C)]$ низом DN-редукција своди на нормалну форму

$$(1) \quad [R(\bar{r})]\beta(\bar{H})[S(\bar{s})]\alpha(\bar{E})[T(\bar{t})],$$

различиту од $[R(f, \mathbf{1}_A)]\beta(A^{k_\beta})\alpha(A^{k_\alpha})[T(\mathbf{1}_A, f)]$. Различитост претходне две нормалне форме је могућа уколико у (1) имамо неку од следећих ситуација.

1. Неки од аргумената од R,S или T је идентичан са $\mathbf{1}_C$.
2. Неко t_i је идентично са f за $l(z_i) = -1$.
3. Неко t_i је идентично са $\mathbf{1}_A$ за $l(z_i) = 1$.
4. Неко s_i је идентично са f.

5. Неко r_i је идентично са f за $l(x_i) = 1$.

6. неко r_i је идентично са $\mathbf{1}_A$ за $l(x_i) = -1$.

Случајеве 3 и 6 можемо одмах одбацити јер су немогући због једнакости кодомена и домена свих терма у редукцијском низу.

1° Претпоставимо ситуацију 1. Нека је $v \in X_T \cup Y_S \cup Z_R$ минималан у горе дефинисаном поретку, од оних за које важи да је аргумент од T или S или R који му одговара идентичан са $\mathbf{1}_C$. Он не може бити позитиван врх од X_T ни негативан врх од Z_R, јер не постоји низ редукција који преводи f у $\mathbf{1}_C$. Претпоставимо да је $v \equiv x_i$ и $l(x_i) = -1$. Сви остали случајеви су аналогни. Врх x_i не може бити минималан у нашем поретку јер је онда он повезан ивицом из Φ са врхом из G_Φ, те његова компонента повезаности у Φ не садржи позитивне врхове из X_T ни негативне из Y_S, па онда (1) није нормална форма. Дакле $\mu'_\Phi(x_i)$ је непразно. По претпоставци, ни један од аргумената из $\mu'_\Phi(x_i)$ није $\mathbf{1}_C$. Ако су сви аргументи идентични са f, онда (1) није нормална форма. Уколико је један од њих $\mathbf{1}_A$, онда по тврђењу аналогном леми 8 које би се односило на врх x_i, DN-редукција

$$[R(\mathbf{1}_C, f)]\beta(C^{k_\beta})\alpha(C^{k_\alpha})[T(f, \mathbf{1}_C)] \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow (1)$$

садржи корак код кога је у редексу i-ти аргумент од T идентичан са f. С обзиром да не постоји редукција која f преводи у $\mathbf{1}_C$, а $t_i \equiv \mathbf{1}_C$ у (1), ово је немогуће.

2° Претпоставимо да се десио случај 5 и да, по горе показаном, случај 1 не важи. Уколико су сви аргументи од $\mu_\Phi(x_i)$ у (1) идентични са f, онда (1) није нормална форма. Ако је неки од њих $\mathbf{1}_A$, онда по тврђењу аналогном леми 8, DN-редукција

$$[R(\mathbf{1}_C, f)]\beta(C^{k_\beta})\alpha(C^{k_\alpha})[T(f, \mathbf{1}_C)] \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow (1)$$

садржи корак код кога су у контрактуму сви аргументи из $\mu_\Phi(x_i)$ идентични са $\mathbf{1}_A$, па и сам i-ти аргумент од T. С обзиром да је по претпоставци $t_i \equiv f$ у (1) и да не постоји редукција која $\mathbf{1}_A$ преводи у f, то је немогуће.

Сви остали случајеви се аналогно показују.

q.e.d.

Две последње леме нам директно дају

Теорема 2 $P(\Phi, \Psi) \Leftrightarrow \Phi + \Psi$ *нема наизменичних петљи.*

3.3 Елиминација сечења у **CartCl**

У овом одељку ћемо, једном модификацијом Генценовог доказа о елиминацији сечења, показати да се сваки морфизам из слободне картезијанске затворене категорије може конструисати уз ограничено коришћење композиције, што ће касније бити употребљено у испитивању г-ди-природности канонских трансформација произвољне картезијанске затворене категорије (скраћено CCC).

Генценова елиминација сечења је више пута била мотив за резултате из теорије категорија. Главно тврђење овог одељка биће најприближније тврђењу 6.4 из [9], па ће вероватно бити најинтересантније читаоцима који су упознати са резултатима из [9] и због тога ћемо се трудити да називи појмова буду идентични, односно паралелни онима који су ту уведени. Индуктивни аргумент који се користио у доказу тврђења 6.4 из [9] овде не би прошао, па је доказ који дајемо другог типа и далеко приближнији Генценовом доказу за *Hauptsatz* у [7].

На почетку ове главе смо дали једнакосну аксиоматизацију картезијанских затворених категорија, што нам гарантује да за сваки објекат категорије $\mathcal{G}rph$ постоји слободна CCC њиме генерисана. Означимо са **CartCl** слободну картезијанску затворену категорију генерисану над бесконачним скупом *слова.* За њу можемо, као и у првој глави, дефинисати *морфизам-терме* (на језику структурне аксиоматизације) и *морфизме* јој посматрати као класе еквиваленције морфизам-терма посечених по CCC-једнакостима.

Централно место у овом делу ће заузимати морфизам-терми, а не морфизми категорије **CartCl**, што и није случајно јер они представљају "доказе" у нашој логици, док морфизми представљају класе доказа које смо изједначили мотивишући се адјункцијама. Стога ћемо овде морфизам-терме из **CartCl** скраћено звати терми, и пошто се неки други неће појављивати, разлога за забуну неће бити.

$\mathcal{D}f$ Терм ћемо звати *структурним* уколико он припада најмањој класи терма која задовољава доле наведена својства:

($ST1$) За све објекте Q, S и R из **CartCl** следећи терми припадају класи:

$$\mathbf{1}_Q,\ \overleftarrow{\mathbf{b}}_{Q,S,R},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}_{Q,S,R},\ \boldsymbol{\sigma}_Q,\ \boldsymbol{\sigma}^i_Q,\ \boldsymbol{\delta}_Q,\ \boldsymbol{\delta}^i_Q,\ \mathbf{c}_{Q,S},\ \mathbf{k}_Q,\ \mathbf{w}_Q$$

($ST3$) Ако су $f : Q \vdash Q'$ и $g : S \vdash S'$ у класи, онда је и $f{\cdot}g : Q{\cdot}S \vdash Q'{\cdot}S'$ у класи.

($ST5$) Ако су $f : Q \vdash S$ и $g : S \vdash R$ у класи, онда је и $gf : Q \vdash R$ у класи.

Производ-терми и структурни производи категорије **CartCl** су дефинисани као у првој глави, у случају слободних супструкруралних категорија.

$\mathcal{D}f$ *Конструктибилни* терми чине најмању класу терма која задовољава следеће услове:

$(CT1)$ За сваки објекат Q из **CartCl** терм $\mathbf{1}_Q : Q \vdash Q$ је у класи.

$(CT2)$ Ако је $f : Q \vdash S$ у класи и $v : Q' \vdash Q$ структурни производ, онда је и $fv : Q' \vdash S$ у класи.

$(CT3)$ Ако су $f : A \vdash C$ и $g : B \vdash D$ у класи, онда је и $f \cdot g : A \cdot B \vdash C \cdot D$ у класи.

$(CT4)$ Ако је $f : A \cdot B \vdash C$ у класи, онда је и $(\mathbf{1}_B \to f)\boldsymbol{\eta}_{A,B} : A \vdash B \to C$ у класи. Терм $(\mathbf{1}_B \to f)\boldsymbol{\eta}_{A,B}$ ћемо често скраћено означавати са f^*.

$(CT5)$ Ако су $f : A \vdash B$ и $g : C \cdot D \vdash E$ у класи, онда је и $g((\boldsymbol{\epsilon}_{B,C}(\mathbf{1}_{B \to C} \cdot f)) \cdot \mathbf{1}_D) : ((B \to C) \cdot A) \cdot D \vdash E$ у класи.

Лема 13 *Ако је $f : Q \vdash S$ конструктибилан терм, и $v : Q' \vdash Q$ структурни, онда је терм fv једнак неком конструктибилном терму.*

доказ. Због функторијалности множења, терм v је једнак јединици или композицији структурних производа. У првом случају је $fv = f$, а f је конструктибилан по претпоставци. У другом случају је због асоцијативности композиције $fv = (((fv_1)v_2)\ldots v_n)$, где су $v_1, v_2, \ldots, v_n$ структурни производи и $v = v_1 v_2 \ldots v_n$. По $(CT2)$ је fv_1 конструктибилан, па је онда и $(fv_1)v_2$ такав, итд.

q.e.d.

$\mathcal{D}\{$ *Факторе* објекта из **CartCl** дефинишемо рекурзивно (природно) на следећи начин.

1. C је фактор од C за сваки објекат C из **CartCl**.
2. Ако је $C = C_1 \cdot C_2$, онда је сваки фактор од C_1 и сваки фактор од C_2 уједно и фактор од C.

Објекат називамо *простим* уколико он нема правих фактора.

$\mathcal{D}f$ Коваријантан функтор типа **CartCl**$\to$**CartCl** ћемо звати *производ функтор* уколико он припада најмањој класи која задовољава:

1. За сваки објекат C из **CartCl** константан функтор F_C : **CartCl**$\to$**CartCl**, дефинисан на објектима као $F_C(A) = C$ и на морфизмима као $F_C(f : A \vdash B) = \mathbf{1}_C$ је у класи.
2. Јединични функтор $\mathbf{1}_{\mathbf{CartCl}}$: **CartCl**$\to$**CartCl**, дефинисан као $\mathbf{1}_{\mathbf{CartCl}}(A) = A$ и $\mathbf{1}_{\mathbf{CartCl}}(f) = f$ је у класи.

3. Ако су F и G у класи, онда је и функтор H : **CartCl**$\rightarrow$**CartCl**, дефинисан на објектима као $H(A) = F(A){\cdot}G(A)$ и на морфизмима као $H(f) = F(f){\cdot}G(f)$, такође у класи.

За производ функтор ћемо казати да је *са једним аргумент местом*, уколико је у његовој конструкцији клаузула 2. претходне дефиниције искоришћена тачно једном.

Сада ћемо објаснити разлог издвајања конструктибилних терма од осталих. Суштина је у томе да њих можемо узети за кодове доказа у дедуктивном систему Генценовог типа. Систем ћемо звати Γ, и логика коју носи биће конјунктивно-импликативни фрагмент интуиционистичке исказне логике. Језик је такав да се формуле наше логике поклапају са објектима категорије **CartCl**.

Систем Γ је задат следећом схемом аксиоме и правилима извођења (формулација је без сечења):

Аксиома

$$(ax)\ \ A{\vdash}A$$

Структурна правила (F је производ функтор са једним аргумент местом)

$$(\overleftarrow{Ass})\ \ \frac{F(Q{\cdot}(R{\cdot}S)){\vdash}B}{F((Q{\cdot}R){\cdot}S){\vdash}B} \qquad\qquad (\overrightarrow{Ass})\ \ \frac{F((Q{\cdot}R){\cdot}S){\vdash}B}{F(Q{\cdot}(R{\cdot}S)){\vdash}B}$$

$$(Per)\ \ \frac{F(Q{\cdot}R){\vdash}B}{F(R{\cdot}Q){\vdash}B}$$

$$(Con)\ \ \frac{F(Q{\cdot}Q){\vdash}B}{F(Q){\vdash}B} \qquad\qquad (Thn)\ \ \frac{F(\mathrm{I}){\vdash}B}{F(Q){\vdash}B}$$

$$(IL\mathrm{I})\ \ \frac{F(Q){\vdash}B}{F(\mathrm{I}{\cdot}Q){\vdash}B} \qquad\qquad (EL\mathrm{I})\ \ \frac{F(\mathrm{I}{\cdot}Q){\vdash}B}{F(Q){\vdash}B}$$

$$(IR\mathrm{I})\ \ \frac{F(Q){\vdash}B}{F(Q{\cdot}\mathrm{I}){\vdash}B} \qquad\qquad (ER\mathrm{I})\ \ \frac{F(Q{\cdot}\mathrm{I}){\vdash}B}{F(Q){\vdash}B}$$

Операцијска правила

$$(\cdot)\ \ \frac{A{\vdash}C \quad B{\vdash}D}{A{\cdot}B{\vdash}C{\cdot}D}$$

$$(R\rightarrow)\ \ \frac{A{\cdot}B{\vdash}C}{A{\vdash}B{\rightarrow}C} \qquad\qquad (L\rightarrow)\ \ \frac{A{\vdash}B \quad Q{\cdot}R{\vdash}S}{((B{\rightarrow}Q){\cdot}A){\cdot}R{\vdash}S}$$

На стандардан начин дефинишемо *дрво доказа* неког секвента $A{\vdash}B$, као дрво које у чворовима има неке секвенте система Γ, у листовима су му инстанције аксиоме, у корену је секвент $A{\vdash}B$, а прелаз између два непосредно везана чвора се одвија по неком од горњих правила извођења.

$\mathcal{D}f$ За сваки чвор $C{\vdash}D$ у дрвету доказа неког секвента, дефинисаћемо скуп појављивања формула у дрвету, које зовемо *скуп наследника*, за свако појављивање фактора од C и за истакнуто појављивање D тог чвора.

1. Ако је $C{\vdash}D$ лист ($C = D$), онда је скуп наследника за свако појављивање фактора од C празан и скуп наследника од D је празан.

2. Ако је чвор добијен структурним правилом

$$(\overleftarrow{Ass})\ \ \frac{F(Q{\cdot}(R{\cdot}S)){\vdash}B}{F((Q{\cdot}R){\cdot}S){\vdash}B},$$

означимо горњи секвент са γ, а доњи (чвор у дрвету који смо издвојили) са δ. Свако појављивање фактора од појављивања Q у δ има скуп наследника који се састоји од његове копије као појављивања фактора од појављивања Q у γ. Исто за R и S. Појављивање $Q{\cdot}R$ у δ, као и свако појављивање фактора од $F((Q{\cdot}R){\cdot}S)$ у δ које има за фактор то појављивање, има празан скуп наследника. Сва остала појављивања фактора од $F((Q{\cdot}R){\cdot}S)$ у δ имају за скуп наследника синглтон чији је елемент очигледна копија тог фактора у γ. Скуп наследника за означено појављивање B из δ има један елемент, и то означено појављивање B из γ.
Аналогно за сва друга структурна правила.

3. Ако је чвор добијен правилом

$$(\cdot)\ \ \frac{A{\vdash}C \quad B{\vdash}D}{A{\cdot}B{\vdash}C{\cdot}D},$$

означимо леви горњи секвент са γ_1, десни са γ_2 а доњи (чвор који смо издвојили) са δ. Фактор $A{\cdot}B$ из δ има празан скуп наследника, $C{\cdot}D$ такође. Сваки фактор од A из δ (увек се мисли на појављивање) има једночлан скуп наследника који се састоји од његове копије као фактора од A из γ_1, аналогно за факторе од B из δ.

4. Ако је чвор добијен правилом

$$(R \to)\ \ \frac{A{\cdot}B{\vdash}C}{A{\vdash}B{\to}C}$$

онда сваки фактор од A из δ (доњи секвент) има једночлан скуп наследника, чији је елемент његова копија као фактор од A из γ (горњи секвент). Скуп наследника од $B{\to}C$ је празан.

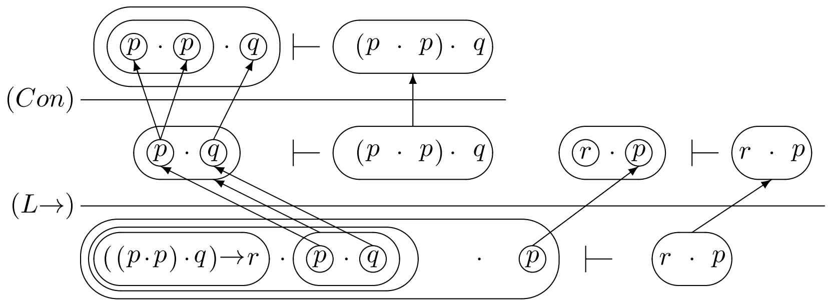
5. Ако је чвор добијен правилом

$$(L \to)\ \ \frac{A{\vdash}B \quad Q{\cdot}R{\vdash}S}{((B{\to}Q){\cdot}A){\cdot}R{\vdash}S}$$

онда фактори $(B{\to}Q)$, $(B{\to}Q){\cdot}A$ и $((B{\to}Q){\cdot}A){\cdot}R$ из δ (доњи секвент), имају празан скуп наследника. Скуп наследника од S из δ има за елемент истакнуто S из γ_2 (десни горњи секвент). Сваки фактор од A из δ има једночлан скуп наследника, чији је елемент његова копија као фактор од A из γ_1 (леви горњи секвент), аналогно за факторе од R из δ.

У следећем примеру стрелица ће повезивати заокружен фактор са сваким чланом скупа његових наследника. Уколико је фактор само заокружен и из њега не полази ни једна стрелица, онда је скуп његових наследника празан.

Пример 9   Посматрајмо следеће дрво доказа и везе појављивања фактора и њихових наследника. Изостављене заграде замењују кругови.



Нека је Δ дрво доказа секвента $A{\vdash}B$. Нека је α_1 појављивање фактора од A, или појављивање B десно од рампе, у корену тог дрвета. Низ $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ такав да је за свако k, $1{\leq}k < n$, $\alpha_{k+1}{\in}\nu(\alpha_k)$, где је $\nu(\alpha_k)$ скуп наследника појављивања α_k у Δ, ћемо звати *ланцем* од α_1. Уколико је $\nu(\alpha_n)$ празно, онда ћемо такав ланац звати *максималним*. *Ранг* од α_1 у Δ дефинишемо као

$$max\{k \mid \text{низ}\, \alpha_1,\ldots,\alpha_k \,\text{је максималан ланац од}\, \alpha_1\}.$$

Сада ћемо, рекурзивно, доделити сваком конструктибилном терму $f : A{\vdash}B$ јединствено дрво доказа $\Delta(f)$ секвента $A{\vdash}B$ у Γ. Нека F доле представља производ функтор са једним аргумент местом.

- Ако је $f{\equiv}\mathbf{1}_Q : Q{\vdash}Q$, онда је $\Delta(f)$ секвент $Q{\vdash}Q$.
- Ако је $f{\equiv}f_1 v : F((Q{\cdot}R){\cdot}S){\vdash}B$ и $v{\equiv}F(\overleftarrow{\mathbf{b}}_{Q,R,S})$, што значи да је терм v, $\overleftarrow{\mathbf{b}}$-производ, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(\overleftarrow{Ass})\ \frac{\Delta(f_1)}{F((Q{\cdot}R){\cdot}S){\vdash}B}$$

- Ако је $f{\equiv}f_1 v : F(Q{\cdot}(R{\cdot}S)){\vdash}B$ и $v{\equiv}F(\overrightarrow{\mathbf{b}}_{Q,R,S})$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(\overrightarrow{Ass})\ \ \frac{\Delta(f_1)}{F(Q{\cdot}(R{\cdot}S)){\vdash}B}$$

- Ако је $f{\equiv}f_1 v : F(R{\cdot}Q){\vdash}B$ и $v{\equiv}F(\mathbf{c}_{R,Q})$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(Per)\ \ \frac{\Delta(f_1)}{F(R{\cdot}Q){\vdash}B}$$

- Ако је $f{\equiv}f_1 v : F(Q){\vdash}B$ и $v{\equiv}F(\mathbf{w}_Q)$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(Con)\ \ \frac{\Delta(f_1)}{F(Q){\vdash}B}$$

- Ако је $f{\equiv}f_1 v : F(Q){\vdash}B$ и $v{\equiv}F(\mathbf{k}_Q)$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(Thn)\ \ \frac{\Delta(f_1)}{F(Q){\vdash}B}$$

- Ако је $f{\equiv}f_1 v : F(\mathrm{I}{\cdot}Q){\vdash}B$ и $v{\equiv}F(\boldsymbol{\sigma}_Q)$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(IL\mathrm{I})\ \ \frac{\Delta(f_1)}{F(\mathrm{I}{\cdot}Q){\vdash}B}$$

- Ако је $f{\equiv}f_1 v : F(Q){\vdash}B$ и $v{\equiv}F(\boldsymbol{\sigma}^i_Q)$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(EL\mathrm{I})\ \ \frac{\Delta(f_1)}{F(Q){\vdash}B}$$

- Ако је $f{\equiv}f_1 v : F(Q{\cdot}\mathrm{I}){\vdash}B$ и $v{\equiv}F(\boldsymbol{\delta}_Q)$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(IR\mathrm{I})\ \ \frac{\Delta(f_1)}{F(Q{\cdot}\mathrm{I}){\vdash}B}$$

- Ако је $f{\equiv}f_1 v : F(Q){\vdash}B$ и $v{\equiv}F(\boldsymbol{\delta}^i_Q)$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(ER\mathrm{I})\ \ \frac{\Delta(f_1)}{F(Q){\vdash}B}$$

- Ако је $f{\equiv}f_1{\cdot}f_2 : A{\cdot}B{\vdash}C{\cdot}D$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(\cdot)\ \ \frac{\Delta(f_1)\qquad\Delta(f_2)}{A{\cdot}B{\vdash}C{\cdot}D}$$

- Ако је $f\equiv(\mathbf{1}_B\to f_1)\boldsymbol{\eta}_{A,B} : A\vdash B\to C$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(R\to)\ \ \frac{\Delta(f_1)}{A\vdash B\to C}$$

- Ако је $f\equiv f_2((\boldsymbol{\epsilon}_{B,Q}(\mathbf{1}_{B\to Q}\cdot f_1))\cdot\mathbf{1}_R) : ((B\to Q)\cdot A)\cdot R\vdash S$, онда је $\Delta(f)$ дрво

$$(L\to)\ \ \frac{\Delta(f_1)\qquad\quad \Delta(f_2)}{((B\to Q)\cdot A)\cdot R\vdash S}$$

Лако се види да је ово додељивање обострано једнозначно.

Пример 10 Конструктибилном терму

$$(((\mathbf{1}_D\to(\mathbf{1}_{B\cdot(C\cdot D)}\overleftarrow{\mathbf{b}}_{B,C,D}))\boldsymbol{\eta}_{B\cdot C,D})((\boldsymbol{\epsilon}_{A,B}(\mathbf{1}_{A\to B}\cdot\mathbf{1}_A))\cdot\mathbf{1}_C))$$

додељујемо дрво доказа:

$$(L\to)\ \ \cfrac{A\vdash A \qquad (R\to)\ \cfrac{(\overleftarrow{Ass})\ \cfrac{B\cdot(C\cdot D)\vdash B\cdot(C\cdot D)}{(B\cdot C)\cdot D\vdash B\cdot(C\cdot D)}}{B\cdot C\vdash D\to(B\cdot(C\cdot D))}}{(\ (A\to B)\cdot A\ )\cdot C\ \vdash\ D\to(B\cdot(C\cdot D))}$$

У њему, заокружена појављивања од $A\to B$, A, C и $D\to(B\cdot(C\cdot D))$, имају редом ранг 1,2,4 и 2.

Примедба *За све објекте Q и S из* **CartCl**, *терм $\boldsymbol{\epsilon}_{Q,S} : (Q\to S)\cdot Q\vdash S$ је једнак неком конструктибилном терму.*

доказ. На основу CCC једнакости добијамо да је

$$\boldsymbol{\epsilon}_{Q,S}=((\mathbf{1}_S\boldsymbol{\delta}_S)((\boldsymbol{\epsilon}_{Q,S}(\mathbf{1}_{Q\to S}\cdot\mathbf{1}_Q))\cdot\mathbf{1}_{\mathrm{I}}))\boldsymbol{\delta}^i_{(Q\to S)\cdot Q},$$

а десна страна једнакости је конструктибилан терм по $(CT2)$, $(CT5)$ и $(CT1)$.

Напоменимо да је у дефиницији картезијанских затворених категорија могуће уместо примтивних $\boldsymbol{\eta}$ морфизама узети као примитивну операцију "звездовања":

$$\frac{f : Q\cdot R\vdash S}{f^* : Q\vdash R\to S}.$$

Такође, из дефиниције и претходне примедбе следи да су за све објекте Q, S и R из **CartCl**, терми

$$\mathbf{1}_Q,\ \overleftarrow{\mathbf{b}}_{Q,R,S},\ \overrightarrow{\mathbf{b}}_{Q,R,S},\ \boldsymbol{\delta}_Q,\ \boldsymbol{\delta}^i_Q,\ \boldsymbol{\sigma}_Q,\ \boldsymbol{\sigma}^i_Q,\ \mathbf{c}_{Q,R},\ \mathbf{k}_Q,\ \mathbf{w}_Q,\ \boldsymbol{\epsilon}_{Q,R}$$

једнаки неким конструктибилним. Из дефиниције још следи да ако су f и g једнаки неким конструктибилним термима, онда је и $f{\cdot}g$ једнак неком конструктибилном, и ако је $f : Q{\cdot}R{\vdash}S$ једнак неком конструктибилном, онда је $f^* : Q{\vdash}R{\to}S$ такође једнак неком конструктибилном терму. Из свега овога закључујемо да уколико желимо да покажемо да је сваки терм из **CartCl** једнак неком конструктибилном, неопходно је и довољно показати да је композиција два конструктибилна терма једнака неком конструктибилном. Да бисмо то показали, послужићемо се Генценовом идејом о елиминацији сечења, и у његовом духу показати следеће тврђење.

Теорема 3 *Нека су $f : A{\vdash}B$ и $g : F(B){\vdash}C$ конструктибилни терми, где је F производ функтор. Тада је терм $gF(f)$ једнак неком конструктибилном терму.*

Јасно је да уколико покажемо ово тврђење имамо и посебан случај када је $F{\equiv}\mathbf{1}_{\mathbf{CartCl}}$ и тада ова теорема каже да за конструктибилне терме $f : A{\vdash}B$ и $g : B{\vdash}C$ је терм gf једнак неком конструктибилном. Случај када је F константан функтор је тривијалан.

доказ. Посматрајмо дрво, које није дрво доказа система Γ због последњег закључивања:

$$\dfrac{\Delta(f)\ \dfrac{\vdots}{f : A{\vdash}B} \qquad\qquad \dfrac{\vdots}{g : F(B){\vdash}C}\ \Delta(g)}{gF(f) : F(A){\vdash}C}$$

Терм $gF(f)$ ћемо звати *микс*, по угледу на Генцена, мада треба водити рачуна да у $F(B)$ могу постојати још нека појављивања од B, као његови фактори, која нису аргументи од F. На пример уколико је $F{\equiv}((C{\cdot}\_){\cdot}B){\cdot}\_$. У Генценовом духу би било да су се сви фактори B од $F(B)$ појавили као аргументи од F. Разлог је што он о томе није морао да води рачуна, док ми уз категоријални приступ то морамо. То је и основна разлика између овог доказа и његовог.

$\mathcal{D}f$ *Леви ранг* микса је ранг истакнутог појављивања B у горњем левом секвенту претходног дрвета, док је *десни ранг* микса једнак максималном рангу појављивања фактора B у истакнутом $F(B)$ у горњем десном секвенту претходног дрвета, који се појављује као аргумент од F (не узимају се увек сви фактори B од $F(B)$ у обзир). *Ранг* микса једнак је суми левог и десног ранга тог микса. Објекат B ћемо звати *микс формулом* и њену *комплексност* дефинишемо као број операцијских симбола у њој.

Доказ теореме ћемо извести индукцијом по ординалу $k\omega + r$, где је k комплексност микс формуле, а r је ранг микса.

$r = 2$

1. Ако је f јединица, онда је $F(f)$ једнак јединици, па је $gF(f)$ једнак g, а g је конструктибилан. Још простије ако је g јединица.

2. Претпоставимо да ни f ни g нису јединице. Пошто је $r = 2$, то f не може бити облика $f_1 v$ за неки структурни производ v. Такође, f не може бити облика $f_2((\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}\cdot f_1))\cdot\mathbf{1})$ за неке конструктибилне f_1 и f_2, јер би опет било $r\geq 3$. Значи преостају нам следећа два случаја

2.1. Ако је $f\equiv f_1\cdot f_2$ за $f_1 : A_1\vdash B_1$ и $f_2 : A_2\vdash B_2$, онда важи

$$\begin{aligned} gF(f) &= gF(f_1\cdot f_2) = gF((f_1\cdot\mathbf{1}_{B_2})(\mathbf{1}_{A_1}\cdot f_2)) \\ &= gF(f_1\cdot\mathbf{1}_{B_2})F(\mathbf{1}_{A_1}\cdot f_2) = (gF_1(f_1))F_2(f_2), \end{aligned}$$

где су F_1 и F_2 очигледни производ функтори. У миксу $gF_1(f_1)$, микс формула B_1 је мање комплексности од $B\equiv B_1\cdot B_2$, па је по индукцијској претпоставци тај микс једнак неком конструктибилном терму g'. Сада је у миксу $g'F_2(f_2)$, микс формула B_2 мање комплексности од B, па је тај микс једнак неком конструктибилном терму коме је онда једнак и $gF(f)$.

Овоме би одговарала следећа трансформација на дрветима доказа:

$$\mathit{mix}\,\dfrac{(\cdot)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A_1\vdash B_1}\quad \dfrac{\vdots}{A_2\vdash B_2}}{A_1\cdot A_2\vdash B_1\cdot B_2}\qquad \dfrac{\vdots}{F(B_1\cdot B_2)\vdash C}}{F(A_1\cdot A_2)\vdash C}\quad\rightsquigarrow\quad \mathit{mix}\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A_2\vdash B_2}\qquad \mathit{mix}\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A_1\vdash B_1}\quad \dfrac{\vdots}{F(B_1\cdot B_2)\vdash C}}{F(A_1\cdot B_2)\vdash C}}{F(A_1\cdot A_2)\vdash C}$$

У десном дрвету оба микса имају нижу комплексност микс формуле.

2.2. Нека је $f\equiv f_1^*$ за $f_1 : A\cdot B_1\vdash B_2$. По претпоставци је $g\not\equiv\mathbf{1}_{B_1\rightarrow B_2}$, и пошто је $r = 2$ и $B\equiv B_1\rightarrow B_2$ прост, то је или

$$g\equiv g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{B_1,B_2}(\mathbf{1}_{B_1\rightarrow B_2}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_E) : ((B_1\rightarrow B_2)\cdot D)\cdot E\vdash C,$$

или је

$$g\equiv g_1 v$$

где је v неки **k**-производ.

2.2.1. Нека је $f\equiv f_1^* : A\vdash B_1\to B_2$ и $g\equiv g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{B_1,B_2}(\mathbf{1}_{B_1\to B_2}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_E) : ((B_1\to B_2)\cdot D)\cdot E\vdash C$, за $g_1 : D\vdash B_1$ и $g_2 : B_2\cdot E\vdash C$. Тада важи:

$$\begin{aligned} gF(f) &= g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{B_1,B_2}(\mathbf{1}_{B_1\to B_2}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_E)((f_1^*\cdot\mathbf{1}_D)\cdot\mathbf{1}_E)\\ &= g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{B_1,B_2}(f_1^*\cdot\mathbf{1}_{B_1})(\mathbf{1}_A\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_E)\\ &= g_2(f_1\cdot\mathbf{1}_E)((\mathbf{1}_A\cdot g_1)\cdot\mathbf{1}_E)\\ &= (g_2F_1(f_1))F_2(g_1), \end{aligned}$$

где је F_1 производ функтор $\_\cdot E$, а F_2 је производ функтор $(A\cdot\_)\cdot E$. Формула B_2 је мање комплексности од $B\equiv B_1\to B_2$, па је по индукцијској претпоставци микс $g_2F_1(f_1)$ једнак неком конструктибилном терму g'. Формула B_1 је мање комплексности од B, па је опет по индукцијској претпоставци микс $g'F_2(g_1)$ једнак неком конструктибилном терму, коме је онда једнак и $gF(f)$.

Овоме би одговарала следећа трансформација на дрветима доказа:

$$\text{mix}\,\cfrac{(R\to)\,\cfrac{\cfrac{\vdots}{A\cdot B_1\vdash B_2}}{A\vdash B_1\to B_2}\qquad (L\to)\,\cfrac{\cfrac{\vdots}{D\vdash B_1}\quad\cfrac{\vdots}{B_2\cdot E\vdash C}}{((B_1\to B_2)\cdot D)\cdot E\vdash C}}{(A\cdot D)\cdot E\vdash C}\quad\rightsquigarrow\quad \text{mix}\,\cfrac{\cfrac{\vdots}{D\vdash B_1}\qquad \text{mix}\,\cfrac{\cfrac{\vdots}{A\cdot B_1\vdash B_2}\quad\cfrac{\vdots}{B_2\cdot E\vdash C}}{(A\cdot B_1)\cdot E\vdash C}}{(A\cdot D)\cdot E\vdash C}$$

2.2.2. Нека је $f\equiv f_1^* : A\vdash B_1\to B_2$ и $g\equiv g_1 v$, где је $v\equiv F_1(\mathbf{k}_{F_2(B)})$ и F_1 је производ функтор са једним аргумент местом, а F_2 је производ функтор. Ово је једина могућност јер је B прост. Тада важи:

$$\begin{aligned} gF(f) &= g_1F_1(\mathbf{k}_{F_2(B)})F_1(F_2(f))\\ &= g_1F_1(\mathbf{k}_{F_2(B)}F_2(f))\\ &= g_1F_1(\mathbf{k}_{F_2(A)}) \end{aligned}$$

Терм $F_1(\mathbf{k}_{F_2(A)})$ је **k**-производ, g_1 је по претпоставци конструктибилан, па је по $(CT2)$ и $g_1F_1(\mathbf{k}_{F_2(A)})$ конструктибилан, коме је једнак микс $gF(f)$.

$r > 2$

3. Претпоставимо да је десни ранг већи од 1.

3.1. Нека је $g \equiv g_1 v$, где је v структурни производ.

3.1.1. Нека је $f : A \vdash B$ и $g : F(B) \vdash C$ и $g \equiv g_1 v$, где је v $\overrightarrow{\mathbf{b}}$-производ. Претпоставимо да је $B = B_1 \cdot (B_2 \cdot B_3)$ и $F(\_) = E \cdot (\_ \cdot \_)$. Сви остали случајеви би се слично разматрали.

3.1.1.1. Нека је $v \equiv h \cdot \mathbf{1}_{B \cdot B}$, где је $h : E \vdash E_1$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$-производ. Тада важи:

$$\begin{aligned} gF(f) &= g_1(h \cdot \mathbf{1}_{B \cdot B})(\mathbf{1}_E \cdot (f \cdot f)) \\ &= g_1(\mathbf{1}_{E_1} \cdot (f \cdot f))(h \cdot \mathbf{1}_{A \cdot A}) \end{aligned}$$

Микс $g_1(\mathbf{1}_{E_1} \cdot (f \cdot f))$, има исту комплексност као и $gF(f)$, али му је ранг нижи за један, па је по индукцијској претпоставци једнак неком конструктибилном терму g'. Терм $h \cdot \mathbf{1}_{A \cdot A}$ је $\overrightarrow{\mathbf{b}}$-производ, па је $g'(h \cdot \mathbf{1}_{A \cdot A})$ конструктибилан терм коме је једнак микс $gF(f)$.

Овоме би одговарала следећа трансформација на дрветима доказа:

$$mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A \vdash B} \qquad (\overrightarrow{Ass})\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{E_1 \cdot (B \cdot B) \vdash C}}{E \cdot (B \cdot B) \vdash C}}{E \cdot (A \cdot A) \vdash C} \quad \rightsquigarrow \quad (\overrightarrow{Ass})\,\dfrac{mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A \vdash B} \qquad \dfrac{\vdots}{E_1 \cdot (B \cdot B) \vdash C}}{E_1 \cdot (A \cdot A) \vdash C}}{E \cdot (A \cdot A) \vdash C}$$

3.1.1.2. Нека је $v \equiv \overrightarrow{\mathbf{b}}_{E,B,B}$ (овај случај је сасвим сличан претходном, с тим што је тада улогу одиграла функторијалност множења, а сада ће природност $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ стрелица). Тада важи:

$$\begin{aligned} gF(f) &= g_1 \overrightarrow{\mathbf{b}}_{E,B,B}(\mathbf{1}_E \cdot (f \cdot f)) \\ &= g_1((\mathbf{1}_E \cdot f) \cdot f) \overrightarrow{\mathbf{b}}_{E,A,A} \end{aligned}$$

Микс $g_1((\mathbf{1}_E \cdot f) \cdot f)$ је исте комплексности као и $gF(f)$, али му је ранг нижи за један, па је по индукцијској претпоставци једнак неком конструктибилном терму g'. Терм $g' \overrightarrow{\mathbf{b}}_{E,A,A}$ је по $(CT2)$ конструктибилан и њему је једнак микс $gF(f)$.

Овоме случају одговара следећа трансформација дрвета доказа:

$$
mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B}\qquad (\overrightarrow{Ass})\dfrac{\dfrac{\vdots}{(E\cdot B)\cdot B\vdash C}}{E\cdot(B\cdot B)\vdash C}}{E\cdot(A\cdot A)\vdash C}
\quad\rightsquigarrow\quad
(\overrightarrow{Ass})\dfrac{mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B}\qquad\dfrac{\vdots}{(E\cdot B)\cdot B\vdash C}}{(E\cdot A)\cdot A\vdash C}}{E\cdot(A\cdot A)\vdash C}
$$

3.1.1.3. Нека је $v\equiv\mathbf{1}_E\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B,B_1,B_2\cdot B_3}$. Тада важи:

$$
\begin{aligned}
gF(f) &= g_1(\mathbf{1}_E\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B,B_1,B_2\cdot B_3})(\mathbf{1}_E\cdot(f\cdot f))\\
&= g_1(\mathbf{1}_E\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B,B_1,B_2\cdot B_3})(\mathbf{1}_E\cdot(f\cdot\mathbf{1}_B))(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot f))\\
&= g_1(\mathbf{1}_E\cdot(\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B,B_1,B_2\cdot B_3}(f\cdot(\mathbf{1}_{B_1}\cdot\mathbf{1}_{B_2\cdot B_3}))))(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot f))\\
&= g_1(\mathbf{1}_E\cdot(((f\cdot\mathbf{1}_{B_1})\cdot\mathbf{1}_{B_2\cdot B_3})\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B_1,B_2\cdot B_3}))(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot f))\\
&= g_1(\mathbf{1}_E\cdot((f\cdot\mathbf{1}_{B_1})\cdot\mathbf{1}_{B_2\cdot B_3}))(\mathbf{1}_E\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B_1,B_2\cdot B_3})(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot f))
\end{aligned}
$$

Микс $g_1(\mathbf{1}_E\cdot((f\cdot\mathbf{1}_{B_1})\cdot\mathbf{1}_{B_2\cdot B_3}))$ има исту комплексност као и $gF(f)$, али му је ранг нижи за један, па је по индукцијској претпоставци једнак неком конструктибилном терму g'. По $(CT2)$ је и $g'(\mathbf{1}_E\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B_1,B_2\cdot B_3})$ конструктибилан терм. Микс $(g'(\mathbf{1}_E\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{A,B_1,B_2\cdot B_3}))(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot f))$ има исту комплексност и леви ранг као $gF(f)$, али му је десни ранг једнак јединици, па је по основној претпоставци тачке 3, ранг тог микса нижи од ранга микса $gF(f)$, те је по индукцијској претпоставци он једнак неком конструктибилном терму коме је онда једнак и $gF(f)$.

Овом случају одговара следећа трансформација дрвета доказа:

$$
mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B}\qquad (\overrightarrow{Ass})\dfrac{\dfrac{\vdots}{E\cdot((B\cdot B_1)\cdot(B_2\cdot B_3))\vdash C}}{E\cdot(B\cdot B)\vdash C}}{E\cdot(A\cdot A)\vdash C}
\quad\rightsquigarrow\quad
mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B}\qquad (\overrightarrow{Ass})\dfrac{mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B}\qquad\dfrac{\vdots}{E\cdot((B\cdot B_1)\cdot(B_2\cdot B_3))\vdash C}}{E\cdot((A\cdot B_1)\cdot(B_2\cdot B_3))\vdash C}}{E\cdot(A\cdot B)\vdash C}}{E\cdot(A\cdot A)\vdash C}
$$

3.1.1.4. Нека је $v\equiv\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_B\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B_1,B_2,B_3})$. Тада важи:

$$
\begin{aligned}
gF(f) &= g_1(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_B\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B_1,B_2,B_3}))(\mathbf{1}_E\cdot(f\cdot f))\\
&= g_1(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_B\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B_1,B_2,B_3}))(\mathbf{1}_E\cdot(f\cdot\mathbf{1}_B))(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot f))\\
&= g_1(\mathbf{1}_E\cdot(f\cdot\mathbf{1}_{(B_1\cdot B_2)\cdot B_3}))(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B_1,B_2,B_3}))(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot f))
\end{aligned}
$$

Микс $g_1(\mathbf{1}_E\cdot(f\cdot\mathbf{1}_{(B_1\cdot B_2)\cdot B_3}))$ има ранг нижи за један од микса $gF(f)$, а комплексност им је иста, па је по индукцијској претпоставци једнак неком конструктибилном терму g'. Терм $g'(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B_1,B_2,B_3}))$ је по $(CT2)$ такође конструктибилан. Микс $(g'(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}_{B_1,B_2,B_3})))(\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_A\cdot f))$ има комплексност и леви ранг исти као и $gF(f)$, а десни ранг му је једнак 1, па је због основне претпоставке тачке 3 на њега могуће применити индукцијску претпоставку по којој је он једнак неком конструктибилном терму коме је онда једнак и микс $gF(f)$.

Овом случају одговара следећа трансформација дрвета доказа:

$$
mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \qquad (\overrightarrow{Ass})\dfrac{\dfrac{\vdots}{E\cdot(B\cdot((B_1\cdot B_2)\cdot B_3))\vdash C}}{E\cdot(B\cdot B)\vdash C}}{E\cdot(A\cdot A)\vdash C}
\quad\rightsquigarrow\quad
mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \qquad (\overrightarrow{Ass})\dfrac{mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \quad \dfrac{\vdots}{E\cdot(B\cdot((B_1\cdot B_2)\cdot B_3))\vdash C}}{E\cdot(A\cdot((B_1\cdot B_2)\cdot B_3))\vdash C}}{E\cdot(A\cdot B)\vdash C}}{E\cdot(A\cdot A)\vdash C}
$$

Сви други случајеви функтора F и микс формуле B би се решили по аналогији са неким од наведених.

3.1.2. Случај када је $g\equiv g_1 v$ где је v, $\overleftarrow{\mathbf{b}}$-производ, је у потпуности аналоган претходном.

3.1.3. Нека је $g\equiv g_1 v$, где је v, $\mathbf{c}$-производ. Као и у случају 3.1.1. претпоставимо специјалну форму функтора F и микс формуле B, наиме нека је $B = B_1\cdot B_2$ и $F(\_) = E\cdot(\_\cdot\_)$. То су форме на које се све ситуације могу суштински свести.

3.1.3.1. Случај када је $v\equiv h\cdot\mathbf{1}_{B\cdot B}$, где је h $\mathbf{c}$-производ, је аналоган случају 3.1.1.1.

3.1.3.2. Случај када је $v\equiv\mathbf{c}_{E,B\cdot B}$ је аналоган са 3.1.1.2.

3.1.3.3. Случај када је $v\equiv\mathbf{1}_E\cdot(\mathbf{1}_B\cdot\mathbf{c}_{B_1,B_2})$ је аналоган са 3.1.1.4.

Случајеви када је v неки $\mathbf{w}$, $\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^i$, $\boldsymbol{\delta}$ или $\boldsymbol{\delta}^i$ производ би се разматрали по аналогији са претходним. Ово би се све могло боље формализовати нпр. у духу [3] (конфронтирани и неконфронтирани), с тим што би такав приступ захтевао гломазне дефиниције које би појеле идеју доказа.

3.2. Нека је $g\equiv g_1\cdot g_2 : D_1\cdot D_2\vdash C_1\cdot C_2$. По претпоставци тачке 3 је десни ранг микса већи од један, па мора бити $D_1 = F_1(B)$ и $D_2 = F_2(B)$, за производ функторе F_1 и F_2, за које је $F(\_) = F_1(\_)\cdot F_2(\_)$, при чему неки од њих може бити и константан. Тада важи:

$$gF(f) = (g_1\cdot g_2)(F_1(f)\cdot F_2(f)) = (g_1F_1(f))\cdot(g_2F_2(f))$$

Микс $g_1F_1(f)$ и микс $g_2F_2(f)$ имају ранг нижи бар за један од микса $gF(f)$, а комплексност им је иста па су онда они редом једнаки неким конструктибилним термима g' и g''. По $(CT3)$ терм $g'\cdot g''$ је конструктибилан, и њему је једнак микс $gF(f)$.
У овом случају се дрво

$$mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \qquad (\cdot)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{F_1(B)\vdash C_1} \quad \dfrac{\vdots}{F_2(B)\vdash C_2}}{F(B)\vdash C}}{F(A)\vdash C}$$

трансформише у дрво

$$(\cdot)\,\dfrac{mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \quad \dfrac{\vdots}{F_1(B)\vdash C_1}}{F_1(A)\vdash C_1} \qquad mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \quad \dfrac{\vdots}{F_2(B)\vdash C_2}}{F_2(A)\vdash C_2}}{F(A)\vdash C}$$

3.3. Нека је $g\equiv g_1^* : F(B)\vdash C_1\rightarrow C_2$. Тада важи:

$$gF(f) = g_1^*F(f) = (g_1(F(f)\cdot\mathbf{1}_{C_1}))^*$$

Уколико са F_1 означимо производ функтор за који је $F_1(f) = F(f)\cdot\mathbf{1}_{C_1}$, онда микс $g_1F_1(f)$ има ранг нижи за један од микса $gF(f)$, комплексност им је иста, па је онда по индукцијској претпоставци он једнак неком конструктибилном терму h. По $(CT4)$, терм h^* је конструктибилан, и њему је по претходном једнак микс $gF(f)$.

Овоме би одговарала следећа трансформација дрвета:

$$
mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B}\qquad (R\to)\dfrac{\dfrac{\vdots}{F(B)\cdot C_1\vdash C_2}}{F(B)\vdash C_1\to C_2}}{F(A)\vdash C_1\to C_2}
\quad\rightsquigarrow\quad
(R\to)\dfrac{mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B}\qquad \dfrac{\vdots}{F(B)\cdot C_1\vdash C_2}}{F(A)\cdot C_1\vdash C_2}}{F(A)\vdash C_1\to C_2}
$$

3.4. Претпоставимо да је $g{\equiv}g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_G) : ((D\to E)\cdot H)\cdot G\vdash C$, за неке конструктибилне $g_1 : H\vdash D$ и $g_2 : E\cdot G\vdash C$.

По претпоставци да је десни ранг микса $gF(f)$ већи од један, то је или $B = (D\to E)\cdot H$ и $F(\_) = \_\cdot F_1(\_)$ и F_1 није константан производ функтор и $F_1(B) = G$ (овај случај ћемо означити са 3.4.1.), или је $B = D\to E$ и $F(\_) = (\_\cdot F_1(\_))\cdot F_2(\_)$ и бар један од производ функтора F_1 или F_2 није константан (ово ћемо означити као случај 3.4.2), или је $F(\_) = (\mathbf{1}_{D\to E}\cdot F_1(\_))\cdot F_2(\_)$ и бар један од F_1 или F_2 није константан (ово ће бити случај 3.4.3.).

3.4.1. Нека је $B = (D\to E)\cdot H$, $F(\_) = \_\cdot F_1(\_)$ и $F_1(B) = G$. Тада важи:

$$
\begin{aligned}
gF(f) &= g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_G)(f\cdot F_1(f))\\
&= g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_G)(\mathbf{1}_B\cdot F_1(f))(f\cdot\mathbf{1}_{F_1(A)})\\
&= g_2(\mathbf{1}_E\cdot F_1(f))((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_G)(f\cdot\mathbf{1}_{F_1(A)})
\end{aligned}
$$

Уколико са F_3 означимо производ функтор за који важи $F_3(f) = \mathbf{1}_E\cdot F_1(f)$, онда микс $g_2F_3(f)$ има ранг нижи бар за један од микса $gF(f)$, а комплексност им је иста, па је по индукцијској претпоставци он једнак неком конструктибилном терму g'. По $(CT5)$, терм $g''{\equiv}g'((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_G)$ је конструктибилан. Микс $g''(f\cdot\mathbf{1}_{F_1(A)})$ има десни ранг једнак један, леви ранг и комплексност су му исти као код $gF(f)$, па је по индукцијској претпоставци он једнак неком конструктибилном терму коме је по претходном једнак и микс $gF(f)$.
У овом случају се дрво

$$
mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B}\qquad (L\to)\dfrac{\dfrac{\vdots}{H\vdash D}\qquad \dfrac{\vdots}{E\cdot F_1(B)\vdash C}}{B\cdot F_1(B)\vdash C}}{A\cdot F_1(A)\vdash C}
$$

трансформише у дрво

$$
mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \qquad (L\to)\dfrac{\dfrac{\vdots}{H\vdash D} \qquad mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \quad \dfrac{\vdots}{E\cdot F_1(B)\vdash C}}{E\cdot F_1(A)\vdash C}}{((D\to E)\cdot H)\cdot F_1(A)\vdash C}}{A\cdot F_1(A)\vdash C}
$$

3.4.2. Нека је $B = D\to E$ и $F(\_) = (\_\cdot F_1(\_))\cdot F_2(\_)$. Тада важи:

$$
\begin{aligned}
gF(f) &= g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_G)((f\cdot F_1(f))\cdot F_2(f))\\
&= g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g_1))\cdot\mathbf{1}_G)((\mathbf{1}_B\cdot F_1(f))\cdot\mathbf{1}_G)(\mathbf{1}_{B\cdot F_1(A)}\cdot F_2(f))((f\cdot\mathbf{1}_{F_1(A)})\cdot\mathbf{1}_{F_2(A)})\\
&= g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot(g_1F_1(f))))\cdot\mathbf{1}_G)(\mathbf{1}_{B\cdot F_1(A)}\cdot F_2(f))((f\cdot\mathbf{1}_{F_1(A)})\cdot\mathbf{1}_{F_2(A)})\\
&= g_2(\mathbf{1}_E\cdot F_2(f))((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot(g_1F_1(f))))\cdot\mathbf{1}_{F_2(A)})((f\cdot\mathbf{1}_{F_1(A)})\cdot\mathbf{1}_{F_2(A)})
\end{aligned}
$$

Микс $g_2(\mathbf{1}_E\cdot F_2(f))$ и микс $g_1F_1(f)$ су нижег ранга од микса $gF(f)$, а исте комплексности, па је по индукцијској претпоставци први једнак неком конструктибилном терму g'', а други неком конструктибилном терму g'. Терм $g''((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g'))\cdot\mathbf{1}_{F_2(A)})$ је конструктибилан по $(CT5)$. Микс $g''((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g'))\cdot\mathbf{1}_{F_2(A)})((f\cdot\mathbf{1}_{F_1(A)})\cdot\mathbf{1}_{F_2(A)})$ има десни ранг једнак један, леви ранг и комплексност су му исти као код $gF(f)$, па је он по индукцијској претпоставци једнак неком конструктибилном терму коме је онда једнак и микс $gF(f)$.
У овом случају се дрво

$$
mix\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \qquad (L\to)\dfrac{\dfrac{\vdots}{F_1(B)\vdash D} \quad \dfrac{\vdots}{E\cdot F_2(B)\vdash C}}{(B\cdot F_1(B))\cdot F_2(B)\vdash C}}{(A\cdot F_1(A))\cdot F_2(A)\vdash C}
$$

трансформише у дрво

$$
\mathit{mix}\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \qquad (L\to)\,\dfrac{\mathit{mix}\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \quad \dfrac{\vdots}{F_1(B)\vdash D}}{F_1(A)\vdash D} \qquad \mathit{mix}\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A\vdash B} \quad \dfrac{\vdots}{E\cdot F_2(B)\vdash C}}{E\cdot F_2(A)\vdash C}}{(B\cdot F_1(A))\cdot F_2(A)\vdash C}}{(A\cdot F_1(A))\cdot F_2(A)\vdash C}
$$

3.4.3. Претпоставимо да је $F(\_)$ облика $(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot F_1(\_))\cdot F_2(\_)$, за неке производ функторе F_1 и F_2 од којих бар један није константан. Тада важи:

$$
\begin{aligned}
gF(f) &= g_2((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot g_1))\cdot \mathbf{1}_G)((\mathbf{1}_{D\to E}\cdot F_1(f))\cdot F_2(f)) \\
&= g_2(\mathbf{1}_E\cdot F_2(f))((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot(g_1F_1(f))))\cdot \mathbf{1}_{F_2(A)})
\end{aligned}
$$

Микс $g_2(\mathbf{1}_E\cdot F_2(f))$ и микс $g_1F_1(f)$ су као и малопре, по индукцијској претпоставци, једнаки констртуктибилним термима g'' и g'. Терм $g''((\boldsymbol{\epsilon}_{D,E}(\mathbf{1}_{D\to E}\cdot(g'))\cdot \mathbf{1}_{F_2(A)})$ је по $(CT5)$ конструктибилан и њему је једнак микс $gF(f)$. Трансформација дрвета доказа је слична као у претходном примеру.

4. Десни ранг је једнак један што значи да је леви већи од један.

4.1. Претпоставимо да је $f\equiv f_1v$ и да је v структурни производ. Тада због функторијалности F важи:

$$
gF(f) = gF(f_1)F(v)
$$

Микс $gF(f_1)$ има ранг нижи за један од ранга микса $gF(f)$, комплексност им је иста јер је B кодомен и од f и од f_1, па је по индукцијској претпоставци он једнак неком конструктибилном терму g'. Пошто је $F(v)$ структурни терм, то је по леми 13, терм $g'F(v)$ једнак неком конструктибилном терму коме је онда једнак и микс $gF(f)$. Овоме би одговарала следећа трансформација дрвета:

$$
\mathit{mix}\,\dfrac{(Str)\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A_1\vdash B}}{A\vdash B} \qquad \dfrac{\vdots}{F(B)\vdash C}}{F(A)\vdash C}
\quad\rightsquigarrow\quad
\dfrac{\mathit{mix}\,\dfrac{\dfrac{\vdots}{A_1\vdash B} \quad \dfrac{\vdots}{F(B)\vdash C}}{F(A_1)\vdash C}}{\dfrac{\text{више примена } (Str)}{F(A)\vdash C}}
$$

где је (Str) неко од превила $(\overleftarrow{Ass})$, $(\overrightarrow{Ass})$, (Per), (Con) или (Thn).

4.2. Због претпоставке да је леви ранг већи од један, f не може да буде облика $f_1{\cdot}f_2$.

4.3. Из истог разлога f не може да буде облика f_1^*.

4.4. Претпоставимо да је f облика $f_2((\boldsymbol{\epsilon}_{A_2,A_3}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{A_4})$ за $f_1 : A_1{\vdash}A_2$, $f_2 : A_3{\cdot}A_4{\vdash}B$ и $g : F_B{\vdash}C$. Тада важи:

$$\begin{aligned} gF(f) &= gF(f_2((\boldsymbol{\epsilon}_{A_2,A_3}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{A_4})) \\ &= gF(f_2)F((\boldsymbol{\epsilon}_{A_2,A_3}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{A_4}) \end{aligned}$$

Микс $gF(f_2)$ је нижег ранга за један од микса $gF(f)$. Комплексност им је иста, па је по индукцијској претпоставци он једнак неком конструктибилном терму g'. Пошто је F производ функтор, то је терм $F((\boldsymbol{\epsilon}_{A_2,A_3}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{A_4})$ једнак терму облика

$$F_k((\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{A_4})\, F_{k-1}((\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{A_4}) \ldots F_1((\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{A_4})$$

где је сваки F_i, $1{\leq}i{\leq}k$, производ функтор са једним аргумент местом. За свако i, $1{\leq}i{\leq}k$, терм $F_i((\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{A_4})$ је једнак терму облика

$$s_i'((\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{D_i})s_i,$$

где су s_i и s_i', неки структурни терми (За њихову грађу, од основних терма, довољни су **b** и **c**. Ово следи из тога што су **b** и **c** природни изоморфизми, и што су F_i производ функтори.) Дакле

$$gF(f) = g's_k'((\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{D_k})s_k s_{k-1}'\ldots s_1'((\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{D_1})s_1$$

Терм $g's_k'$ је по леми 13 једнак неком конструктибилном g''. По $(CT5)$ је $g''((\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{1}_{A_2\to A_3}{\cdot}f_1)){\cdot}\mathbf{1}_{D_k})$ конструктибилан терм, и тако даље. На крају закључујемо да је $gF(f)$ једнак конструктибилном терму.
У овом случају се дрво

$$mix\dfrac{(L{\to})\dfrac{\dfrac{\vdots}{A_1{\vdash}A_2} \qquad \dfrac{\vdots}{A_3{\cdot}A_4{\vdash}B}}{((A_2{\to}A_3){\cdot}A_1){\cdot}A_4{\vdash}B} \qquad \dfrac{\vdots}{F(B){\vdash}C}}{F(A){\vdash}C}$$

трансформише у дрво

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots}{A_1\vdash A_2}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{A_1\vdash A_2}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{A_3\cdot A_4\vdash B}\quad \dfrac{\vdots}{F(B)\vdash C}}{F(A_3\cdot A_4)\vdash C}\,mix}{\text{низ } (Ass) \text{ и } (Per)}}{A_3\cdot D_k\vdash C}}{((A_2\rightarrow A_3)\cdot A_1)\cdot D_k\vdash C}\,(L\rightarrow)}{\text{низ } (Ass) \text{ и } (Per)}}{A_3\cdot D_{k-1}\vdash C}}{((A_2\rightarrow A_3)\cdot A_1)\cdot D_{k-1}\vdash C}\,(L\rightarrow)
$$

$$\vdots$$

Овиме смо завршили индукцију а тиме и доказ теореме 3.

q.e.d.

Последица *Сваки морфизам-терм из* **CartCl** *једнак је неком конструктибилном.*

3.4 Канонске трансформације у CCC

Овај одељак ће бити паралела одељку 1.3 прве главе. Надаље ћемо сматрати да је $\mathcal{A}$ произвољна картезијанска затворена категорија. Проширујући оно што смо урадили у 1.3, означимо са $\mathcal{F}$ скуп терма добијених од симбола $\Box$ и I, помоћу бинарних операција $\cdot$ и $\rightarrow$. Елементе тог скупа ћемо, као и раније, звати *формама функтора*.

Дефинишимо пресликавање које формама додељује функторе типа

$$\mathcal{A}^{l_1}\times\mathcal{A}^{l_2}\times\ldots\times\mathcal{A}^{l_n}\rightarrow\mathcal{A},$$

за неке $l_1,l_2,\ldots,l_n\in\{-1,1\}$, где је $\mathcal{A}^1\equiv\mathcal{A}$, а $\mathcal{A}^{-1}\equiv\mathcal{A}^{op}$.

1. Терму $\Box$ додељујемо функтор $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}$.

2. Терму I додељујемо функтор $I:\mathcal{A}^0\rightarrow\mathcal{A}$ који јединoм објекту из $\mathcal{A}^0$ додељује објекат I из $\mathcal{A}$.

3. Уколико је терму $\boldsymbol{F}$ придружен функтор $F:\mathcal{A}^{l_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{l_m}\rightarrow\mathcal{A}$, а терму $\boldsymbol{G}$ функтор $G:\mathcal{A}^{s_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{s_n}\rightarrow\mathcal{A}$, онда је терму $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}$ придружен

функтор $H : \mathcal{A}^{l_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{l_m}\times\mathcal{A}^{s_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{s_n}\rightarrow\mathcal{A}$, такав да је за сваку $m+n$-торку $(A_1,\ldots,A_{m+n})$ објеката из $\mathcal{A}$,

$$H(A_1,\ldots,A_{m+n}) =^{df} F(A_1,\ldots,A_m)\cdot G(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}),$$

и за сваку $m+n$-торку $(f_1,\ldots,f_{m+n})$ морфизама из $\mathcal{A}$,

$$H(f_1,\ldots,f_{m+n}) =^{df} F(f_1,\ldots,f_m)\cdot G(f_{m+1},\ldots,f_{m+n}).$$

Терму $\boldsymbol{F}\rightarrow\boldsymbol{G}$ је тада придружен функтор

$$J : \mathcal{A}^{-l_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{-l_m}\times\mathcal{A}^{s_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{s_n}\rightarrow\mathcal{A},$$

такав да је за сваку $m+n$-торку $(A_1,\ldots,A_{m+n})$ објеката из $\mathcal{A}$,

$$J(A_1,\ldots,A_{m+n}) =^{df} F(A_1,\ldots,A_m)\rightarrow G(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}),$$

и за сваку $m+n$-торку $(f_1,\ldots,f_{m+n})$ морфизама из $\mathcal{A}$,

$$J(f_1,\ldots,f_{m+n}) =^{df} F(f_1,\ldots,f_m)\rightarrow G(f_{m+1},\ldots,f_{m+n}).$$

Наравно и овде, у општем случају, две различите форме могу задавати исти функтор, с тим што је у **CartCl** ово придруживање 1-1. Као и у 1.3, када кажемо да је функтор F из $\mathcal{F}$, то значи да је он слика неке форме из $\mathcal{F}$ и често ћемо га изједначавати са том формом.

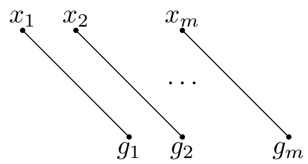
Ако је $F : \mathcal{A}^{l_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{l_m}\rightarrow\mathcal{A}$ за $l_i\in\{-1,1\}$, функтор из $\mathcal{F}$, тада дефинишемо X_F $(Y_F, Z_F,\ldots)$ као уређену m-торку $(x_1,\ldots,x_m)$ $((y_1,\ldots,y_m)$, $(z_1,\ldots,z_m),\ldots)$, са придруженом функцијом l, за коју важи да је $l(x_i) = l_i$.

$\mathcal{D}f$ *Основне канонске трансформације.*
Нека су $T : \mathcal{A}^{t_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{t_m}\rightarrow\mathcal{A}$, $S : \mathcal{A}^{s_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{s_n}\rightarrow\mathcal{A}$ и $R : \mathcal{A}^{r_1}\times\ldots\times\mathcal{A}^{r_m}\rightarrow\mathcal{A}$ функтори из $\mathcal{F}$.

а) Означимо са $\mathbf{1}_T$ скуп морфизама $\{\mathbf{1}_{T(A_1,\ldots,A_m)}|(A_1,\ldots,A_m)\in\mathcal{A}^m\}$. Нека је Γ ди-трансформацијски граф са врховима из X_T и Y_S (G је овде празан скуп), чије ивице повезују врх x_i са врхом y_i за свако i, $1\leq i\leq m$. Лако се види да је тада $\mathbf{1}_T : T\xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet}T$.

По аналогији са тачкама *б)–з)* из дефиниције основних канонских трансформација из 1.3 јасно је како бисмо дефинисали скупове $\boldsymbol{\sigma}_T$, $\boldsymbol{\sigma}^i_T$, $\boldsymbol{\delta}_T$, $\boldsymbol{\delta}^i_T$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}_{T,S,R}$, $\overleftarrow{\mathbf{b}}_{T,S,R}$, $\mathbf{c}_{T,S}$ и $\mathbf{w}_T$, и то да они представљају сада г-ди-природне трансформације са графовима који се не би суштински разликовали од оних које смо дали у 1.3, само би врхови сада имали знакове.

и) Дефинишимо $\mathbf{k}_T =^{df} \{\mathbf{k}_{T(A_1,\ldots,A_m)} \mid (A_1,\ldots A_m)\in\mathcal{A}^m\}$. Нека је Γ, ди-трансформацијски граф дат дијаграмом



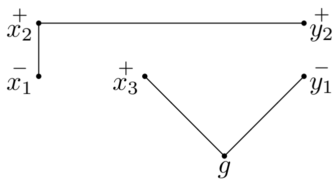
где је $X_T = (x_1, \dots, x_m)$, $l(x_i) = t_i$, $Y_I = \emptyset$ и $G = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$. Лако се показује да је тада $\mathbf{k}_T : T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} I$.

j) Означимо са $\boldsymbol{\epsilon}_{T,S}$ скуп $\{\boldsymbol{\epsilon}_{T(A_1,\dots,A_m),S(A_{m+1},\dots,A_{m+n})} \mid (A_1, \dots, A_{m+n}) \in \mathcal{A}^{m+n}\}$. Нека је Γ ди-трансформацијски граф чији су врхови из $X_{(T\to S)\cdot T}$ и Y_S, и чије ивице спајају i-ти, $1 \leq i \leq m$, врх из $X_{(T\to S)\cdot T}$ са $m+n+i$-тим врхом из $X_{(T\to S)\cdot T}$, и j-ти, $m < j \leq m+n$, врх из $X_{(T\to S)\cdot T}$ са $j-m$-тим врхом из Y_S. Тада је $\boldsymbol{\epsilon}_{T,S} : (T\to S)\cdot T \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} S$.

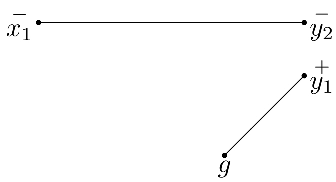
к) Означимо са $\boldsymbol{\eta}_{T,S}$ скуп $\{\boldsymbol{\eta}_{T(A_1,\dots,A_m),S(A_{m+1},\dots,A_{m+n})} \mid (A_1, \dots, A_{m+n}) \in \mathcal{A}^{m+n}\}$. Нека је Γ ди-трансформацијски граф чији су врхови из X_S и $Y_{T\to(S\cdot T)}$, и чије ивице спајају i-ти, $1 \leq i \leq n$, врх из X_S са $m+i$-тим врхом из $Y_{T\to(S\cdot T)}$, и j-ти, $1 \leq j \leq m$, врх из $Y_{T\to(S\cdot T)}$ са $m+n+i$-тим врхом из $Y_{T\to(S\cdot T)}$. Тада је $\boldsymbol{\eta}_{T,S} : S \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} T\to(S\cdot T)$.

Слично као и у 1.3, од основних канонских трансформација ћемо правити канонске трансформације категорије $\mathcal{A}$. Нека су $T : \mathcal{A}^{t_1} \times \dots \times \mathcal{A}^{t_m} \to \mathcal{A}$, $S : \mathcal{A}^{s_1} \times \dots \times \mathcal{A}^{s_n} \to \mathcal{A}$, $R : \mathcal{A}^{r_1} \times \dots \times \mathcal{A}^{r_l} \to \mathcal{A}$ и $P : \mathcal{A}^{p_1} \times \dots \times \mathcal{A}^{p_k} \to \mathcal{A}$, функтори из $\mathcal{F}$. Нека је Φ ди-трансформацијски граф са врховима из X_T, Y_R и G_Φ, а Ψ, ди-трансформацијски граф са врховима из X_S, Y_P и G_Ψ. Означимо са $\Phi\cdot\Psi$ ди-трансформацијски граф чији су врхови из $X_{T\cdot S}$, $Y_{R\cdot P}$ и дисјунктне уније $G_\Phi \uplus G_\Psi$, с тим што првих m врхова из $X_{T\cdot S}$ сматрамо редом копијама врхова из X_T, преосталих n врхова из $X_{T\cdot S}$ сматрамо копијама врхова из X_S и тако даље, и чије ивице сада представљају копије ивица графова Φ и Ψ. Ово бисмо слободно могли назвати *сумом* графова Φ и Ψ. Са $\Phi\to\Psi$ означимо ди-трансформацијски граф чији су врхови из $X_{R\to S}$, $Y_{T\to P}$ и $G_\Phi \uplus G_\Psi$, с тим што овде првих l врхова из $X_{R\to S}$ сматрамо редом копијама врхова из Y_R и тако даље, и чије ивице онда представљају копије ивица графова Φ и Ψ. Ово бисмо могли звати *изврнутом сумом* графова Φ и Ψ.

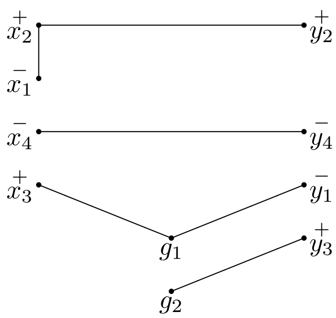
Пример 11 Ако је граф Φ дат дијаграмом



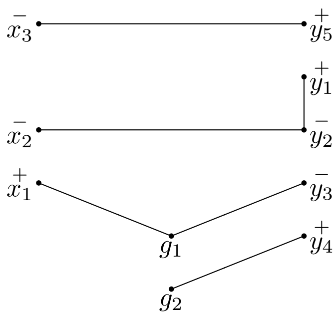
а граф Ψ дијаграмом



Тада је $\Phi{\cdot}\Psi$ дат дијаграмом



а $\Phi{\rightarrow}\Psi$ је дат дијаграмом



Нека су $\alpha : T \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} R$ и $\beta : S \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} P$, две г-ди-природне трансформације. Дефинишимо $\alpha{\cdot}\beta$ као скуп

$$\{\alpha(A_1,\ldots,A_{k_\Phi}){\cdot}\beta(B_1,\ldots,B_{k_\Psi}) \mid (A_1,\ldots,B_{k_\Psi}){\in}\mathcal{A}^{k_\Phi+k_\Psi}\}$$

где је k_Φ, број компоненти повезаности графа Φ, а k_Ψ је број компоненти повезаности графа Ψ. Из функторијалности множења се једноставно закључује да је онда $\alpha{\cdot}\beta$ г-ди-природна трансформација из $T{\cdot}S$ у $R{\cdot}P$ са графом $\Phi{\cdot}\Psi$. На исти начин закључујемо да је тада и скуп $\alpha{\to}\beta$, дефинисан као

$$\{\alpha(A_1,\ldots,A_{k_\Phi}){\to}\beta(B_1,\ldots,B_{k_\Psi}) \mid (A_1,\ldots,B_{k_\Psi}){\in}\mathcal{A}^{k_\Phi+k_\Psi}\}$$

г-ди-природна трансформација из $R{\to}S$ у $T{\to}P$ са графом $\Phi{\to}\Psi$.

Сада можемо дефинисати канонске трансформације категорије $\mathcal{A}$.

1. Основне канонске трансформације у $\mathcal{A}$ су канонске трансформације.

2. Ако је α канонска трансформација између T и R са графом Φ и β канонска трансформација између S и P са графом Ψ, онда је $\alpha{\cdot}\beta$ канонска трансформација између $T{\cdot}S$ и $R{\cdot}P$ са графом $\Phi{\cdot}\Psi$.

3. Ако је α канонска трансформација између T и R са графом Φ и β канонска трансформација између S и P са графом Ψ, онда је $\alpha{\to}\beta$ канонска трансформација између $R{\to}S$ и $T{\to}P$ са графом $\Phi{\to}\Psi$.

4. Ако је α канонска трансформација између T и S са графом Φ и β канонске трансформација између S и R са графом Ψ, онда је $\beta\alpha$ канонска трансформација између T и R са графом $\Psi{*}\Phi$ (види дефиницију у 3.2).

Приметимо да је као и у случају категорија са множењем, свака канонска трансформација означена неким термом, с тим што два различита терма могу задавати исти скуп морфизама као канонску трансформацију. Уколико терм који задаје канонску трансформацију одговара конструктибилном, онда ћемо такву трансформацију звати *конструктибилном* канонском трансформацијом.

Наравно, ми још увек не можемо говорити о природности свих канонских трансформација јер не знамо да ли је композиција две г-ди-природне канонске трансформације увек г-ди-природна. Да бисмо ово показали искористићемо оно што смо развијали у одељку 3.2. Ово све има за циљ да кохеренција у картезијанским затвореним категоријама говори о јединствености "природне трансформације" над датим графом као што је то био случај и у првој глави.

Пример 12 Посматрајмо канонске трансформације

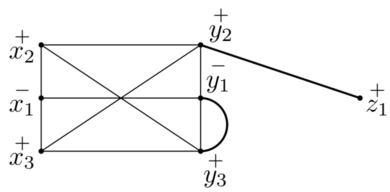
$$(\mathbf{1}_F{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box})\overleftarrow{\mathbf{b}}_{F,F,\Box}(\mathbf{1}_{F\cdot F}{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box})\overleftarrow{\mathbf{b}}_{F\cdot F,F,\Box}((\mathbf{w}_F{\cdot}\mathbf{1}_F){\cdot}\mathbf{1}_\Box)(\mathbf{w}_F{\cdot}\mathbf{1}_\Box) : F{\cdot}\Box \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} F{\cdot}\Box$$

и

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box} : F{\cdot}\Box \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} \Box,$$

где је F функтор $\Box{\to}\Box$ из $\mathcal{F}$.

Може се показати да су оне г-ди-природне уколико прву, као композицију, посматрамо са заградама асоцираним удесно, и амалгамација $\Phi+\Psi$ је представљена дијаграмом



У њој је присутна наизменична петља (врхови су јој y_1 и y_2), па по теореми 2 из 3.2 следи да није свака композиција г-ди-природних трансформација са оваквом амалгамацијом графова г-ди-природна. То ипак не мора да значи да композиција ових трансформација картезијанске затворене категорије није г-ди-природна. Приметимо да се свака компонента ове композиције

$$\boldsymbol{\epsilon}_{A,A}(\mathbf{1}_{A\to A}\boldsymbol{\epsilon}_{A,A})\overleftarrow{\mathbf{b}}(\mathbf{1}{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{A,A})\overleftarrow{\mathbf{b}}((\mathbf{w}_{A\to A}{\cdot}\mathbf{1}){\cdot}\mathbf{1})(\mathbf{w}_{A\to A}{\cdot}\mathbf{1}_A)$$

може представити термом

$$(\boldsymbol{\epsilon}_{A,A}(\mathbf{1}_{A\to A}{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{A,A})(\mathbf{1}_{A\to A}{\cdot}(\mathbf{1}_{A\to A}{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{A,A})))(\overleftarrow{\mathbf{b}}\,\overleftarrow{\mathbf{b}}((\mathbf{w}_{A\to A}{\cdot}\mathbf{1}){\cdot}\mathbf{1})(\mathbf{w}_{A\to A}{\cdot}\mathbf{1}_A)).$$

Посматрајмо зато композицију канонских трансформација

$$\overleftarrow{\mathbf{b}}_{F,F,F\cdot\Box}\overleftarrow{\mathbf{b}}_{F\cdot F,F,\Box}((\mathbf{w}_F{\cdot}\mathbf{1}_F){\cdot}\mathbf{1}_\Box)(\mathbf{w}_F{\cdot}\mathbf{1}_\Box) : F{\cdot}\Box \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} F{\cdot}(F{\cdot}(F{\cdot}\Box))$$

и

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box}(\mathbf{1}_F{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box})(\mathbf{1}_F{\cdot}(\mathbf{1}_F{\cdot}\boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box})) : F{\cdot}(F{\cdot}(F{\cdot}\Box)) \xrightarrow[\Delta]{\bullet\bullet} \Box.$$

Прва је г-ди-природна по резултатима из прве главе, а другу ако посматрамо као композицију асоцирану удесно, примећујемо да графови придружени компонентама не стварају наизменичне петље, па је онда и она г-ди-природна. Пошто никоја два врха из $Y_{F\cdot(F\cdot(F\cdot\Box))}$ нису спојена ивицом из Γ, то амалгамација графова $\Gamma+\Delta$ нема наизменичних петљи, па је по теореми 2 из 3.2, ова композиција г-ди-природна. Лако се закључује да је почетна трансформација њен подскуп, а одатле да је и она г-ди-природна.

Идеја из претходног примера биће и основа за показивање г-ди-природности свих канонских трансформација категорије $\mathcal{A}$.

Лема 14 *Свака конструктибилна канонска трансформација је г-ди-природна.*

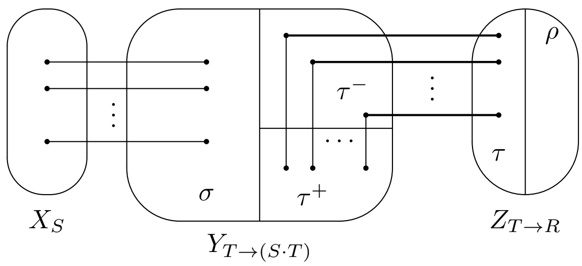
доказ. Доказ ћемо извести индукцијом по сложености конструктибилног терма γ који задаје ту трансформацију.

1. Уколико је $\gamma \equiv \mathbf{1}_T$, онда је јасно да је γ г-ди-природна трансформација из T у T (ово би била база наше индукције).

2. Уколико је $\gamma \equiv \beta\alpha$, где су β и α конструктибилне трансформације и још терм α одговара структурном производу, онда по индукцијској претпоставци имамо да је за неке функторе T, S и R из $\mathcal{F}$ и неке графове Φ и Ψ, $\alpha : T \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} S$ и $\beta : S \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} R$. Из претпоставке о терму α следи да у Y_S не постоје два врха спојена ивицом из Φ, па онда у амалгамацији $\Phi + \Psi$ не може бити наизменичних петљи. По теореми 2 из 3.2 следи да је трансформација γ г-ди-природна.

3. Уколико је $\gamma \equiv \alpha \cdot \beta$, где су α и β конструктибилне канонске трансформације, па по индукцијској претпоставци и г-ди-природне, онда је γ г-ди природна као производ две такве.

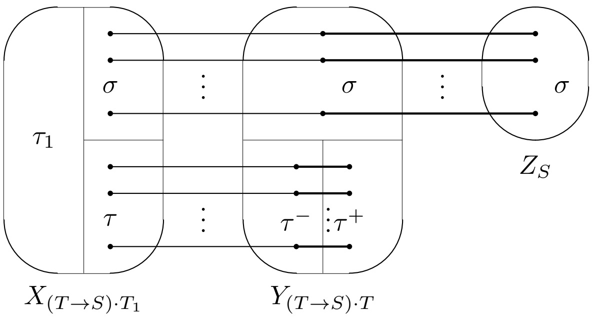
4. Нека је $\gamma \equiv (\mathbf{1}_T \to \alpha)\boldsymbol{\eta}_{T,S}$ за неку конструктибилну трансформацију α. По индукцијској претпоставци је α г-ди-природна, па је онда таква и $\mathbf{1}_T \to \alpha$. Значи имамо две г-ди-природне трансформације $\boldsymbol{\eta}_{T,S} : S \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} T \to (S \cdot T)$ и $\mathbf{1}_T \to \alpha : T \to (S \cdot T) \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} T \to R$ чија је композиција γ. Посматрајмо следећи дијаграм који представља амалгамацију $\Phi + \Psi$ без ивица графа Ψ које потичу од графа трансформације α.



Овде смо са σ, τ^- и τ^+ означили редом оне врхове из $Y_{T \to (S \cdot T)}$ који одговарају аргументима од S, аргументима од првог појављивања T у $T \to (S \cdot T)$ и аргументима другог појављивања T у $T \to (S \cdot T)$. Скуп врхова из $Z_{T \to R}$ који одговара аргументима од T из $T \to R$ смо означили са τ, док је са ρ означен скуп врхова из $Z_{T \to R}$ који одговара аргументима од R из $T\to R$.

Претпоставимо да су два врха y_i и y_j из $Y_{T\to(S\cdot T)}$ повезана ивицом из Ψ која припада некој наизменичној петљи. Онда они морају бити из $\sigma\cup\tau^+$. Сваки врх који је ивицом из Φ повезан са y_i је онда или у X_S или у τ^-. Уколико је у X_S, онда он сигурно није део наизменичне петље, па у нашој петљи онда мора учествовати врх y_t из τ^-. Свака ивица из Ψ која садржи врх из τ^- има други врх у τ, па онда y_t не може припадати наизменичној петљи, што значи да наизменичних петљи у $\Phi+\Psi$ уопште и нема. Сада по теореми 2 из 3.2 следи да је $\gamma : S \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} (T\to R)$, где је граф Γ једнак $\Psi{*}\Phi$.

5. Претпоставимо да је $\gamma\equiv\beta((\boldsymbol{\epsilon}_{T,S}(\mathbf{1}_{T\to S}\cdot\alpha))\cdot\mathbf{1}_R)$ за неке конструктибилне трансформације α и β. По индукцијској претпоставци су α и β г-ди-природне, па је таква и $\mathbf{1}_{T\to S}\cdot\alpha$. Посматрајмо сада композицију г-ди-природних трансформација $\mathbf{1}_{T\to S}\cdot\alpha : (T\to S)\cdot T_1 \xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet} (T\to S)\cdot T$ и $\boldsymbol{\epsilon}_{T,S} : (T\to S)\cdot T \xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet} S$. Посматрајмо следећи дијаграм који представља амалгамацију $\Phi+\Psi$ без ивица графа Φ које потичу од графа трансформације α.



Овде смо са σ у сваком случају означили врхове који одговарају аргументима од S, са τ, врхове из $X_{(T\to S)\cdot T_1}$ који одговарају аргументима од T у $(T\to S)\cdot T_1$, са τ^+, врхове из $Y_{(T\to S)\cdot T}$ који одговарају аргументима другог T у $(T\to S)\cdot T$, са τ^-, врхове из $Y_{(T\to S)\cdot T}$ који одговарају аргументима првог T у $(T\to S)\cdot T$, и са τ_1, врхове из $X_{(T\to S)\cdot T_1}$ који одговарају аргументима од T_1 у $(T\to S)\cdot T_1$.

Претпоставимо да се врхови y_i и y_j из $Y_{(T\to S)\cdot T}$ налазе на ивици графа Φ која учествује у наизменичној петљи. Оба врха тада морају припадати τ^+. Претпоставимо да је врх y_r везан ивицом из Ψ са врхом y_i. Он тада мора припадати τ^- и не може се налазити на наизменичној петљи пошто свака ивица из Φ која почиње у њему, завршава у τ, значи ван $Y_{(T\to S)\cdot T}$. Ово потврђује да у $\Phi + \Psi$ нема наизменичних петљи, па по теореми 2 из 3.2 следи да је $\boldsymbol{\epsilon}_{T,S}(\mathbf{1}_{T\to S}\cdot\alpha) : (T\to S)\cdot T_1 \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} S$, где је граф Γ једнак $\Psi{*}\Phi$. Приметимо још да никоја два врха из Z_S нису спојена ивицом из Γ. Одавде закључујемо да је и $(\boldsymbol{\epsilon}_{T,S}(\mathbf{1}_{T\to S}\cdot\alpha))\cdot\mathbf{1}_R$ г-ди-природна трансформација са неким графом Γ' који има особину да никоја два врха из $Y_{S\cdot R}$ нису спојена ивицом у њему. Уколико претпоставимо да г-ди-природна трансформација β има граф Θ, онда је јасно да амалгамација $\Gamma' + \Theta$ нема наизменичних петљи, те је опет по теореми 2 из 3.2, трансформација γ г-ди-природна.

q.e.d.

Теорема 4 *Свака канонска трансформација из $\mathcal{A}$ је г-ди-природна.*

доказ. Нека је α терм канонске трансформације у $\mathcal{A}$ из T у S са графом Γ. Нека је $\boldsymbol{\alpha}$ канонска трансформација у **CartCl** задата истим термом. Дефинишимо као и у 1.4 *представника* трансформације $\boldsymbol{\alpha}$ као морфизам-терм из **CartCl**

$$t{\equiv}\alpha(p_1,\ldots,p_k) : T(p_{\pi(x_1)},\ldots,p_{\pi(x_m)}){\vdash}S(p_{\pi(y_1)},\ldots,p_{\pi(y_n)}),$$

где је k број компоненти повезаности графа Γ, $p_1,\ldots,p_k$ су различита слова из скупа генератора објеката **CartCl**, а π је функција која сваком врху из Γ додељује број његове компоненте повезаности. По последици теореме 3 из 3.3, постоји конструктибилан терм t', једнак терму t. Као и у 1.4 можемо дефинисати придруживање које сваком морфизам-терму из **CartCl** додељује канонску трансформацију у **CartCl**. Нека је $\boldsymbol{\beta}$ канонска трансформација у **CartCl** између T и S са графом Γ' придружена терму t'. Сада не можемо тврдити да је $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, па чак ни да је $\Gamma = \Gamma'$ (видети лему 1 из друге главе), али из слободе категорије **CartCl** и из тога што је t представник трансформације $\boldsymbol{\alpha}$, следи да је $\boldsymbol{\alpha}{\subset}\boldsymbol{\beta}$. Јасно је да је $\boldsymbol{\beta}$ конструктибилна канонска трансформација и означимо са β "конструктибилан" терм који је задаје. Због слободе **CartCl** следи да је у $\mathcal{A}$ полазна трансформација задата термом α подскуп трансформације задате термом β. По претходној леми последња трансформација је г-ди-природна, па је онда таква и она задата термом α (ово нема смисла посебно показивати јер се лако види).

q.e.d.

Последица *Свака канонска трансформација у $\mathcal{A}$ је динатурална.*

Покажимо још само зашто у **CartCl** једнакост морфизам-терма не повлачи

једнакост придружених канонских трансформација.
Посматрајмо терме

$$\mathbf{w}_{p\to(q\cdot p)}\boldsymbol{\eta}_{p,q} : q\vdash(p\to(q\cdot p))\cdot(p\to(q\cdot p))$$

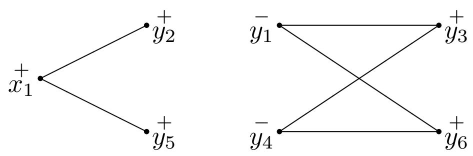
и

$$(\boldsymbol{\eta}_{p,q}\cdot\boldsymbol{\eta}_{p,q})\mathbf{w}_q : q\vdash(p\to(q\cdot p))\cdot(p\to(q\cdot p)).$$

Њихова једнакост следи из ($\mathbf{w}$). Првом је придружена трансформација

$$\alpha : \Box\xrightarrow[\Phi]{\bullet\bullet}(\Box\to(\Box\cdot\Box))\cdot(\Box\to(\Box\cdot\Box)),$$

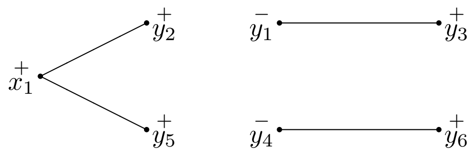
где је граф Φ представљен дијаграмом



док је другом терму придружена трансформација

$$\beta : \Box\xrightarrow[\Psi]{\bullet\bullet}(\Box\to(\Box\cdot\Box))\cdot(\Box\to(\Box\cdot\Box)),$$

где је граф Ψ представљен дијаграмом



Одавде закључујемо да трансформацији β припада, на пример, морфизам $(\boldsymbol{\eta}_{p,q}\cdot\boldsymbol{\eta}_{r,q})\mathbf{w}_q$, за различита слова p и r, који не припада трансформацији α. Лако се показује да је $\alpha\subset\beta$.

Ово нам говори о томе да за картезијанску затворену категорију $\mathcal{A}$, категорија чији су објекти функтори из $\mathcal{F}$, а морфизми канонске трансформације из $\mathcal{A}$, није картезијанска затворена категорија у општем случају. Може се показати да она јесте симетрична моноидална затворена категорија (видети [9] или [4])

3.5 Губитак кохеренције у CCC

Пошто смо у претходном одељку утврдили природност свих канонских трансформација произвољне картезијанске затворене категорије, сада можемо кохеренцију у CCC посматрати, као и раније, као "комутирање" графова природних трансформација. Наиме можемо дати следећу дефиницију која би у потпуности проширивала ону дату у првој глави.

$\mathcal{D}f$ За картезијанску затворену категорију $\mathcal{A}$ кажемо да је *кохерентна* уколико за сваке две канонске трансформације

$$\alpha, \beta : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} G$$

важи $\alpha = \beta$.

Главни резултати из [9] и [18] говоре да ово није у потпуности испуњено у симетричним моноидалним затвореним категоријама, али су дати довољни (у [9]), односно неопходни и довољни (у [18]) услови за форме функтора F и G, када импликација

$$\alpha, \beta : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} G \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta$$

важи у произвољној симетричној моноидалној затвореној категорији. Услови се увек односе на функторе који у својој форми имају константу I и то сада даје наду да ће у CCC ипак важити потпуна кохеренција због изоморфизама $A \rightarrow I \cong I$ који овде важи и практично дозвољава елиминацију константе I из форми функтора. Ипак, као што ћемо ускоро видети, кохеренције у CCC неће бити. Овакав резултат је најављен у [16]. И поред тога што су неке ствари у том чланку брзоплето закључене, и што није јасно шта се прецизно под кохеренцијом ту подразумева, он нас је у приличној мери мотивисао за оно што се појављује у претходним одељцима ове главе, и што је најважније, дао је контрапример којим ћемо се и овде послужити.

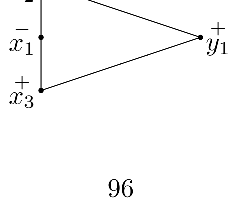
Посматрајмо низ канонских трансформација инспирисан контрапримером из [16]:

$$\alpha_1 = \boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box}(\mathbf{1}_F \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box})\overleftarrow{\mathbf{b}}(\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{1}_\Box) : F \cdot \Box \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} \Box$$

$$\alpha_2 = \boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box}(\mathbf{1}_F \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box})(\mathbf{1}_F \cdot (\mathbf{1}_F \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\Box,\Box}))\overleftarrow{\mathbf{b}}\,\overleftarrow{\mathbf{b}}((\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{1}_F) \cdot \mathbf{1}_\Box)(\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{1}_\Box) : F \cdot \Box \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} \Box$$

$$\vdots$$

где је F као и раније функтор $\Box \rightarrow \Box$ из $\mathcal{F}$, а граф Γ је дат дијаграмом



Кохеренција у свим картезијанским затвореним категоријама би повлачила да је на пример $\alpha_1(p) = \alpha_2(p)$ у **CartCl**, што је лако проверити да није тачно (интерпретацијом **CartCl** у $\mathcal{S}\rceil\sqcup$).

Овај пример нам показује да нема ни смисла тражити услове за форме функтора из $\mathcal{F}$ за које би кохеренција важила, јер би ограничења елиминисала готово све. Остаје још могућност формирања услова за графове који би обезбеђивали кохеренцију. У том смислу већ постоје резултати као што су на пример они из [1], које бисмо могли превести у неке довољне услове за граф Γ при којима импликација

$$\alpha, \beta : F \xrightarrow[\Gamma]{\bullet\bullet} G \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta$$

важи, што би представљало некакву ограничену кохеренцију, какву нам дају [9] и [18].

Наравно, може се поставити и питање шта би требало додати затвореним категоријама да би им се кохеренција вратила. Таква становишта можемо наћи у [15].

Са једне стране овакав исход по питању кохеренције у CCC можемо посматрати као богатсво ових категорија, односно са становишта категоријалне теорије доказа, ово нам говори о могућностима креирања заиста различитих доказа у одговарајућим логикама, те би се то могло схватити као предност а не мана ових категорија. Наше је мишљење да је то оно што их чини суштински нетривијалним.

References

[1] Babaev, A. A., Solov'ev, S. V., 1982, A Coherence Theorem for Canonical Morphisms in Cartesian Closed Categories, *Journal of Soviet Mathematics* 20, pp. 2263-2279 (Translated from *Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta A. Steklova AN SSSR*, vol.88, pp. 3-29, 1979.)

[2] Došen, K., and Petrić, Z., 1996, Modal Functional Completeness, *Proof Theory of Modal Logic*, H. Wansing ed., pp. 167-211, Kluwer Academic Publishers.

[3] Došen, K., and Petrić, Z., 1994, Cartesian Isomorphisms are Symmetric Monoidal: A Justification of Linear Logic (manuscript).

[4] Došen, K., and Petrić, Z., 1995, Isomorphic Objects in Symmetric Monoidal Closed Categories, to appear in *Mathematical Structures in Computer Science.*

[5] Dubuc, E. J., Street, R., 1970, Dinatural transformations, *Reports of the Midwest Category Seminar*, vol. IV, H. Applegate ed., pp. 126-138, vol. 137, Lecture Notes in Mathematics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer.

[6] Eilenberg, S., and Kelly, G.M., 1966, A Generalization of the Functorial Calculus, *Journal of Algebra* 3, pp. 366-375.

[7] Gentzen, G., 1935, Untersuchungen uber das logische Schliessen, *Matematische Zeitschrift* 39, pp. 176-210, 405-431 (English transl. in *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M.E. Szabo ed., North-Holland, Amsterdam, 1969, pp. 68-128).

[8] Jacobs, B., 1994, Semantics of weakening and contraction, *Annals of Pure and Applied Logic* 69, pp. 73-106.

[9] Kelly, G.M., and MacLane, S., 1971, Coherence in Closed Categories, *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 1, no. 1, pp. 97-140.

[10] Lambek, J., and Scott, P. J., 1986, *Introduction to Higher-Order Categorical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

[11] MacLane, S., 1963, Natural associativity and commutativity, *Rice University Studies* 49, pp. 28-46.

[12] MacLane, S., 1971, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlin.

[13] MacLane, S., ed., 1972, *Coherence in Categories*, Lecture Notes in Mathematics, 281, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[14] Schroeder-Heister, P., and Došen, K., ed., 1993, *Substructural Logics*, Studies in Logic and Computation, 2, Claredon Press, Oxford.

[15] Soloviev, S. V., 1990, On the Conditions of Full Coherence in Closed Categories, *Journal of Pure and Applied Algebra* 69, pp. 301-329.

[16] Szabo, M.E., 1975, A Counter-Example to Coherence in Cartesian Closed categories, *Canadian Mathematical Bulletin* 18 (1), pp. 111-114.

[17] Troelstra, A. S., Schwichtenberg, H., 1996, *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

[18] Voreadou, R., 1977, Coherence and non-commutative diagrams in closed categories, *Memoirs of the American Mathematical Society* 182, pp. 1-93.

Index